

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



ESTUDIO DEL DIAGRAMA DE FASES DE LA CROMODINÁMICA

CUÁNTICA EN EL MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO CON

DIFERENTES MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN

Por

NALLALY BERENICE MATA CARRIZAL

Como requisito parcial para obtener el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA

Febrero, 2021

ESTUDIO DEL DIAGRAMA DE FASES DE LA CROMODINÁMICA
CUÁNTICA EN EL MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO CON
DIFERENTES MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN

Aprobación de la tesis



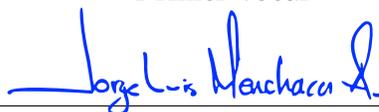
Dr. José Rubén Morones Ibarra
Director de tesis



Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Secretario



Dr. Edgar Martínez Guerra
Primer vocal



Dr. Jorge Luis Menchaca Arredondo
Segundo vocal



Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Tercer vocal



Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirección de estudios de posgrado

Dedicatoria

A mis amados padres Arturo y Margarita

A mi maestro, compañero de clases y de vida Enrique

Agradecimientos

A mi asesor, Dr. Rubén Morones que confió en mí y es el principal cimiento de la construcción de mi vida profesional, gracias por todo el conocimiento que me ha transmitido, por todas las horas y horas de clases teóricas, por su pasión por la física, la investigación y la enseñanza. Gracias por estar conmigo durante la licenciatura, la maestría y el doctorado, por hacer de mí una investigadora. Hemos recorrido un largo camino juntos y su guía ha sido fundamental en el curso de mi carrera profesional, estos éxitos son con y por usted. Maestro, le estaré agradecida por siempre por todo lo que ha hecho por mí.

A mi comité de evaluación, Dr. Javier Almaguer, Dr. Francisco Flores y Dr. Jorge Menchaca por invertir su tiempo en la revisión de este trabajo, sus observaciones fueron muy valiosas. Dr. Edgar Martínez, mis primeros trabajos de investigación en la física fueron bajo su supervisión, desde que nos conocimos en la licenciatura me ha acompañado durante el transcurso de estos años. Gracias por estar conmigo siempre, por sus consejos, por motivarme, por preocuparse por mí.

Al Dr. Adrián Garza por su invaluable participación en este trabajo. Con tu ayuda hemos podido llevar a cabo la investigación, gracias por ayudarme cuando te he necesitado. A mis amigos químicos por animarme, brindarme su compañía y compartir la vida académica y personal juntos.

A mis padres por su infinito amor, por criarme con disciplina y dedicación, por todos los esfuerzos y sacrificios que han hecho por mi educación, sin ustedes este logro no hubiera sido posible. Gracias por creer en mis sueños y lograrlos juntos, por darme todo lo que ha estado a su alcance, ustedes son la razón de mi vida, hicieron de mí más de lo que yo podría ser. A mi pareja Enrique, mi inspiración y modelo a seguir, gracias por tu esmero en enseñarme y ser mi coasesor, has estado incondicionalmente a mi lado, hemos trabajado mucho juntos en nuestros proyectos y nuestro esfuerzo conjunto ha dado frutos. Me ayudaste hasta donde te fue posible, a veces más que eso. Gracias por tu amor, eres mi felicidad y motivación.

A los mexicanos que con sus impuestos financiaron mi beca de doctorado a través del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, gracias por la inversión que hicieron en mí.

Prefacio

El diagrama de fases de la cromodinámica cuántica es uno de los aspectos más desconocidos de la física en la actualidad. Aun cuando las interacciones electromagnética y débil se han logrado unificar exitosamente en una sola teoría cuántica de campos que tiene predicciones asombrosas y valores predichos de constantes medidas experimentalmente con una precisión sin paralelo en la historia, no podemos jactarnos de que la interacción fuerte se conoce con esa misma precisión. La existencia de los fenómenos del confinamiento de color y de la libertad asintótica, tan importantes como son para que la estructura de la materia en el universo sea tal y como es, no se ha podido explicar satisfactoriamente hasta el día de hoy.

Los potenciales inversos de la distancia, tan adecuados para explicar los fenómenos gravitacionales y electromagnéticos en la mecánica clásica, no tienen análogo para la interacción fuerte porque no se conoce cuál es el potencial generado por esta interacción. En nada ayuda que los quarks no puedan ser aislados en condiciones normales por el confinamiento del color, ya que en lugar de medir la interacción directamente, tenemos que recurrir a medir cantidades residuales, dependientes de muchos parámetros libres que tampoco conocemos y que nuestras teorías no arrojan de manera natural. La mayor parte de los aspectos físicos de los hadrones son desconocidos para nosotros, incluso algo tan simple como las masas corrientes de los quarks tiene una gran incertidumbre en sus valores.

El diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica es una manera de representar una interacción entre partículas que interactúan fuertemente, y si pudiéramos conocerlo, tendríamos la explicación a cosas tan misteriosas y tan dispares como la materia en los inicios del universo y en los núcleos de las estrellas de neutrones. Este diagrama nos daría una descripción satisfactoria de estos fenómenos independientemente de los secretos que estos guardan, como la asimetría de bariones del universo. El diagrama de fases nos arrojaría mucha luz al respecto independientemente de las circunstancias.

Dadas las severas limitaciones que las ecuaciones de la cromodinámica cuántica poseen para ser resueltas con condiciones arbitrarias y, en particular Lattice QCD con potenciales químicos reales, la esperanza de obtener una descripción fenomenológica de este diagrama con estos métodos es bastante pobre. Las teorías efectivas de la QCD, como el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, aun con todas las desventajas que tienen, como la ruptura de la invariancia de norma y la necesidad de establecer un parámetro de corte (que se justifica con la necesidad de nueva física a otras escalas de energía), son la forma más viable de obtener información, aunque sea cualitati-

va, de estos fenómenos. La existencia del *crossover* y del *critical end point* quiral son solamente la punta del iceberg, ya que usando otras consideraciones trabajando con estas teorías efectivas es posible obtener otras fases en el diagrama, la fase superconductora del color es tan solo uno de tantos ejemplos.

Desde luego que nosotros los físicos quisiéramos tener las soluciones a todas las teorías cuánticas de campos del modelo estándar a cualquier conjunto de condiciones arbitrarias, y la comunidad sin duda estará trabajando sobre esto. Pero cualquier cosa que sea prometedora de arrojar luz acerca de cómo trabaja la maquinaria interna de nuestro universo es merecedora de nuestra atención. Todas estas herramientas que son capaces de explicar estos fenómenos a expensas de otras propiedades de la materia son algunas de las pocas herramientas que tenemos para saciar nuestra inmensa curiosidad.

Índice general

1. Introducción	15
2. Teoría Cuántica de Campos	18
2.1. Ecuación de Dirac	18
2.2. Simetrías	20
2.2.1. Teorema de Noether	21
2.2.2. Simetría de sabor	24
2.2.3. Simetría quiral	26
2.2.4. Rompimiento espontáneo de una simetría	27
3. Cromodinámica Cuántica	29
3.1. Lagrangiana	29
3.2. Clasificación de las transiciones de fase	31
3.3. Lattice Quantum Chromodynamics	33
3.3.1. Aspectos básicos	34
3.3.2. Resultados del diagrama de fases	36
3.4. Consideraciones generales	36
4. Modelo Nambu-Jona-Lasinio	38
4.1. Formalismo en el vacío	39
4.2. Temperatura y densidad finita	43
4.3. Susceptibilidad quiral	45
4.4. Métodos de regularización	48
4.4.1. Corte ultravioleta	50
4.4.2. Corte infrarrojo	51
4.4.3. Regularización de tiempo propio	52
4.4.4. Pauli-Villars	53
4.5. Compilación de esquemas	55
4.6. Parámetros	57
5. Resultados	59
5.1. Parámetro de orden	59
5.1.1. Puntos críticos	60
5.1.2. Transiciones de fase	62
5.1.3. Zona de <i>crossover</i>	64

5.2. Discusión	68
5.3. Conclusión	71
A. Grupos	72
A.1. Transformación unitaria	72
A.2. Grupo $U(1)$	73
A.3. Grupo $SU(N)$	73
B. Álgebra de Dirac	75
B.1. Matrices	75
B.2. Tensor antisimétrico Levi-Civita	76
B.3. Otras representaciones	76
B.4. Producto de matrices	76
B.5. Traza	77
B.6. Notación <i>slash</i> de Feynman	77
C. Ajuste de parámetros	78
C.1. Corte ultravioleta	78
C.2. Corte Infrarrojo	78
C.3. Regularización de tiempo propio	79
C.4. Pauli-Villars	79
D. Thermal field theory	81
D.1. Cuantización	81
D.2. Integral de camino	82
D.3. Función de partición	85

Índice de tablas

2.1. Sabores de quarks y sus propiedades [43]	24
3.1. Propiedades de las simetrías presentes para dos sabores de quarks [53].	37
4.1. Compilación de las ecuaciones de <i>gap</i> para cada método de regularización.	57
4.2. Parámetros usados en cada método de regularización.	58
5.1. Resultados [MeV] obtenidos para los diferentes métodos de regularización y masas corriente.	61

Índice de figuras

1.1. Diagrama de fases esperado con base en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral [13]	16
2.1. Potenciales modelo que son invariantes de rotación	28
3.1. Clasificación de las transiciones de fase de acuerdo al orden de la discontinuidad	32
3.2. Diagramas de fase genéricos de la QCD [68]	33
3.3. El espacio-tiempo se discretiza con el espaciado a de la malla. La plaqueta corresponde al cuadrado formado por flechas [74]	34
4.1. Aproximación en el régimen de baja energía donde la interacción entre los cuatro fermiones se considera puntual [105]	40
4.2. Masa dinámicamente generada en la aproximación del campo medio [45]	41
4.3. Sistema de coordenadas esféricas [115]	45
4.4. Clasificación del comportamiento de las cantidades termodinámicas del sistema	49
5.1. Condensado quiral como función de la temperatura a $\mu = 0$	60
5.2. Condensado quiral como función del potencial químico a $T \approx 0$	60
5.3. Susceptibilidad quiral como función del potencial químico	61
5.4. Diagrama de fases ideal para el modelo NJL con dos sabores	63
5.5. Superposición de criterios de los diagramas de fase	65
5.6. Criterio de discontinuidad del condensado	66
5.7. Diagramas de fase para el criterio de la discontinuidad del condensado	67
5.8. Diagramas de fase para el criterio del punto de inflexión donde existe CEP (izquierda) y susceptibilidad quiral (derecha)	68
5.9. Diagramas de fase para el criterio del punto de inflexión donde no existe CEP (izquierda) y susceptibilidad quiral (derecha)	69

Nomenclatura

A	axial
b	quark bottom
BCS	Bardeen–Cooper–Schrieffer theory
c	velocidad de la luz, quark charm
CEP	Critical End Point
$D_\mu, D_{ab} (D_{ab}^{-1})$	derivada covariante, propagador (inverso) de Dirac
d	diferencial total, quark down
det	determinante
E, E_p	energía relativista
e	(valor absoluto) carga del electrón, constante de Euler
erf	función error
erfc	función error complementaria
$F_{\mu\nu}$	tensor de campo
f_{abc}	función, constante de estructura
FAIR	Facility for Anti-proton and Ion Research
$G(g), g_{\mu\nu}$	constante de acoplamiento, métrica de Minkowski
GeV	gigaelectronvolt
glob	global
H	Hamiltoniano
\hbar	constante de Plank reducida
I	matriz identidad
i	unidad imaginaria
IR	infrarrojo
j	corriente
k	constante de Boltzmann
\mathcal{L}	densidad lagrangiana
L	left, Lagrangiana
LHC	Large Hadron Collider
LQCD	Lattice Quantum Chromodynamics
loc	local
M	masa constitutiva

m_0	masa corriente
MeV	megaelectronvolt
MFA	Mean Field Approximation
N	número de quarks
N_c	número de color
N_f	número de sabor
NICA	Nuclotron-based Ion Collider fAcility
NJL	Nambu-Jona-Lasinio
O	operador
$P_{\mu\nu}$	plaqueta elemental
\mathcal{P}	camino cerrado
p	momento
PNJL	Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio
PTR	regularización de tiempo propio
PV	Pauli-Villars
q	coordenada generalizada
Q	carga generalizada
QCD	Quantum Chromodynamics
QED	Quatum Electrodynamics
QFT	Quantum Field Theory
QGP	Quark-Gluon Plasma
R	right
Re	parte real
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider
S	acción
s	quark strange
SC	fase superconductora del color
SPC	Super Proton Synchrotron
SU	Special Unitary
T	temperatura
T_c	temperatura crítica
t	tiempo, quark top
TCP	Tricritical Point
Tr	traza
u	quark up
U	matriz unitaria, variable de enlace
UV	ultravioleta
V	vectorial, volumen
W	loop de Wilson
x, x_μ, x_i	coordenadas, coordenadas de Minkowski, coordenadas espaciales
Z	función de partición

α_S	constante de acoplamiento
β	inverso de la temperatura
γ	matriz de Dirac
δ, δ^{ab}	cambio infinitesimal, delta de Kronecker
ϵ_{ijk}	tensor Levi-Civita
θ	parámetro de transformación, ángulo polar
λ	matrices de Gell-Mann
Λ	parámetro de corte
μ, μ_c	potencial químico, potencial químico crítico
π	mesón auxiliar
σ	mesón auxiliar, matrices de Pauli
τ	tiempo imaginario, matrices de Pauli
ϕ	ángulo polar
χ	susceptibilidad
ψ	campo de una partícula
ω	frecuencia
Ω	potencial termodinámico
$\sqrt{s_{NN}}$	energía en el centro de masa por par de nucleones
∂_μ	diferencial parcial
∇, ∇^2	gradiente, Laplaciano

Las letras griegas en los índices indican coordenadas del espacio-tiempo de Minkowski. Las letras latinas indican índices de otra naturaleza que dependen del contexto.

