

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE ARQUITECTURA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



TESIS

*“ LA APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN EL DISEÑO
ARQUITECTÓNICO: EL APROVECHAMIENTO DE LOS
RECURSOS GEOMÉTRICOS DE NUESTRA ÉPOCA ”*

PRESENTA:

ARQ. RICARDO ERNESTO GONZÁLEZ ZAMBRANO

PARA OBTENER GRADO DE
MAESTRÍA EN DISEÑO ARQUITECTÓNICO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ADOLFO BENITO NARVAEZ TIJERINA

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

SEPTIEMBRE DE 2007

Índice

Índice	p. 2
Introducción	p. 5
Justificación	p. 6
Marco teórico	p. 7
Objetivo general	p. 10
Objetivos específicos	p. 10
Enfoque	p. 10
Alcances y limitaciones	p. 10
Preguntas de investigación	p. 10
Hipótesis	p. 11
Capítulo I: Tipos de geometría en la historia	p. 12
1.1. Geometría Euclidiana.....	p. 12
1.2. Geometría analítica.....	p. 16
1.3. Geometría descriptiva.....	p. 25
1.4. Geometrías no-euclidianas.....	p. 28
1.5. Geometría diferencial.....	p. 33
1.6. Topología.....	p. 34
1.7. Geometría Fractal.....	p. 37
1.8. Resumen del capítulo I.....	p. 46
Capítulo II: Geometría convencional en arquitectura	p. 47
2.1. Dos dimensiones.....	p. 47
2.1.1. Polígonos.....	p. 47
2.2. Tres dimensiones.....	p. 48
2.2.1. Sólidos primarios.....	p. 48
2.2.2. Otros sólidos.....	p. 50
2.2.3. Poliedros.....	p. 51
2.2.4. Deltaedros.....	p. 52
2.2.5. Sólidos platónicos (poliedros regulares).....	p. 54
2.2.6. Sólidos de Arquímedes (poliedros irregulares).....	p. 55
2.2.7. Sólidos de Catalán.....	p. 58
2.2.8. Sólidos Kepler-Poinsot.....	p. 64
2.2.9. Sólidos de Johnson.....	p. 66
2.3. Resumen del capítulo II.....	p. 77
Capítulo III: Geometría poco convencional en arquitectura	p. 78
3.1. Dos dimensiones.....	p. 78
3.1.1. Rotor.....	p. 78
3.1.2. Cicloide.....	p. 78
3.1.3. Hipocicloide.....	p. 79
3.1.4. Epicloide.....	p. 80

3.1.5. Espirales.....	p. 81
3.2. Tres dimensiones.....	p. 86
3.2.1. Cinta de Möbius.....	p. 86
3.2.2. Superficie de Boy.....	p. 87
3.2.3. Bonete cruzado.....	p. 87
3.2.4. Superficie romana.....	p. 88
3.2.5. Botella de Klein.....	p. 89
3.2.6. Paraguas de Whitney.....	p. 89
3.2.7. Toro de revolución elíptico.....	p. 90
3.2.8. Pseudoesfera.....	p. 90
3.2.9. Superficie de Dini.....	p. 91
3.2.10. Helicoide.....	p. 92
3.2.11. Superficie de Möbius.....	p. 92
3.2.12. Superficies Mínimas.....	p. 93
3.2.13. Sólidos de revolución.....	p. 96
3.3. Resumen del capítulo III.....	p. 97

Capítulo IV: Arquitectura con referencias geométricas directas..... p. 98

4.1. Geometría euclidiana.....	p. 98
4.1.1. Cicloide.....	p. 98
4.1.2. Gráficas de funciones trigonométricas.....	p.100
4.1.3. Sólidos.....	p.101
4.1.3.1. Cilindro.....	p.101
4.1.3.2. Esfera.....	p.104
4.1.3.3. Cono.....	p.105
4.1.3.4. Pirámide.....	p.105
4.1.3.5. Prisma.....	p.106
4.1.3.6. Sólidos de revolución.....	p.112
4.1.4. Poliedros.....	p.113
4.1.4.1. Poliedros compuestos.....	p.114
4.1.5. Cúpulas geodésicas.....	p.115
4.2. Geometría analítica.....	p.121
4.2.1. Parábola.....	p.121
4.3. Superficies cuadráticas.....	p.123
4.3.1. Elipsoides.....	p.123
4.3.2. Paraboloides hiperbólicos.....	p.127
4.3.3. Cilindro elíptico.....	p.136
4.3.4. Conoide.....	p.137
4.4. Geometría no-euclidiana.....	p.138
4.4.1. Geometría esférica.....	p.138
4.5. Geometría descriptiva.....	p.140
4.6. Geometría diferencial.....	p.141
4.7. Topología.....	p.142
4.7.1. Cinta de Möbius.....	p.142
4.8. Fractales.....	p.146
4.9. Resumen del capítulo IV.....	p.147

Capítulo V: Arquitectura conformada por mezclas de diferentes sistemas geométricos	p.148
5.1. 30 St Mary Axe (Swiss Re)	p.148
5.2. Torre Agbar	p.151
5.3. Torres Petronas	p.153
5.4. Ayuntamiento de Londres	p.155
5.5. Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias	p.158
5.6. Sede del Commerzbank	p.160
5.7. Casa Guardiola	p.161
5.8. Monumento a los judíos asesinados en Europa	p.163
5.9. Competencia FSM East River (Torres Eisenman)	p.166
5.10. Torso Girado	p.168
5.11. Museo Guggenheim de Nueva York	p.168
5.12. Foro	p.170
5.13. Pabellón de Zurich	p.171
5.14. Sede Central de Renault	p.171
5.15. Liberty Place	p.172
5.16. Hotel Hesperia	p.172
5.17. Estadio Olímpico de Atenas	p.173
5.18. Restaurante Bauschänzli	p.175
5.19. Centro Cultural Tjibaou	p.176
5.20. Museo Judío	p.177
5.21. Villa en Burdeos	p.178
5.22. LF1 Landesgartenschau	p.179
5.23. Parque la Villette	p.180
5.24. Resumen del capítulo V	p.181
Capítulo VI: Arquitectura conformada por usos generalizados de Geometría	p.182
6.1. Círculos y ejes en composición de formas ortogonales	p.182
6.1.1. Tadao Ando	p.182
6.1.2. Richard Meier	p.184
6.2. Formas geométricas en campanarios de Mario Botta	p.186
6.3. Resumen del capítulo VI	p.187
Conclusiones	p.188
Anexos	p.194
Tablas e Imágenes	p.194
Truncamiento de poliedros	p.195
Conjunto de Mandelbrot	p.204
Teorías físicas sobre las dimensiones del espacio	p.213
Relación de imágenes, fotografías y planos	p.216
Bibliografía	p.234

Introducción

En el diseño arquitectónico, pese a la opinión general de que es una actividad muy subjetiva, existen áreas que son bastante objetivas y de constante aplicación. Una de las más conocidas es la geometría, por ser parte de las matemáticas. La geometría es inherente en la arquitectura; así como lo son la tecnología, la composición, la proporción, la escala, el estilo, el espacio, la forma, la estructura, etc. Aún en los casos en que un arquitecto no tome en cuenta ningún criterio geométrico en su diseño, se puede realizar un análisis de cómo fue aplicada la geometría.

Así como el ingeniero es quien conoce de matemáticas para poder realizar el cálculo estructural de un edificio, el arquitecto es quien conoce de geometría para poder dar forma a los espacios. Esto no quiere decir que sean materias exclusivas de cada profesión, sino que por lo general ambos se especializan en áreas diferentes debido al tipo de trabajo que realizan. El arquitecto debe estar al tanto de los avances que ha tenido la geometría a lo largo de los siglos y debe de ponerla en práctica al momento de diseñar.

Por ser un área de las matemáticas, la geometría ha tenido avances a lo largo de la historia. Del mismo modo en que el análisis de la tecnología constructiva puede utilizarse para saber cuándo fue diseñado un edificio, también se puede hacer tomando en cuenta la geometría que se aplicó en el mismo.

En la actualidad, al ver los diferentes edificios diseñados, se observa cómo los objetivos estéticos de la arquitectura de nuestra época parecen enfocarse a otras áreas. La mayoría de las veces se recurre a temas geométricos que difieren poco a los empleados en el Partenón (y ya han pasado más de dos milenios desde su construcción). Si los geómetras de esta época han superado por mucho a los de la antigüedad, ¿por qué no aprovechar los nuevos recursos que existen? Aún cuando el simple hecho de utilizar la geometría más avanzada en la arquitectura no lleve necesariamente a un buen diseño que solucione las necesidades del cliente, es necesario estar actualizados en este tema.

Es importante conocer qué familias geométricas existen y qué figuras geométricas pertenecen a cada una de ellas. Cada familia geométrica tiene sus propios principios que establecen un orden de ciertas características. En los diferentes proyectos que se tengan que diseñar, es importante considerar de qué modo puede cierta familia geométrica aportar algo que contribuya a la solución. Las formas geométricas tienen diferentes ventajas que se pueden aprovechar para el mismo fin. La manera en que se combinan los diferentes sistemas geométricos o las diferentes formas geométricas puede contribuir a una mejor solución arquitectónica.

Justificación

La geometría ha tenido un progreso a lo largo de los siglos muy interesante e irónicamente se siguen utilizando en el diseño arquitectónico los recursos geométricos más antiguos. Esto no es malo; las cosas se utilizan porque funcionan, independientemente de que sean modernas o antiguas. Si una figura geométrica continúa siendo útil, es correcto seguirla empleando. El problema está en la cantidad de formas geométricas que se han descubierto en los últimos siglos y no se aprovechan y en la sobreutilización de formas geométricas antiguas. La falta de uso de las nuevas formas implica una limitación en la cantidad de soluciones arquitectónicas que se pueden dar.

El Partenón utilizó formas geométricas Euclidianas que probablemente eran las más avanzadas de su tiempo. Hoy en día la mayoría de las formas geométricas con las cuales se diseña, se aplican en muchas ocasiones con un menor grado de dominio que el demostrado en el Partenón y no se toma en cuenta el avance que ha habido en esta rama de las matemáticas a lo largo de los siglos. Sí hay algunos proyectos que contemplan el empleo de estas formas, pero son la excepción y difícilmente se han utilizado en ellos todas las formas existentes o posibles. Por ejemplo, puede haber varios proyectos que han empleado o intentado emplear la cinta de Möbius, pero ¿por qué no hay más variedad y recurren a otras formas geométricas basadas en esta figura, como la botella de Klein, o la superficie romana?

Desde el momento en que se traza una línea recta o curva, ya se está hablando de geometría. ¿Con qué forma se puede delimitar un espacio si no es a través de ella? ¿Qué ejemplos hay de arquitectura en la cual no se aplicó la geometría? Ella tiene una presencia inherente en la arquitectura, de un modo muy semejante a la tecnología.

Marco teórico

Índice

Introducción

Justificación

Marco teórico

Objetivo general

Objetivos específicos

Enfoque

Alcances y limitaciones

Preguntas de investigación

Hipótesis

Capítulo I: Tipos de geometría en la historia

- 1.1. Geometría Euclidiana
- 1.2. Geometría analítica
- 1.3. Geometría descriptiva
- 1.4. Geometrías no-euclidianas
- 1.5. Geometría diferencial
- 1.6. Topología
- 1.7. Geometría Fractal
- 1.8. Resumen del capítulo I

Capítulo II: Geometría convencional en arquitectura

- 2.1. Dos dimensiones
 - 2.1.1. Polígonos
- 2.2. Tres dimensiones
 - 2.2.1. Sólidos primarios
 - 2.2.2. Otros sólidos
 - 2.2.3. Poliedros
 - 2.2.4. Deltaedros
 - 2.2.5. Sólidos platónicos (poliedros regulares)
 - 2.2.6. Sólidos de Arquímedes (poliedros irregulares)
 - 2.2.7. Sólidos de Catalán
 - 2.2.8. Sólidos Kepler-Poinsot
 - 2.2.9. Sólidos de Johnson
- 2.3. Resumen del capítulo II

Capítulo III: Geometría poco convencional en arquitectura

- 3.1. Dos dimensiones
 - 3.1.1. Rotor
 - 3.1.2. Cicloide
 - 3.1.3. Hipocicloide
 - 3.1.4. Epicloide

- 3.1.5. Espirales
- 3.2. Tres dimensiones
 - 3.2.1. Cinta de Möbius
 - 3.2.2. Superficie de Boy
 - 3.2.3. Bonete cruzado
 - 3.2.4. Superficie romana
 - 3.2.5. Botella de Klein
 - 3.2.6. Paraguas de Whitney
 - 3.2.7. Toro de revolución elíptico
 - 3.2.8. Pseudoesfera
 - 3.2.9. Superficie de Dini
 - 3.2.10. Helicoide
 - 3.2.11. Superficie de Möbius
 - 3.2.12. Superficies Mínimas
 - 3.2.13. Sólidos de revolución
- 3.3. Resumen del capítulo III

Capítulo IV: Arquitectura con referencias geométricas directas

- 4.1. Geometría euclidiana
 - 4.1.1. Cicloide
 - 4.1.2. Gráficas de funciones trigonométricas
 - 4.1.3. Sólidos
 - 4.1.3.1. Cilindro
 - 4.1.3.2. Esfera
 - 4.1.3.3. Cono
 - 4.1.3.4. Pirámide
 - 4.1.3.5. Prisma
 - 4.1.3.6. Sólidos de revolución
 - 4.1.4. Poliedros
 - 4.1.4.1. Poliedros compuestos
 - 4.1.5. Cúpulas geodésicas
- 4.2. Geometría analítica
 - 4.2.1. Parábola
- 4.3. Superficies cuadráticas
 - 4.3.1. Elipsoides
 - 4.3.2. Paraboloides hiperbólicos
 - 4.3.3. Cilindro elíptico
 - 4.3.4. Conoide
- 4.4. Geometría no-euclidiana
 - 4.4.1. Geometría esférica
- 4.5. Geometría descriptiva
- 4.6. Geometría diferencial
- 4.7. Topología
 - 4.7.1. Cinta de Möbius
- 4.8. Fractales
- 4.9. Resumen del capítulo IV

Capítulo V: Arquitectura conformada por mezclas de diferentes sistemas geométricos

- 5.1. 30 St Mary Axe (Swiss Re)
- 5.2. Torre Agbar
- 5.3. Torres Petronas
- 5.4. Ayuntamiento de Londres
- 5.5. Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias
- 5.6. Sede del Commerzbank
- 5.7. Casa Guardiola
- 5.8. Monumento a los judíos asesinados en Europa
- 5.9. Competencia FSM East River (Torres Eisenman)
- 5.10. Torso Girado
- 5.11. Museo Guggenheim de Nueva York
- 5.12. Foro
- 5.13. Pabellón de Zurich
- 5.14. Sede Central de Renault
- 5.15. Liberty Place
- 5.16. Hotel Hesperia
- 5.17. Estadio Olímpico de Atenas
- 5.18. Restaurante Bauschänzli
- 5.19. Centro Cultural Tjibaou
- 5.20. Museo Judío
- 5.21. Villa en Burdeos
- 5.22. LF1 Landesgartenschau
- 5.23. Parque la Villette
- 5.24. Resumen del capítulo V

Capítulo VI: Arquitectura conformada por usos generalizados de Geometría

- 6.1. Círculos y ejes en composición de formas ortogonales
 - 6.1.1. Tadao Ando
 - 6.1.2. Richard Meier
- 6.2. Formas geométricas en campanarios de Mario Botta
- 6.3. Resumen del capítulo VI

Conclusiones

Anexos

- Tablas e Imágenes
 - Truncamiento de poliedros
 - Conjunto de Mandelbrot
- Teorías físicas sobre las dimensiones del espacio

Relación de imágenes, fotografías y planos

Bibliografía

Objetivo general

El objetivo de esta tesis consiste en estudiar los diferentes modos en que se aplica la geometría en el diseño arquitectónico y comparar las propuestas geométricas de la arquitectura (que comprende el periodo entre la mitad del siglo XX y el año 2007) con los avances que ha tenido la geometría hasta nuestros días.

Objetivo específicos

Los objetivos específicos consisten en estudiar:

- las formas en que ha sido aplicada la geometría en la arquitectura actual
- cómo se aprovechan los conocimientos más recientes de la geometría en el diseño arquitectónico en el periodo de tiempo citado

Enfoque

La información está orientada hacia la búsqueda de diferentes maneras de aplicar la geometría en el diseño arquitectónico. En la primera parte se mencionaron los diferentes tipos de geometría que existen y en la segunda parte se analizaron varios edificios que tienen algún aspecto importante en su geometría que contribuye al objetivo del documento. Debido a que en muchas ocasiones la mayor parte de los edificios tiene un desarrollo geométrico muy común, esto se omitió con el fin de evitar redundancia y mencionar la mayor cantidad de aplicaciones que puede tener la geometría. Algunos proyectos sí necesitaron un análisis completo.

Alcances y limitaciones

Los edificios que se analizaron pertenecen al periodo que comprende los años entre la mitad del siglo XX y el año 2007. El análisis de los edificios será exclusivamente de su forma general y cuando sea necesario también se incluirán los componentes de los cuales derive esta forma. La decoración queda excluida del análisis.

Preguntas de investigación

- 1) ¿Qué familias geométricas y figuras geométricas existen?
- 2) ¿Está la arquitectura actual diseñada considerando los conocimientos de geometría de nuestra época?
- 3) ¿Qué arquitectos han diseñado proyectos teniendo intenciones específicas en la geometría?
- 4) ¿Cómo se utilizó la geometría en sus proyectos?

Hipótesis

La hipótesis que se propone para el documento de tesis consiste en lo siguiente:

El estudio de las diferentes familias geométricas incrementa las posibilidades del diseño arquitectónico porque el incremento de conocimientos en esta área de las matemáticas aumenta la cantidad de formas geométricas disponibles para diseñar.

Capítulo I

Tipos de geometría en la historia

Geometría Euclidiana

La geometría Euclidiana, también conocida como geometría elemental, se inició con el tratado de 13 volúmenes llamado “Elementos”, escrito alrededor del año 300 a.C. por el matemático griego Euclides. Los primeros cuatro libros tratan de la geometría bidimensional (triángulos, rectángulos, círculos y polígonos, respectivamente); los libros 5 al 10 tratan sobre razones y proporciones (el 5 es de proporción, el 6 de similitud, y del 7 al 10 de teoría de los números); y los libros del 11 al 13 tratan de la geometría tridimensional (geometría de los sólidos, pirámides y figuras geométricas y sólidos platónicos, respectivamente). La geometría se propuso en este tratado como un cuerpo sistemático de conocimiento matemático, construido por razonamientos deductivos en base a tres pilares:

- Definiciones de puntos, líneas planas, ángulos, círculos y triángulos.
- La asunción de ciertos postulados geométricos considerados como verdaderos pero no evidentes a simple vista.
- La asunción de ciertos axiomas que fueron tomados para ser verdades evidentes.

En el primer libro se presentan cinco postulados que establecen las bases de todas las proposiciones. Un postulado es una proposición fundamental de un sistema deductivo, el cual no es evidente ni es posible demostrar su veracidad. Los postulados suelen ser proposiciones iniciales de una ciencia determinada. Los cinco postulados de Elementos son:

“Postulado 1 - Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

Postulado 2 - Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.

Postulado 3 - Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados.

Postulado 4 - Todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado 5 - Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.”¹

El quinto postulado de Euclides se conoce como “postulado paralelo” y es esencialmente equivalente al enunciado que “una línea única, paralela a otra línea, puede ser construida a través de cualquier punto que no esté en la línea”. Después de dos mil años de estudio se encontró que este postulado es independiente de los otros cuatro. En sus primeras 28 proposiciones recurre a los primeros cuatro postulados y hasta la proposición

¹ www.euclides.org

29 recurre al quinto. El desarrollo de la geometría no-Euclidiana se basa en atacar el postulado paralelo.

*“Proposición 29 - Una recta que corta a otras dos rectas paralelas hace que los ángulos alternos iguales, los ángulos externos iguales a los interiores y opuestos, y la suma de los ángulos internos por el mismo lado iguales a dos rectos.”*²

Por el hecho de hablar de líneas infinitas, resulta muy complicado comprobarlo. En el siglo XIX, N. I. Lobachevski, J. Bolyai y G. F. B. Riemann construyeron lo que se conoce como geometrías no-euclidianas, en las cuales el quinto postulado no es válido.

El trabajo de Euclides consistió en 465 proposiciones, las cuales fueron derivadas sistemática y lógicamente de las definiciones, axiomas y postulados de su fundación y de teoremas ya comprobados. El siguiente resumen de los libros se basó en el del sitio de Internet www.euclides.org.

Libro I - Trata de los fundamentos de la geometría y de la teoría de triángulos, líneas paralelas y área (contiene 23 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y 48 proposiciones).

Libro II - Trata de transformaciones de áreas y de álgebra aplicada a la geometría siguiendo el modo de la Escuela Pitagórica (contiene 2 definiciones y 14 proposiciones).

Libro III - Trata de la teoría de la circunferencia, las cuerdas, las tangentes y la medición de ángulos (contiene 11 definiciones y 37 proposiciones). Trata de los teoremas relativos a la circunferencia, cuerdas, tangentes y medición de ángulos.

Libro IV - Trata de figuras inscritas y circunscritas y construcciones pitagóricas de polígonos con regla y compás (contiene 7 definiciones y 16 proposiciones).

Libro V - Trata de las proporciones abstractas aplicadas a magnitudes conmensurables e inconmensurables, se resuelve el problema planteado por la Escuela Pitagórica de los números irracionales (contiene 18 definiciones y 25 proposiciones).

Libro VI - Trata de figuras semejantes y proporcionales (contiene 4 definiciones y 33 proposiciones).

Libro VII - Trata de los fundamentos de la teoría de los números (contiene 22 definiciones y 39 proposiciones).

Libro VIII - Trata de la continuación de las proporciones a la teoría de los números (contiene 27 proposiciones).

Libro IX - Trata de la teoría de los números (contiene 36 proposiciones).

² www.euclides.org

Libro X - Trata de la clasificación de los números irracionales (contiene 16 definiciones y 115 proposiciones).

Libro XI - Trata de la geometría de los sólidos (contiene 28 definiciones y 39 proposiciones).

Libro XII - Trata de la medición de pirámides y figuras geométricas (contiene 18 proposiciones).

Libro XIII - Trata de los sólidos regulares (contiene 18 proposiciones).

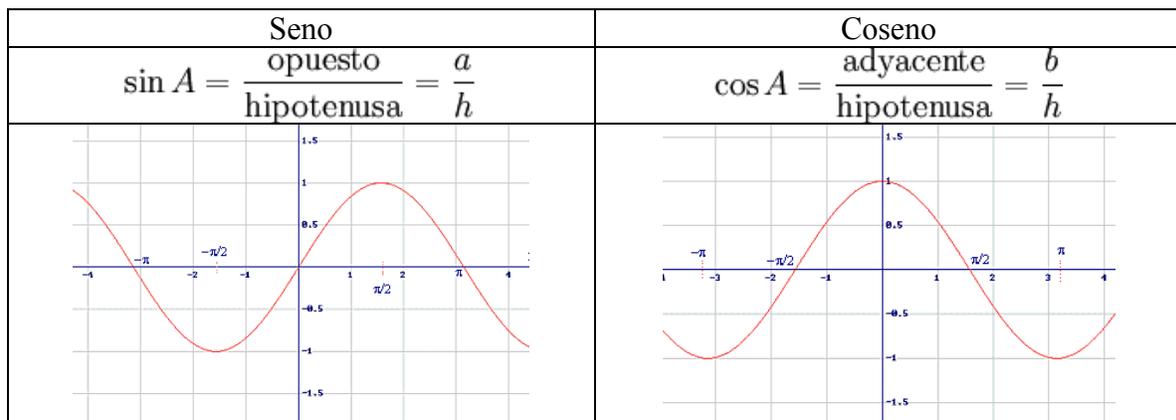
Trigonometría (geometría euclidiana)

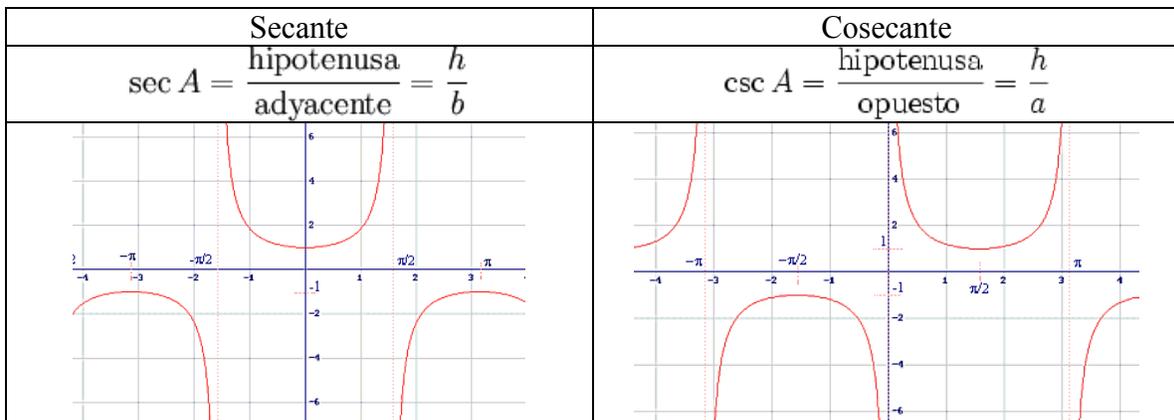
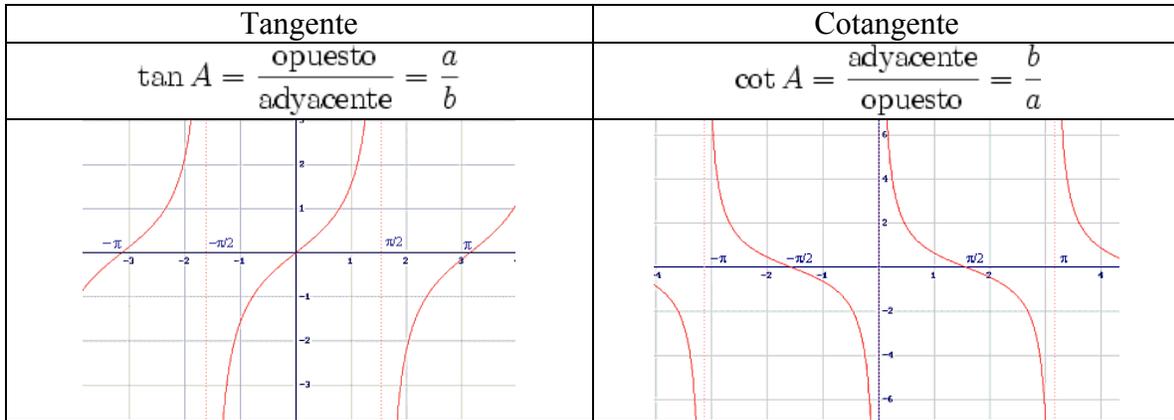
La trigonometría es un área de las matemáticas que estudia los ángulos y vértices de los triángulos (figuras geométricas de tres lados rectos). Desde el siglo II a.C. ya había astrónomos griegos realizando estudios de trigonometría. Sus funciones principales eran para la navegación y la astronomía. Hasta el siglo XVII se empezó a utilizar el nombre de trigonometría, aunque seguía siendo para la resolución y medición de triángulos.

En la trigonometría existen las funciones trigonométricas, las cuales tienen una función importante en el cálculo. Las funciones trigonométricas tienen notables aplicaciones en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería.

Funciones trigonométricas (geometría euclidiana)

Las funciones trigonométricas se utilizan para el estudio de los ángulos y los vértices de un triángulo. Se utilizan al estudiar triángulos y polígonos, los cuales pueden descomponerse en triángulos. Los lados de los triángulos se consideran: opuesto al ángulo en cuestión, adyacente al ángulo en cuestión e hipotenusa (el más largo). Estas funciones trigonométricas se utilizan para analizar triángulos rectángulos.





Geometría analítica

Esta es la rama de la geometría que estudia las figuras geométricas utilizando operaciones algebraicas con variables definidas en términos de posición dentro de un sistema de coordenadas. René Descartes publicó un tratado llamado “La Géométrie” (1637), el cual unía la geometría y el álgebra a través de un conjunto de ejes y coordenadas. Cualquier punto en el plano puede ser localizado en relación con un par de ejes perpendiculares entre sí ubicados en el mismo plano. El eje horizontal se llama “x” y el eje vertical se llama “y”. Las figuras geométricas se representan mediante ecuaciones algebraicas que no cambian; lo que cambia es el valor de las variables “x” y “y” dentro de ellas. La geometría analítica utiliza el método axiomático que inició Euclides.

En la geometría analítica un punto en un espacio bidimensional puede ser descrito con dos variables (x, y) y uno dentro de un espacio tridimensional puede ser descrito con tres variables (x, y, z). Debido a que las figuras geométricas compuestas por líneas pueden ser interpretadas como compuestas por series de puntos (una línea es un serie de puntos) existen ciertas ecuaciones para cada figura. La mayoría de estas figura se encuentra en la sección cónica.

Por ejemplo, la ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

representa una línea en el plano (x, y), donde “a”, “b” y “c” son coeficientes (números).

La ecuación:

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa una línea en el espacio tridimensional (x, y, z), donde “a”, “b”, “c” y “d” son coeficientes.

Los coeficientes determinan la inclinación y orientación de la línea y las variables determinan un punto específico dentro de ella. En un plano, teniendo el valor de una variable se despeja algebraicamente la otra y se llega al valor de su número (para ese caso particular). En el caso de la línea en el espacio tridimensional, sucede lo mismo.

La pendiente “m” de una línea en un plano se obtiene con al fórmula:

$$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

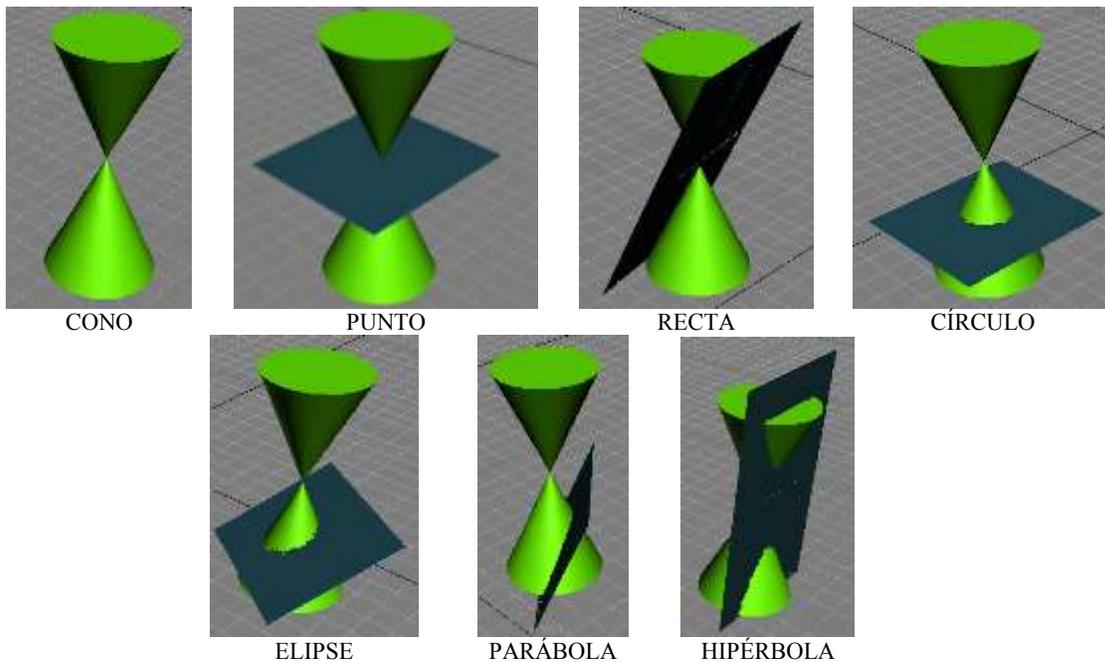
donde se analiza el segmento de línea que se ubica entre los puntos (x₁, y₁) y (x₂, y₂).

En un espacio tridimensional no se estudia la inclinación de una línea, sino su coseno de dirección a través de la ecuación:

$$\lambda^2 + \mu^2 + nu^2 = 1$$

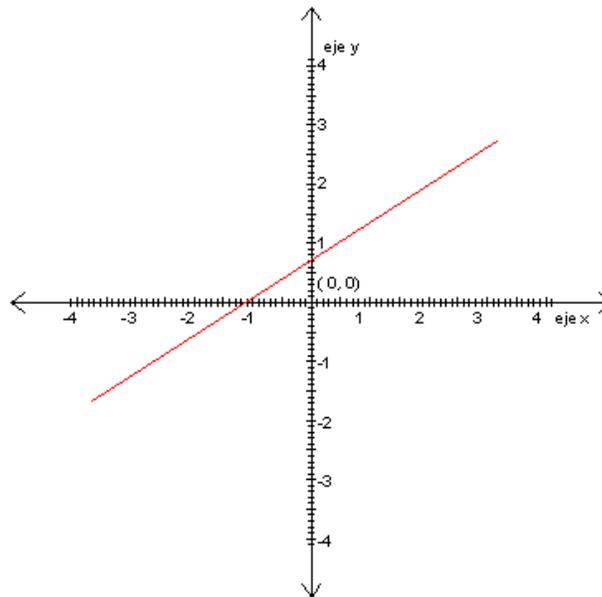
Del mismo modo las superficies cuadráticas, como el elipsiodes o el paraboloides hiperbólico, son estudiadas en la geometría analítica de sólidos. Los métodos de la geometría analítica pueden ser utilizados para figuras de más de 3 dimensiones.

Sección cónica



Una sección cónica es la figura resultante de la intersección de un plano y un conjunto conformado por dos conos unidos en su vértice. Los dos conos se pueden formar con una recta que atraviesa el vértice en un espacio tridimensional de manera oblicua y rota para generar dos círculos (las bases de los conos) en las partes superior e inferior del vértice. El *punto* se obtiene cuando el plano se intersecta con el vértice, siendo paralelo a la base de los cono. La *línea* se obtiene pasando el plano por el vértice y orientándolo de tal manera que la recta generadora se intersecte con él. El círculo se obtiene si el plano se intersecta con una de los conos, siendo paralelo a sus bases. La parábola se obtiene intersectando el plano con uno de los conos y siendo paralelo a una recta generadora. La elipse se obtiene intersectando el plano a uno de los conos sin se paralela ni a las rectas generadoras ni a las bases de los conos. La hipérbola se obtiene intersectando el plano con los dos conos, siendo perpendicular a sus bases y paralelo a dos rectas generadoras.

Recta

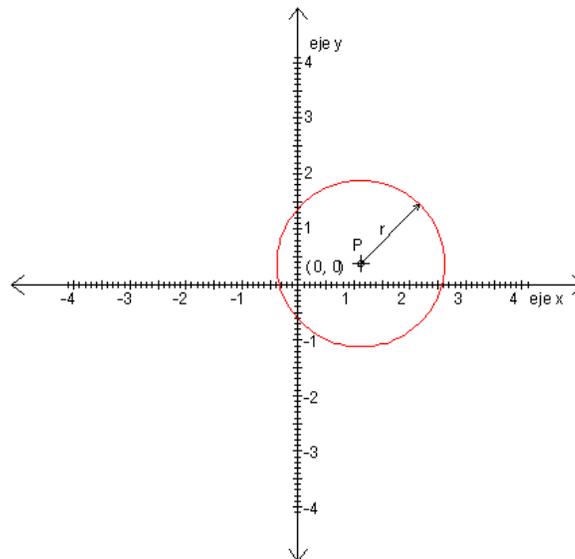


Una recta es una sección cónica conformada por los puntos del plano que forman una recta. Su fórmula es:

$$y = mx + b$$

donde b representa la distancia que la línea se aleja (a lo largo del eje y) del punto $(0, 0)$ y m representa la pendiente de la recta.

Círculo



Un círculo es una sección cónica conformada por todos los puntos del plano que mantienen una distancia constante con respecto al centro. Un círculo es una curva con un centro P y un radio r . Su fórmula es:

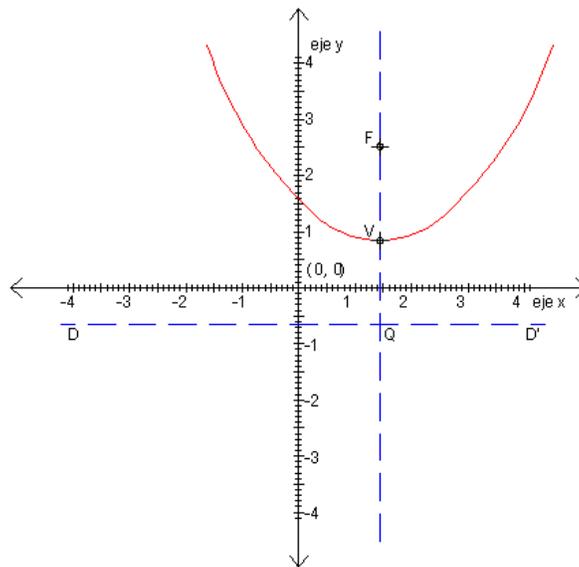
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

y si su centro está en $(0, 0)$, la ecuación se simplifica en:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde r es el radio, a y b son los coeficientes y las variables x y y son los valores de los puntos de la recta en los ejes.

Parábola

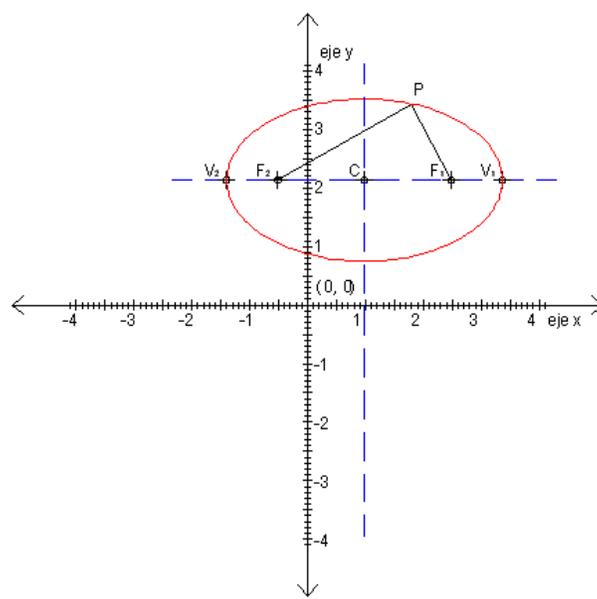


Es una sección cónica que se constituye por el conjunto de puntos dentro del plano que son equidistantes de la directriz $D-D'$ y del foco F . Una parábola tiene un eje de simetría FQ que pasa por su foco y es perpendicular a la directriz. El punto medio de la curva de la parábola que se intersecta con su eje de simetría se llama vértice V . La ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 4px$$

donde p es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.

Elipse

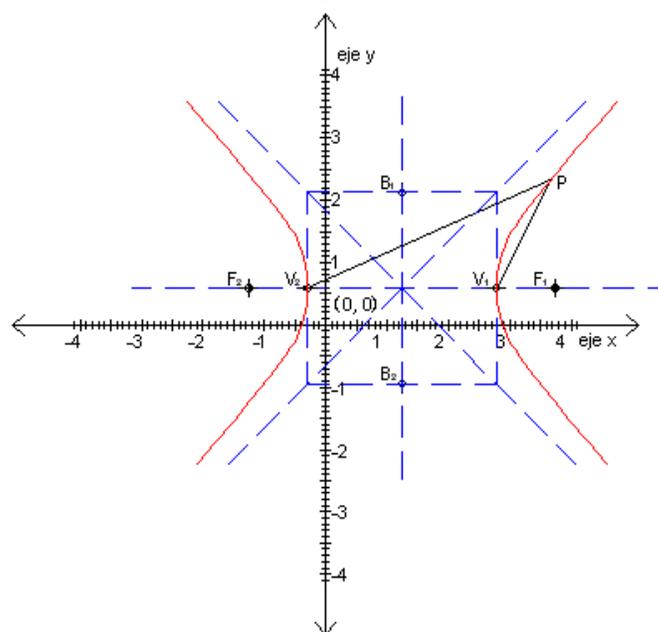


Es una de las secciones cónicas conformada por el conjunto de puntos en el plano que son equidistantes entre los dos focos. Una elipse es una curva que contiene dos focos F_1 y F_2 , un centro C y dos vértices V_1 y V_2 . Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son los coeficientes y las variables x y y son los valores de los puntos de la recta en los ejes.

Hipérbola



Es un tipo de sección cónica conformada por todos los puntos del plano que mantienen una diferencia constante entre los dos focos F_1 y F_2 . Una hipérbola consta de dos curvas con dos focos, dos vértices V_1 y V_2 y dos asíntotas que se interrelacionan con los extremos del eje conjugado B_1 y B_2 .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son los coeficientes y las variables x y y son los valores de los puntos de la recta en los ejes.

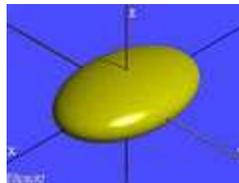
Superficies cuadráticas

Una superficie cuadrática está definida por una ecuación algebraica de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Elipsiode

Sólido geométrico cuyos cortes son elipses.



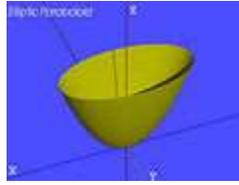
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paraboloide

Es una superficie que se caracteriza porque todos los cortes que lo atraviesen son parábolas y elipses o parábolas e hipérbolas. Existen dos tipos de paraboloides: paraboloides elípticos y paraboloides hiperbólicos.

Paraboloide elíptico

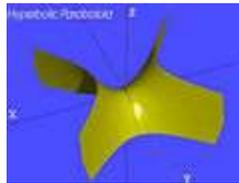
Superficie generada deslizando una parábola con la concavidad hacia abajo a lo largo de otra perpendicular con la concavidad también hacia abajo. Los cortes horizontales son elipses y los verticales son parábolas. Cuando $a = b$ el paraboloide es una superficie de revolución.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Paraboloide hiperbólico

Es una superficie que se genera de dos maneras: deslizando una parábola con la concavidad hacia abajo a lo largo de otra parábola con la concavidad hacia arriba o deslizando una línea recta apoyada en sus extremos en dos líneas rectas con inclinaciones opuestas, lo cual quiere decir que es una superficie reglada. También se le conoce como “silla de montar”. El paraboloide hiperbólico es una superficie bidimensional con gran resistencia a los esfuerzos de compresión y tensión. Un ejemplo de cómo la naturaleza recurre a esta forma se puede observar en las papas fritas que se venden de distintas marcas las cuales tienen esta forma porque al calentarlas los cambios de temperatura generan contracciones y dilataciones en su forma. En arquitectura es muy utilizada, sobre todo para cubiertas por su economía y resistencia.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

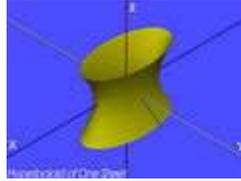
Ejemplos en arquitectura:

- Le Corbusier (Pabellón Philips)
- Félix Candela (Pabellón de Rayos Cósmicos, etc.)
- Antonio Gaudí (escuelas provisionales de la Sagrada Familia)

Hiperboloide

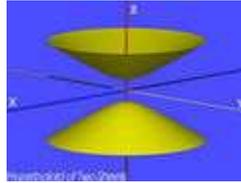
Un hiperboloide es una superficie con un centro que posee un cono asintótico. Algunos de sus cortes son hipérbolas y otros son círculos y elipses. El hiperboloide de una hoja es una superficie reglada, lo cual quiere decir que se puede obtener su forma deslizando una línea recta apoyada en otras líneas (curvas o rectas); en este caso alrededor de las dos figuras geométricas de las bases sin ser perpendicular al plano en el que están inscritas.

Hiperboloide de una hoja



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

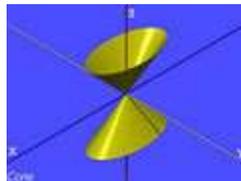
Hiperboloide de dos hojas



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

Superficie cónica

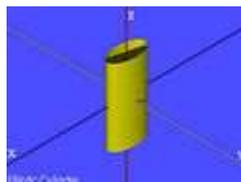
Una superficie cónica está formada por la unión de líneas rectas (generatrices) que pasan por un punto en el espacio; son dos conos unidos por un vértice. Las figuras de la geometría analítica están inscritas en esta superficie: círculo, elipse, parábola e hipérbola.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Cilindro elíptico

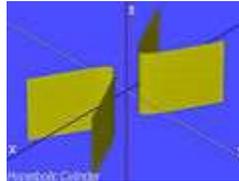
Es una superficie cilíndrica con bases elípticas.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindro hiperbólico

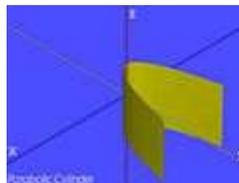
Es una superficie generada dando altura (en sentido perpendicular) a una hipérbola inscrita en un plano.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindro parabólico

Es una superficie generada dando altura (en sentido perpendicular) a una parábola inscrita en el plano.



$$x^2 + 2y = 0$$

Conoide

Un conoide es una superficie reglada que se genera deslizando una línea recta apoyada en un extremo en una línea recta y en el otro en una línea curva.

Geometría descriptiva

Esta es una rama de la geometría que estudia las figuras tridimensionales en un plano (bidimensional), a través de una proyección gráfica y sin cálculos numéricos. La proyección del objeto tridimensional muestra su cara desde el ángulo perpendicular al plano donde se representa, ocultando su parte posterior. Esto hace inevitable realizar proyecciones del mismo objeto en diferentes ángulos, los cuales se complementan e interrelacionan entre sí. Este tipo de geometría fue introducido por Gaspard Monge, un matemático francés, en 1795. Resuelve problemas de representación muy comunes en los campos de la ingeniería y la arquitectura. Además, existe un valor heurístico en la geometría descriptiva porque describe visualmente los objetos representados, facilita su análisis en el espacio y promueve la habilidad de escoger el ángulo idóneo para analizar el objeto representado.

En la geometría descriptiva existe un principio de dualidad, el cual establece que los teoremas tienen un dual en el cual se pueden transformar al intercambiarse las palabras “punto” y “línea”.

Estos son los axiomas de la geometría descriptiva:

- “1. Si A y B son puntos distintos en un plano, hay al menos una línea que contiene ambos A y B.
2. Si A y B son puntos distintos en un plano, no hay más que una línea conteniendo ambos A y B.
3. Cualquier par de líneas en un mismo plano tiene al menos un punto en común (aunque sea en punto en el infinito).
4. Hay al menos una línea en un plano.
5. Cada línea contiene al menos tres puntos de el plano.
6. Todos los puntos del plano no pertenecen a la misma línea.”³

La proyección gráfica contiene tres categorías: ortográfica, oblicua y perspectiva.

Proyección ortográfica

Una proyección ortográfica significa que un objeto tridimensional se representa en dos dimensiones. El objeto se representa desde distintos ángulos (con rotaciones de 90° con respecto el centro del objeto) sin deformaciones de ningún tipo. Este tipo de dibujos puede medirse en todas direcciones, pero da información visual “fragmentada” por no unir las distintas representaciones en sólo un objeto, como sucedería en una isometría.

³ <http://mathworld.wolfram.com/ProjectiveGeometry.html>

Todas las proyecciones ortográficas se unen en una representación visual del objeto llamada axonometría, para lo cual deberán de tener algunas deformaciones. En una axonometría existen tres ejes imaginarios con la misma interrelación que la de los ejes de la geometría analítica (x, y, z). Sólo en las direcciones de estos ejes se pueden medir los objetos representados (por eso se llaman axonometrías). Las deformaciones necesarias para que el objeto representado se vea tridimensional en el plano, se absorben por líneas con orientaciones distintas a estos tres ejes. Una axonometría representa los objetos de modo diferente a como los vemos en la realidad porque no se hacen más chicos cuando se alejan del espectador (no hay puntos de fuga y las deformaciones son diferentes a las de las perspectivas).

Existen tres tipos de axonometrías: isometrías, dimetrías y trimetrías. En las isometrías los ejes están a la misma escala debido a la orientación del objeto representado. En una dimetría dos de los tres ejes tienen una escala más reducida que el tercero debido al ángulo en que se representa el objeto. En una trimetría los tres ejes están a escalas diferentes debido al ángulo en que se representa al objeto.

Proyección oblicua

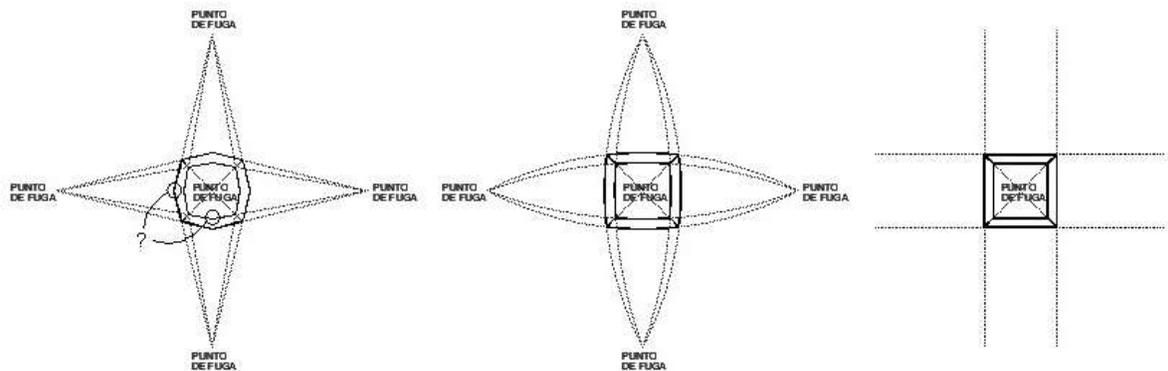
En una proyección oblicua los ángulos entre los ejes y las escalas de cada eje se determinan arbitrariamente. Debido a sus distorsiones, es muy poco utilizada. En los casos más comunes, los ejes “x” y “y” se mantienen con su escala normal y el eje “z” se rota (para crear un ángulo oblicuo) y se reduce significativamente su escala.

Perspectiva

La proyección en perspectiva tiene como objetivo ver el objeto representado de manera semejante a como se vería en la realidad. Esto hace que las distancias se reduzcan conforme el objeto se aleja. Al dibujar líneas paralelas, por esta misma razón terminan intersectándose en un punto de fuga, el cual se ubica en la dirección en la que se orientan las líneas (si éstas son paralelas al piso el punto de fuga se representa sobre el horizonte). En este tipo de proyección no se puede medir directamente con una regla; sería necesario en todo caso averiguar la proporción en la que los objetos representados se reducen en dimensión conforme se alejan del plano y ubicar la profundidad de los objetos que se vayan a medir para alterar la medida que indique la regla cuando se mida directamente. Es tan tardado y es tan fácil cometer errores que resulta mejor medir en otro plano (como una isometría) y dejar las perspectivas para representación casi realista (en la realidad no hay líneas rectas, por lo cual no son totalmente reales). La razón por la cual existen los puntos de fuga es que los rayos de luz que contienen los colores de los objetos que el cerebro interpreta como imágenes, se intersectan en un punto en el interior del ojo antes de llegar a la retina como imagen reflejada (esto hace que los objetos se vean más chicos conforme se alejan del ojo y por vía de consecuencia que existan los puntos de fuga).

Existen perspectivas de uno, dos y tres puntos de fuga. En realidad por cada grupo de líneas rectas paralelas deberían existir dos puntos de fuga (uno en cada dirección de las líneas) y normalmente se representara el que se observa directamente. Si se representaran estas líneas (con ambos puntos de fuga) viéndolas en dirección perpendicular a su

orientación, habría unas intersecciones en sus centros que nunca vemos en la realidad (debido al uso de líneas rectas). Esto sucede porque el ojo humano observa líneas curvas que se unen al centro. El modo de solucionar esto es utilizando líneas paralelas para estos casos específicos, debido a que normalmente los puntos de fuga están muy lejos como para representarlos. Esto es lo que determina la cantidad de puntos de fuga que tiene una perspectiva. Si un cubo se representa viendo sobre una de sus caras, se representa con un punto de fuga (profundidad); si se representa viendo sobre una de sus aristas, se representa con dos puntos de fuga; y si se representa viendo sobre uno de sus vértices, se representa con tres puntos de fuga. En la imagen de abajo se representa esto a través de un cubo transparente visto desde una de sus caras.

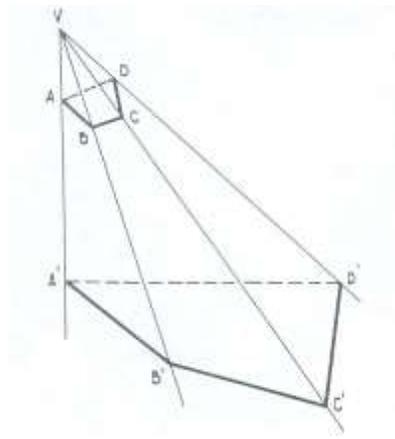


REPRESENTACIÓN CON DEFICIENCIAS POR UTILIZAR LÍNEAS RECTAS

REPRESENTACIÓN REAL CON LÍNEAS CURVAS

REPRESENTACIÓN CON SOLUCIÓN UTILIZANDO LÍNEAS RECTAS

Cuando un objeto representado no tiene líneas rectas, la perspectiva no tiene puntos de fuga. Sin embargo en estos casos se deben mantener las deformaciones por la perspectiva misma (los objetos se siguen haciendo más chicos conforme se alejan, y este hecho los deforma porque algunas de sus partes componentes están más alejadas del observador que otras).



Planos homólogos

Homología

La homología es un principio que establece una relación entre dos planos por ser secciones de una misma radiación. La radiación es un conjunto de rectas que se unen en un vértice V . La afinidad es un tipo particular de homología en el cual las rectas de proyección son paralelas.

Geometrías no-euclidianas

Esta es la rama de la geometría que se diferencia de la geometría euclidiana en su quinto postulado (postulado paralelo) por jamás haber sido comprobado como verdadero, dando dos opciones semejantes en todo menos en lo paralelo: geometría elíptica y geometría hiperbólica. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue el primero en desarrollar una geometría no-euclidiana.

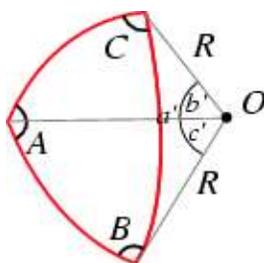
Geometría elíptica

Es un tipo de geometría no-euclidiana que está en contra del quinto postulado de Euclides y cambia el segundo. También se le conoce como geometría de Riemann porque Bernhard Riemann la creó. En la geometría elíptica no hay ninguna línea paralela sobre un punto p para una línea dada l . Una línea en un plano de esta geometría no tiene ningún punto en el infinito, donde alguna línea paralela pudiera intersectarla. Todas las líneas rectas pueden ser de la misma longitud. Aunque muchos de los teoremas de esta geometría son idénticos a los de la geometría euclidiana, algunos difieren; por ejemplo, en este tipo de geometría la suma de los ángulos de un triángulo es mayor a 180° . Puede ser imaginada como geometría que sucede sobre la superficie de una esfera, donde todas las líneas son círculos.

Geometría esférica

Es un ejemplo de geometría no-euclidiana que utiliza la superficie bidimensional de una esfera. Los equivalentes de las líneas en lugar de ser rectas, buscan sin perder su curvatura la menor distancia entre dos puntos dados. En la esfera, las geodésicas (líneas curvas que equivalen a líneas rectas en un espacio curvo) son círculos máximos (círculos que dividen la esfera por la mitad); así que los conceptos geométricos son definidos al igual que en la geometría plana, pero con líneas representadas como círculos máximos. Por el hecho de que los ángulos son definidos por arcos de círculos, se utiliza la trigonometría esférica, que difiere de la trigonometría tradicional (euclidiana). La geometría esférica es la forma más simple de geometría elíptica, en la cual una línea no tiene paralelas en ningún punto dado. Contrario a esto, en la geometría hiperbólica una línea tiene dos líneas paralelas y un número infinito de ultra-paralelas en cualquier punto dado. La geometría esférica es muy práctica e importante en la navegación y en la astronomía.

Trigonometría esférica



Triángulo esférico

La trigonometría esférica se utiliza para analizar los ángulos y vértices (arcos) de los triángulos trazados sobre la superficie de una esfera. En una esfera, los arcos de círculo más semejantes a una línea recta son los que coinciden en su centro (del círculo) con el centro de la esfera; se les llama círculos máximos. Por el hecho de que son los círculos más grandes que caben en la superficie de una esfera, su curvatura es la menor y la distancia entre dos puntos también es menor. Un polígono cuyas aristas son arcos de este tipo en la superficie de una esfera se llama polígono esférico. Un triángulo esférico es

determinado por sus ángulos y por el ángulo de cada arco. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es siempre mayor a 180° (la cantidad por la cual se pasa se llama exceso esférico y es expresado en radianes).

El teorema de Girard establece que:

$$A = R^2 * E$$

donde,

A = superficie del triángulo

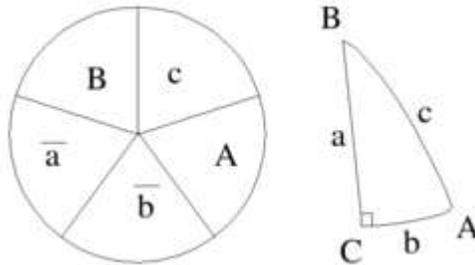
R = radio de la esfera

E = exceso esférico

Los triángulos esféricos no pueden ser triángulos similares (diferentes aristas y área y con los mismos ángulos).

El pentágono de Napier establece que cuando un triángulo esférico tiene un ángulo de 90° , se pueden anotar los seis ángulos en un círculo en el mismo orden en que se encuentran en el triángulo. Después se elimina el ángulo de 90° y se remplazan los ángulos contiguos (de los vértices) por su complementario para 90° . Al obtener el pentágono de Napier el coseno de cada ángulo es igual a:

- el producto de los cotangentes de los ángulos contiguos
- el producto de los senos de los ángulos opuestos



Pentágono de Napier

Funciones trigonométricas en trigonometría esférica

Las leyes de senos y cosenos determinan las relaciones entre las funciones trigonométricas:

Ley de senos:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Ley de cosenos:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

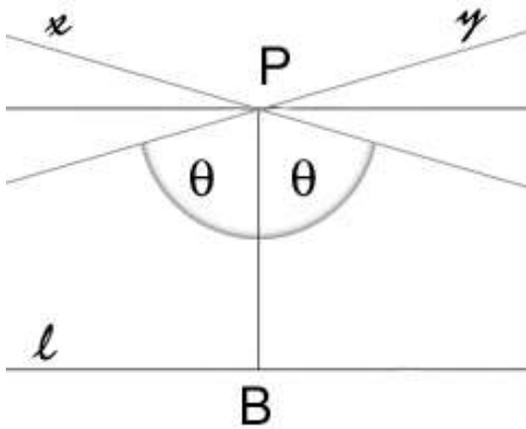
En estas fórmulas, las letras mayúsculas son los vértices del triángulo esférico y las letras minúsculas son las aristas (todos los ángulos se miden en radianes).

Geometría hiperbólica

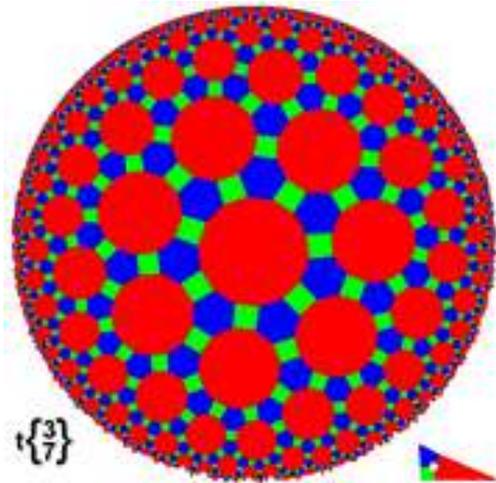
Es un tipo de geometría no-euclidiana muy útil para modelar el espacio interestelar. Rechaza el postulado paralelo de Euclides proponiendo en su lugar que para una línea l dada y un punto p ubicado fuera de l , existen dos líneas que pasan a través de un punto p y son paralelas a l (asíntotas) y existe una cantidad infinita de líneas paralelas a l (ultraparalelas), las cuales tienen un ángulo mayor al de las asíntotas con respecto a una línea perpendicular a l . Aunque muchos de sus teoremas son idénticos a los de la geometría euclidiana, otros difieren. Por ejemplo, dos líneas paralelas convergen en una dirección y divergen en la otra y los ángulos de un triángulo suman menos de 180° . Las superficies bidimensionales hiperbólicas pueden ser entendidas en el lenguaje de las superficies de Riemann.

Existen cuatro modelos para representar el espacio de la geometría hiperbólica:

- **modelo Klein** – También se conoce como “modelo de disco proyectivo” y “modelo Beltrami-Klein”. Utiliza el interior de un círculo para el plano hiperbólico, y arcos del círculo como líneas. Este modelo tiene la ventaja de la simplicidad, pero la desventaja que los ángulos del plano hiperbólico están distorsionados.
- **modelo del disco Poincaré** – También es conocido como “modelo de disco conformal”. Utiliza el interior de un círculo y las líneas son representadas por arcos de círculos que son ortogonales a la frontera del círculo.
- **modelo de medio plano Poincaré** – Toma la mitad del plano euclidiano, delimitado por la línea B para ser un plano hiperbólico (sin incluir a la línea B). Las líneas hiperbólicas son o medios círculos ortogonales a B o rayos perpendiculares a B . Los dos modelos de Poincaré preservan los ángulos hiperbólicos y todas las isometrías en estos modelos son transformaciones de la cinta de Möbius.
- **modelo Lorentz o modelo hiperboloide** – Emplea un hiperboloide bidimensional de revolución embebido en un espacio Minkowski tridimensional.



Las líneas a través del punto dado P son asíntotas a la línea l.

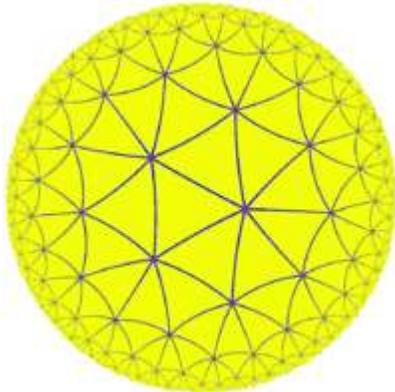


Disco de Poincaré con aparejo gran rombitruncado

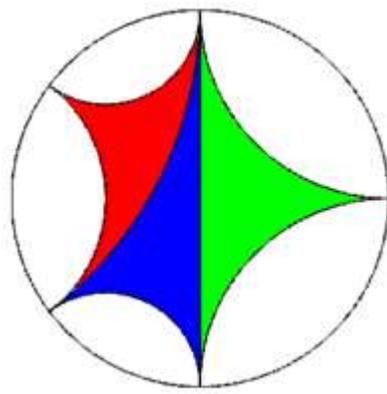
Una de las diferencias entre la geometría euclidiana y las geometrías no-euclidianas es que el plano tiene curvatura de cero, las superficies de la geometría esférica tienen curva positiva y las superficies hiperbólicas tienen curvatura negativa.

Trigonometría hiperbólica

Un triángulo hiperbólico consta de tres vértices y tres segmentos lineales hiperbólicos y la suma de sus ángulos es menor a 180° . Un triángulo ideal tiene sus tres vértices en los límites del círculo en el infinito y la suma de los ángulos es de 0° , el área es igual a π y tienen un perímetro infinito.



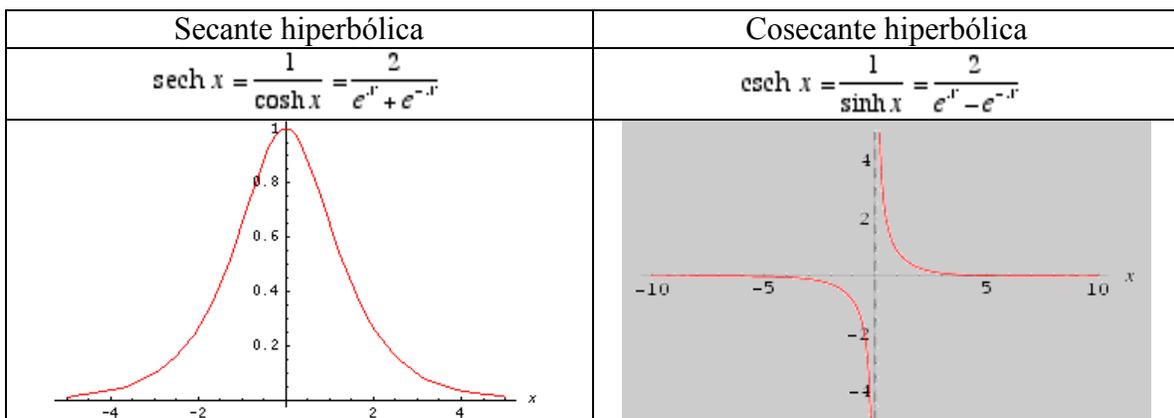
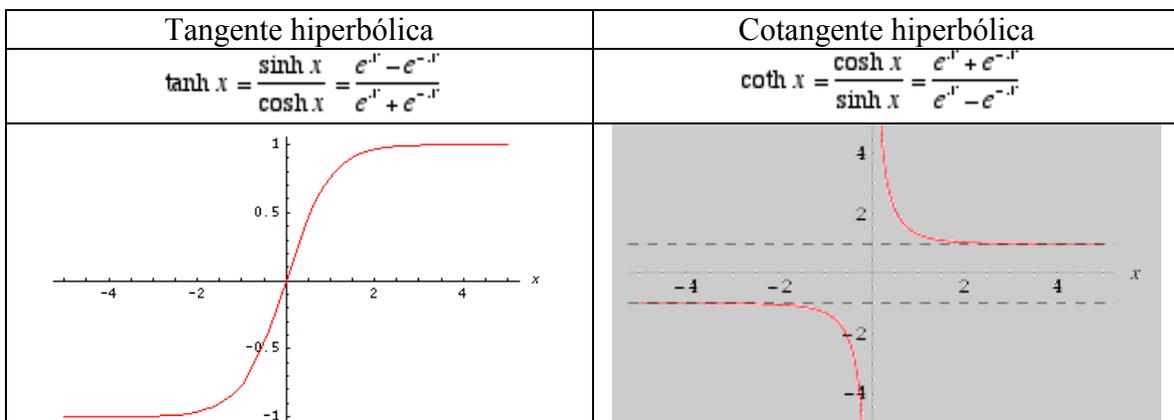
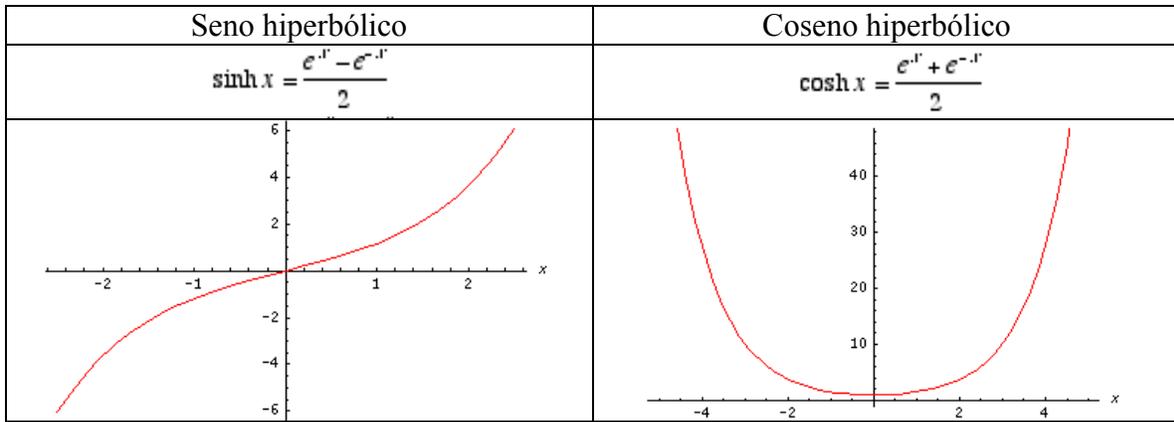
Plano hiperbólico con triángulos hiperbólicos



Tres triángulos ideales en el modelo de disco de Poincare.

Funciones trigonométricas hiperbólicas

Las funciones trigonométricas hiperbólicas se definen utilizando e^x and e^{-x} . Sus relaciones son semejantes a las que tienen en la geometría euclidiana y esférica.



Geometría diferencial

Esta es una rama de la geometría que estudia curvas, superficies y otras figuras geométricas por medio del cálculo diferencial. La geometría diferencial utiliza el cálculo de variedades (se explican en el capítulo de Topología); en especial las variedades Riemannianas. La geometría diferencial trabaja con las nociones métricas de variedades a través del cálculo diferencial mientras que la topología diferencial no necesita de las nociones métricas y trabaja a través de funciones diferenciales. Ambas son adyacentes y juntas establecen la teoría de las variedades diferenciables.

Esta geometría fue creada por Gaspard Monge y C. F. Gauss a principios del siglo XIX. El trabajo de estas gentes junto con las aportaciones de B. Riemann, E. B. Christoffel y C. G. Ricci fue reunido y sistematizado a finales de ese siglo por J. G. Darboux y Luigi Bianchi. La importancia de este tipo de geometría puede comprobarse por el hecho de que la Teoría Práctica de la Relatividad de Einstein se formuló enteramente en términos de geometría diferencial.

La geometría es analizada desde dos puntos de vista diferentes: el extrínseco y el intrínseco. Desde un inicio fue vista de manera extrínseca: las curvas y las superficies fueron analizadas como si estuvieran en una mayor dimensión. Sin embargo el punto de vista intrínseco empezó a utilizarse desde que Riemann incursionó en esta área; desde el punto de vista intrínseco no se puede hablar de moverse hacia el exterior de una figura geométrica. Este punto de vista es muy útil al hablar de relatividad porque el espacio-tiempo no puede ser considerado extrínseco porque no se sabe qué hay en su exterior (si en realidad tiene un exterior). Por otro lado, es más difícil definir el concepto central de una curvatura y de estructuras como las conexiones del punto de vista intrínseco.

La geometría diferencial se divide en varias ramas:

Geometría de contacto – Es análoga a la geometría simpléctica, la cual trabaja con variedades de dimensión non.

Geometría Finsler – su objeto de estudio principal es la variedad Finsler, el cual es una variedad diferencial con una métrica Finsler. Una métrica Finsler tiene una estructura más general que la métrica Riemanniana.

Geometría Riemanniana – utiliza variedades Riemannianas como principal objeto de estudio. La curva tensora Riemanniana es una invariante importante asociada a una variedad Riemanniana que mide qué tan cerca está de ser plana.

Geometría Simpléctica – Es el estudio de variedades simplécticas, las cuales son variedades diferenciables equipadas con una forma asimpléctica.