Resumen

Se estudia el efecto del método de regularización en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio para la descripción del diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica en el plano $T - \mu$. Para el caso de dos sabores se hace la comparación del corte ultravioleta, corte ultravioleta más corte infrarrojo, regularización de tiempo propio y regularización de Pauli-Villars. Se encontró que la zona de *crossover* aparece como una banda con un ancho definido, el cual se determina con la propuesta de un criterio nuevo en base al parámetro de orden para determinar su extensión. Se obtienen los diagramas de fase correspondientes a cada método de regularización aplicando nuestro criterio y el ya reportado en la literatura. Se observó que la ausencia o presencia del *critical end point* depende del método de regularización así como también de los parámetros del modelo.

Capítulo 1

Introducción

La materia está formada por partículas divisibles llamadas átomos que dependiendo de las características del átomo es el elemento químico que forman. Los átomos están formados por un núcleo y un número determinado de electrones unidos a él. El núcleo atómico a su vez lo componen los protones y neutrones a los que se les denomina hadrones, estos son partículas formadas por sistemas de quarks que interaccionan mediante la fuerza fuerte, considerada fundamental. Los hadrones se clasifican en bariones que son los bloques constructores de la materia y los mesones que son los intermediarios entre nucleones. La teoría que describe la interacción fuerte entre quarks mediada por los gluones (portadores de la carga de color) es la Cromodinámica Cuántica (QCD: *Quantum Chromodynamics*) [1, 2].

En la QCD el sistema en consideración es una región ocupada por materia que interactúa fuertemente en equilibrio térmico y químico, que en condiciones extremas de alta temperatura y densidad bariónica la materia hadrónica (baja temperatura y potencial químico) presenta una transición de fase a un nuevo estado de la materia compuesto por quarks y gluones llamado plasma de quarks y gluones (QGP: *Quark-Gluon Plasma*) [3, 4, 5, 6]. Durante esta transición ocurre el desconfinamiento de los quarks (liberación del color) y la restauración de la simetría quiral. Las transiciones de fase que se presentan durante estos fenómenos se describen mediante el diagrama de fases de la QCD en el plano formado por la temperatura (T) y potencial químico (μ) de la Fig. 1.1.

La región de mayor interés experimental es para temperaturas entre $T \approx 150-160$ MeV y potencial químico bariónico $\mu_B \approx 0 - 600$ MeV donde se especula que existe un punto llamado *critical end point* (CEP) donde termina una transición de fase de primer orden [7, 8, 9]. A $\mu_B = 0$ existe un *crossover* que se extiende con una ligera curvatura hacia abajo hasta el CEP donde la transición es de primer orden [10]. El principal objetivo de las colisiones de iones pesados (Au, Pb, Cu) es estudiar las propiedades del QGP, localizar el CEP y buscar evidencia de las transiciones de fase [11], los programas actualmente activos son *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC), *Large Hadron Collider* LHC, *Super Proton Synchrotron* (SPS), *Facility for Anti-proton and Ion Research* (FAIR) y *Nuclotron-based Ion Collider fAcility* (NICA), donde se trabaja con energía de hasta $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV [12].

A bajas temperaturas y densidades se presenta una transición de fase de la mate-

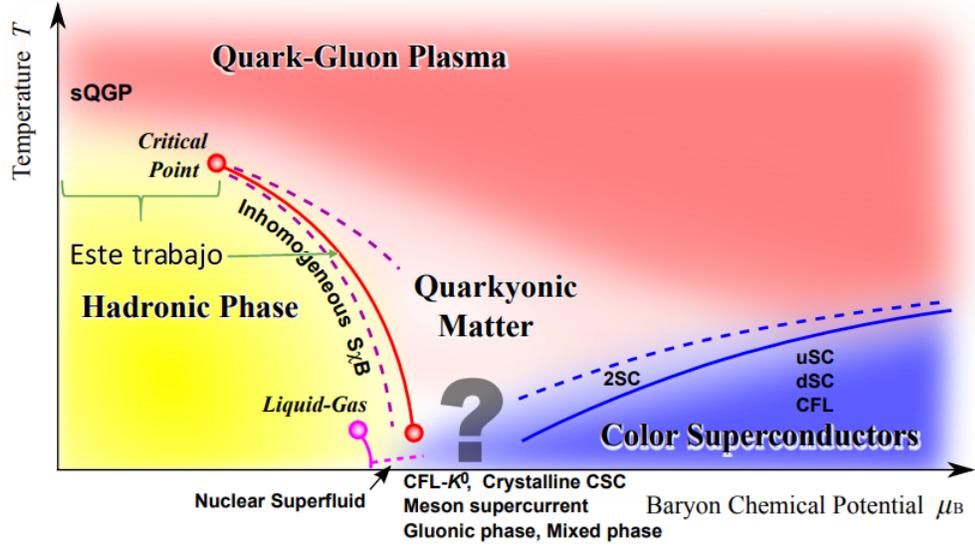


Figura 1.1: Diagrama de fases esperado con base en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral [13]

ria hadrónica de líquido a gas, se obtiene mediante reacciones de multifragmentación y se reporta una temperatura crítica en el rango de $T_c \approx 15 - 20$ MeV [14, 15, 16]. A altas densidades los quarks forman un condensado de pares de Cooper, se reporta una fase superconductor del color (SC) [17, 18] que requiere solo de interacciones de atracción débil. En esta fase la simetría quiral nunca se rompe y se presentan excitaciones que son indistinguibles de las de la fase confinada [19]. En la QCD de dos sabores (fase denominada 2SC) los pares de Cooper son singletes de sabor $ud - du$, la simetría global de sabor $SU(2)_L \times SU(2)_R$ permanece intacta. Se teoriza que este tipo de materia densa a baja temperatura se encuentra en el centro de estrellas de neutrones [20, 21, 22, 23].

La QCD es una Teoría Cuántica de Campos (QFT: *Quantum Field Theory*) no abeliana con $N_c = 3$ colores y $N_f = 6$ sabores, es una teoría de norma con simetría $SU(3)$, por lo cual presenta un estado octete en el espacio de color ($n^2 - 1$) de bosón de norma, es decir, que los gluones representan a una interacción que tiene tres tipos de carga. Esta teoría presenta las siguientes características importantes [24, 25]:

1. Presenta simetría quiral (aproximada), es decir, es invariante bajo la transformación global $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$.
2. A cortas distancias o momentos grandes la constante de acoplamiento $\alpha_S(q^2)$ efectiva decrece logarítmicamente dando lugar a la libertad asintótica donde las interacciones entre quarks y gluones se debilitan.
3. A grandes distancias o bajos momentos el acoplamiento efectivo se hace muy fuerte, lo que da como resultado el fenómeno de confinamiento de quarks (los quarks y gluones no se han observado experimentalmente como estados libres de color, éstos se encuentran confinados en el color dentro de los hadrones del núcleo atómico como partículas sin color).

4. Se rompe espontáneamente la simetría quiral generando dinámicamente la masa (los quarks que forman los hadrones tienen una masa constitutiva de cientos de MeV) debido a la condensación de quarks y antiquarks (condensado quiral).

Los métodos perturbativos se pueden usar para estudiar observables físicas a cortas distancias debido a la libertad asintótica de las teorías no abelianas, sin embargo, a grandes distancias la constante de acoplamiento aumenta y los métodos perturbativos ya no son aplicables, tampoco existen métodos analíticos que por primeros principios permitan trabajar la QCD en estas condiciones [26, 27]. La interacción entre los hadrones es 100 veces más fuerte que la interacción electromagnética, por lo que se debe tratar de forma no perturbativa. Una forma de estudiar la QCD a grandes distancias mediante métodos no perturbativos es utilizar teorías efectivas, estas permiten describir los estados ligados de los quarks incluyendo las simetrías de la QCD.

Se considera que la interacción a grandes distancias se lleva a cabo mediante el intercambio de piones entre nucleones [28] y las correspondientes teorías efectivas se basan en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. La masa ligera que presentan los mesones como los piones se le atribuye al rompimiento espontáneo de la simetría quiral, esta se genera mediante el modo Nambu-Goldstone [29, 30]. A bajas energías el vacío de la QCD se define por el valor esperado finito de un operador llamado condensado del vacío, que caracteriza las propiedades no perturbativas del vacío de la QCD. El condensado de quarks describe la densidad de pares quark-antiquark en el vacío de la QCD, los cuales son el motivo del rompimiento de la simetría quiral.

El rompimiento espontáneo de la simetría quiral corresponde al mecanismo por el cual un estado en particular no necesariamente presenta la simetría quiral de la Lagrangiana que lo describe, esto genera dinámicamente la masa a las partículas y da lugar a transiciones de fase [31]. Este concepto es el que se utiliza para describir el diagrama de fases de la QCD en el presente trabajo. Se estudia la región del *crossover*, y la transición de primer orden, indicadas con una llave y una flecha respectivamente en la Fig. 1.1 además de la localización del CEP. Se considera la fase con simetría rota a temperatura y potencial químico bajos y con simetría restaurada en condiciones extremas.

La tesis está organizada de la siguiente forma: en el capítulo 2 se reúnen los conceptos sobre las simetrías que dan lugar a cantidades que se conservan en el tiempo. Además de la descripción de la simetría quiral y su rompimiento espontáneo que es el pilar de esta investigación. En el capítulo 3 se describen los aspectos fundamentales de la QCD, las transiciones de fase y los principales resultados que se obtienen de LQCD. En el capítulo 5 se desarrolla el formalismo del modelo de Nambu-Jona-Lasinio en el vacío y a temperatura y potencial químico finito. Se introduce la susceptibilidad quiral y su empleo para la construcción del diagrama de fases. También se reseñan los métodos de regularización que se van a utilizar. Finalmente en el capítulo 5 se explican los criterios para construir los diagramas de fase a partir de la susceptibilidad y el condensado quiral. Se discuten los resultados obtenidos y se concluye con los aspectos más relevantes del trabajo.

Capítulo 2

Teoría Cuántica de Campos

2.1. Ecuación de Dirac

Una teoría cuántica de campos parte de la premisa de satisfacer a la relatividad especial y la mecánica cuántica, un intento es obtener una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger, el resultado corresponde a la ecuación de Klein-Gordon, donde se definen los operadores $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ y $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ [32, 33]

$$-\hbar \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, t) = [-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4] \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

donde ψ representa una función de onda, esta ecuación es de segundo orden en las derivadas espacio-temporales, pero se requiere que la ecuación esté determinada solo por sus condiciones iniciales. Los inconvenientes con la ecuación es que se obtiene una densidad de probabilidad que puede tomar valores negativos y sus soluciones tienen valores de energía negativos y positivos $E = \pm(m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2)^{1/2}$ [34]. Por tales motivos se descartó la ecuación pero posteriormente ψ se reinterpretó como un campo, con lo cual la ecuación describe correctamente a las partículas de espín cero [35].

Para obtener una nueva expresión, se formula una ecuación que sea de primer orden en E y \mathbf{p} para que sea relativísticamente covariante y conserve una densidad de probabilidad positiva. La función de onda ψ con N componentes para partículas relativistas de espín 1/2 está representada por

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para un estado que está definido solo por sus condiciones iniciales se obtiene una ecuación de primer orden en el tiempo

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (2.3)$$

y para que sea invariante relativista las derivadas en las coordenadas espaciales deben ser de primer orden, entonces suponiendo que la ecuación $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ ($\hbar = c = 1$) se puede reescribir como

$$E = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (2.4)$$

donde a^i y β son operadores hermitianos (matrices). Al aplicar este operador a ψ se obtiene $(E - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta m)\psi = 0$ y se requiere una relación relativista entre energía, momento y masa como $(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\psi = 0$, con estas consideraciones se necesita que se cumpla

$$\frac{1}{2}(a^i a^j + a^j a^i) = \delta^{ij}, \quad a^i \beta + \beta a^i = 0, \quad \beta^2 = 1 \quad (2.5)$$

entonces se definen las matrices

$$\gamma^i = \beta \alpha^i, \quad \gamma^0 = \beta \quad (2.6)$$

que cumplen el álgebra que se describe en el apéndice B. El operador E debe tener *eigenvalores* reales y ser hermitiano, como \mathbf{p} es hermitiano, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ y β también deben serlo, por lo tanto la forma general de estas condiciones es una combinación lineal de las matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ y la matriz identidad

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Las *eigenfunciones* se pueden representar por los estados base

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y } |-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

en un sistema con dos espines independientes, se tiene un operador $\boldsymbol{\sigma}$ y otro $\boldsymbol{\rho}$, el producto escalar da como resultado cuatro *eigenvectores* base que representan los operadores de Dirac como matrices 4x4 dadas por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

por lo que la función ψ tendrá cuatro componentes y se denomina espinor de Dirac. Al sustituir estos resultados en (2.3) y (2.4) se obtiene

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m \right] \psi = 0 \rightarrow [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi = 0 \quad (2.10)$$

Los cuatro grados de libertad describen soluciones de energía positiva y negativa con espín 1/2 (fermiones), 'arriba' o 'abajo'. Las soluciones con energía negativa corresponden a antipartículas con energía positiva, estas soluciones tienen la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{bmatrix} u^{(r)}(\mathbf{p}) \\ v^{(r)}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} e^{\mp i p x} \quad (2.11)$$

la solución $u^{(r)}(\mathbf{p})$ corresponde a la partícula con momento \mathbf{p} y energía E y $v^{(r)}(\mathbf{p})$ a la de momento $-\mathbf{p}$ y energía $-E$, el índice $r = 1, 2$ representa las dos soluciones independientes para cada momento p . Además satisfacen

$$(\gamma p - m)u^{(r)}(\mathbf{p}) = 0, \quad (\gamma p - m)v^{(r)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (2.12)$$

2.2. Simetrías

La física teórica describe y/o predice el comportamiento de la naturaleza, a partir de una observación se proponen modelos matemáticos que reproduzcan o se ajusten a características específicas del sistema. En la realidad los eventos involucran múltiples variables y para describirlos usualmente se hacen suposiciones y restricciones que simplifican el problema. Las simetrías juegan un papel muy importante en la descripción de los fenómenos físicos pues imponen limitaciones en las interacciones y reflejan la invariancia (sin cambio) de un objeto ante una transformación. Hay dos tipos de simetrías, locales, donde los parámetros de la transformación dependen de las coordenadas espacio-temporales y las globales que son independientes de las coordenadas.

Cualquier observable se puede expresar en términos de campos y combinaciones entre ellos, estos campos que aparecen en la Lagrangiana, pertenecen a la representación del espacio del grupo de simetría interna. Las transformaciones lineales de los campos relacionadas a grupos de simetría internos no afectan a las cantidades físicas. Por otro lado, también existen simetrías externas que están relacionadas con la invariancia de las cantidades físicas con respecto a transformaciones de traslación y de Lorentz. De la invariancia de Lorentz se obtiene la conservación del momento angular y si la transformación no depende de las coordenadas espacio-temporales se conserva la energía-momento [36].

Una de las grandes ventajas de la formulación Lagrangiana es que las simetrías que posee implican la conservación de cantidades (corrientes). La relación entre las simetrías y las leyes de conservación se describe mediante el teorema de Noether, establece que si la acción que describe el sistema posee una simetría continua entonces existen cantidades que se conservan en el tiempo [37, 38].

Teorema 1 *Si un sistema (definido por una cierta Lagrangiana) es invariante bajo un conjunto de transformaciones de simetría, entonces existe un conjunto de cuatricorrientes conservadas $j_i^\mu(x) = (\rho_i(t, \mathbf{x}), \mathbf{j}_i(t, \mathbf{x}))$ que satisfacen la ecuación de continuidad $\partial_\mu j_i^\mu(x) = 0$.*

Las transformaciones se generan por su correspondiente conjunto de cargas generalizadas (que representan a los generadores del grupo de simetría) y están dadas por

$$Q_i = \int d^3\mathbf{x} j_i^0(t, \mathbf{x}) \quad (2.13)$$

donde j_i^0 es la componente i de una corriente conservada. La conservación de corrientes implica la independencia del tiempo de las cargas $\frac{dQ_i}{dt} = 0$.

Sea q_i un conjunto de coordenadas generalizadas, para una acción $S[q_i(t)]$ una función $f_i(t)$ es una simetría si se cumple que $S[q_i(t) + f_i(t)] = S[q_i(t)]$ para toda $q(t)$. Las simetrías son las direcciones en el espacio generadas por las q_i donde la acción no cambia. Para el teorema de Noether se analizan las simetrías infinitesimales y se denotan por δ , entonces $f_i(t) = \delta_s q_i(t)$ (el subíndice s denota simetría). Se define una simetría como una función $\delta_s q_i(t)$ tal que para cualquier $q_i(t)$ la acción es invariante [39].

2.2.1. Teorema de Noether

Para un sistema mecánico simple, su acción genérica está descrita por [40]

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2.14)$$

L representa la Lagrangiana que está en función de las coordenadas $q(t)$ y sus derivadas respecto al tiempo $\dot{q}(t)$. Sea S invariante bajo transformaciones continuas de las variables dinámicas

$$q(t) \rightarrow q'(t) = f(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.15)$$

donde $f(q(t), \dot{q}(t))$ es un funcional de $q(t)$, estas transformaciones se llaman transformaciones de simetría y forman un grupo de simetría del sistema. Al realizar dos transformaciones de simetría sucesivas, el resultado es también una transformación de simetría. Para una transformación de simetría infinitesimal se tiene la diferencia (variación de simetría) $\delta_s q(t) \equiv q'(t) - q(t)$ y tiene la forma general

$$\delta_s q(t) = \epsilon \Delta(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2.16)$$

donde ϵ corresponde a la magnitud de una traslación en el tiempo.

El principio de mínima acción establece que la trayectoria del sistema entre un estado inicial $q_a = q(t_a)$ y otro final $q_b = q(t_b)$ fijos es un extremo (generalmente un mínimo) de la acción

$$\delta S = \delta \int_{t_a}^{t_b} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_{t_a}^{t_b} dt \delta L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \quad (2.17)$$

entonces el cambio de la acción bajo la variación de simetría (2.16) está dado por

$$\delta_s S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] \delta_s q(t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta_s q(t) \Big|_{t_a}^{t_b} \quad (2.18)$$

para órbitas $q(t)$ que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.19)$$

solo restan los términos de frontera y se obtiene

$$\delta_s S = \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta(q, \dot{q}, t) \Big|_{t_a}^{t_b} \quad (2.20)$$

Suponiendo que $\delta_s S$ es cero para cualquier trayectoria $q(t)$, implica que la cantidad

$$Q(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta(q, \dot{q}, t) \quad (2.21)$$

llamada carga de Noether, es la misma a tiempo $t = t_a$ y $t = t_b$, como t_b es arbitrario, $Q(t)$ es independiente del tiempo t , por lo tanto se cumple que $Q(t) = Q$, que corresponde a una cantidad conservada, una constante de movimiento.

Ahora suponiendo que en vez de un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad $q_i(t)$ se tiene un medio continuo, entonces el sistema se describe por un campo $\psi(x)$, $q_i(t) \rightarrow \psi(t, \mathbf{x}) = \psi(x)$ y su dinámica por la Lagrangiana

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x) \quad (2.22)$$

donde \mathcal{L} denota la densidad Lagrangiana, entonces la acción se define como [41]

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x) \quad (2.23)$$

Sea una transformación del campo $\delta_s\psi(x) = \epsilon\Delta(\psi, \partial\psi, x)$ que cambia a \mathcal{L} por una derivada total $\delta_s\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu\Lambda^\mu$ o de forma equivalente, la acción cambia por un término de superficie $\delta_s S = \epsilon \int d^4x \partial_\mu\Lambda^\mu$, $\delta_s\mathcal{L}$ es llamada transformación de simetría. Del principio de mínima acción se tiene

$$\delta_s S = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\psi) \right] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right] \delta\psi = 0 \quad (2.24)$$

la condición de contorno es que los campos permanecen constantes en el infinito en vez de que el tiempo inicial y final sean fijos como en el caso clásico, de esta manera se tiene la ecuación de Euler-Lagrange para el campo ψ

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = 0 \quad (2.25)$$

Para la transformación de simetría se obtiene un cuadvivector de corriente

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)} \Lambda - \Delta^\mu \quad (2.26)$$

que corresponde a la carga de Noether y cumple la ley (local) de conservación de la corriente $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$.

Si los campos desaparecen cuando las coordenadas espaciales tienden a infinito, se obtiene una ley de conservación global (independiente de las coordenadas) para la carga mediante la integración espacial de la densidad de carga j^0

$$Q(t) = \int d^3\mathbf{x} j^0(x, t) = \frac{d}{dt} Q(t) = \int d^3\mathbf{x} \partial_0 j^0(x, t) \quad (2.27)$$

al agregar una integral espacial sobre una tridivegencia total que desaparece como consecuencia de las condiciones de frontera se tiene

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \int d^3\mathbf{x} [\partial_0 j^0(x, t) + \partial_i j^i(x, t)] \quad (2.28)$$

entonces la carga se conserva $\frac{d}{dt} Q(t) = 0$. En las teorías cuánticas las cargas conservadas son los generadores de la simetrías que realizan el grupo de transformaciones mediante operadores unitarios $U = e^{i\theta_a Q^a}$, donde θ_a son parámetros continuos que

caracterizan la transformación. Los operadores conmutan con el Hamiltoniano, de tal manera que se cumple $UHU^\dagger = H$.

En el caso particular de los fermiones sin masa, su densidad Lagrangiana está dada por [42]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \quad (2.29)$$

sea la transformación

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a\tau^a}\psi \simeq (1 - i\theta_a\tau^a)\psi \quad (2.30)$$

donde τ_a son los $(N_f^2 - 1)$ generadores del grupo y θ es un número real, el campo conjugado se transforma como

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta_a\tau^a}\bar{\psi} \simeq (1 + i\theta_a\tau^a)\bar{\psi} \quad (2.31)$$

al aplicar estas transformaciones a la Lagrangiana, queda invariante

$$i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - i\theta_a [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\tau^a\psi - \bar{\psi}\tau^ai\gamma_\mu\partial^\mu\psi] = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \quad (2.32)$$

De la ecuación (2.26) se obtiene la corriente conservada

$$j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^a\psi \quad (2.33)$$

denominada corriente vectorial. La cargas conservadas (generadores del grupo de transformación) son entonces

$$Q^a = \int d^3\mathbf{x}j_0^a(x) \quad (2.34)$$

Ahora considerando la transformación

$$\psi \rightarrow e^{-i\gamma_5\theta_a\tau^a}\psi \simeq (1 - i\gamma_5\theta_a\tau^a)\psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\gamma_5\theta_a\tau^a}\bar{\psi} \simeq (1 - i\gamma_5\theta_a\tau^a)\bar{\psi} \quad (2.35)$$

al aplicarla a la Lagrangiana se obtiene

$$i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \rightarrow i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - i\theta_a [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\gamma_5\tau^a\psi - \bar{\psi}\gamma_5\tau^ai\gamma_\mu\partial^\mu\psi] = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi \quad (2.36)$$

como γ_5 anticonmuta con γ_μ el segundo término se elimina, por lo tanto la Lagrangiana es invariante bajo esta transformación, entonces la corriente conservada es

$$j_{5\mu}^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi \quad (2.37)$$

la cual corresponde a la corriente axial. Con este resultado se definen las cargas conservadas de esta transformación como

$$Q_5^a = \int d^3\mathbf{x}j_{50}^a(x) \quad (2.38)$$

Tabla 2.1: Sabores de quarks y sus propiedades [43]

sabor	u		d		s	
carga (e)	+2/3		-1/3		-1/3	
masa (MeV)	2.16	+0.49	4.67	+0.48	93	+11
		-0.26		-0.17		-5
sabor	c		b		t	
carga (e)	+2/3		-1/3		+2/3	
masa (GeV)	1.27±0.02		4.18	+0.03	176.72±0.30	
				-0.02		

2.2.2. Simetría de sabor

La QCD es una teoría donde los quarks no se observan en la naturaleza como partículas individuales, por el contrario, describe observables que son invariantes de norma como los hadrones (singlete de color), partículas formadas por estados ligados de quarks y gluones que sí se encuentran en la naturaleza como partículas libres. Existen 6 quarks que se identifican con el número cuántico de sabor f además de sus tres colores posibles, los cuales muestran en la Tabla 2.1.