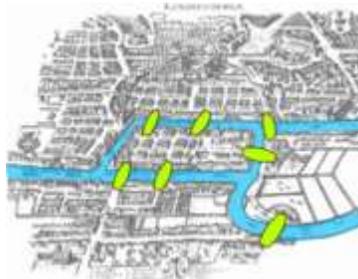
Topología

Esta es la rama de las matemáticas que estudia ciertas propiedades de las figuras geométricas. El término “topología” fue utilizado desde 1930 por Solomon Lefschetz. Por lo general se le ubica dentro del campo de la geometría y también se le conoce como geometría de los cuerpos elásticos, porque estudia las deformaciones continuas de las figuras geométricas. Su propósito es clasificar objetos o dar lineamientos para distinguir entre objetos que no son homeomorfos (que no se pueden obtener uno del otro a través de una deformación continua). En topología no está permitido durante una deformación ni romper una forma ni unir dos formas separadas. También da técnicas para estudiar las estructuras topológicas en objetos que surgen en diferentes ramas de las matemáticas.

Los espacios topológicos muestran análisis matemático, álgebra abstracta y geometría; esto convierte a la topología en un área unificadora de las matemáticas. La topología general define y estudia algunas propiedades útiles de espacios y mapas como continuidad, deformación y homeomorfismo. La topología algebraica estudia espacios topológicos y los mapas entre estos. Asocia invariantes a mapas y espacios de un modo funcional. Las ideas de la topología algebraica sirven de influencia en el álgebra y en la geometría algebraica.

El concepto de variedad es muy importante en topología, aunque una gran cantidad de espacios relevantes que se estudian en otros tipos de geometrías son variedades. Entre los ejemplos más importantes se encuentran: las esferas, los espacios proyectivos, las variedades de Grassmann y las de Stiefel. En dimensión dos se tienen las superficies (en particular las de Riemann). En una dimensión sólo hay dos variedades: la recta y el círculo.

Los siete puentes de Königsberg es un problema de topología famoso. Se trata de buscar el modo de atravesar los siete puentes de la ciudad pasando sólo una vez por cada uno. Leonhard Euler demostró que es imposible.



Siete puentes de Königsberg

Teoría de los nudos

La teoría de los nudos es una rama de la topología que se ocupa de las propiedades de los nudos matemáticos. Un nudo es una curva simple cerrada en el espacio tridimensional. La diferencia entre un nudo matemático y uno real es que el matemático tiene ambos extremos de la cuerda unidos (como una liga) y el real no. El problema central consisten en averiguar si un nudo puede reacomodarse para convertirse en otro nudo sin

cortar la cuerda. Cuando esto sucede se dice que son equivalentes. El problema central de la teoría de los nudos consiste en comprobar la equivalencia entre ellos. Una de las aplicaciones que tiene la teoría de los nudos en la actualidad es para ver la equivalencia entre dos cadenas de DNA.

Los diagramas de nudos ayudan a visualizarlos. Se dibujan en dos dimensiones y es importante representar qué parte del nudo va encima de cual en los cruces. Es difícil en ocasiones saber si los cruces de líneas de un nudo son realmente cruces. Cuando los nudos no tienen cruces se llaman nudos triviales. Actualmente no existe una manera de catalogarlos debido a la gran cantidad de nudos que existen y lo complejo que resulta visualizarlos.



Un nudo trivial y un equivalente



Los anillos borromeos no son nudos porque se forman con varias curvas separadas. Recibieron su nombre por el escudo de armas de la familia Borromeo de Italia.

Variedades

Las variedades son espacios topológicos que localmente parecen espacios Euclidianos aunque globalmente no lo sean. Para ejemplificar esto se recurre al periodo en que la humanidad pensó que la Tierra era plana por haberla conocido sólo localmente. Cualquier objeto que a pequeña escala parece plano es una variedad.

Un objetivo en topología es distinguir entre distintos tipos de variedades. Dos figuras pueden ser topológicamente equivalentes aunque sus variedades sean diferentes. Una variedad, como un espacio topológico, puede ser compacta o no-compacta, conectada o desconectada.

Las dimensiones son importantes en el estudio de variedades. En las variedades de una dimensión (variedad-1) se está hablando de líneas que pueden ser curvas, círculos, etc. En las variedades-2 se está hablando de superficies curvas.

Las variedades son importantes en física, así como en matemáticas porque permiten a las superficies complicadas ser estudiadas a través de propiedades mejor comprendidas de espacios más simples.

Existen diferentes clases de variedades:

Variedad topológica – Es el tipo más sencillo de variedad que existe. Parece localmente como un espacio Euclidiano ordinario \mathbb{R}^n . Es homeomorfo a un espacio Euclidiano, lo cual quiere decir que cada punto tiene una vecindad para la cual existe un homeomorfismo que establece un mapa para la vecindad hacia \mathbb{R}^n . Estos homeomorfismos son mapas de la variedad.

La dimensión de una variedad es la dimensión de los mapas del espacio Euclidiano. Todos los puntos en una variedad conectada tienen la misma dimensión. Una variedad-0 es un espacio discreto (espacio topológico en el cual los puntos están separados entre sí). Una variedad-1 cuando es conectada, es homeomorfa a \mathbb{R} o al círculo y cuando es desconectada se convierte en uniones de fracciones de estos. Una variedad-2 (superficie) es homeomorfa a la esfera, a una suma conectada de toros o a una suma de planos proyectivos. Las variedades-3 pueden ser resueltas con la Conjetura de Geometrización de Thurston y el conocimiento actual. Las variedades- n , siendo $n < 3$, son imposibles. No existe un algoritmo que determine en esos casos si las variedades están conectadas. Existe una clasificación de variedades conectadas de manera simple de dimensión ≥ 5 .

Variedad diferenciable – Es una especie de variedad topológica. Si los mapas locales en una variedad son compatibles en algún sentido, se pueden definir sus direcciones, espacios tangentes y funciones diferenciales. Permite el uso del cálculo. Cada punto tiene un espacio tangente; es un espacio Euclidiano de n -dimensión que consiste en vectores tangentes de las curvas a través de los puntos.

Los dos tipos más importantes de variedades diferenciales son las variedades suaves y las analíticas. Para las variedades suaves los mapas de transición son suaves (infinitamente diferenciables) y para las variedades analíticas los mapas de transición son analíticos.

Variedad Riemanniana – Una variedad Riemanniana es una variedad analítica en la cual cada espacio tangente varía poco en cada punto. Estas variedades permiten medir sus distancias y ángulos.

Variedad Finsler – Una variedad Finsler permite la definición de distancias, pero no de ángulos. Son variedades analíticas en las cuales los espacios tangentes varían poco en cada punto. Todas las variedades Riemannianas son variedades Finsler.

Grupos Lie – Los grupos Lie tienen la estructura de un grupo topológico en un producto interno, permitiendo la noción de multiplicación de puntos en la variedad. Cualquier grupo Lie compacto puede obtener una estructura de una variedad Riemanniana.

Homotopía

El concepto de la homotopía es la base de la topología algebraica. Dos funciones continuas de un espacio topológico hacia otro son homotópicas si una puede ser deformada continuamente en la otra, esta deformación se llama homotopía entre las dos funciones. La homotopía sirve para identificar grupos homotópicos y cohomotópicos.

Geometría Fractal

La geometría euclidiana se basa en razonamientos idealistas alejados de la realidad: por ejemplo, una línea no tiene espesor y sólo longitud. Es normal cuando nos enfrentamos a un problema por primera vez verlo de manera simplificada. La geometría euclidiana logró simplificar muchas cosas de la naturaleza, pero la realidad es que estamos rodeados de más formas que se alejan de este tipo de geometría que de formas que se asemejan. Los fractales han comprobado poder resolver muchos problemas reales que con la geometría euclidiana no se resuelven.

Estos son algunos hechos raros de la naturaleza que han sido ignorados por la ciencia:

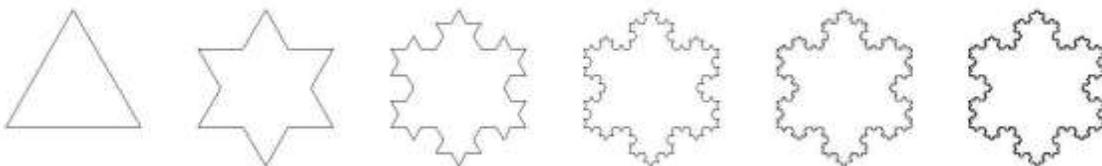
- **Línea de costa** - tiene medida infinita porque al cambiar de escala (acercándose cada vez más) se observan más detalles antes imperceptibles que aumentan su longitud total; y esto parece no tener fin.
- **Partículas brownianas** – siguen trayectorias muy irregulares. Si se traza la trayectoria de una de ellas en lapsos de tiempos diferentes se observa que entre dos puntos de una trayectoria original existe toda una trayectoria nueva, con las mismas características de la trayectoria original e impredecible con los dos puntos que la delimitan.
- **Curvas sin tangente** – al notar la cantidad de detalles que surgen en una curva al irse aproximando a ella, resulta imposible trazar una línea tangente.
- **Leyes de Newton** – son reales si se conoce situación inicial; el más ligero cambio entre lo real y lo percibido lleva a resultados diferentes. La situación inicial y las consecutivas sólo se conocen de manera aproximada.

Fractales

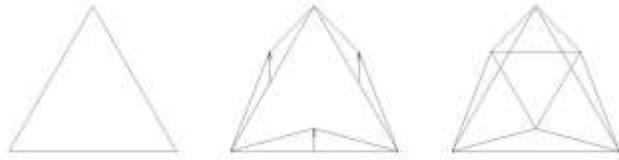
La palabra fractal viene del Latín “fractus” que significa irregular. Hay muchas formas en la naturaleza que parecen seguir las reglas con las que se forman los fractales, los cuales están compuestos por partes iguales al total. Los fractales son “autosimilares” porque cada parte es igual al total. La curva de Koch es un fractal que forma una región finita con una línea de longitud infinita (debido a la cantidad infinita de figuras iguales a la total que la componen y afectan su longitud). También es imposible ubicar una línea tangente porque cada punto es un punto de quiebre.

Estos son dos ejemplos de fractales (con su proceso de construcción):

Curva de Koch



Cadena montañosa (paisaje fractal)



Benoit Mandelbrot publicó en 1975 su primer ensayo sobre fractales y en 1977 los definió como conjunto de formas con dimensión fraccional. A finales de los años setenta Mandelbrot construyó algunos fractales que hasta hoy se conocen utilizando un proceso muy sencillo: repitiendo la misma operación muchas veces. Utilizar una fórmula de esta manera se llama iteración y se representa como:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Esto es como elevar al cuadrado cada resultado de la fórmula. La secuencia de número que se genera se llama órbita de iteración y el punto al que se busca llegar (para este caso el infinito) es el atractor. Para esta fórmula, si el número inicial es menor a uno, el atractor es cero; si el número inicial es uno, el atractor es uno; y si el número inicial es mayor a uno, el atractor es infinito. El tipo de número que utilizó Mandelbrot para trabajar son los complejos.

Los números complejos consisten en dos valores escritos entre paréntesis y separados con una coma: el primero real y el segundo imaginario; están representados en un plano complejo donde el eje “x” equivale a los reales y el “y” a los imaginarios.

$$z = (x,y)$$

Las operaciones aritméticas en número complejos se realizan sin mezclarlos entre sí. Esto quiere decir que, en los número complejos se suman los reales con los reales y los imaginarios con los imaginarios (sin mezclarse). El resultado termina siendo un nuevo número complejo. En una multiplicación es un poco más complejo:

$$z_1 z_2 = (a,b) (c,d) = (ac - bd, ad + cb)$$

$$z_1 z_2 = (2,1) (4,3) = (5,10)$$

Conjuntos de Julia

El primer trabajo de hacer iteraciones con números complejos fue de Gaston Julia y Pierre Fatou a principios de siglo XX. Mandelbrot recuperó su análisis sobre al iteración de números complejos cuando la fórmula establece que se eleven los números al cuadrado y se le sumen una constante.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Cuando los puntos de una iteración escapan al infinito son escapistas y cuando no lo hacen son prisioneros.

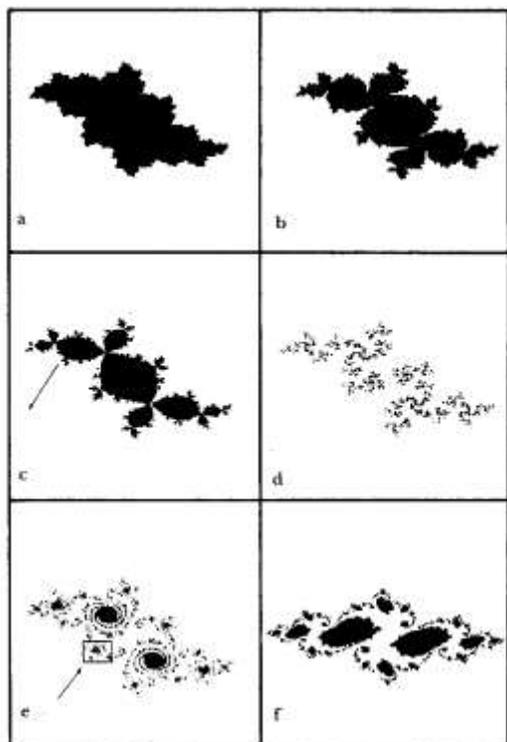


Tabla 1 - Conjuntos de Julia asociados con la iteración $z_{n+1} = z_n^2 + c$

a) $c = (0.12, 0.57)$; b) $c = (-0.12, 0.66)$; c) $c = (0.12, 0.74)$; d) $c = (-0.25, 0.74)$; e) $c = (-0.194, 0.6557)$; f) $c = (0.75, 0.11)$

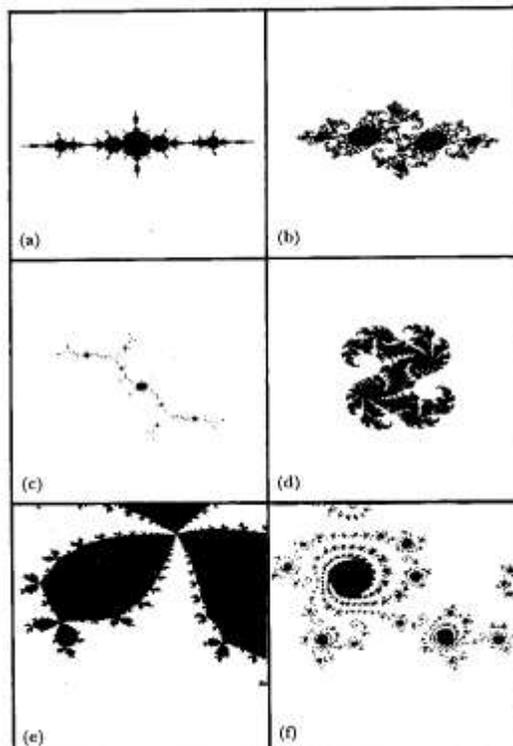


Tabla 2 - Conjuntos de Julia asociados con la iteración $z_{n+1} = z_n^2 + c$

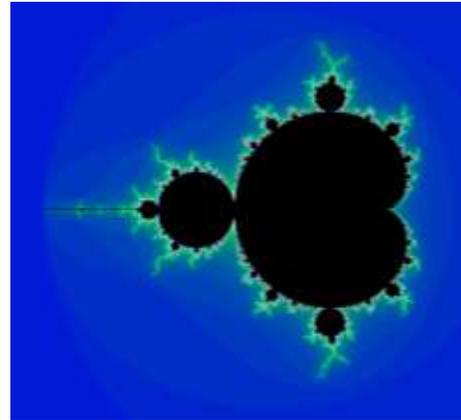
a) $c = (0.745, 0.113)$; b) $c = (1.25, 0)$; c) $c = (-0.1565, 1.0322)$; d) $c = (0.32, 0.043)$; e) detalle de figura 8c en una amplificación en el orden de $1 / 0.0001$; f) detalle de figura 8c en una amplificación en el orden de $1 / 0.25$

Existen dos clases de Conjuntos de Julia: aquellas donde el cuerpo es una sola pieza (conexa) representada por los fractales en 1a - 1c y 2a - 2d; y aquellas donde el cuerpo está desmembrado (disconexa) 1d - 1f. Julia y Fatou probaron un teorema alrededor de 1919 en el cual establece que: los valores de c que generan Conjuntos de Julia conexos no se disparan al infinito cuando la iteración se aplica sobre el punto $z_0 = (0,0)$, lo cual hace al punto $(0,0)$ prisionero. Si $z_0 = (0,0)$ se comportan como escapista, la figura generada será disconexa.

Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot aprovechó este teorema para buscar los valores de c que generan los Conjuntos de Julia conexos. Al hacerlo llegó a este fractal que lleva su nombre. Tiene forma de un cardiode con un círculo en un extremo y rodeado en su periferia por figuras iguales pero más pequeñas. Es un fractal conexo por estar completamente unido en una sola pieza y no lineal debido a que pierde su autosimilitud (en el sentido estricto de la palabra) al acercarse en su frontera porque conforme se van haciendo más chicas las copias

también se hacen más “peludas” y no son “exactamente” iguales. Este conjunto contiene toda la información sobre las propiedades geométricas de cada Conjunto de Julia, pero codificada. Esto quiere decir que todo valor de c que termina en el interior del cuerpo principal de este fractal tiene forma de un Conjunto de Julia como el 1a; si se encuentra dentro de sus primeras copias en su periferia, tiene formas de un Conjunto de Julia como el 1c; y si termina en uno de los filamentos que surgen de él, tiene forma de un Conjunto de Julia como el 2c. Todo Conjunto de Julia queda representado en el Conjunto de Mandelbrot. *(Ver imágenes de la superficie del conjunto de Mandelbrot al final del documento.)*



Conjunto de Mandelbrot

Características de fractales

Los fractales logran generar una forma geométrica bastante compleja con una fórmula bastante sencilla. Su diferencia con la geometría euclidiana es que en ésta última los elementos básicos se generan de manera directa y en la geometría fractal de manera indirecta (a base de procedimientos matemáticos).

Las transformaciones pueden ser lineales y no lineales. Las primeras respetan la forma inicial y las segundas no; y las reglas del primer dialecto son más sencillas y las del segundo dan más riqueza de posibilidades. Un fractal es aleatorio cuando en su estructura intervienen elementos afectados por el azar.

Los fractales además de ayudar a describir la geometría de las formas naturales también sirven para analizar sus propiedades dinámicas, el modo en que evolucionan y cómo interaccionan entre sí. El polvo de Cantor es un fractal que ha sido utilizado para representar la distribución de los fragmentos que componen los anillos de Saturno, los cuales no son nada homogéneos; las fluctuaciones del precio del algodón desde el siglo XIX; y las variaciones de nivel de agua del río Nilo desde hace 2000 años. Su patrón coincide con la distribución de las galaxias y estrellas del universo. Parece ser que donde haya habido algún proceso irregular o caótico creando un ambiente, aparecen estructuras fractales. Los fractales son una buena aproximación de las formas naturales.



Polvo de Cantor (procedimiento de construcción).

Estas ecuaciones muestran la relación entre las figuras geométricas tradicionales y los fractales. Se puede inferir de ellas que la superficie del cerebro es fractal. Lo mismo sucede con la membrana que cubre los huesos de la nariz en algunos animales; la relación entre área y volumen es fractal en lugar de euclidiana.

Ecuación en toda figura geométrica:

$$(\text{Perímetro})^2 = (\text{número}) * (\text{área})$$

Ecuación en todo volumen geométrico:

$$(\text{área de superficie})^3 = (\text{número}) * (\text{volumen})^2$$

Ecuación en figuras fractales:

$$(\text{área de superficie})^3 = (\text{número}) * (\text{volumen})^a$$
$$2.73 < a < 2.79$$

Estos son algunos ejemplos de fractales en la naturaleza:

- Superficie del cerebro
- fosas nasales de algunos animales
- descargas y nivel de crecidas de ríos
- economía
- lingüística

Los fractales no usan números enteros porque la geometría euclidiana con sus números enteros no alcanza la esencia de las formas irregulares. La dimensión fraccionaria fue una propuesta para medir características no definidas claramente (el grado de irregularidad de una línea, la aspereza de una superficie, una bahía, etc). Como las irregularidades son constantes, no cambia su valor con la escala con el método de Mandelbrot.

El término “autosimilitud” se utiliza al hablar de fractales para referirse a su característica de ser compuestos por su misma figura general. Un fractal tiene siempre su misma forma aunque se cambie la escala. Un ejemplo de esto son las partículas brownianas.

Las condiciones iniciales que se toman en cuenta en las ciencias para una predicción no son iguales a las condiciones iniciales reales. Estas diferencias generan cambios en las condiciones finales que pueden ser imperceptibles (si no es mucha la diferencia) hasta obtener resultados totalmente distintos a los esperados (si son muy grandes). Como ejemplo podemos analizar qué sucede si se deja caer una piedra al suelo y se lanza otra en un ángulo con respecto a la horizontal. La primera tendrá una trayectoria vertical y la segunda tendrá una trayectoria curva aunque las dos sean afectadas por las mismas leyes de gravedad.

El caos, fenómenos no lineales

Las reglas deterministas definen a un sistema su camino a seguir y hacen que el sistema se comporte de un modo predecible. En ocasiones algunos sistemas no lineales actúan de un modo impredecible; a esto se llama caos. El caos es muy sensible a las condiciones iniciales, las cuales pueden producir efectos inesperados en la evolución de cualquier sistema. El cambio del orden al caos puede darse de manera rápida o gradual.

La teoría del caos ha podido explicar fenómenos de muchas ciencias que no habían podido ser explicados: los cambios en la bolsa de valores, los cambios climatológicos, el análisis de un flujo en turbulencia, etc. Es importante considerar la posibilidad de predecir las condiciones de un fenómeno en el futuro considerando sus condiciones iniciales. Para lograrlo existen las funciones en matemáticas, las cuales se obtienen construyendo un modelo analizando patrones de cambio.

Si se analizara qué tanto crece la población de insectos en un año en una determinada zona: terminaríamos con una ecuación como esta:

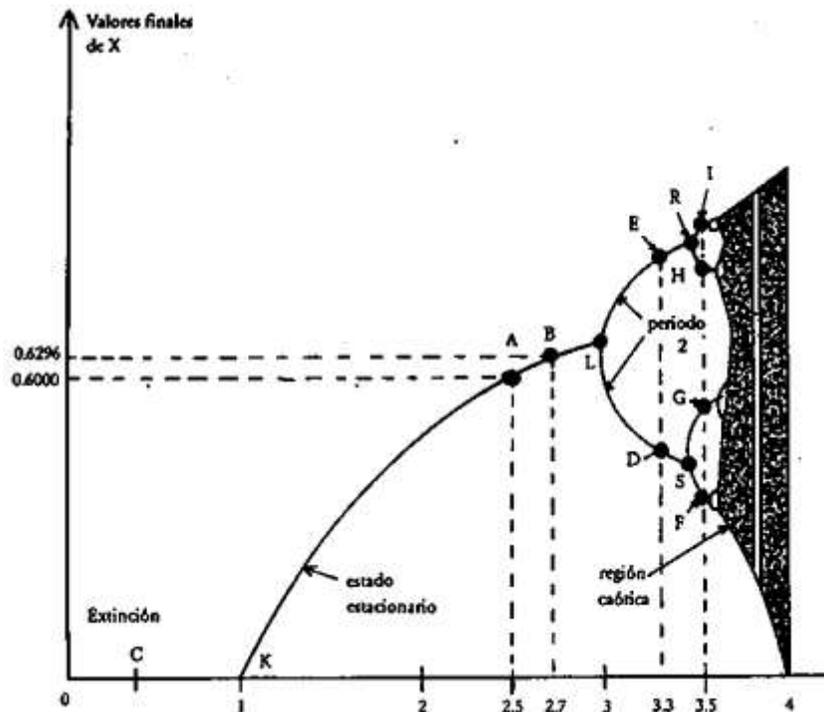
$$y = q x (1 - x)$$

donde:

y = cantidad de insectos que se predice para el año próximo

q = factor de crecimiento por año

x = población presente



Gráfica de los valores que se obtienen con referencia a la población como función del parámetro q y que muestra dos tipos de regímenes: el periódico (estable) y el caótico.

Conforme crece el valor de “q” la ecuación se comporta de maneras diferentes. Cuando $q = 2.5$, el valor final de la ecuación es 0.60 independientemente de el valor de los demás números y su periodo de repetición es anual. Cuando $q = 3.3$, existen dos valores finales (0.8236 y 0.4794) que se repiten cada dos años alternándose. Conforme sigue aumentando el valor de q aumentan las bifurcaciones hasta llegar a una región en la cual no se puede predecir nada porque son muchos los posibles resultados; esta región se llama caótica. Cuando $q = 4$ el valor final es de 0. Esta ecuación tiene dos tipos de regímenes: uno estable y otro caótico.

Es importante mencionar que la frecuencia es inversamente proporcional al periodo, lo cual quiere decir que al ir aumentando el valor de “q” el periodo va aumentando y la frecuencia va disminuyendo. Al llegar a la región caótica, deja de haber tanto periodo como frecuencia. La frecuencia es utilizada para obtener resultados experimentales, como en el caso de una turbulencia.

Las condiciones iniciales de cualquier situación física que se estudie cambian el resultado final. Jamás se tienen las condiciones iniciales medidas con precisión absoluta, y mientras más grande sea el margen de error, menor es la posibilidad de realizar una predicción. En esta ecuación, en su régimen estable hay determinismo y en el caótico no. Determinismo quiere decir que pueden hacerse predicciones porque el margen de error de las condiciones iniciales se va reduciendo hasta llegar a un solo resultado. Durante el régimen caótico este margen aumenta, dando como resultado un número considerable de respuestas.

Seguridad y catástrofe

En un sistema complejo existe un área periódica y otra caótica. La mayoría de estos sistemas están compuestos por varios parámetros; esto genera ecuaciones mucho más complejas. En la gráfica de la derecha las regiones negras corresponden al área de comportamiento estable; y las blancas, al área de comportamiento caótico.



Gráfica de sistema complejo

Objetos Complejos

Los fractales son el prototipo de los “objetos complejos”. Se les considera complejos por el hecho de presentar detalles a toda escala. Existen sistemas que bajo las condiciones adecuadas tienden a autorganizarse y comparten características similares como son: habilidad para crear estructuras macroscópicas complejas y ordenadas, susceptibilidad a condiciones externas, capacidad para autoregularse y responder y adaptarse a las condiciones del medio. Estos sistemas siempre están fuera de equilibrio debido a las circunstancias que los rodean y utilizan la energía que absorben del exterior para organizarse. Se llaman estructuras disipativas. Un ejemplo es cuando un recipiente con una capa horizontal de líquido es calentada.

La secuencia de Fibonacci

Los números de la serie de Fibonacci además de estar relacionados con la sección áurea también están relacionados con los fractales. Si se les multiplica el número 1.6 y luego se redondea al número más cercano, la serie resultando después del número 2 es igual a la inicial; esto quiere decir que es autosimilar. Si los números se dividen entre sí en orden ascendente se llega al punto en que todos son 0.618. Si se crea una serie de fracciones autosimilares iniciando con el número 1 en donde cada resultado se ubica en el denominador de una fracción y se le suma uno, y se ubica en el numerador otro 1, el resultado será otra vez 0.618. Al parecer, estas características de la serie de Fibonacci son el resultado de que se obtiene a través de un proceso en el cual se utiliza una fórmula para obtener el número siguiente utilizando el número anterior (en esto consiste el concepto de autosimilitud).

Caos y fractales en todos lados

El caos existe en muchas partes. Cuando se calienta un recipiente con agua, en la parte inferior el agua aumenta su temperatura y se eleva a la parte superior, donde el agua más fría no tiene más remedio que bajar para ser calentada. Este proceso genera movimientos cilíndricos en el interior del recipiente. Cuando la diferencia de temperatura en las partes superior e inferior del recipiente es demasiado grande estos movimientos cilíndricos se convierten en una turbulencia y llegan a un estado de caos.

El cuerpo humano está compuesto por procesos complicados, los cuales se cree que están relacionados con el caos. Cuando a una persona esquizofrénica se le pone a que sus ojos sigan el movimiento de un péndulo, no pueden hacerlo; sus ojos se mueven erráticamente. Esta es una forma de caos dentro del cuerpo humano que proviene de las variaciones de las señales que provienen del sistema nervioso central, ya que éste es el que controla los movimientos de los ojos. Los vasos sanguíneos se dividen en ramificaciones para obtener un máximo aprovechamiento de la sangre en todas las células del cuerpo. Se cree que la estructura de esta parte del sistema circulatorio tiene carácter fractal. El latido del corazón tiene un ritmo en el cual intervienen muchos procesos; si se llega a perder la sincronización se entraría en un estado de caos. Existe la creencia que la información

genética que contiene una molécula de ADN no es muy detallada sino más bien una codificación de la instrucción que se debe iterar para formar cada parte del cuerpo humano.

La ley de Zipf demuestra que las palabras más utilizadas en un escrito son las menos importantes. Las preposiciones, los artículos y las conjunciones son las más utilizadas incluso por al gente con un vocabulario más amplio. Se cree que la ley de Zipf tiene estructura fractal. El lenguaje es complejo y tiene tanto características del caos como del orden. Una característica del régimen caótico es que genera variedad, lo cual motiva a la innovación, mientras que el régimen periódico genera confiabilidad y motiva al orden.

La bolsa de valores tiene un comportamiento difícil de predecir. Si se encontrara la manera de predecirla, esta información cambiaría el comportamiento de la gente, por lo cual no podría funcionar. Se piensa que a través de la teoría del caos y de los fractales se pueden obtener resultados muy cercanos a la realidad.

Posiblemente como resultado de medir la distancia entre dos puntos situados en una costa y todo el estudio a que condujo esto, se llegó a poder dibujar mapas utilizando fractales. El transmitir imágenes de montañas y continentes con el uso de fractales es más eficiente que con los métodos convencionales, porque sólo es necesario transmitir la figura inicial y el algoritmo que se debe repetir.

Se ha estudiado el comportamiento del sistema solar y se llegó a la conclusión que es un sistema complejo y que sólo se puede predecir lo que ocurrirá dentro de él en un periodo limitado de tiempo (de varios miles de años). Es complejo por la cantidad de planetas, satélites y asteroides que contiene; las fuerzas gravitacionales entre todos ellos alteran ligeramente las órbitas de los planetas que giran alrededor del sol. Se ha hecho la pregunta que si sería posible que todas las fuerzas se unan para lograr una fuerza resultante que cambie radicalmente la órbita de algún planeta, satélite o asteróide, pero no se ha podido contestar. En un sistema complejo como éste las alteraciones en las órbitas ocurridas en un periodo de caos con el tiempo regresan a la normalidad. Existen casos que no se han podido explicar todavía como la órbita poco común del satélite Hiperión alrededor de Saturno, la cual no es perpendicular a la fuerza gravitacional del planeta y no coincide con su periodo de rotación.

Los fractales tienen la capacidad de optimizar la cantidad de material y al mismo tiempo lograr una gran resistencia. Pueden visualizarse en tres dimensiones. El polvo de Cantor es un fractal unidimensional. La empaquetadura de Sierpinski es un fractal bidimensional que tiene un perímetro infinito y área cero. La esponja de Menger es un fractal tridimensional que tiene área infinita y volumen cero. Al llegar a las formas tanto bidimensionales como tridimensionales se logra una eficiencia estructural interesante porque pueden convertirse en armaduras muy optimizadas que soportan cargas con una cantidad mínima de material.

Resumen del capítulo I

En este capítulo se han analizado las principales familias geométricas que existen. Parece no haber una manera universal de catalogarlas; por lo cual, en este documento se buscó que cada familia tuviera una identidad totalmente diferente a las demás (desde su planteamiento) y se ordenaron conforme se fueron descubriendo en la historia. Existen otras familias que se empalman con varias de las familias mencionadas pero que no proponen nada en sí (como geometría plana y geometría tridimensional) que en realidad están incluidas dentro del documento dentro de cada familia.

Las familias geométricas son: geometría euclidiana (estudia objetos en un espacio conformado por líneas y planos rectos que llegan hasta el infinito), geometría analítica (mezcla de geometría euclidiana con álgebra a través de un plano cartesiano), geometrías no euclidianas (están en contra del quinto postulado de la geometría euclidiana), geometría descriptiva (estudia la representación de objetos tridimensionales en planos bidimensionales), geometría diferencial (geometría de superficies curvas), topología (estudia las transformaciones entre formas diferentes) y geometría fractal (estudia formas con características de fractales). Las familias geométricas no parecen abarcar el campo completo de la geometría de manera coherente y equilibrada, sino más bien parecen haber surgido de estudios en áreas específicas siguiendo líneas de investigación diferentes. Es difícil hablar de una evolución a través de la historia en donde cada familia de figuras geométricas lleve a la otra. La relación tan azarosa que existe entre las familias hace pensar en la posibilidad de que puede existir una mayor cantidad de familias conforme se siga investigando en esta área de las matemáticas.

Un aspecto interesante de las familias es que a pesar de que todas son diferentes, existe la posibilidad de interrelacionarlas. Por ejemplo, en ocasiones una esfera puede estudiarse utilizando geometría no-euclidiana y euclidiana (si se estudia internamente es no-euclidiana y si se estudia externamente depende del espacio geométrico en que se encuentre). Esto quiere decir que un triángulo esférico puede no estar del todo desligado de la geometría euclidiana (la esfera podría estar dentro de un espacio euclidiano). Si en este espacio euclidiano hubiera otros objetos que se intersectaran con esta esfera, podría haber un análisis muy interesante en el cual se mezclan ambas familias.

En la arquitectura es importante aplicar los conocimientos de geometría aprovechando los avances que ésta haya tenido. El simple hecho de saber de antemano de la existencia de una familia geométrica diferente lleva a tomar decisiones de diseño totalmente distintas. En el estudio y la comprensión de las familias y de sus figuras radica la posibilidad de aprovecharlas y combinarlas.

Capítulo II

Geometría convencional en arquitectura

Dos dimensiones Polígonos

Los polígonos son figuras geométricas compuestas por líneas rectas (aristas) que encierran un área. Cuando todas las aristas de un polígono tienen la misma longitud, se le denomina polígono regular. Todos los polígonos regulares están inscritos en un círculo que se intersecta con sus vértices y contienen otro interior que es tangente a sus aristas.

Triángulo

El triángulo es una figura geométrica de tres aristas. Según la longitud de sus aristas, puede ser equilátero, isósceles o escaleno. En la geometría euclidiana, la suma de sus ángulos es igual a 180° ; en la geometría esférica, es mayor a 180° ; y en la geometría hiperbólica es menor a 180° . En la geometría euclidiana, dos de sus ángulos tienen que ser menores a 90° (agudos). Si los tres son agudos se llama acutángulo; si uno es igual a 90° se llama triángulo rectángulo; y si uno es mayor a 90° se llama obtusángulo.

Cuadrilátero

El cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro aristas. Si las cuatro aristas son iguales y sus cuatro ángulos son rectos, se llama cuadrado; si las aristas no son iguales pero sus cuatro ángulos son rectos, se llama rectángulo; si sus cuatro aristas son iguales pero sus cuatro ángulos no son rectos, se llama rombo; si sus cuatro aristas son diferentes y sus cuatro ángulos no son rectos, se llama romboide.

Pentágono

El pentágono es un polígono que tiene cinco aristas. El pentágono regular tiene proporciones áureas inherentes.

Trapecio

Un trapecio es un polígono de cuatro aristas (dos de ellas opuestas son paralelas y las otras dos no. El trapecio tiene aspecto de triángulo truncado.

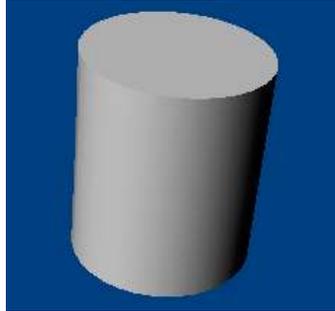
Paralelogramo

El paralelogramo es un cuadrilátero con las aristas opuestas paralelas entre sí. Los cuadrados, los rectángulos y los rombos son paralelogramos.

Tres dimensiones

Sólidos primarios

Cilindro - Un cilindro es una figura tridimensional formada por dos círculos paralelos como bases y un plano curvo que los une. Tiene un vértice interno que une los centros de los dos círculos. Es formado con un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados, generando dos círculos paralelos y perpendiculares al rectángulo. Un cilindro oblicuo se genera cortando oblicuamente al cilindro en sus extremos.



$$S = 2\pi r h$$
$$V = \pi r^2 h$$

Altura: h
Radio: r
Superficie total: S
Volumen: V

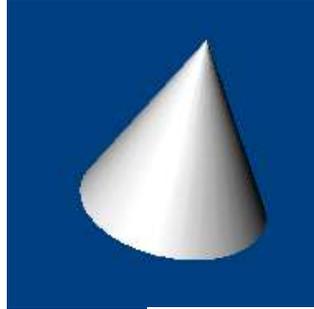
Esfera – Una esfera es una figura tridimensional que se obtiene girando un semicírculo alrededor de su diámetro. Su superficie mantiene una distancia constante hasta el centro de cualquier punto sobre ella. Desde cualquier punto de vista se ve redonda. La esfera es la figura que presenta la menor superficie en relación con su volumen.



$$S = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{3}{4}\pi r^3$$

Altura: h
Radio: r
Superficie total: S
Volumen: V

Cono – El cono se crea rotando un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. El círculo que se forma en su superficie se le llama base y el extremo opuesto es llamado vértice o ápex. El cono también puede ser definido como una pirámide con base circular. Un cono recto tiene su vértice encima del centro del círculo de la base. Un cono oblicuo se obtiene cortando oblicuamente la base.

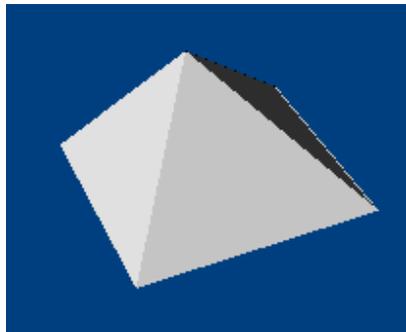


$$S = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$V = (\pi r^2 h) / 3$$

Altura: h
 Radio: r
 Superficie total: S
 Volumen: V

Pirámide – La pirámide es un sólido tridimensional conformado por caras triangulares que se unen en un vértice y una base (en el extremo opuesto al vértice) que puede tener la forma de cualquier polígono. La pirámide toma el nombre del polígono de su base: triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. Una pirámide oblicua se obtiene cortando oblicuamente la base.



$$S = L P/2 + B$$

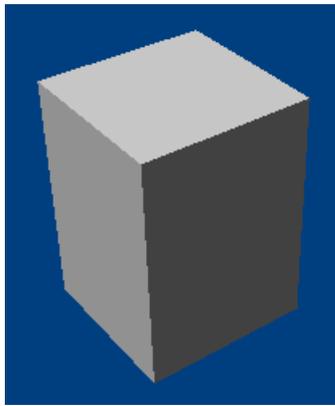
$$V = 1/3 B h$$

Altura: h
 Area of base: B
 Altura lateral: L
 Superficie: S
 Volumen: V
 Perímetro de Base: P

Cubo – El cubo es un tipo específico de prisma. La información de este sólido está con los Sólidos Regulares debido a que tiene una mayor relación con ellos que con los sólidos primarios.

Otros sólidos

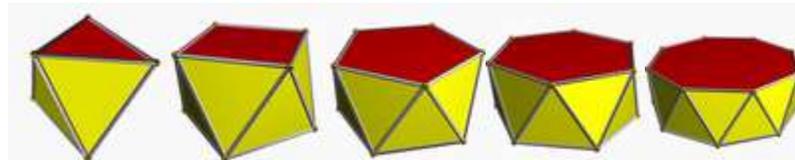
Prisma – Un prisma es un poliedro formado por dos copias paralelas de su base poligonal unidas por paralelogramos. Si las caras de unión son rectangulares se llama prisma recto. Un prisma adquiere el nombre del polígono de sus bases: triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. Los prismas cuyas bases son paralelogramos se llaman paralelepípedos. Los prismas oblicuos son los que tienen caras laterales oblicuas con respecto a sus bases. El cubo es un caso especial de prisma. Un cuboide es un prisma rectangular.



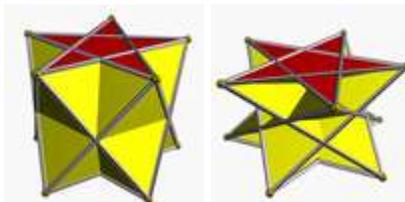
$$S = 2B + Ph$$
$$V = B x h$$

Altura: h
Area of base: B
Superficie: S
Volumen: V
Perímetro de Base: P

Antiprisma – Es un prisma generado con dos polígonos paralelos como bases con n aristas y $2n$ triángulos formando los lados. En ocasiones sus bases paralelas poligonales están giradas de tal modo que se unen por una cenefa de triángulos equiláteros alternados. Son una subclase de prismatoides. El octaedro es un antiprisma inherentemente. Kepler fue el primero en hablar de los antiprismas.



Se pueden construir antiprismas uniformes con estrellas poligonales.



Prismoide – Un prismoide de lados planos y teniendo el mismo número de vértices en ambos planos paralelos. Las caras de un prismoide pueden ser paralelogramos o trapezoides.

Prismatoide – Un poliedro cuyos vértices se encuentran en dos planos paralelos. Cuando la cantidad de vértices en ambos planos es la misma se llama prismoide.

Poliedros

Un poliedro es un volumen limitado por polígonos. Los elementos que lo caracterizan son las caras (polígonos que lo limitan), las aristas (lados de las caras donde se unen los polígonos) y los vértices (las esquinas de los polígonos, que crean los del poliedro). Cada vértice tiene tres o más caras. Los poliedros son convexos si ninguno de los planos sobre los que están sus caras atraviesan al poliedro. Los poliedros son cóncavos si algún plano de alguna de sus caras atraviesa el poliedro. Los poliedros simples no tienen orificios que los atraviesen. Existe una cantidad infinita de poliedros; en este documento se mencionarán los más conocidos.

Todo poliedro cumple el Teorema de Euler. Este teorema relaciona el número de caras, vértices y aristas de cualquier poliedro simple (sin orificios) con la siguiente fórmula:

$$C + V = A + 2$$

C = número de caras

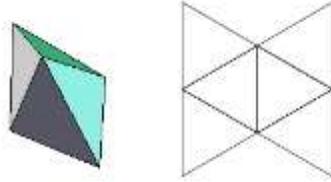
V = número de vértices

A = número de aristas

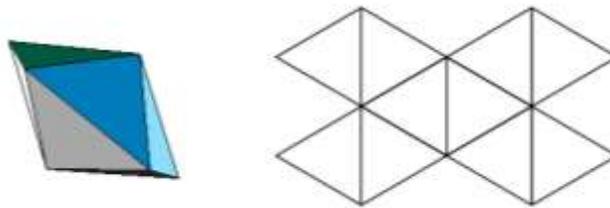
Deltaedros

Es un poliedro formado únicamente por triángulos equiláteros. Del número infinito de deltaedros existentes, sólo ocho son poliedros cóncavos. Tres de ellos son sólidos regulares: tetraedro, octaedro e icosaedro. Los otros cinco son:

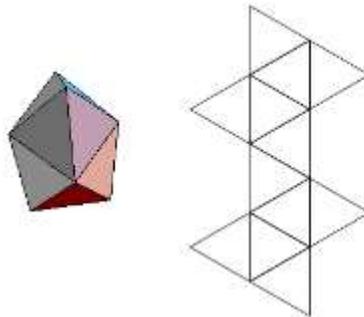
Dipirámide triangular - doble pirámide de tetraedros



dipirámide pentagonal – doble pirámide con 5 triángulos en los dos vértices opuestos.



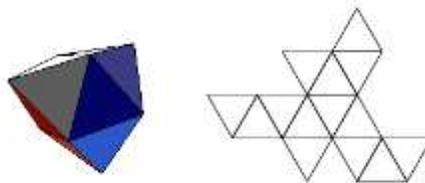
disfenoide romo – es un poliedro formado por otros dos iguales entre sí y unidos en extremos opuestos; uno de ellos está girado 90° con respecto al otro.



$$S = 3\sqrt{3},$$

$$5832 V^6 - 1377 V^4 - 2160 V^2 - 4 = 0,$$

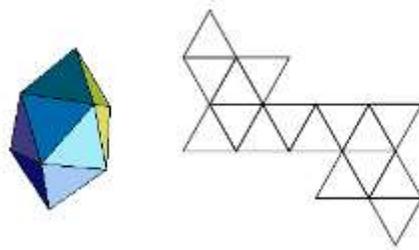
prisma triangular triaumentado – es un prisma de base triángulos con tres pirámides de base cuadrada en sus caras laterales (todos los triángulos son equiláteros).



$$S = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

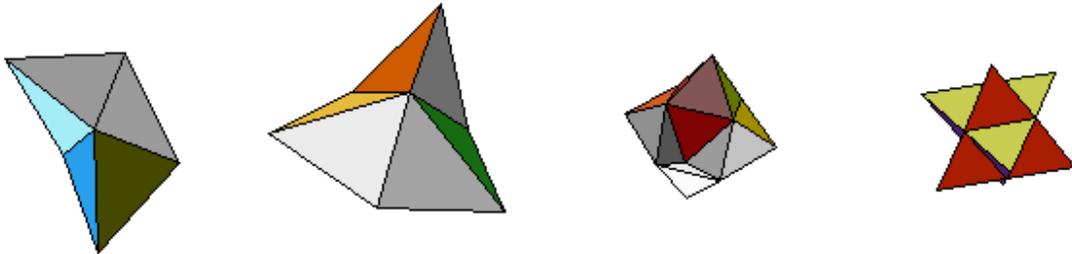
$$V = \frac{1}{4} (2\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

dipirámide cuadrada giroelongada – es un antiprisma de bases cuadradas con una pirámide de base cuadrada en cada base.



$$S = 4\sqrt{3}$$

$$V = \frac{2^{1/4}}{3} (1 + \sqrt{2} + 2^{1/4}).$$



Estos dos deltaedros cóncavos: **bote** (octaedro irregular cóncavo), **tetraedro cumulado**, **cubo cumulado** y “**stella octángula**” (dos tetraedros intersectados), respectivamente.

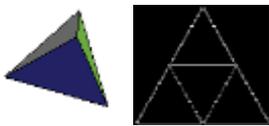


Estos dos deltaedros cóncavos son: **dodecaedro cumulado “escavado”** e **icosaedro cumulado**.

Sólidos platónicos (poliedros regulares)

Los sólidos platónicos tienen como objetivo crear volúmenes “esféricos” a partir de polígonos regulares, iguales entre sí tanto en tamaño como en forma. Existen sólo tres posibles poliedros utilizando el triángulo equilátero (4 triángulos, 8 triángulos y 20 triángulos), uno para el cuadrado (6 cuadrados) y uno para el pentágono (12 pentágonos).

El polígono regular de menor número de lados es el triángulo equilátero. Al reunir triángulos equiláteros (con ángulos de 60°) en los vértices de los sólidos, el número mínimo para generar un sólido son tres triángulos por vértice (reunidos sobre un plano suman 180°), luego siguen cuatro (reunidos sobre un plano suman 240°), luego siguen cinco (reunidos sobre un plano suman 300°) y finalmente, seis triángulos por vértice generan una superficie plana. Con cuadrados, sólo existe la posibilidad de reunir 3 por vértice (reunidos sobre un plano suman 270°) y cuatro generan una superficie plana. Con pentágonos sólo existe la posibilidad de reunir 3 por vértice (reunidos sobre un plano suman 324°) y cuatro generan una superficie irregular. Los hexágonos generan una superficie plana al reunir 3 (el número mínimo para crean un poliedro).

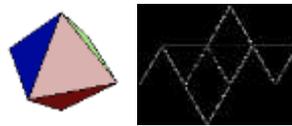


Tetraedro

(4 triángulos, 4 vértices)
(3 triángulos por vértice)

$$s = a^2 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$$



Octaedro

(8 triángulos, 6 vértices)
(4 triángulos por vértice)

$$s = s = 2\sqrt{3}a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{2}a^3$$

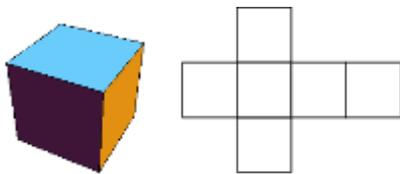


Icosaedro

(20 triángulos, 12 vértices)
(5 triángulos por vértice)

$$s = 5\sqrt{3}a^2$$

$$V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5})a^3$$



Cubo (hexaedro)

(6 cuadrados, 8 vértices)
(3 cuadrados por vértice)

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$



Dodecaedro

(12 pentágonos, 20 vértices)
(3 pentágonos por vértice)

$$s = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{4} (15 + 7\sqrt{5})a^3$$

Sólidos de Arquímedes (poliedros irregulares)

Los sólidos de Arquímedes son una familia de poliedros convexos y semiregulares desarrollados por Arquímedes. Estos poliedros están conformados por diferentes polígonos regulares con lados de la misma dimensión. Algunos de los sólidos de Arquímedes son en realidad transformaciones de los sólidos platónicos. Los más sencillos son los que se obtienen truncando los vértices de los sólidos platónicos: tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, dodecaedro truncado e icosaedro truncado.

Los siguientes dos se obtienen de la misma manera, pero con un corte más profundo. El cubo truncado, que forma octágonos y triángulos, cambia para formar cuadrados y triángulos: cuboctaedro. El dodecaedro truncado, que forma decágonos y triángulos, cambia para formar pentágonos y triángulos: icosidodecaedro. Ambos parecerían como si se hubiera buscado la unión de triángulos con otro polígono regular. Los triángulos quedan descartados por las razones anteriores (la suma de sus ángulos); lo cual deja a los cuadrados y los pentágonos: cuboctaedro e icosidodecaedro respectivamente.

Los siguientes se obtienen con la expansión de un sólido platónico. Las seis caras del cubo se alejan del centro del poliedro y se agregan cenefas de triángulos y cuadrados alternándose entre de ellas (uniéndolas): rombicuboctaedro. Del mismo modo, las doce caras del dodecaedro se alejan del centro del poliedro y se agregan cenefas de triángulos y cuadrados alternándose entre de ellas (uniéndolas): rombicoidodecaedro.

Los siguientes se obtienen separando las caras de un cubo y de un dodecaedro, rotándolas y creando una cenefa de triángulos equiláteros en los perímetros de los polígonos (uniéndolos). Esto sólo es posible en el cubo y en el dodecaedro debido a las sumas de los vértices de los triángulos. Los resultados son: cubo romo y el dodecaedro romo.

Los últimos se obtienen truncando los vértices de otros sólidos de Arquímedes (cuboctaedro e icosidodecaedro) obteniendo: Rombitruncado cuboctaedro y rombitruncado icosidodecaedro.

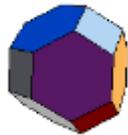
Los sólidos de Arquímedes satisfacen la ecuación $(2\pi - \sigma)V = 4\pi$, en la cual σ es la suma de los ángulos de las caras en un vértice y V es el número de vértices



Tetraedro truncado

(4 hexágonos y
4 triángulos)

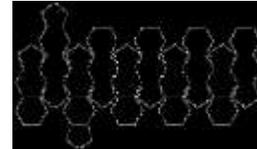
$$S = 7\sqrt{3}$$
$$V = \frac{23}{12}\sqrt{2}.$$



Octaedro truncado

(8 hexágonos y
6 cuadrados)

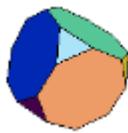
$$S = (6 + 12\sqrt{3})\alpha^2.$$
$$V = 8\sqrt{2}\alpha^3.$$



Icosaedro truncado

(20 hexágonos y
12 pentágonos)

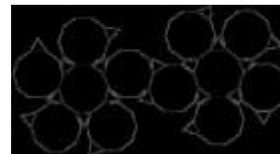
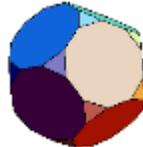
$$S = 3\left(10\sqrt{3} + \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$$
$$V = \frac{1}{4}\left(125 + 43\sqrt{5}\right).$$



Cubo truncado

(6 octágonos y
8 triángulos)

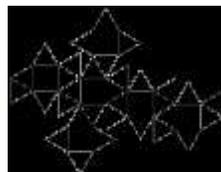
$$S = 2\left(6 + 6\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$
$$V = \frac{1}{3}\left(21 + 14\sqrt{2}\right).$$



Dodecaedro truncado

(12 decágonos y
20 triángulos)

$$S = 5\left(\sqrt{3} + 6\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$$
$$V = \frac{5}{12}\left(99 + 47\sqrt{5}\right).$$

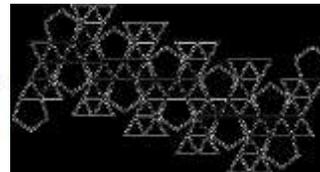


Cubo romo

(6 cuadrados y
32 triángulos)

$$S = 6 + 8\sqrt{3}$$

$$V = \frac{8}{3}\sqrt{3R^2 - 1} + \sqrt{4R^2 - 2}$$

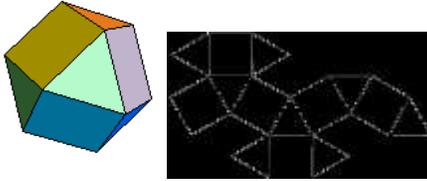


Dodecaedro romo

(12 pentágonos y
80 triángulos)

$$S = \sqrt{15\left[95 + 6\sqrt{5} + 8\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\right]},$$

$$V = (187445810737515625 - 182124351550575000$$
$$x^2 + 6152923794150000x^4 + 1030526618040000x^6 +$$
$$162223191936000x^8 - 3195335070720x^{10} + 2176782336x^{12})_8.$$



Cuboctaedro
(6 cuadrados
8 triángulos)

$$S = (6 + 2\sqrt{3})a^2$$

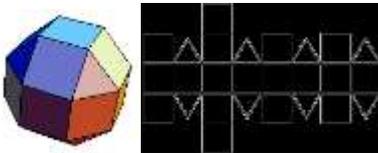
$$V = \frac{5}{3}\sqrt{2}a^3$$



Icosidodecaedro
(12 pentágonos y
20 triángulos)

$$S = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{5} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

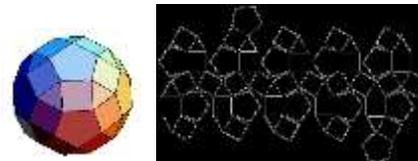
$$V = \frac{1}{6} (45 + 17\sqrt{5}).$$



Rombicuboctaedro
(18 cuadrados y
8 triángulos)

$$S = 18 + 2\sqrt{3}$$

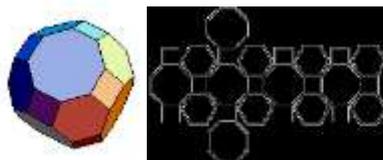
$$V = \frac{1}{3} (12 + 10\sqrt{2}).$$



Rombicosidodecaedro
(12 pentágonos,
30 cuadrados y
20 triángulos)

$$S = 30 + \sqrt{30 \left[10 + 3\sqrt{5} + \sqrt{15(5 + 2\sqrt{5})} \right]}$$

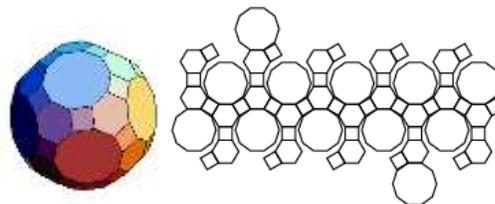
$$V = \frac{1}{3} (60 + 29\sqrt{5}).$$



Cuboctaedro truncado
(12 cuadrados,
8 hexágonos y
6 octágonos)

$$S = 12(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$V = 22 + 14\sqrt{2}.$$



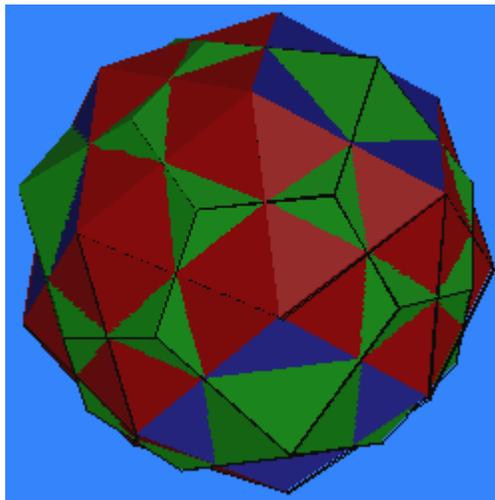
Icosidodecaedro truncado
(30 cuadrados,
20 hexágonos y
12 decágonos)

$$S = 30 \left[1 + \sqrt{2 \left(4 + \sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{6}} \right)} \right]$$

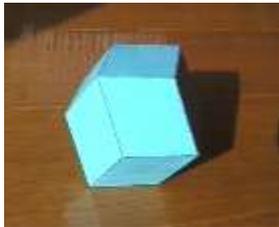
$$V = 95 + 50\sqrt{5}.$$

Sólidos de Catalán

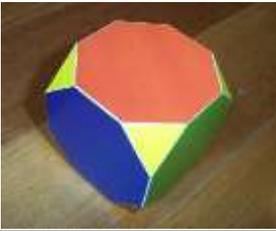
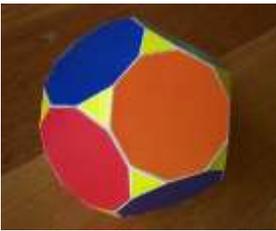
Los sólidos de Catalán son una familia de poliedros que se generan con los duales de los sólidos de Arquímedes. Fueron publicados en 1962 por el matemático belga Eugène Charles Catalán. Un poliedro dual se caracteriza por tener caras y vértices en lugares complementarios con respecto a otro poliedro; todo poliedro tiene un dual. En un poliedro dual el número de aristas de sus caras corresponde a la cantidad de caras que el poliedro original tenía agrupados en cada vértice. Desde cierto punto de vista, es como si el poliedro original fuera truncado con una profundidad tal que el corte avance hasta el centro de sus caras; la diferencia radicaría solamente en que el tamaño del dual estaría más reducido con respecto al original. Los sólidos de Catalán son poliedros convexos de caras uniformes, aunque no de vértices uniformes. Esto se debe a que los Sólidos de Arquímedes que los generan son de vértices uniformes y no de caras uniformes. Las caras que forman un sólido de Catalán no son polígonos regulares, pero sus ángulos diédricos son iguales en todo poliedro. Dos de ellos son poliedros de aristas uniformes (dodecaedro rómbico y triacontaedro rómbico) y dos de ellos tienen figura isomórfica (Icositetraedro pentagonal y Hexecontaedro pentagonal). En las siguientes tablas se muestran las equivalencias entre ambas familias de sólidos. Otra forma de relacionarlos es que si se trazan líneas uniendo los centros de los polígonos de los sólidos de Arquímedes, se obtienen los Sólidos de Catalán.



cubo romo e icositetraedro pentagonal

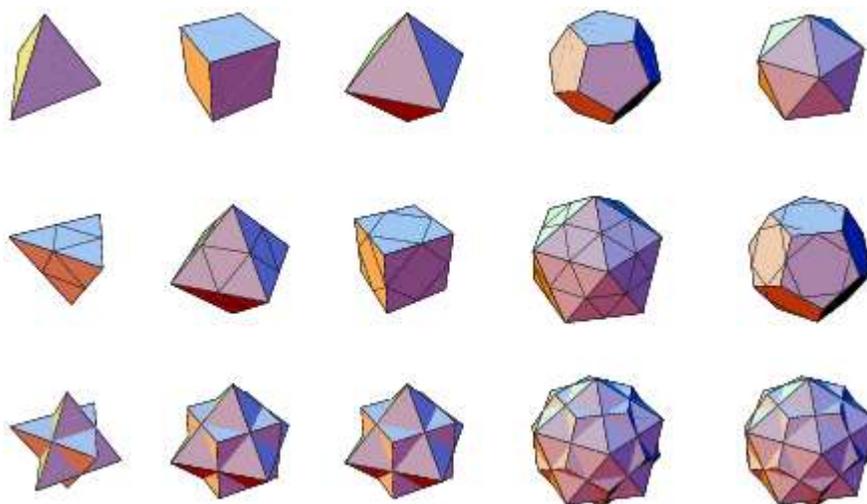
	Sólidos de Arquímedes	Sólidos de Catalán
1	Cuboctaedro 	Dodecaedro rómbico 

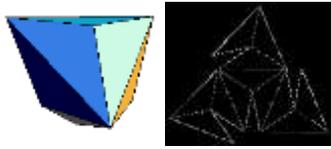
2	<p>Icosidodecaedro truncado</p> 	<p>Triacontaedro disdakis</p> 
3	<p>Cuboctaedro truncado</p> 	<p>Dodecaedro disdakis</p> 
4	<p>Icosidodecaedro</p> 	<p>Triacontaedro rómbico</p> 
5	<p>Rombicosidodecaedro</p> 	<p>Hexecontaedro deltoidal</p> 
6	<p>Rombicuboctaedro</p> 	<p>Icositetraedro deltoidal</p> 
7	<p>Cubo romo</p> 	<p>Icositetraedro pentagonal</p> 

8	<p>Dodecaedro romo</p> 	<p>Hexecontaedro pentagonal</p> 
9	<p>Cubo truncado</p> 	<p>Octaedro triakis</p> 
10	<p>Dodecaedro truncado</p> 	<p>Icosaedro triakis</p> 
11	<p>Icosaedro truncado</p> 	<p>Dodecaedro pentakis</p> 
12	<p>Octaedro truncado</p> 	<p>Hexaedro tetrakis</p> 
13	<p>Tetraedro truncado</p> 	<p>Tetraedro triakis</p> 

En el caso de los sólidos platónicos, no se combinan distintos tipos de polígonos en un mismo poliedro. Esto tiene como consecuencia que sus duales son sólidos platónicos. Si se busca el dual de los sólidos platónicos se obtiene el siguiente resultado:

Sólidos Platónicos	# vértices	# caras	Duales	# vértices	# caras
Tetraedro	4	4	Tetraedro	4	4
Cubo	8	6	Octaedro	6	8
Octaedro	6	8	Cubo	8	6
Dodecaedro	20	12	Icosaedro	12	20
Icosaedro	12	20	Dodecaedro	20	12

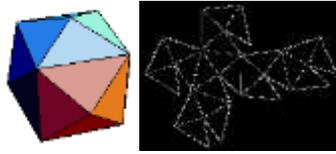




Tetraedro triakis
(12 triángulos)

$$S = \frac{5}{3} \sqrt{11}$$

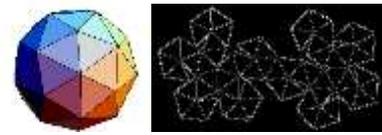
$$V = \frac{25}{36} \sqrt{2}.$$



Hexaedro tetrakis
(24 triángulos)

$$S = \frac{16}{3} \sqrt{5}$$

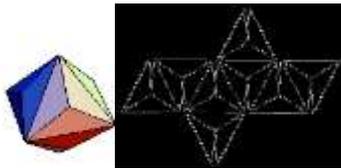
$$V = \frac{32}{9}.$$



Dodecaedro pentakis
(60 triángulos)

$$S = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{1}{2} (421 + 63\sqrt{5})}$$

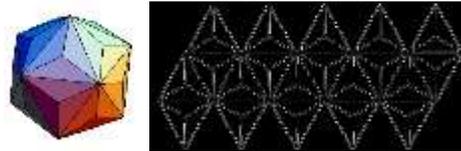
$$V = \frac{5}{36} (41 + 25\sqrt{5}).$$



Octaedro triakis
(24 triángulos)

$$S = 3 \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{2} (3 + 2\sqrt{2}).$$



Icosaedro triakis
(60 triángulos)

$$S = \frac{75}{11} \sqrt{\frac{1}{2} (313 + 117\sqrt{5})}$$

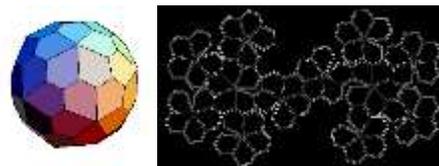
$$V = \frac{125}{44} (19 + 9\sqrt{5}).$$



Icositetraedro pentagonal
(24 pentágonos)

$$S = 3 \sqrt{\frac{22(5t-1)}{4t-3}}$$

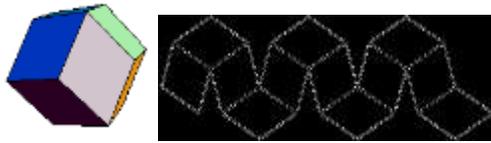
$$V = \sqrt{\frac{11(t-4)}{2(20t-37)}}$$



Hexocontaedro pentagonal
(60 pentágonos)

$$S = 55.2805$$

$$V = 37.5884$$



Dodecaedro rómbico

(12 rombos)

$$S = 8\sqrt{2}.$$

$$V = \frac{16}{9}\sqrt{3}a^3$$

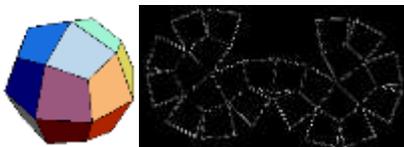


Triacentaedro rómbico

(30 rombos)

$$S = 12\sqrt{5}$$

$$V = 4\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

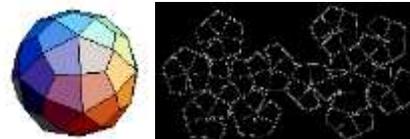


Icositetraedro deltoidal

(24 rombos)

$$S = 6\sqrt{29-2\sqrt{2}}$$

$$V = \sqrt{122+71\sqrt{2}}.$$



Hexecontaedro deltoidal

(60 rombos)

$$S = \frac{100}{11}\sqrt{79-16\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{33}(500+400\sqrt{5}).$$



Dodecaedro disdiakis

(48 triángulos)

$$S = \frac{6}{7}\sqrt{783+436\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{7}\sqrt{3(2194+1513\sqrt{2})}.$$



Triacentaedro disdiakis

(120 triángulos)

$$S = \frac{180}{11}\sqrt{179-24\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{180}{11}(5+4\sqrt{5}).$$

Sólidos Kepler-Poinsot

Los Sólidos Kepler-Poinsot son poliedros no convexos, cuyas caras son polígonos regulares y cuyos vértices tienen el mismo número de caras. Los sólidos de Kepler fueron definidos por Johannes Kepler en 1619 cuando notó que los dodecaedros estrellados se componían de dodecaedros ocultos que tienen caras compuestas por triángulos, dándoles forma de estrellas estilizadas. Kepler se dio cuenta que cumplían con la definición de los sólidos regulares aunque fueran cóncavos en lugar de convexos. En realidad Wenzel Jamnitzer encontró el gran dodecaedro estrellado en el siglo XVI y Paolo Uccello descubrió y dibujo el pequeño dodecaedro estrellado en el siglo XV. Los otros dos fueron descritos por Louis Poinsot en 1809. En los sólidos de Kepler-Poinsot el pequeño dodecaedro estrellado es dual del gran dodecaedro y el gran dodecaedro estrellado es dual del gran icosaedro; son duales entre sí, como sucede con los sólidos platónicos.

Pequeño dodecaedro estrellado



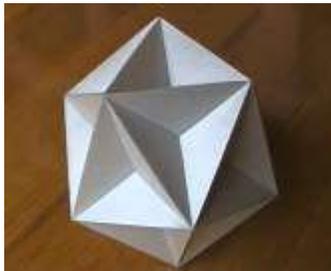
(12 caras en forma de pentagrama,
12 vértices, 30 aristas)

Gran dodecaedro estrellado



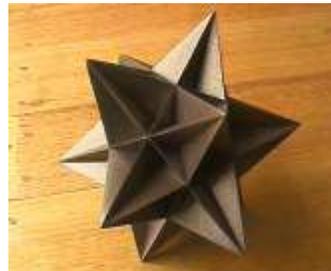
(12 caras en forma de pentagrama,
20 vértices, 30 aristas)

Gran dodecaedro



(12 caras en forma de pentagrama,
12 vértices, 30 aristas)

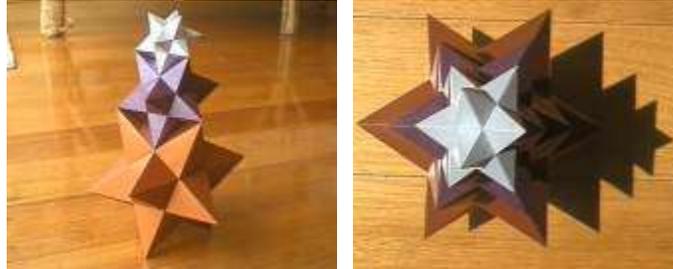
Gran Icosaedro



(20 caras triangulares,
12 vértices, 30 aristas)

El “Pequeño dodecaedro estrellado” y el “Gran dodecaedro estrellado” se acomodan bien uno sobre otro disminuyendo su escala en proporciones áureas. Probablemente esto se debe a las proporciones áureas inherentes en el pentágono regular y en la estrella de cinco vértices.

Pequeño dodecaedro estrellado



Vista aérea

Planta

Gran dodecaedro estrellado



Vista aérea

Planta

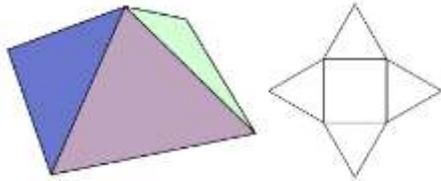
Sólidos de Johnson

Los sólidos de Johnson son poliedros convexos cuyas caras son sólidos regulares sin ser Sólidos Platónicos, de Arquímedes, prismas o antiprismas. Se permite combinar diferentes tipos de polígonos en las caras y en los vértices. A pesar de que no hay restricciones en los tipos de polígonos regulares que están permitidos, los tipos de polígonos que se utilizaron fueron: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, octágono y decágono.

En 1966 Norman Johnson publicó una lista con 92 sólidos con nombre y número. No comprobó que sólo hubiera 92, pero sí mencionó que no había más. En 1969 Victor Zalgaller probó que la lista estaba completa.