En el caso hipotético donde todos los N_f quarks tienen la misma masa m (N_f sabores degenerados), se asigna el campo quark (antiquark) a la representación N_f -dimensional (y a su compleja conjugada), con respecto al grupo especial unitario $SU(N_f)_V$ que actúa en el espacio del sabor, las transformaciones (llamadas vectoriales) que son elementos del grupo están definidas por (2.30) [44]. Sin embargo, en la naturaleza todos los quarks tienen masa finita por lo que la simetría de sabor es aproximada, la inexactitud de la simetría aumenta para $N_f > 3$ dada la gran diferencia de masa entre sabores de quarks.

Al introducir un término de masa $\delta\mathcal{L} = -m(\bar{\psi}\psi)$ en (2.29) bajo la transformación (2.30) se obtiene

$$m(\bar{\psi}\psi) \rightarrow m(\bar{\psi}\psi) - im\theta_a [\bar{\psi}\tau^a\psi - \tau^a\bar{\psi}\psi] = m(\bar{\psi}\psi) \quad (2.39)$$

por lo tanto la Lagrangiana para quarks con masa diferente de cero es invariante ante la transformación. Al someter el término de masa a la transformación (2.35) el resultado es

$$m(\bar{\psi}\psi) \rightarrow m(\bar{\psi}\psi) - 2im\theta_a [\bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi] \quad (2.40)$$

como consecuencia la Lagrangiana no es invariante cuando los fermiones tienen masa finita.

Los quarks se dividen en dos grupos: ligeros u , d y s y pesados c , b y t , donde la diferencia de masa entre ambas categorías es grande, mayor a 1 GeV, por lo que se puede hacer uso de una simetría aproximada solo con los 3 quarks más ligeros. Así la simetría de sabor puede ser $SU(2)_V$ (simetría de isospín) para u y d o $SU(3)_V$ para u , d y s .

El grupo $SU(3)$ se define como el conjunto de matrices U de dimensión 3×3 , unitarias y unimodulares, $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$, $\det(U) = 1$. Cada elemento del grupo

se puede parametrizar mediante un conjunto de ($N_f = 3 \rightarrow N_f^2 - 1 = 9^2 - 1$) 8 parámetros reales independientes que varían en un rango continuo. En el grupo $SU(3)_V$ los campos se transforman como

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a \frac{\lambda_a}{2}} \psi \quad (2.41)$$

donde $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ es un triplete de sabor y λ_a son las 8 linealmente independientes matrices de Gell-Mann, Hermitianas cuya traza es igual a cero.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

En la simetría $SU(3)_V$ los quarks están en la representación $\mathbf{3}$ y los antiquarks en $\bar{\mathbf{3}}$, por lo que los mesones que están formados por dos partículas ($\bar{\psi}\psi$), un quark y un antiquark se clasifican mediante la representación

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{8}$ representa un octete y $\mathbf{1}$ un singlete. Por ejemplo los mesones vectoriales ρ , K^* , ω y ϕ y los mesones escalares π , K , η y η' se pueden agrupar en un octete más un singlete. Los bariones formados por 3 quarks ($\psi\psi\psi$), se clasifican mediante la representación

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (2.44)$$

en este caso Δ , Σ' , Ξ y Ω se agrupan en un decuplete y N , Σ , Ξ y Λ en un octete.

En la simetría de isospín $SU(2)_V$ el campo de los quarks $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ corresponde a un doblete de sabor de los espinores de Dirac u y d . Las transformaciones sobre los campos que son elementos del grupo se escriben como

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a \frac{\sigma_a}{2}} \psi \quad (2.45)$$

donde σ_a son las matrices de Pauli de la ecuación (2.7), también se les puede denotar por $\tau_a = \frac{\sigma_a}{2}$. Aunque la diferencia de masas entre el quark u y d es muy pequeña, la simetría de isospín es una simetría aproximada.

2.2.3. Simetría quiral

Los campos de los quarks se pueden transformar de otra forma cuando se incluye la matriz γ_5 , esto corresponde a la transformación axial, también llamada quiral ya que cambia la paridad de los campos. De forma similar a las transformaciones de sabor (2.30), el grupo de transformación axial está definido como [44]

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a^A \gamma_5 \tau_a} \psi \quad (2.46)$$

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger \quad (2.47)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac. La simetría es exacta para partículas sin masa, para las cuales su espín puede estar alineado o no con su momento, con lo que se definen los campos izquierdo (no alineado) (L) y derecho (alineado) (R) [45]

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, & \psi_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \\ \bar{\psi}_L &= \psi_L^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 + \gamma_5}{2}, & \bar{\psi}_R &= \psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

de esta forma las transformaciones se realizan de manera separada, cada una genera un grupo de transformaciones $SU(N_f)$, entonces el grupo quiral se forma con el producto directo de dos grupos $SU(N_f)$: $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$ [46].

Como en la realidad los quarks tienen masa, la simetría no puede ser exacta en la QCD, ya que la masa introduce un rompimiento explícito de la simetría quiral. El rompimiento de la simetría se puede tratar como una perturbación solo si las masas de los quarks son pequeñas como u , d y s por lo que los restantes 3 quarks más pesados quedan descartados. Suponiendo que la simetría se cumpliera de forma aproximada en la naturaleza, en su manifestación se requiere que cada multiplete tenga un compañero de paridad opuesta, misma masa y espín. Sin embargo no se observan pares de paridad opuesta en los hadrones, por lo tanto la simetría se cumple mediante el rompimiento espontáneo de la simetría quiral o modo Nambu-Goldstone.

Cuando los generadores de la transformación operan sobre el vacío se producen estados que tienen las mismas propiedades cuánticas que los generadores, se asume que el vacío tiene paridad positiva y no tiene números cuánticos, por lo que los nuevos estados son pseudoescalares. La simetría se presenta en el modo Goldstone a través del rompimiento espontáneo de la simetría quiral [47].

Teorema 2 *El rompimiento espontáneo de simetrías globales continuas implica la existencia de partículas sin masa. Si la Lagrangiana es invariante bajo una transformación continua, eso implica que una y solo una de las siguientes dos condiciones se cumple:*

1. *El vacío es también invariante ante esta transformación.*
2. *Existe una partícula de masa cero y espín cero.*

Esto solo es posible si existen partículas pseudoescalares sin masa que también pueden generar por superposición otros estados de energía cero de muchas partículas. Entonces el rompimiento espontáneo de la simetría quiral se observa con la existencia de 8 partículas pseudoescalares (mesones) llamadas bosones Nambu-Goldstone los cuales son π , K y η . En la realidad todos los quarks tienen masa, por lo tanto, los 8 bosones también adquieren una masa muy pequeña comparada con la de los hadrones.

2.2.4. Rompimiento espontáneo de una simetría

Un aspecto muy importante a considerar de las simetrías que posee una teoría es que no necesariamente el sistema tiene las mismas simetrías que la teoría que lo describe. El rompimiento espontáneo de una simetría corresponde a una Lagrangiana (o Hamiltoniano) que es invariante bajo cierta transformación pero el estado base de la teoría no lo es [48], un objeto es menos simétrico que las leyes de la naturaleza que lo describen. Mientras que en el rompimiento explícito de una simetría no hay una simetría exacta con la cual se 'comienza' a describir un sistema.

Un sistema simétrico descrito por una Lagrangiana que es invariante bajo una transformación unitaria, usualmente tiene una configuración simétrica de equilibrio. Los sistemas cuánticos que son simétricos pueden tener un estado base único y simétrico o un conjunto de estados base degenerados relacionados por una transformación de simetría. Esta forma de realizarse la simetría se conoce como modo Wigner-Weyl, aquí las cargas aniquilan el vacío $Q^a|0\rangle = 0$ por lo que permanece invariante bajo el grupo de transformaciones $U|0\rangle = |0\rangle$ [49]. Para un estado $|A\rangle = \psi_A^\dagger|0\rangle$ la transformación de simetría genera otro estado $|B\rangle = \psi_B^\dagger|0\rangle = U|A\rangle$ con la misma energía.

Cuando el estado $|0\rangle$ de un sistema no es invariante bajo una transformación U de la Lagrangiana que describe el sistema, se dice que el estado tiene un rompimiento espontáneo de la simetría. Sea $U = e^{i\theta_a Q^a}$ una transformación de simetría que conmuta con el Hamiltoniano y está parametrizada por una variable discreta o continua θ_a . El estado $|0\rangle$ rompe la simetría si existe un operador ϕ tal que [50]

$$\langle 0|[Q, \phi]|0\rangle \neq 0 \quad (2.49)$$

donde $|0\rangle$ es el estado base invariante de traslación. Si el operador ϕ no existe, el estado es simétrico bajo la transformación U . Esta definición corresponde a la condición del rompimiento espontáneo de una simetría.

Dada una corriente conservada $j_\mu^a(x)$ y su correspondiente carga conservada Q^a , si existe un operador \mathcal{O} de tal forma que $v_a \equiv \langle 0|[Q^a, \mathcal{O}]|0\rangle \neq 0$ entonces la teoría contiene un estado sin masa $|\phi^a\rangle$ que se acopla a \mathcal{O} y a j_0^a , $\langle 0|\mathcal{O}|\phi^a\rangle\langle\phi^a|j_0^a(0)|0\rangle \neq 0$ [51]. El valor esperado de v_a es llamado parámetro de orden del rompimiento de la simetría. Para una transformación de simetría continua existen infinitos estados base degenerados, dado que están conectados por las transformaciones, son físicamente equivalentes y cada uno de ellos puede servir como punto de partida para construir los diferentes estados excitados.

En la Fig. 2.1 se muestran dos potenciales invariantes de rotación que representan un ejemplo de interacción. En Fig. 2.1a el estado base está justo en el centro por lo que tanto el estado base como el potencial son invariantes bajo rotaciones. En la Fig. 2.1b el centro del potencial es un máximo local por lo que es inestable, el estado base se encuentra desplazado a una distancia finita de dicho centro. Al colocar una esfera en el máximo local, esta rodará hacia abajo para encontrar su estado base en algún lugar del valle que representa el mínimo del potencial. Al 'escoger' uno de los puntos del valle la simetría de rotación se rompe, se ha roto espontáneamente.

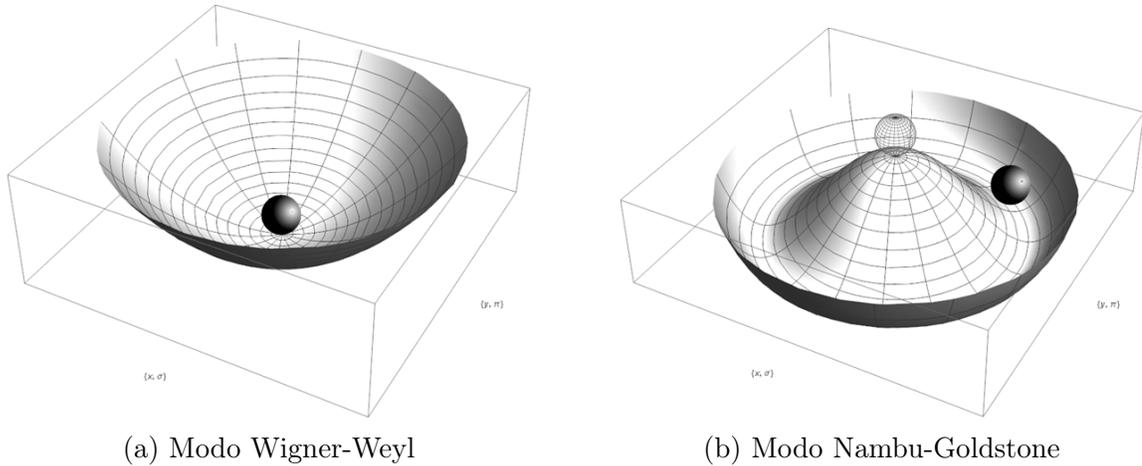


Figura 2.1: Potenciales modelo que son invariantes de rotación

Ahora se usa esta analogía con la mecánica para entender lo que significa el rompimiento espontáneo de la simetría axial de la interacción fuerte. Se asume que el Hamiltoniano efectivo de la QCD a temperatura cero tiene una forma similar a la que se muestra en la Fig. 2.1b, donde las coordenadas (x, y) se reemplazan por campos $(\sigma, \boldsymbol{\pi})$. Entonces, las rotaciones espaciales son el análogo mecánico a la rotación del vector axial, que rota a $\boldsymbol{\pi}$ hacia σ , $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\theta}\sigma$. Como el estado basal no está en el centro, sino a una distancia finita alejado de él, uno de los campos tiene un valor esperado finito. Este campo solamente puede ser el sigma, ya que perturbaciones en la dirección σ corresponden a excitaciones radiales que tienen masa, por otro lado, los piones corresponden a pequeñas rotaciones a lo largo del valle que no cuestan energía, por lo tanto la masa del pión debería ser cero.

Capítulo 3

Cromodinámica Cuántica

3.1. Lagrangiana

La QCD está descrita por la Lagrangiana [44, 52, 53]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

donde ψ representa el campo de los quarks con tres colores y N_f sabores $\psi = (u, d, s, c, b, t)$, $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ es una matriz para las masas corriente (*bare mass*) en el espacio de sabores. La derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a \quad (3.2)$$

está relacionada con el campo gluónico A_μ^a , g es la constante de acoplamiento fuerte y λ^a corresponde a las matrices de Gell-Mann $SU(3)$ -color. El campo de fuerza $F_{\mu\nu}^a$ está dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.3)$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$. En todos los casos $a, b, c = 1 \dots 8$ y los índices griegos $\mu, \nu = 0 \dots 3$ corresponden a las componentes de Lorentz. ψ representa un triplete (vector de 3 componentes) que en forma desarrollada es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^g \\ \psi^b \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

donde $r = red$, $g = green$ y $b = blue$ corresponden a los números cuánticos de color, de la misma forma los antiquarks se identifican con los números *anti-red*, *anti-green* y *anti-blue*.

El campo ψ de los quarks cambia bajo una transformación $g(x)$ descrita por el conjunto de parámetros $\theta(x) = [\theta_1(x), \dots, \theta_8(x)]$ [54]

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a(x)\frac{\lambda_a^C}{2}}\psi \quad (3.5)$$

donde el subíndice C indica que las matrices de Gell-Mann actúan sobre el espacio de color, por lo que cada campo se transforma de acuerdo a la representación fundamental de $SU(3)$ -color. Como el grupo $SU(3)$ tiene 8 parámetros, la derivada covariante (3.2) tiene 8 potenciales de norma A_μ^a independientes

$$D_\mu \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^g \\ \psi^b \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^g \\ \psi^b \end{pmatrix} - ig \frac{\lambda_C^a}{2} A_\mu^a \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^g \\ \psi^b \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

la interacción entre quarks y gluones es independiente del sabor del quark ya que solo aparece una constante de acoplamiento g en la ecuación anterior. La Lagrangiana de la QCD es invariante por definición ante transformaciones de norma [55], los quarks y los gluones se transforman como

$$\psi \rightarrow V\psi, \quad A_\mu \rightarrow V \left(A_\mu - \frac{1}{ig} \partial_\mu \right) V^\dagger \quad (3.7)$$

donde $V \in SU(N_c)$, se cumple que $V \cdot V^\dagger = V^\dagger \cdot V = 1$ y el determinante de V es 1.

La física de los hadrones en un rango intermedio de energía, que corresponde a la materia que se encuentra comúnmente en la naturaleza (no considera al quark s), se puede estudiar mediante la dinámica de los quarks más ligeros u y d , por lo que la Lagrangiana de la QCD (3.1) se puede escribir como [53]

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{u}\gamma_\mu D^\mu u + i\bar{d}\gamma_\mu D^\mu d - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.8)$$

si las masas son iguales, la teoría tiene simetría global $SU(2)$ que rota al quark u en d y viceversa. Sea $m_u = m_d = 0$ y $\psi_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi$ los campos derecho e izquierdo, la Lagrangiana se reescribe como

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{u}^L\gamma_\mu D^\mu u^L + i\bar{u}^R\gamma_\mu D^\mu u^R + i\bar{d}^L\gamma_\mu D^\mu d^L + i\bar{d}^R\gamma_\mu D^\mu d^R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.9)$$

esta expresión es invariante ante rotaciones. En el límite quiral los sectores derecho e izquierdo están totalmente desconectados uno de el otro y cualquier combinación entre ellos está prohibida en la Lagrangiana, como consecuencia la Lagrangiana es invariante ante dos rotaciones quirales independientes [55]

$$\begin{aligned} \psi_L \rightarrow \psi'_L &= L\psi_L, & \psi_R \rightarrow \psi'_R &= R\psi_R, \\ L &= e^{-i\theta_L^a \tau^a} \in U(2)_L, & R &= e^{-i\theta_R^a \tau^a} \in U(2)_R \end{aligned} \quad (3.10)$$

esto significa que la Lagrangiana (3.9) es invariante ante $U(2)_L \times U(2)_R = SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$. Como se definió con anterioridad para el caso general de N_f sabores, la simetría $SU(2)_L \times SU(2)_R$ corresponde a la simetría quiral de la QCD, donde los bosones de Goldstone sin masa del rompimiento espontáneo de la simetría se asocian con los piones debido a su pequeña masa (~ 138 MeV). Si la simetría fuese exacta los piones no tendrían masa, sin embargo la pequeña masa finita refleja

el rompimiento explícito de la simetría a través de las masas corriente de los quarks u y d .

La simetría $U(1)_V$ que involucra las transformaciones $\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$ corresponde a la conservación del número bariónico, es exacta aún cuando se incluye la masa corriente de los quarks. Si la simetría $U(1)_A$, donde los campos se transforman como $\psi \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5}\psi$ [44], se manifestara de manera análoga a la simetría quiral se necesitaría que existieran mesones pseudoescalares con una masa similar a los piones, pero no se han observado. De hecho esta simetría está rota a nivel cuántico por lo que no es una simetría de la QCD. Se podría asociar el meson η' (~ 958 MeV) pero su masa debería ser mucho más pequeña (más pequeña aún que $\eta \sim 548$ MeV) si fuese un bosón de Goldstone. Para resolver el problema 't Hooft demostró que debido a efectos de los instantones la simetría $U(1)_A$ no tiene manifestación física. En las interacciones de los quarks los instantones median la interacción que posee $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ pero rompe explícitamente la simetría $U(1)_A$ ('interacción de 't Hooft').

3.2. Clasificación de las transiciones de fase

En el estudio de las propiedades termodinámicas de un sistema clásico se define una fase como un estado de la materia donde las propiedades físicas macroscópicas de la sustancia son uniformes en una escala de tamaño macroscópica. Está caracterizada por una función termodinámica que a su vez es función de parámetros macroscópicos como la temperatura y la presión [56]. Se define un diagrama de fases como la información acerca de la localización de las fronteras de fase (transiciones de fase) que corresponden a singularidades termodinámicas del sistema, así como también la física de las fases que las transiciones delimitan [61]. El diagrama se representa como una gráfica con los parámetros en los ejes donde en cada punto se especifica la fase.

Una transición de fase es un fenómeno donde ocurre un cambio drástico entre fases a medida que los parámetros del sistema varían, este cambio se caracteriza por la aparición de singularidades en las funciones que representan las cantidades físicas. Para describir la evolución de una transición de fase se utiliza un parámetro de orden que mide el ordenamiento (o cuantos están en un estado similar) de los elementos microscópicos que constituyen la fase macroscópica. Respecto al rompimiento de una simetría, el parámetro de orden mide el grado de asimetría en la fase con la simetría rota (fase ordenada), es diferente de cero en la fase ordenada (estado de menor simetría) y cero en la fase desordenada (fase simétrica) [56].

El orden de una transición de fase es una de las clasificaciones termodinámicas básicas, de acuerdo a la clasificación original de las transiciones de fase de Ehrenfest [57, 58], las transiciones de n -ésimo orden están definidas por la existencia de discontinuidades (en vez de divergencias) en la n -ésima derivada del correspondiente potencial termodinámico. En base a esta clasificación, M. E. Fisher [59] indica que las transiciones donde una o más de las primeras derivadas del potencial termodinámico cambia de forma discontinua como función de sus variables son llamadas transiciones de primer orden. Por otro lado, las transiciones donde las primeras derivadas del potencial termodinámico son continuas mientras las derivadas de orden

superior son divergentes o cambian de forma discontinua en el punto de transición se denominan transiciones continuas. En una transición de segundo orden al menos una de las segundas derivadas del potencial termodinámico es divergente. Si no existen discontinuidades en alguna de las derivadas se define una zona difusa llamada *crossover* que se interpreta como la coexistencia de diferentes fases. En la Fig. 3.1 se muestra la clasificación de las transiciones de fase de acuerdo al comportamiento del parámetro de orden, A y B corresponden a los parámetros del sistema.

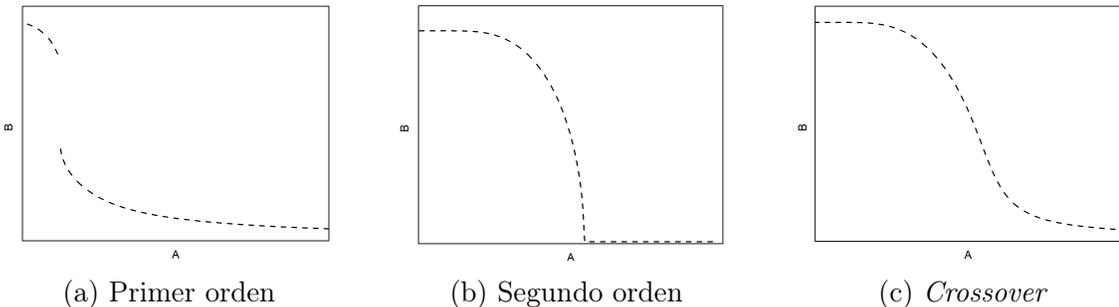


Figura 3.1: Clasificación de las transiciones de fase de acuerdo al orden de la discontinuidad

En el caso ideal de la QCD donde los quarks no tienen masa, se tienen las fases bien delimitadas del gas de hadrones y el plasma de quarks y gluones como se muestra en la Fig. 3.2a. En esta aproximación de 2 quarks sin masa (*up* y *down*) la simetría $SU(2)_V \times SU(2)_A$ es exacta y espontáneamente rota en el vacío a $SU(2)_V$. A suficientemente alta temperatura se restaura la simetría quiral y las dos fases deben estar separadas por una singularidad termodinámica, lo que corresponde a una transición de fase.

Considerando el valor esperado del parámetro de orden $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ para un valor fijo de μ , el condensado quiral como función de T es idénticamente cero (por simetría) para todas las temperaturas mayores que una temperatura crítica T_c y es diferente de cero para temperaturas menores (rompimiento de la simetría). Entonces el comportamiento de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ corresponde a al que se muestra en la Fig. 3.1b donde el parámetro de orden se va a cero de forma continua. Se alcanza un punto tricrítico TCP en T_c, μ_c donde la transición cambia de orden, de segundo (línea punteada) a primero (línea continua) [60], por lo tanto el parámetro de orden es discontinuo en esta región del diagrama y su comportamiento es como el que se muestra en la Fig. 3.1a.

Al tomar en cuenta la masa corriente de los quarks la delimitación entre la fase simétrica y la restaurada se hace difusa por lo que la transición de segundo orden corresponde a un *crossover*, a lo largo de esta región, el parámetro de orden tiende a cero y es suave como se muestra en la Figura 3.1c. El *crossover* alcanza un punto crítico llamado *Critical End Point (CEP)* [61, 62, 63] denotado por E en la figura 3.2b donde termina la transición de primer orden que separa la fase de la materia nuclear del QGP.