Pirámides, cúpulas y rotondas

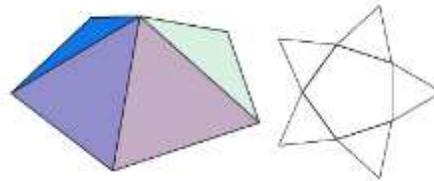
1. Pirámide cuadrada



$$S = \alpha \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h^2} \right)$$

$$V = \frac{1}{3} \alpha^2 h.$$

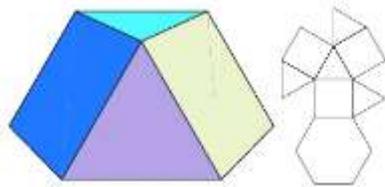
2. Pirámide pentagonal



$$S = \frac{5\alpha \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(5 - 2\sqrt{5})h^2} \right)}{4\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

$$V = \frac{1}{12} \alpha^2 h \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

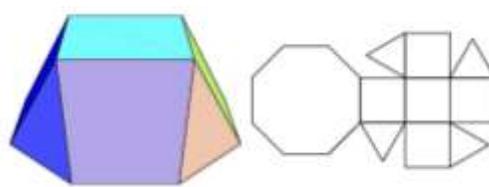
3. Cúpula triangular



$$S = \frac{3 + \frac{5}{2}\sqrt{3}}{5}$$

$$V = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

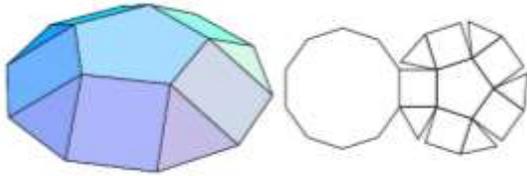
4. Cúpula cuadrada



$$S =$$

$$V =$$

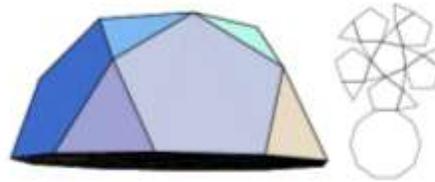
5. Cúpula pentagonal



$$S = \frac{1}{4} \left[20 + \sqrt{10 \left(80 + 31\sqrt{5} + \sqrt{2175 + 950\sqrt{5}} \right)} \right]$$

$$V = \frac{1}{6} (5 + 4\sqrt{5}).$$

6. Rotonda pentagonal

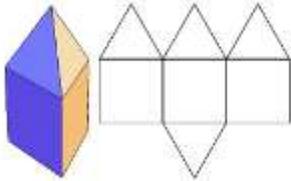


$$S = \frac{5}{2} \left(\sqrt{3} + \sqrt{26 + \frac{58}{\sqrt{5}}} \right)$$

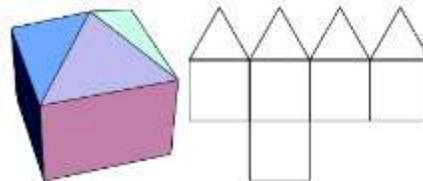
$$V = \frac{1}{12} (45 + 17\sqrt{5}).$$

Pirámides modificadas

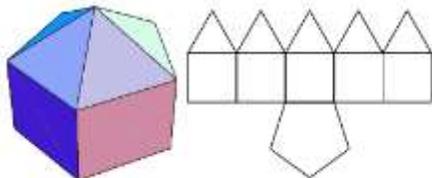
7. Pirámide triangular alargada



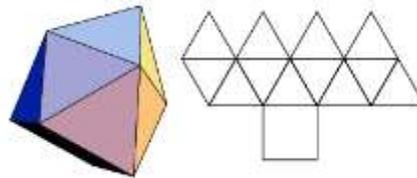
8. Pirámide cuadrada alargada



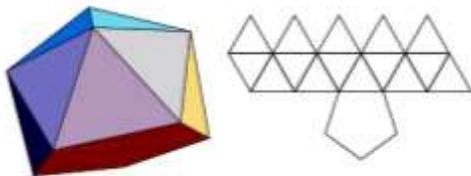
9. Pirámide pentagonal alargada



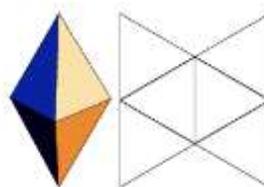
10. Pirámide cuadrada giroelongada



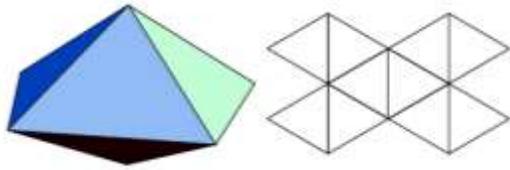
11. Pirámide giroelongada pentagonal



12. Dipirámide triangular



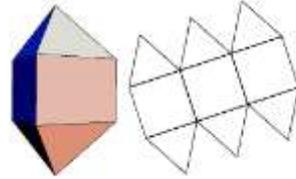
13. Dipirámide pentagonal



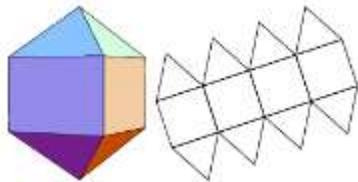
$$S = \frac{5}{2} \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{12} (5 + \sqrt{5})$$

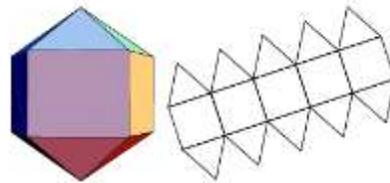
14. Dipirámide triangular elongada



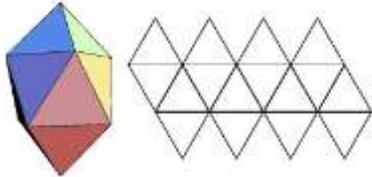
15. Dipirámide cuadrada elongada



16. Dipirámide pentagonal elongada



17. Dipirámide cuadrada gyroelongada

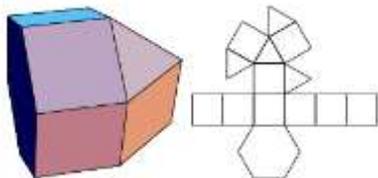


$$S = 4\sqrt{3}$$

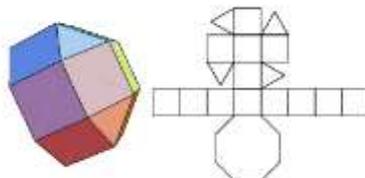
$$V = \frac{2^{1/4}}{3} (1 + \sqrt{2} + 2^{1/4})$$

Cúpulas y rotondas modificadas

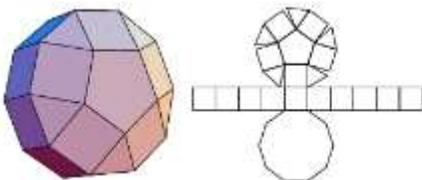
18. Cúpula triangular elongada



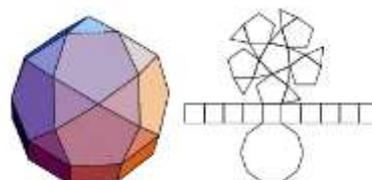
19. Cúpula cuadrada elongada



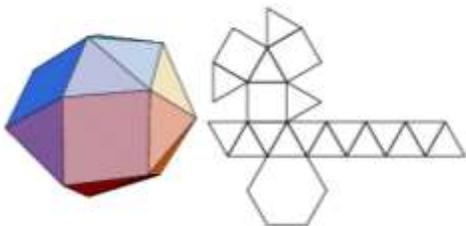
20. Cúpula pentagonal elongada



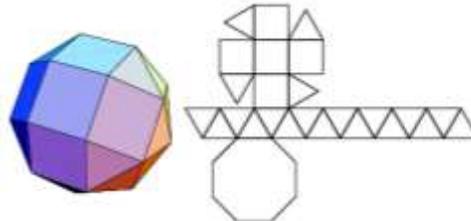
21. Rotonda pentagonal elongada



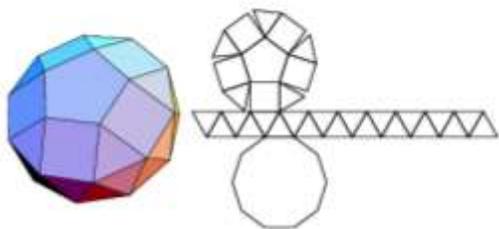
22. Cúpula triangular giroelongada



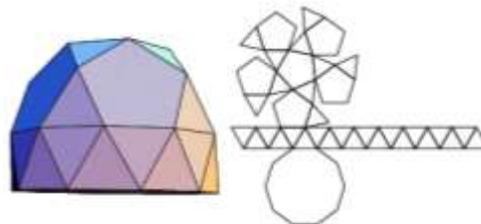
23. Cúpula cuadrada giroelongada



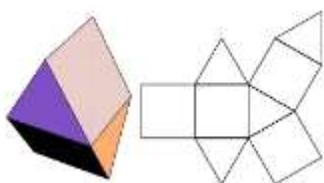
24. Cúpula pentagonal giroelongada



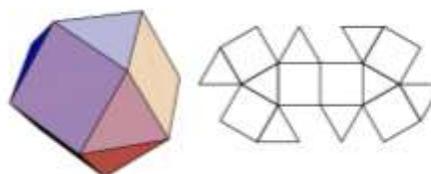
25. Rotonda pentagonal giroelongada



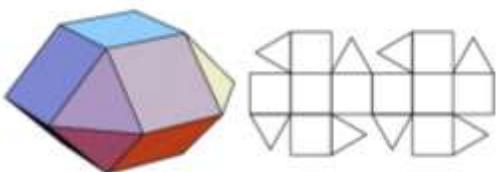
26. Girobifastigium



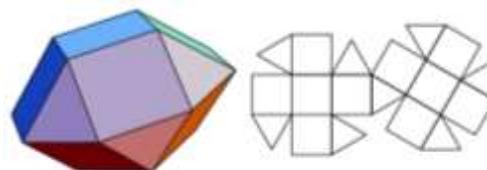
27. Ortobicúpula triangular



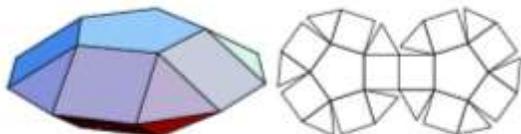
28. Ortobicúpula cuadrada



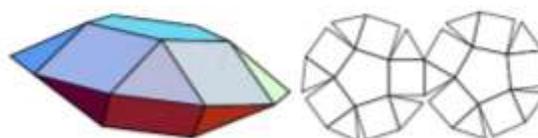
29. Girobicúpula cuadrada



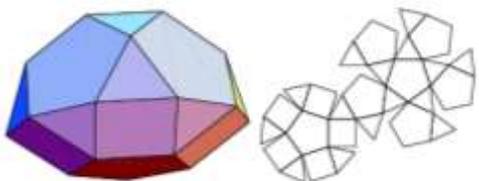
30. Ortobicúpula pentagonal



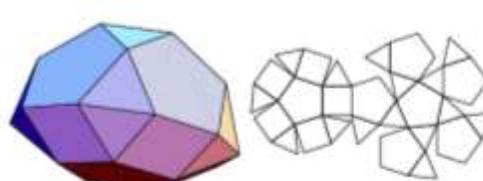
31. Girobicúpula pentagonal



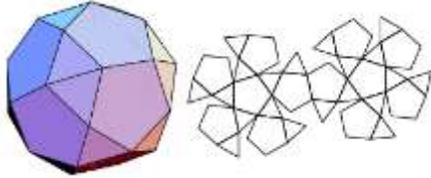
32. Ortocupularotonda pentagonal



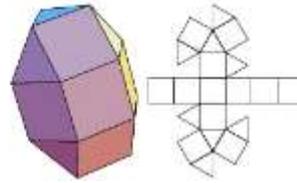
33. Girocupularotonda pentagonal



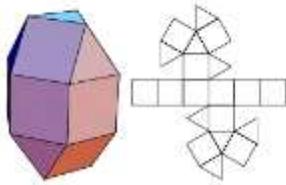
34. Ortobirotonda pentagonal



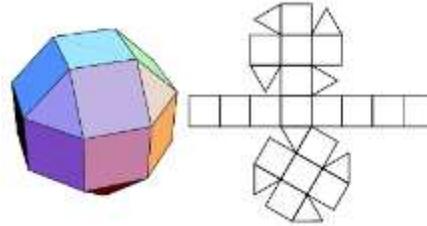
35. Ortobicúpula triangular elongada



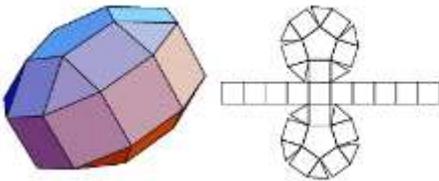
36. Girobicúpula triangular elongada



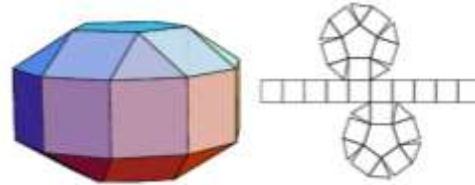
37. Girobicúpula cuadrada elongada



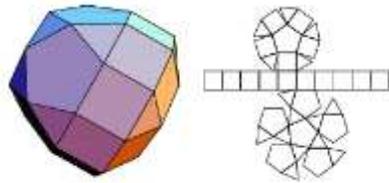
38. Ortobicúpula pentagonal elongada



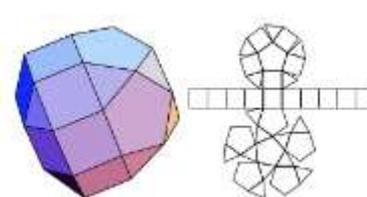
39. Girobicúpula pentagonal elongada



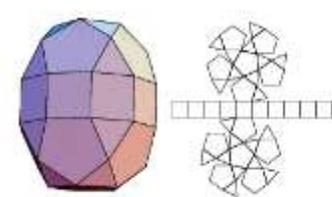
40. Ortobicúpularotonda pentagonal elongada



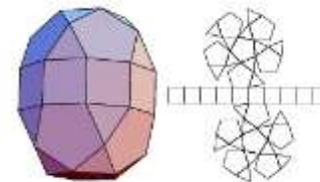
41. Girocúpularotonda pentagonal elongada



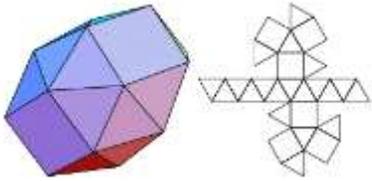
42. Ortobirotonda pentagonal elongada



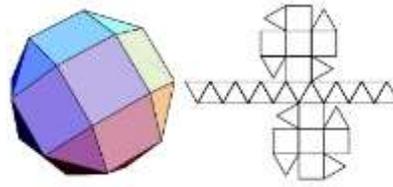
43. Girobirotonda pentagonal elongada



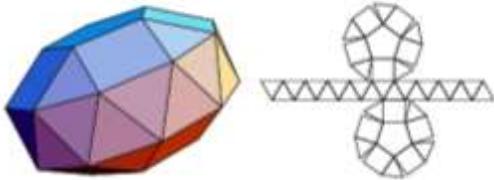
44. Bicúpula triangular giroelongada



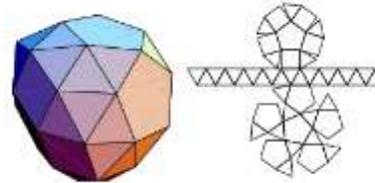
45. Bicúpula cuadrada giroelongada



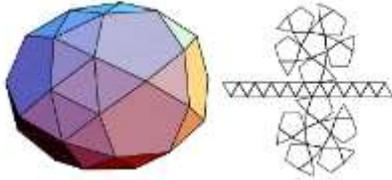
46. Bicúpula pentagonal giroelongada



47. Cupularotonda pentagonal giroelongada

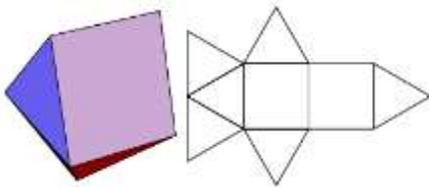


48. Birotonda pentagonal giroelongada

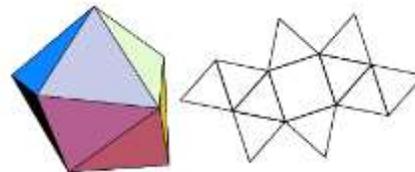


Prismas aumentados

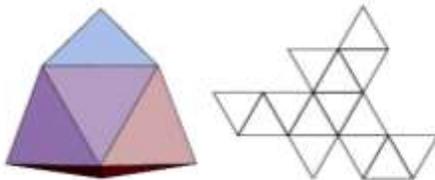
49. Prisma triangular aumentado



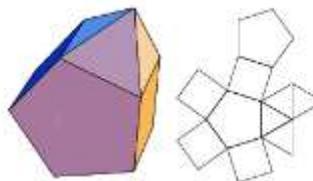
50. Prisma triangular biaumentado



51. Prisma triangular triaumentado



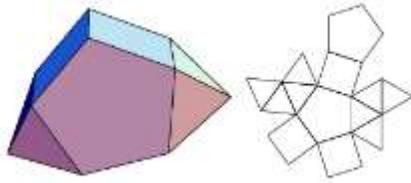
52. Prisma pentagonal aumentado



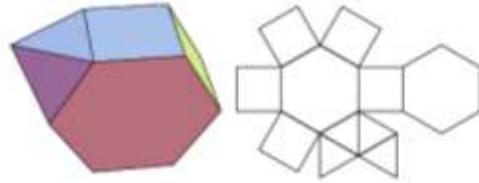
$$S = \frac{7}{2} \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{4} (2\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

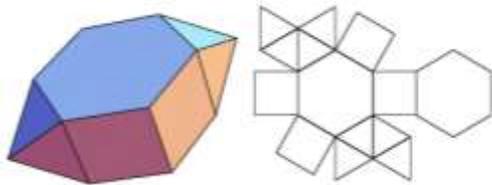
53. Prisma pentagonal biaumentado



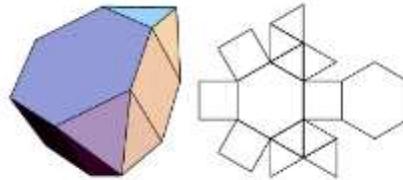
54. Prisma hexagonal aumentado



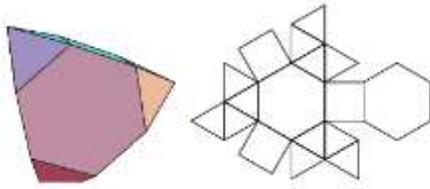
55. Prisma hexagonal parabiaumentado



56. Prisma hexagonal metabiaumentado

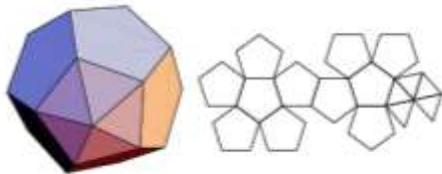


57. Prisma hexagonal triaumentado

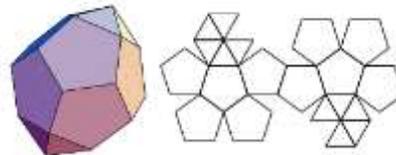


Sólidos Platónicos modificados

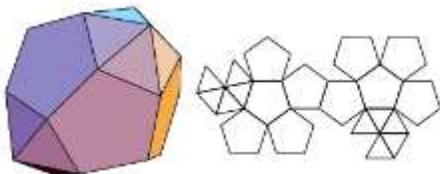
58. Dodecaedro aumentado



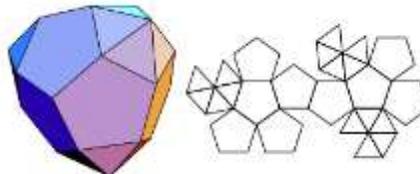
59. Dodecaedro parabiaumentado



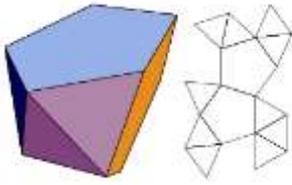
60. Dodecaedro metabiaumentado



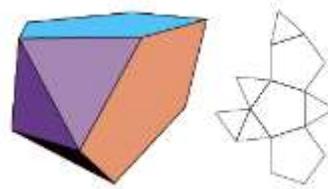
61. Dodecaedro triaumentado



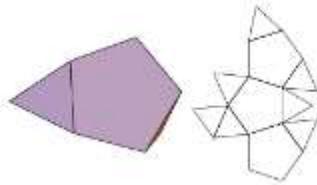
62. Icosaedro metabidismínuido



63. Icosaedro tridismínuido

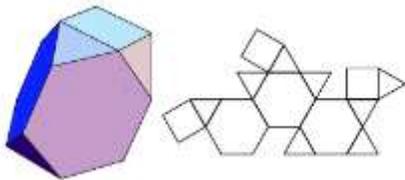


64. Icosaedro tridismínuido aumentado

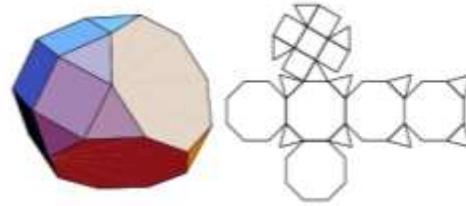


Sólidos de Arquímedes modificados

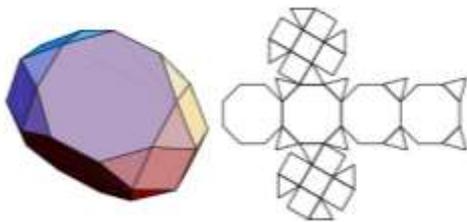
65. Tetraedro truncado aumentado



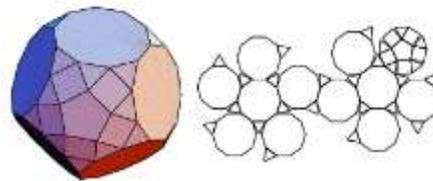
66. Cubo truncado aumentado



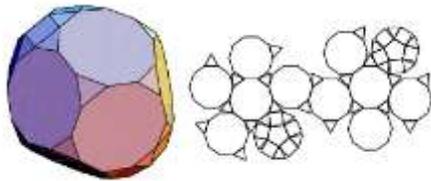
67. Cubo truncado biaumentado



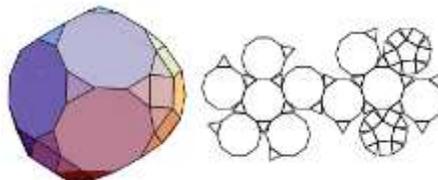
68. Dodecaedro truncado aumentado



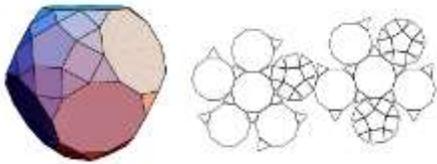
69. Dodecaedro truncado parabiaumentado



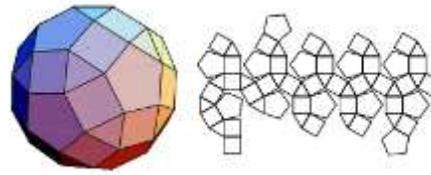
70. Dodecaedro truncado metabiaumentado



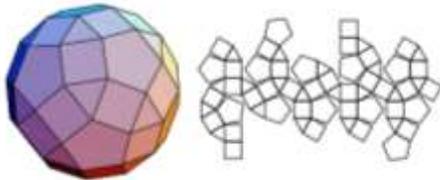
71. Dodecaedro truncado triaumentado



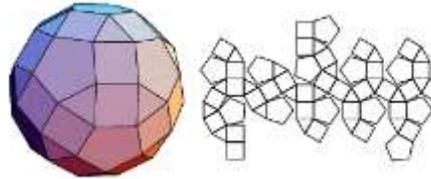
72. Rombicosidodecaedro girado



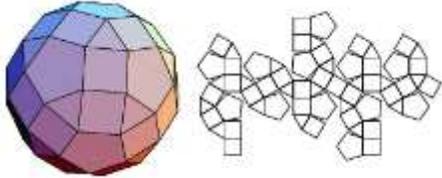
73. Rombicosidodecaedro parabigirado



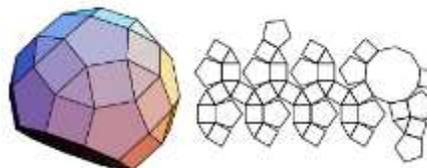
74. Rombicosidodecaedro metabigirado



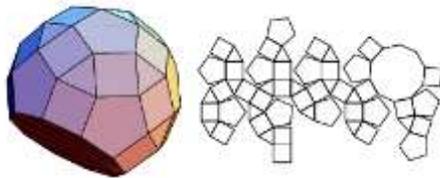
75. Rombicosidodecaedro trigirado



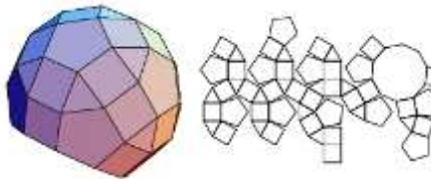
76. Rombicosidodecaedro disminuido



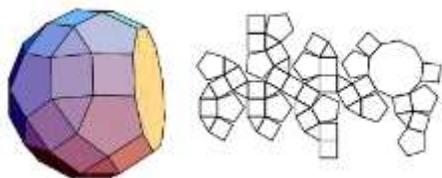
77. Rombicosidodecaedro paragirado disminuido



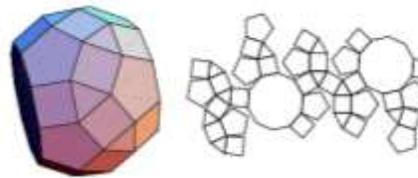
78. Rombicosidodecaedro metabigirado disminuido



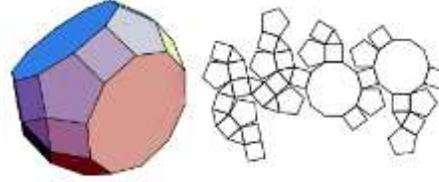
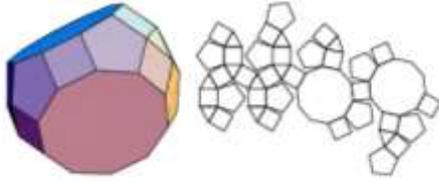
79. Rombicosidodecaedro bigirado disminuido



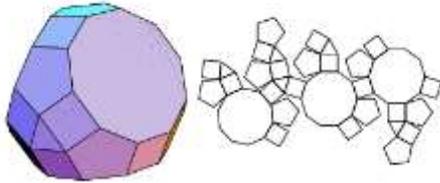
80. Rombicosidodecaedro parabidiminuido



81. Rombicosidodecaedro metabidismínuido 82. Rombicosidodecaedro gyrate bidismínuido

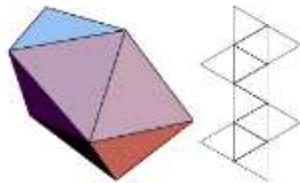


83. Rombicosidodecaedro tridismínuido



Varios

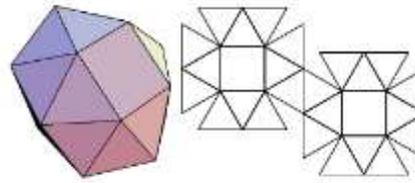
84. Disferoide romo



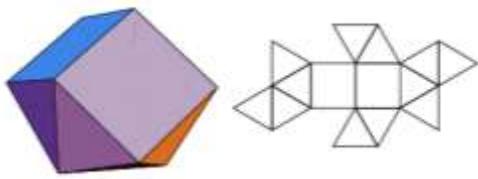
$$S = S = 3\sqrt{3},$$

$$V \approx 0.859494.$$

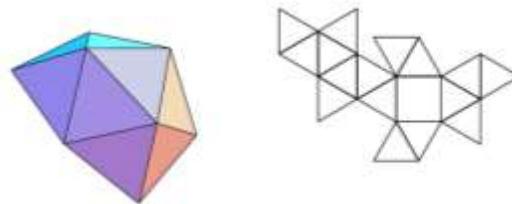
85. Antiprisma cuadrado romo



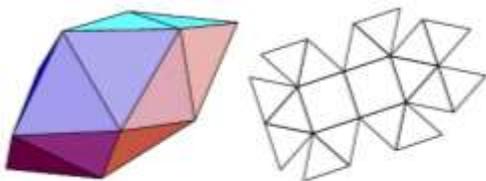
86. Sphenocorona



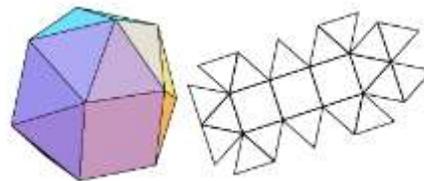
87. Sphenocorona aumentada



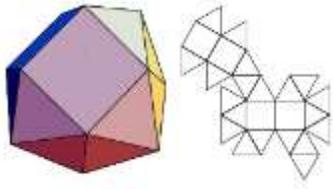
88. Sphenomegacorona



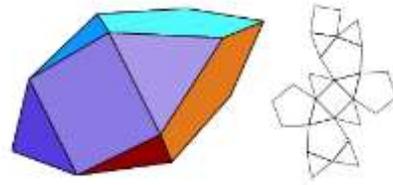
89. Hebesphenomegacorona



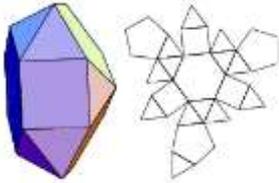
90. Disphenocingulum



91. Bilunabirotonda



92. Hebesphenorotonda triangular



Resumen del capítulo II

Parece como si la línea recta y el círculo fueran la base de las figuras geométricas más aplicadas en la arquitectura. Todo lo que más se utiliza está relacionado con al menos una de estas dos figuras (a excepción del punto). A diferencia de lo que sucede con las diferentes familias geométricas, la evolución de una figura a la otra es muy clara (todas pertenecen a la geometría euclidiana). Podría decirse que la regla básica que domina los polígonos regulares es tratar de formar un círculo con líneas rectas del mismo tamaño. La regla para formar poliedros es tratar de formar una esfera utilizando polígonos (son análogos cada uno en su dimensión). La geometría de los griegos (euclidiana) opera de un modo muy lógico en ocasiones.

Así como existe una cantidad infinita de polígonos, también existe una cantidad infinita de poliedros. Estos están agrupados en familias con características específicas. Algunos poliedros son muy interesantes como los de Catalán debido al concepto de dualidad; sin embargo existen otros como los de Johnson no tienen una relación fuerte de identidad entre ellos. Es importante saber cuales son los grupos principales y sus reglas para poder utilizarlos cuando más convenga.

Los sólidos primarios parecen estar desligados al resto del grupo, posiblemente porque se obtienen de una forma diferente (y no buscan formar esferas). Para crear un sólido a partir de un solo polígono existen dos operaciones muy comunes: rotar y extrudir. Los sólidos primarios son creados rotando, pero podría interpretarse en algunos casos que se están extrudiendo (como es el caso de un cilindro y un cubo).

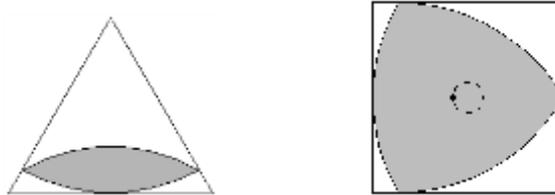
En los temas de este capítulo también hubo empalmes debido a que algunas figuras pertenecen a más de una familia (como es el caso del cubo). Es semejante a lo que mencioné en el capítulo pasado, pero en este caso sucede a nivel de figuras dentro de las familias. El ser humano tiende a catalogar lo que observa para comprenderlo y relacionar las categorías entre sí, pero en la geometría no es tan fácil hacerlo (podría ser una característica de la geometría).

En el diseño arquitectónico por lo general se aplican las figuras estudiadas en este capítulo en su estado original o deformándolas. También se incluyen líneas curvas basadas en arcos de círculos (demasiado irregulares como para incluirlas) y en ocasiones las figuras bidimensionales mencionadas en la geometría analítica. Realmente esto no responde a los conocimientos geométricos de nuestra época y es bastante limitado como para responder a la gente de nuestra época.

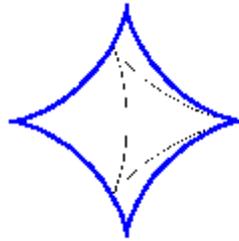
Capítulo III

Geometría poco convencional en arquitectura

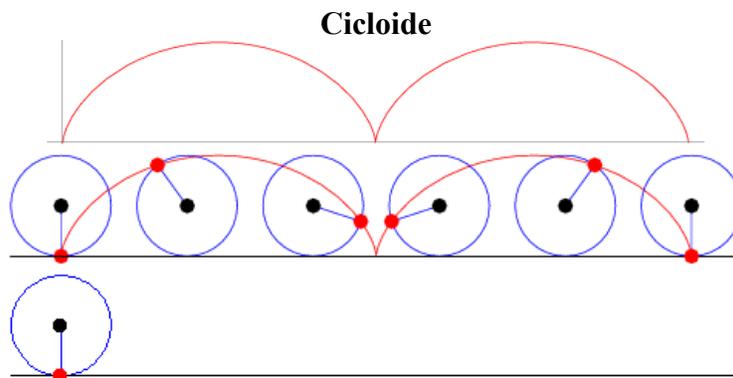
Dos dimensiones Rotor



Es una figura convexa (en algunos casos cóncava) que puede ser rotada en el interior de un polígono o poliedro tocando siempre cada lado. El área mínima para un rotor en un cuadrado es el Triángulo Reuleaux. El área mínima para un rotor en el interior de un triángulo equilátero es un lente con arcos de círculo de 60° y con un radio igual a la altura del triángulo. Puede haber rotores no-esféricos para el tetraedro, cubo y octaedro; pero no para el dodecaedro y para el icosaedro.

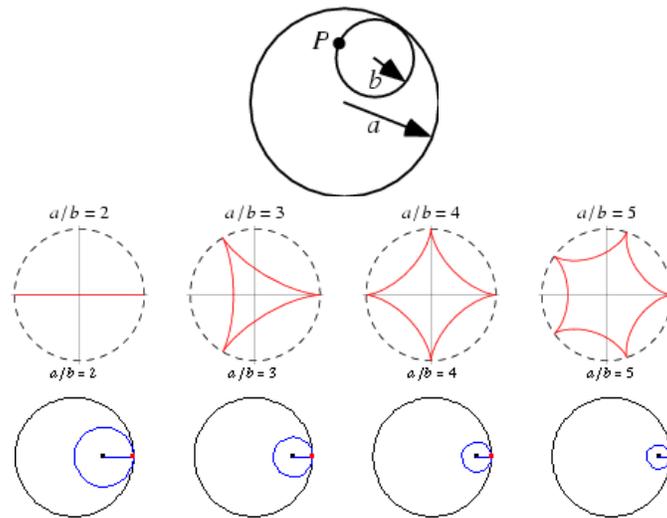


La figura muestra un deltoide rotor (cóncavo) en el interior de un astroide stator.



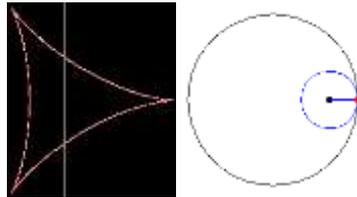
Es la ruta trazada por el punto "P" sobre in círculo de radio "a" que gira sobre una línea recta.

Hipocicloide



Es la ruta trazada por el punto “P” sobre in círculo de radio “b” que gira alrededor de otro círculo de radio “a” por el interior.

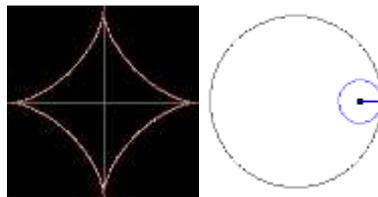
Deltoide



Es un hipocicloide de tres curvas, también llamado tricuspoides.

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(x^2 - 3y^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0$$

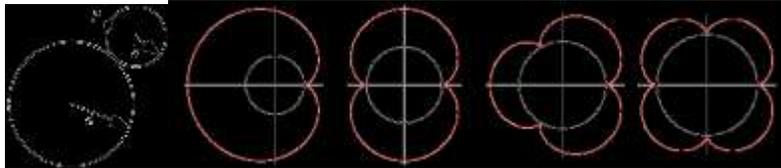
Astroide



Es un hipocicloide de cuatro curvas, también llamado tetracúspido, cubocicloide o paraciclo.

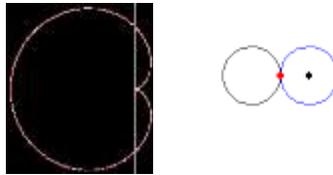
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Epicycloide



Es la ruta trazada por el punto “P” sobre un círculo de radio “b” que gira alrededor de otro círculo de radio “a” por el exterior.

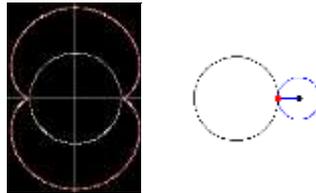
Cardioide



Es un epicycloide de una curva.

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Nefroide

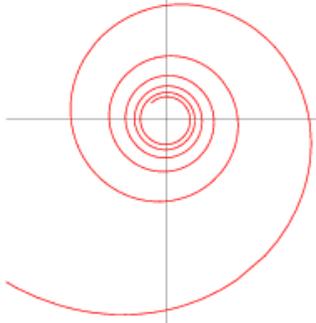


Es un epicycloide de dos curvas.

$$4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27a^4y^2$$

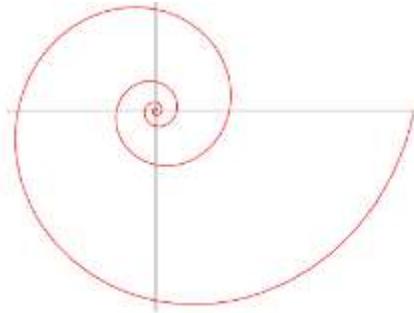
Espirales

Espiral hiperbólico



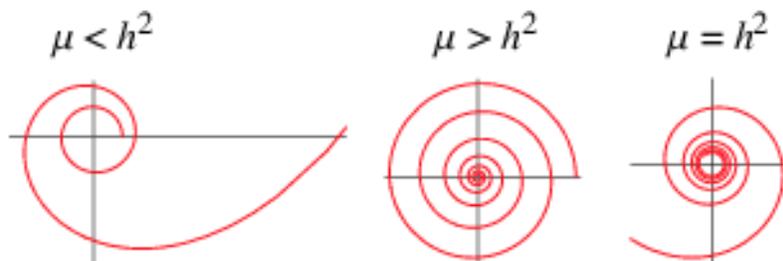
$$r = \frac{\alpha}{\theta}$$

Espiral logarítmico



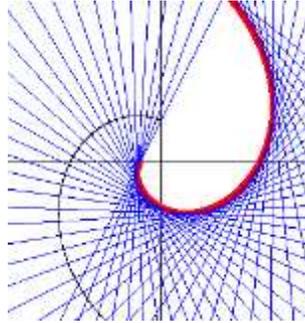
$$r = \alpha e^{b\theta}$$

Espiral de Cortés



$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu |\mathbf{r}|^{-3} \hat{\mathbf{r}}$$

Evolución de espiral logarítmico



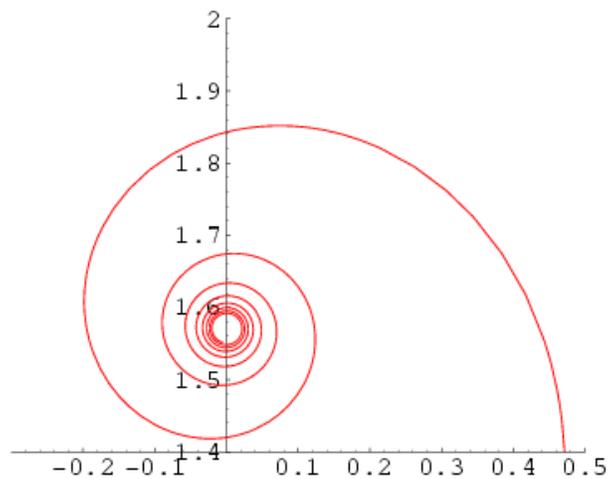
La espiral logarítmica está dada por:

$$\begin{aligned} x &= \alpha e^{bt} \cos t \\ y &= \alpha e^{bt} \sin t, \end{aligned}$$

La evolución está dada por:

$$\begin{aligned} x_e &= -\alpha b e^{bt} \sin t \\ y_e &= \alpha b e^{bt} \cos t. \end{aligned}$$

Espiral de Nielsen



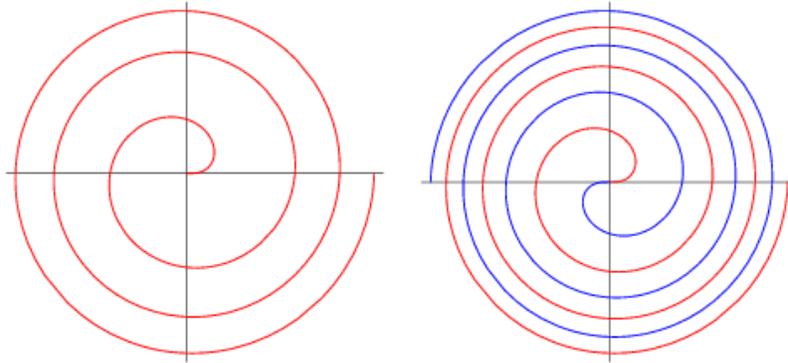
$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha \text{ci}(t) \\ y(t) &= \alpha \text{si}(t), \end{aligned}$$

donde:

ci(t) = integral del coseno de t

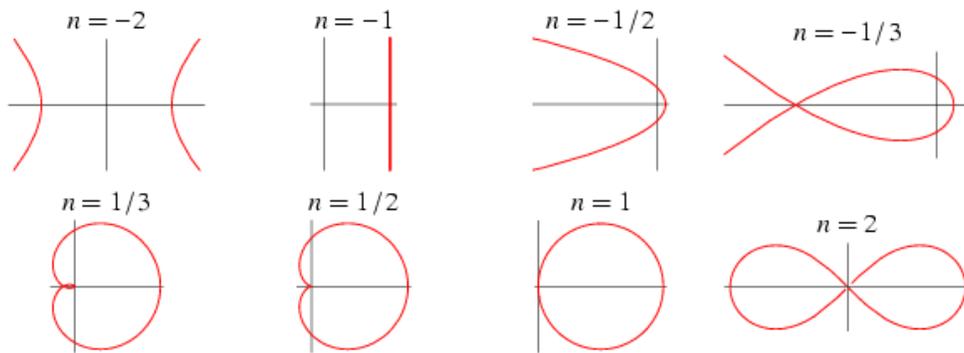
si(t) = integral del seno de t

Espiral de Fermat



$$r^2 = a^2 \theta.$$

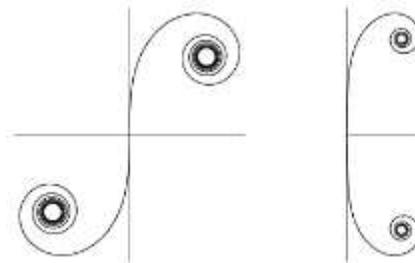
Espiral sinusoidal



$$r^n = a^n \cos(n \theta),$$

Espiral de Euler

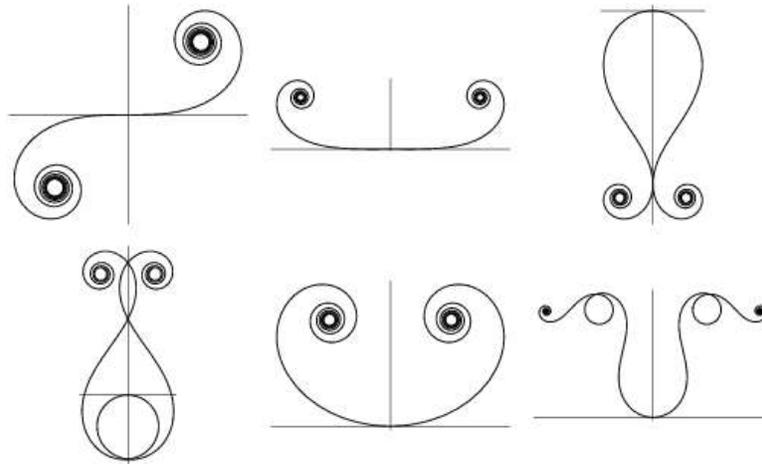
Este espiral describe la difracción de la esquina de un medio plano.



$$P = c^2 / s$$

Donde:
 P = radio de la curvatura
 s = longitud del arco

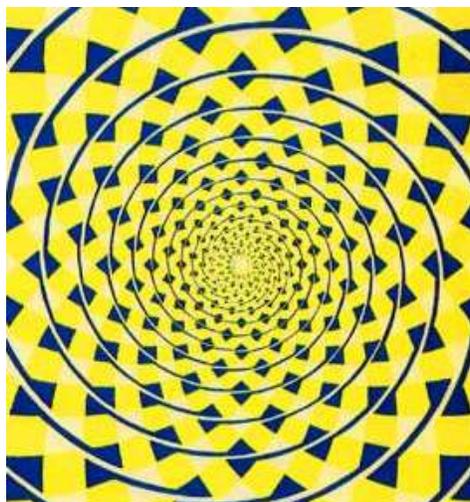
$$K = -s^n / a^{n+1}$$



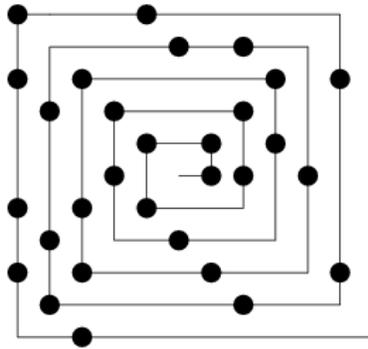
Estos espirales polinomios son generalizaciones del espiral de Euler. Estas curvas corresponden respectivamente a: $K = S$, $K = S^2$, $K = S^2 - 2.19$, $K = S^2 - 4$, $K = S^2 + 1$, $K = 5S^4 - 18S^2 + 5$.

Espiral de Fraiser (falso espiral)

Es una ilusión óptica nombrada después del psicólogo inglés James Fraser. En realidad son círculos concéntricos.

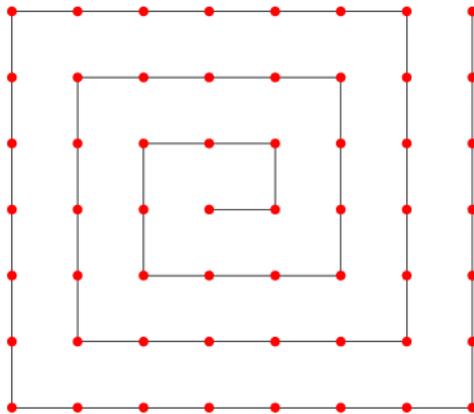


Espiral prima

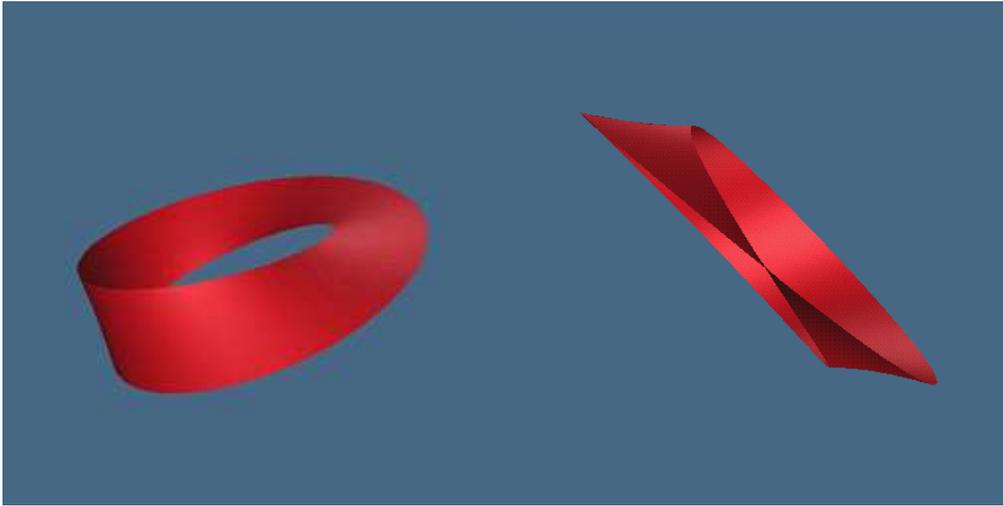


101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

Espiral racional



Tres dimensiones Cinta de Möbius



La cinta de Möbius es una superficie sin orientación obtenida recortando una banda cilíndrica girando uno de los extremos y pegándola. También se la conoce como cilindro torcido. Esta cinta fue descubierta por August Ferdinand Möbius en 1858, aunque fue descubierta independientemente por Listing, quien la publicó mientras que Möbius no lo hizo. Al igual que un cilindro, no es una verdadera superficie, sino más bien una superficie con frontera.

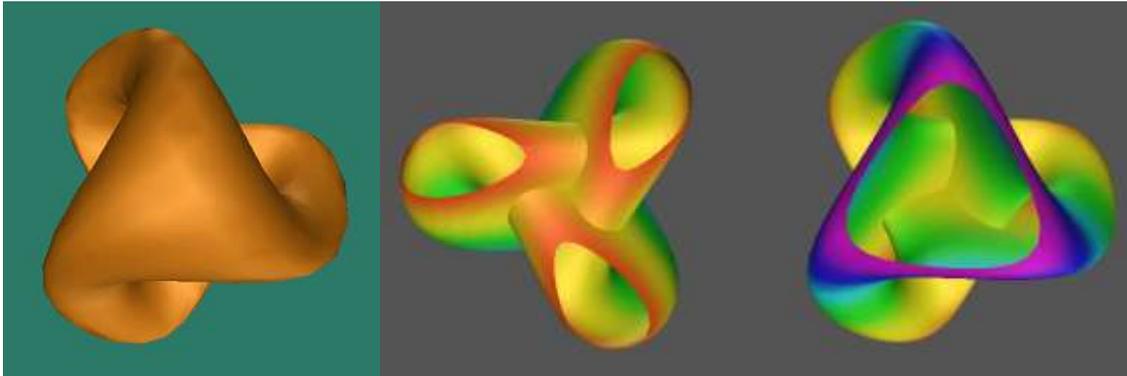
La compañía Goodrich patentó una banda transportadora con la forma de una cinta de Möbius que dura el doble que cintas normales. M. C. Escher representaba cintas de Möbius en algunas de sus obras.

El perímetro de la cinta de Möbius se obtiene con la integración de una función complicada:

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\
 &= \left[\frac{1}{16} w^4 \cos^4 \left(\frac{1}{2} t \right) + \left\{ \left[R + w \cos \left(\frac{1}{2} t \right) \right] \cos t - \frac{1}{2} w \sin \left(\frac{1}{2} t \right) \sin t \right\}^4 + \right. \\
 &\quad \left. \left\{ R \sin t + \frac{1}{4} w \left[\sin \left(\frac{1}{2} t \right) + 3 \sin \left(\frac{3}{2} t \right) \right] \right\}^4 \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

Existen tres posibles superficies que provienen de la cinta de Möbius: superficie de boy, bonete cruzado y superficie romana.

Superficie de Boy



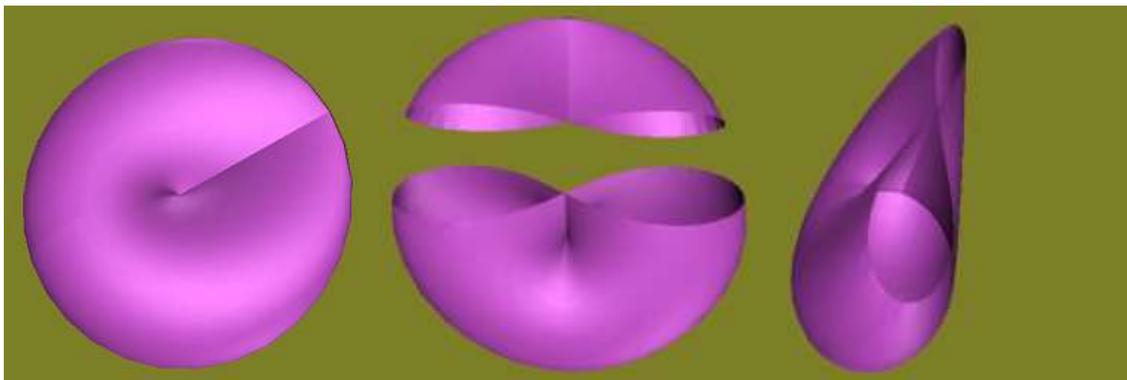
Es una de las tres posibilidades cuando una cinta de Möbius se une al lado de un disco. La “superficie de boy” no tiene orientación. La descubrió Werner Boy en 1901. Contrario a la superficie romana y al bonete cruzado, se interseca sola sin necesidad de puntos de unión en diferentes extremos de su superficie.

$$f(x, y, z) = [(2x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz(y^2 - z^2) + zx(x^2 - z^2) + xy(y^2 - x^2)]/2$$

$$g(x, y, z) = (\text{Sqrt}(3))/2 [(y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(y^2 - x^2)]$$

$$h(x, y, z) = (x + y + z)[(x + y + z)^3 + 4(y - x)(z - y)(x - z)]$$

Bonete Cruzado



Es una de las tres posibilidades cuando una cinta de Möbius se une al lado de un disco. Es la intersección de una superficie de un solo lado. Puede ser pensado como un objeto producido perforando una superficie una sola vez y uniendo los extremos del agujero de tal forma que quede una forma lineal, como si la superficie se intersectara sola. Se

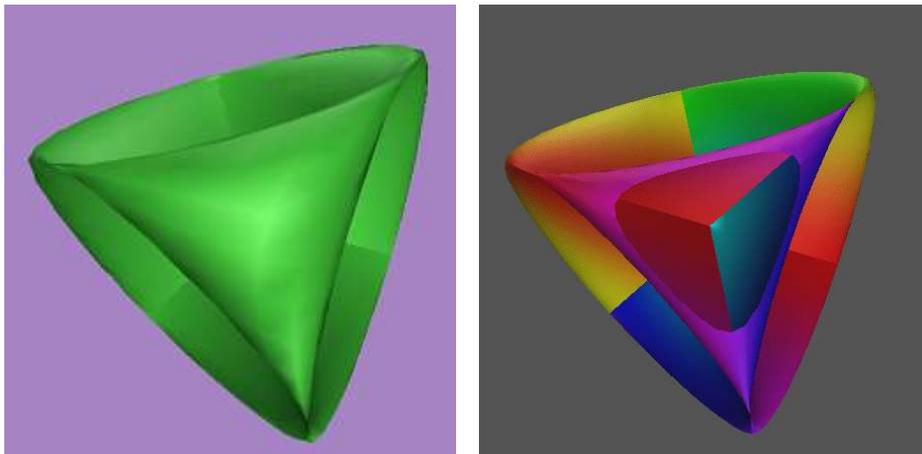
puede considerar como un agujero circular el cual conduce a su lado opuesto. Es un superficie bidimensional topológicamente equivalente a la cinta de Möbius.

Una esfera con un bonete cruzado se ha llamado tradicionalmente “plano proyectivo real”. Una esfera con dos bonetes cruzados coincidiendo en sus fronteras es topológicamente equivalente a la Botella de Klein. La superficie con tres bonetes cruzados es conocida como superficie de Dyck.

$$[(\sin(u)\sin(2v))/2, \sin(2u)\cos(v)^2, \cos(2u)\cos(v)^2]$$

$$0 \leq u \leq \pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$$

Superficie romana

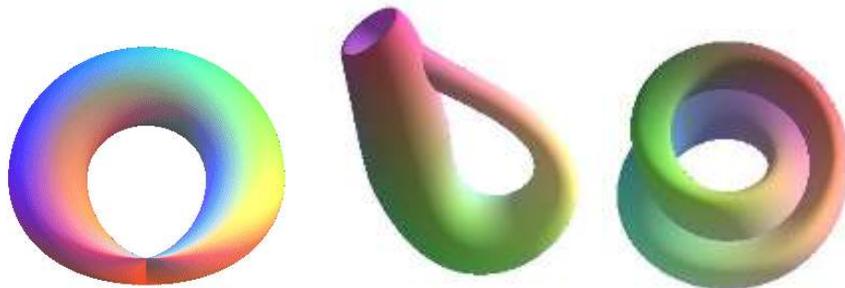
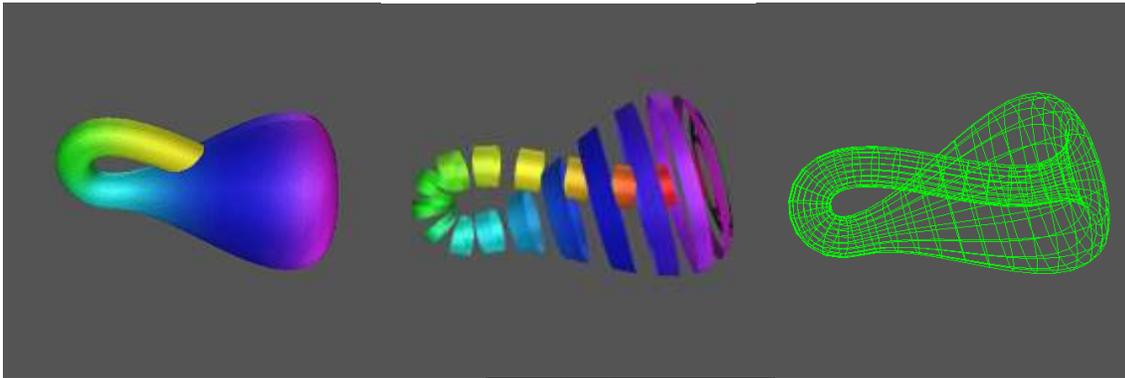


Es una de las tres posibilidades cuando una cinta de Möbius se une al lado de un disco. Es una superficie cuadrática sin orientación, también conocida como Superficie Steiner. El punto central de la superficie romana es ordinariamente un punto triple con $(\pm 1, 0, 0) = (0, \pm 1, 0) = (0, 0, \pm 1)$ y los seis puntos finales de las tres líneas de auto-intersección son singularidades Whitney. Es esencialmente seis bonetes cruzados juntos y contiene una doble infinidad de cónicas.

$$[\sin(2u)\cos(v)^2, \sin(u)\sin(2v), \cos(u)\sin(2v)]$$

$$0 \leq u \leq \pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$$

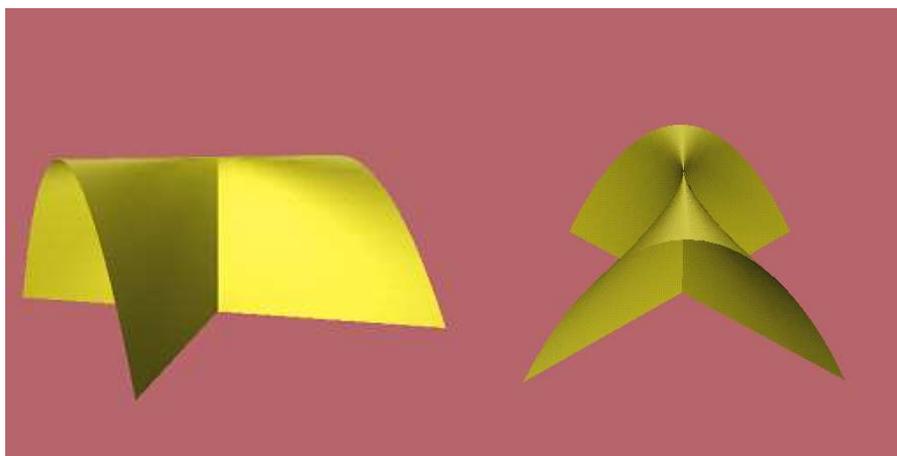
Botella de Klein



Es una superficie sin orientación sin distinción alguna entre interior y exterior. La Botella de Klein fue descubierta por Félix Klein en 1882. Está muy relacionada con la Cinta de Möbius y con la Superficie de Boy. La figura se obtiene perforando una botella en su parte inferior y doblando el cuello hasta el orificio (atravesando la botella). El disectar esta superficie tiene como resultado varias Cintas de Möbius.

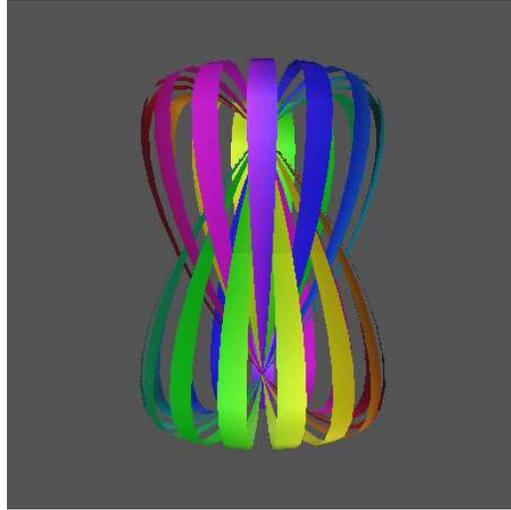
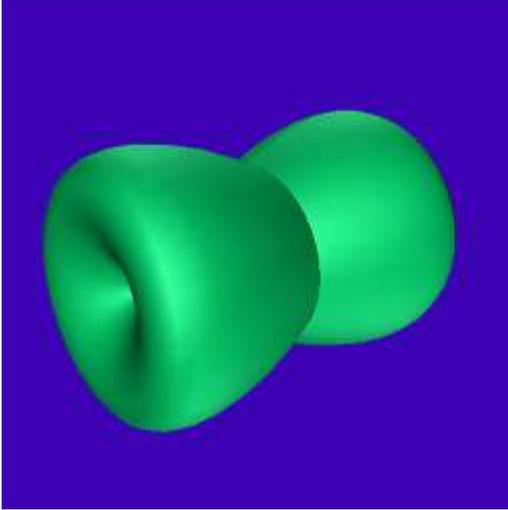
$$(x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 1) \left((x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1)^2 - 8z^2 \right) + 16xz(x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1) = 0$$

Paraguas de Whitney



Esta superficie puede ser vista como un rectángulo que se interseca a sí mismo.

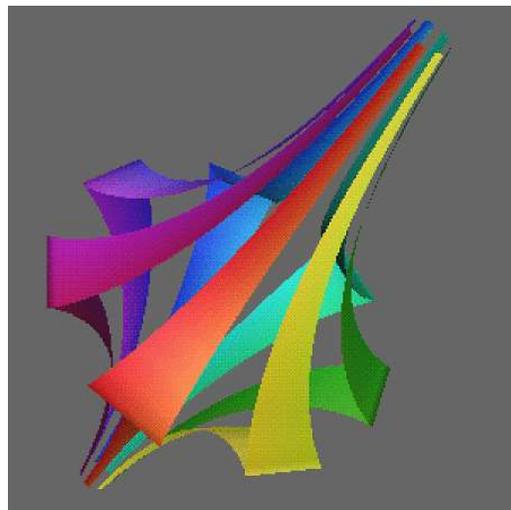
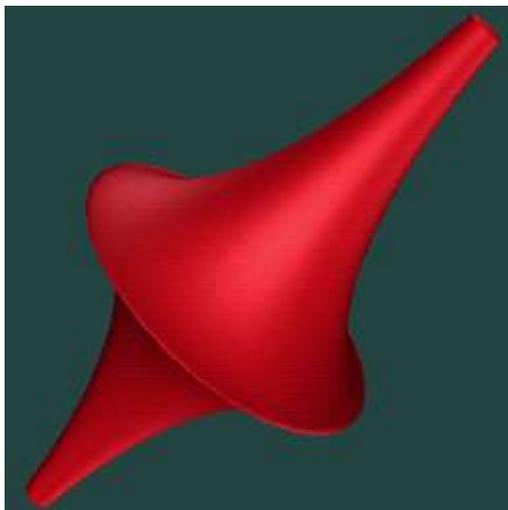
Toro de revolución elíptico



Es una superficie de revolución generada con una figura parecida a un 8.

$$f(u, v) = [(a + \cos(v)) \cdot \cos(u), (a + \cos(v)) \cdot \sin(u), \sin(v) + \cos(v)].$$

Pseudoesfera

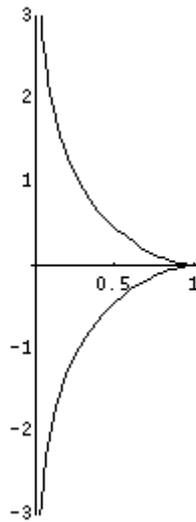


Es un sólido de revolución de curvatura negativa constante. Se obtiene rotando un tractrix alrededor del eje “y”.

$$f(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v) + \log(\tan(v/2))),$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 < v < \pi.$$

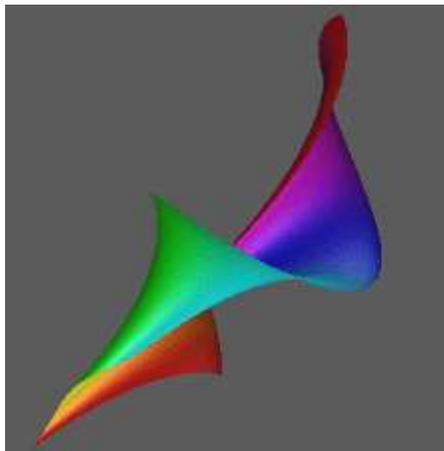
Tractrix



Es una curva en la cual sus líneas tangentes tienen una longitud de cualquier punto en la curva al eje “y” de 1.

$$\text{tractrix}(t) = (\sin t, \cos t + \log(\tan(t/2))) \quad 0 < t < \pi$$

Superficie de Dini

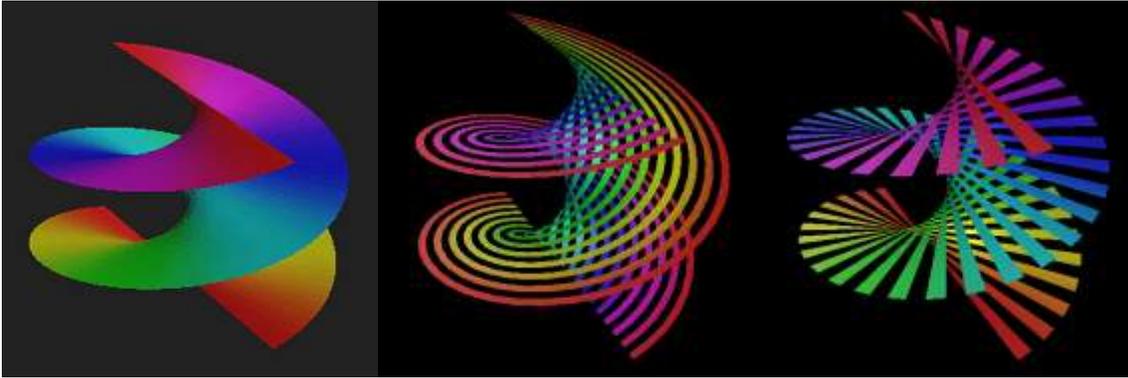


Es una superficie con curvatura constante negativa que se obtiene torciendo una pseudoesfera.

$$f(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v) + \log(\tan(v/2)) + a*u),$$

$$0 \leq u \leq 2*\pi, 0 < v < \pi.$$

Helicoide



Es una superficie generada por líneas paralelas al plano xy que atraviesan todos los puntos de la hélice y se intersectan con el eje z.

$$f[a,b](u, v) = (a*v*\cos(u), a*v*\sin(u), b*u)$$

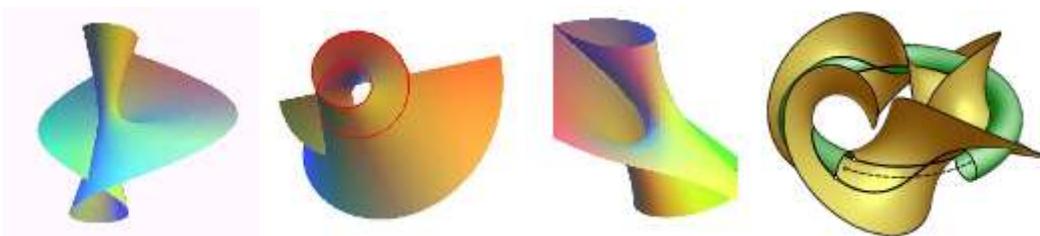
$$0 \leq u \leq 2*\pi, -d < v < d \quad d > 0.$$



Hélice

$$\text{helix}(u) = (\cos(u), \sin(u), a*u) \quad -\pi < u < \pi$$

Superficie de Möbius



La superficie de Möbius es reglada y se obtiene girando una línea alrededor de un círculo y rotándolo alrededor de su circunferencia.

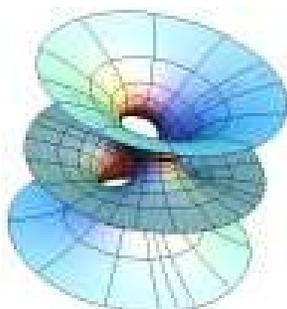
$$(x^2 + y^2)(y - z)^2 = (ay + xz)^2$$

Superficies Mínimas

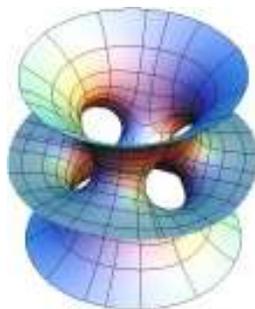
Las superficies mínimas tienen una curvatura principal de cero. También pueden ser consideradas como superficies con un área mínima envolvente para las condiciones de frontera dadas. La teoría clásica de superficies mínimas comenzó a mediados del siglo XVIII por Joseph Louis Lagrange, quien describió las ecuaciones variacionales que define una función dentro de un dominio compacto en el plano, las cuales deben dar como resultado para su gráfica la superficie mínima posible con respecto a los valores de su frontera.

Un plano es una superficie mínima trivial. Los primeros ejemplos no triviales fueron encontrados por Meusnier en 1776 (catenoide y helicoides). Estas tres superficies mínimas son las únicas dentro de la topología finita que tienen curvatura de cero. Riemann encontró una familia de superficies mínimas de género cero con topología infinita y grupo infinito de simetría (superficies mínimas de Riemann). Una esfera parece ser una superficie mínima al comparar su superficie con su volumen, pero no lo es en el sentido matemático.

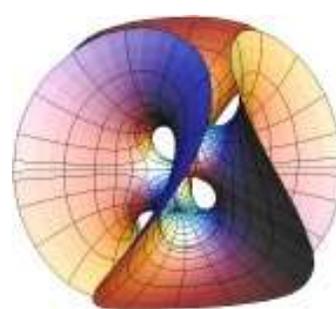
Euler demostró que una superficie mínima es plana si su curvatura Gaussiana es de cero en todos los puntos, para formar una “silla de montar”. El catenoide y el helicoides deben incluirse en esta lista, pero están en otras secciones del documento.



Superficie Costa



Superficie Costa-Hoffman-Meeks



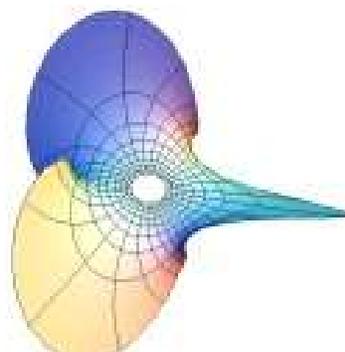
Chen Gackstatter



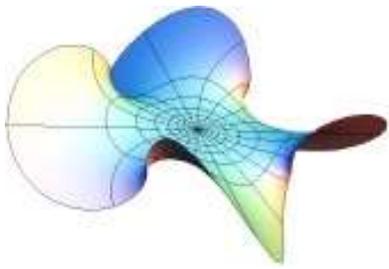
Catenoide-Enneper



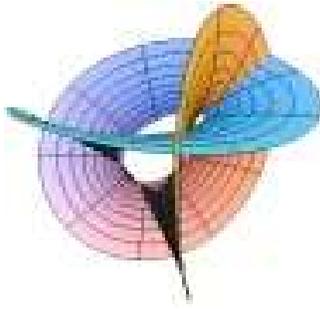
Helicoide-Catenoide



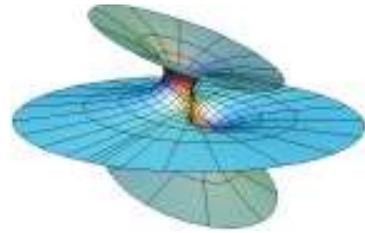
Superficie de Boy Invertida



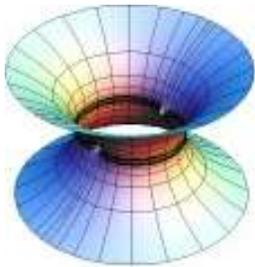
Dihedro Simétrico de Kusner



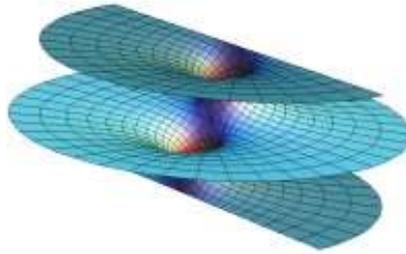
Superficie Henneberg



Teorema López-Ros No-Go



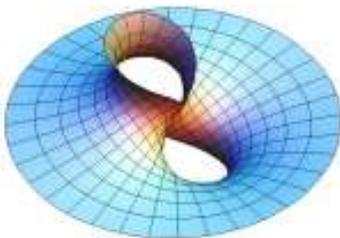
Teorema Schoen No-Go



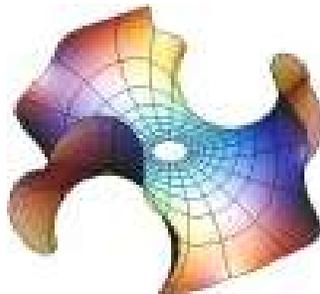
Superficie de Riemann



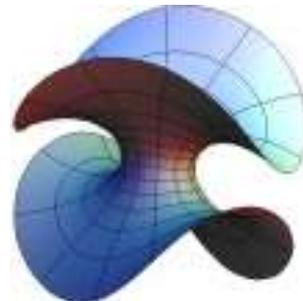
Superficie Enneper



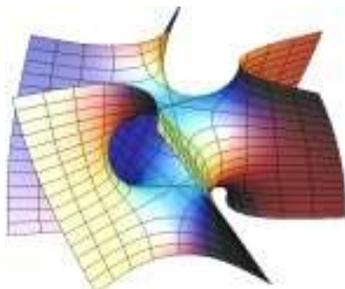
Enneper Plano



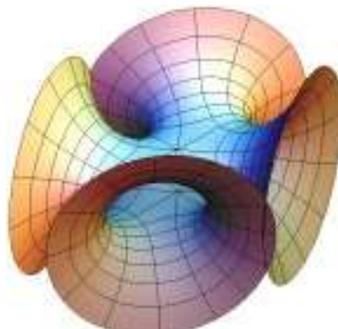
Superficie Enneper Ondulado



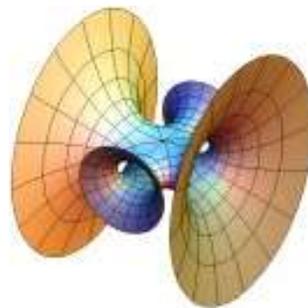
Doble Enneper



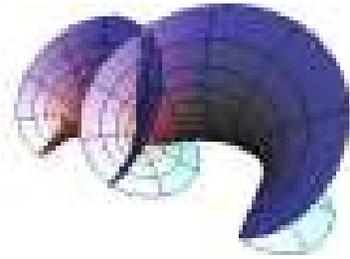
Scherk Torcido



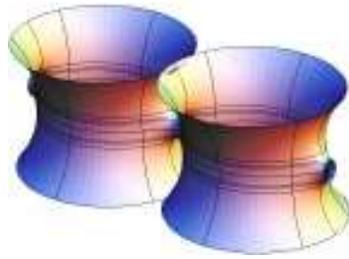
Skew 4-noid



4-noid Simétrico



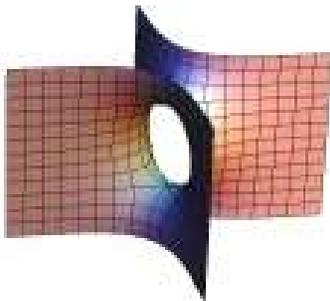
Superficie de Catalán



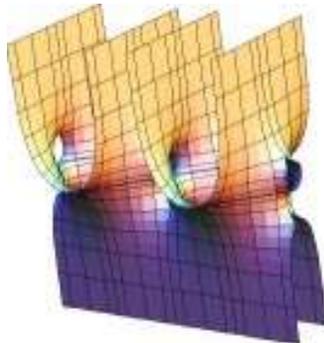
Barda Catenoides



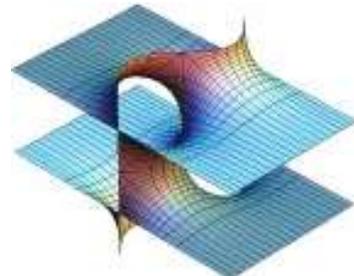
Superficie Scherk



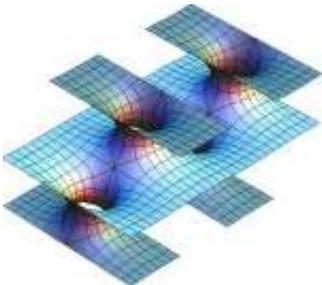
Torre de la Silla



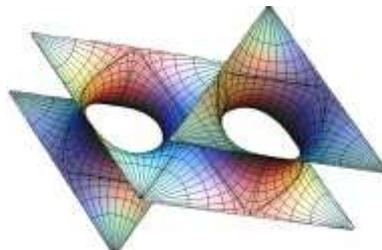
Scherk con Asa



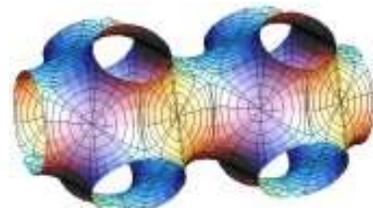
Torre de la Silla de Karcher JD



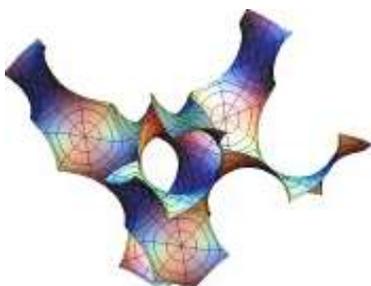
Torre de la Silla de Karcher JE



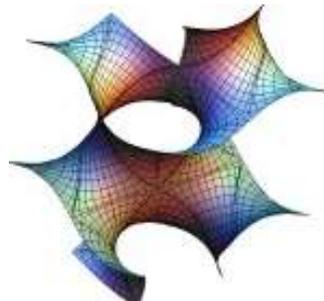
Superficies de la familia Schwartz H



Superficies de la familia Schwartz PD



Gyroide



Lidinoide

Sólidos de revolución

Es una superficie generada rotando una figura bidimensional alrededor de un centro, el cual normalmente está ubicado fuera de la misma figura. Algunos sólidos de revolución ya se mencionaron: pseudoesfera, toro de revolución elíptico, cono, cilindro, entre otros.

Toro

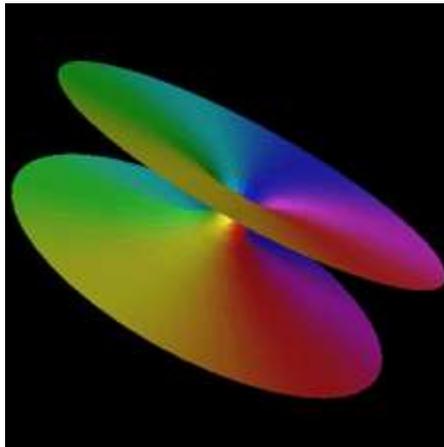
Un tipo de superficie de revolución muy común que se genera rotando un círculo alrededor de un punto situado en su plano; tiene forma de neumático.



$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$

R = distancia entre el centro del toro y el centro del círculo en que está inscrito.
 r = radio del círculo en que está inscrito el toro.

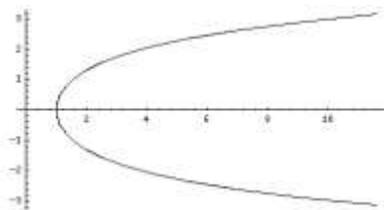
Catenoide



Es una superficie de revolución que se genera rotando una catenaria.

$$f[a](u, v) = (a \cdot \cos(u) \cosh(v/a), a \cdot \sin(u) \cosh(v/a), v),$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, -c < v < c.$$



Catenaria – Curva formada por una cadena perfectamente flexible que cuelga suspendida de dos puntos en cada uno de sus extremos.

catenaria(t) = (b * cosh(t/b), t) b > 0 and -pi < t < pi
 In the picture b is equal to 1.

Resumen del capítulo III

Las figuras estudiadas en este capítulo son menos comunes en su empleo en la arquitectura. Al relacionar las características de los diferentes tipos de figuras se encuentra lo que mencioné en el primer capítulo con respecto a las familias geométricas: se han desarrollado líneas de investigación bastante independientes y sin una relación necesaria entre ellas. Esto hace pensar que es muy posible que se sigan encontrando figuras nuevas con el paso del tiempo (no se han acabado las posibilidades).

Entre los grupos de figuras que destacan están los rotores, los cuales se parecen a los polígonos, pero en este caso tienen líneas curvas en lugar de rectas. Esto permite partir de una figura compuesta por solamente dos curvas en lugar de tres. Sería interesante comprobar si existe la posibilidad de que algunos rotores sean también epicicloides o hipocicloides (se parecen bastante).

Los cicloides tienen una lógica muy diferente a la de los polígonos. Un punto en la circunferencia de un círculo deja su trayectoria dibujada mientras éste rota sobre una línea recta (el cicloide es análogo a una línea para los polígonos). De esto parten los hipocicloides y los epicicloides en los cuales se sigue el mismo procedimiento pero sobre un círculo en lugar de sobre una línea (por dentro y por fuera de la circunferencia respectivamente). El primer epicicloide consta de dos curvas (cardioide) y el primer hipocicloide consta de tres (deltoide). Antes había un solo polígono por cada operación y en este caso hay dos. El problema sería construir algo análogo a los poliedros para que incluyeran tres dimensiones (quedarían llenos de agujeros porque no se pueden embonar estas figuras del mismo modo que los polígonos).

Una familia interesante son las figuras sin orientación. La cinta de Möbius es la base para otras tres figuras tridimensionales: superficie de Boy, bonete cruzado y superficie romana. Es difícil entender a qué se refieren con la unión entre un disco y la cinta de Möbius; pero es fácil encontrar varias cintas en cada figura. La botella de Klein se asemeja en su funcionamiento a este grupo.

Las superficies mínimas son un ejemplo de superficies curvas con una lógica matemática que les da un orden (no son irregulares). La mayoría de ellas parece ser el resultado de la agrupación de ciertos tipos de huecos y perímetros curvos en una superficie elástica, como si fueran composiciones. Algunas de ellas están ordenadas radialmente, simétricamente, utilizando reflejos de algunas de sus partes componentes, etc.

Pocos arquitectos conocen estas figuras. Aunque algunas pertenecen a la geometría euclidiana, existen otras que pertenecen a la topología y a la geometría diferencial. A simple vista parecen difíciles de emplear en un proyecto arquitectónico, pero se puede obtener un principio basado en ellas (o en parte de ellas) para un proyecto. En los siguientes capítulos se analizará la geometría en distintos edificios para buscar diferentes maneras de hacerlo, posiblemente a través de analogías.

Capítulo IV

Arquitectura con referencias geométricas directas

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Polígonos

Los polígonos más comúnmente utilizados en el diseño arquitectónico son los cuadriláteros.

Figuras geométricas bidimensionales

Rotor

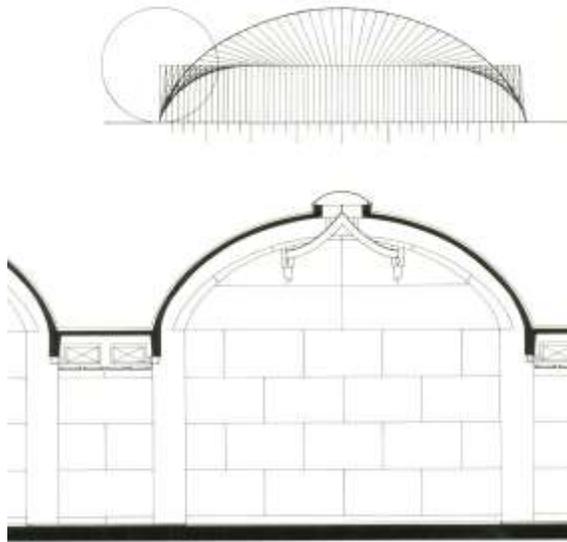
No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Cicloide

Museo de Arte Kimbell, Fort Worth, Texas, 1972
Louis I. Kahn



Este museo tiene una cubierta con forma de silo de grano. Las bóvedas, separadas por losas planas, tienen una geometría basada en la curvatura de un cicloide. Tienen una abertura central que desde el exterior tiene forma de cilindro horizontal. Los tragaluces en el interior están cubiertos por un material translúcido que tiene forma curva (probablemente estén trazados con un arco de círculo).



Hipocicloide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Deltoide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Astroide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Epicycloide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Cardioide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Nefroide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Espirales (hiperbólico, logarítmico, de Cortés, de Nielsen, de Fermat, sinusoidal, de Euler, de Fraiser, primo, racional)

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Gráficas de funciones trigonométricas

Seno y Coseno

Losas sinuosas (Candela)



Estas losas tienen su curvatura definida con arcos de círculos. El corte puede asemejarse a una gráfica de senos o cosenos. Este tipo de curvatura evita que las losas se pandeen en dirección perpendicular a la de su curvatura. Sin embargo en la dirección de la curvatura no ofrece este tipo de resistencia. Esta forma geométrica puede ayudar a obtener una mayor resistencia estructural y utilizar menos material de construcción para librar claros más grandes. Los juegos de luces y sombras también pueden ser interesantes.

Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante

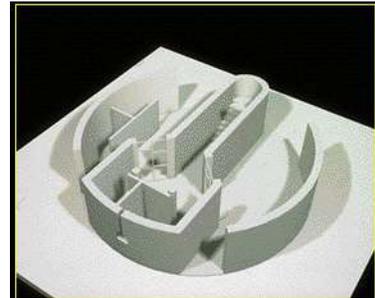
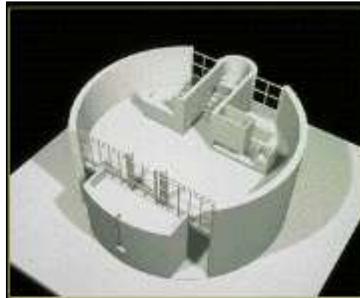
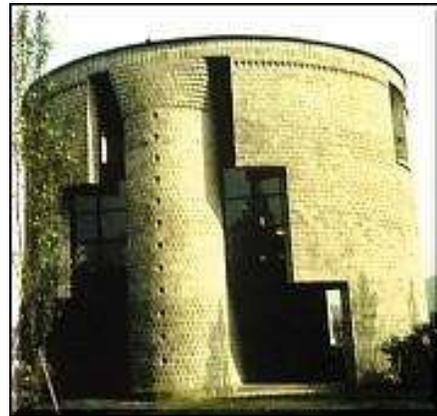
No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran estas funciones trigonométricas.

Sólidos

Los sólidos primarios son probablemente las formas geométricas más utilizadas en la arquitectura actual. Es importante mencionar que en la arquitectura moderna se diseñan muchos edificios con forma de prisma de base cuadrada o rectangular y pocos proyectos tienen forma de cubo.

Cilindro

Los cilindros tienen una forma geométrica que permite aprovechar las características de un círculo. En ocasiones los problemas que se generan por utilizar una planta circular, se solucionan con una intersección de sistemas geométricos que presenta resultados interesantes en la superficie.



Casa Rotonda en Stabio (1980-1982)

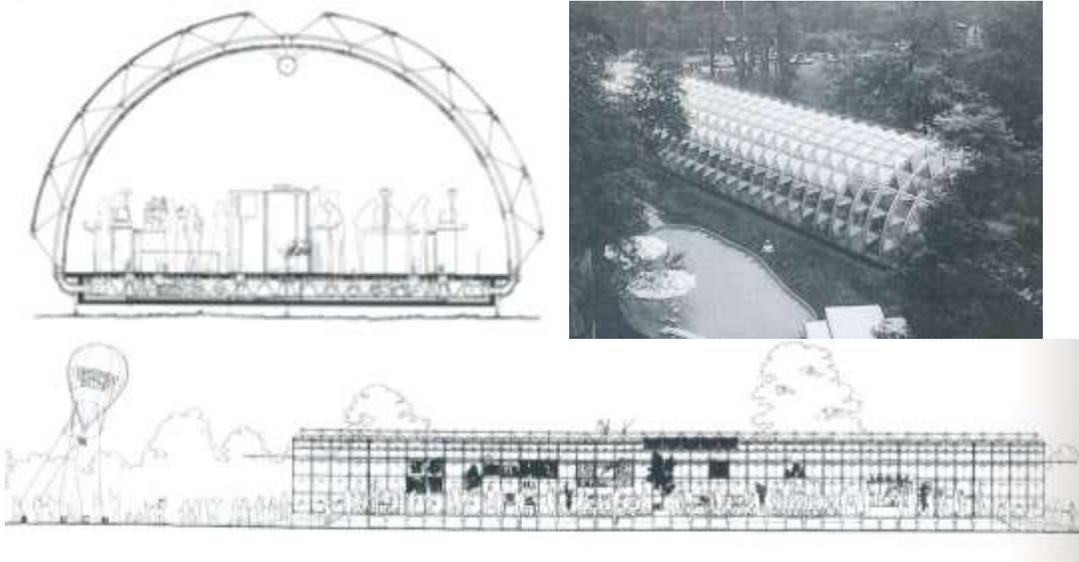
Mario Botta

En este proyecto hay una intersección de diferentes sistemas geométricos. La forma general es de un cilindro vertical y en su interior hay una geometría ortogonal que se revela con perforaciones en las fachadas. Las perforaciones son ortogonales también. En este caso el utilizar una planta circular en una casa puede generar problemas porque los muebles tienden a ser ortogonales. Esta geometría interna da orden a la composición arquitectónica y hace funcional el espacio interno. El prisma horizontal de sección triangular que está en la parte superior tiene relación con la composición arquitectónica y hace que el agua se desvíe hacia la azotea cuando llueve.

Pabellón IBM Iterante, veinte ciudades europeas, 1982-1986

Renzo Piano

Este proyecto tiene forma de medio cilindro horizontal. La estructura que lo cubre está dividiendo su superficie en rectángulos. La división de la estructura en la parte superior del cilindro sigue la modulación de su estructura, dejando un prisma triangular hueco que señala un eje de simetría vertical en el cilindro. Tiene forma de espacio abovedado y el tratamiento geométrico del cilindro está relacionado con la estructura que lo sostiene. La forma de cilindro distribuye las cargas como una bóveda y la estructura de la que está compuesto le da rigidez.



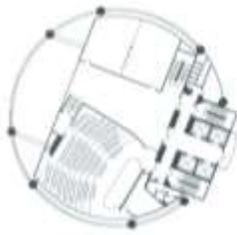
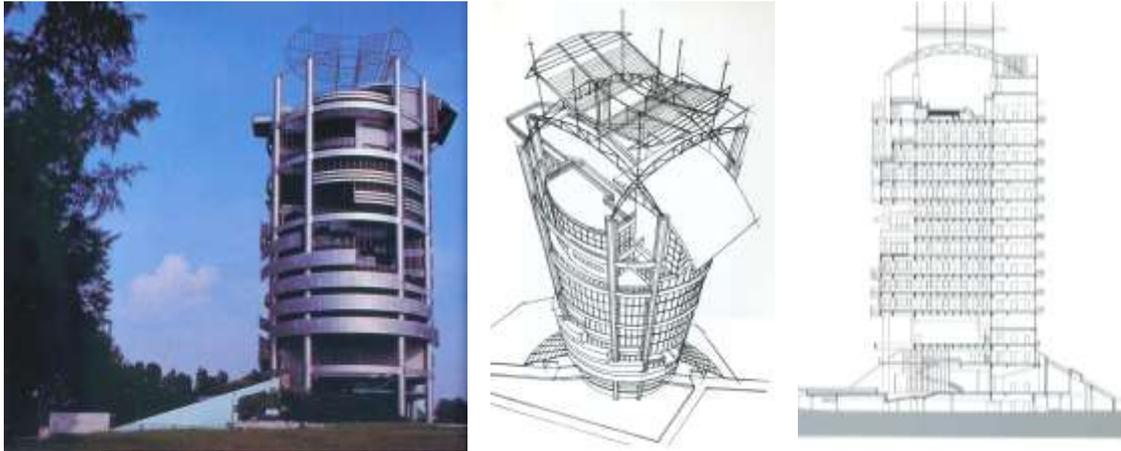
Espacio de meditación, UNESCO, París Francia, 1995

Tadao Ando

Este proyecto tiene forma de cilindro y está unido al conjunto a través de caminos que forman ejes relacionados con la forma del espacio en el que está el edificio. El cilindro tiene entradas rectangulares sobre el camino que lo intersecta por su parte central. En este caso, una planta circular no tiene problemas debido a que no lleva muebles en su interior. El volumen tiene un tratamiento bastante limpio y su interior es iluminado con cuatro tragaluces que forman in círculo y que están aislados por las vigas que detienen la losa.



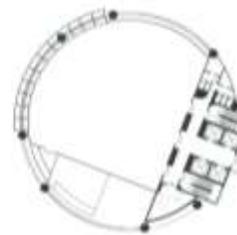
Menara Mesiniaga, Selangor, Malasia (1989-1992)
 T. R. Hamzah & Yeang SDN. BHD



planta baja



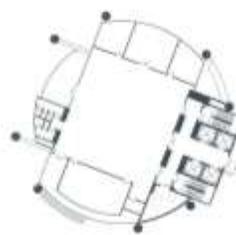
planta primera



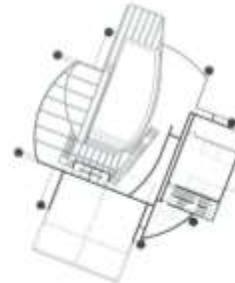
planta tercera



planta sexta



planta décima

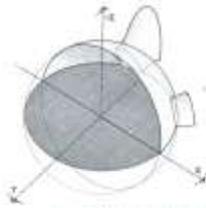


planta undécima

Este proyecto está conformado por una intersección de sistemas geométricos. Su forma cilíndrica tiene una cruz griega inscrita en el interior que ordena los espacios ortogonales. La intersección de estas figuras se señala con ocho columnas en la circunferencia, lo cual tiene sentido tanto geométrico como estructural. Los huecos del edificio siguen la forma de cruz griega en la mayoría de las veces. En la fachada se diseñaron una franjas horizontales que van girando en cada nivel conforme van ascendiendo, formando un espiral. Es una forma sustractiva por la cantidad de perforaciones que contiene (predominan los huecos en la superficie). La forma cilíndrica da orden compositivo a la gran complejidad del interior

Esfera Cúpulas esféricas

La Jacaranda, México, D.F., (1954)
Max Borges

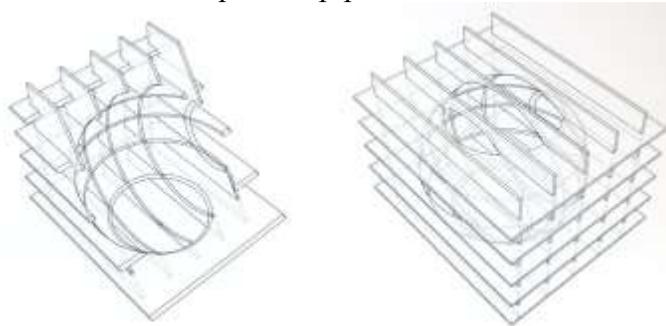


Este tipo de cubierta se parece mucho a la cúpula que proviene de la rotación de un arco de medio punto, en el sentido que tiene una forma de media esfera. En este caso la cúpula está seccionada a la mitad. Esta forma geométrica ayuda a distribuir las cargas estructurales y genera un espacio semiesférico en el interior.

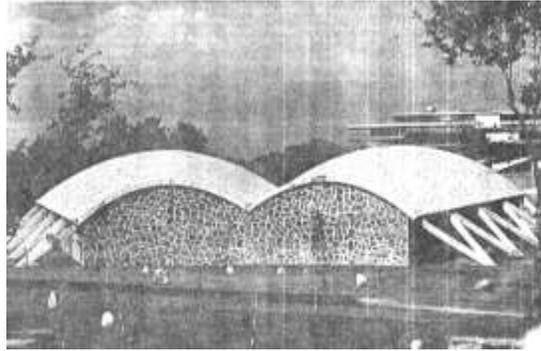
Museo de Historia Regional, Monterrey, Nuevo León, 2006
Agustín Landa y Roberto García



Este proyecto tiene un espacio de forma esférica en el interior, el cual se ha generado con una serie de muros paralelos y losas intersectados, que han sido seccionados con la intención de crear este volumen primario. A través de cristal se delimita esta forma geométrica. Los módulos del cristal son secciones de triángulos que en conjunto forman la esfera. En el exterior tiene forma de paralelepípedo.



Cono Conos



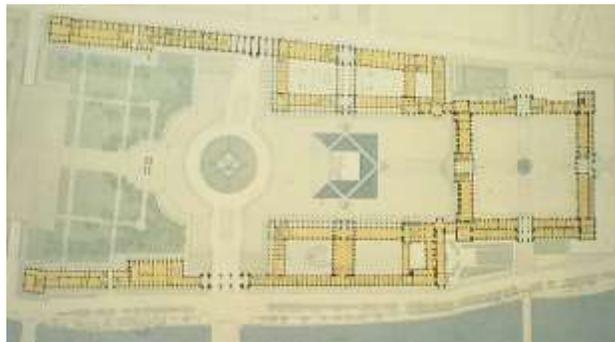
Estas cubiertas tienen su forma definida por dos secciones de conos orientadas horizontalmente. Los apoyos que detienen el esfuerzo lateral se unen para formar triángulos isósceles.

Pirámide

Le Grand Louvre, Paris, Francia, 1983-1993

Ieoh Ming Pei

Este proyecto, en el exterior, consiste en cuatro pirámides de cristal. La del centro es la mayor, y con orientación perpendicular a sus caras está cada una de las tres pirámides restantes rotadas 45° con respecto a la central. Entre los vértices inferiores de las pirámides más chicas está señalado un cuadrado que se intersecta en los puntos medios de sus aristas con los vértices de la pirámide central. La estructura de las pirámides está dividida en rombos, que terminan en la parte inferior como triángulos.

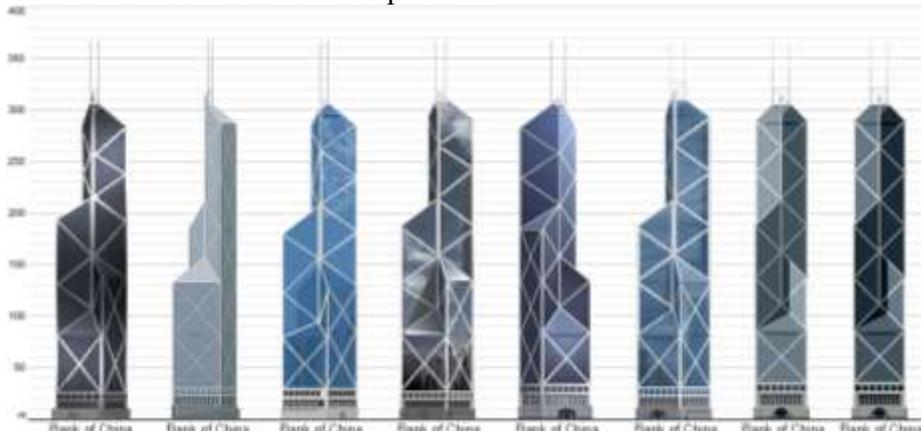


Prisma

Torre del Banco de China, Hong Kong, 1982-1989

leoh Ming Pei

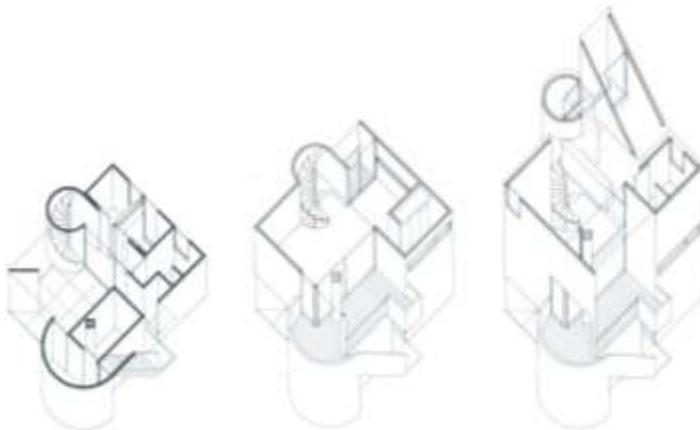
Este proyecto tiene planta cuadrada y en elevación tiene cuadrados con líneas en sus diagonales. Cada cuarta parte de la planta (dividida en sus diagonales) se extrude para convertirse en un prisma de base triangular, mismos que se seccionan a alturas diferentes manteniendo una inclinación en la parte superior. En el interior hay triángulos con orientación horizontal formando hexágonos. Los vértices de estos triángulos coinciden con las inclinaciones de las secciones de los prismas.



Composición de volúmenes primarios

Residencia y estudio Gwathmey, Amagansett, New York, 1967

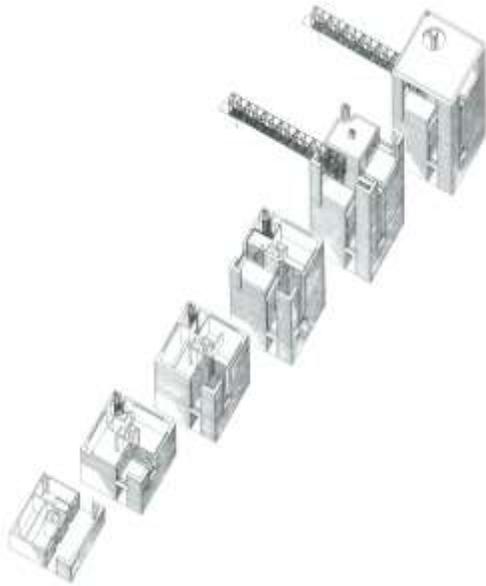
Charles Gwathmey



Esta casa está diseñada siguiendo volúmenes geométricos primarios. El volumen que da unidad es un cubo, por estar en el centro de la composición y por ser el más grande. De él salen un cilindro en la parte posterior (las escaleras), y otro en la parte de enfrente. Al lado de las escaleras sobresale un prisma con su parte superior inclinada. En la entrada tiene un pequeño balcón que sobresale como un paralelepípedo horizontal.

Paralelepipedo

Casa Unifamiliar (Bianchi), Riva San Vitale, Ticino, Suiza (1971-1973)
Mario Botta

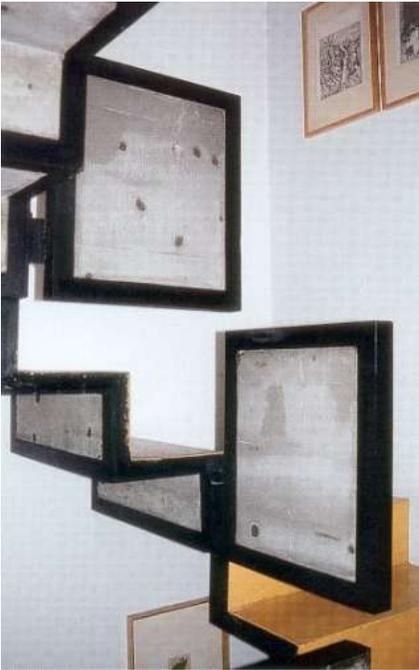


Esta casa está situada en un terreno de pendiente pronunciada. Su manera de adaptarse a la inclinación del terreno es formando un paralelepípedo vertical de planta cuadrada y teniendo el acceso en la parte superior a través de un puente (con forma de paralelepípedo horizontal).

La planta es cuadrada y la escalera que comunica los cuatro niveles (también cuadrada) está casi en el centro, desplazándose a través de una de las diagonales del cuadrado de la planta.

Las fachadas son rectangulares con una proporción armónica de raíz de dos. Botta diseñó un volumen sustractivo, en el cual los huecos de las fachadas revelan la geometría interior y su relación con la exterior. Los huecos del volumen del edificio, constituidos de formas rectangulares unidas, no interrumpen las aristas del volumen general. Tal vez esto sirva para que se entienda la forma geométrica general del edificio.



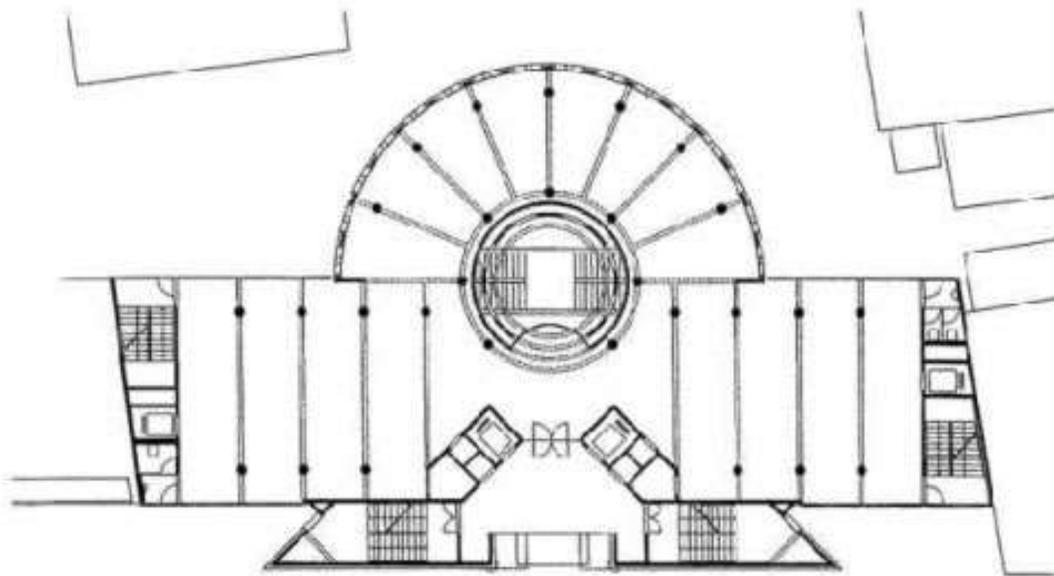


En la escalera vemos un diseño limpio y ligero con una fuerte configuración geométrica. El barandal está formado por cuadrados metálicos sujetos de tal modo que parecen estar flotando. Estos cuadrados delimitan un espacio hueco con forma de prisma de base cuadrada al centro de la escalera. El ritmo que se consigue hace parecer que los cuadrados van girando por cada uno de sus cuatro lados conforme se van elevando.

Mediateca, Villeurbanne, Francia (1983-1988)

Mario Botta

En este proyecto se unen tres figuras geométricas en planta que son difíciles de enlazar: el círculo, el triángulo y el paralelogramo. Las tres figuras geométricas se extrudieron, convirtiéndose en prismas. La fachada es definida por uno de los tres lados del triángulo. El centro del círculo coincide con el vértice del triángulo opuesto a la arista de la fachada. Uno de los lados del paralelogramo pasa por el centro del círculo y es paralelo al lado expuesto del triángulo. En el punto en que se unen los tres volúmenes hay un hueco cilíndrico con un balcón que sugiere otro cilindro de menor radio. Los huecos de la entrada son ortogonales y más variados de lo normal.



Sede del Corporativo Jiushi, Shanghai (2000)
Norman Foster

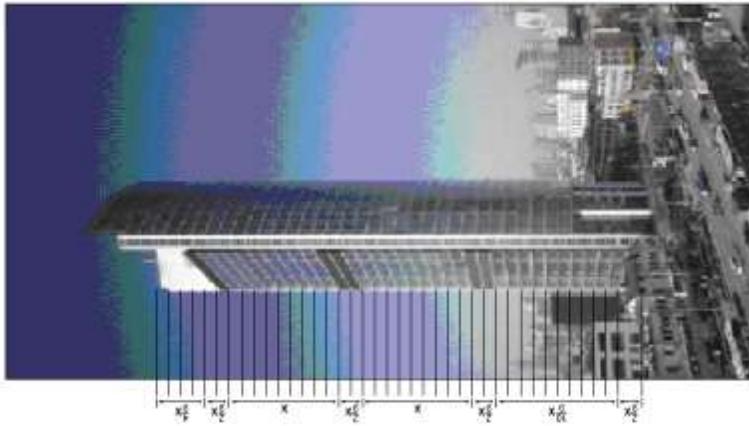


La geometría fue uno de los temas principales de este edificio. Tiene una composición arquitectónica interesante utilizando geometría euclidiana en lugar de una más acorde con nuestra época. Su forma responde a su contexto inmediato: el volumen curvo posterior responde a la curvatura de la calle y los volúmenes triangulares, a la retícula de la ciudad, por estar el edificio rotado 45° . El edificio se diseñó en planta y después se extrudió.

En la planta se están utilizando rectángulos, triángulos rectángulos de 45° , y una sección de un círculo, cuya relación con el resto de los elementos compositivos parece ser sólo la de compartir la simetría del conjunto; el centro del círculo está sobre el eje de simetría pero horizontalmente no parece tener relación con las demás formas geométricas. Los volúmenes se generan al proyectar las formas geométricas de la planta. El interrumpir los prismas de base triangular varios niveles antes que el resto de los volúmenes, crea una terminación para el desarrollo vertical del edificio que llama la atención. Las líneas horizontales de la fachada hacen a la forma exterior del edificio más interesante.

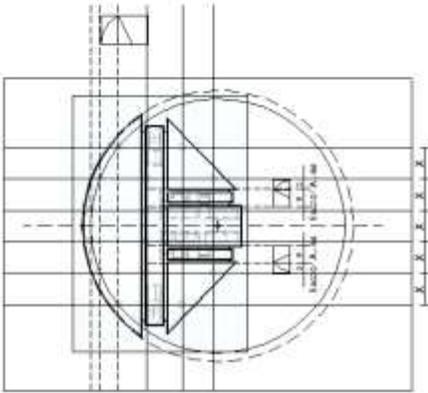
En la parte posterior el edificio tiene marcada en la fachada la misma figura que tiene en planta, omitiendo las franjas horizontales. La figura de la parte superior indica un plano inclinado, que pudo ser un corte en el volumen.

Geometría de elevación

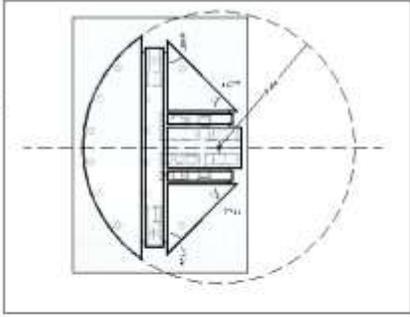


La altura de los niveles sirve para modular la elevación del edificio.

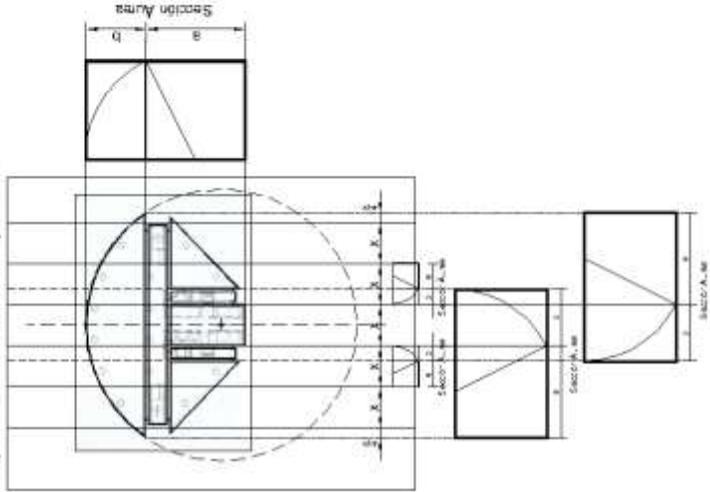
Geometría de ejes



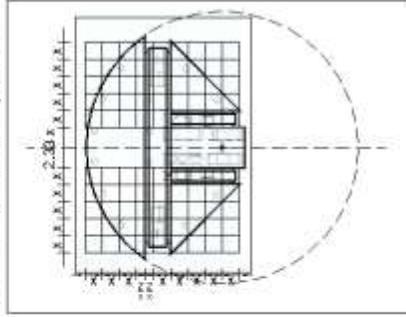
Geometría de planta



Proporciones de la planta



Cuadrícula en planta



Antiprisma

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Sólidos de revolución

Toro

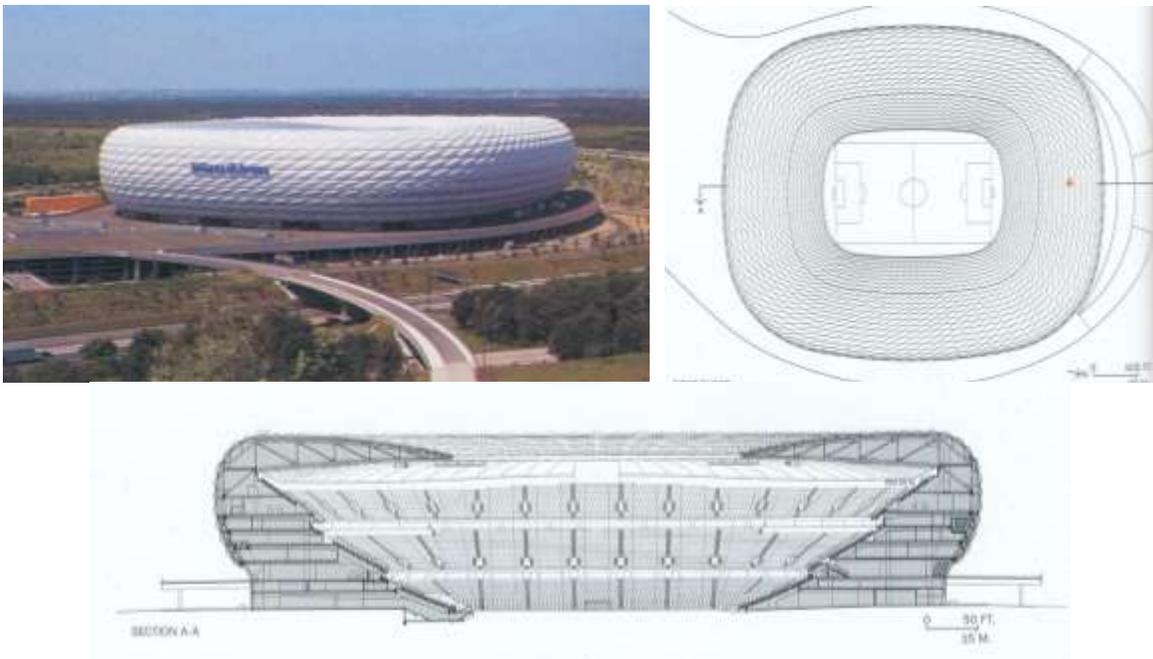
No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Catenoide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Allianz Arena, Munich Alemania, 2005 Herzog & De Meuron

La forma geométrica de este estadio podría relacionarse con un sólido de rotación, con la única diferencia que la figura del corte (que no procede de ninguna figura geométrica sola) no rota alrededor de un círculo sino de un rectángulo con las esquinas redondeadas. Esto da como resultado una forma general rectangular con las esquinas redondeadas y con un hueco rectangular de las mismas características. La forma que está siendo rotada puede descomponerse en arcos de círculo y en curvas isópticas en donde están las gradas. La forma general resultante está dividida en rombos que se componen de líneas horizontales y diagonales, las cuales siguen la forma externa del estadio.



Poliedros

Deltaedros

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran estas figuras geométricas.

Sólidos platónicos (poliedros regulares)

La aplicación más común de estas figuras geométricas está en las cúpulas geodésicas (que se mencionarán más adelante) y en las armaduras de tetraedros.

Sólidos de Arquímedes (poliedros irregulares)

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran estas figuras geométricas.

Sólidos de Catalán

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran estas figuras geométricas.

Sólidos Kepler-Poinsot

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran estas figuras geométricas.

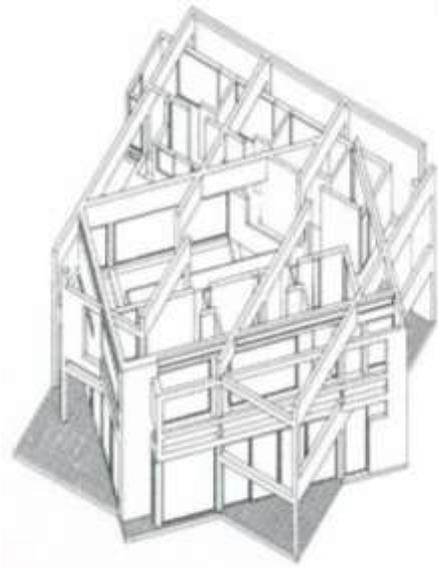
Sólidos de Jonson

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran estas figuras geométricas.

Poliedros compuestos
Casa III (Casa Miller), Connecticut, Estados Unidos (1970)
Peter Eisenman

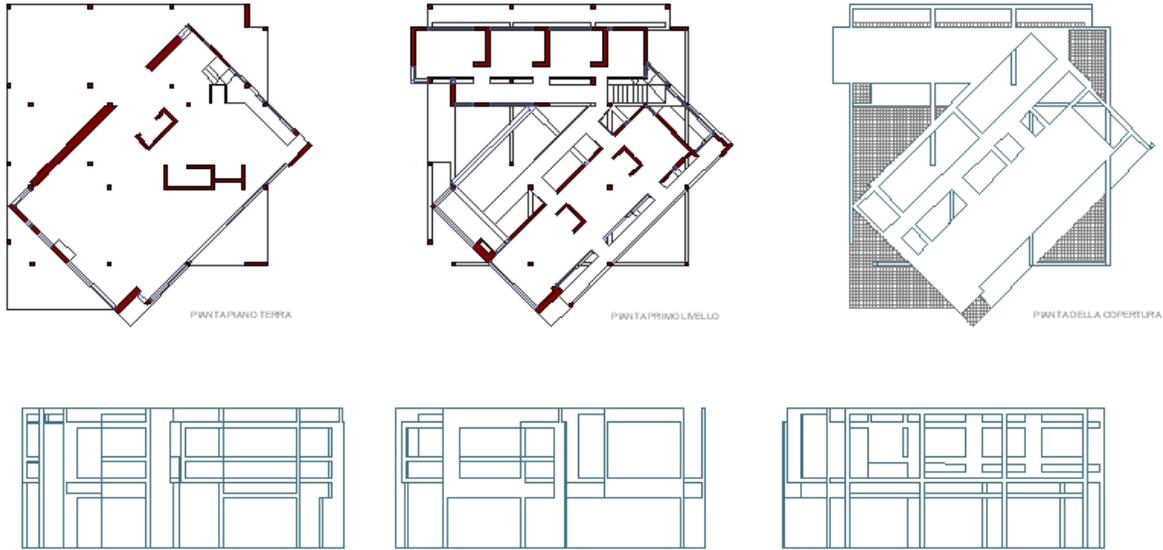


Esta casa pertenece al periodo formalista de Peter Eisenman. Las primeras cuatro casas de esta serie se diseñaron creando transformaciones de cubos blancos. Sus composiciones arquitectónicas eran el resultado de una serie de operaciones formales que se relacionaban con las condiciones formales iniciales (por lo general eran retículas, planos, y volúmenes cuya inversión, traslación y rotación producía estructuras de gran complejidad).



En la casa III se realizó una intersección de dos volúmenes paralelepípedos; uno de ellos está rotado 45 grados con respecto al otro. De la intersección se obtiene una composición arquitectónica difusa, en la cual algunos de los espacios resultantes se transforman en espacios exteriores delimitados por columnas y vigas. Pese a que sus búsquedas difieren de las teorías del Movimiento Moderno en temas como el de la funcionalidad, se sigue basando en muchos de sus principios: como por ejemplo, desde el exterior parecería que el interior es totalmente irregular e incómodo, y sin embargo la sorprendente claridad espacial interior se logró a través del uso de columnas.

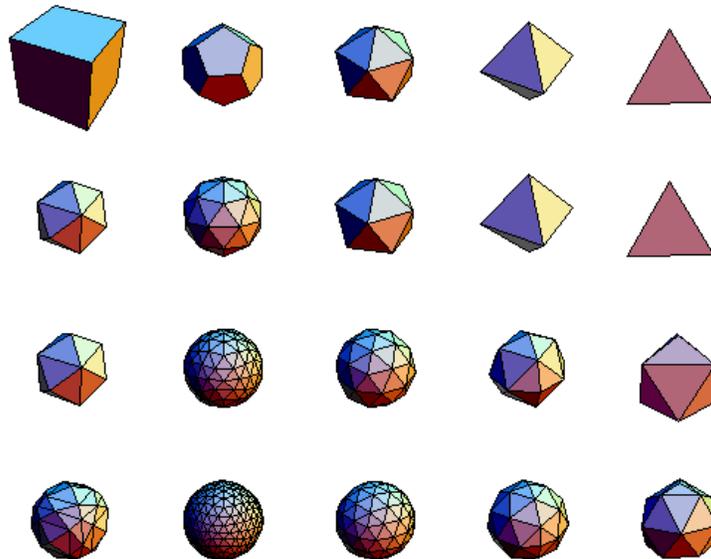
Las columnas no están geoméricamente organizadas dentro de una retícula clara, sino que se sugieren dos (una para cada volumen) sin tener una división muy clara entre ellas.



No es una casa que utilice recursos geométricos de nuestra época, pero la manera de crear composiciones complejas y originales a través del uso de una geometría tradicional es muy interesante y muy relacionada con nuestra época.

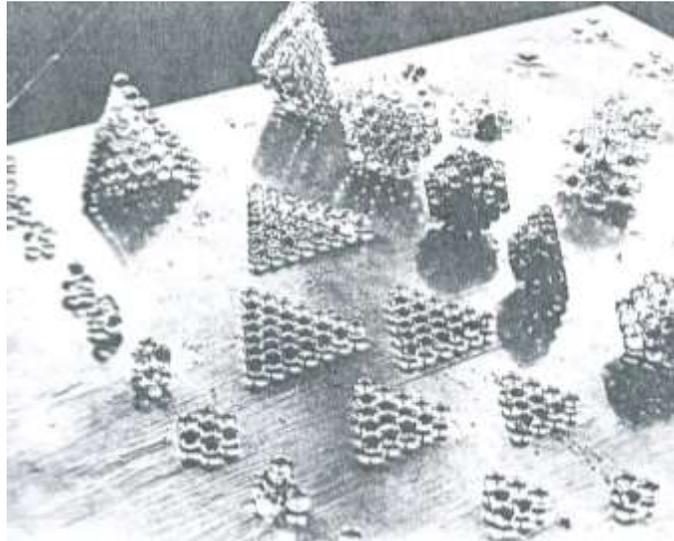
Cúpulas geodésicas

Una cúpula geodésica es un proceso de triangulación de un poliedro que produce una aproximación cercana a una esfera. En las figuras siguientes se observan los sólidos Platónicos siguiendo el proceso de triangulación: primero se agregan pirámides sobre las caras cuyos polígonos no son inicialmente triangulares, luego se agrega una pirámide de base triangular truncada en cada cara triangular para formar cuatro triángulos, finalmente se agrega una cenefa de triángulos sobre las aristas.

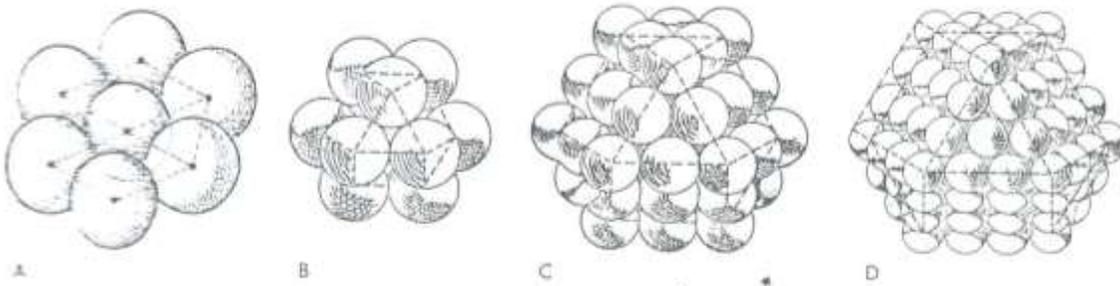


Triangulación de sólidos platónicos

Geometría Energética y Sinérgica



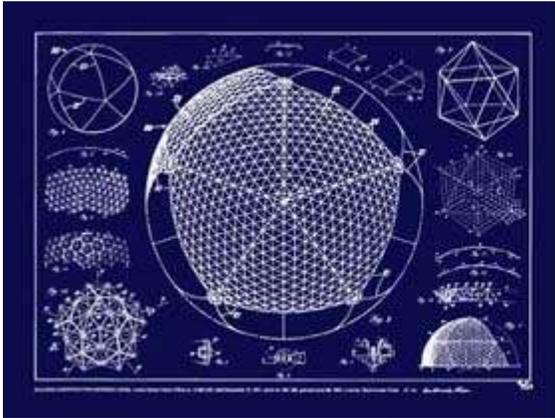
Estas son muestras de los grupos más apretados de esferas que se pueden formar (teniendo todas el mismo radio).



- A) En un plano los grupos de esferas más apretados forman hexágonos, al unirse en grupos con forma de triángulos equiláteros.
- B) Primera capa con doce esferas que rodean otra central (forma de cuboctaedro).
- C) Segunda capa con cuarenta y dos esferas que envuelven la primera capa (forma de cuboctaedro).
- D) Tercera capa con noventa y dos esferas que cubren la segunda capa (forma de cuboctaedro).

El número de esferas en cualquier capa es igual a $(\text{radio}^2 * 10) + 2$. El poliedro que prevalece en las capas es el cuboctaedro. Al seccionar al cuboctaedro por la mitad queda un hexágono, lo cual explica la relación entre estos diferentes acomodos.

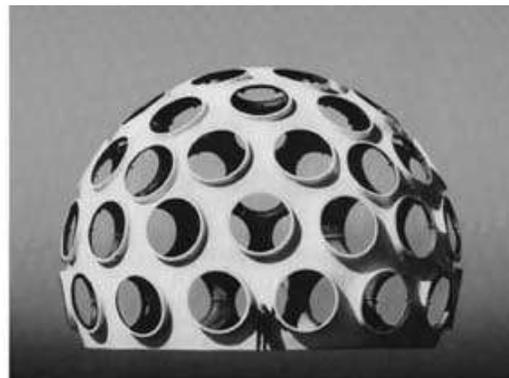
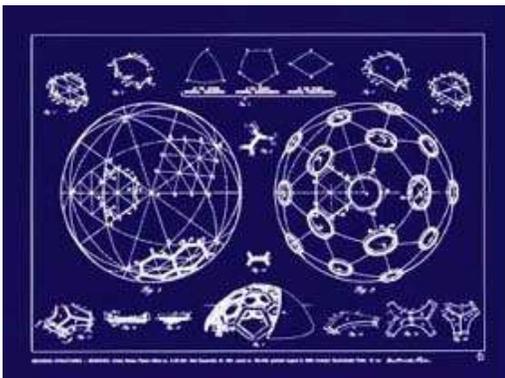
Pabellón de Estados Unidos para la Exposición Universal en Montreal (1967)
Richard Buckminster Fuller



Para diseñar esta cúpula geodésica, Buckminster Fuller se basó en un icosaedro. En sus vértices hay un pentágono regular. Los pentágonos son unidos por hexágonos sobre las aristas del icosaedro y los triángulos resultantes sobre las caras del icosaedro se rellenan con hexágonos irregulares, paralelos a los de las aristas. Se puede observar como los hexágonos que componen la mayor parte de la superficie cambian de dirección al intersectarse en los pentágonos de los vértices.



Ojo de Mosca (1961)
Richard Buckminster Fuller



En esta estructura se agregaron huecos circulares en los vértices de una cúpula geodésica (basada al parecer en un icosaedro). La superficie es esférica en lugar de estar formada por planos.



Casa Autónoma (1982)
Richard Buckminster Fuller y Norman Foster



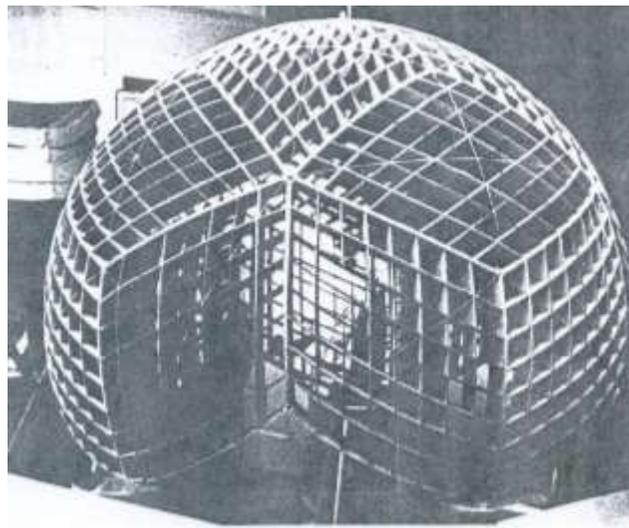
En este proyecto, se utilizan los mismos principios de las cúpulas geodésicas, pero los vértices están truncados, formando triángulos isósceles. Hay dos cúpulas concéntricas.

Edificio Rotonda Ford, Michigan (1953)
Richard Buckminster Fuller



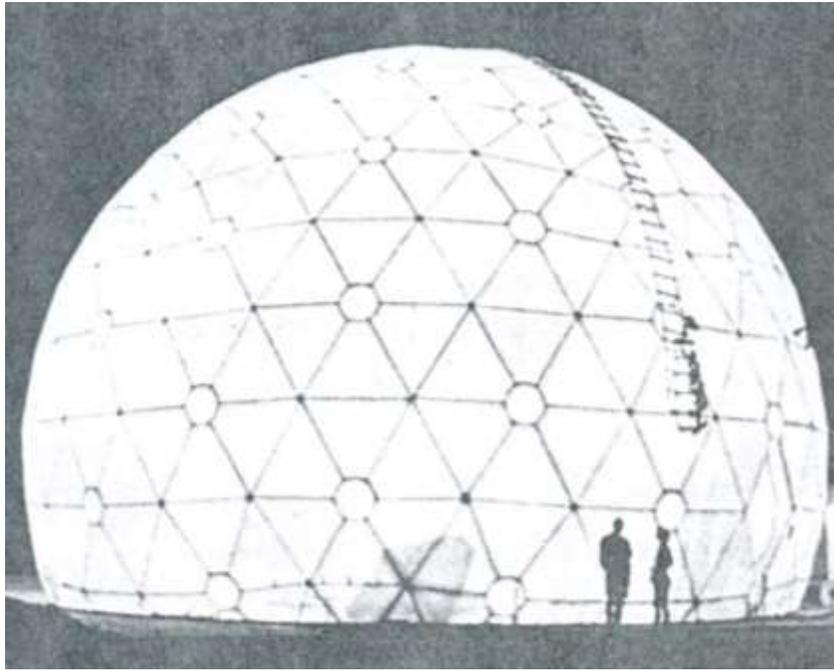
En este caso se utilizó una cúpula geodésica con una armadura de tetraedros que en el recubrimiento exterior se marca con rombos.

Estructura geodésica con forma de huevera múltiple (1952)
Richard Buckminster Fuller



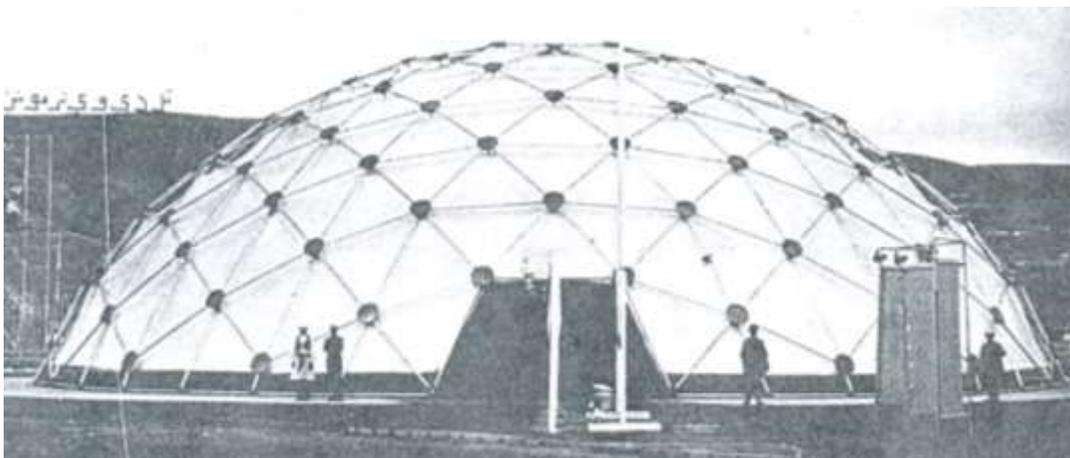
Es este caso la cúpula está trazada en un dodecaedro, pero puede interpretarse como un triacontaedro rómbico esférico. Cada pentágono que compone las caras, si se considera como dodecaedro, está dividido en cinco triángulos que se unen al triángulo del pentágono que está a su lado, formando un rombo. Las divisiones internas son paralelas a los triángulos, omitiendo las líneas de los pentágonos. También puede asociarse a un icosaedro si se divide cada rombo en dos triángulos equiláteros.

Radome de plástico, Mount Washington (1955)
Richard Buckminster Fuller



Esta cúpula tiene círculos en algunos de los vértices de los polígonos. Cada vértice sobre el cual se encuentra un círculo está rodeado por vértices sin círculos. Al parecer los círculos indican la ubicación de los vértices del poliedro componente.

Pabellón de los Estados Unidos en la Feria Mundial de Kabul, Afganistán (1956)
Richard Buckminster Fuller



En este caso los vértices de los triángulos tienen nodos circulares. La entrada parece ser un pentágono.

El doblamiento de los marcos espaciales, ETH, Zurich, Suiza, 1981
Santiago Calatrava



La geometría empleada para esta cubierta está muy ligada a los poliedros y probablemente se base en un dodecaedro. El interés de Calatrava reside en lograr que una forma tridimensional se doble hasta hacerse bidimensional y continúe hasta hacerse unidimensional. La ventaja de la utilización de un poliedro, en este caso, es que tenga un sentido práctico la cubierta, permitiendo que las dimensiones de todos los elementos sean de tamaños relacionados y pudiendo utilizar a lo largo de la cubierta un mecanismo para que se doblen.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Punto

Existen muchas aplicaciones para un punto.

Recta

Existen muchas aplicaciones para una recta.

Parábola

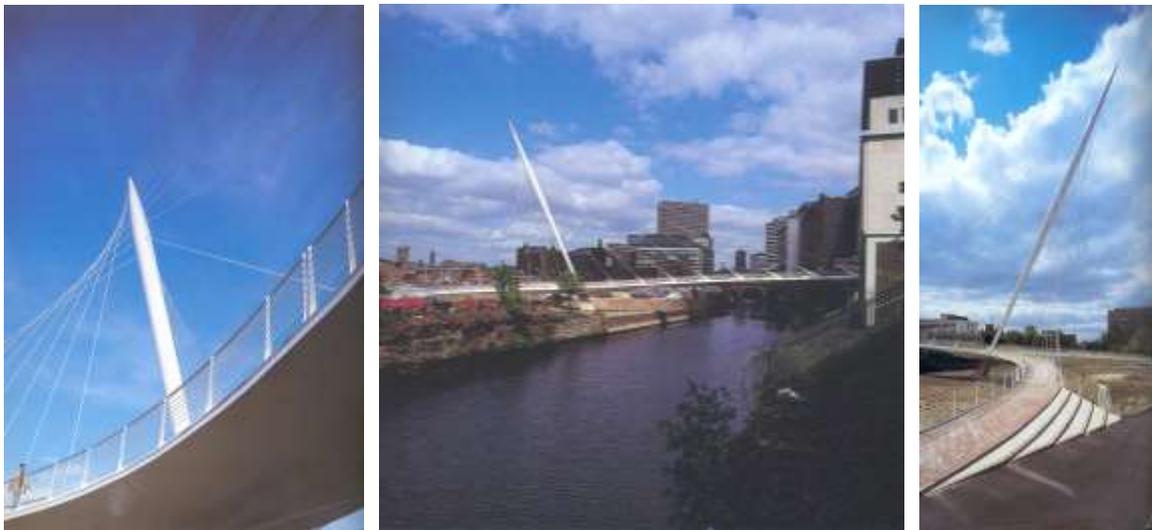
Bóvedas Funiculares



Estas bóvedas forman tres parábolas yuxtapuestas en elevación. Las cargas son distribuidas a través de ellas de manera semejante a una bóveda.

Puente Trinity, Salford, Inglaterra, (1993-1995)
Santiago Calatrava

Este puente peatonal está detenido con un mástil que a su vez se sostiene con tensores en tres direcciones diferentes. Los que están ubicados en la parte trasera están orientados de tal modo que juntos forman una parábola. Este es un recurso de dibujo que se utilizó de una manera muy creativa en este puente. Dado que el puente se divide en dos con caminos curvos en donde está el mástil y los tensores llegan hasta la orilla de estos caminos, la unión de estos tensores se vuelve tridimensional. Cada tensor ubicado en la parte posterior del mástil está trabajando de manera muy poco eficiente estructuralmente (considerando su orientación y los puntos que une); de hecho todos en conjunto, están siendo utilizados en el lugar de menor exigencia estructural (dando rigidez al mástil en lugar de estar deteniendo el puente). Tal vez su uso sea justificado más por estética que por eficiencia estructural.



Hipérbola

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Elipse

Existen muchas aplicaciones para una elipse en planta, en formas de elipsoides y de cilindros de base elíptica.

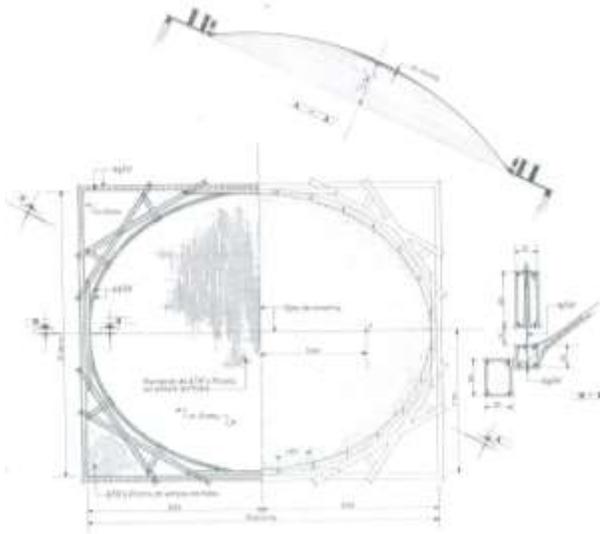
Círculo

Existen muchas aplicaciones para un círculo en planta y en elevación, en formas de cilindro o de esfera.

SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Elipsoides

Centro Gallego, México, D.F., (1953)
José Caridad Mateo

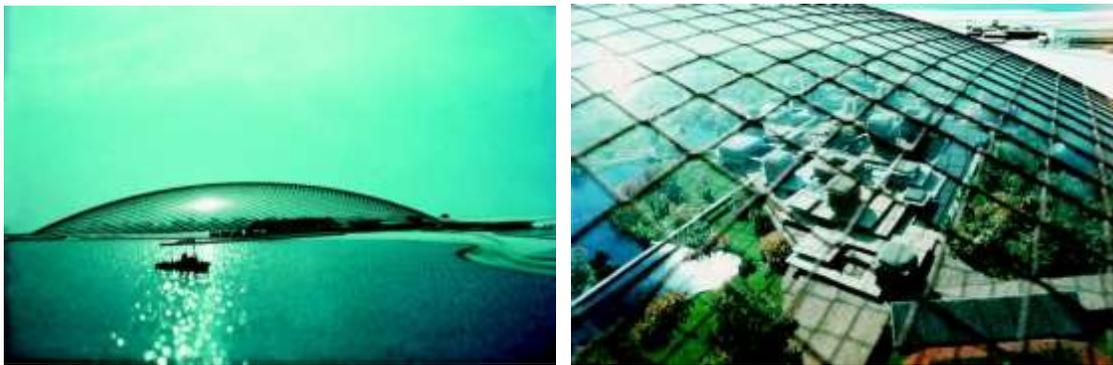


Este elipsiodes seccionado es una cúpula de planta elíptica. La diferencia entre este tipo de cubierta y los paraboloides hiperbólicos es que en este caso las dos curvaturas (perpendiculares entre sí) tienen el mismo sentido. Esta forma distribuye las cargas de modo semejante a una cúpula.

Estructuras Pneumáticas

Frei Otto

Esta estructura en particular tiene forma de elipsiodes. La retícula que la compone se deforma siguiendo la geometría elítica (no euclidiana).