En general el orden de las transiciones en la QCD y sus respectivas T_c dependen del número de colores N_c , el número de sabores N_f , la masa corriente de los quarks y el

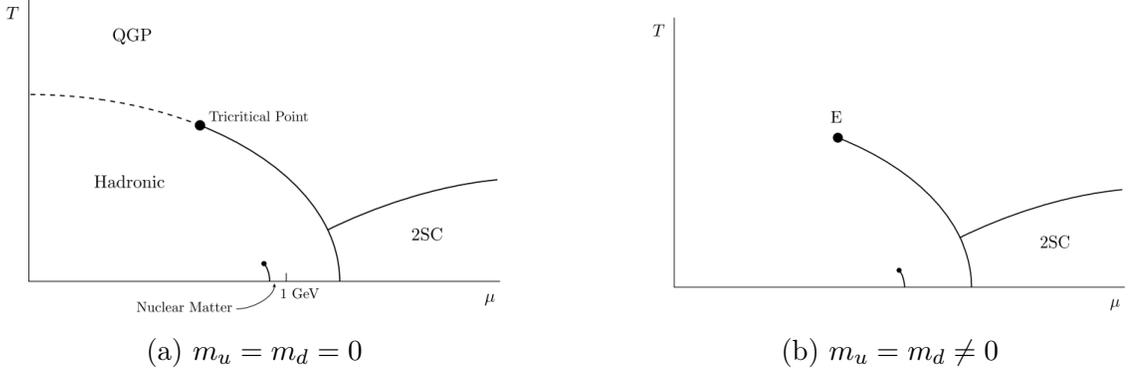


Figura 3.2: Diagramas de fase genéricos de la QCD [68]

método de regularización [57]. Se supone que la transición de desconfinamiento es de primer orden para tres colores en el límite de quarks con masa infinita [64, 65, 66, 67]. La transición quiral se supone de segundo orden para dos sabores de quarks sin masa y de primer orden para tres o más sabores [68, 69]. Para el crossover no se tiene una T_c definida dado que se trabaja en un intervalo estrecho de temperatura donde coexisten dos fases, además se presentan cambios rápidos en las cantidades termodinámicas, por lo que se asocia una temperatura pseudocrítica.

3.3. Lattice Quantum Chromodynamics

Debido a la imposibilidad de tratar el problema de una interacción cuya constante de acoplamiento sea mayor que uno por medio de la teoría de perturbaciones, Wilson [70] propuso cuantizar la teoría de norma en un mallado euclidiano discreto de cuatro dimensiones que preservaba exactamente la simetría de norma. Sin contar a la teoría de perturbaciones en el régimen de altas energías, este método conocido como *Lattice Quantum Chromodynamics* (LQCD) es el único método que parte de primeros principios con el cual se puede estudiar la QCD satisfactoriamente. Esta técnica calcula las interacciones fuertes mediante simulaciones numéricas a gran escala con el método Monte-Carlo, se realiza la integral de camino en el espacio euclidiano en un volumen finito discretizado en el espacio-tiempo donde los efectos del volumen y la discretización se desvanecen en el límite termodinámico y en el límite continuo [71].

Dado que la QCD debe ser regularizada, LQCD provee un regulador en el ultravioleta a través de la discretización del espacio-tiempo, $(\tau, x, y, z) = (ai_\tau, ai_x, ai_y, ai_z)$ con el espaciado de la malla, a , i_μ es entero, $1 \leq i_\tau \leq N_\tau$ y $1 \leq i_\sigma \leq N_\sigma = L/a$ ($\sigma = x, y, z$) [72]. Los campos de los gluones se introducen mediante enlaces de norma $SU(3)$, $U_\mu(x)$ que se encuentran en los enlaces que conectan los sitios x y $x + \hat{\mu}$ como se muestra en la Fig. 3.3.

Las variables de enlace están dadas por

$$U_\mu(x) = x \bullet \longrightarrow \bullet x + \hat{\mu}, \quad U_\mu^\dagger(x) = x \bullet \longleftarrow \bullet x + \hat{\mu} \quad (3.11)$$

$U_\mu(x)U_\mu^\dagger(x) = 1$. Estas variables corresponden a los transportadores paralelos entre dos nodos vecinos $(x, x + \hat{\mu})$ y están localizadas en las orillas de la malla mientras que los grados de libertad de los fermiones $\bar{\psi}(x), \psi(x)$ se encuentran en los nodos [73].

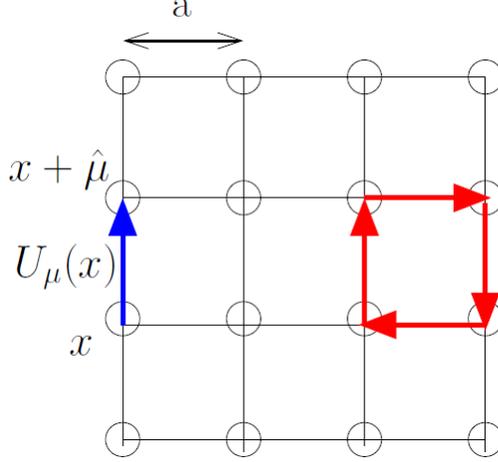


Figura 3.3: El espacio-tiempo se discretiza con el espaciado a de la malla. La plaqueta corresponde al cuadrado formado por flechas [74]

3.3.1. Aspectos básicos

En LQCD la función de partición depende explícitamente del volumen V , temperatura T y potencial químico μ , se representa en términos de una integral de camino euclidiana sobre los campos de norma (A_ν) y fermiones ($\bar{\psi}, \psi$) [75]

$$Z(V, T, \mu) = \int \mathcal{D}A_\nu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_E(V, T, \mu)} \quad (3.12)$$

donde A_ν y $\bar{\psi}, \psi$ cumplen las condiciones periódicas y antiperiódicas en el tiempo euclidiano respectivamente. La acción euclidiana $S_E \equiv S_G + S_F$ está compuesta por una contribución puramente gluónica (S_G) en términos del tensor de campo de fuerza, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ y por una parte fermiónica (S_F) que acopla la norma y los campos de los fermiones [76]

$$S_E(V, T, \mu) \equiv S_G(T, V, \mu) + S_F(V, T, \mu) \quad (3.13)$$

$$S_G(V, T) = \int_0^{1/T} dx_0 \int_V d^3\mathbf{x} \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (3.14)$$

$$S_F(V, T, \mu) = \int_0^{1/T} dx_0 \int_V d^3\mathbf{x} \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\psi}_f (\gamma_\mu [\partial_\mu - igA_\mu] + m_f - \mu\gamma_0) \psi_f \quad (3.15)$$

La integral de camino de la función de partición se regulariza mediante el uso de una malla espacio-temporal de 4 dimensiones de tamaño $N_\sigma^3 \times N_\tau$ con espaciado a . El

volumen y la temperatura se relacionan con el número de puntos en las direcciones de espacio y tiempo como $V = L^3 = (N_\sigma a)^3$, $1/T = N_\tau a$. Para que la acción (3.14) de la LCQD sea invariante de norma, Wilson introdujo el llamado *Wilson loop* que se define como la traza sobre el color del producto ordenado en la trayectoria para una integral a lo largo del camino cerrado \mathcal{P}

$$U_{x,\mu} = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_x^{x+\hat{\mu}a} dx^\mu A_\mu(x) \right] \quad (3.16)$$

el cual es invariante de norma por la propiedad cíclica de la traza. El análogo en *lattice* al *Wilson loop* se construye en términos de las variables de enlace $U_\mu(x)$, el *loop* más pequeño en *lattice* se llama plaqueta elemental [77]

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) \quad (3.17)$$

donde se cumple que $P_{\mu\nu}^\dagger = P_{\nu\mu}$, la expresión para el *loop* se obtiene al realizar la traza sobre el color $W_{\mu\nu}(x) = \text{Tr}P_{\mu\nu}(x)$, entonces la expresión para la acción de norma de Wilson está dada por [78]

$$S_G^{Wil} = \frac{1}{2g^2} \sum_{x,\mu,\nu} 2\text{Tr}[1 - P_{\mu\nu}(x)] = \beta \sum_{x,\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re}W_{\mu\nu}(x) \right], \quad \beta = \frac{2N_c}{g^2} \quad (3.18)$$

en el límite cuando $a \rightarrow 0$, la acción de Wilson se reduce a la acción de los gluones en (3.14).

Para el caso de los fermiones, la acción se escribe como [79]

$$S_F = \sum_x \bar{\psi}(x) \left[\sum_\mu \frac{U_\mu(x)\psi(x + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(x)\psi(x - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(x) \right] \quad (3.19)$$

con esta expresión, apartir de de la función de partición (3.12) se realiza la integral de camino sobre los campos de los fermiones y se obtiene $Z = \int \mathcal{D}U \det D \exp(-S_G)$, donde D corresponde al propagador de Dirac. El integrando $\det D \exp[-S_G]$ se considera como el peso estadístico para la configuración de variables de enlace. La matriz D es hermitiana y su determinante es real en $\mu = 0$

$$[\gamma_5 D(\mu) \gamma_5]^\dagger = D(-\mu^*), \quad [\det D(\mu)]^* = \det[D(-\mu^*)] \quad (3.20)$$

así es posible realizar una integral con el método Monte-Carlo para $\mu = 0$ [80]. Esto tiene una desventaja fundamental cuando el potencial químico μ toma un valor real finito: la densidad de probabilidad lleva un factor equivalente al determinante fermiónico elevado al número de sabores $\det D(\mu)^{N_f}$ [81], pero este valor solamente es real cuando la parte real de μ es igual a cero. Para resolver esto, es posible expresar este factor como un producto entre el módulo de dicho factor multiplicado por una fase $e^{i\theta}$. El problema es que el argumento de la fase θ es directamente proporcional al volumen, por lo que la fase tendría un comportamiento oscilatorio donde la frecuencia de dichas oscilaciones se aproxima a infinito al aproximar el problema al límite termodinámico. A este problema se le conoce como problema del signo [82, 83, 84].

3.3.2. Resultados del diagrama de fases

Uno de los principales resultados que se obtiene de los cálculos de LQCD es la temperatura de transición T_c a la cual se teoriza que la materia hadrónica pasa a una fase desconfiada. Debido a que esta temperatura corresponde a un *crossover* [85], los datos que se reportan pueden variar hasta en un 20 %, dependiendo de las observables que se analizan, el espaciado de la malla, la masa física de los quarks y las extrapolaciones de los resultados. A continuación se muestran algunos resultados reportados.

- Bazavov (Hot QCD Collaboration) [86] define T_c con valores diferente de cero para la masa de los quarks ligeros como el pico en la susceptibilidad quiral total, al extrapolar a $m_l/m_s = 0.037$ la masa física de los quarks, reporta $T_c = (154 \pm 9)$ MeV.
- Cheng (RBC-Bielefeld Collaboration) [87] trabajó con la masa del quark s ajustada a su valor físico y la masa del pión que reportan corresponde a 220 MeV, su extrapolación indica $T_c = 196(3)$ MeV.
- Allton [88] propone un método para realizar cálculos a potencial químico pequeño, $\mu/T_c \sim 0.1$, que es el valor de interés para los experimentos de RHIC ($\mu = 15$ MeV) [89] y considera la masa de los quarks en un rango de 1 a 2 MeV. Obtiene resultados para $\mu = 0$ y los utiliza para realizar expansiones en serie de Taylor de orden mayor para potencial químico finito. El problema del signo en su método es despreciable para $\mu/T_c < 0.4 - 0.5$.
- Borsányi (Wuppertal-Budapest Collaboration) [90] reporta para $m_l/m_s = 28$, $T_c = 142(2)(3)$ MeV respecto a la susceptibilidad quiral y $T_c = 157(3)(3)$ MeV, $T_c = 155(3)(3)$ MeV respecto a otras observables. Además definen un rango para las temperaturas de transición entre 150 – 170 MeV.
- Aoki [91] describe varias temperaturas, el máximo de la susceptibilidad quiral se localiza en $T_c = 151(3)(3)$ MeV, $T_c(-s) = 175(3)(4)$ MeV es el máximo de la susceptibilidad de número del quark s y la temperatura de transición extrapolada al continuo basada en el loop de Polyakov es $T_c = 176(3)(4)$ MeV.
- Ding [71] resume los resultados más recientes de LQCD, se reporta que para potencial químico pequeño $T_c^{CEP} < 135 - 140$ MeV y $\mu > 100$ MeV. Para $\mu = 0$ la temperatura pseudocrítica es 156 ± 1.5 MeV en el límite al continuo y 158 ± 0.6 MeV respecto a la susceptibilidad quiral.