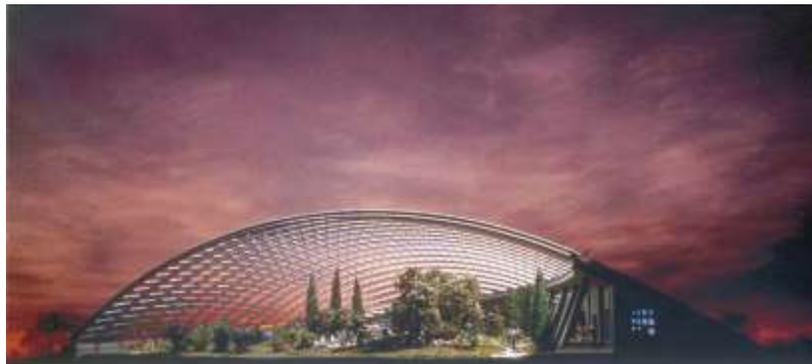
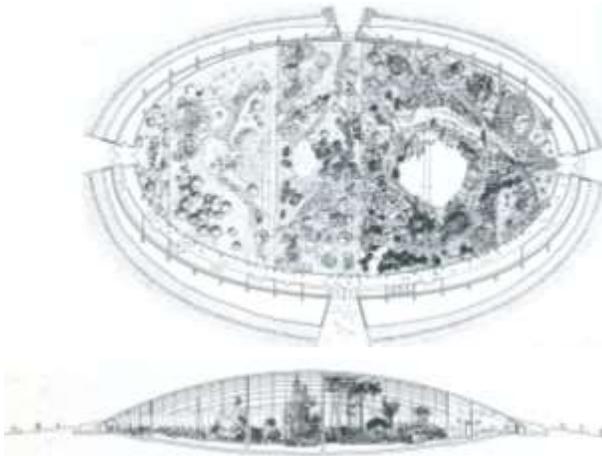


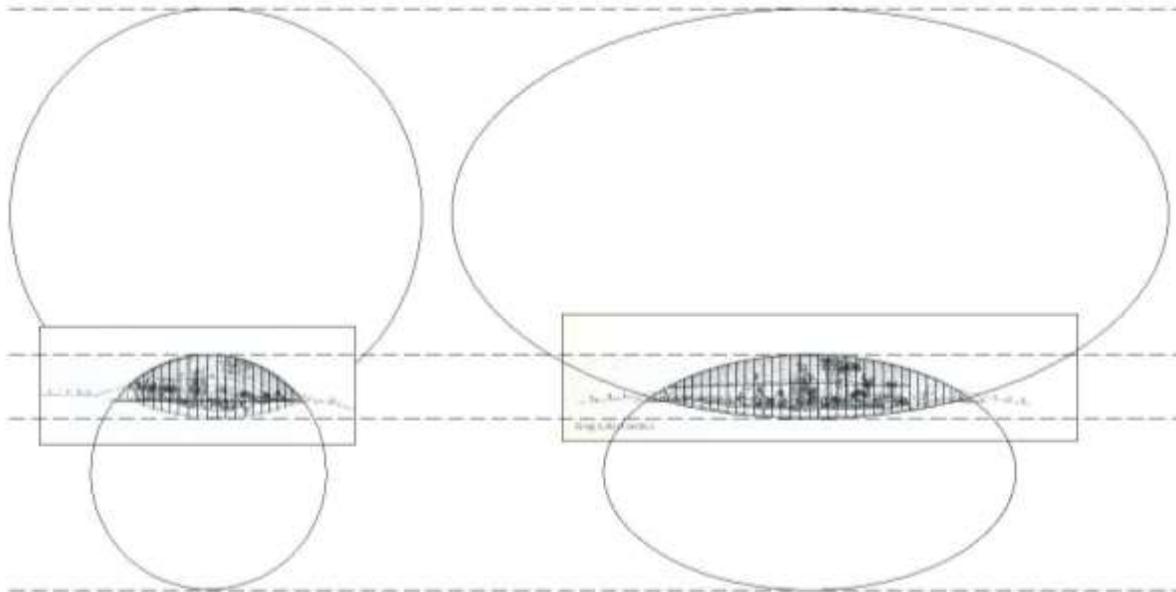
Estudio de factibilidad "Ciudad en Antártica" (1971)
Un edificio soportado por aire como una concha climática sobre una ciudad
Frei Otto, E. Bubner, K. Tange, O. Arup

Jardín Botánico Nacional de Gales, Llanarthne, Gales (1998-2000)
Norman Foster

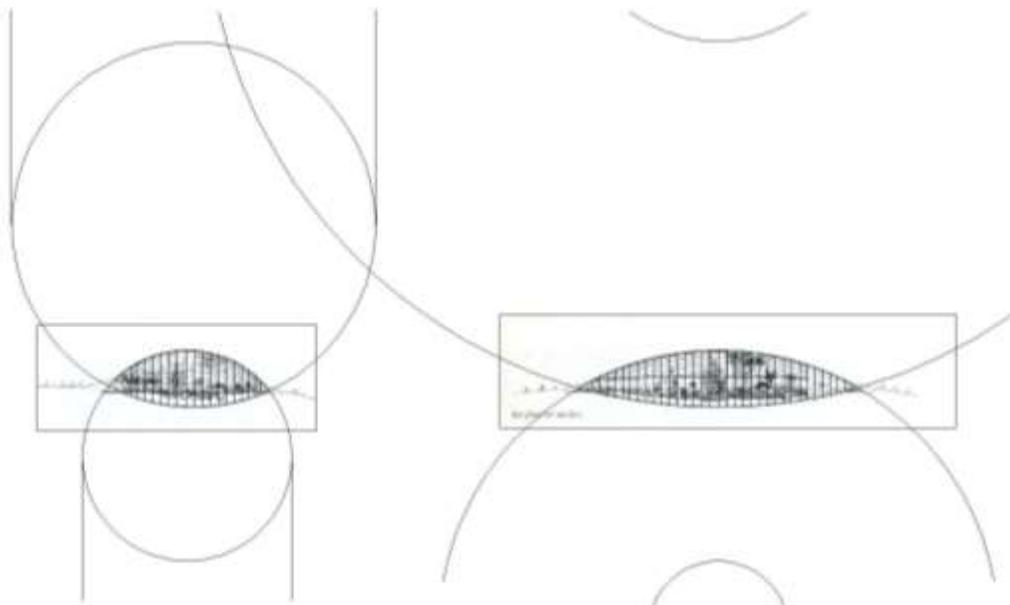


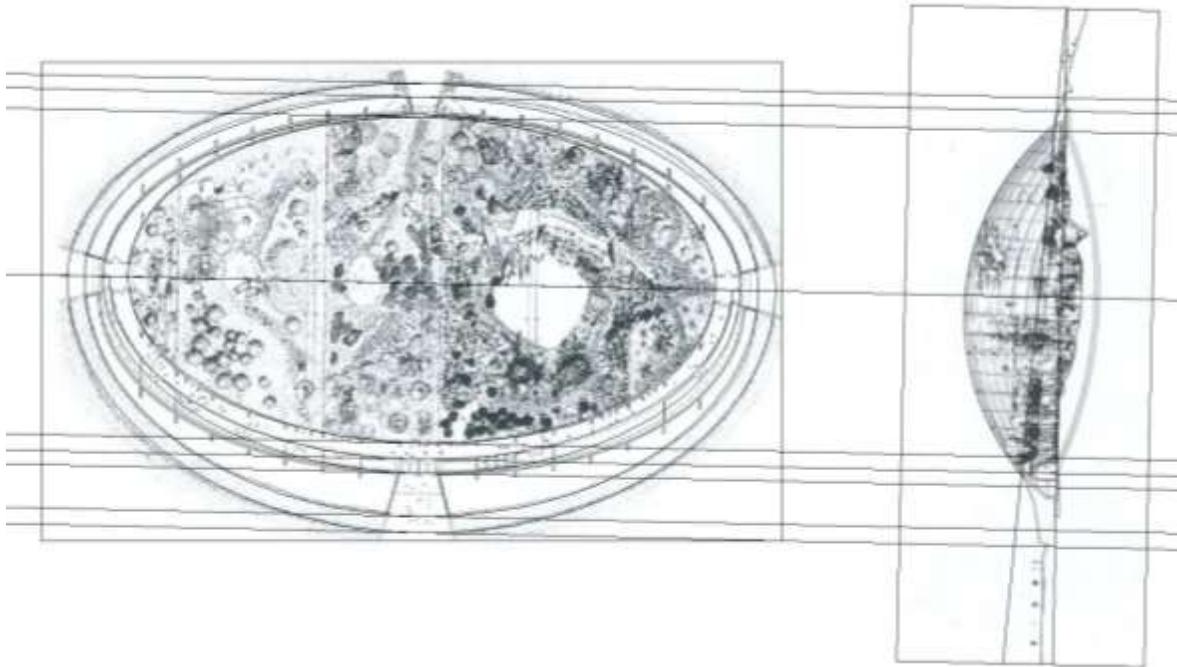
Este proyecto cambia por completo la composición formal de un invernadero tradicional sin perder su funcionalidad. La estructura moderna de acero de este jardín botánico está recubierta con cristal dando como resultado una forma de una sección de un elipsiodes que parece una “burbuja elíptica” de cristal en el paisaje verde. Toda la estructura está soportada en su perímetro. La cubierta se giró ligeramente hacia el sur (en corte) para generar un área de protección del clima en el norte y abrir vistas del campo hacia el sur desde el interior.



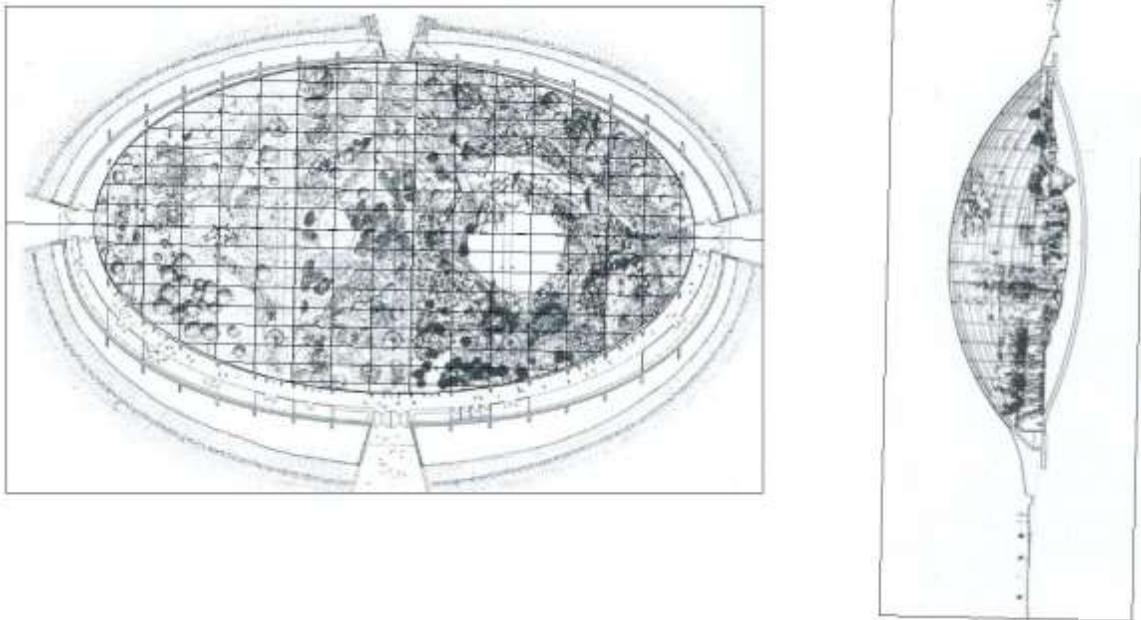


En algunos casos, es muy difícil definir la forma geométrica exacta del proyecto si no se tienen los planos originales porque puede haber deformaciones en los que se están estudiando; pero aquí se puede ver que talvez tenga forma de dos elipsoides seccionados porque parece corresponder la geometría de los cortes. La geometría de la estructura de la cubierta también corresponde con la lógica formal de esta figura. Si se tratara de dos toros seccionados (como se muestra en la figura de abajo), los elementos verticales de la estructura serían radiales con respecto al centro de los toros para aprovechar la geometría reducir los costos; sin embargo, al inclinarse estos elementos se necesitaría agregar otros adicionales para que no se colapsaran. Al ser elipsoides, los arcos son circulares y verticales.





En la planta una mitad tiene elipses menos anchos que el otro debido al corte en diagonal que tiene el interior del jardín. Este corte permite la altura suficiente de un lado para tener los espacios necesarios para que el jardín funcione. Si a esto se agrega que la inclinación de los taludes perimetrales no necesariamente tiene que ser constante, se puede explicar porqué no corresponde en algunos puntos la curvatura de las elipses.



Esta planta muestra la estructura con forma de una retícula, obtenida cruzando información de la planta y del corte. Si su forma es realmente de elipsiode seccionado, los elementos estructurales transversales son arcos de círculo y los longitudinales de elipse. En

este proyecto hay una intersección de sistemas geométricos: la estructura de la cubierta es una retícula orientada con los ejes de simetría del elipsiodes y la planta tiene elipses concéntricas, pero deformados longitudinalmente debido a la inclinación del corte.

Aunque el elipsiodes no es la forma geométrica más moderna, sí es más actual que las formas tradicionalmente utilizadas en invernaderos. La manera en que se utilizó esta figura geométrica es muy original, logrando un diseño bastante eficiente e integrándose al paisaje imitando formas de la naturaleza.

Paraboloide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

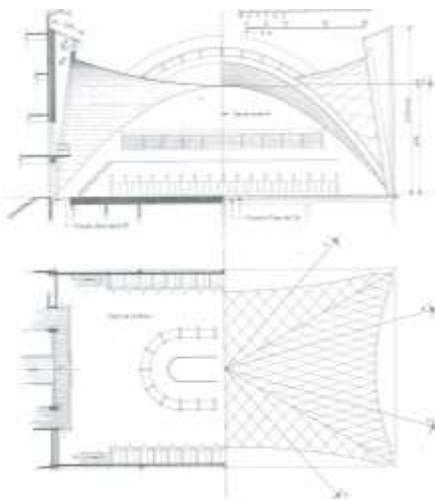
Paraboloide elíptico

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Paraboloide hiperbólico

Debido a su alta resistencia con poco material son muchos los proyectos que han tenido en cuenta los paraboloides hiperbólicos. Para tener una superficie de estas características, se necesita que tenga dos curvaturas en sentidos contrarios rotadas 90°. Parecería que solo se pueden generar pocas formas para las cubiertas que utilizan estas formas geométricas, sin embargo hay muchas variaciones posibles. Existen al menos cuatro tendencias diferentes: cuando los paraboloides hiperbólicos se asocian con bóvedas, con polígonos en planta, cuando se agrupan formando un paraguas o cuando se analiza la trayectoria de la regla a lo largo de su superficie.

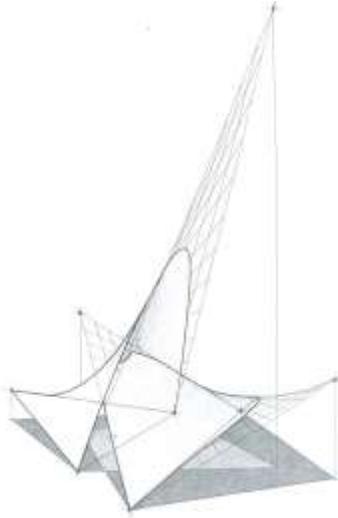
Cubiertas asociadas con bóvedas



Bolsa de valores, México D.F., (1955)
Enrique de la Mora y Fernando López Carmona

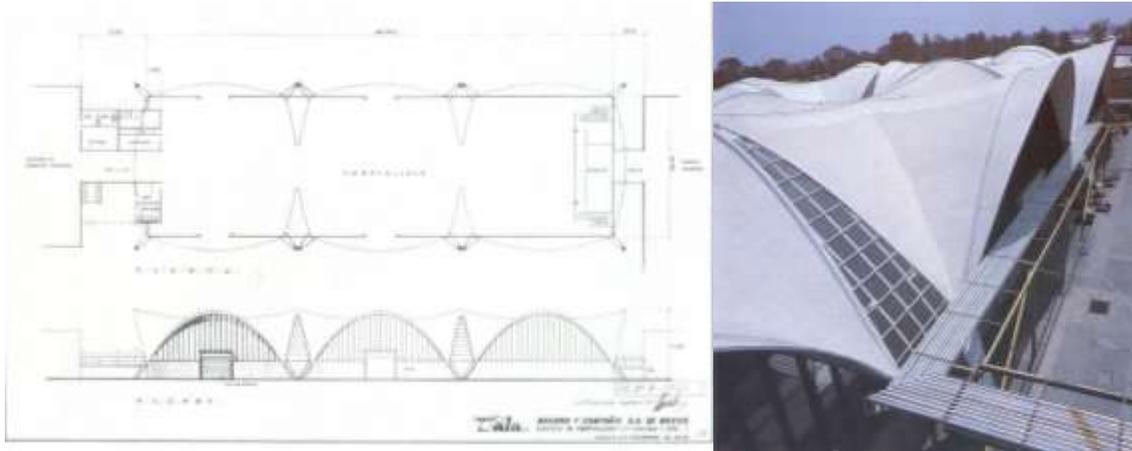
En esta cubierta los paraboloides hiperbólicos se unen formando aristas. Los arcos de los extremos tienen mayor altura que el centro de la cubierta. La cubierta tiene forma rectangular en planta y los paraboloides tienen forma triangular.

Iglesia de Nuestra Señora del Buen Consejo, México, D.F., (1958)
Juan Sordo Madaleno



En esta estructura hay dos paraboloides hiperbólicos intersectados. Los paraboloides terminan con un corte que forma parábolas, pudiendo haber terminado con su forma completa.

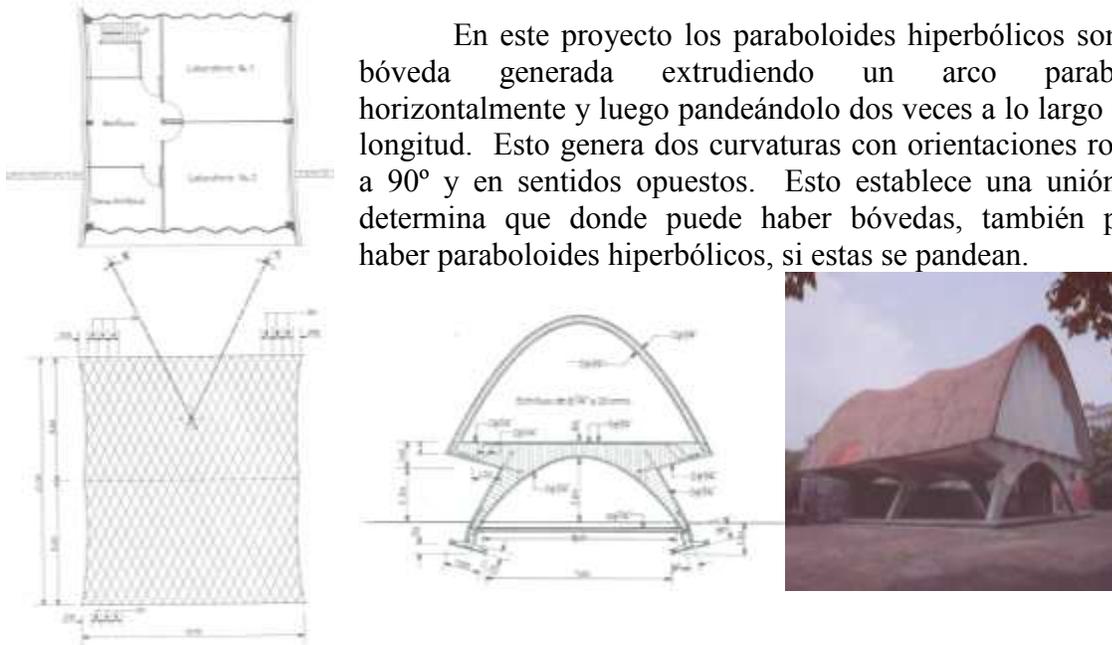
Planta de embotellamiento Bacardí y Compañía, Estado de México (1959-1960)
Sáenz-Cancio-Martín-Álvarez y Gutierrez



En este caso la cubierta está compuesta por tres bóvedas de crucería yuxtapuestas, pero con curvas en la sección longitudinal para convertirse en paraboloides hiperbólicos. Las uniones dan lugar a que haya tragaluces, los cuales dan una continuidad formal a la cubierta.

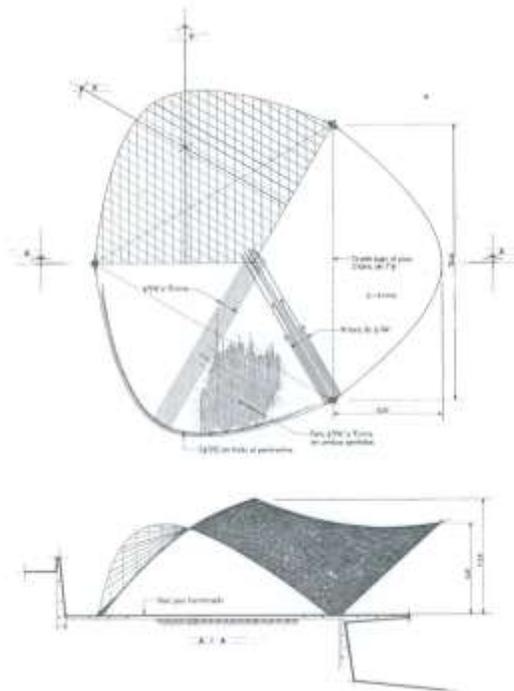
Pabellón de Rayos Cósmicos, México, D.F., (1951)
 Jorge González Reyna

En este proyecto los paraboloides hiperbólicos son una bóveda generada extrudiendo un arco parabólico horizontalmente y luego pandeándolo dos veces a lo largo de su longitud. Esto genera dos curvaturas con orientaciones rotadas a 90° y en sentidos opuestos. Esto establece una unión que determina que donde puede haber bóvedas, también puede haber paraboloides hiperbólicos, si estas se pandean.



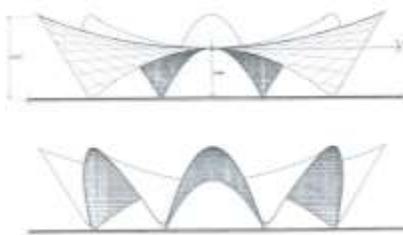
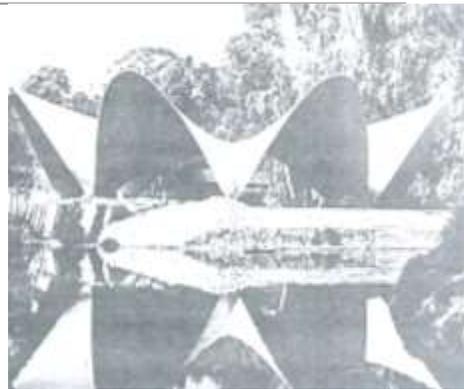
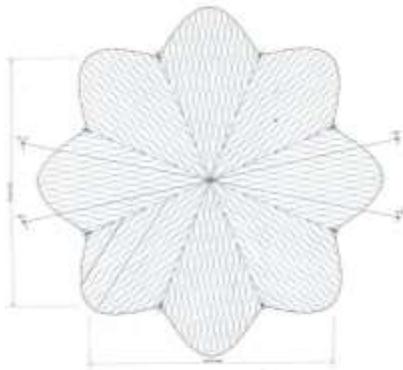
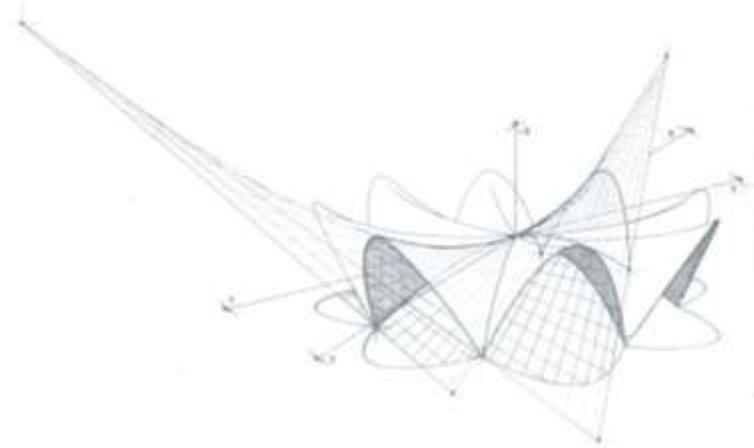
La Jacaranda, Acapulco (1957)
 Juan Sordo Madaleno

Esta cubierta tiene apoyos organizados formando un triángulo equilátero, los cuales se elevan con forma de arcos parabólicos sugiriendo otro triángulo en sentido contrario. Son tres paraboloides cuyas uniones forman aristas, las cuales se unen en su punto más alto en el centro. En este caso las aristas se mantienen más elevadas que la cubierta, logrando así una unidad visual.



Restaurante “Los Manantiales”, Xochimilco, (1957-1958)
Joaquín y Fernando Álvarez Ordoñez

En este caso, la diferencia entre una bóveda parabólica y un paraboloides hiperbólico es que este último tiene una curvatura en sentido opuesto a la del arco en lo que sería una trayectoria recta de la bóveda parabólica. Si ambas curvas se desarrollaran en el mismo sentido tendría forma de esfera o elipsiodes (según sus proporciones).

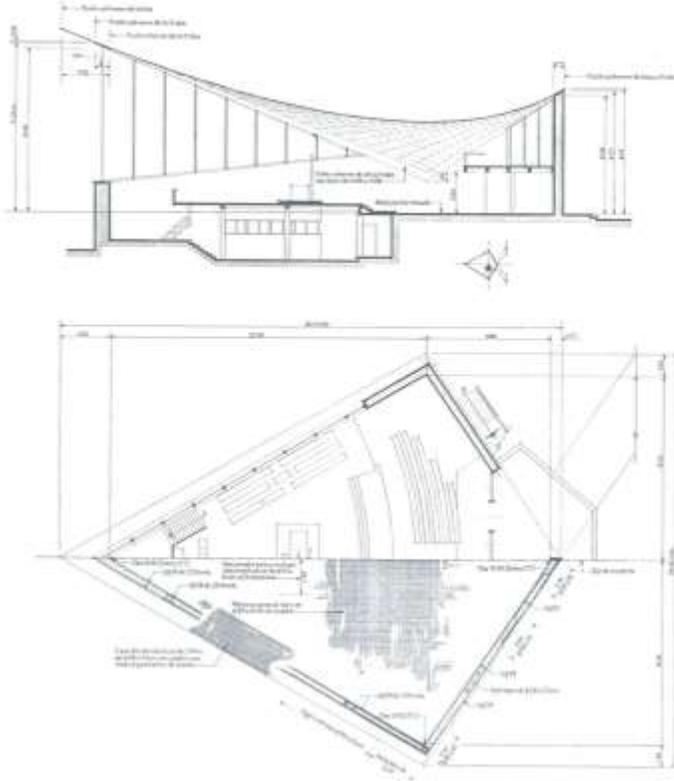


Esta cubierta tiene forma en planta de dos cuadrados intersectados (uno de ellos rotado 45°). Los paraboloides están unidos con aristas que forman arcos en el interior del espacio.

Cubiertas con forma poligonal en planta

Capilla de Nuestra señora de la Soledad, México, D.F., (1955)

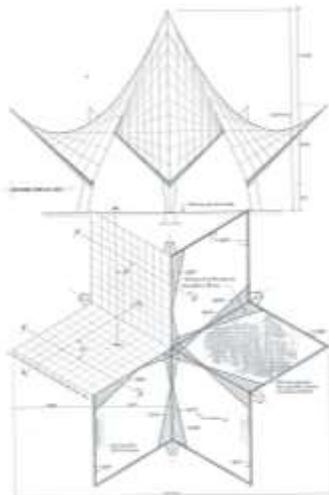
Enrique de la Mora y Fernando López Carmona



Esta cubierta consiste en un paraboloides hiperbólico con sus dos extremos opuestos elevados a alturas diferentes. Es muy semejante al caso en que se forman bóvedas, sin embargo en este caso los vértices inferiores no tocan el suelo y se genera un polígono en planta

Sinagoga, ciudad de Guatemala (1959-1960)

Jorge Montes y Carlos Haeussler



En este caso los paraboloides hiperbólicos tienen forma de rombo en planta y sus dos extremos opuestos se elevan a diferentes alturas. Seis de estas superficies se unen con un centro en común para formar una estrella hexagonal, en cuyo centro coinciden los puntos más altos. Esta es una multiplicación del caso anterior. Las seis superficies están unidas formando aristas rectas, en lugar de curvas.

Paraguas

En este tipo de construcción los paraboloides hiperbólicos se obtienen dando una altura diferente a uno de los vértices de una superficie cuadrada. En los paraguas hay cuatro los paraboloides que se unen con una columna al centro en donde se juntan los vértices que tienen una altura inferior a los demás. La cimentación tiene la misma forma pero invertida y es de menor dimensión. La ventaja de utilizar formas cuadradas en planta es que para cubrir un área se puede utilizar cualquier arreglo geométrico que utilice estas figuras. Los paraguas establecen una unión entre la geometría tradicional y la de superficies cuadráticas. La ubicación de las columnas puede variar, generando deformaciones en los paraguas. En la Iglesia de la Virgen de la Medalla Milagrosa se inclinaron los paraguas para formar una cubierta a dos aguas.

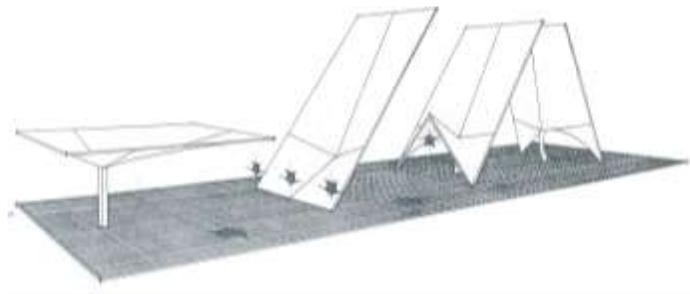


Paraguas y algunas de sus variaciones

Iglesia de la Virgen de la Medalla Milagrosa, México, D.F., (1954-1955)

Arturo Sanz de la Calzada, Pedro Fernández Miret y Félix Candela

La cubierta de este proyecto es el resultado de la transformación de un paraguas cuya columna no está en su centro, inclinando la parte superior y elevando la parte central del vértice inferior.



Superficies donde se estudia el movimiento de la regla a lo largo de la superficie

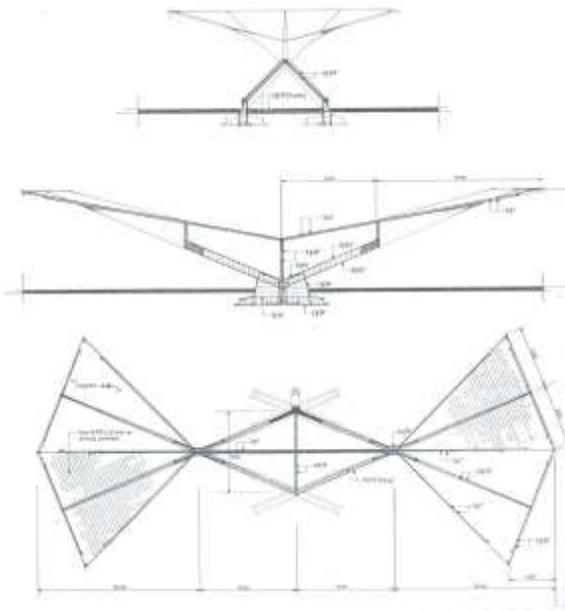
Se pueden obtener otros paraboloides hiperbólicos analizando cómo se desliza la regla a través de su superficie. Aunque esto sucede en todos los casos, en ocasiones esto es lo que determina con mayor énfasis la forma geométrica utilizada.

Estación del metro Candelaria, (1968) Félix Candela



En estos paraboloides hiperbólicos uno de los vértices del cuadrado inicial se giró 90° , dejándolo por debajo de los otros tres. Esto genera en planta una forma triangular, lo cual implica que cada columna necesita ocho de estas superficies en lugar las cuatro que tradicionalmente tendrían los paraguas comunes.

Emblema del anuncio del lago de Tequesquitengo, Morelos (1957) Guillermo Rosell y Manuel Larrosa



En este caso los paraboloides hiperbólicos se encuentran en las alas triangulares de un modo semejante al caso anterior, teniendo el cuadrado inicial dos de sus aristas opuestas con orientaciones perpendiculares. Al tener un tipo de apoyo diferente del utilizado para un paraguas, cambia por completo su fisonomía.

Frei Otto

Tiendas

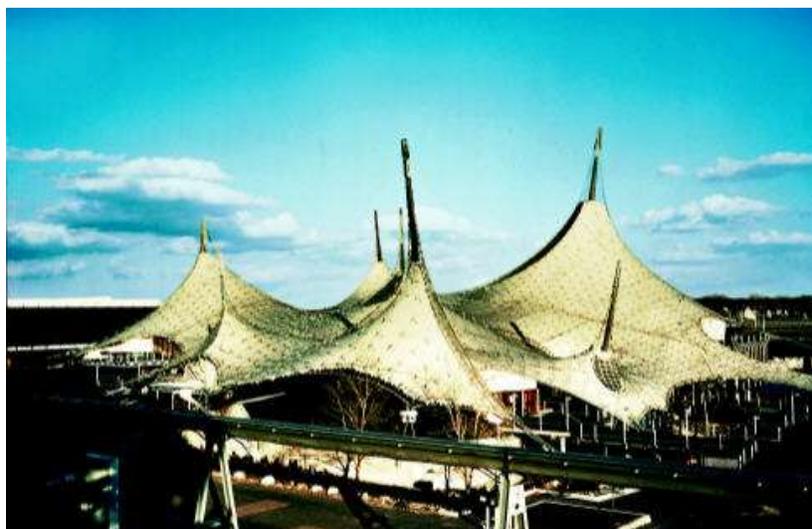
Las tiendas son cubiertas que trabajan estructuralmente a tensión y se detienen por medio de mástiles y tensores en los vértices superiores y tensores en los vértices inferiores. Esta tienda de cuatro puntos tiene forma de paraboloides hiperbólico (creado como las formas poligonales en planta), lo cual demuestra que es una forma que puede trabajar tanto a compresión como a tensión, al igual que una catenaria.



Pabellón de música del Bundesgartenschau, Kassel, Alemania (1955)

Estructuras de Cables y Redes

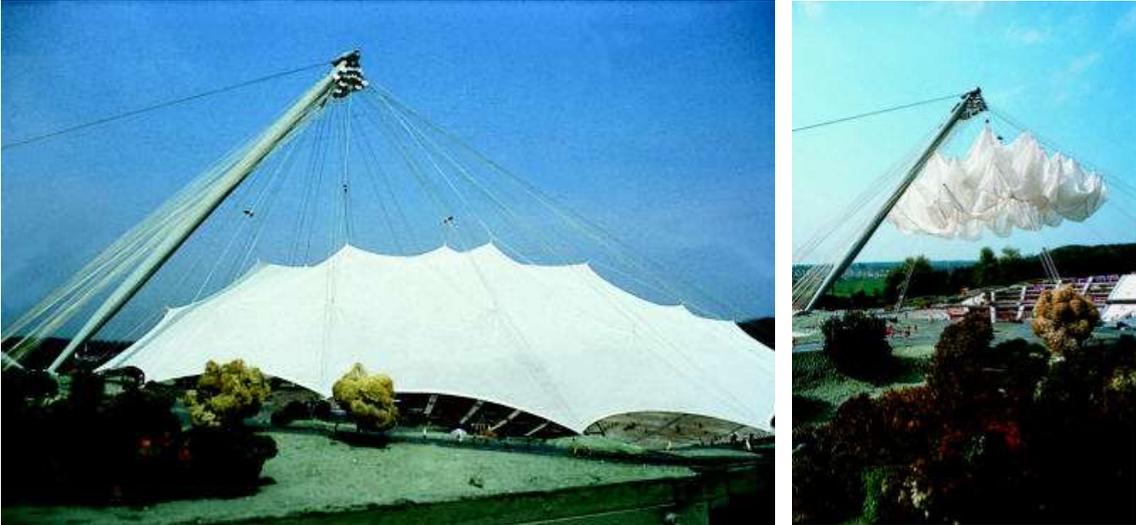
Debido al comportamiento estructural, se puede decir que la cubierta, por el hecho de ser tensada, es geoméricamente una unión de muchas catenarias. Por su forma se puede decir que se crean paraboloides hiperbólicos.



Pabellón de la República Federal Alemana, Exposición Universal, Montreal Canadá (1967)
Frei Otto

Cubiertas convertibles

En esta cubierta convertible existe otro caso de paraboloides hiperbólicos.



Estación del Farbwerke Hoechst (1971)
Frei Otto, Burkhardt y B. Rasch

Paraguas

Estos paraguas tienen semejanza geométrica a los que construyó Candela, en donde existen paraboloides hiperbólicos.



Paraguas convertibles en el jardín de la Mezquita del Profeta en Medina, Arabia Saudita (1971)
Bodo Rasch con Jürgen Bradatscg



Paraguas en escenario en un concierto de Pink Floyd (1978)
Frei Otto junto con B. Rasch y Office Happold

Hiperboloide (de una y de dos caras)

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara estas figuras geométricas.

Superficie cónica

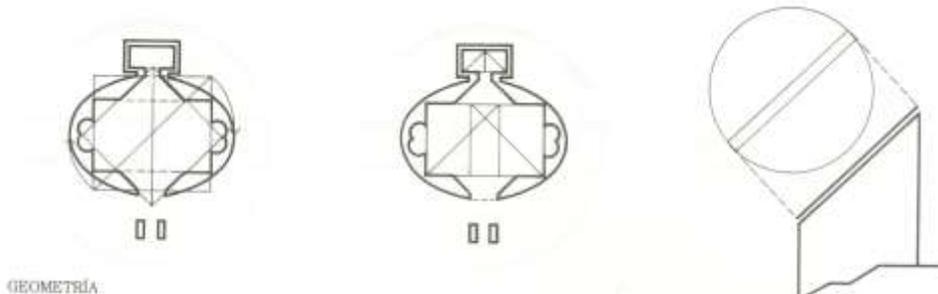
No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Cilindro elíptico

Iglesia de San Juan Bautista, Mogno, Valle Maggia, Ticino, Suiza (1986/1992-1998)
Mario Botta



La forma geométrica de la iglesia es de un cilindro truncado de base elíptica. Las proporciones del elipse de la base se determinan por el corte a 45 grados que tiene en su parte superior, el cual es un tragaluz de forma circular. En el interior, el espacio de la iglesia es rectangular en la parte inferior y se va convirtiendo en circular al elevarse hacia el tragaluz circular (cuatro conoides). En el interior hay un arco que detiene la estructura de los cristales del tragaluz y que atraviesa el cilindro en la entrada a la iglesia.



Esta es la geometría que destaca en la iglesia. Pese a que se trata de un volumen muy sencillo y limpio, hay mucho trabajo detrás de él. El edificio parece ser resultado de la geometría, en lugar de estar regulado por ella.

Cilindro hiperbólico

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Cilindro parabólico

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Conoide

Fábrica Fernández, Estado de México, (1950)
Raúl Fernández

Los conoides tienen en un extremo de su superficie un arco y del otro una línea recta. En estos casos la superficie curva se forma de la parte superior del arco hasta una de las esquinas. En este diseño varios conoides se unieron como si fueran dientes de sierra.



GEOMETRÍA NO-EUCLIDIANA

Geometría elíptica

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Geometría esférica

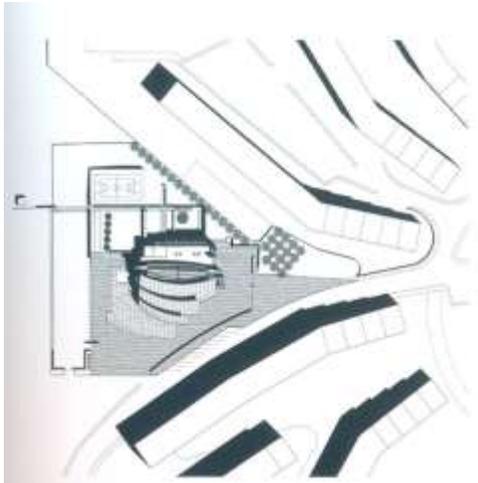
Iglesia del Jubileo, Roma, Italia (2003)

Richard Meier

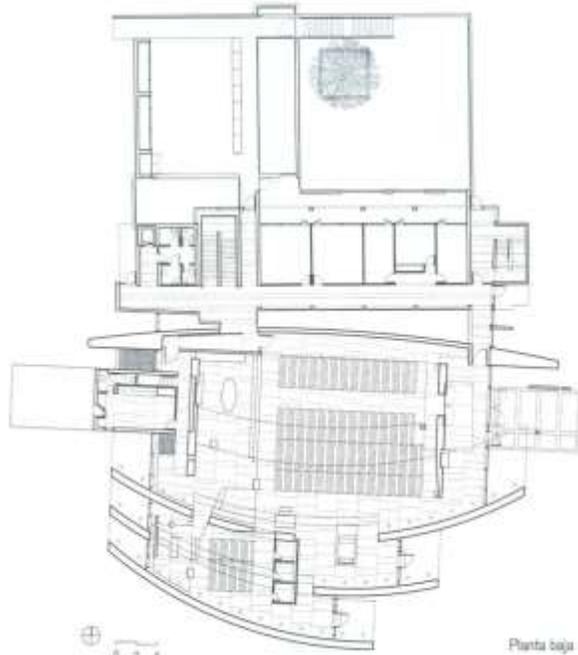


La estructura proporcional del complejo se basa en una serie de figuras ortogonales de un lado y cuatro arcos del otro (en planta). La organización de las figuras ortogonales muestra como se agrupan en la parte central del conjunto, probablemente marcando una separación entre ambos lados. Los arcos tienen la misma orientación (oriente-poniente),

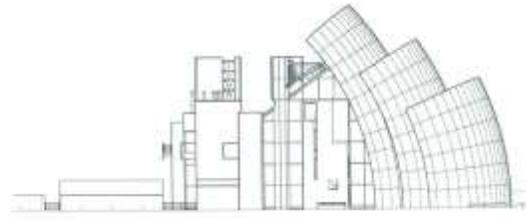
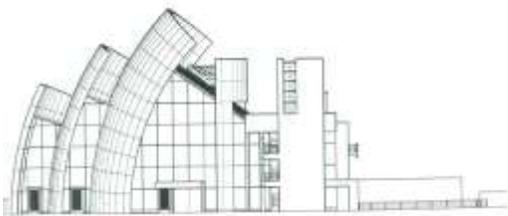
intersectándose con líneas rectas en sentido perpendicular (norte-sur) que unen ambos lados del conjunto geoméricamente. Tres de los arcos tienen igual radio y generan el perfil de tres conchas, las cuales junto con otro muro curvo, que en este caso se extrude, delimitan el cuerpo de la nave y la diferencian del resto del conjunto. Las tres conchas tienen alturas distintas (disminuyendo a medida que se alejan del templo) tal vez para que no se intersecten por tener el mismo radio. Las conchas utilizan geometría no-euclidiana (esférica) por ser secciones rectangulares de la superficie de una esfera.



Planta de situación

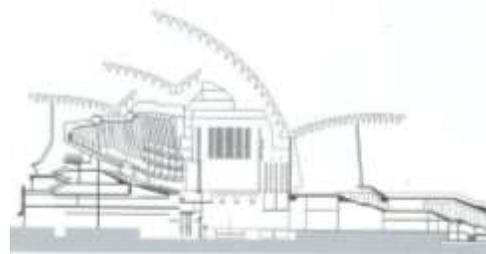


Planta baja



Alzados

Ópera de Sydney, Sydney, Australia (1956-1973)
Jorn Utzon



La curvatura de las cubiertas de este proyecto se obtienen seccionando una esfera de 75 cm. de diámetro en varios triángulos. Independientemente del objetivo económico por el cual se realizó de esta manera, el trazar la geometría de las cubiertas de este modo implica el abandono de la geometría euclidiana para abordar el problema con una solución de geometría no-euclidiana (geometría esférica).



Geometría de cubiertas

Geometría hiperbólica

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Este tipo de geometría no propone formas nuevas y su aplicación es constante para el dibujo de planos.

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Nueva Estación de Trenes Stuttgart, Alemania (2000)

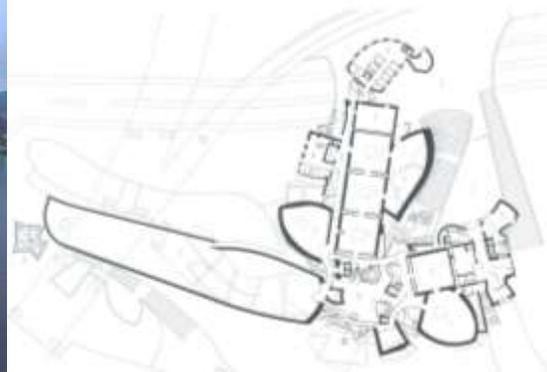
Christoph Ingenhoven y Partner, Frei Otto, Büro Happold, Leonhardt y Andrae

Esta estructura tiene relación con los paraguas y con las lonas y tiene paraboloides hiperbólicos (tiene doble curvatura). Su forma pertenece a la geometría diferencial por estar compuesta de superficies curvas. Su forma se asemeja a la de las superficies mínimas, aunque no es ninguna de ellas en particular.

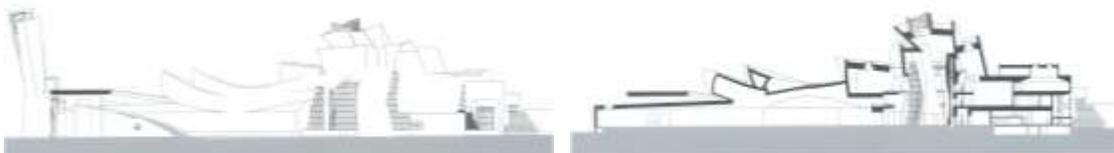


Museo de Guggenheim, Bilbao, España (1991-1997)

Frank O. Gehry



Este museo tiene una organización radial. Debido a sus superficies curvas, su geometría podría ser diferencial y definitivamente no-euclidiana. Cada superficie parece ser reglada debido a que tiene una de sus dos curvaturas muy pronunciada y la otra es casi recta.



Superficies Mínimas

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran esta figuras geométricas (Superficie Costa, Superficie Costa-Hoffman-Meeks, Chen Gackstatter, Catenoide-Enneper, Helicoide-Catenoide, Superficie de Boy Invertida, Dihedro Simétrico de Kusner, Superficie Henneberg, Teorema López-Ros No-Go, Teorema Schoen No-Go, Superficie de Riemann, Superficie Enneper, Enneper Plano, Superficie Enneper Ondulado, Doble Enneper, Scherk Torcido, Skew 4-noid, 4-noid Simétrico, Superficie de Catalán, Barda Catenoide, Superficie Scherk, Torre de la Silla, Scherk con Asa, Torre de la Silla de Karcher JD, Torre de la Silla de Karcher JE, Superficies de la familia Schwartz H, Superficies de la familia Schwartz PD, Gyroide, Lidinoide).

TOPOLOGÍA

Cinta de Möbius

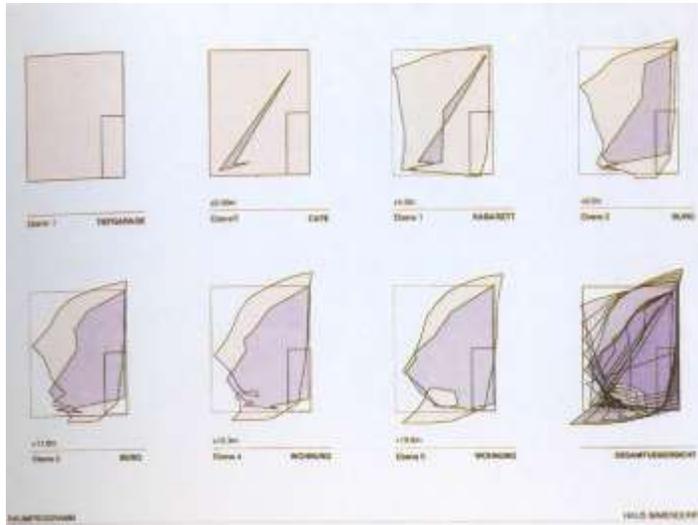
Max Reinhardt Haus, Berlín Alemania, 1994 (proyecto)
Peter Eisenman



En este proyecto la geometría se utiliza para expresar ideas ajenas a ella, como lo es el capturar el dinamismo legendario de Reinhardt a través de una forma prismática que se encierra en sí misma y se abre al mismo tiempo, reflejando el carácter cambiante y multifacético de la ciudad de Berlín.



Corte



Plantas

El edificio tiene forma de arco, con una superficie conformada por planos intersectados y traslapados. Su forma proviene de tres operaciones iterativas realizadas en una cinta de Möbius. En la primera, los planos se generan extendiendo vectores y triangulando superficies. La segunda iteración invierte al cinta y, a través de una operación semejante a la anterior, imprime estas superficies en la forma inicial. La tercera iteración retoma un elemento de la historia de Berlín hacia la forma del edificio doblando un gran espacio entre la retícula y el despiece de pisos, creando una referencia con los volúmenes cúbicos del arquitecto neoclasicista alemán Karl Friedrich Schinkel.

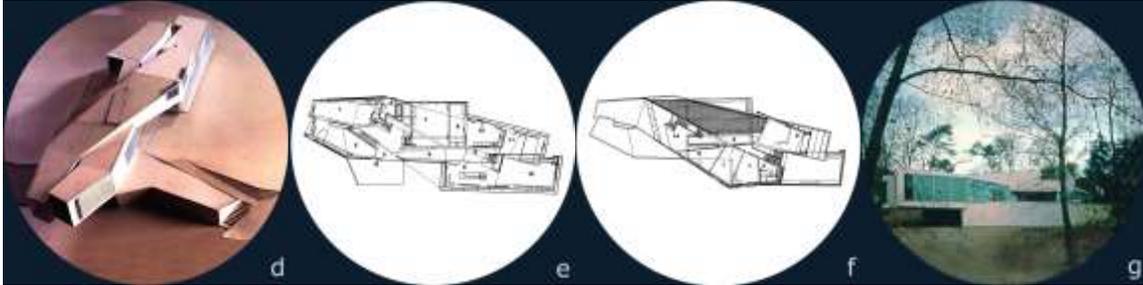


Planta con distribución interior (teatro y lobby)



Maqueta

Casa Möbius, Amsterdam (1993-1998)
Ben van Berkel



Esta casa está basada en la cinta de Möbius. Para lograrlo se utiliza una cinta tan gruesa que su sección transversal que se convierte en un rectángulo, en cuyo espacio interior puede existir un espacio arquitectónico. El espacio interno en realidad podría confundirse con un número ocho, debido a que no parece torcerse de tal modo que no tenga dirección. La circulación se realiza a través de escaleras, que no están en los extremos de la “cinta” y que destruyen aún más el sentido de falta de dirección que caracteriza a esta figura geométrica.

Superficie de Boy

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Bonete cruzado

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Superficie romana

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Botella de Klein

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Paraguas de Whitney

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Toro de revolución elíptico

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Pseudoesfera

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Superficie de Dini

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Helicoide

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

Superficie de Möbius

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicara esta figura geométrica.

FRACTALES

Conjunto de Mandelbrot

No se encontraron proyectos arquitectónicos en los cuales se aplicaran esta figuras geométricas.

Pilares ramificados



Estudio de factibilidad de estructuras de árboles para un vestíbulo de exhibición, Universidad de Yale, USA (1960)

Estudiantes de Frei Otto durante un seminario



Pilares de soporte de una concha reticulada de seis ángulos en la Oficina Kinas, Consejo de Ministros, Majlis al Shura, Riyadh, Saudi Arabia, (1979)

Rolf Gutbrod, Frei Otto, Büro Happold, Ove Arup y Partner

Las estructuras ramificadas basadas en árboles como las de estas fotografías son fractales debido a que tienen autosimilitud, el resultado es una forma rugosa (la estructura como volumen), procede de una iteración, es de gran complejidad procediendo de reglas sencillas y es dependiente de las condiciones iniciales. Parece una escultura literal de las ramas y el tronco de un árbol.



Puente peatonal en el Landschaftspark Mechtenberg en Gelsenkirchen, Alemania (2003)

Frei Otto

Esta estructura ramificada del puente, tiene características semejantes a las de un fractal. La resistencia estructural de los elementos que se agrupan empleando este tipo de geometría es muy alta porque de manera organizada distribuyen entre todos las cargas. Este empleo de la geometría fractal también puede tener como resultado una estructura más ligera y eficiente.

Resumen del capítulo IV

Al analizar estos proyectos por familias se demostró que la geometría más aplicada en el diseño arquitectónico es la euclidiana y con una diferencia bastante grande. La geometría euclidiana se utiliza a menudo en las obras económicas de cualquier ciudad, pero en proyectos que no buscan diseñar arquitectura de calidad. Los proyectos mencionados en este capítulo tuvieron el interés de ejemplificar cómo debe de diseñarse la arquitectura de calidad y en muchos de ellos hubo el presupuesto suficiente para construir algo más caro de lo normal y sorpresivamente responden a la misma familia geométrica. No es malo aplicarla, pero sí está mal la desproporción existente.

Estas son las obras mencionadas en este capítulo que emplean una geometría más actualizada que la euclidiana: en el museo Kimbell se utilizan cicloides para trazar las bóvedas de la cubierta; el Allianz Arena es un sólido de revolución (la lógica de este tipo de figura geométrica se utiliza para dar forma a un estadio de manera práctica); la iglesia del jubileo de Richard Meier tiene unos muros basados en rectángulos esféricos; la Ópera de Sydney emplea triángulos esféricos en sus cubiertas; la Nueva Estación de Trenes de Otto y el museo de Guggenheim de Bilbao emplean geometría diferencial; el Max Reinhardt Haus de Eisenman y la casa Möbius de van Berkel emplean la cinta de Möbius; y el puente peatonal en el Landschaftspark Mechtenberg de Otto emplea fractales. Todos estos proyectos ejemplifican modos de utilizar geometrías más complejas de lo convencional.

Entre las demás obras (que utilizan geometría euclidiana) destacan las de Mario Botta porque la aplicación de la geometría es sumamente interesante, pese a que utiliza sólidos primarios. Son ejemplos muy interesantes de cómo utilizar cualquier familia geométrica (son principios independientes de la geometría euclidiana).

Capítulo V

Arquitectura conformada por mezclas de diferentes sistemas geométricos

30 St Mary Axe (Swiss Re), Londres, Inglaterra (1997-2004)
Norman Foster



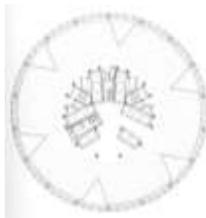
La forma general del edificio es de un elipsoide vertical, seccionado en la parte inferior para desplantarse en el terreno. El edificio es de planta circular (variando de diámetro en todos sus niveles), con seis huecos triangulares en el perímetro que van girando en cada planta conforme van ascendiendo. Estos huecos triangulares se reflejan en la fachada con un color de cristal más oscuro como espirales que ascienden envolviendo al edificio. Estas espirales se asemejan a varias formas de la naturaleza, como por ejemplo de una piña.



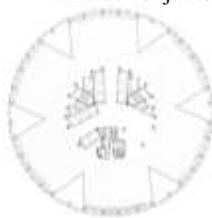
Planta de conjunto



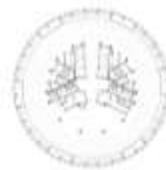
Elevación



Planta nivel 6



Planta nivel 21



Planta nivel 33



Planta nivel 39



Planta nivel 40

El edificio se soporta en el perímetro con una armadura de rombos. Por el hecho de que esta armadura envuelve al edificio, no está hecha de triángulos equiláteros; el hecho de que el edificio aumente de sección en su parte central y termina en punta en la parte superior hace que la armadura esté construida con brazos de longitudes variables. La armadura genera un polígono de 18 vértices en planta. El recubrimiento de la armadura con color blanco forma rombos y con el recubrimiento paralelo a las losas de color negro se forman triángulos y trapezoides. Las espirales antes mencionadas de la fachada siguen esta retícula que forma la armadura, dando como resultado una organización geométrica muy limpia. En la parte superior, marcando la ubicación del solar en su interior, hay dos anillos horizontales que no tocan la fachada del edificio. Los espirales de la fachada del edificio terminan con estos anillos y el cristal de la fachada se vuelve oscuro hacia la parte superior. En la parte más alta de la estructura hay un anillo de compresión con un agujero en el centro, de modo semejante al del Panteón Romano.



Exterior del edificio



Estructura del edificio



Parte superior del edificio

Los cristales tienen forma triangular y romboidal siguiendo la estructura del edificio, lo cual implica que son de medidas variables. Los cristales romboidales están ubicados en el espacio entre las losas del edificio y los cristales triangulares en el espacio restante; cada dos cristales triangulares son equivalentes a un cristal romboidal interrumpido por una losa. El núcleo central de servicios está dentro de un área circular que no gira junto con los huecos perimetrales, lo cual hace que su orientación sea siempre independiente con respecto al perímetro del edificio. El núcleo central está organizado de manera radial dentro del círculo en el que se circunscribe, con tres brazos (orientados conforme a un triángulo equilátero) que delimitan las circulaciones principales.



Entrada al edificio



Cubierta del solar

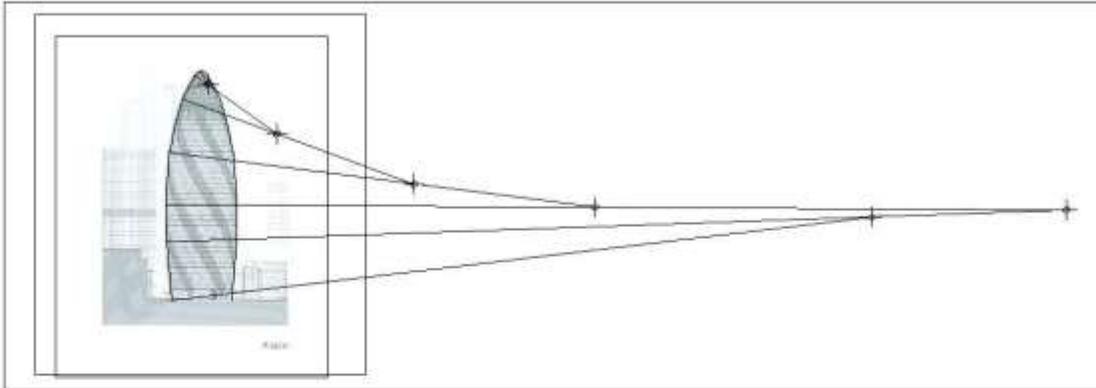


Interior

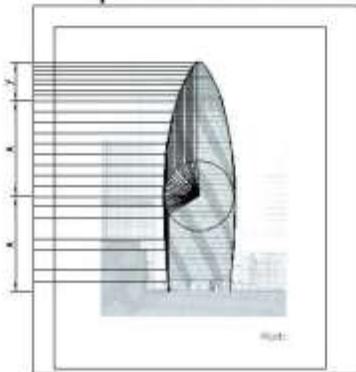


Interior

Posibles radios de curvatura de superficie



Éntasis de columna clásica aplicado a curvatura del edificio



La curvatura de la superficie del edificio podría responder a una geometría parecida a la del éntasis de una columna clásica, pero dividiendo el círculo en secciones.

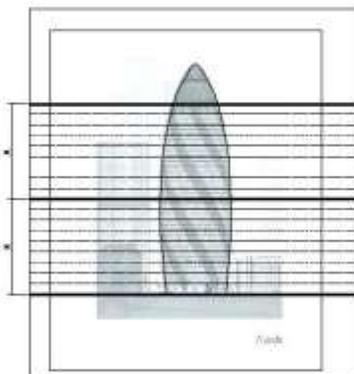
El éntasis de las columnas clásicas se asemeja a los principios de filosofía griega por organizar algo complejo a través de un orden sencillo.

Cristales de la superficie del edificio

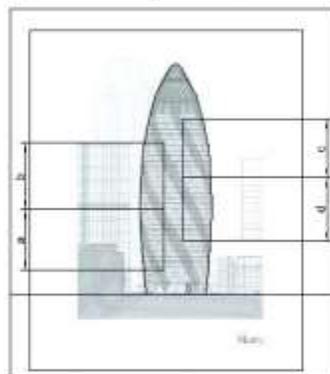


Los cristales están modulados en una retícula de triángulos equiláteros y rombos. La retícula sigue la forma del edificio y esto es lo que origina las curvas en espiral que se ven en la fachada.

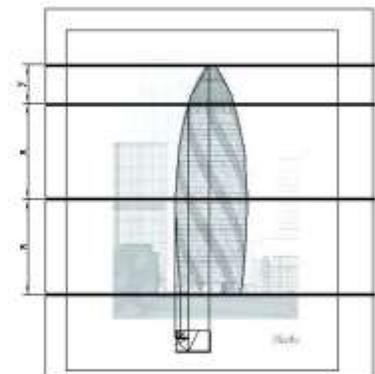
Relación entre espirales y superficie de edificio



El cambio de color de la parte superior del edificio probablemente responde a una relación geométrica



Las alturas entre los espirales no son constantes debido a la curvatura vertical del edificio

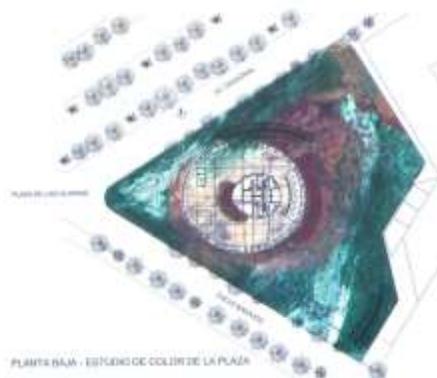
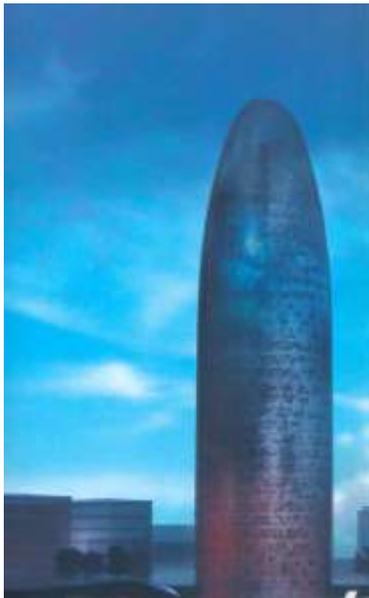


La diferencia de radio entre los círculos, al parecer, tiene proporciones áureas.

El edificio Swiss Re no fue diseñado pensando exclusivamente en su geometría y los recursos geométricos utilizados no son muy nuevos, pero la manera de mezclarlos es muy original y responde a los objetivos planteados por el despacho. En proyectos como este se observa que los conocimientos de geometría siempre se requieren en arquitectura aunque no sea ésta la principal protagonista del diseño.

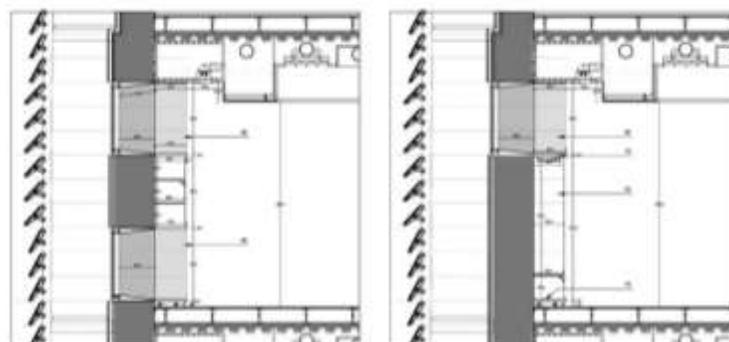
Torre Agbar, Barcelona, 2003
Jean Nouvel

La forma general de este edificio en planta es de un elipse, su núcleo de servicios es de forma ovoidal y la distribución interna es ortogonal, lo cual determina que hay varios sistemas geométricos intersectados y sin una relación estrecha entre ellos. En elevación, el edificio se eleva en su parte más baja extrudiendo la planta y después de cierta altura se curva formando una figura inspirada en un geiser, las torres de la Sagrada Familia y la montaña Monserrat. Tiene una doble fachada y ambas tienen una geometría casi igual.

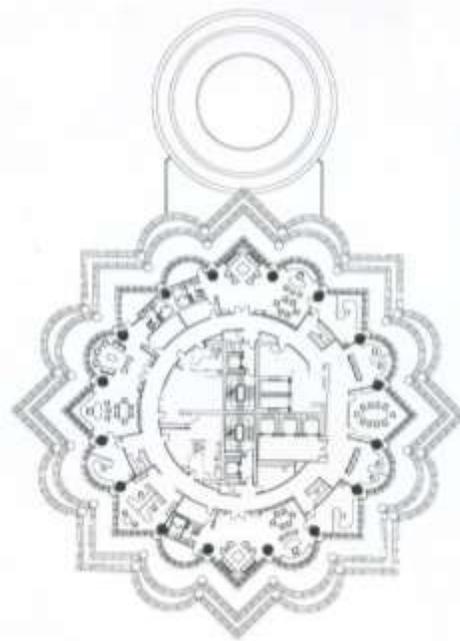


Se menciona que en la fachada de este edificio hay fractales. Un fractal debe ser rugoso, autosimilar, dependiente de las condiciones iniciales, desarrollado por iteraciones y de gran complejidad compuesta por algoritmos simples. La fachada exterior de cristal consiste en un trapezoide que se repite cambiando de tamaño al acercarse a la parte superior (donde se hace curva la fachada). Tal vez en esto consista su geometría fractal.

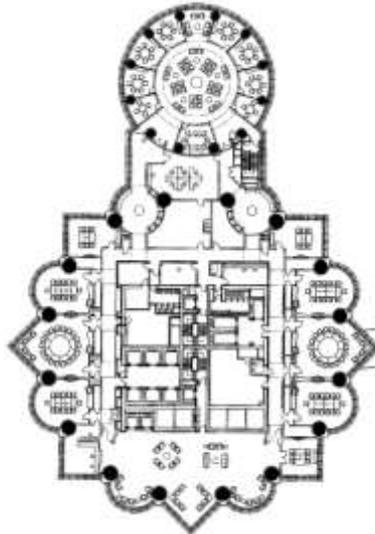
Este edificio tiene una geometría mucho más sencilla que la aplicada en la torre Swiss Re. Esto demuestra que pese a que los intereses de diseño arquitectónico fueron enfocados a otras áreas, no se pudo dejar de recurrir a la geometría.



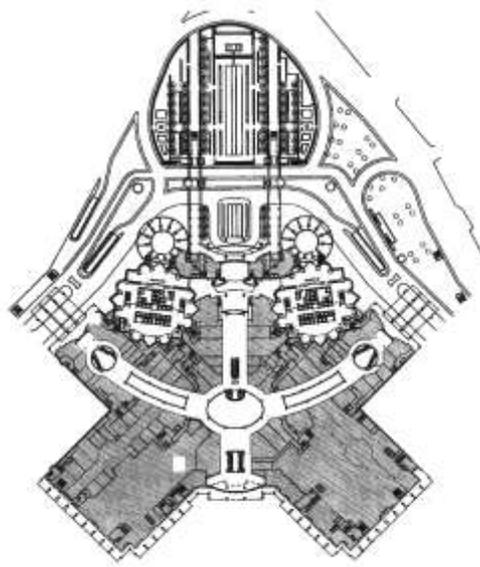
Torres Petronas, Kuala Lumpur, 1998
Cesar Pelli



Esta planta muestra la geometría que se utilizó para definir la forma del edificio, el cual fue diseñado en planta y luego extrudido. Son dos cuadrados concéntricos (uno de ellos girado 45°). Los ángulos obtusos de las plantas se articulan mediante arcos de círculos.



En esta planta se muestra el eje de simetría que se crea con el volumen cilíndrico de los niveles inferiores. Las columnas siguen la geometría de cada volumen. Al comparar ambas plantas se puede ver que el orden geométrico interior puede variar: en esta planta es cuadrada y en la planta de la parte superior de la página es circular. Esto se debe a la disposición de los cuadrados en torno a un centro.



El plano de la izquierda muestra que los ángulos que orientan las torres en el conjunto están relacionados más con un orden urbano que con un orden geométrico del edificio por sí mismo. El proyecto, sin embargo, logra mantener una simetría sin romper con los ejes urbanos, logrando así orden y unidad. El plano de la derecha muestra el conjunto (con otra orientación) con mayor nivel de detalle.



En esta imagen se muestra cómo es posible (tomando en cuenta que la imagen pudiera tener pequeñas deformaciones por no ser un plano original) que el arco que articula los ángulos obtusos de los cuadrados tenga proporciones áureas con respecto a los mismos.

Ayuntamiento de Londres, Londres, Reino Unido (1998-2002)
Norman Foster



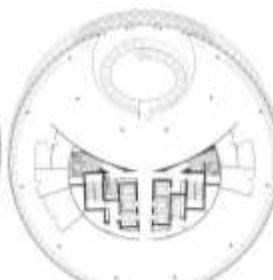
Este edificio es de plantas circulares con distinto diámetro en cada nivel. Todas las plantas, a excepción de la planta baja, se desplazan hacia atrás, generando en la parte de enfrente una superficie curva e inclinada y en la posterior un escalonamiento. La geometría de la superficie del edificios tendría que ser diferencial por la cantidad de curvaturas variadas. En el interior, el núcleo de servicios se mantiene vertical debido a los elevadores, lo cual genera un cambio radical en la geometría espacial interna en cada nivel (en los niveles inferiores el núcleo de servicios está en la parte posterior y en al superior está en la frontal). Las columnas del perímetro del edificio no son verticales para seguir la curvatura de la fachada.



Planta baja



Segundo piso



Tercer Piso



Noveno Piso

Uno de los aspectos más interesantes de este edificio son las escaleras en su parte frontal, las cuales varían su trayectoria a medida que van subiendo, siguiendo la curvatura de la fachada y adaptándose a la curvatura de las losas. Están soportadas por las losas y por tensores en el otro extremo, dando como resultado una forma aparentemente ligera que parece tener la intención de mimetizar un resorte. La trayectoria es tan irregular que ninguna parte de la escalera coincide en ningún nivel, ni siquiera en sus proporciones. Si estuviera unida estructuralmente en una pieza y aislada del edificio sería posible que se cayera por su exagerada e irregular curvatura.

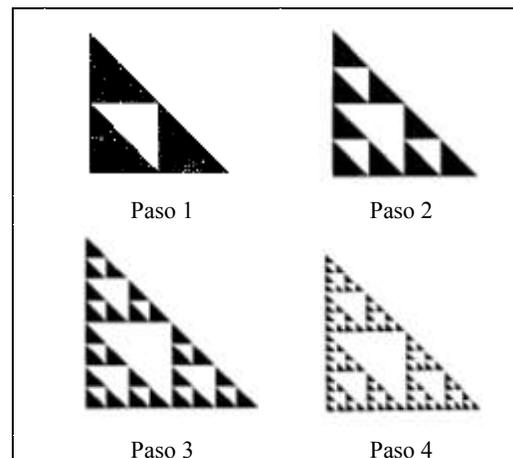


Estas fotografías de la escalera muestran como los tensores casi no se ven y esto da una lógica muy original a la escalera, siguiendo una trayectoria con forma de espiral bastante irregular, pero con una geometría ajena a la del edificio.

La fachada del edificio es transparente en la parte frontal, donde está la escalera, siguiendo una retícula de triángulos isósceles. La estructura de esta parte de la fachada forma grandes triángulos isósceles y el cristal que la recubre forma triángulos de las mismas proporciones pero más chicos, ambos relacionados por su autosimilitud a los fractales de manera semejante el triángulo de Sierpinski. Para ser fractales tendrían que continuar este ritmo indefinidamente y la forma general tendría que ser un triángulo de las mismas proporciones, sin embargo el proceso para crearlos es este mismo. Debido a que la superficie en que se encuentran los triángulos tiene doble curvatura, su geometría es no euclidiana

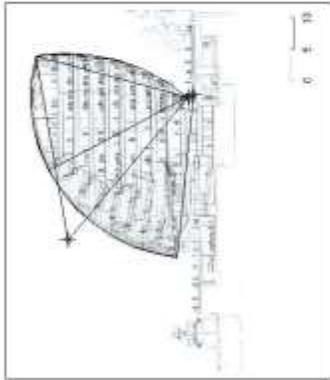


Detalle de fachada que muestra relación geométrica de autosimilitud entre la estructura y la modulación del cristal.

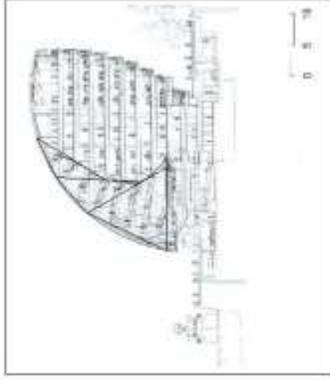
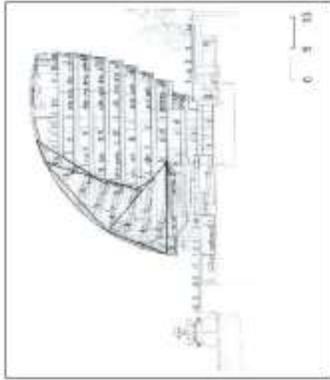


Proceso de dibujo de Triángulo de Sierpinski.

Geometría del corte del edificio

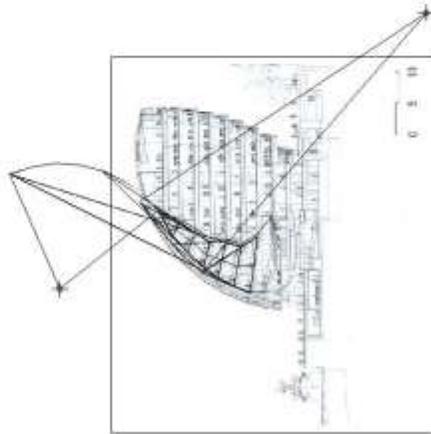


Geometría del hueco para la escalera



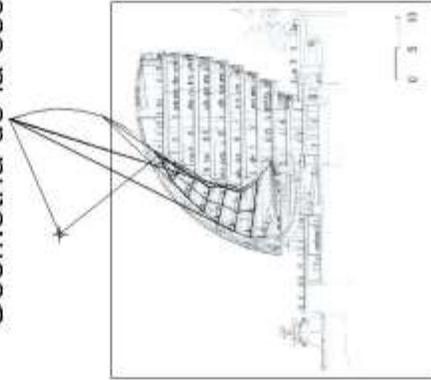
El hueco de la escalera sigue la misma lógica que las escaleras. La fachada sigue la curvatura de unos arcos como se muestra en el corte.

Geometría de la escalera

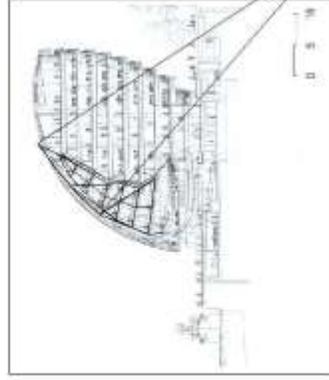


Dos sistemas superpuestos

La geometría de la escalera posiblemente está trazada con dos órdenes alternos basados en triángulos (los niveles nones tienen un sistema y los niveles pares tienen otro sistema). Los triángulos generados por ambos sistemas generan una curva. El resultado es una aparente irregularidad formal en su trazo.



Primer sistema



Segundo sistema



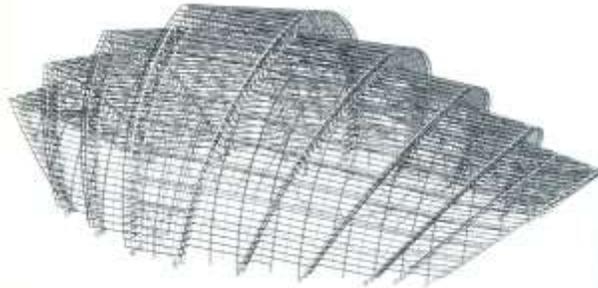
La fotografía y el corte muestran la geometría poco convencional de la escalera y de las columnas.

En el exterior del edificio, las ventanas laterales y posteriores tienen forma de cenefas horizontales, siguiendo el escalonamiento de las losas. Los cristales dan a entender formas rectangulares, que no son posibles en una superficie así debido a la inclinación de la parte frontal del edificio, por lo cual deben tener deformaciones mínimas distribuidas entre todos los cristales (geometría no euclidiana). La parte superior del edificio tiene una terraza perimetral que acentúa el último nivel.

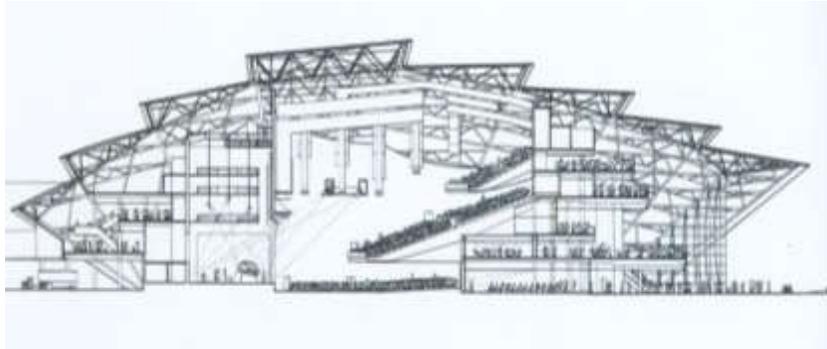
Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias, Glasgow, Scotland (1997)
Norman Foster



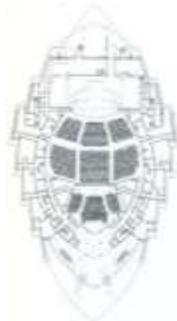
La geometría de la cubierta de este edificio está compuesta por secciones de un cilindro de 38 metros de diámetro (geometría euclidiana). Las cubiertas finales se agrupan de modo semejante al de la Ópera de Sydney, pero en este último caso en lugar de utilizar secciones de un cilindro se utilizaron secciones de una esfera. Por la forma en que se intersectan las secciones de cilindros, se puede suponer que muchos de ellos no son paralelos al eje de simetría del edificio (en planta). Es probable que sí sean paralelos al plano de la superficie del firme (en elevación) porque el objetivo de utilizarlos es repetir la curvatura de la estructura para ahorrar costos. Sin embargo, si la estructura no tiene una orientación transversal con respecto a los cilindros, se necesita en elevación una trayectoria no horizontal que compense estas deformaciones. La composición geométrica para este proyecto sugiere la de un elipsiode por secciones de cilindro escalonadas. Este puede ser un recurso geométrico para ahorrar costos. En el interior los arcos tienen curvatura circular.



Isometría de estructura de cubierta



Corte longitudinal



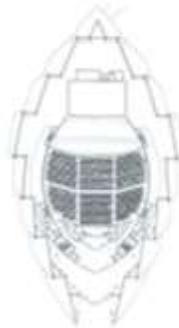
Planta baja



Primer nivel



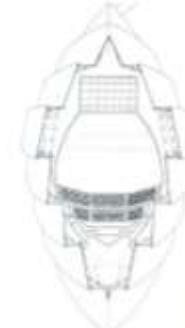
Segundo nivel



Tercer nivel



Cuarto nivel



Quinto nivel

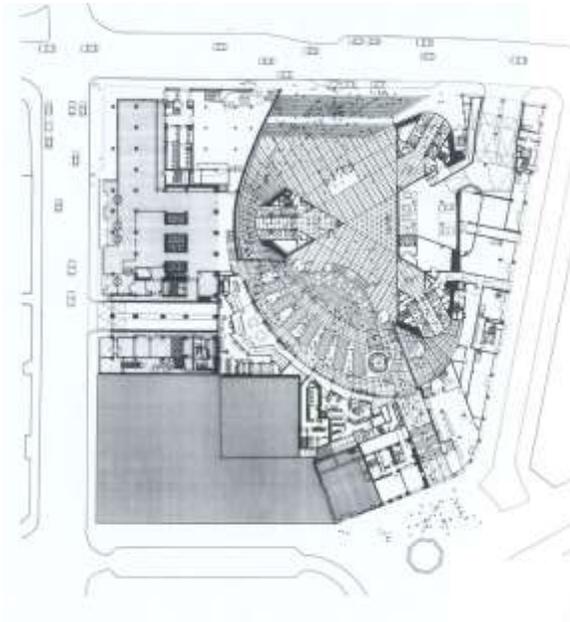
Sede del Commerzbank, Frankfurt, Alemania (1997)
Norman Foster



Este edificio tiene forma general en planta de un triángulo. En los vértices están los núcleos de servicio (manteniendo la punta del vértice boleada) y en las aristas están las áreas aprovechables. La modulación espacial en el sentido vertical para las áreas aprovechables es a cada cuatro niveles: en el primer módulo hay un espacio de cuádruple altura destinado para jardines y área de descanso y los siguientes dos módulos hay ocho niveles de oficinas (cuatro por cada módulo). Los espacios para jardines nunca coinciden en los tres lados del triángulo debido a que van ascendiendo en cada arista del triángulo. En el centro del edificio hay un espacio hueco que sirve para iluminar y ventilar el edificio. A través de él se puede ver desde cualquier oficina algún área de jardines, y a través de esta la ciudad.



Vista desde interior de una oficina



Planta



Corte

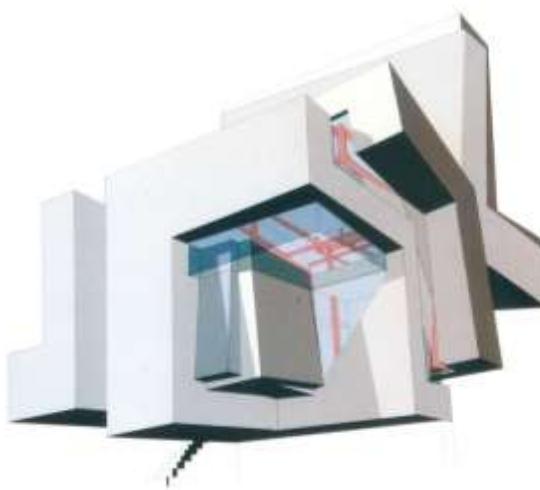
Isometría de estructura

En planta se buscó que el triángulo tuviera fachadas curvas, para lo cual se utilizaron radios de círculos; y el muro divisorio de la plaza en la planta baja está probablemente trazado con arcos de círculos también. La geometría del triángulo equilátero central sirve como base para las divisiones internas en los núcleos de servicios.

La geometría utilizada en este edificio es euclidiana, pero la composición arquitectónica rompe con el esquema clásico de fachadas para generar un edificio que se entiende tridimensionalmente. La geometría estuvo implícita desde el planteamiento del edificio.

Casa Guardiola, Cadiz, España (1988)

Peter Eisenman

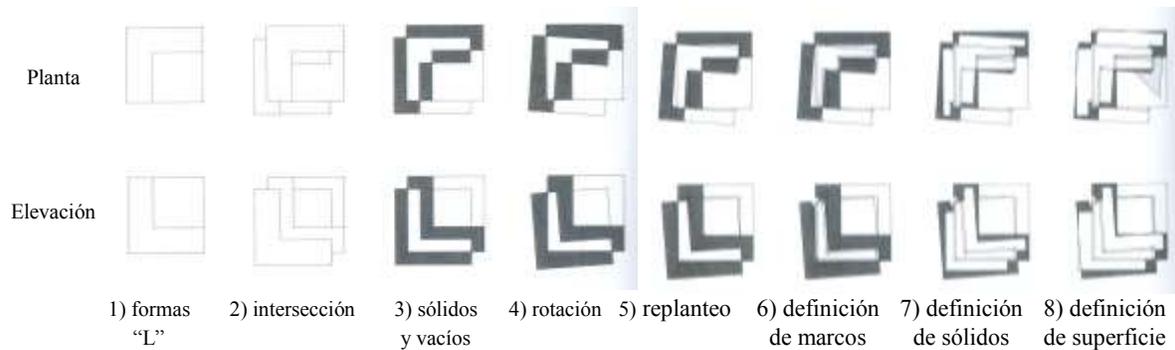


Perspectiva



Maqueta

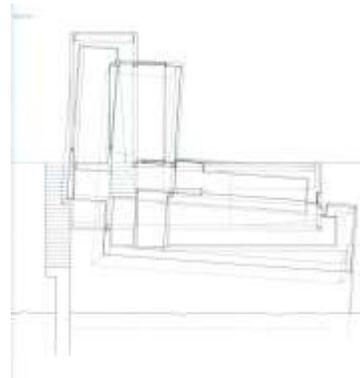
La geometría de este proyecto busca reflejar las ideas conceptuales que se utilizaron acerca del lugar. Se inicia con un cubo al cual se sustrae otro cubo más chico en uno de sus vértices dejando formas de “L” en tres de sus caras. Luego otro volumen igual se intersecta con él y se desfasa un poco. De la unión de ambos se obtiene un volumen sólido con un espacio vacío en el interior. Después el volumen que se había desplazado hacia un lado se rota un poco y con la nueva intersección se replantean los volúmenes sólidos. Después la superficie se define en términos arquitectónicos, dejando un volumen interno más amplio. Finalmente este volumen se repite en la parte posterior de la casa. Con esta geometría se replantea lo interno y externo del espacio arquitectónico.



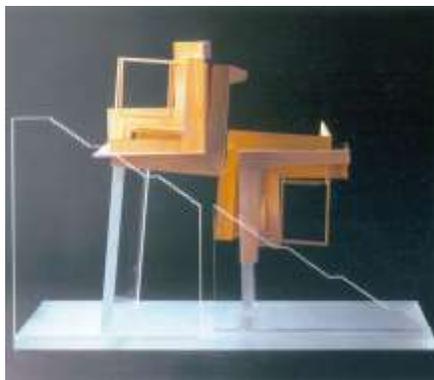
Esquema conceptual de casa



Maqueta



Corte



Maqueta

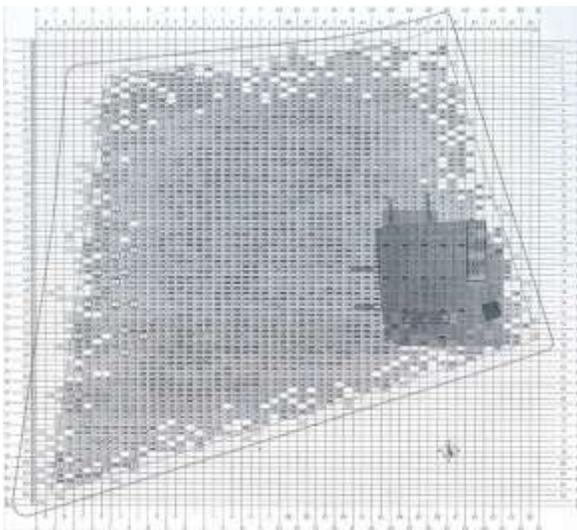


La geometría de la casa emplea formas de paralelepípedos unidos e intersectados. Son figuras de la geometría euclidiana utilizadas de un modo muy original. El resultado es una ruptura con los esquemas compositivos tradicionales utilizando una geometría difícil de imaginar tridimensionalmente. Es diferente a la geometría del pasado por su modo de abordarla, no por los recursos empleados. Se menciona el caos en la casa pero como algo colateral y no como algo jerárquicamente importante; y no hay fractales en la forma.

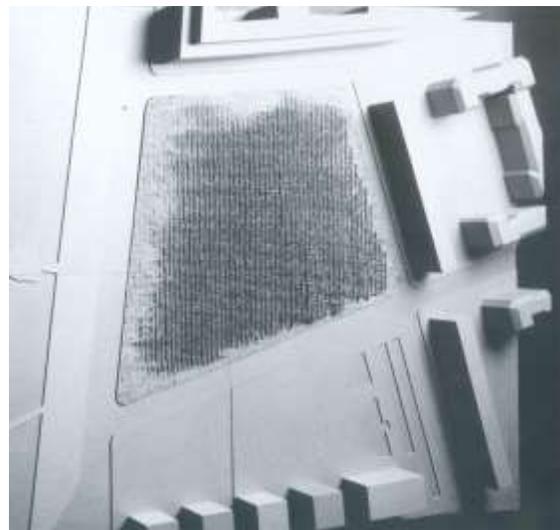
Monumento a los judíos asesinados en Europa, Berlín, Alemania, 1998-2005
Peter Eisenman



Este proyecto tiene relación con el caos, sin tener una relación aparente con los fractales. Este monumento sugiere que cuando un sistema racional y ordenado crece demasiado, pierde proporciones con su intención inicial y deja de ser claro para la razón humana (características propias del caos).



Planta



Maqueta

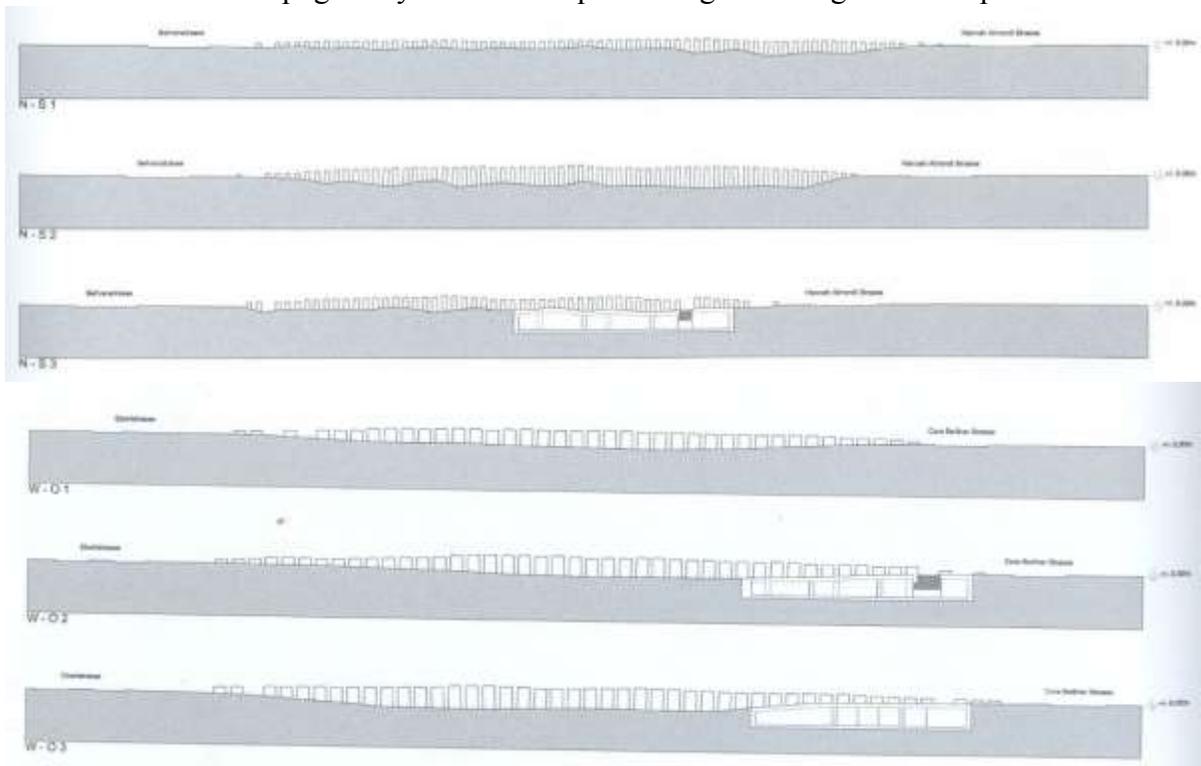
Geoméricamente, es una retícula de paralelepípedos o pilares (2.375 m X 0.95 m) con una orientación diferente a cualquier lado del terreno. Su altura varía entre cero y

cuatro metros, generando dos superficies onduladas en las partes superiores e inferiores de los pilares. La diferencia entre ambas superficies de los pilares parece ser arbitraria, pero está relacionada con el contexto de Berlín. También delimitan una zona de inestabilidad entre ellas, percibida al observar que la topografía no corresponde con la altura de los pilares. Entre los paralelepípedos se genera una retícula de pasillos de 95 cm. de ancho que no tienen jerarquías ni parecen llevar a lugares específicos.



Fotografías (topografía vs. superficie implícita de pilares)

La geometría no es el principal motivo generador del proyecto, aunque su uso fue muy considerable. Los recursos geométricos son euclidianos, pero el uso de la geometría es muy diferente al que se ha utilizado en el pasado. Las superficies onduladas están más relacionadas con la topografía y el contexto que con alguna idea geométrica preconcebida.

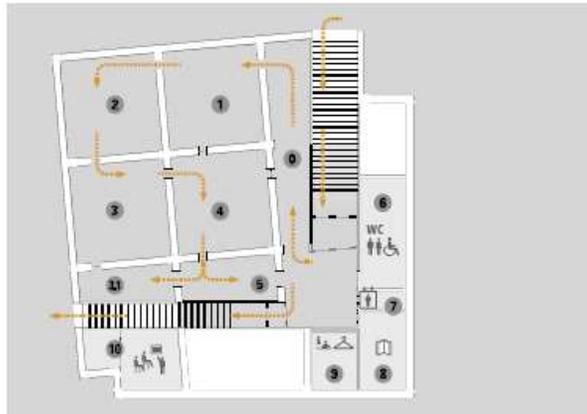


Cortes



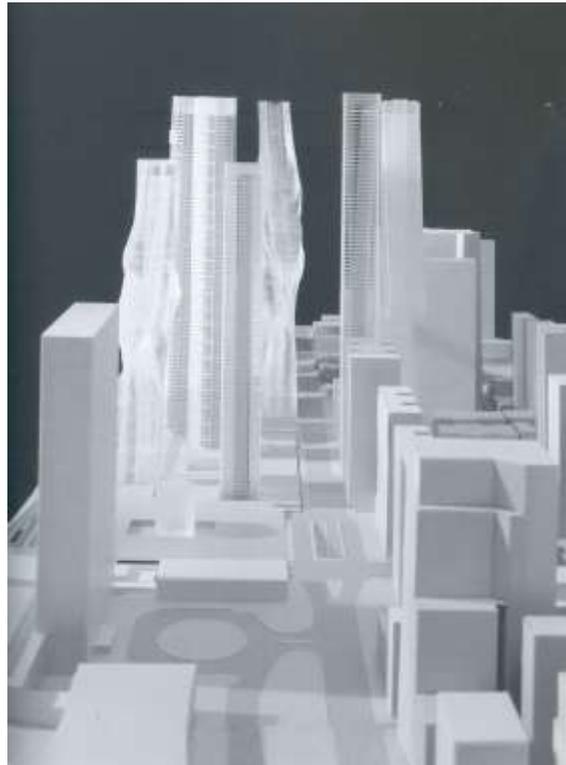
Fotografías (pasillos interiores)

El proyecto tiene un centro de información subterráneo en una esquina sin tener una relación geométrica contundente, por ejemplo, estar en el centro. La orientación de las escaleras responde a la de los pilares y la del resto del centro de información parece no estar relacionada con el resto del proyecto ni con los límites de propiedad.



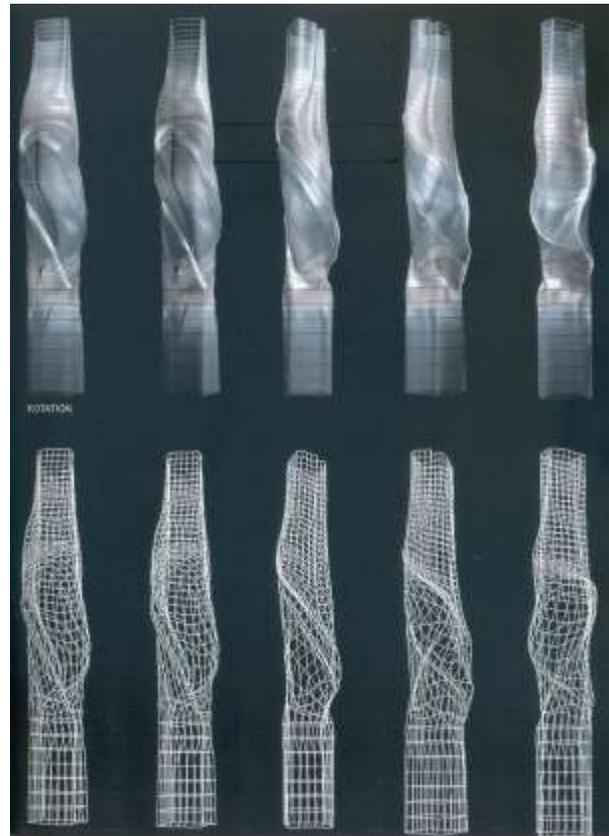
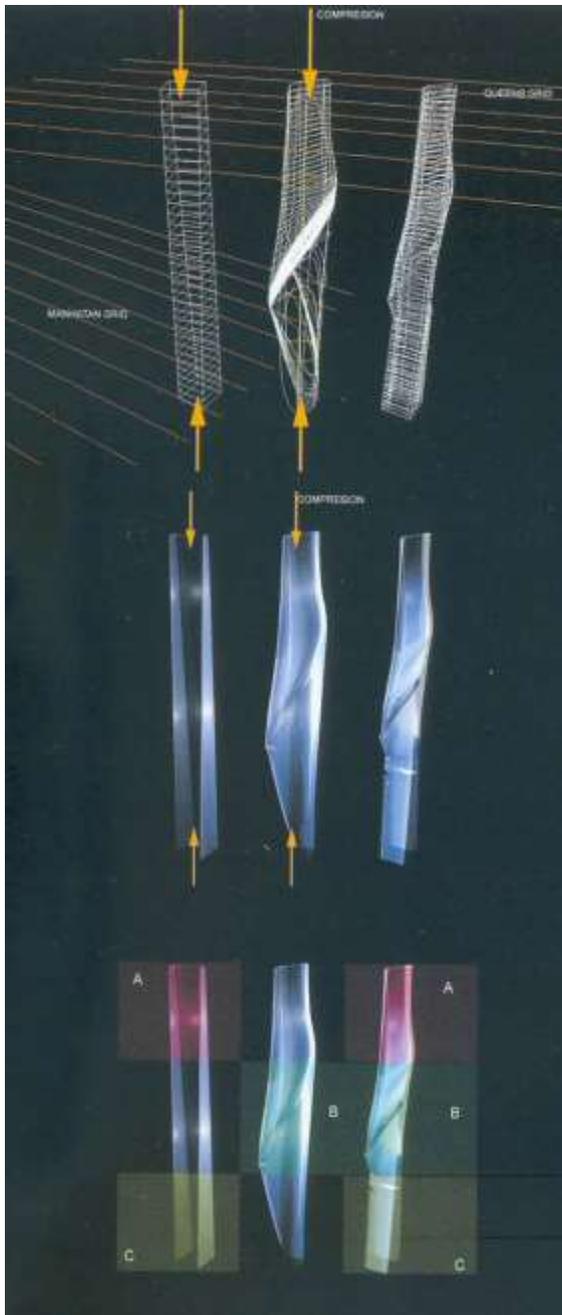
Centro de información subterráneo

Competencia FSM East River (Torres Eisenman), Nueva York, 2001
Peter Eisenman



La forma original de estos edificios es de un paralelepípedo. Su parte inferior está orientada en el mismo sentido que el orden reticular de Manhattan y su parte superior se torció para orientarse en el mismo sentido que la de Queens. Una vez que se tuercen los edificios se agregan esfuerzos de compresión verticalmente, los cuales generan deformaciones irregulares en su parte central.





El exterior de este edificio fue estudiado tridimensionalmente (no por fachadas). Partió de una forma geométrica que existía desde la antigüedad (el paralelepípedo) que se deformó. Pese a que complica la forma del paralelepípedo, el proyecto conserva su limpieza formal. El proceso de deformación tiene una justificación ajena a intereses estéticos. Sus formas irregulares responden a las deformaciones causadas por los esfuerzos de compresión y no a una lógica geométrica (lo

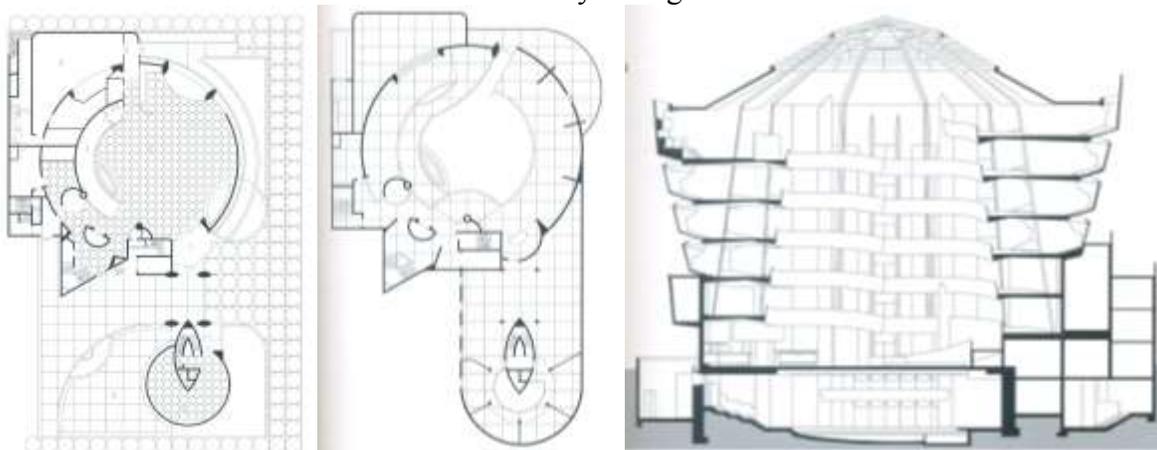
cual hace pensar que es una forma desordenada en lugar de un orden complicado). Este proceso es semejante al de una lata vacía que se aplasta en el suelo con el pie; nunca se deforma de la misma manera. Es difícil predecir las deformaciones que tendrá un objeto al deformarlo con esfuerzos de compresión. Posiblemente haya en esto una relación entre este proyecto y la teoría del Caos (a la cual recurre en muchas ocasiones Peter Eisenman) pero en este caso parece no haber fractales.

Torso Girado, Malmö, Suecia, (2005)
Santiago Calatrava



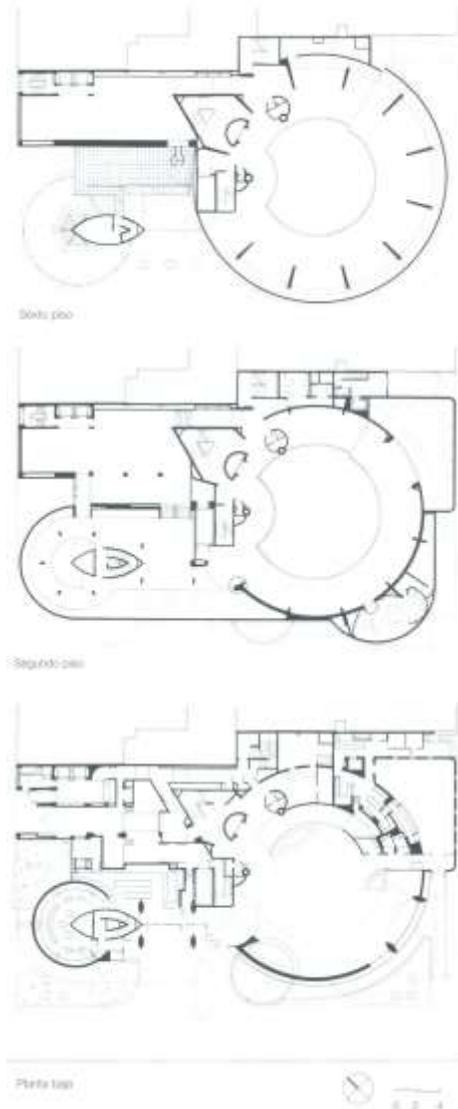
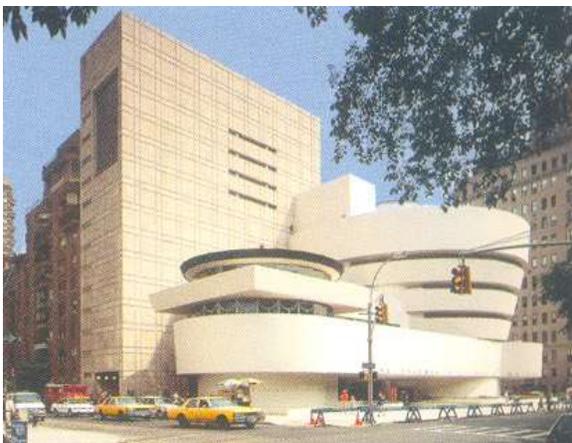
Este es otro proyecto que también consiste en torcer un prisma de base pentagonal. En este caso el prisma inicial se dividió horizontalmente en prismas pentagonales de menor altura, unidos por una estructura en una de sus aristas. La forma es obtenida girando la parte superior del edificio alrededor de 90°. Cada cara de cada prisma torcido debería de ser un paraboloides hiperbólico debido a la doble curvatura en sentidos opuestos que se genera a partir de esta operación; sin embargo parece ser que se buscó una sola curvatura para cada cara (hacia afuera para los lados opuestos a la estructura y hacia adentro para los lados donde está la estructura). Esto hace que las curvas de las superficies sean cilíndricas. La estructura externa se une al edificio con elementos diagonales.

Museo Guggenheim, Nueva York, 1969
Frank Lloyd Wright

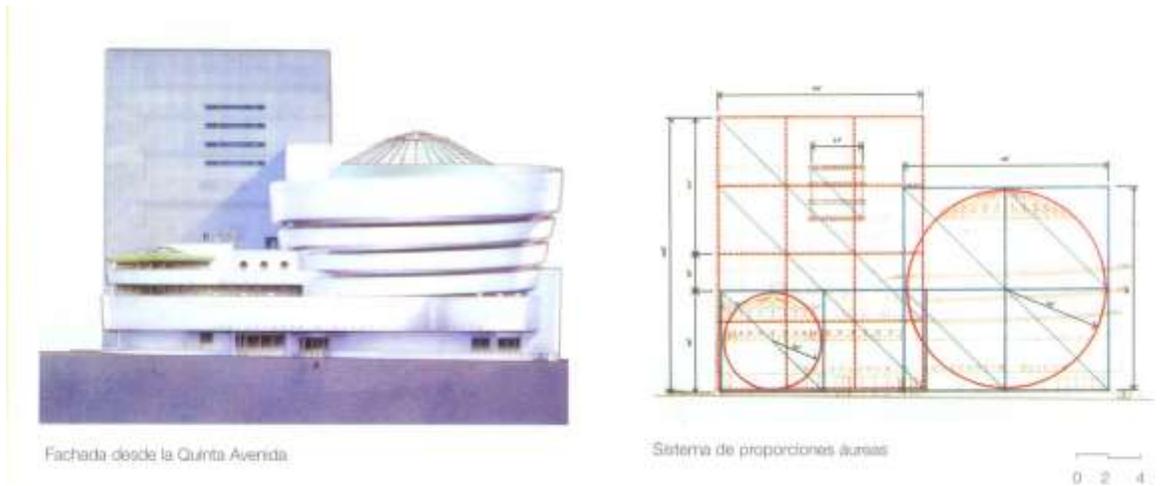


Este museo tiene dos círculos en planta unidos por un rectángulo. El círculo mayor, que genera el volumen principal, se eleva con forma de cono invertido (posiblemente para permitir mayor iluminación del tragaluz principal) con un camino interno con forma de espiral (para permitir un recorrido continuo) y dejando un espacio casi cónico libre en el centro. El espiral se nota desde la fachada por las aberturas que a simple vista parecen horizontales, que permiten iluminación interna. La última sección del volumen cónico cambia su inclinación, posiblemente como una especie de coronamiento. El otro círculo es envuelto por el rectángulo del segundo nivel (manteniendo su forma circular en la orilla) y luego coronado por una cubierta de forma piramidal. Alrededor del círculo principal (en planta) hay unas formas geométricas periféricas rectangulares, triangulares y algunas tienen curvas al parecer circulares.

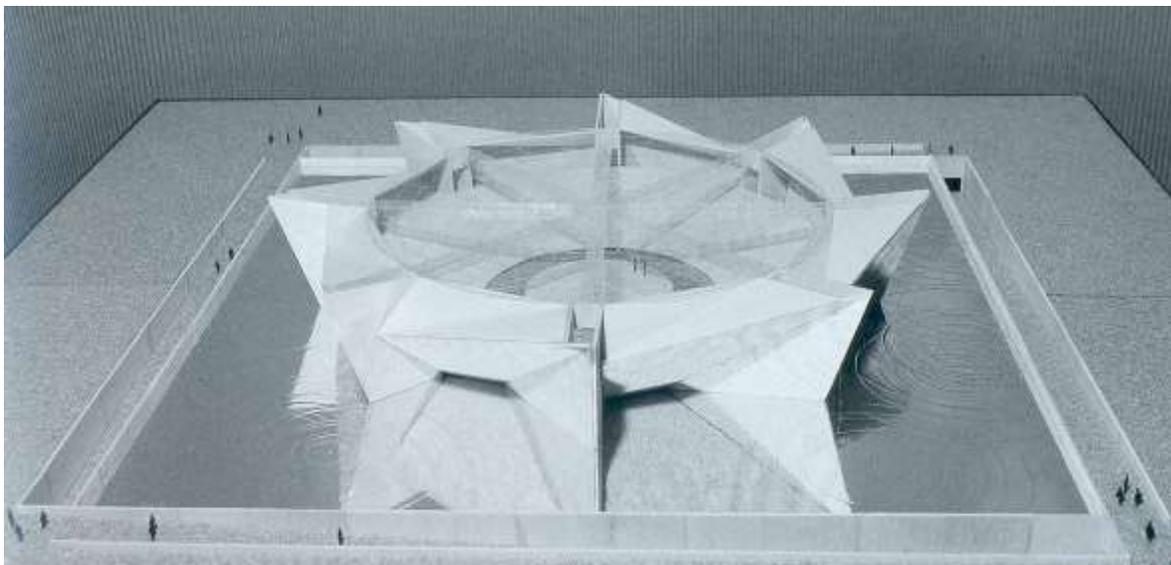
La cubierta del volumen principal tiene forma de pirámide con base de dodecágono regular. Tiene arcos circulares se unen las vigas que marcan los triángulos, alternándose por vigas rectas de sentido perpendicular y de menor peralte. Los cristales están modulados con formas de triángulos, algunos pentágonos irregulares y trapecoides.



El volumen que diseñó Charles Gwathmey como ampliación del museo, no tiene la complejidad geométrica que el edificio original. Es un paralelepípedo con la misma orientación que el rectángulo de la planta. Parece más un edificio del terreno contiguo que una ampliación. El edificio está modulado con una cuadrícula, la cual delimita sus ventanas. La fachada parece haber sido estudiada geométricamente (sobre todo en sus proporciones), pero no logra la unidad esperada.



Foro, Monterrey, Nuevo León, 2004
Agustín Landa y Roberto García



Este proyecto es de planta octagonal y sugiere un sentido rotatorio. La geometría generada a partir de triángulos irregulares recuerda el modo como se construyen los poliedros. La cubierta es una pirámide de base octagonal. La geometría de la planta sirve para poder subdividir el espacio en la cantidad de módulos que se desee. Los muros inclinados permiten el espacio necesario para las gradas y las escaleras, además de soportar las cargas de la cubierta y alojar los muros divisorios. La forma de los muros es una

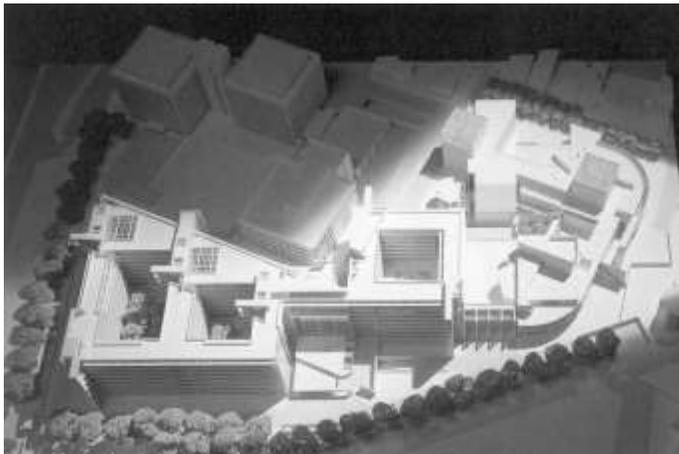
síntesis de las necesidades, buscando una forma que pueda repetirse a lo largo del proyecto. Está en el centro del espejo de agua de planta cuadrada.

Pabellón de Zurich, Zurich, Suiza, 1965
Le Corbusier



La cubierta de este pabellón tiene una forma geométrica muy limpia y compleja de imaginar. Cada módulo es de base cuadrada, y su cubierta está dividida en cuatro partes cuadradas (a través del punto medio de cada arista). Después dos extremos opuestos descienden una cierta distancia y los otros dos suben la misma distancia (convirtiéndose en cuatro rombos que forman una planta cuadrada). Es un proceso parecido al que se puede utilizar para generar paraboloides hiperbólicos. Esta forma geométrica es muy regular y tiene inherentemente pendientes pluviales. Las fachadas de la cubierta tienen forma pentagonal siguiendo estas inclinaciones.

Sede Central de Renault, Boulogne-Billancourt, Francia, (1981)
Richard Meier



Este proyecto utiliza una geometría euclidiana basada en formas ortogonales y triangulares extrudidas y algunas líneas curvas irregulares. Hay una intersección de dos ejes, uno que responde a la calle de acceso y otro que responde a los edificios contiguos. El eje que se asocia con la orientación de la calle da unidad al conjunto y está indicado por tres volúmenes ortogonales, cada uno con un patio central. Se utilizó un paralelepípedo para unir las diferentes orientaciones de los edificios del terreno contiguo el proyecto. Esta figura geométrica no se indica extrudiéndose con distintas alturas en los diferentes

volúmenes por donde pasa y en los jardines. La parte superior tiene la misma inclinación que el paralelepípedo. Los dos cubos subdivididos de esta parte del conjunto podrían haber tenido características de autosimilitud, pero primero se dividen en nueve cuadrados y luego en cuatro en dos ocasiones más.

Liberty Place, Philadelphia, (1990)
Murphy / Jahn Inc. Architects



Estos edificios asemejan por la geometría de sus partes superiores. Los paralelepípedos iniciales fueron truncados hasta formar cuatro rombos en donde estaban sus vértices. En las fachadas se utilizan cenefas horizontales con más insistencia en las aristas, marcando un conjunto de rectángulos en el centro que ascienden hasta terminar con un triángulo que tiene la misma inclinación que los vértices truncados.

Hotel Hesperia, Barcelona, (2002)
Richard Rogers



Este edificio tiene una cuadrícula marcada en la parte superior de su fachada. En la parte inferior hay una retícula que se diseñó a otra escala y con una inclinación hacia afuera. Los extremos tienen un prisma de base rectangular. En la parte superior hay un

volumen que contrasta completamente con la geometría euclidiana del resto del edificio. Su parte inferior parece ser un cono invertido de muy poca altura; y la superior, media esfera deforme. La estructura de esta cubierta está compuesta por triángulos en una geometría esférica. La escalera helicoidal para llegar a este espacio tiene forma de cilindro. El contraste entre los dos tipos de geometrías hace que parezcan ajenos al mismo proyecto. El volumen lateral más alto y la estructura que mantiene elevada es forma no euclidiana ayudan a que se integren.

Estadio Olímpico de Atenas, Atenas, Grecia, (2004)
Santiago Calatrava

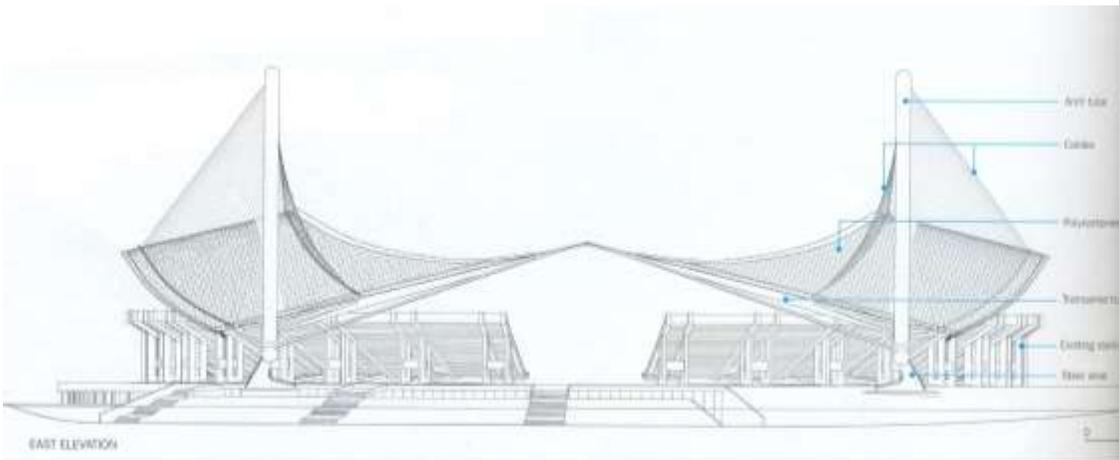


Los soportes cilíndricos de la estructura tienen forma de parábola. En planta ambos son paralelos, pero con las deformaciones causadas por la perspectiva parecen provenir de una geometría compleja. La cubierta del estadio, al parecer, es curva sólo en una dirección, siguiendo la forma parabólica de los arcos superiores, pero con mayor horizontalidad. El borde interno de la cubierta forma una elipse en planta y el externo forma una curva, probablemente de otra elipse. La curvatura de ambas cubiertas está inclinada de tal modo



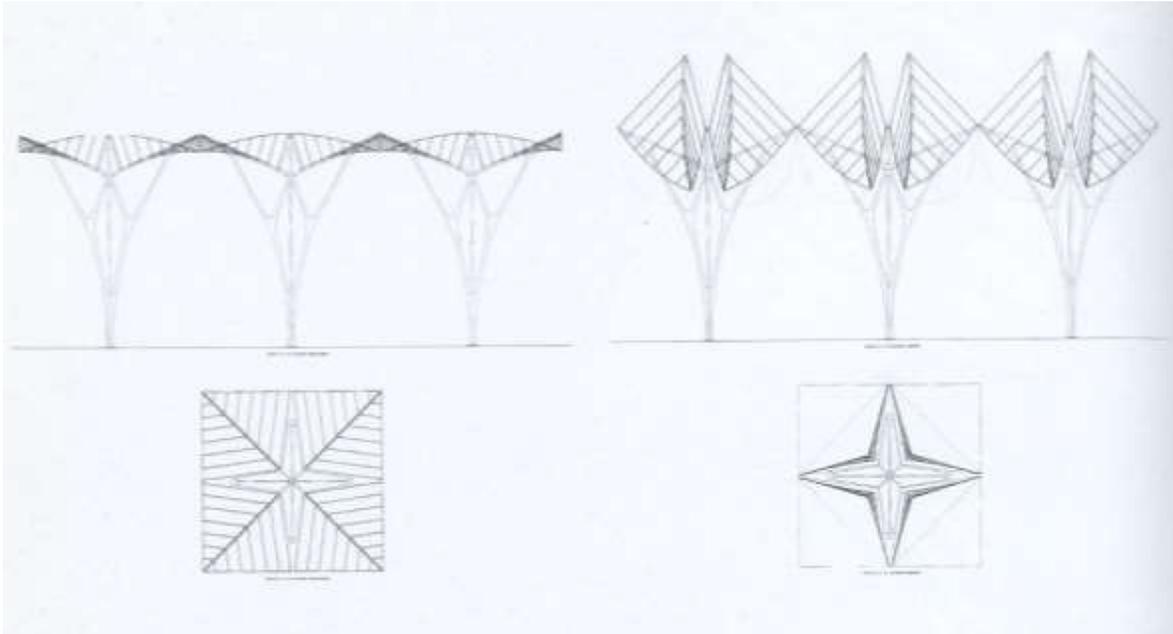
que forman un triángulo que mantiene su parte más elevada hacia el centro. La estructura que soporta las cubiertas está constituida por elementos triangulares en elevación y paralelos en planta. En este caso también se deforman visualmente por el efecto de perspectiva, pareciendo tener variaciones en su inclinación. Estas estructuras triangulares se unen con otro elemento cilíndrico semejante al que soporta el peso de las cubiertas pero con una curvatura en planta semejante a la de una elipse. Este elemento estructural se intersecta con los triángulos, definiendo la ubicación de sus vértices inferiores, los cuales varían en cada elemento triangular. Los tensores que unen toda la

estructura tienen forma triangular y varían en inclinación debido a la geometría de las cubiertas y la de los arcos de apoyo. La cancha tiene forma rectangular con dos semicírculos, uno en cada arista corta.



Esta es una comparación entre una elevación y una fotografía para observar las deformaciones de perspectiva que afectan la percepción de este proyecto.

Restaurante Bauschänzli, Zurcí, Suiza, (1988)
Santiago Calatrava

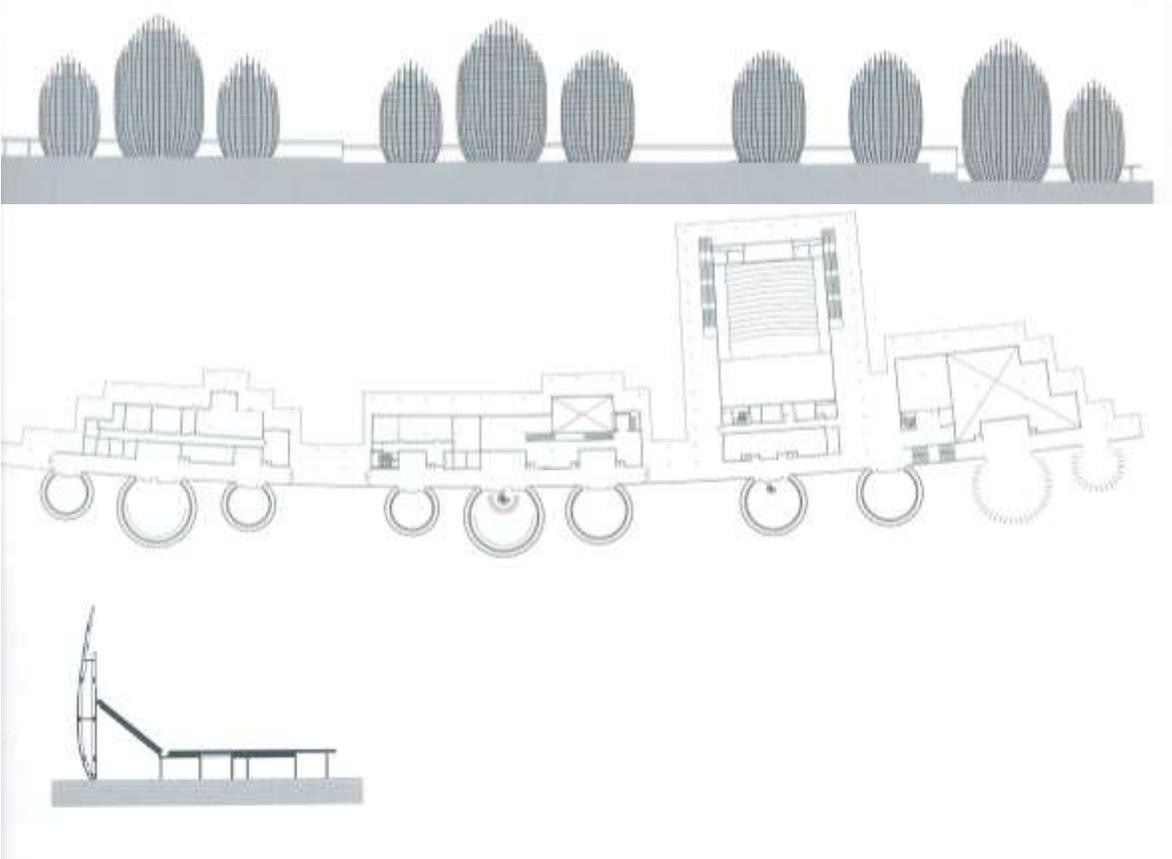


La cubierta de este restaurante está compuesta por apoyos que se asemejan a los de los árboles. Debido a la repetición tan razonada de los apoyos podría decirse que tiene características semejantes a las de los fractales, en cuanto por su autosimilitud. La cubierta está compuesta por cuatro partes (cuadradas) que forman un cuadrado en planta. En elevación las dos aristas externas (de cada parte) son curvas y las dos internas son rectas. La diagonal que las une es curva también. La estructura tiene forma de cruz griega en planta y se apoya orientada hacia los puntos intermedios de las aristas del cuadrado.

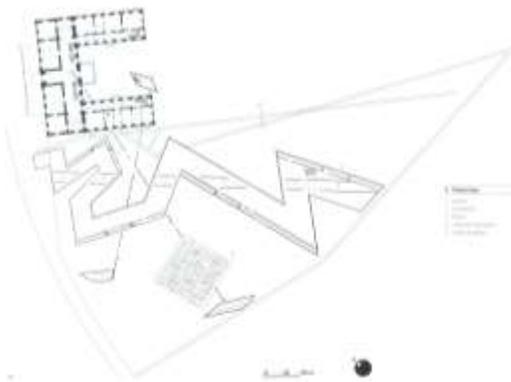
Centro Cultural Tjibaou, Noumea, Nueva Caledonia, (1991-1998)
Renzo Piano



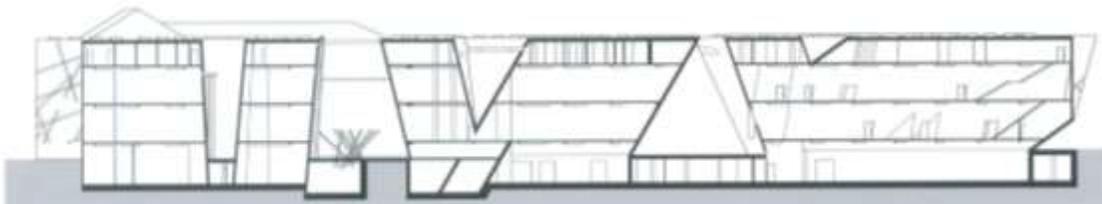
El conjunto está constituido por formas ortogonales, excepto por las vainas. El conjunto tiene diez vainas de tres tamaños diferentes, las cuales se construyeron con anillos de tres cuartos de círculo. El anillo interior de soporte es vertical y el exterior es curvo. La geometría de la superficie podría ser semejante a la de un elipsoide truncado. Las dos geometrías diferentes se unen porque las vainas son circulares en planta y están ubicadas en lugares específicos que las hace integrarse a la composición arquitectónica.



Museo Judío, Berlín, Alemania, (1989-1998)
Daniel Libeskind



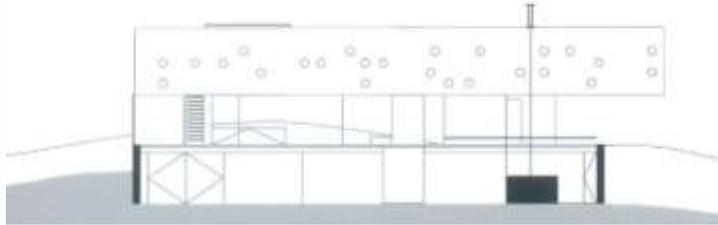
Este proyecto utiliza paralelepípedos y líneas rectas con ángulos irregulares. En planta la orientación del edificio hacia sur es bastante irregular y en elevación el polígono resultante se extrude en direcciones diferentes. En la fachada las líneas rectas no siguen la orientación de la modulación del acabado, que no tiene líneas horizontales. Esta es geometría euclidiana con mucha variedad de ángulos y da una imagen muy diferente a la de la arquitectura del pasado, pero no responde a los conocimientos geométricos de nuestra época.



Villa en Burdeos, Burdeos, Francia, (1998)
Rem Koolhaas



Fotografía

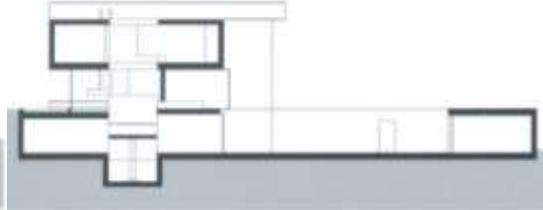


Elevación

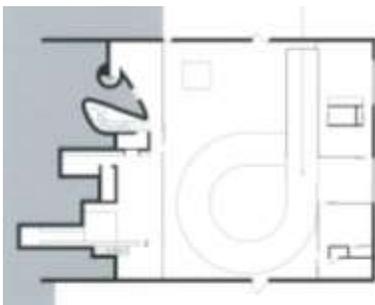
Este proyecto utiliza una geometría ortogonal con algunas líneas rectas con ángulos irregulares, una escalera helicoidal y algunas curvas (inspiradas en la arquitectura de Le Corbusier) que unen líneas con inclinaciones irregulares. En la fachada las ventanas circulares tienen una ubicación con un orden diferente del convencional. La geometría empleada es euclidiana y la forma en que interactúan los elementos geométricos rompe con la utilizada en el pasado. La idea central de este proyecto parece estar más ligada al espacio que a la geometría.



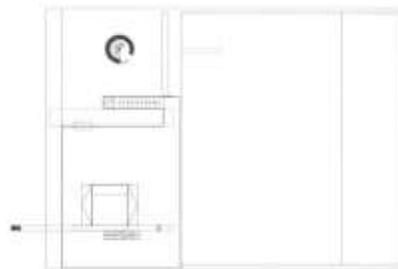
Corte longitudinal



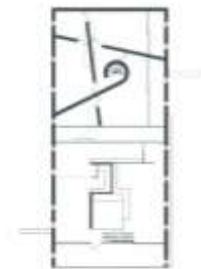
Corte Transversal



Planta Baja



Primer nivel

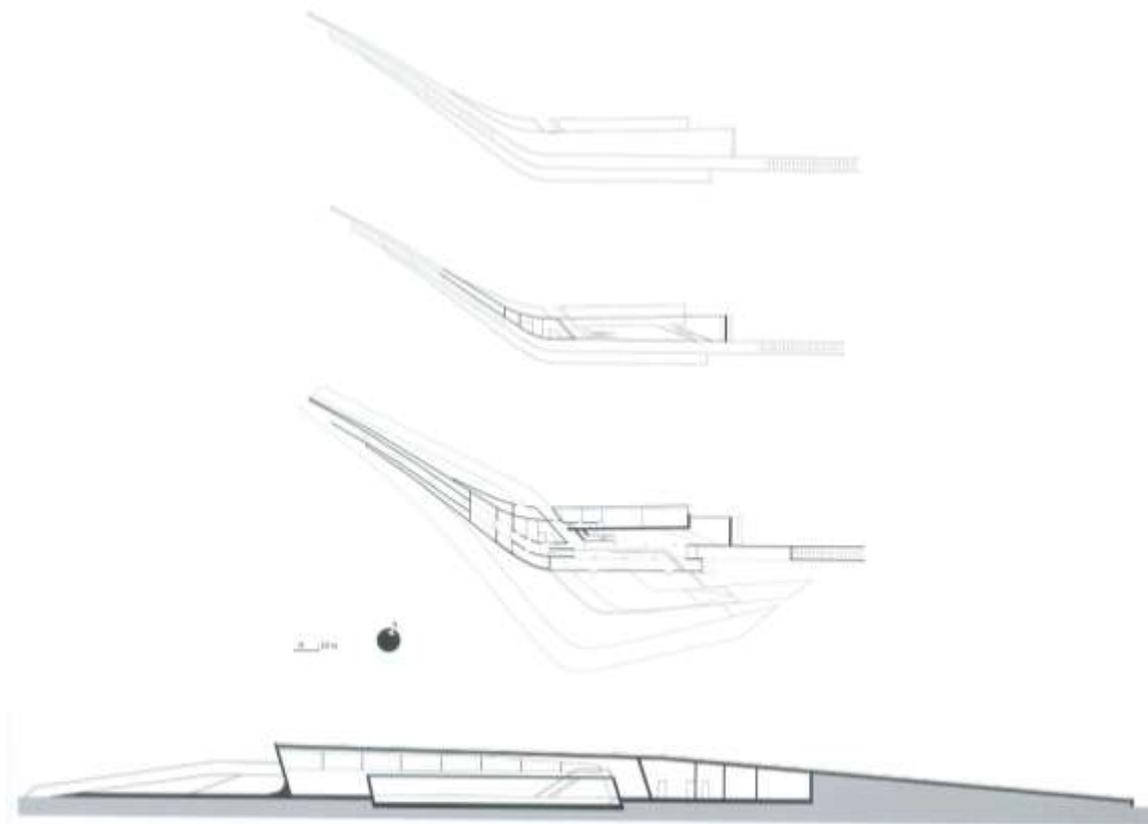


Segundo nivel

LF1, Landesgartenschau, Weil am Rhein, Alemania, (1997-2000)
Zaha Hadid



Este proyecto se asemeja al del ex-jefe de Zaha Hadid (Rem Koolhaas) en que la geometría está conformada por paralelepípedos y líneas rectas y curvas con inclinaciones irregulares. Parece haber una intención de utilizar otros ángulos además del de 90° e incluso el de utilizar esquinas con curvas en lugar de vértices. El proyecto utiliza geometría euclidiana. Parece que el método de diseño de Zaha Hadid consiste en alargar el edificio (Anamorfosis).

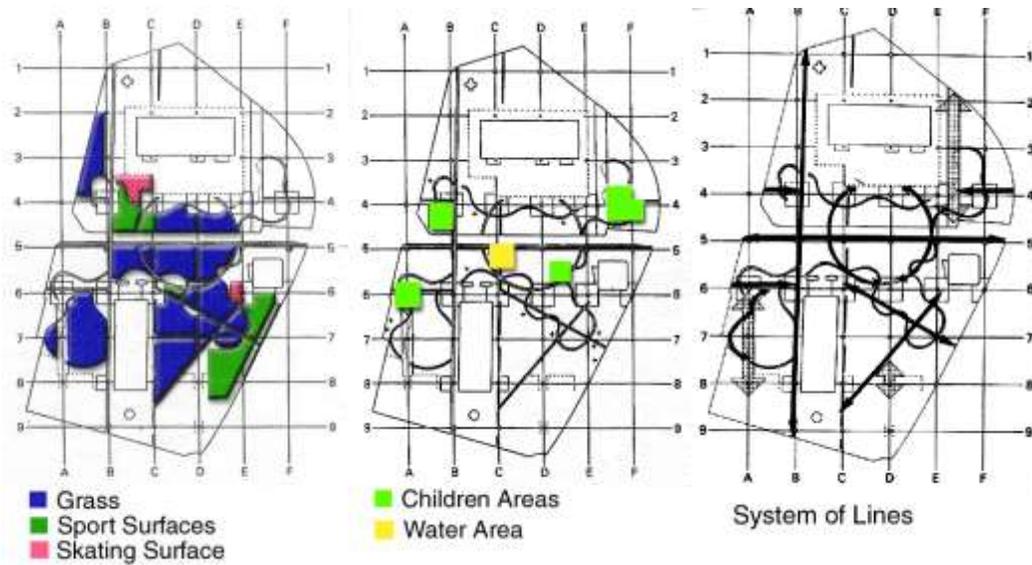


Parque de la Villette, París, Francia, 1982
Bernard Tschumi



Este parque se diseñó utilizando geometría euclidiana. Tiene tres sistemas geométricos independientes y superpuestos. El primer sistema está compuesto por una cuadrícula de puntos de 120 m de lado en la cual se ubican los follies (cada folie se compone de 27 partes de un cubo de 10 metros de arista por adición u omisión). El segundo sistema es lineal y está compuesto por caminos rectos y curvos. Destaca un camino recto que es casi perpendicular al canal. No coinciden las geometrías de estos dos sistemas por haber una desviación entre la cuadrícula de follies y el camino recto. Las praderas y el jardín infantil componen el tercer sistema. Dado que cada sistema geométrico es diferente, surgen intersecciones, y con ellos conflictos, que Tschumi interpreta como momentos dinámicos. En las construcciones, sobresalen los paralelepípedos, una cúpula geodésica, los cilindros y una cubierta sinuosa (semejante a la gráfica de senos y cosenos).





Resumen del capítulo V

En este capítulo se analizaron edificios con mezclas de sistemas geométricos. Un proyecto no necesariamente necesita tener la forma de una figura geométrica en concreto. Se observan casos como el del hotel Hesperia, en el cual se mezclan diferentes sistemas geométricos de geometrías diferentes, lo cual es muy complejo y está muy bien resuelto. En el estadio olímpico de Atenas se observa, entre otras cosas, que el efecto de perspectiva (debido a la dimensión de la cubierta) hace parecer que la estructura sigue otra geometría más compleja, lo cual puede ser un recurso interesante en la geometría euclidiana.

Hay casos en los cuales la geometría euclidiana se emplea para fines prácticos y luego se recurre a otras familias geométricas diferentes. Un ejemplo es el restaurante Bauschänzli, cuya cubierta fue diseñada en planta siguiendo una cuadrícula y en elevación es mucho más compleja.

La intención de este capítulo es buscar diferentes maneras de incorporar todas las familias geométricas posibles al diseño arquitectónico aprendiendo de ejemplos. En estos casos las figuras geométricas son, por lo general, incompletas para poder mezclarse con otras (a diferencia del capítulo anterior). No es posible en este capítulo agrupar edificios en categorías dependiendo de cómo utilizaron la geometría debido a la variedad que existe en las propuestas (cada proyecto es único y diferente a los demás).

Capítulo VI

Arquitectura conformada por usos generalizados de Geometría

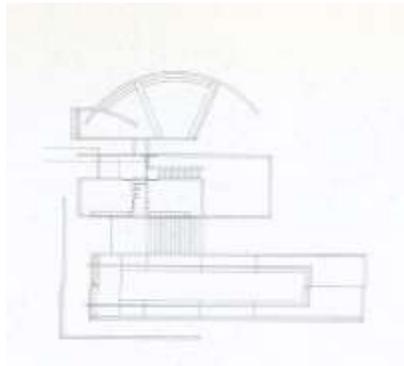
Círculos y ejes en composición de formas ortogonales

Tadao Ando

La geometría que emplea Tadao Ando en muchos de sus proyectos (en planta) sigue ciertas reglas geométricas euclidianas como parte de su estilo en lugar de recurrir a un principio exclusivo para cada proyecto. Por lo general se mezclan líneas rectas o volúmenes ortogonales (lineales) con algunos arcos de círculos. En ocasiones hay ejes perpendiculares entre ellos que los ordenan y en otras hay volúmenes ortogonales con orientaciones diferentes y unidos por círculos y ejes.

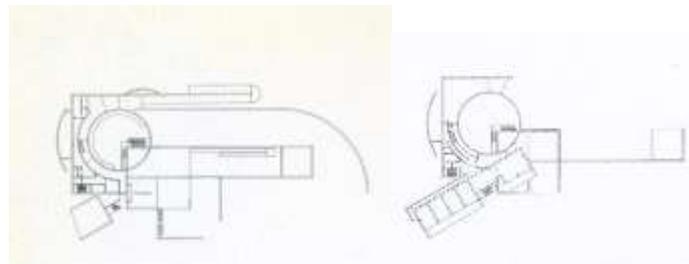
Casa Koshino, Tokio, 1982

En esta casa hay un eje perpendicular que une el arco del círculo con los volúmenes rectangulares.



Museo de arte contemporáneo Naoshima, Kagawa, 1988-1992

En este proyecto hay figuras ortogonales con diferentes orientaciones unidas por el círculo y los ejes. Los volúmenes ortogonales son lineales y participan en la composición geométrica como otro eje más.



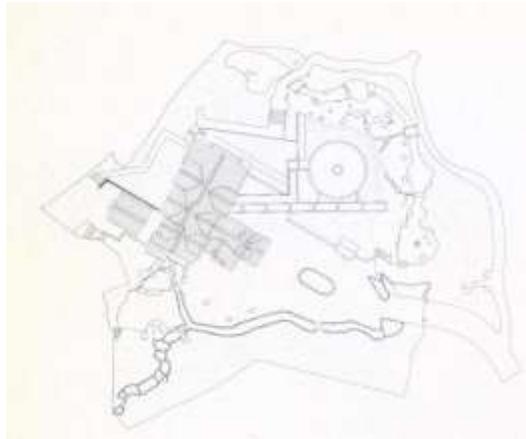
Museo de literatura de Himeji, 1988-1989

En este proyecto se intersectan varias formas ortogonales con orientaciones diferentes. El círculo y el eje ayuda a unir el conjunto.



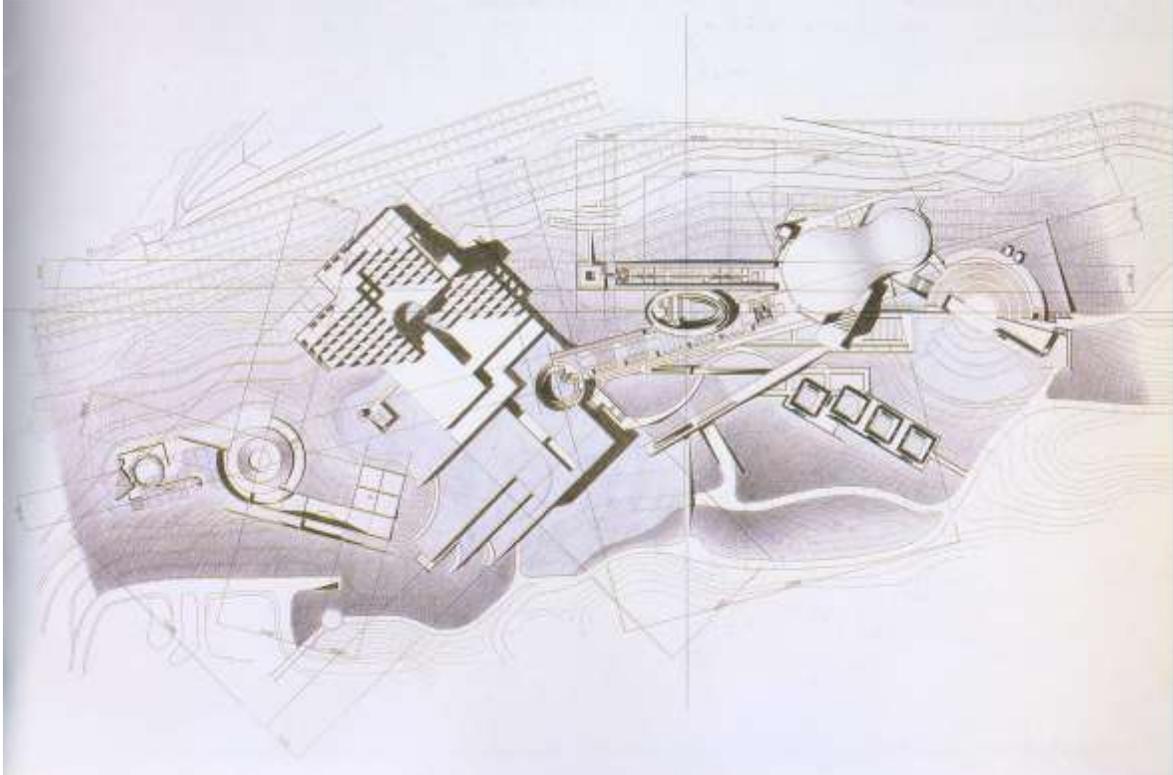
Museo Oyamasaki Villa, Kyoto, 1991-1994

Las diferentes orientaciones de este proyecto se entrelazan con el uso de ejes y círculos. Los volúmenes ortogonales tienen un eje central que les da una orientación específica.



Proyecto Awajishima, Hyogo, 1992

En este proyecto hay formas ortogonales con diferentes orientaciones. Los elementos que los unen son ejes y círculos. Se incluye una forma que parece dos esferas de diferente tamaño deformadas para unirse, lo cual es una forma de geometría no-euclidiana. Hay cuatro orientaciones básicas para los volúmenes.



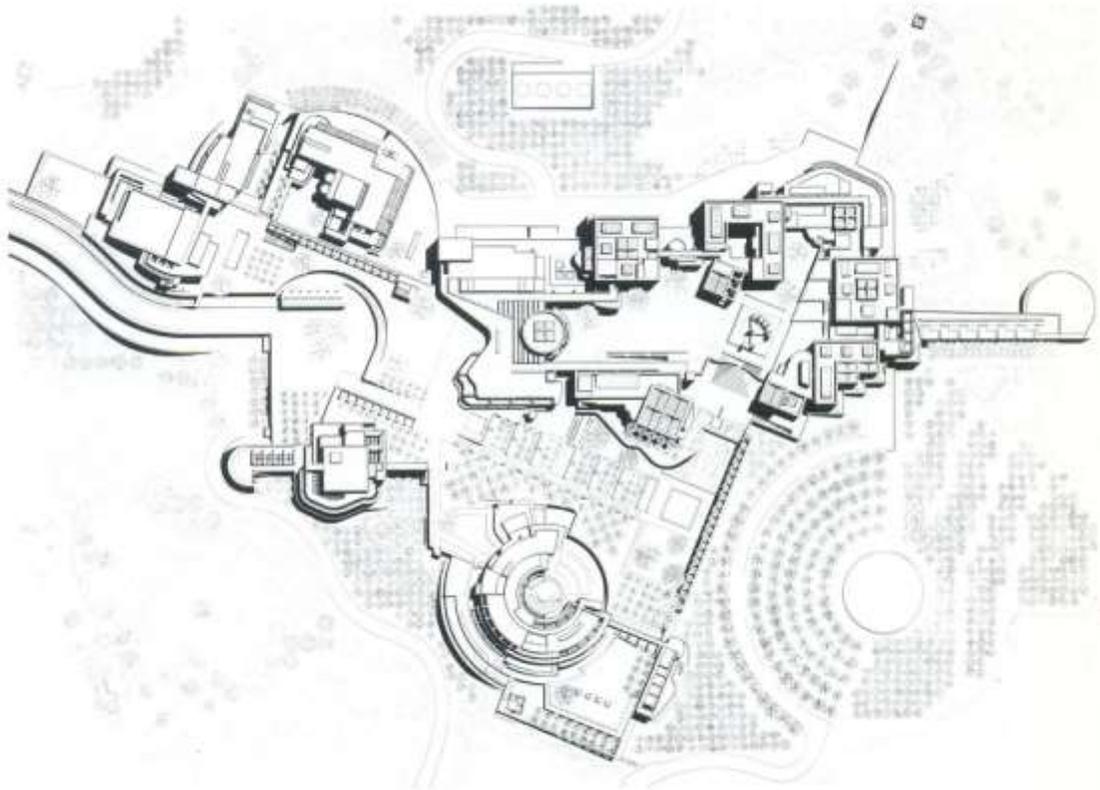
Richard Meier

Richard Meier presenta las mismas características que Tadao Ando en algunos de sus proyectos. Las plantas de Meier tienden a ser de composición más compleja y detallada que las de Ando, las cuales describen el espíritu de los espacios japoneses.