3.4. Consideraciones generales

El estudio teórico de la QCD se puede realizar de dos maneras, con LQCD y con teorías efectivas, en LQCD se trabaja desde primeros principios pero se está restringido a potenciales químicos muy pequeños donde solo se puede 'observar' el *crossover*. En las teorías efectivas se paga el precio se realizar simplificaciones a

cambio de poder hacer un barrido de potencial químico finito y por ende describir la extensión del crossover y las transiciones de fase que se dan a temperatura baja y potenciales altos. Con esto se pueden estudiar diferentes partes del diagrama de fases. En este trabajo se trabaja con Lagrangiana de la QCD (3.1) con las características que se muestran en la Tabla 3.1. Se utilizan dos sabores de quarks, u y d , con masa corriente m_0 finita, bajo la simetría de isospín se considera $m_u = m_d = m_0$.

Tabla 3.1: Propiedades de las simetrías presentes para dos sabores de quarks [53].

Simetría	Transformación	Corriente	Nombre	Manifestación
$SU_V(2)_f$	$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a \tau^a} \psi$	$j_\mu^a = \psi \gamma_\mu \tau^a \psi$	isospín	aprox. conservada
$U_V(1)_f$	$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi$	$j_\mu = \psi \gamma_\mu \psi$	bariónica	siempre conservada
$SU_A(2)_f$	$\psi \rightarrow e^{-i\gamma_5 \beta_a \tau^a} \psi$	$j_{5\mu}^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^a \psi$	quiral	RES, modo Goldstone
$U_A(1)_f$	$\psi \rightarrow e^{-i\beta \gamma_5} \psi$	$j_{5\mu} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$	axial	anomalía $U_A(1)$
$SU(3)_c$	$\psi \rightarrow e^{-i\theta_a(x) \frac{\lambda_a^c}{2}} \psi$	$j_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda_a^c}{2} \psi$	norma	siempre conservada

*RES: Rompimiento Espontáneo de la Simetría

La simetría quirial se rompe explícitamente al considerar la masa corriente finita de los quarks, además mediante el rompimiento espontáneo de la simetría quirial el apareamiento entre los quarks y antiquarks conlleva a la condensación $\langle \bar{\psi}_R \psi_L \rangle$ y $\langle \bar{\psi}_L \psi_R \rangle$ por lo que el parámetro de orden es $\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R \rangle \sim \sigma$ [52]. En particular la Lagrangiana es invariante bajo transformaciones quirales (además de serlo bajo todas las transformaciones de la Tabla 3.1), sin embargo, el estado base (condensado de quarks) no lo es $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \neq 0$, entonces esta simetría se ha roto espontáneamente, este proceso corresponde a la masa dinámicamente generada. En esta investigación solo se considera a la simetría quirial para clasificar las fases, se espera que a baja temperatura y/o potencial químico la simetría este rota y se restaure a alta temperatura y/o potencial químico. Con el comportamiento del condensado de quarks como parámetro de orden, se identifica una transición de primer orden al presentarse un cambio abrupto en su valor y un *crossover* al observar que el cambio se lleva a cabo de manera gradual.

Capítulo 4

Modelo Nambu-Jona-Lasinio

El problema más importante al tratar de estudiar el diagrama de fases de la materia que interacciona fuertemente por medio de primeros principios, es que LQCD tiene la limitante de que al usar una densidad de quarks diferente de cero (mayor que cero para los quarks y menor que cero para los antiquarks), la amplitud de probabilidad de cualquier observable presenta contribuciones positivas y negativas cuyas oscilaciones son más frecuentes que algún parámetro numérico arbitrario que se use para calcular el resultado de la integración. Para abordar este problema, es conveniente usar teorías efectivas donde se adopta un enfoque fenomenológico, ya que no se cumple la simetría de norma. Estas teorías efectivas están construidas de tal manera que puedan reproducir lo que ya se conoce de una técnica de primeros principios como lo es LQCD.

Las teorías efectivas dependen de varios parámetros que se ajustan para reproducir ciertas constantes de la naturaleza que ya se conocen porque se han medido experimentalmente, como la masa y constante de decaimiento del pión. Otra cosa que se busca es que las teorías efectivas estén en cierto acuerdo cualitativo con LQCD con respecto a la naturaleza de las fases (o de los cambios de fase) de la materia que interacciona fuertemente.

Una teoría efectiva que se usa con mucha frecuencia es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) por su efectividad al describir los fenómenos relacionados con la restauración de la simetría quiral sin el problema de estar restringido a valores bajos del potencial químico. El modelo de NJL es bastante complicado de usar y puede llegar a requerir recursos computacionales demasiado poderosos, por esto, es común que este modelo se simplifique de alguna forma. La simplificación que se usa en esta tesis es la 'aproximación de campo medio' la cual se interpreta como cada partícula del sistema interactuando con un único campo de Hartree que sirve como campo de fondo. De esta forma, el término de interacción en la Lagrangiana de NJL deja de ser no lineal, lo cual lo hace inmensamente más fácil de tratar.

4.1. Formalismo en el vacío

El modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) data de los años sesenta con la publicación de dos artículos titulados "*Dynamical Models of Elementary Particles Based on An Analogy with Superconductivity*" [92, 93], en su forma original fue construido como una teoría pre-QCD para los nucleones que interactúan mediante interacción de dos cuerpos. Las formulaciones más recientes tienen a los quarks como grados de libertad y estudian su comportamiento a temperatura y potencial químico finitos [94, 95]. Las características más importantes de este modelo es que se puede usar para incorporar las simetrías globales de la QCD que se observan en la naturaleza, incluye el rompimiento espontáneo de la simetría quirial y su manifestación en la física de los hadrones, la masa dinámicamente generada, la aparición del condensado de quarks y el rol de los piones como bosones de Goldstone [45].

El NJL tiene algunas desventajas [53], dado que la interacción entre quarks se supone puntual, la teoría es no renormalizable. Como consecuencia, para definir el modelo NJL como una teoría efectiva se debe especificar un método de regularización para trabajar con las integrales divergentes que aparecen. Un esquema de regularización especifica la longitud de escala para la teoría, el cual se puede expresar como un corte en los valores de momento de los quarks. Se puede interpretar el corte como una implementación aproximada de la propiedad de libertad asintótica de la QCD, con la eliminación de las interacciones entre quarks para momentos altos se simula el comportamiento de la constante de acoplamiento de la QCD [52].

Otro inconveniente del modelo es que no incluye el confinamiento del color [96, 97], debido a esto su aplicabilidad está limitada a los fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependen de los detalles del mecanismo del confinamiento. Sin embargo existen extensiones del modelo, como el Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio [98, 99, 100] donde a través de la inclusión de un potencial efectivo asociado con un campo de fondo de los gluones, se simula el confinamiento del color.

Como la simetría quirial implica fermiones (casi) sin masa en la Lagrangiana, el problema era encontrar un mecanismo que explicara la masa grande de los nucleones sin destruir la simetría. Fue idea de Nambu y Jona-Lasinio que la diferencia de masa en el espectro de Dirac de los nucleones pudiera ser generada de manera análoga a la brecha de energía de un superconductor en la teoría BCS, propuesta por J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer [101].

El modelo NJL está descrito por una Lagrangiana efectiva de fermiones relativistas que interactúan mediante un acoplamiento local fermión-fermión, se hacen las siguientes suposiciones [102]: los quarks ligeros u y d son los constituyentes básicos del núcleo (también se puede incluir el quark s), en el régimen de bajas energías se asume que los grados de libertad de los gluones están 'congelados' [45] en interacciones puntuales efectivas entre quarks (Fig. 4.1), la QCD lleva a una interacción local efectiva entre quarks y las interacciones están desarrolladas para que reproduzcan las simetrías de la QCD. La Lagrangiana del modelo NJL para los campos de los quarks ψ con $N_f=2$ y $N_c = 3$ está dada por [44, 103, 104]

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \hat{m}_0)\psi + \frac{G}{2}[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2] \quad (4.1)$$

donde $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_u, m_d)$ es la masa corriente de los quarks que rompe explícitamente la simetría quiral, G es la constante de acoplamiento, $\boldsymbol{\tau}$ denota las matrices de Pauli y γ_5 es una matriz de Dirac. Este tipo de interacciones se caracterizan por tener una fuerza atractiva fuerte entre quarks y antiquarks que induce inestabilidad en el vacío de los quarks sin masa lo que da como resultado el estado base no perturbativo con la condensación $\bar{\psi}\psi$. Como consecuencia de la condensación de pares, la simetría original de la teoría se rompe espontáneamente y se genera dinámicamente la masa de los quarks. Esta masa se identifica como la masa constitutiva de los quarks del modelo y el resultado es de alrededor de 300 MeV para los quarks u y d [45, 53]. En este trabajo se asume simetría de isospín, por lo que se tiene $m_0 = m_u = m_d$.

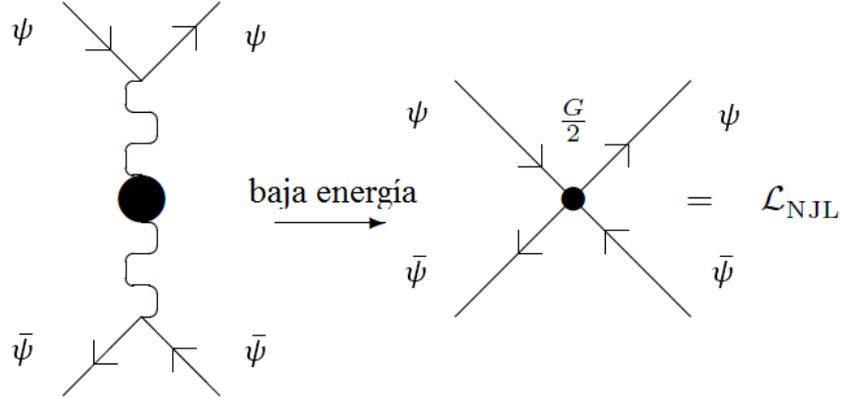


Figura 4.1: Aproximación en el régimen de baja energía donde la interacción entre los cuatro fermiones se considera puntual [105]

Para estudiar las interacciones de los quarks se trabaja sobre la función de partición Z del modelo que se puede escribir como un funcional mediante una integral de camino de la función exponencial de la correspondiente acción sobre los campos de los quarks ψ [106]

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{NJL} \right] \quad (4.2)$$

Para realizar la integración sobre los campos de los quarks se realiza la bosonización de la Lagrangiana, que consiste en reescribirla en términos de campos de mesones auxiliares σ y $\boldsymbol{\pi}$ para que la interacción efectiva de 4-quarks se transforme en bilineal en los campos de los quarks. Así la integral de camino sobre los campos de los quarks es Gaussiana, se puede resolver y da como resultado una teoría efectiva de mesones interactuantes [107] que mediante la transformación de Hubbard-Stratonovich [108] se tiene

$$\exp \left\{ i \int \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2] d^4x \right\} \rightarrow \int D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp \left\{ i \int \left[-\frac{1}{2G}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi \right] d^4x \right\} \quad (4.3)$$

sustituyendo esta transformación en (4.2)

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi}(x)(i\partial_x - m_0 + \sigma(x) + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x))\psi(x) - \frac{(\sigma(x))^2 + (\boldsymbol{\pi}(x))^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.4)$$

donde $\gamma^\mu\partial_\mu = \not{\partial}$. El campo σ tiene un valor esperado en el vacío diferente de cero como consecuencia del rompimiento espontáneo de la simetría quiral, para obtener el campo escalar físico es necesario hacer un corrimiento del campo: $\sigma' = \sigma + \sigma_0$ [103], así la matriz de masa corriente de los quarks se sustituye por la matriz de masa constitutiva.

Se trabaja en la aproximación del campo medio (MFA: *Mean Field Approximation*) donde los campos se reemplazan por sus correspondientes valores esperados, esto permite que se obtenga la masa dinámicamente generada $\sigma \sim \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, este proceso se muestra gráficamente en la Fig. 4.2.