Getty Center, Los Angeles, California, (1985-1997)

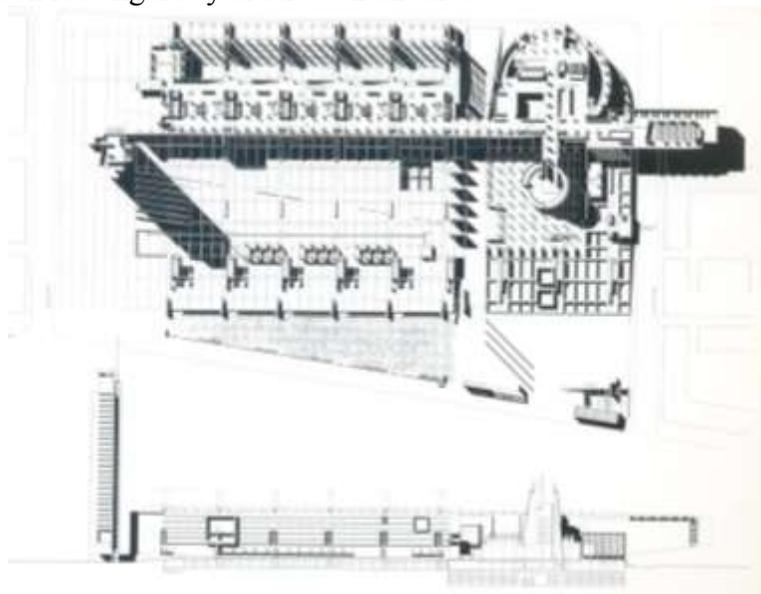
En este proyecto los edificios ortogonales están entrelazados por ejes y círculos. Hay dos orientaciones básicas intersectadas. Al comparar este proyecto con el anterior de Ando, Meier utiliza más intersecciones visibles en las diferentes orientaciones de volúmenes que Ando. Meier marca los ejes con volúmenes delgados mientras que Ando los define con la orientación de los volúmenes ortogonales. Meier utiliza una gran cantidad de volúmenes ortogonales formando cubos y paralelepípedos lineales mientras que Ando

Utiliza pocos de estos volúmenes sin interés de generar cubos. Ando utiliza una forma irregular tridimensional y Meier utiliza formas irregulares bidimensionales extrudidas.



Biblioteca nacional de Francia, Paris, Francia, (1989)

Los dos ejes principales de este proyecto son perpendiculares entre sí y están marcados, uno con rectángulos y el otro con círculos.



Formas geométricas en campanarios (Mario Botta)

Los campanarios son un tema interesante en las iglesias de Botta. En lugar de tener una torre, como hemos heredado de la historia, Botta diseña unas campanas colgando de una armadura con formas geométricas euclidianas en alguna de las fachadas. Estas armaduras tienen dos caras laterales, paralelas y de forma poligonal, las cuales están compuestas por polígonos triangulares o cuadrados. Ambas caras están unidas transversalmente por elementos que configuran rectángulos. Esto quiere decir que es un diseño que ofrece sus mejores caras lateralmente, lo cual no es problema porque esto sucede inevitablemente en el recorrido y las armaduras pueden ser interpretadas como polígonos de gran espesor. Las armaduras son de color negro (parte de su estilo) y las campanas tienen (cada una) un elemento circular metálico (posiblemente para que roten y suenen). Por lo regular hay algún hueco rectangular en la fachada que recibe estas estructuras metálicas.



Arco exterior, acceso y campanario en Iglesia de San Juan Bautista en Mogno



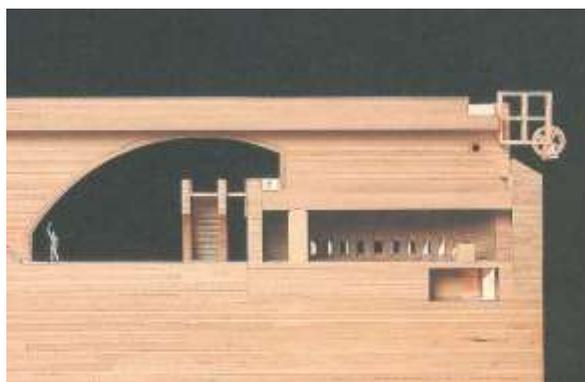
Campanario en Iglesia Parroquial Beato Odorico da Pordenone



Campanario en Iglesia de San Pedro Apóstol Sartirana de Merate



Campanario en la Catedral de la Resurrección en Evry



Campanario en Santa María de los Ángeles en Monte Tamaro

Resumen del capítulo VI

En este capítulo se buscó la forma en que la geometría puede convertirse en parte del estilo de un arquitecto. Se analizó cómo dos arquitectos de estilos muy diferentes (Tadao Ando y Richard Meier) tienen los mismos recursos geométricos en planta. Las elevaciones son muy diferentes y por esto no es esto muy notorio (en cuanto a la geometría de los proyectos).

En el caso de los campanarios de Mario Botta, estos tienen una geometría muy semejante, probablemente debido al uso de armaduras como requerimiento estructural. La forma en la elevación lateral de las armaduras es lo que hace que varíen los campanarios, que es siempre de un polígono diferente (o con orientación distinta) en la elevación lateral. Es una manera de dar variedad sin romper con el estilo personal.

Conclusiones

La geometría es algo inevitable en el diseño arquitectónico. Siempre se tendrá como resultado una forma o un conjunto de formas geométricas independientemente de que ésta haya sido tomada en cuenta al momento de diseñar. Desde el momento en que se traza una línea o un círculo, ya hay geometría involucrada en el diseño. Muchos arquitectos en la actualidad prefieren recurrir a otro tipo de recursos diferentes a la geometría, entre los cuales destacan: la tecnología, la iluminación, la funcionalidad; y sin embargo la siguen utilizando aunque no se lo propongan. La geometría tiene todas las posibilidades de desarrollarse de manera importante por ser una rama de las matemáticas y esto aumenta los recursos de diseño de los cuales dispone un arquitecto. Toda arte aprovecha los conocimientos científicos más avanzados de su época.

Las formas geométricas deben de justificarse y no utilizarse por capricho personal. Cada forma geométrica tiene diferentes ventajas dependiendo de sus características específicas. Dos posibilidades para utilizarlas pueden ser por el proceso a través del cual estas figuras son generadas o a través de las características propias de las figuras resultantes. Por ejemplo un cardioide es creado girando un círculo alrededor de otro y una de sus características es que delimita un área interna de modo semejante a como lo haría un círculo.

No se puede diseñar pensando exclusivamente en geometría. La arquitectura responde a muchos problemas de diseño y no todos pueden ser abarcados por la geometría. Sin embargo por el hecho de ser algo ineludible en el diseño arquitectónico, el ampliar los conocimientos que se tienen de ella aumenta las posibilidades de soluciones para los problemas de diseño arquitectónico.

En cada una de las familias geométricas hay diferentes ventajas en su aplicación. Las geometrías no-euclidianas son tan consistentes como la geometría euclidiana. La geometría euclidiana es la excepción de la regla de la creación y su uso tal vez funcione en la realidad debido al concepto de variedad. Las geometrías no-euclidianas deben traer importantes aportaciones a la arquitectura debido a que responden bien al mundo en que vivimos. A través de ella se pueden dar soluciones directas a los problemas de diseño. Si se estudia a fondo el desempeño de la geometría euclidiana en la arquitectura es seguro que tendrá sus limitaciones y es posible que otra familia geométrica entre en su lugar en esos casos, según el tipo de problema de que se trate.

Si la línea recta fuera mejor, ya la hubiera acaparado la naturaleza. Una geometría basada en formas curvas puede traer grandes ventajas. Las formas geométricas se deforman en un espacio no-euclidiano dando con ello a una mayor variedad de recursos para la solución de problemas de diseño. Por ejemplo, los triángulos ya pueden tener una suma interior de ángulos diferente a 180° .

Las superficies cuadráticas, por otro lado, han tenido un desarrollo importante en la obra de arquitectos como Félix Candela y Frei Otto, con una línea de desarrollo basada en razonamientos lógicos. Algunas de ellas, como los paraboloides hiperbólicos, tienen

grandes ventajas constructivas por utilizar una cantidad mínima de material para lograr soportar claros de dimensiones considerables. Aunque parezca una solución extremadamente repetitiva, debido a su forma tan contundente, se ha logrado llegar a una gran variedad de composiciones a través de las diferentes maneras de combinarlos.

Las superficies mínimas tienen una curvatura de 0. Es difícil saber con exactitud si un edificio en lo particular utiliza superficies mínimas. Estas figuras parecen tener la ventaja de abarcar grandes volúmenes con poca superficie. Su uso para arquitectura puede traer ventajas semejantes a las de los paraboloides hiperbólicos ya que consiste en construir con menos material de lo normal. En las casas de interés social puede ser una opción interesante, si se estudia el proceso de construcción para que no salga muy caro. Es poco el desarrollo que ha tenido esta familia de formas geométricas en la arquitectura. Nuestra forma de representar arquitectura sigue siendo bidimensional y la industria sigue produciendo materiales con formas basadas en la geometría euclidiana. Los ejemplos que existen en arquitectura pueden servir para ampliar la búsqueda de posibilidades. En la obra de Frei Otto parece haber algún uso de estas figuras, pero es difícil asegurarlo.

Las superficies sin orientación son difíciles de utilizar en arquitectura porque en el mundo real hay una fuerza de gravedad que hace obligatoria la orientación vertical (y por consecuencia la horizontal), pero aún así podrían tomarse en cuenta para algún diseño que utilicen los astronautas en el espacio (si se pudieran mantener adheridos a la superficie). Por ejemplo podría haber alguna estación espacial o satélite artificial que tenga forma de cinta de Möbius porque su característica de tener ambos lados de la cinta comunicados representara alguna ventaja de diseño. Una superficie de Boy como estación espacial ofrecería la ventaja de comunicar directamente el interior y el exterior sin separarse de la superficie. Especialmente en esta época en la que se habla de diseños para habitar en el espacio (aunque sea de manera temporal), este tipo de formas puede ser de mayor utilidad que las formas geométricas convencionales.

Las figuras geométricas bidimensionales que provienen de una rotación, como los cicloides, rara vez se utilizan. El museo Kimbel tiene bóvedas con la figura de cicloides y parece que a la gente le agradan estas formas. Sin embargo hay otras figuras en este mismo grupo de formas, como cardioides y astroides, que realmente son escasos, si es que existen. El utilizar figuras geométricas diferentes a las que conocemos pueden traer consigo diferentes sistemas de orden con los cuales se alcancen logros nuevos. El comportamiento de la iluminación y la acústica puede variar de manera importante a través de bóvedas con figuras diferentes. El problema acústico de las cúpulas podría quedar solucionado con una geometría diferente a la circular (conservando una forma parecida). Los juegos de iluminación tendrían mayor variedad, e inclusive podría buscarse una curvatura que logre una mejor trayectoria de la luz para iluminar mejor un espacio (o para oscurecerlo, si este es el caso).

Las formas geométricas relacionadas con la topología y la geometría diferencial casi no se han utilizado. Aún los arquitectos deconstructivistas, que emplean formas diferentes a la arquitectura tradicional, recurren a formas y ángulos irregulares en lugar de alguna de estas figuras geométricas. Hay proyectos en los cuales resulta difícil saber si se emplearon formas geométricamente azarosas o demasiado complejas con una intención específica.

El hecho de que en topología se llegue de una forma a otra, puede ser un recurso interesante para algún proyecto arquitectónico. Con la tecnología que constantemente se está desarrollando, algún día se podrían hacer reutilizaciones en los edificios más económicas y rápidas, por provenir de las formas geométricas topológicamente equivalentes de la utilización anterior (sobre todo si se inventan materiales de construcción flexibles). También pueden tener un uso importante en los espacios arquitectónicos donde se necesitan cambios radicales en su forma constantemente. Utilizando materiales constructivos flexibles y formas geométricas topológicamente equivalentes se pueden construir espacios con cubiertas o muros que cambien de forma según la actividad que se realice en ellos.

Las ecuaciones de la geometría diferencial pueden utilizarse en el cálculo de ingenierías para los proyectos con superficies curvas. Esto haría más rápida la construcción de edificios con estas formas. Si en el futuro se utilizaran robots para construir total o parcialmente los proyectos arquitectónicos (y erradicar así los errores de construcción), el hecho de que las figuras que se empleen pertenezcan a alguna familia geométrica facilita el trabajo del robot (en lugar de emplear figuras irregulares que hasta pierden interés estéticamente).

Se han utilizado formas con geometría fractal en la arquitectura a lo largo de la historia porque estas se encuentran en la naturaleza y los arquitectos en ocasiones se inspiran en ella. Todavía no se ha visto que se utilice el conjunto de Mandelbrot o los conjuntos de Julia de manera análoga como se utilizaría un círculo (ahora que existen estas figuras). De igual modo que un círculo tiene un radio y un centro, el conjunto de Mandelbrot tiene su propia figura repetida en su superficie una gran cantidad de veces. La lógica que tendría el utilizar figuras geométricas con un orden tan diferente del convencional puede traer consigo grandes cambios a las composiciones arquitectónicas. Ya no se estaría hablando necesariamente de una planta con una figura geométrica centralizada, sino de múltiples repeticiones de sí misma. Es un tipo de idea que se asemeja a un canon en música por el juego razonado en la composición (una forma compuesta por formas iguales y de menor tamaño). En el diseño de fraccionamientos puede traer ventajas de rapidez y costo (sin llegar a la simplicidad). Se podrían diseñar espacios variados con reglas muy claras y sencillas para que sean fáciles de construir y no tengan la típica monotonía de algunos de los fraccionamientos (cuando se busca ahorrar más de lo que permiten las posibilidades del proyecto).

Los fractales se utilizan mucho en la naturaleza para distribuir algo uniformemente en una superficie amplia. En cualquier lugar donde se necesite una solución de este tipo se puede recurrir a los fractales (con las limitantes que tiene la construcción). Por ejemplo, si los líquidos retienen con facilidad su temperatura, con una tecnología avanzada se puede llegar a irrigar el interior de una fachada con un líquido refrigerante para lograr un confort de temperatura en el interior. La forma de los canales conductores de dicho líquido tendría que basarse en la geometría fractal para lograr abarcar toda la superficie y que sea fácil de construir.

Las dimensiones afectan directamente a la arquitectura y a la geometría. Es posible que el conocimiento de los espacios de Calabi-Yau den soluciones a muchos problemas de diseño. El comprender la totalidad de dimensiones del universo en que vivimos puede dar como resultado una geometría muy interesante donde también sus dimensiones se comporten de acuerdo con el espacio. Si ha unificado las distintas áreas de la física, ¿qué tipo de geometría puede traer esto? Tal vez supere a la geometría fractal es su imitación de la naturaleza.

Existen varias formas de diseñar aplicando los diferentes tipos de geometría a los proyectos arquitectónicos. Una forma de utilizarla es tomando formas geométricas como modelo para dar forma a la arquitectura. Esto trae consigo una gran facilidad en el cálculo estructural y en la construcción del proyecto. Para la gente que utiliza el edificio, es una manera de ubicarse rápidamente dentro del mismo. Sin embargo, esta manera de utilizarla puede traer consigo un exceso de simplicidad si no se emplea con cuidado, que en ocasiones puede traer consigo la falta de expresión del arquitecto, la repetición de formas en los edificios y la mecanización de formas geométricas en la arquitectura. Es importante al utilizar las formas geométricas de este modo, buscar la calidad arquitectónica del proyecto pese a la simplicidad de la geometría de la forma general.

En ocasiones se mezclan diferentes sistemas geométricos para resolver los problemas de diseño arquitectónico sin que sea necesario que los sistemas tengan una relación estricta entre ellos. El mezclarlos une sus ventajas y disminuye sus características inherentes de las figuras geométricas que son contrarias a las expectativas de solución. La uniones de sistemas pueden ser en donde el diseñador lo considere más conveniente. Por ejemplo, en muchas ocasiones la forma general se determina con una figura de alguna familia, y ésta se divide internamente por otro sistema por distintas razones: buscando lograr una división de espacios más cómoda, una estructura simplificada, etc.

En ocasiones la geometría se utiliza de tal modo que se genera un estilo personal, lo cual debe cuidarse para que no se vuelva demasiado repetitivo. En estos casos se utilizan “reglas” (intuitivas o con plena conciencia) que garantizan el resultado buscado. El buscar reglas para diseñar es importante especialmente en la época actual donde hay que diseñar rápidamente, pero es necesario que la obra no se vea demasiado repetitiva. La geometría puede ayudar a configurar rápidamente un edificio, pero no debe llegar al grado de volverse una rutina. En los casos de Tadao Ando y Richard Meier, a pesar que emplean estrategias semejantes para resolver el proyecto en planta utilizando formas geométricas, sus intenciones en el espacio son diferentes y las fachadas tienen tratamientos muy distintos. Esto, entre otras cosas, hace que sus proyectos tengan aspectos diferentes.

Existen algunas dificultades en los procesos de trabajo por estar acostumbrados a la geometría euclidiana. En general la industria está pensada para crear productos basados en esta familia geométrica: placas metálicas rectangulares, barras de acero lineales, etc. Se puede llegar a una geometría no euclidiana utilizando estos tipos de productos industriales a través de muchas formas, como mezclando diferentes sistemas geométricos o absorbiendo los cambios de formas a través de una modulación (para lo cual es muy útil el concepto de variedad). Sin embargo se pueden producir también formas nuevas si se toma en cuenta su

proceso de dibujo en el proceso de fabricación. La industria necesitaría ver la utilidad de crear estas formas para que tenga la certeza de que se van a vender.

Las figuras geométricas diferentes a la geometría euclidiana tienen una lógica matemática que les da forma, la cual puede ser aprovechada para que en la industria se creen objetos con estas formas. Algunas figuras geométricas parten de las figuras tradicionales. Esto puede ser considerado al momento de diseñar para que se aproveche lo que se realiza actualmente en la industria. Los poliedros son la unión de polígonos para formar una esfera. Hay figuras que provienen de la rotación de dos círculos de diámetros variables (cardioides, nefroides, astroides, etc.)

Los procesos de trabajo actuales de los arquitectos también presentan problemas para incorporar otras familias geométricas al trabajo que se realiza. En el proceso de desarrollo un proyecto ejecutivo, es importante considerar la gran cantidad de cambios que se realizan. Mientras más compleja sea la geometría del proyecto, más tiempo lleva realizar los cambios. Las nuevas formas geométricas requieren de nuevos procesos para su realización. Es importante buscar la manera más rápida de realizar estas formas para que sea rentable su utilización. Lo más sencillo es que vengan incluidas en los softwares de computadoras, del mismo modo como vienen incluidas las formas de la geometría euclidiana. El AutoCAD actualmente no tiene instrucciones para dibujar ningún tipo de espiral ni las formas bidimensionales más recientes y sus formas tridimensionales son muy básicas. No da las herramientas para facilitar el trabajo. Posiblemente si AutoDesk encuentra la importancia de realizar estos cambios, sería más fácil tanto la difusión como la utilización de estas formas geométricas.

En la obra, los albañiles no tienen la preparación académica suficiente para entender otros tipos de geometría distinta de la euclidiana. Esto encarece la realización de edificios con una geometría diferente. Además son muchos los problemas que se presentan durante la construcción de un edificio, que es posible que mucha gente vea el uso de una geometría más compleja como un incremento de problemas. Es necesario hablar de las ventajas de utilizarlas y encontrar procesos sencillos para que sea práctico construir utilizándolas. Tal vez en ocasiones sea necesario que la gente que participa en la obra tome un curso de capacitación. También se pueden publicar libros de texto de geometría para arquitectos, los cuales necesitan un enfoque más apegado al dibujo que a los números.

La representación de una forma arquitectónica, que inherentemente es tridimensional, se representa bidimensionalmente en planos. A través de diferentes dibujos bidimensionales se obtiene una idea de cómo es la forma tridimensional. Es muy elaborado dibujar formas geométricas tridimensionales complejas en dos dimensiones. Mientras no se encuentre la utilización de otra forma de representación para figuras complejas, será complicado su uso en la vida práctica y su comprensión para su correcta construcción. Hay arquitectos que trabajan con maquetas y luego las pasan a la computadora utilizando softwares complejos como el CATIA (como es el caso de Frank Gehry). Luego se traducen a planos para que se puedan construir.

Los arquitectos utilizan la geometría descriptiva para dibujar figuras geométricas. Se puede saber la fórmula de una figura geométrica reciente, pero ¿cómo se dibujaría

utilizando geometría descriptiva? Las herramientas que tradicionalmente han utilizado los arquitectos para dibujar están pensadas para las formas geométricas del pasado. Para dibujar un círculo se utiliza un compás; para un triángulo, reglas; y ¿para un nefroide o un rotor qué se utiliza? No hay una sola herramienta que de manera sencilla lo haga; se necesita buscar un procedimiento indirecto para hacerlo. Esto indudablemente se tiene que resolver para que sea más fácil su implementación. Sí hay manera de dibujarlas, pero es más indirecta y tardada que el dibujo de figuras tradicionales. Con la fabricación de reglas, y en ocasiones plantillas, se puede resolver esto.

La hipótesis se probó como correcta porque el estudio de las diferentes familias geométricas abre un panorama mucho más variado de las posibilidades que tiene la geometría. Siendo ésta inherente en el diseño arquitectónico, su estudio es muy importante para ampliar la variedad de propuestas. Con el estudio de las familias geométricas, aumenta la cantidad de figuras geométricas que se pueden utilizar. Al analizar las características de cada familia, pueden surgir otras propuestas (no necesariamente afectando directamente a la forma) que de otro modo no se tenían, como es el caso de las torres Eisenman y la teoría del caos (geometría fractal). Cada familia geométrica se puede aprovechar en situaciones de diseño diferentes, lo cual da como resultado un mejor desempeño de parte del diseñador.

Es cierto que una cantidad reducida de conocimientos geométricos no es una limitante para diseñar indefinidamente (cuando se saben aprovechar). Sin embargo el aumentar los conocimientos abre nuevos y diferentes caminos que de otro modo no se pueden abrir. No es un asunto de cantidad de posibilidades de diseño, sino de variedad de posibilidades. Si las situaciones de diseño varían tanto que se concluye diciendo que cada proyecto es único, la variedad es un factor importante en este trabajo. La variedad permite más soluciones directas a los problemas de diseño arquitectónico.

La geometría euclidiana contiene menos posibilidades que las otras familias juntas. Un arquitecto debe conocer las diferentes familias que existen, porque es seguro que las aprovechará. Los proyectos que se estudiaron en este documento ejemplifican varias alternativas de cómo aplicar una geometría diferente de lo convencional a la arquitectura. La geometría puede aplicarse de muchas maneras, entre ellas se estudiaron las que sobresalían de los casos estudiados: utilizando formas geométricas concretas, mezclando diferentes sistemas geométricos y repitiendo algunos aspectos de su aplicación para generar con eso un estilo de diseño. El aprovechar los conocimientos geométricos de nuestra época implica más posibilidades de diseño y una mejor y más directa respuesta a las necesidades de esta época. La geometría seguirá avanzando con el tiempo, con lo cual aumentarán las posibilidades que existen de diseñar.

Anexos

Tablas e Imágenes

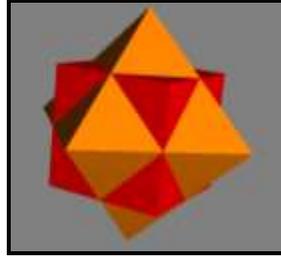
El objetivo de estas tablas es ver la relación que existe entre los duales de los poliedros y ver la gran cantidad de variedad que existe en el Conjunto de Mandelbrot. De los poliedros se incluyeron los grupos que tenían más relaciones interesantes en su proceso de truncamiento. En los Sólidos Platónicos el proceso incluye todos los Sólidos de Arquímedes; incluso el cuboctaedro y el icosidodecaedro incluyen en sus nombres los poliedros de donde se forman, lo cual hace pensar que Arquímedes ya sabía esto. Al irse llenando de irregularidades los poliedros, los intermedios del proceso de truncamiento se hacen cada vez más irregulares y ya no tienen nombre. Es interesante ver cómo el proceso de truncamiento genera nuevos poliedros, del mismo modo que un cambio de proporciones lo puede hacer. El software que utilicé para generar estas imágenes fue el “Great Stella”.

En el Conjunto de Mandelbrot existe una gran cantidad de variedad. A pesar del concepto de autosimilitud, existen en su interior muchas formas que no tienen relación con su exterior. El hecho de que se vaya deformando la figura al ir aumentando la escala puede ser el factor a través del cual se generan tantas figuras (a través de diferencias de proporciones se está llegando a formas diferentes). Es tan compleja esta superficie que uno puede perderse y no volver a encontrar dónde estaban todas las figuras que se habían encontrado en un principio. En las imágenes se observan algunos acercamientos para ver cómo gradualmente surgen formas nuevas. Las composiciones formales son realmente interesantes. Es interesante ver cómo las matemáticas pierden su rigidez en este conjunto. El software que utilicé para generar estas imágenes fue el “Fractal Extreme”.

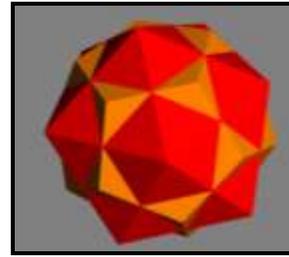
Truncamiento de Sólidos Platónicos



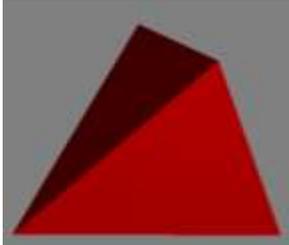
TETRAEDRO-TETRAEDRO



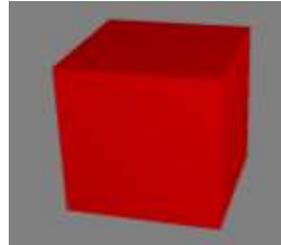
CUBO-OCTAEDRO



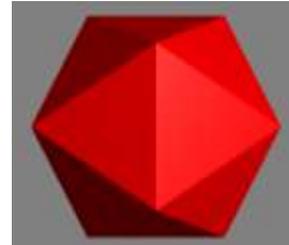
DODECAEDRO-ICOSAEDRO



TETRAEDRO



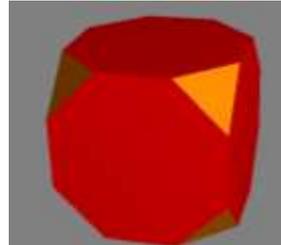
CUBO



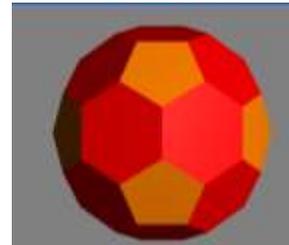
ISOSAEDRO



TETRAEDRO TRUNCADO



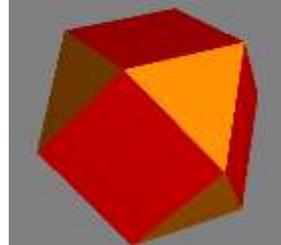
CUBO TRUNCADO



ICOSAEDRO TRUNCADO



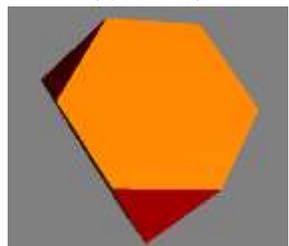
OCTAEDRO



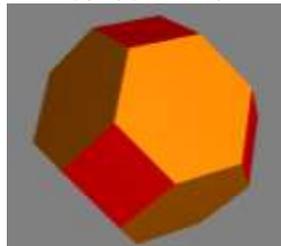
CUBOCTAEDRO



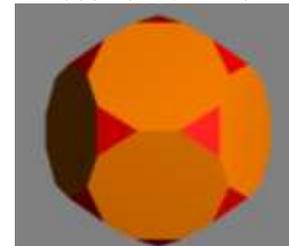
ICOSIDODECAEDRO



TETRAEDRO TRUNCADO



OCTAEDRO TRUNCADO



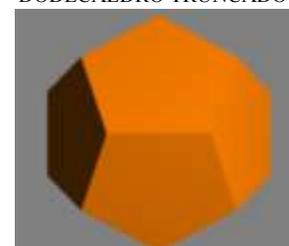
DODECAEDRO TRUNCADO



TETRAEDRO

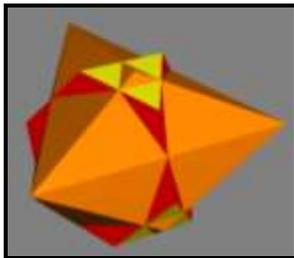


OCTAEDRO

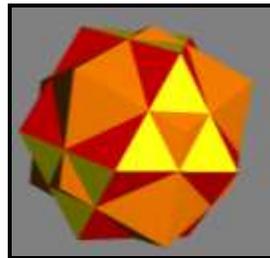


DODECAEDRO

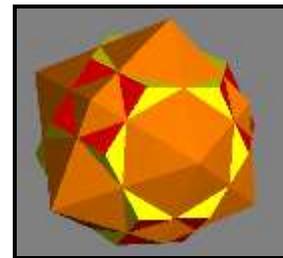
Transformación de sólidos de Arquímedes a duales (sólidos de Catalán) por medio de truncamiento



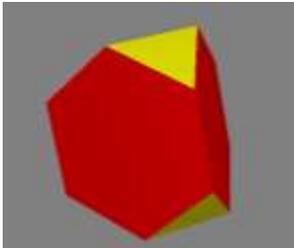
COMBINACIÓN DE DUALES



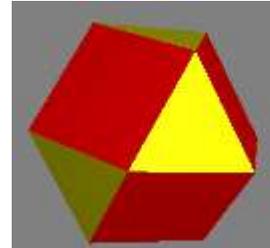
COMBINACIÓN DE DUALES



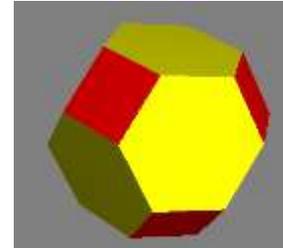
COMBINACIÓN DE DUALES



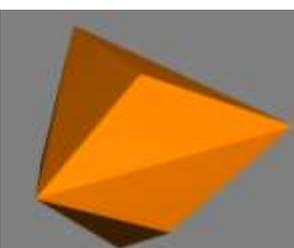
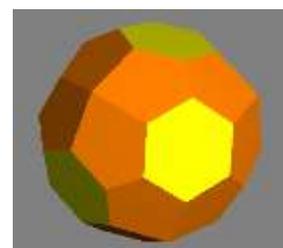
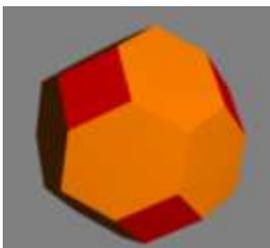
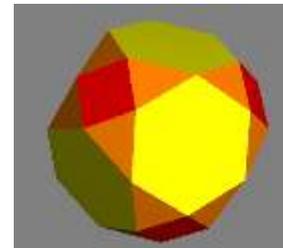
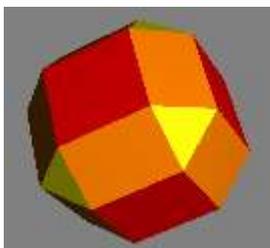
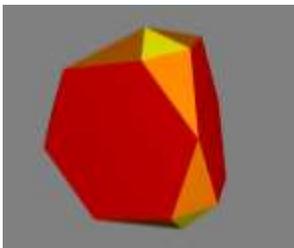
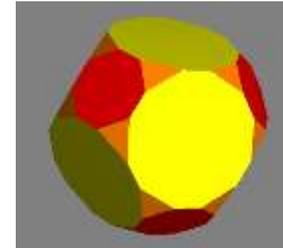
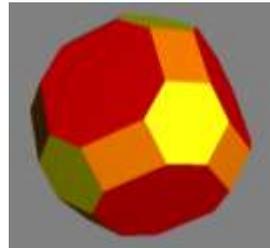
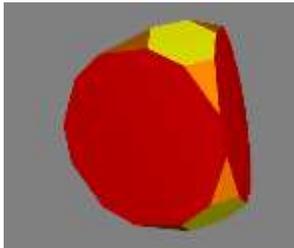
TETRAEDRO TRUNCADO



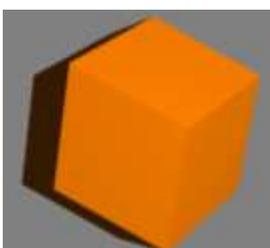
CUBOCTAEDRO



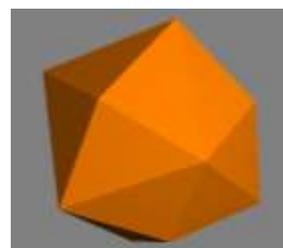
OCTAEDRO TRUNCADO



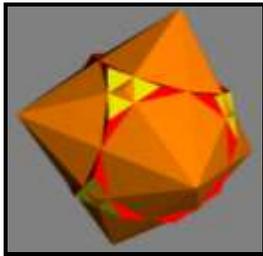
TETRAEDRO TRIAKIS



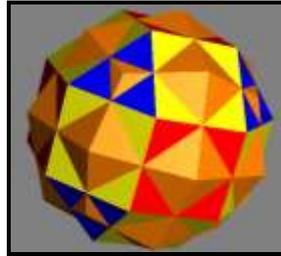
DODECAEDRO RÓMBICO



HEXAEDRO TETRAKIS



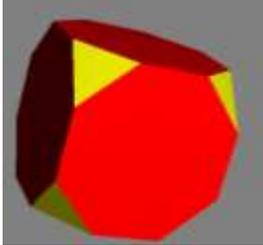
COMBINACIÓN DE DUALES



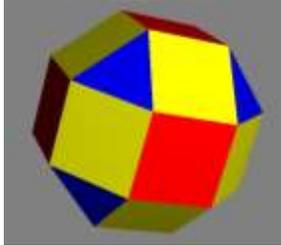
COMBINACIÓN DE DUALES



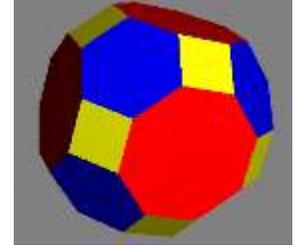
COMBINACIÓN DE DUALES



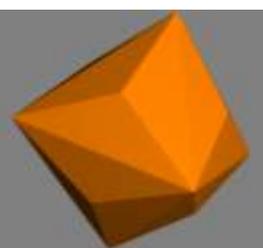
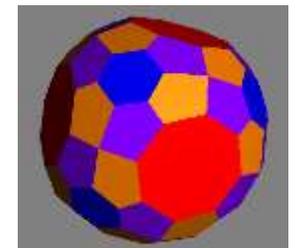
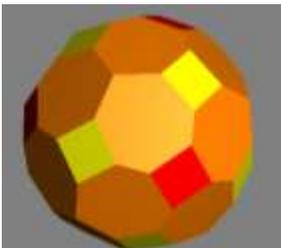
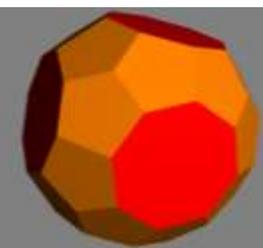
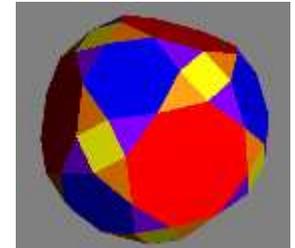
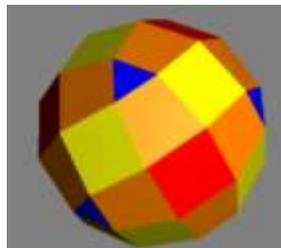
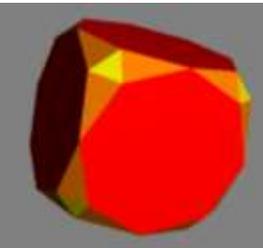
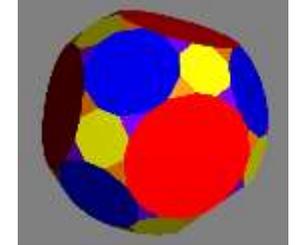
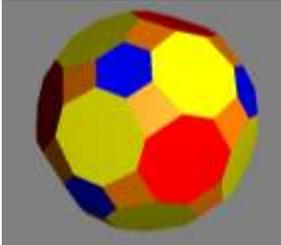
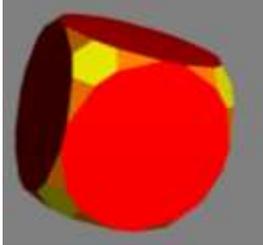
CUBO TRUNCADO



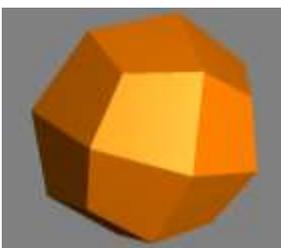
ROMBICUBOCTAEDRO



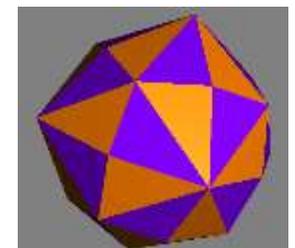
CUBOCTAEDRO TRUNCADO



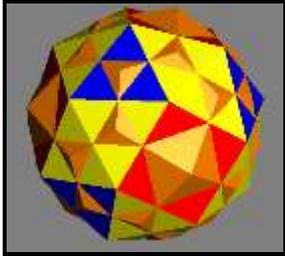
OCTAEDRO TRIAKIS



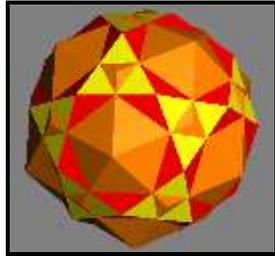
ICOSITETRAEDRO DELTOIDAL



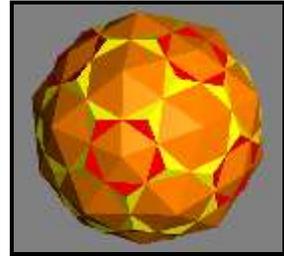
DODECAEDRO DISDAKIS



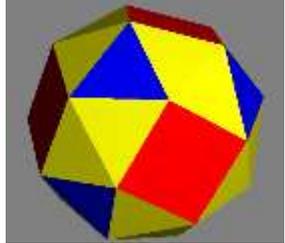
COMBINACIÓN DE DUALES



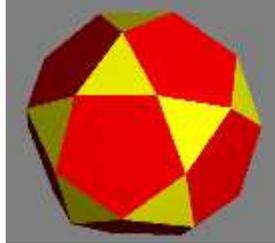
COMBINACIÓN DE DUALES



COMBINACIÓN DE DUALES



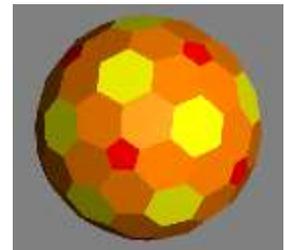
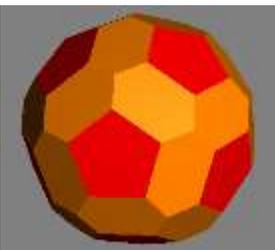
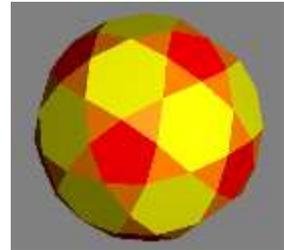
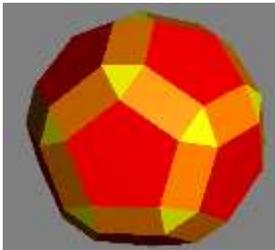
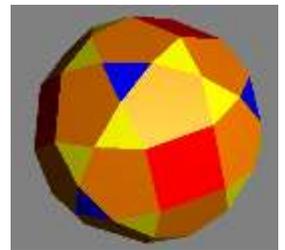
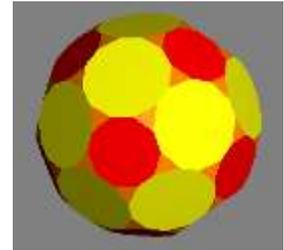
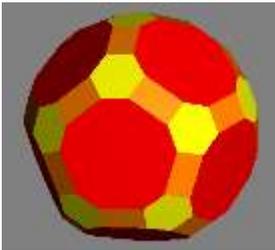
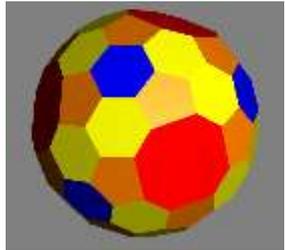
CUBO ROMO



ICOSIDODECAEDRO



ICOSAEDRO TRUNCADO



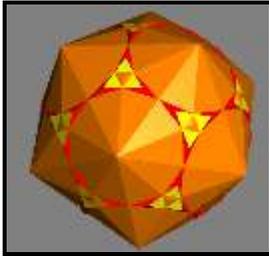
ICOSITETRAEDRO PENTAGONAL



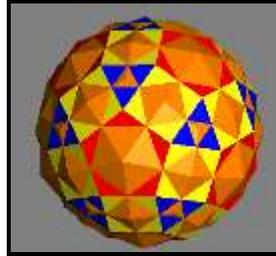
TRIACONTAEDRO RÓMBICO



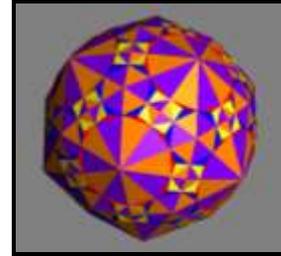
DODECAEDRO PENTAKIS



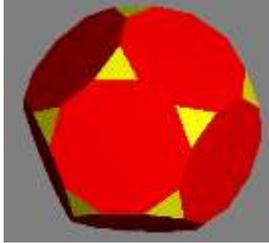
COMBINACIÓN DE DUALES



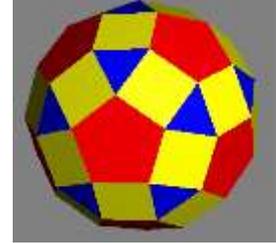
COMBINACIÓN DE DUALES



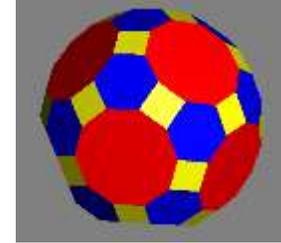
COMBINACIÓN DE DUALES



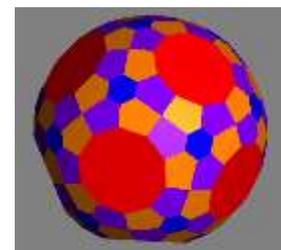
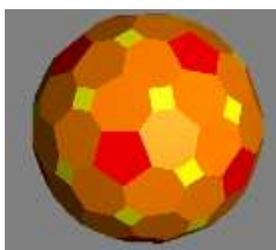
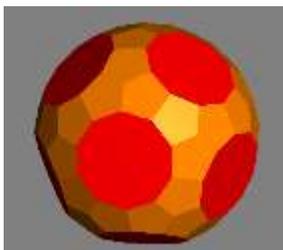
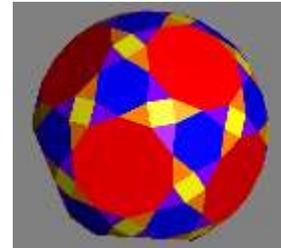
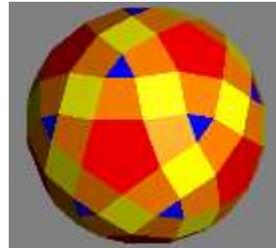
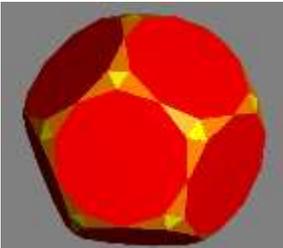
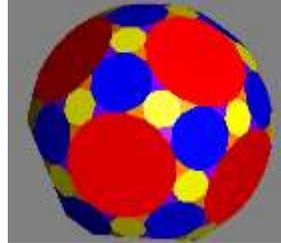
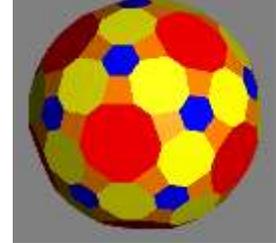
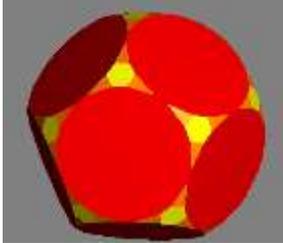
DODECAEDRO TRUNCADO



ROMBICOSIDODECAEDRO



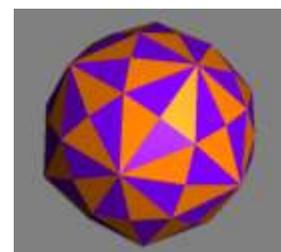
ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO



ICOSAEDRO TRIAKIS



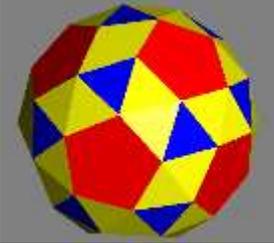
HEXECONTAEDRO DELTOIDAL



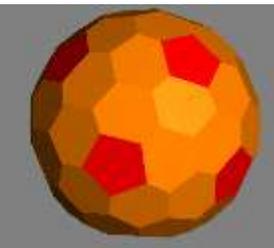
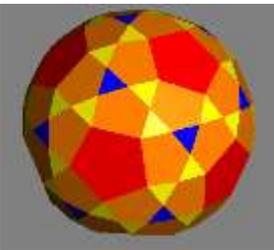
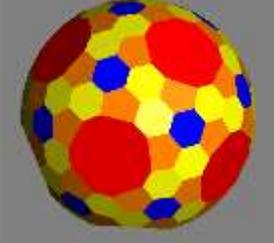
TRIACONTAEDRO DISDAKIS



COMBINACIÓN DE DUALES

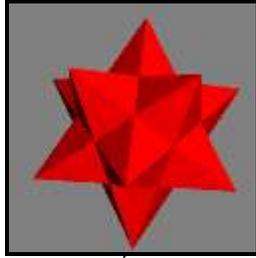


DODECAEDRO ROMO

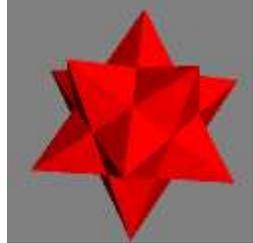


HEXECONTAEDRO PENTAGONAL

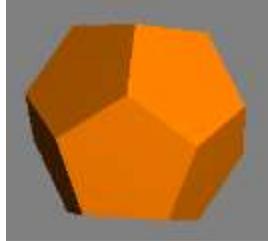
Transformación de sólidos Kepler-Poinsot a duales por medio de truncamiento



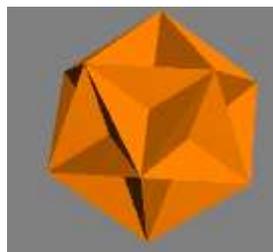
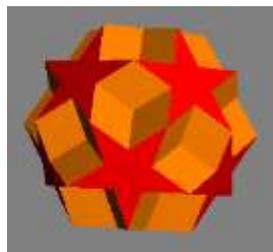
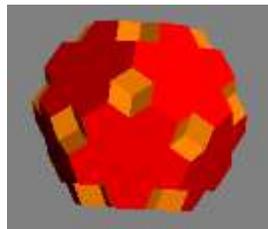
COMBINACIÓN DE DUALES



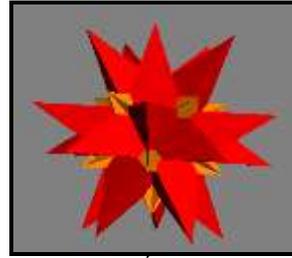
PEQUEÑO DODECAEDRO ESTRELLADO



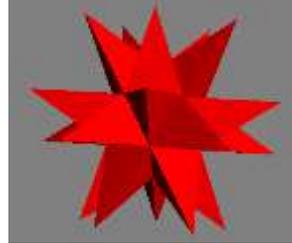
DODECAEDRO



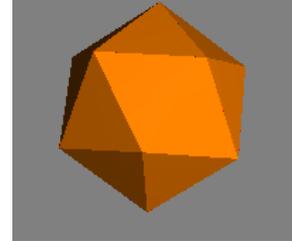
GRAN DODECAEDRO



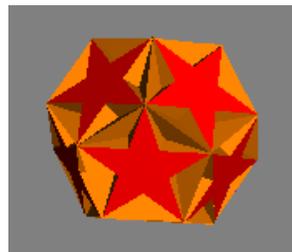
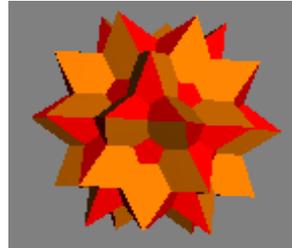
COMBINACIÓN DE DUALES



GRAN DODECAEDRO ESTRELLADO

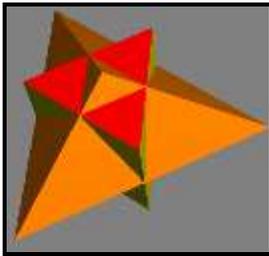


ICOSAEDRO

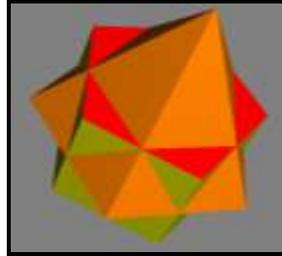


GRAN ICOSAEDRO

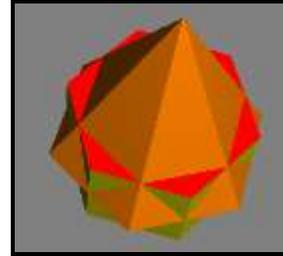
Transformación de prismas a duales por medio de truncamiento



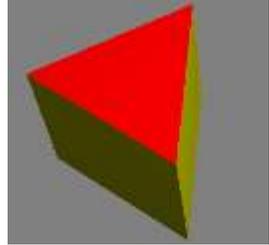
COMBINACIÓN DE DUALES



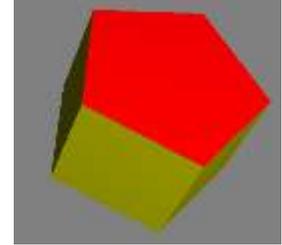
COMBINACIÓN DE DUALES



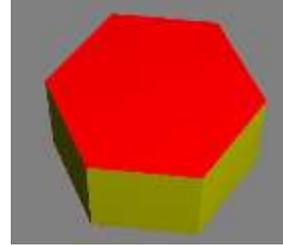
COMBINACIÓN DE DUALES



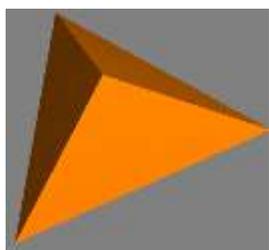
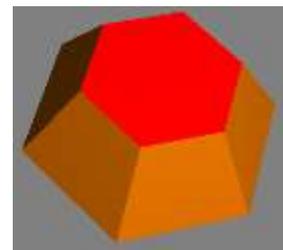
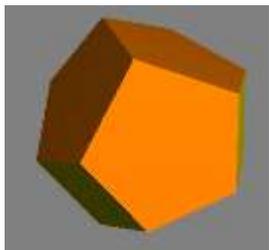
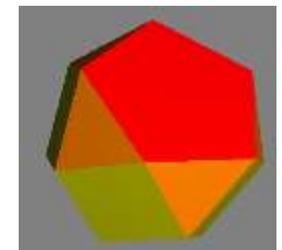
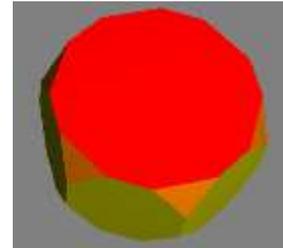
PRISMA TRIANGULAR



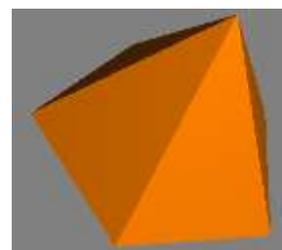
PRISMA PENTAGONAL



PRISMA HEXAGONAL



DIPIRÁMIDE TRIGONAL

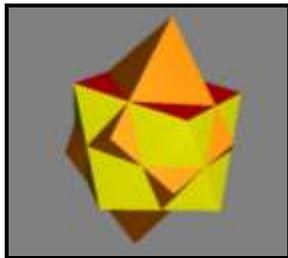


DIPIRÁMIDE PENTAGONAL

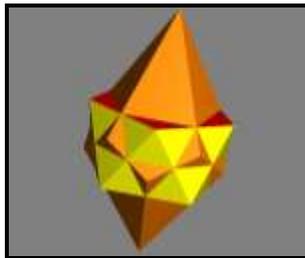


DIPIRÁMIDE HEXAGONAL

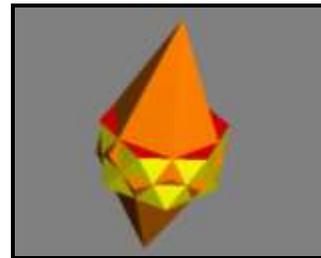
Transformación de antiprismas a duales por medio de truncamiento



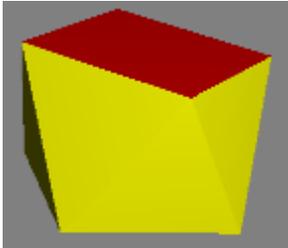
COMBINACIÓN DE DUALES



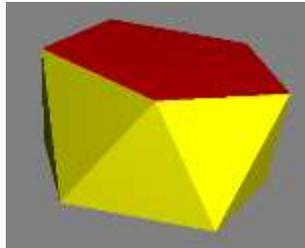
COMBINACIÓN DE DUALES



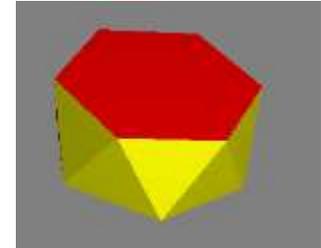
COMBINACIÓN DE DUALES



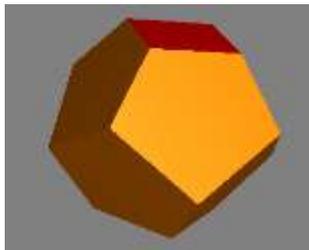
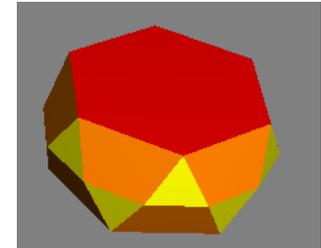
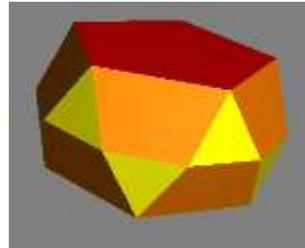
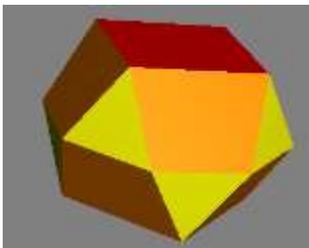
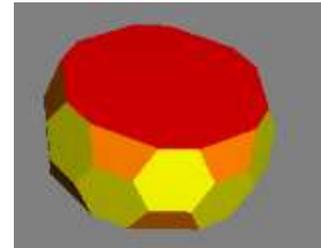
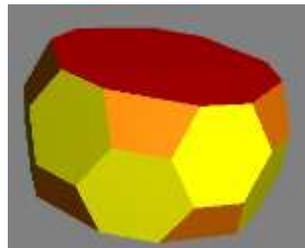
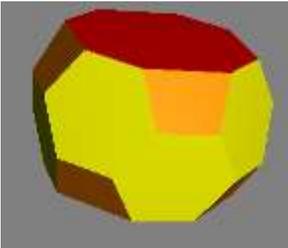
ANTIPRISMA CUADRADO



ANTIPRISMA PENTAGONAL



ANTIPRISMA HEXAGONAL



TRAPEZOEDRO TETRAGONAL



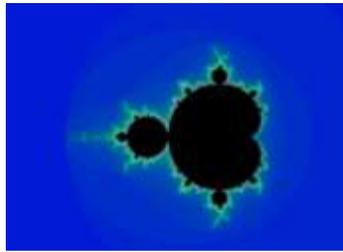
TRAPEZOEDRO PENTAGONAL



TRAPEZOEDRO HEXAGONAL

Imágenes en el perímetro del conjunto de Mandelbrot

Deformación de la imagen principal en cada repetición



Conjunto de Mandelbrot

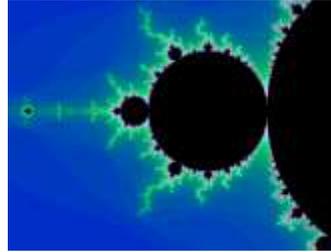


Imagen anterior 2.91 veces más grande

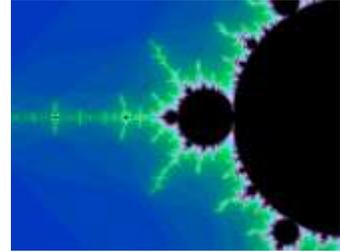


Imagen anterior 2 veces más grande

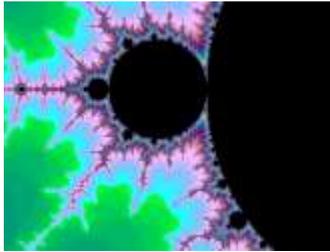


Imagen anterior 8 veces más grande

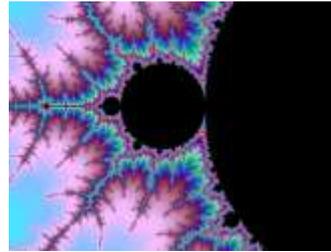


Imagen anterior 4.02 veces más grande

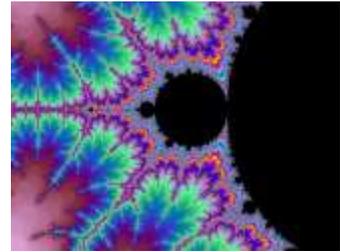


Imagen anterior 4 veces más grande

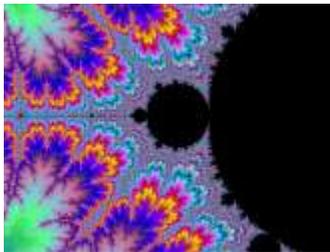


Imagen anterior 4 veces más grande

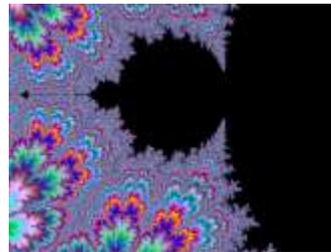


Imagen anterior 8.05 veces más grande

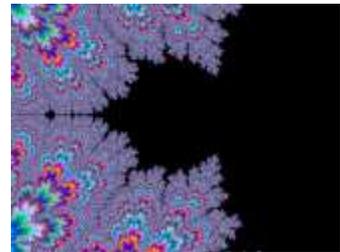
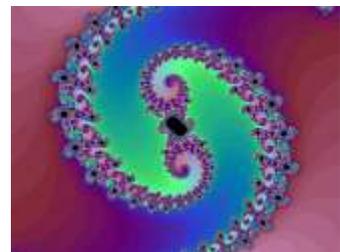
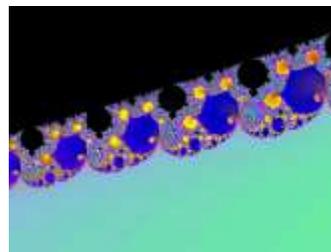
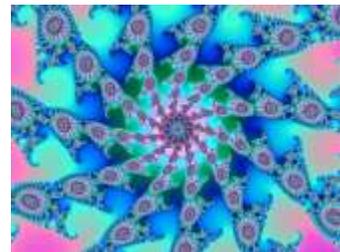
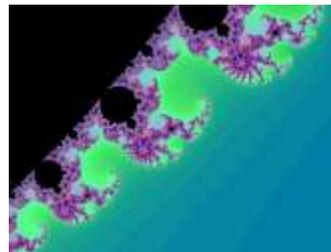
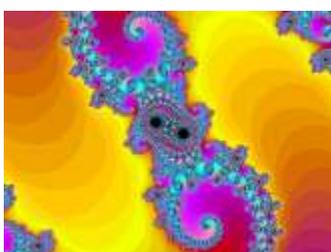
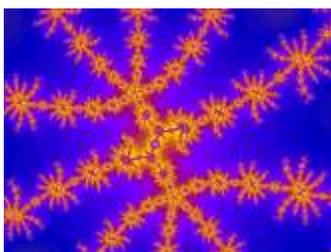
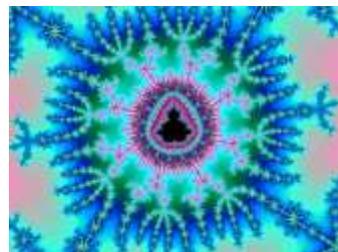
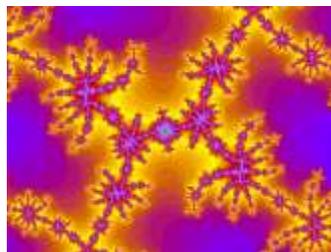
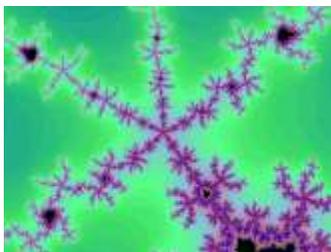
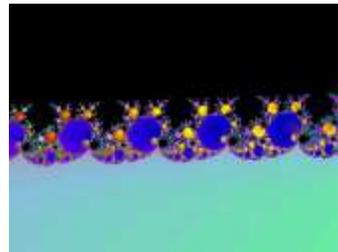
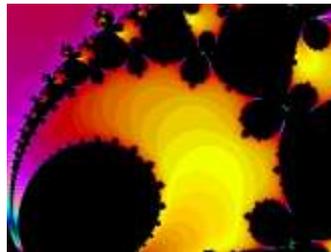
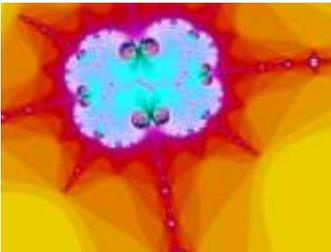
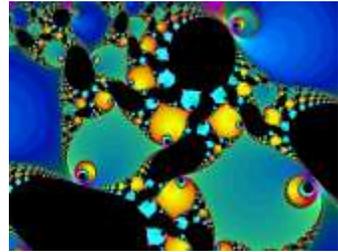
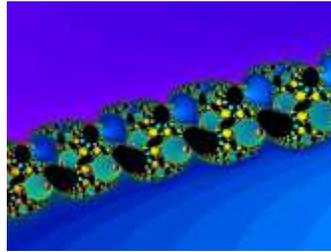
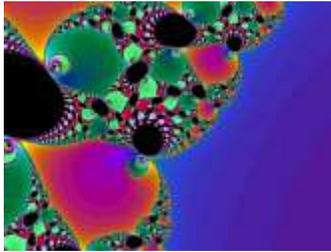
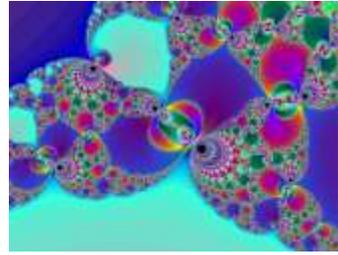
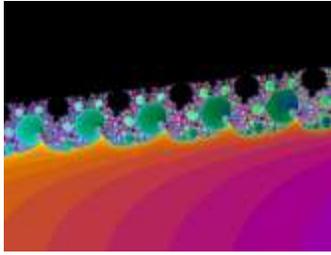
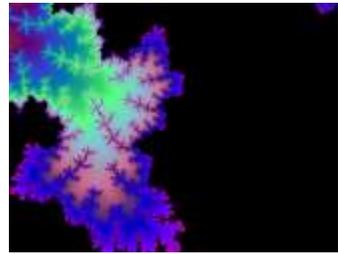
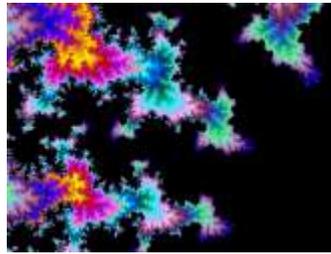
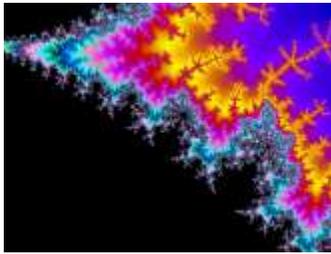
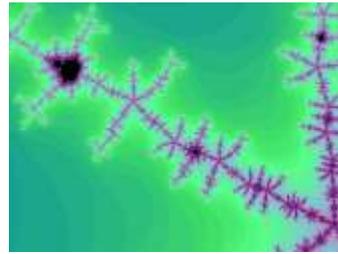
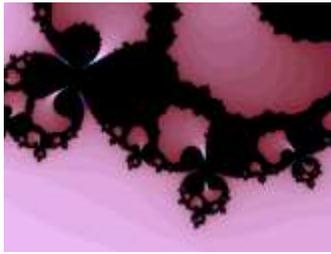
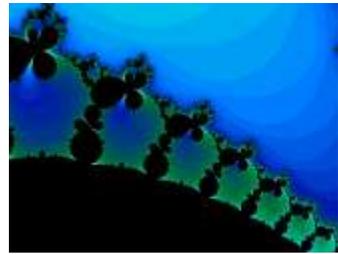
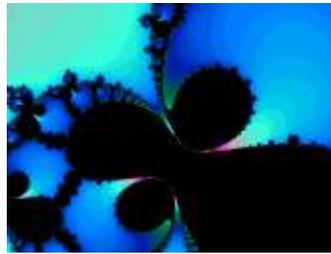
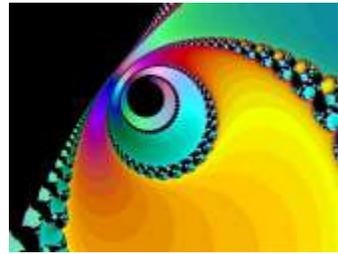
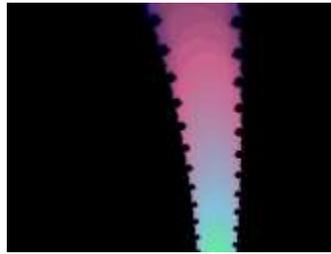
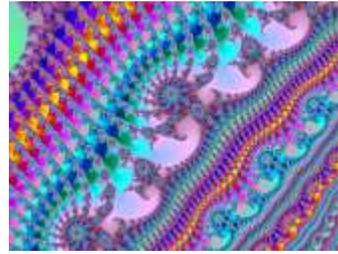
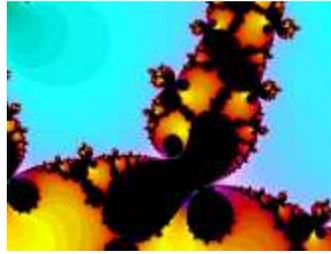
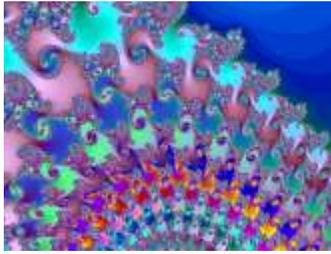
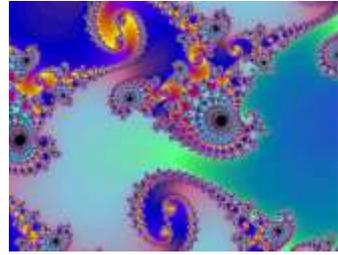
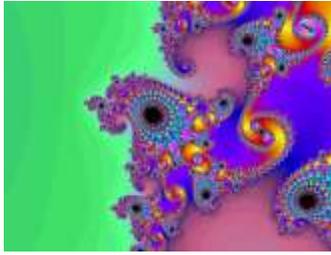


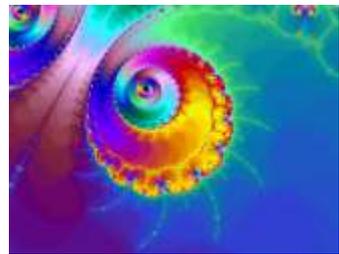
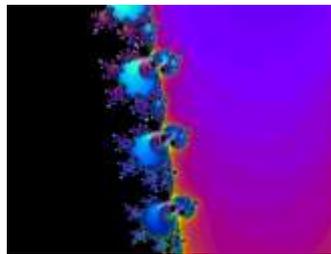
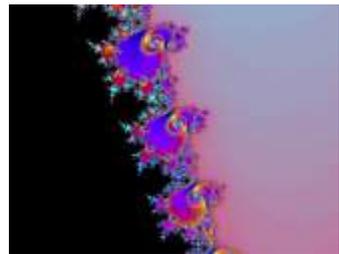
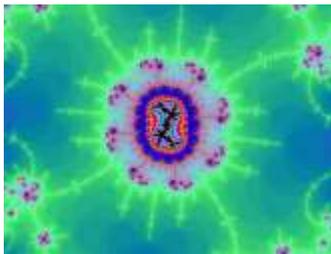
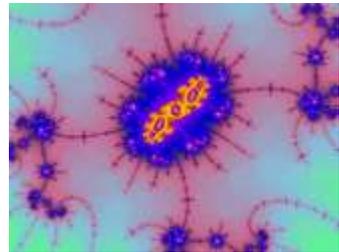
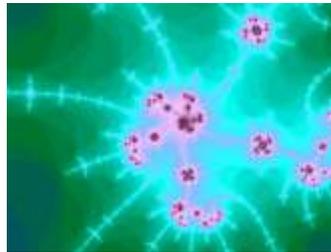
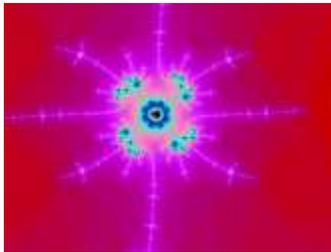
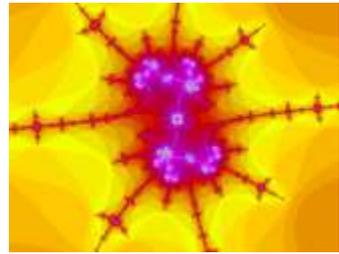
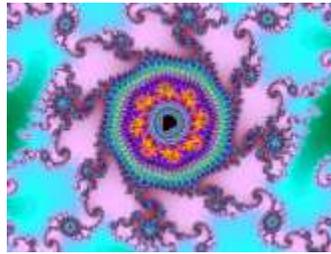
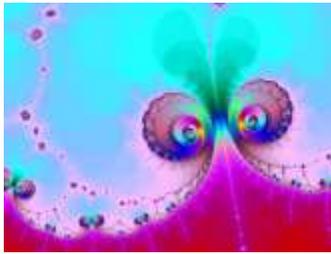
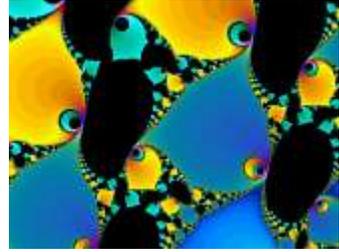
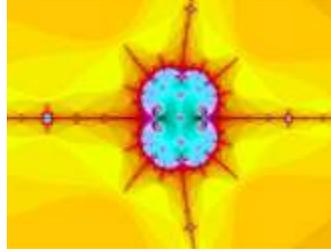
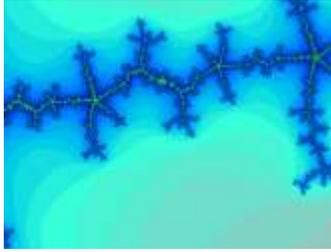
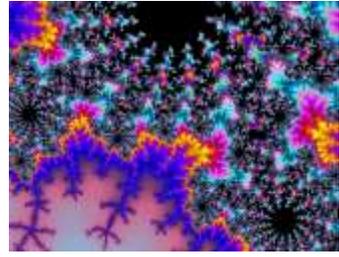
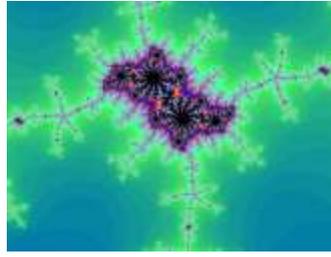
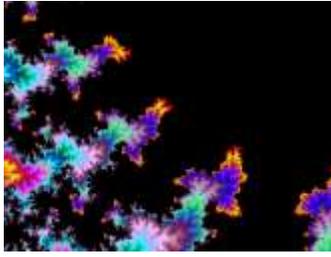
Imagen anterior 4.04 veces más grande

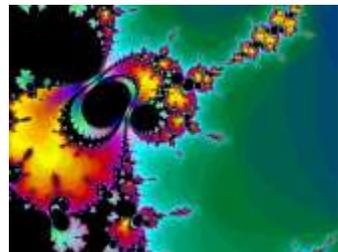
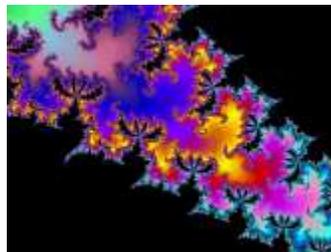
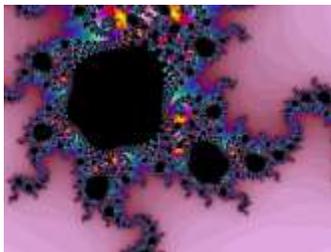
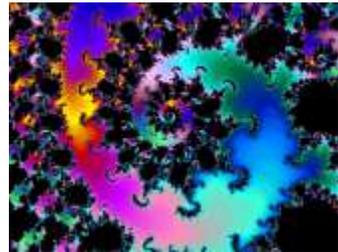
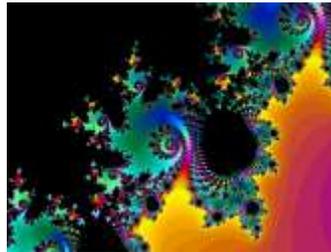
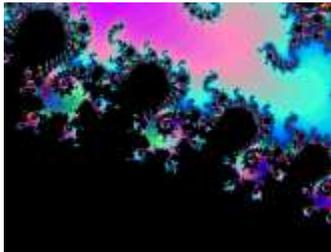
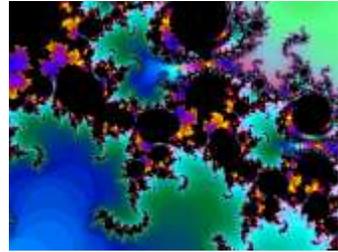
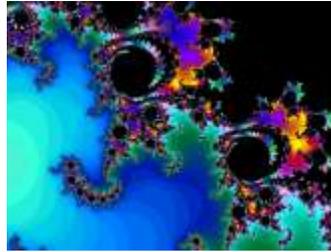
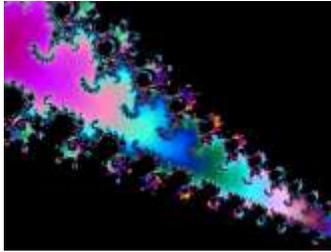
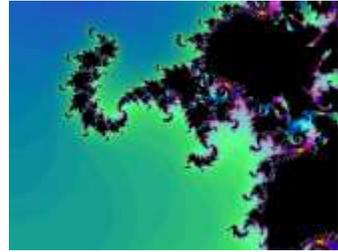
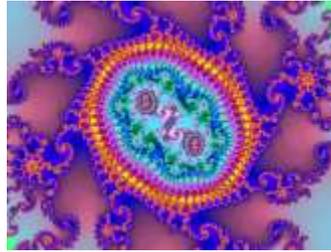
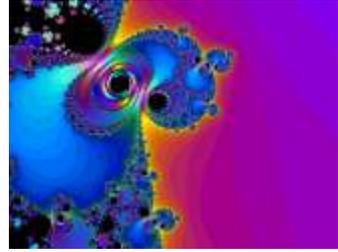
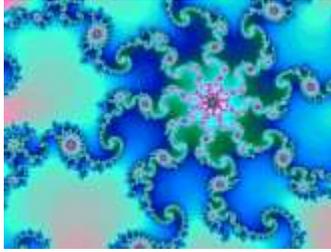
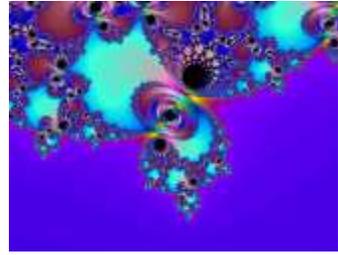
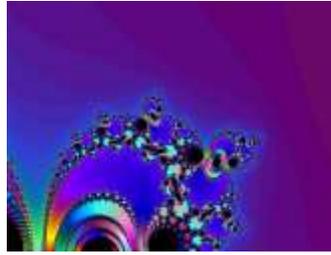
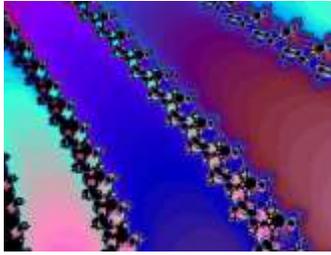
Algunas imágenes dentro del conjunto

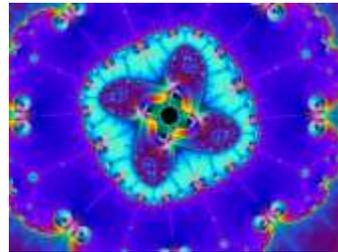
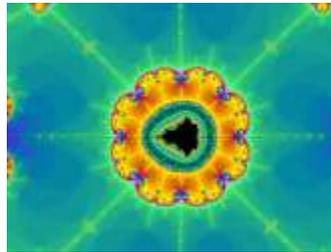
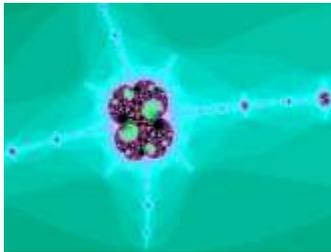
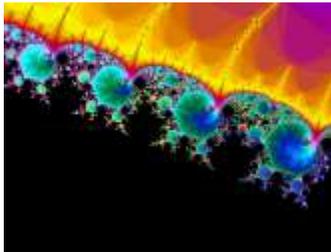
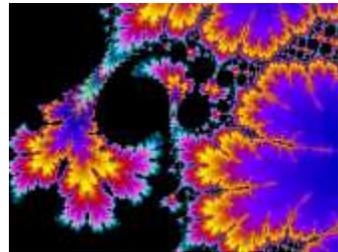
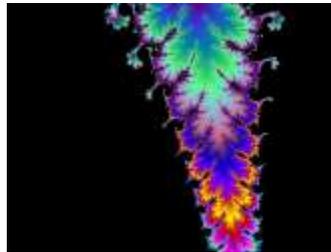
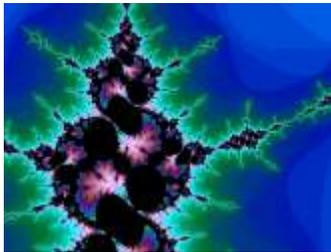
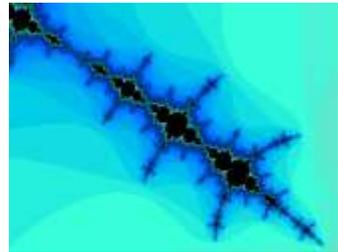
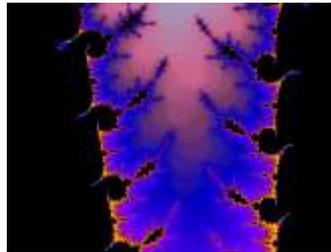
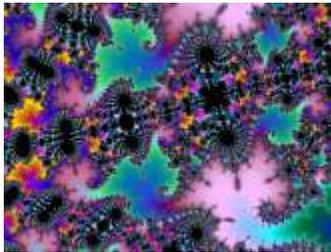
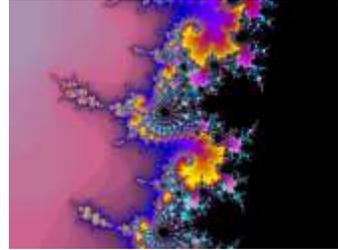
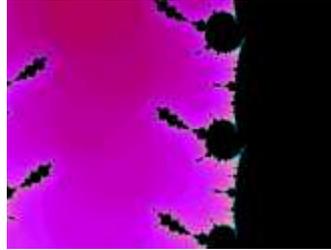
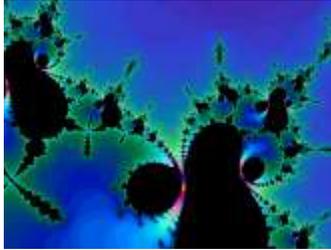
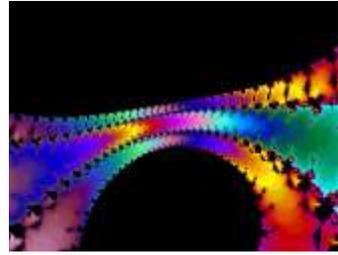
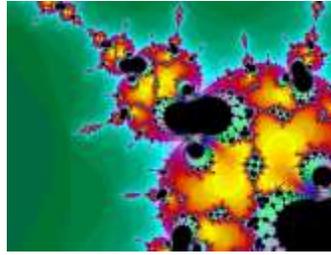
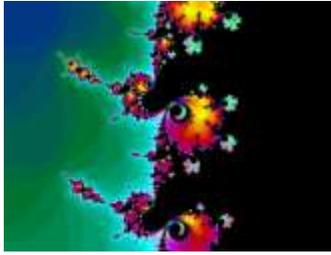


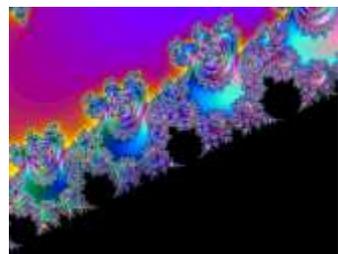
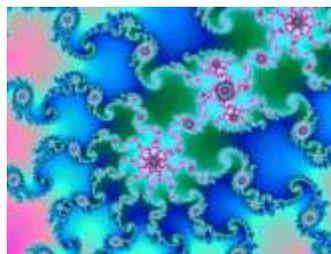
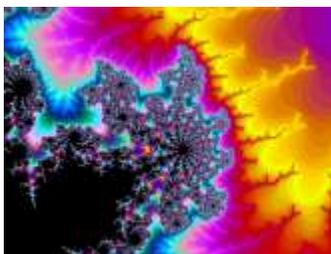
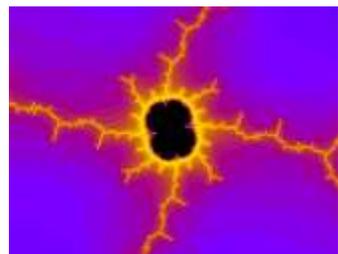
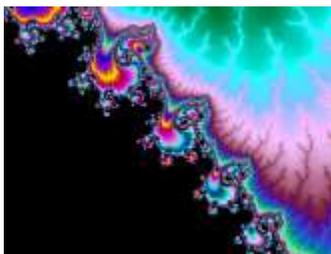
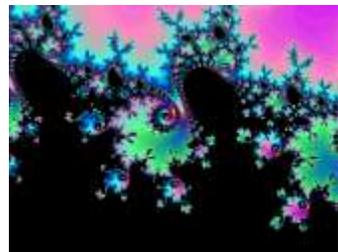
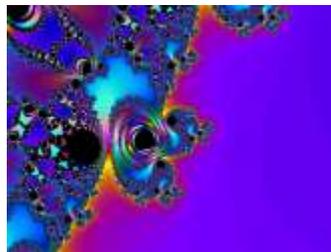
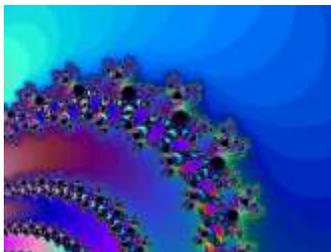
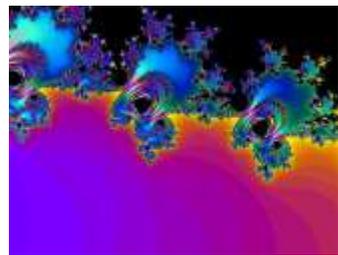
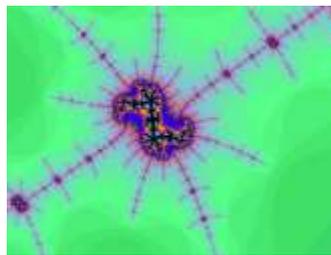
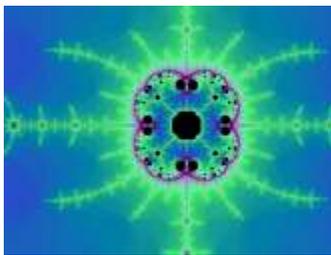
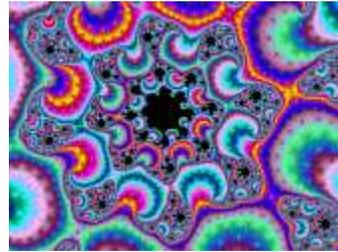
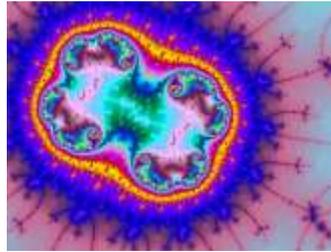
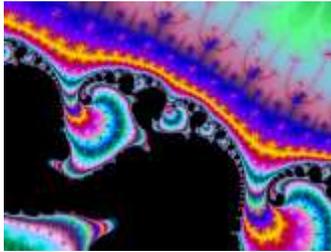
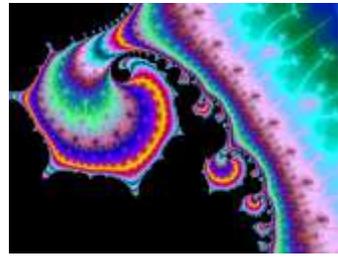
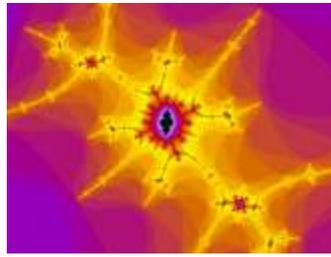
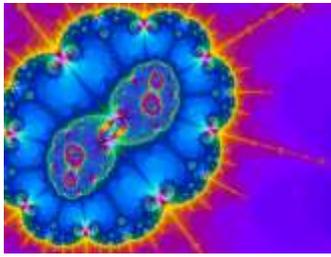


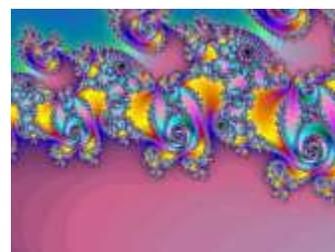
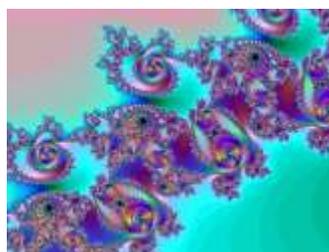
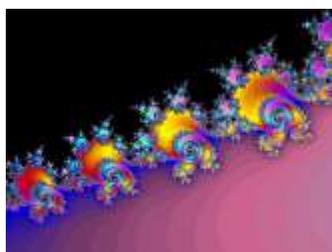
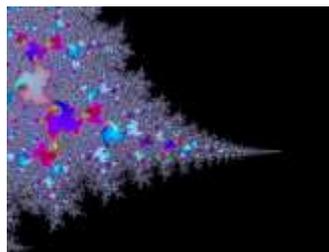
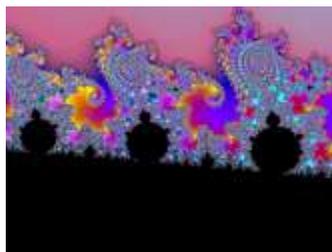
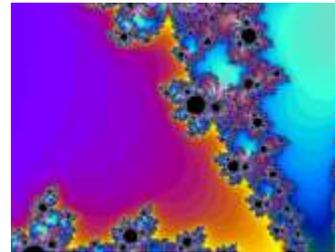
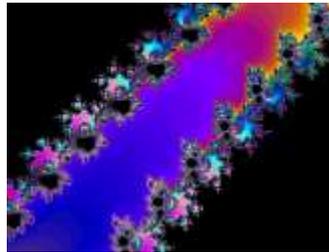
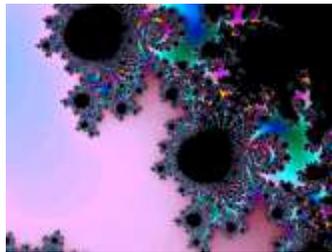
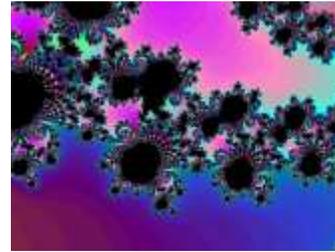
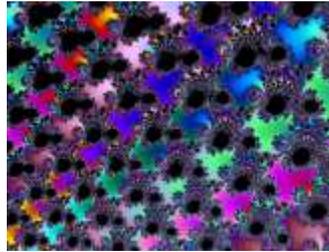
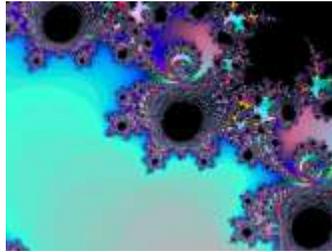
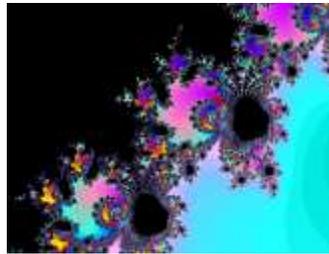
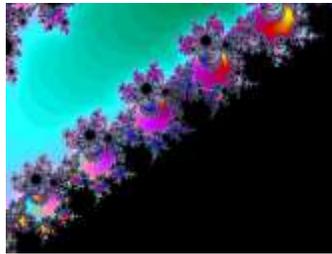


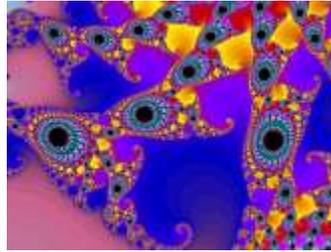
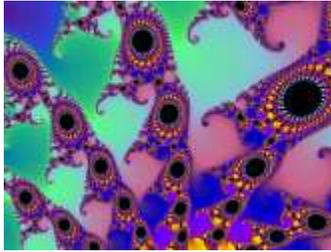
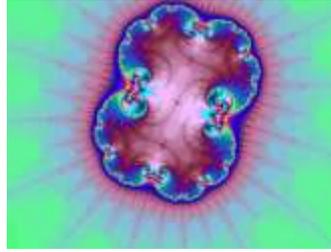
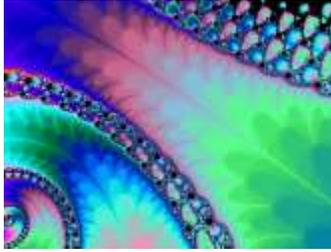
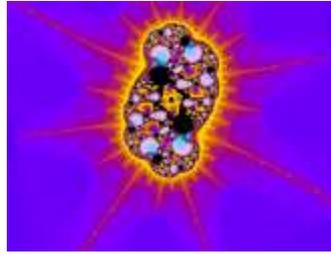
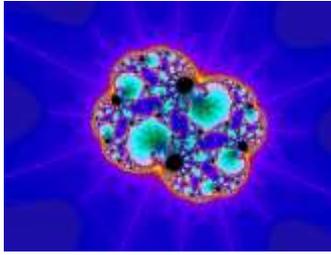












Teorías físicas sobre las dimensiones del espacio

Teoría de Kaluza-Klein

Esta teoría determina que existen tres dimensiones espaciales desplegadas, una cuarta dimensión espacial plegada y una dimensión de tiempo. Theodor Kaluza vio la posibilidad de que el universo tuviera más de tres dimensiones y dedujo que podían ser de dos tipos: desplegadas y plegadas. Esto se relaciona con el caso de una manguera, que tiene una dimensión a lo largo y otra alrededor de su circunferencia. Si se recorre la dimensión alrededor de su circunferencia, se regresa al mismo lugar del cual se partió.

Al considerar una cuarta dimensión espacial plegada en el universo, Kaluza demostró que el libre movimiento en la dimensión plegada (considerando una forma circular debido a simetría) admitía la simetría de medida simple del campo electromagnético. Kaluza unió la teoría general de la relatividad de Einstein y la teoría electromagnética de Maxwell en una sola.

Oskar Klein refinó la teoría y ambos sugirieron que la dimensión circular (plegada) se encuentra en cada punto de las dimensiones desplegadas; pero es tan pequeña que sólo los objetos suficientemente pequeños pueden moverse dentro de ella.

Esta teoría tuvo algunos problemas; al momento de incorporar un electrón a la teoría, ésta predecía relaciones entre su masa y carga que estaban radicalmente fuera de los valores medidos. Al no encontrar modo de solucionar este problema, la mayoría de los científicos abandonó esta teoría.

Teoría de las cuerdas

La teoría de las cuerdas es un modelo de la física fundamental, que utiliza objetos unidimensionales como bloques para construir. Estos bloques se utilizan con el propósito de sustituir a las partículas puntuales de la teoría cuántica. El resultado de esta operación es que la teoría cuántica gravitatoria emerge naturalmente y además parece tener la capacidad de unir las teorías de las fuerzas naturales (gravitacional, electromagnética, nuclear, etc.).

Un problema que no había podido ser resuelto es que la teoría general de la relatividad y la mecánica cuántica, dentro de un esquema de partículas puntuales, dan como resultados de probabilidades infinitas. Sin embargo utilizando la teoría de las cuerdas, este problema desaparece.

Uno de los aspectos más interesantes es que predice el número de dimensiones en el universo. Esto se debe a que el único modo en que las probabilidades en los cálculos matemáticos sean siempre positivas es si se consideran nueve dimensiones (y el tiempo sería la décima). Esto quiere decir que son tres dimensiones espaciales desplegadas, seis dimensiones espaciales plegadas y una dimensión de tiempo. Las seis dimensiones espaciales plegadas, pese a que son demasiado pequeñas, son lo suficientemente grandes como para que las cuerdas quepan dentro de ellas.

Espacios de Calabi-Yau

Los espacios de Calabi Yau son estas seis pequeñas dimensiones plegadas que se encuentran a lo largo de las otras tres dimensiones desplegadas. El tamaño diminuto de estos espacios se deduce porque no ha sido posible visualizarlos, ni siquiera con los equipos más avanzados. Estos espacios tienen efectos indirectos importantes a la física. La masa y carga de partículas son determinadas por las resonancias posibles en sus alrededores espaciales. Los espacios doblados influyen y constriñen la posible resonancia de los patrones vibratorios de las cuerdas. Esto da como resultado que la forma específica de estos espacios esté definida por las fórmulas matemáticas de la teoría de cuerdas. Sus patrones son determinados por geometría extradimensional, que permite verlos como vemos objetos en las tres dimensiones desplegadas.

Cada vez que nos movemos, pasamos por las tres dimensiones desplegadas y por las seis dimensiones plegadas, de las cuales no nos percatamos por su tamaño. No es extraño que las propiedades de estas dimensiones sean diferentes a las tres dimensiones que conocemos. El tiempo es una dimensión lineal que recorremos inevitablemente de pasado a futuro, pero que (a diferencia de las dimensiones desplegadas) nunca permite regresar.

Si hubiera más dimensiones temporales que la que experimentamos, sería necesaria una reestructuración seria de nuestra intuición. Ha habido científicos buscando agregar más dimensiones de tiempo, pero no ha sido posible llegar a algún resultado todavía.

Los espacios Calabi-Yau se conforman a partir de un modelo que describe la geometría del universo de diez dimensiones:

$$M * V.$$

donde,

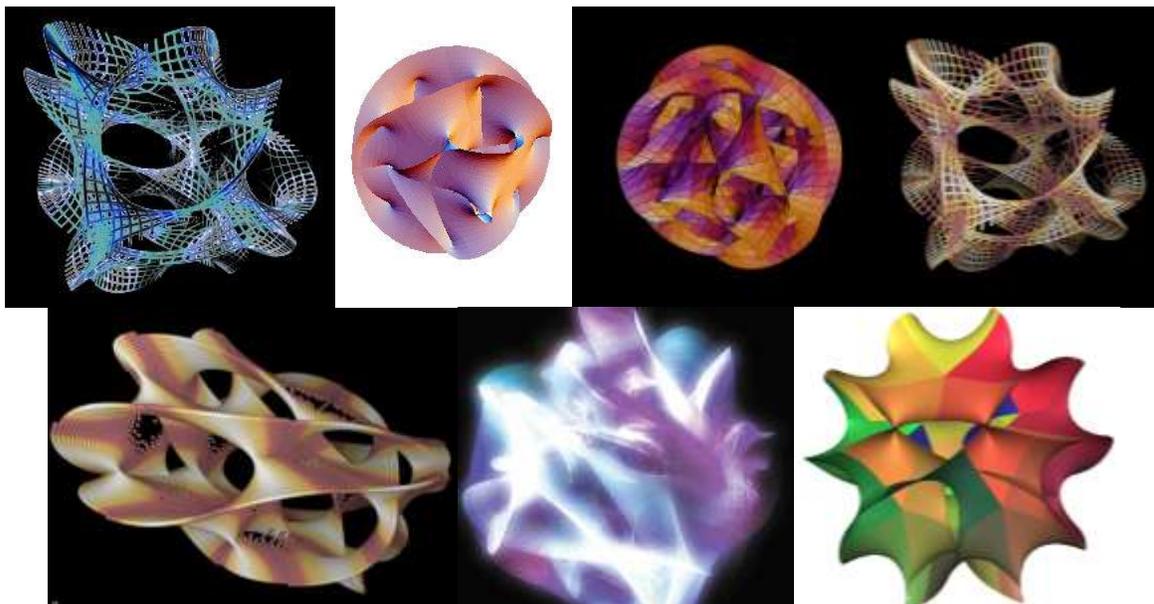
M = variedad de cuatro dimensiones (espacio-tiempo)

V = compacto de seis dimensiones

Su aplicación principal es en la física teórica, aunque también se utiliza en matemáticas y en la geometría algebraica. Se les llama también variedades de Calabi-Yau, dependiendo de su aplicación específica.

En las matemáticas, una variedad de Calabi-Yau, es una variedad de Kähler compacta con su primera clase de Chern nula. Eugenio Calabi en 1957 demostró que estas variedades tienen una métrica Ricci-plana en cada clase de Kähler. Esto fue probado por Shing-Tung Yau en 1977; de lo cual surgió el Teorema de Yau. En la teoría de las supercuerdas (que busca explicar todas las partículas y fuerzas de la naturaleza en una teoría modelándolas como vibraciones de pequeñas cuerdas supersimétricas) las variedades de Calabi-Yau conjeturan diez dimensiones de las cuatro que conocemos, llevando una clase de fibrado de dimensión seis.

Estas son algunas representaciones de espacios Calabi-Yau:



Espacios Calabi-Yau distribuidos en tres dimensiones desplegadas

Relación de imágenes, fotografías y planos

pp.14-15 - Gráficas de funciones trigonométricas euclidianas

Academia Ciencias Galilei. *Gráficas de funciones*. Recuperado en Sep 10, 2006 de:
<http://www.acienciasgalilei.com/mat/fun-gra-hm/graf-trigono1.htm>

p. 17 – Imágenes de sección cónica

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando 3D Viz.

p. 18 – Planos cartesianos con recta y círculo

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 19 – Plano cartesiano con parábola

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 20 – Planos cartesianos con elipse e hipérbola

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 21-24 – Imágenes de elipsioide, parabolioide elíptico, parabolioide hiperbólico, hiperboloide de una y dos hojas, superficie cónica, cilindro elíptico, cilindro hiperbólico y cilindro parabólico

Wikipedia. *Quadratic surface*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en Nov 16, 2006 de:
http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_surface

p.27 – Perspectivas de cubo con vista frontal

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 27 – Imagen de planos homólogos

Bermejo Herrero, Miguel. (1999). *Geometría descriptiva aplicada*. (p. 65). Alfa Omega Grupo Editor. Madrid.

p. 28 – Imagen de triángulo esférico

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Spherical Triangle*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 18, 2006 de:
<http://mathworld.wolfram.com/SphericalTriangle.html>

p. 29 – Pentágono de Napier

Wikipedia. *Spherical trigonometry*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en Nov 5, 2006 de:
http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_trigonometry

p. 31 – Arriba: **Imágenes de líneas hiperparalelas, disco de Poincaré y triángulos hiperbólicos**

Wikipedia. *Hyperbolic geometry*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en Oct. 28, 2006 de:

http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry

p. 31 – Abajo: **Imágenes de triángulos hiperbólicos**

Wikipedia. *Poincaré disk model*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en Nov 26, 2006 de:

http://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_disc_model

p. 32 – **Gráficas de funciones trigonométricas hiperbólicas**

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Hyperbolic functions*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 28, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html>

p. 34 - **Siete puentes de Königsberg**

Wikipedia. *Topology*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en Nov 28, 2006 de:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Topology>

p. 35 – **Nudo trivial, nudo equivalente y anillos borromeos**

Wikipedia. *Knot theory*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en Nov 27, 2006 de:

http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory

p. 37 – **Curva de Koch**

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p.38 – **Cadena montañosa**

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 39 – **Tablas 1 y 2 de Conjuntos de Julia**

Talaquer, Vicente. (2002). *Fractus, fracta fractal, fractales, de laberintos y espejos*. (p. 35-36). Fondo de Cultura Económica. México.

p.40 – **Conjunto de Mandelbrot**

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando Fractal Extreme.

p. 40 – **Polvo de Cantor**

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 42 - **Gráfica de los valores que se obtienen con referencia a la población como función del parámetro q y que muestra dos tipos de regímenes: el periódico (estable) y el caótico.**

Braun, Eliezer. (2005). *Caos, fractales y cosas raras*. (p. 52). Fondo de Cultura Económica. México.

p. 43 – Gráfica de sistema complejo

Braun, Eliezer. (2005). *Caos, fractales y cosas raras*. (p. 119). Fondo de Cultura Económica. México.

pp. 48-50 – Imágenes de cilindro, esfera, cono, pirámide y prisma

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando Rhinoceros.

pp. 50-51 – Imágenes de antiprismas

Wikipedia. *Antiprism*. Wikipedia Foundation Inc. Recuperado en

Nov 14, 2006 de:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism>

pp. 52-53 – Imágenes de deltaedros

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Deltahedron*. Wolfram Research Inc. Recuperado en

Nov 14, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/Deltahedron.html>

p. 54 – Imágenes de sólidos platónicos

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Platonic Solid*. Wolfram Research Inc. Recuperado en

Oct 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html>

pp. 56-57 – Imágenes de sólidos de arquímedes

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Archimedean Solid*. Wolfram Research Inc. Recuperado

en Nov 22, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html>

p. 58 – Imagen de cubo romo e icositetraedro pentagonal

Hart, George W. (1996). *Archimedean duals*. Virtual Polyhedra. Recuperado en

Nov 23, 2006 de:

<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/archimedean-duals-info.html>

pp. 58-60 – Imágenes de dualidad entre sólidos de Catalán y sólidos de Arquímedes

Webb, Robert. (2001-2007). *Archimedean Solids and Catalan Solids*. Stella Polyhedron

Navigator. Recuperado en Nov 15, 2006 de:

<http://web.aanet.com.au/robertw/Archimedean.html>

p. 61 – Imágenes de duales de sólidos platónicos

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Dual Polyhedron*. Wolfram Research Inc. Recuperado

en Nov 15, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/DualPolyhedron.html>

pp. 62-63 – Imágenes de sólidos de Catalán

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Catalan Solid*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 16, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/CatalanSolid.html>

pp. 64-65 – Imágenes de sólidos Kepler-Poinsot

Webb, Robert. (2001-2007). *Kepler-Poinsot Solids*. Stella Polyhedron Navigator. Recuperado en Nov 13, 2006 de:

<http://web.aanet.com.au/robertw/Kepler.html>

pp. 66-76 – Imágenes de sólidos de Johnson

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Johnson Solid*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 13, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>

p. 78 – Imágenes de rotores

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Rotor*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 5, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/Rotor.html>

p. 78 – Imágenes de cicloides

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Cycloid*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 5, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>

p. 79 – Imágenes de hipocicloides

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Hypocycloid*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 5, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html>

p. 80 – Imágenes de epicloides

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Epicycloid*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 5, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/Epicycloid.html>

p. 81 – arriba: Imagen de espiral hiperbólica

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Hyperbolic Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicSpiral.html>

p. 81 – centro: Imagen de espiral logarítmico

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Logarithmic Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>

p. 81 – abajo: Imagen de espiral de Cortés

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Cortes' Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/CotesSpiral.html>

p. 82 – arriba: Imagen de evolución de espiral logarítmico

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Logarithmic Spiral Evolute*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiralEvolute.html>

p. 82 – abajo: Imagen de espiral de Nielsen

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Nielsen's Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/NielsensSpiral.html>

p. 83 – arriba: Imagen de espiral de Fermat

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Fermat's Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/FermatsSpiral.html>

p. 83 – centro: Imagen de espiral de sinusoidal

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Sinusoidal Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/SinusoidalSpiral.html>

pp. 83-84 – Imagen de espiral de Euler

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Cornu Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/CornuSpiral.html>

p. 84 – abajo: Imagen de espiral de Fraser

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Frasers' Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/FrasersSpiral.html>

p. 85 – arriba: Imagen de espiral prima

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Prime Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/PrimeSpiral.html>

p. 85 – abajo: Imagen de espiral racional

Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Rational Spiral*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Nov 8, 2006 de:

<http://mathworld.wolfram.com/RationalSpiral.html>

pp. 86-92 – **Imágenes de cinta de Möbius, superficie de Boy, bonete cruzado, superficie romana, botella de Klein, paragues de Whitney, toro de revolución elíptico, pseudoesfera, tractrix, superficie de Dini, helicoides y hélice**

The Geometry Center. (1995). *The Topological Zoo*. University of Minnesota. Recuperado en Oct. 25, 2006 de:

<http://www.geom.uiuc.edu/zoo/>

p. 92 – abajo: **Imágenes de superficie de Möbius**

Ferreó, Robert. (2005). *Möbius Surface*. Encyclopédie des formes mathématiques remarquables. Recuperado en Oct. 25, 2006 en:

<http://www.mathcurve.com/surfaces/mobiussurface/mobiussurface.shtml>

pp. 93-95 – **Imágenes de superficies mínimas**

Virtual Math Museum. (2004-2006). *Minimal Surfaces*. The National Science Foundation. Recuperado en Nov 20, 2006 de:

http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_m.html

p. 96 – **Imagen de toro**

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando Rhinoceros.

p. 96 – **Imágenes de catenoide y catenaria**

The Geometry Center. (1995). *The Catenoid*. University of Minnesota. Recuperado en Oct. 25, 2006 de:

<http://www.geom.uiuc.edu/zoo/diffgeom/surfspace/catenoid/welcome.html>

p. 98 – **Fotografía del museo de arte Kimbell**

Rosa, Joseph. (2006). *Louis I. Kahn*. (p. 80). Taschen GmbH. Alemania.

p. 99 – izq.: **Fotografía de la entrada del jardín del museo de Arte Kimbell**

Rosa, Joseph. (2006). *Louis I. Kahn*. (p. 78). Taschen GmbH. Alemania.

p. 99 – der.: **Corte de bóveda de museo de arte Kimbell**

Yoshio, Yoshida. (1983). *Louis Kahn Conception and Meaning*. (p. 138). Architecture and Urbanism. Tokio.

p. 100 – **Losas sinuosas (Candela)**

Ruiz Coronado, Carlos. (1997-1999). *Estructuras de Candela*. Geocities. Recuperado en Mar. 16, 2007 de:

<http://geocities.com/SoHo/Gallery/1608/fl.html>

p. 101 – izq.: **Fotografía de casa Rotonda**

Internetowy Serwis Architektoniczny. *Mario Botta: Casa Rotonda*. Ronet. Recuperado en Oct. 9, 2004 de:

<http://www.ronet.pl/archi/botta/003.htm>

p. 101 – der.: **Fotografía de casa Rotonda**

Ambiances Architecturales et Urbaines. *Casa Rotonda*. Cerma. Recuperado en Oct. 9, 2004 de:

<http://www.cerma.archi.fr/content/acontent/221dispositifs.htm>

P: 101 – 3 imágenes centro: **Imágenes de casa Rotonda**

Cho, Peter. *Casa Rotonda*. MIT Media Laboratory Aesthetic and Computation Group. Recuperado en Oct. 9, 2004 de:

<http://acg.media.mit.edu/people/pcho/portfolio/casa2.html>

p. 102 – arriba: **Planos y fotografía de Pabellón IBM Iterante**

Puente, Moisés. (2000). *Pabellones de exposición*. (pp. 172-173). Gustavo Gili. Barcelona.

p.102 – abajo: **Fotografía y plano de espacio de meditación, UNESCO**

Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. (pp. 158,160). Taschen GmbH. Italy.

p. 103 – **Fotografía e isometría de Menara Mesiniaga**

Álvarez, Ariadna. (2001). *Rascacielos*. (pp. 385-386). Atrium Internacional de México. México.

p. 103 – **Planos de Menara Mesiniaga**

Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (p. 215). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

p. 104 – arriba: **Isometría y fotografía de la Jacaranda**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 128). Atrium Internacional de México. España

p. 104 – centro y abajo: **Imágenes del museo de historia regional**

Burian, Edward R., Adrià, Miquel, Ricalde G., Humberto, Landa Vértiz Agustín, Landa Ruiloba, Pablo. (2006). *Landa García Landa Arquitectos*. (pp. 296-297). Arquine + RM. Mexico.

p. 105 – arriba: **isometría y fotografía de conos**

Ruiz Coronado, Carlos. (1997-1999). *Estructuras de Candela*. Geocities. Recuperado en Mar. 16, 2007 de:

<http://www.geocities.com/SoHo/Gallery/1608/conos.html>

p. 105 – abajo: **Fotografía y plano de Le Grand Louvre**

Jodidio, Philip. (1994). *Contemporary American Architects*. (pp. 132, 135). Benedikt Taschen GmbH. Köln.

p. 106 – arriba: **Imágenes de Torre del Banco de China**

SkyscraperPage. *Bank of China Tower*. Recuperado en Mar. 5, 2007 de:

<http://skyscraperpage.com/diagrams/?b13>

- p. 106 – Abajo: **Fotografía e isometrías de residencia y estudio Gwathmey**
Olsen Richard. (2000). *Gwathmey Siegel: buildings and projects 1965-2000*. (pp. 18-19). Universe Publishing. Italy.
- p. 107 – arriba: **Fotografía e isometrías de casa Riva San Vitale**
Jodidio, Philip. (1999). *Mario Botta*. (pp. 42,45). Taschen. España.
- p. 107 – abajo: **Imágenes de casa Riva San Vitale**
Clark, Roger H. y Pause, Michael. (1997). *Arquitectura: temas de composición*. (p. 37). Segunda Edición. Ediciones G. Gili. México.
- p. 108 – **Fotografía de escaleras de casa Riva San Vitale**
Tecfa. *La "Casa Bianchi"*. Education and Technologies. Recuperado en Oct. 9, 2004 de:
<http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/UVLibre/0001/bin08/casabianchi.htm>
- p. 109 – **Plano y fotografías de mediateca**
Internetowy Serwis Architektoniczny. *Mario Botta: Mediateca*. Ronet. Recuperado en Oct. 9, 2004 de:
<http://www.ronet.pl/archi/botta/011.htm>
- p. 110 – **Fotografías de Sede del Corporativo Jiushi**
Álvarez, Ariadna. (2001). *Rascacielos*. (pp. 315, 318). Atrium Internacional de México. México.
- p. 111 – **Análisis de geometría de Sede del Corporativo Jiushi**
Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.
- p. 112 – **Fotografía y planos de Allianz Arena**
Ivy, Robert. (2006). *Allianz Arena, Munich, Germany: Herzog & De Meuron's Cushiony Chameleon Glows with Rival Teams' Colors*. Architectural Record. (06). pp. 238, 242.
- p. 114 – **Fotografía e isometría de casa III**
Gössel, Peter, Leuthäuser, Gabriele. (2001). *Arquitectura del siglo XX*. (287). Taschen GmbH. Slovenia.
- p. 115 – arriba: **Planos de casa III**
Archweb. (2004-2006). *Peter Eisenman - House III 2D Miller House*. Recuperado en Feb. 10, 2007 de:
http://www.archweb.it/dwg/arch_arredi_famosi/Peter_Eisenman/House_III_2d.htm
- p. 115 – abajo: **Imágenes de triangulación de sólidos platónicos**
Wolfram Mathworld. (1999-2007). *Geodesic Dome*. Wolfram Research Inc. Recuperado en Mar. 22, 2007 de:
<http://mathworld.wolfram.com/GeodesicDome.html>

- p. 116 – **Imágenes y fotografía de grupos apretados de esferas**
Mc Hale, John. R. (1962). *Buckminster Fuller*. (pp. 34-35). Editorial Hermes. Nueva York.
- p. 117 – arriba: **Imágenes de Pabellón de Estados Unidos para la Exposición Universal en Montreal de 1967**
Official Site of Buckminster Fuller Institute. *U.S. Pavilion in Montreal Expo 1967*. Buckminster Fuller Institute. Recuperado en Mar. 22, 2007 de:
<http://bfi.org/>
- p. 117 – centro: **Fotografías de Pabellón de Estados Unidos para la Exposición Universal en Montreal de 1967**
Puente, Moisés. (2000). *Pabellones de exposición*. (pp. 160, 162). Gustavo Gili. Barcelona.
- p. 117 – Abajo: **Imágenes de ojo de mosca**
Official Site of Buckminster Fuller Institute. *Fly's Eye*. Buckminster Fuller Institute. Recuperado en Mar. 22, 2007 de:
<http://bfi.org/>
- p. 118 – arriba: **Fotografía de ojo de mosca**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*. (p. 91). Thames & Hudson. United Kingdom.
- p. 118 – abajo: **Fotografía de casa autónoma**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*. (p. 90). Thames & Hudson. United Kingdom.
- p. 119 – arriba: **Fotografía de Edificio Rotonda Ford**
Mc Hale, John. R. (1962). *Buckminster Fuller*. (p. 62). Editorial Hermes. Nueva York.
- p. 119 – abajo: **Fotografía de estructura geodésica con forma de huevera múltiple**
Mc Hale, John. R. (1962). *Buckminster Fuller*. (p. 52). Editorial Hermes. Nueva York.
- p. 120 – arriba: **Fotografía de Radome de plástico**
Mc Hale, John. R. (1962). *Buckminster Fuller*. (p. 72). Editorial Hermes. Nueva York.
- p. 120 – abajo: **Fotografía de Pabellón de los Estados Unidos en la Feria Mundial de Kabul**
Mc Hale, John. R. (1962). *Buckminster Fuller*. (p. 74). Editorial Hermes. Nueva York.
- p. 121 – arriba: **Fotografías de el doblamiento de los marcos espaciales**
Tzonis, Alexander. (1999). *Santiago Calatrava The Poetics of Movement*. (p. 24-25). Thames & Hudson. United Kingdom.
- p. 121 – abajo: **Imagen de bóvedas funiculares**
Ruiz Coronado, Carlos. (1997-1999). *Estructuras de Candela*. Geocities. Recuperado en Mar. 16, 2007 de:
<http://www.geocities.com/SoHo/Gallery/1608/imagen.html>

p. 122 – **Fotografías de puente Trinity**

Jodidio, Philip. (1998). *Santiago Calatrava*. (pp. 148-151). Taschen GmbH. Spain.

p. 123 – arriba: **Planos del Centro Gallego**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 72). Atrium Internacional de México. España

p. 123 – abajo: **Imágenes de ciudad en Antártida**

Sitio oficial de Frei Otto. *Pneumatic structures*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007 de:

<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>

p. 124 – **Imágenes de jardín botánico de Gales**

Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*. (pp. 216-219). Thames & Hudson. United Kingdom.

p. 125-126 – **Estudios de geometría de jardín botánico de Gales**

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 127 – **Planos de Bolsa de Valores**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 157). Atrium Internacional de México. España

p. 128 – arriba: **Análisis geométrico de Iglesia de Nuestra Señora del Buen Consejo**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 68). Atrium Internacional de México. España

p. 128 – abajo: **Fotografía y plano de planta de embotellamiento Bacardí y Compañía**

Tonda, Juan Antonio. (2000). *Félix Candela*. (pp. 48-49). Consejo Nacional para la Cultura y las Artes. México.

p. 129 – arriba: **Pabellón de Rayos Cósmicos**

Tonda, Juan Antonio. (2000). *Félix Candela*. (pp. 37-38). Consejo Nacional para la Cultura y las Artes. México.

p. 129 – abajo: **Planos de “La Jacaranda”**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 92). Atrium Internacional de México. España

p. 130 – **Fotografía y planos de “Los Manantiales”**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (pp. 115-117). Atrium Internacional de México. España

p. 131 – arriba: **Planos de capilla de Nuestra señora de la Soledad**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (pp. 162-163). Atrium Internacional de México. España

p. 131 – abajo: **Planos de sinagoga en Guatemala**

Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (pp. 164-165). Atrium Internacional de México. España

- p. 132 – centro: **Planos de “paraguas” y algunas variaciones**
Tonda, Juan Antonio. (2000). *Félix Candela*. (pp. 34-37). Consejo Nacional para la Cultura y las Artes. México.
- p. 132 – abajo: **Fotografía e isometría de Iglesia de la Virgen de la Medalla Milagrosa**
Tonda, Juan Antonio. (2000). *Félix Candela*. (pp. 39-40). Consejo Nacional para la Cultura y las Artes. México.
- p. 133 – arriba: **Fotografías de estación del metro candelaria**
Tonda, Juan Antonio. (2000). *Félix Candela*. (pp. 62-63). Consejo Nacional para la Cultura y las Artes. México.
- p. 133 – abajo: **Planos del emblema del anuncio del lago de Tequesquitengo**
Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 178). Atrium Internacional de México. España
- p. 134 – arriba: **Fotografía de Pabellón de música del Bundesgartenschau**
Sitio oficial de Frei Otto. *Tents*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007 de:
<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>
- p. 134 – abajo: **Fotografía de Pabellón de la República Federal Alemana, Exposición Universal, Montreal Canadá de 1967**
Sitio oficial de Frei Otto. *Cable-Net Structures*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007 de:
<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>
- p. 135 – arriba: **Fotografías de Estación del Farbwerke Hoechst**
Sitio oficial de Frei Otto. *Convertible Roofs*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007 de:
<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>
- p. 135 – abajo: **Fotografías de paraguas convertibles**
Sitio oficial de Frei Otto. *Umbrellas*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007:
<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>
- p. 136 – **Fotografías de iglesia de San Juan Bautista**
Vitrubio. *Mario Botta: Iglesia Mogno*. Recuperado en Oct. 5, 2004 de:
<http://www.vitrubio.ch/arcgallery/gallery.php?id=910>
- p. 136 – **Estudio geométrico de iglesia de San Juan Bautista**
Clark, Roger H. y Pause, Michael. (1997). *Arquitectura: temas de composición*. (p. 39). Segunda Edición. Ediciones G. Gili. México.
- p. 137 – **Isometría y estudio geométrico de fábrica Fernández**
Robles, Muriel. (2001). *Félix Candela*. (p. 25). Atrium Internacional de México. España

p. 138 – centro: **Fotografía de Iglesia del Jubileo**

Cañizares, Ana G. (2005). *Edificios singulares, Nuevas creaciones de grandes arquitectos*. (p. 68). Loft Publications. Barcelona.

p. 138 – abajo: **Fotografías de Iglesia del Jubileo**

Official Site of Richard Meier & Partners Architects. *Jubilee Church*. Recuperado en Feb. 28, 2007 de:

<http://www.richardmeier.com/projects/jubilee.html>

p. 139 – **Planos de Iglesia del Jubileo**

Cañizares, Ana G. (2005). *Edificios singulares, Nuevas creaciones de grandes arquitectos*. (p. 73). Loft Publications. Barcelona.

p. 140 – arriba: **Fotografía y corte de la Ópera de Sydney**

Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (pp. 126-127). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

p. 140 – centro: **Análisis geométrico de la Ópera de Sydney**

Sitio oficial de la Ópera de Sydney. *House History*. Sydney Opera House. Recuperado en Feb. 28, 2007 de:

http://www.sydneyoperahouse.com/sections/about_the_house/house_history/?sm=4&ss=18

p. 141 – arriba: **Fotografía de nueva Estación de Trenes de Stuttgart**

Sitio oficial de Frei Otto. *New Stuttgart Train Station*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007 de:

<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>

p. 141 – centro y abajo: **Fotografía y planos de museo de Guggenheim en Bilbao**

Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (pp. 222-223). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

p. 142 – **Fotografía de Max Reinhardt Haus**

Jodidio, Philip. (1996). *Contemporary American Architects, Volume II*. (p. 74). Benedikt Taschen Verlag GmbH. Köln.

p. 143 – arriba: **Planos de Max Reinhardt Haus**

Jodidio, Philip. (1996). *Contemporary American Architects, Volume II*. (pp. 20-21). Benedikt Taschen Verlag GmbH. Köln.

p. 143 – abajo: **Planta y maqueta de Max Reinhardt Haus**

Jodidio, Philip. (1996). *Contemporary American Architects, Volume II*. (p. 77). Benedikt Taschen Verlag GmbH. Köln.

p.144 – Fotografía, maqueta y planos de Casa Möbius

Stories of houses. *Möbius House in Amsterdam*, by Ben van Berkel. Recuperado en Mar. 29, 2007 de:

<http://storiesofhouses.blogspot.com/>

p. 145 – arriba: Imágenes de pilares ramificados y de puente peatonal en el Landschaftspark

Sitio oficial de Frei Otto. *Branched Pillars*. Atelier Frei Otto Warmbronn. Recuperado en Mar. 8, 2007 de:

<http://www.freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/Hauptseite.html>

p. 148-149 – Fotografías y planos de 30 St Mary Axe (Swiss Re)

Cañizares, Ana G. (2005). *Edificios singulares, Nuevas creaciones de grandes arquitectos*. (p. 10-15). Loft Publications. Barcelona.

p. 150 – Análisis geométrico de 30 St Mary Axe (Swiss Re)

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 151 – centro izq. y abajo: Fotografías y planos de torre Agbar

Álvarez, Ariadna. (2001). *Rascacielos*. (pp. 579, 582-583). Atrium Internacional de México. México.

p. 151 – centro der.: Fotografías y planos de torre Agbar

Sitio Oficial de la Torre Agbar. *Torre Agbar*. Grupo Agbar. Recuperado en Abr. 18, 2006 de:

<http://www.torreagbar.com/home.asp>

p. 151-152 – Fotografías y planos de torre Agbar

Sitio Oficial de la Torre Agbar. *Torre Agbar*. Grupo Agbar. Recuperado en Abr. 18, 2006 de:

<http://www.torreagbar.com/home.asp>

p. 153 – Fotografía de torres Petronas

Álvarez, Ariadna. (2001). *Rascacielos*. (p. 457). Atrium Internacional de México. México.

p. 153 – Plantas de torres Petronas

Terranova, Antonino. (2003). *Rascacielos*. (p. 253). Numen. México.

p. 154 – arriba: Plantas de conjunto de torres Petronas

Terranova, Antonino. (2003). *Rascacielos*. (p. 250). Numen. México.

p. 154 – abajo: Estudio de detalle de planta

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 155 – arriba izq.: Fotografía de Ayuntamiento de Londres

Asensio, Paco. (2002). *Foster and partners*. (p. 67) Loft Publications. Barcelona.

p. 155 – arriba der.: **Fotografía de Ayuntamiento de Londres**

Official Site of Foster & Partners. *City Hall, London, U.K. 1998-2002*. Foster + Partners.

Recuperado en Abr. 8, 2007 de:

<http://www.fosterandpartners.com/Projects/1027/Default.aspx>

p. 155 – centro izq.: **Fotografía de Ayuntamiento de Londres**

Official Site of Foster & Partners. *City Hall, London, U.K. 1998-2002*. Foster + Partners.

Recuperado en Abr. 8, 2007 de:

<http://www.fosterandpartners.com/Projects/1027/Default.aspx>

p. 155 – centro der.: **Fotografía de Ayuntamiento de Londres**

Official Site of Foster & Partners. *City Hall, London, U.K. 1998-2002*. Foster + Partners.

Recuperado en Abr. 8, 2007 de:

<http://www.fosterandpartners.com/Projects/1027/Default.aspx>

p. 155 – abajo: **Fotografía de Ayuntamiento de Londres**

Asensio, Paco. (2002). *Foster and partners*. (p. 69) Loft Publications. Barcelona.

p. 156 – arriba izq.: **Fotografía de escalera en Ayuntamiento de Londres**

Official Site of Foster & Partners. *City Hall, London, U.K. 1998-2002*. Foster + Partners.

Recuperado en Abr. 8, 2007 de:

<http://www.fosterandpartners.com/Projects/1027/Default.aspx>

p. 156 – arriba der.: **Fotografía de escalera en Ayuntamiento de Londres**

Official Site of Foster & Partners. *City Hall, London, U.K. 1998-2002*. Foster + Partners.

Recuperado en Abr. 8, 2007 de:

<http://www.fosterandpartners.com/Projects/1027/Default.aspx>

p. 156 – abajo izq.: **Fotografía de Ayuntamiento de Londres**

Asensio, Paco. (2002). *Foster and partners*. (p. 67) Loft Publications. Barcelona.

p. 156 – abajo der.: **Construcción de triángulo de Sierpinski**

Imagen creada por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 157 – **Análisis geométrico de Ayuntamiento de Londres**

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando AutoCAD.

p. 158 – arriba izq.: **Fotografía de Ayuntamiento de Londres en construcción**

Official Site of Foster & Partners. *City Hall, London, U.K. 1998-2002*. Foster + Partners.

Recuperado en Abr. 8, 2007 de:

<http://www.fosterandpartners.com/Projects/1027/Default.aspx>

p. 158 – arriba der.: **Corte de Ayuntamiento de Londres**

Asensio, Paco. (2002). *Foster and partners*. (p. 68) Loft Publications. Barcelona.

p. 158 – centro: **Fotografía de Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*.(p. 200). Thames & Hudson. United Kingdom.

p. 159 – arriba: **Isometría de estructura de Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*.(p. 196). Thames & Hudson. United Kingdom.

p.159 – centro: **Corte longitudinal de Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*.(p. 200). Thames & Hudson. United Kingdom.

p. 159 – abajo: **Plantas de Centro Escocés de Exhibiciones y Conferencias**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*.(pp. 202-203). Thames & Hudson. United Kingdom.

pp. 160-161 – **Fotografías y planos de la sede del Commerzbank**
Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*.(pp. 170-177). Thames & Hudson. United Kingdom.

pp. 161-162 – **Imágenes de casa Guardiola**
Cassarà, Silvio. (2006). *Peter Eisenman, Feints*. (pp. 124-133). Skira Editore. Italy.

p. 163 – arriba izq: **Fotografía de monumento a los judíos asesinados en Europa**
Cassarà, Silvio. (2006). *Peter Eisenman, Feints*. (p. 153). Skira Editore. Italy.

p. 163 – arriba der: **Fotografía de monumento a los judíos asesinados en Europa**
Official Site of Eisenman Architects. *Memorial to the Murdered Jews of Europe*.
Eisenman Architects. Recuperado en Mar. 16, 2007 de:
<http://www.eisenmanarchitects.com/>

p. 163 – abajo: **Plantas de monumento a los judíos asesinados en Europa**
Cassarà, Silvio. (2006). *Peter Eisenman, Feints*. (pp. 156-157). Skira Editore. Italy.

p. 164 – arriba: **Fotografías de monumento a los judíos asesinados en Europa**
Official Site of Eisenman Architects. *Memorial to the Murdered Jews of Europe*.
Eisenman Architects. Recuperado en Mar. 16, 2007 de:
<http://www.eisenmanarchitects.com/>

p. 164 – abajo: **Cortes de monumento a los judíos asesinados en Europa**
Cassarà, Silvio. (2006). *Peter Eisenman, Feints*. (pp. 156-157). Skira Editore. Italy.

p. 165 – **Fotografías y planta de monumento a los judíos asesinados en Europa**

Official Site of Eisenman Architects. *Memorial to the Murdered Jews of Europe*.

Eisenman Architects. Recuperado en Mar. 16, 2007 de:

<http://www.eisenmanarchitects.com/>

pp. 166-167 – **Imágenes de competencia FSM East River (Torres Eisenman)**

Cassarà, Silvio. (2006). *Peter Eisenman, Feints*. (pp. 134-143). Skira Editore. Italy.

p. 168 – arriba: **Fotografías de Torso girado**

Official Site of Turning Torso. *Turning Torso*. Recuperado en Abr. 26, 2007 de:

<http://www.turningtorso.com/>

p. 168 – abajo: **Planos del museo Guggenheim de Nueva York**

Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (p. 89). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

p. 169 – **Planos y fotografías del museo Guggenheim de Nueva York**

Gwathmey & Siegel. (2002). *Gwathmey & Siegel*. (pp. 8-11). H Kliczkowski-Onlybook. España.

p. 170 – arriba: **Planos con estudio de proporciones del museo Guggenheim de Nueva York**

Gwathmey & Siegel. (2002). *Gwathmey & Siegel*. (p. 12). H Kliczkowski-Onlybook. España.

p. 170 – abajo: **Maqueta del Foro**

Burian, Edward R., Adrià, Miquel, Ricalde G., Humberto, Landa Vértiz Agustín, Landa Ruiloba, Pablo. (2006). *Landa García Landa Arquitectos*. (p. 243). Arquine + RM. Mexico.

p. 171 – arriba: **Fotografías del pabellón de Zurich**

Álvarez, Francisco. *Centro Le Corbusier*. Emol. Recuperado en Oct. 5, 2004 de:

http://www.emol.com/especiales/le_corbusier/centro.htm

p. 171 – abajo: **Maqueta y planta de la sede Central de Renault**

Meier, Richard. (1984). *Richard Meier Architect*. (p. 331, 338). Rizzoli International Publications. Nueva York.

p. 172 – arriba: **Imágenes de Liberty Place**

Álvarez, Ariadna. (2001). *Rascacielos*. (pp. 360-366). Atrium Internacional de México. México.

p. 172 – abajo: **Imágenes de hotel Hesperia**

Álvarez, Ariadna. (2001). *Rascacielos*. (pp. 387-389). Atrium Internacional de México. México.

- pp. 173-174 – **Fotografías y planos del estadio Olímpico de Atenas**
Ivy, Robert. (2006). *Olympic Stadium, Athens, Greece: Santiago Calatrava Makes a Gigantic Structure Seem Weightless and Creates a Telegenic National Symbol in the Process*. Architectural Record. (06). pp. 232, 234-235.
- p. 175 – **Planos y maqueta del restaurante Bauschänzli**
Tzonis, Alexander. (1999). *Santiago Calatrava The Poetics of Movement*. (pp. 90-91). Thames & Hudson. United Kingdom.
- p. 176 – **Imágenes del Centro Cultural Tjibaou**
Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (pp. 224-225). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
- p. 177 – **Imágenes del Museo Judío**
Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (pp. 218-219). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
- p. 178 – **Imágenes de Villa en Burdeos**
Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (pp. 232-233). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
- p. 179 – **Imágenes de LF1, Landesgartenschau**
Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. (pp. 228-229). Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
- p. 180-181 – **Parque de la Villette**
Turner, Tom. A review of Parc de la Villette, Paris. Landscape Architecture Guide. Recuperado en Abr. 24, 2007 de:
<http://www.gardenvisit.com/landscape/architecture/18.1-parc-de-la-villette.htm>
- p. 182 – centro: **Planta de casa Koshino**
Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. (p. 64). Taschen GmbH. Italy.
- p. 182 – abajo: **Planta de Museo de arte contemporáneo Naoshima**
Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. (p. 96). Taschen GmbH. Italy.
- p. 183 – arriba: **Planta de Museo de literatura de Himeji**
Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. (p. 105). Taschen GmbH. Italy.
- p. 183 – abajo: **Planta de Museo Oyamasaki Villa**
Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. (p. 130). Taschen GmbH. Italy.
- p. 184 – **Planta de Proyecto Awajishima**
Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. (p. 165). Taschen GmbH. Italy.
- p. 185 – arriba: **Planta de Centro Getty**
Jodidio, Philip. (1995). *Richard Meier*. (p. 157). Taschen GmbH. Germany.

p. 185 – abajo: **Planta de la Biblioteca nacional de Francia**

Jodidio, Philip. (1995). *Richard Meier*. (p. 141). Taschen GmbH. Germany.

p. 186 – centro izq.: **Fotografía de arco exterior, acceso y campanario en Iglesia de San Juan Bautista en Mogno**

Vitrubio. *Mario Botta: Iglesia Mogno*. Recuperado en Oct. 5, 2004 de:
<http://www.vitruvio.ch/arcgallery/gallery.php?id=908>

p. 186 – centro en medio: **Fotografía del campanario en Iglesia Parroquial Beato Odorico da Pordenone**

Gabriele Cappellato, Paola Pellandini y Bertaccini, Anna. (1998). *Mario Botta, Edificios Públicos 1990-1998*. (p. 142). Skira. Milán.

p. 186 – centro der.: **Fotografía de campanario en Iglesia de San Pedro Apóstol Sartirana de Merate**

Gabriele Cappellato, Paola Pellandini y Bertaccini, Anna. (1998). *Mario Botta, Edificios Públicos 1990-1998*. (p. 160). Skira. Milán.

p. 186 – abajo izq.: **Fotografía de campanario en la Catedral de la Resurrección en Evry**

Gabriele Cappellato, Paola Pellandini y Bertaccini, Anna. (1998). *Mario Botta, Edificios Públicos 1990-1998*. (p. 171). Skira. Milán.

p. 186 – abajo der.: **Fotografía de campanario de Santa María de los Ángeles en Monte Tamaro**

Gabriele Cappellato, Paola Pellandini y Bertaccini, Anna. (1998). *Mario Botta, Edificios Públicos 1990-1998*. (p. 183). Skira. Milán.

pp. 195-203 – **Tablas de truncamiento de poliedros**

Tablas creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando Great Stella.

pp. 204 – **Imágenes en el perímetro del conjunto de Mandelbrot**

Imágenes creadas por Arq. Ricardo E. González utilizando Fractal Extreme.

pp. 214-215 – **Imágenes de espacios Calabi-Yau**

Williams, Michael B. (2004). *Origin and Evolution of the Universe: Extra Dimentions*. The University of Chicago. Department of Computer Science. Recuperado en Abr. 28, 2007 de:
<http://people.cs.uchicago.edu/~mbw/astro18200/dimensions.html>

Bibliografía

Libros

1. Avery, Derek. (2003). *Modern Architecture*. Chaucer Press. Londres.
2. Baeza Medina, Joaquín. (1992). *Geometría y arquitectura*. Editorial Universidad de Guadalajara. Guadalajara.
3. Bahamón, Alejandro. *Arquitectura y desarrollo de proyectos*. Instituto Monsa de Ediciones. Barcelona.
4. Bermejo Herrero, Miguel. (1999). *Geometría descriptiva aplicada*. Alfaomega Grupo Editor. Madrid.
5. Bracho, Javier. (2005). *Introducción analítica a las geometrías*. (libro obtenido de Internet)
6. Braun, Eliezer. (2005). *Caos, fractales y cosas raras*. Fondo de Cultura Económica. México.
7. Brooks Pfeiffer, Bruce. (2004). *Frank Lloyd Wright*. Taschen GmbH. Alemania.
8. Burian, Edward R., Adrià, Miquel, Ricalde G., Humberto, Landa Vértiz Agustín, Landa Ruiloba, Pablo. (2006). *Landa García Landa Arquitectos*. Arquine + RM. Mexico.
9. Cappellato, Gabriele, Pellandini, Paola, Bertaccini, Anna. (1998). *Mario Botta, Edificios Públicos 1990-1998*. Skira. Milán.
10. Cassarà, Silvio. (2006). *Peter Eisenman, Feints*. Skira Editore. Italy.
11. Ching, Francis D. K. (2004). *Arquitectura forma espacio y orden*. España.
12. Clark, Roger H. y Pause, Michael. (1997). *Arquitectura: temas de composición*. Segunda Edición. Ediciones G. Gili. México.
13. Cohen, Jean-Louis. (2004). *Le Corbusier*. Taschen GmbH. Alemania.
14. Gössel, Peter, Leuthäuser, Gabriele. (2001). *Arquitectura del siglo XX*. Taschen GmbH. Slovenia.
15. Gwathmey & Siegel. (2002). *Gwathmey & Siegel*. H Kliczkowski-Onlybook. España.

16. Jodidio, Philip. (1996). *Contemporary European Architects Volume III*. Benedikt Taschen Verlag GmbH. Italia.
17. Jodidio, Philip. (1996). *Contemporary European Architects Volume IV*. Benedikt Taschen Verlag GmbH. Italia.
18. Jodidio, Philip. (1998). *Contemporary European Architects Volume V*. Benedikt Taschen Verlag GmbH. Italia.
19. Jodidio, Philip. (1998). *Contemporary European Architects Volume VI*. Benedikt Taschen Verlag GmbH. Italia.
20. Jodidio, Philip. (1999). *Mario Botta*. Taschen. España.
21. Jodidio, Philip. (1995). *Richard Meier*. Taschen GmbH. Germany.
22. Jodidio, Philip. (1998). *Santiago Calatrava*. Taschen GmbH. Spain.
23. Jodidio, Philip. (1997). *Sir Norman Foster*. Taschen GmbH. Italy.
24. Jodidio, Philip. (1996). *Tadao Ando*. Taschen GmbH. Italy.
25. Mandelbrot, Benoit. (2003). *La geometría fractal de la naturaleza*. Tusquets Editores. Barcelona.
26. Mandelbrot, Benoit. (2006). *Los objetos fractales forma, azar y dimensión*. Tusquets Editores. Barcelona.
27. Meyhöfer, Dirk. (1994). *Contemporary European Architects Volume II*. Benedikt Taschen GmbH. Italia.
28. Monteys, Xavier. (2005). *Le Corbusier obras y proyectos*. Gustavo Gili. Barcelona.
29. Palias, Richard S. (2003). *A modern course on curves and surfaces*. (apuntes de clase de geometría obtenidos a través de Internet)
30. Pawley, Martin. (1999). *Norman Foster A Global Architecture*. Thames & Hudson. United Kingdom.
31. Prieto, Carlos. (2003). *Topología Básica*. Fondo de Cultura Económica. México.
32. Puente, Moisés. (2000). *Pabellones de exposición*. Gustavo Gili. Barcelona.
33. Rattenbury, Kester, Bevan, Robert, Long, Kieran. (2004). *Arquitectos Contemporáneos*. Art Blume. Barcelona.
34. Rosa, Joseph. (2006). *Louis I. Kahn*. Taschen GmbH. Alemania.

35. Silva, Juan Manuel, Laso, Adriana. (1990). *Fundamentos de matemáticas álgebra, trigonometría geometría analítica y cálculo*. Editorial Limusa. México.
36. Talaquer, Vicente. (2002). *Fractus, fracta fractal, fractales, de laberintos y espejos*. Fondo de Cultura Económica. México.
37. Trevisiol, Robert. (1983). *Mario Botta la casa redonda*. Gustavo Gili. Barcelona.
38. Tzonis, Alexander. (1999). *Santiago Calatrava The Poetics of Movement*. Thames & Hudson. United Kingdom.
39. Weston, Richard. (2005). *Plantas, secciones y alzados, Edificios clave del siglo XX*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
40. Wong, Wucius. (1995). *Fundamentos del diseño*. Gustavo Gili. España.
41. Zill, Dennis G. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Intenet

1. Euclides. (1997 Junio) *Elementos*. Recuperado en octubre 15, 2006 de http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm
2. Nexus Network Journal. (Winter-Spring 2001). *Abstract. Michael Ostwald's article "Fractal Architecture": Late Twentieth Century Connections Between Architecture and Fractal Geometry*. Recuperado en octubre 17, 2006 de <http://www.nexusjournal.com/Ostwald-Fractal.html>
3. *Geometry in Architecture*, Recuperado en octubre 3, 2006 de http://www.10min.com/education/10Min_web/Geometry/Geometry0_1.html
4. Dartmouth College (1998). *Geometry in Art and Architecture*. Recuperado en octubre 2, 2006 de <http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit1/INTRO.html>
5. Wikipedia (2006) *Geometría*. Recuperado en octubre 2, 2006 de <http://en.wikipedia.org/wiki/Geometria>
6. Sitio oficial del despacho de Mario Botta. Recuperado en febrero 25, 2007 <http://www.botta.ch>
7. The Great Buildings Collection. (1994-2007). *Mario Botta*. Recuperado en febrero 25, 2007 de http://www.greatbuildings.com/architects/Mario_Botta.html
8. Astrocosmos. (2002, marzo 13). *De la Teoría Kaluza-Klein*. Recuperado en Julio 23, 2007 de http://www.astrocosmo.cl/h-foton/h-foton-12_05-02.htm
9. University of California. (2006). *The Geometry Junkyard*. Recuperado en noviembre 18, 2006 de <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/topic.html>
10. University of Minnesota. (1999, febrero 5). *The Geometry Center*. Recuperado en Noviembre 03, 2006 de <http://www.geom.uiuc.edu>
11. Wolfram Research Inc. (1999). *Wolfram MathWorld*. Recuperado en Octubre 15, 2006 de <http://mathworld.wolfram.com>