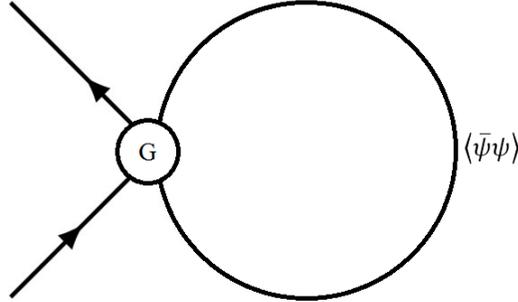


Figura 4.2: Masa dinámicamente generada en la aproximación del campo medio [45]

Con las consideraciones anteriores la ecuación (4.4) se transforma en

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi}(x)S^{-1}\psi(x) - \frac{(\sigma'(x))^2 + (\boldsymbol{\pi}(x))^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.5)$$

$$S^{-1}(x, y) = [i\not{\partial}_x - M + \sigma'(x) + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)] \delta^{(4)}(x - y) \quad (4.6)$$

donde S^{-1} corresponde al inverso del propagador de los quarks. El valor esperado del pseudoescalar $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$ es cero en sistemas con simetría de isospín [109] como es el caso de este trabajo.

Por definición (Apéndice D.2) la integral de un funcional representa la amplitud cuántica de transición de un sistema de quarks independientes [107]

$$Z = \exp \{iS_\psi\} = \det(iD) = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi}iD\psi \right\} \quad (4.7)$$

$$= \langle \psi' | T \exp \left\{ -i \int dt \int d^3x \psi^\dagger(x)h(x)\psi(x) \right\} | \psi' \rangle \quad (4.8)$$

(ψ' corresponde a un estado de referencia) que se mueve en un campo externo ϕ y está descrito por el Hamiltoniano

$$iD = \beta(i\partial_i - h), \quad h = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta\phi \quad (4.9)$$

de (4.5) y (4.7) la integral sobre los campos da como resultado

$$\int D\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) S^{-1} \psi(y) \right\} = \det [S^{-1}] \quad (4.10)$$

de la siguiente identidad $\det|M| = \exp \{ \text{Tr}(\ln M) \}$ [110, 105] se tiene

$$\det S^{-1} = \exp [\text{Tr} \ln S^{-1}] = \exp \left[i \int -i \text{Tr} (\ln S^{-1})_{x,x} d^4x \right] \quad (4.11)$$

la traza se realiza sobre los índices de color (Tr_c) y sabor (Tr_f) de donde se obtienen los factores $N_c = 3$ y $N_f = 2$ respectivamente. Así la función de partición para la Lagrangiana efectiva es

$$Z = \int D\sigma' \exp \left\{ i \int d^4x \left[-i N_c N_f \text{Tr}_D [\ln S^{-1}(x, y)]_{x=y} - \frac{(\sigma'(x))^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.12)$$

$$S^{-1}(x, y) = [i \not{\partial}_x - M + \sigma'(x)] \delta^{(4)}(x - y) \quad (4.13)$$

donde Tr_D corresponde a la traza sobre los índices de Dirac. La masa constitutiva M generada por el campo medio se obtiene mediante la condición estacionaria [103, 106, 105]

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_{ef}}{\partial \sigma'(x)} \right|_{\sigma'(x)=0} = 0 \implies N_c N_f \text{Tr}_D S - \frac{\sigma'(x)}{G} \Big|_{\sigma'(x)=0} = 0 \quad (4.14)$$

donde S define al propagador de los quarks sin índices de color y sabor. En analogía con la ecuación que determina la brecha de energía (*energy gap*) en un superconductor, la ecuación de *gap* en el modelo NJL está dada por

$$N_c N_f \text{Tr}_D S = -\frac{\sigma}{G} \implies M - m_0 = -G \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (4.15)$$

Dado que el modelo de NJL no posee la propiedad del confinamiento de los quarks de la QCD, la masa dinámicamente generada de los quarks σ está dada por la autoenergía de los quarks que se obtiene del término de interacción en la aproximación del campo medio [44, 45, 106]

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -i \text{Tr} S(0) \quad (4.16)$$

que en términos del propagador de Dirac se expresa como

$$S(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp \{ -ip(x - y) \}}{\gamma^\mu p_\mu - M} \quad (4.17)$$

este comportamiento se observa en el diagrama cerrado de la Fig. 4.2 donde la línea del fermión empieza y termina en el mismo punto debido a la interacción de 4 puntos. Al sustituir el propagador en la ecuación de *gap* (4.15) se obtiene

$$-i N_c N_f \text{Tr}_D \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - M} = -\frac{M - m_0}{G} = \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (4.18)$$

al realizar la traza sobre los índices de Dirac da como resultado

$$\text{Tr}_D \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - M} = \text{Tr}_D \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu p_\mu + MI}{p^2 + M} = 4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 + M^2} \quad (4.19)$$

donde I corresponde a la matriz identidad 4×4 y $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$, finalmente la ecuación de *gap* en el vacío se escribe como

$$\frac{M - m_0}{G} = 4iN_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2} \quad (4.20)$$

4.2. Temperatura y densidad finita

Para un sistema de quarks ligeros se presenta la transición quiral, a baja temperatura y densidad bariónica la simetría quiral está rota mientras que en condiciones extremas se encuentra restaurada. Para estudiar las características de esta transición se necesita realizar un barrido en el plano $T - \mu$ y así construir el diagrama de fases en el modelo NJL, donde el parámetro de orden $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ indica la evolución del sistema. A potencial químico finito μ la función de partición está dada por [111]

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left[i \int d^4 x (H - \mu N) \right] \quad (4.21)$$

donde $N = \psi^\dagger \psi = \psi \bar{\gamma}^0 \psi$ corresponde al número de quarks y H es el Hamiltoniano. Sustituyendo la Lagrangiana linealizada en la aproximación del campo medio (4.5) en la función de partición se obtiene

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ i \int d^4 x \left[\bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial_\mu - m_0 + \sigma) \psi - \frac{\sigma^2}{2G} - \bar{\psi} \mu \gamma^0 \psi \right] \right\} \quad (4.22)$$

se separan las componentes espaciales y temporales

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ i \int dt \int d^3 \mathbf{x} \left[\bar{\psi} (\gamma_0 (i\partial_t - \mu) - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - (m - \sigma)) \psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.23)$$

para aplicar los operadores de momento $p_0, \mathbf{p} = i\partial_t, -i\boldsymbol{\nabla}$

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left\{ i \int dt \int d^3 \mathbf{x} \left[\bar{\psi} (\gamma_0 (p_0 - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma)) \psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.24)$$

En el formalismo del tiempo imaginario se realiza una rotación de Wick $t \rightarrow \tau = it$, $t = -i\tau$ donde se pasa de la métrica de Minkowski (espacio físico) a la métrica euclidiana $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 \rightarrow (ix_0)^2 - \mathbf{x}^2 = -(x_0^2 + \mathbf{x}^2)$. En el marco teórico de Matsubara (apéndice D) se introduce la temperatura mediante la sustitución de la cuarta componente del momento por [94]

$$i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow -T \sum_{-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + \mu, \mathbf{p}) \quad (4.25)$$

donde $p_0 \rightarrow ip_0 = \omega_n$, $p_0 = -i\omega_n$ son las frecuencias de Matsubara $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ para los quarks. El potencial termodinámico por unidad de volumen V a temperatura T y potencial químico μ finitos se define como [44, 111, 112]

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln Z(T, \mu) \quad (4.26)$$

al sustituir la función de partición y realizar las sumas de Matsubara se obtiene

$$\Omega(T, \mu) = \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \{E_{\mathbf{p}} + T \ln [Z^+(E_{\mathbf{p}})] + T \ln [Z^-(E_{\mathbf{p}})]\} \quad (4.27)$$

donde $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ y Z^\pm corresponden a las funciones de partición de los fermiones definidas como

$$Z^\pm(E_{\mathbf{p}}) = 1 + e^{[-\beta(E_{\mathbf{p}} \mp \mu)]} \quad (4.28)$$

El estado base del modelo está dado por el valor de σ que minimiza el potencial termodinámico [113, 114]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.29)$$

El potencial termodinámico (4.26) es una función de estado con dimensiones (específicas) de energía. El principio de mínima energía, el cual es una reinterpretación de la segunda ley de la termodinámica, establece que el equilibrio térmico se alcanza cuando este potencial termodinámico se minimiza (o bien, cuando llega a un extremal). Los cálculos que se realizan en este trabajo (como la ecuación (4.29) por ejemplo) están basados en este principio. Por lo tanto la solución de (4.29) proporciona el valor esperado de σ como función de la temperatura y el potencial químico

$$\sigma = 2GN_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^+(E_{\mathbf{p}}) - f^-(E_{\mathbf{p}})] \quad (4.30)$$

donde $f^\pm(E_{\mathbf{p}})$ son las distribuciones de Fermi-Dirac para los fermiones y antifermiones respectivamente

$$f^\pm(E_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}} \mp \mu)}} \quad (4.31)$$

de la ecuación de *gap* (4.15) el condensado de quarks está dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -2N_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^+(E_{\mathbf{p}}) - f^-(E_{\mathbf{p}})] \quad (4.32)$$

por consiguiente la masa constitutiva M se calcula mediante la expresión

$$M = m_0 + 4GN_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^+(E_{\mathbf{p}}) - f^-(E_{\mathbf{p}})] \quad (4.33)$$

Así para una temperatura y potencial químico determinado se obtiene el valor del condensado de quarks (por lo tanto también la masa constitutiva) que funge como parámetro de orden para construir el diagrama de fases.

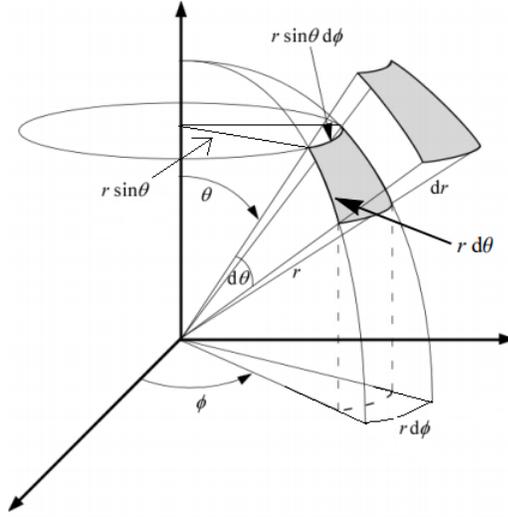


Figura 4.3: Sistema de coordenadas esféricas [115]

Para realizar la integral sobre el momento se asume un sistema con simetría esférica como el de la Fig. 4.3, se tiene que $d^3\mathbf{p} = dx dy dz$, entonces el diferencial de volumen en coordenadas rectangulares equivale en coordenadas esféricas a $dr(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$, de esta forma se integra la parte angular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \quad (4.34)$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} r^2 dr \quad (4.35)$$

así la integral de momento se transforma en

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dp p^2}{2\pi^2} \quad (4.36)$$

por lo tanto la expresión para el condensado (4.32) en coordenadas esféricas es

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.37)$$

4.3. Susceptibilidad quirral

El rompimiento espontáneo de la simetría quirral es la manifestación del condensado quark-antiquark en el vacío de la QCD y caracteriza la naturaleza no perturbativa del vacío a temperatura y/o densidad cero. Al incrementar la temperatura y/o densidad bariónica el vacío de la QCD presenta una transición de fase en la cual pasa de simetría quirral rota a restaurada. Esta transición está caracterizada por el condensado escalar quark-antiquark que representa el parámetro de orden de la transición de

fase quiral. Para la transición de primer orden el parámetro de orden es discontinuo cuando pasa por el punto de transición, para segundo orden es continuo pero existe un quiebre mientras que en el *crossover* el parámetro es continuo y suave [116, 117].

La restauración de la simetría quiral ocurre si la temperatura y/o densidad se incrementa de tal forma que el condensado, desaparece en el límite quiral y al mismo tiempo la masa constitutiva de los quarks es cero. En el caso de quarks con masa corriente finita, el condensado no es un parámetro de orden exacto ya que nunca es cero no importando que tan alta sea la temperatura y/o densidad. Sin embargo a partir de él se puede obtener información importante del diagrama de fases a través de la susceptibilidad quiral. La susceptibilidad quiral χ_S se define como la respuesta del parámetro de orden o la masa constitutiva de los quarks a una perturbación en la masa corriente de los quarks [104, 118], la expresión asociada a esta cantidad está dada por la derivada de la ecuación de *gap* (4.33) respecto a m_0 [104, 117, 119]

$$\chi_S = \frac{\partial M}{\partial m_0} \quad (4.38)$$

al realizar la derivada implícita se tiene

$$\frac{\partial}{\partial m_0} 0 = \frac{\frac{\partial M}{\partial m_0} - \frac{\partial m_0}{\partial m_0}}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \frac{\partial}{\partial m_0} \left[\frac{M}{E_p} (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \right] \quad (4.39)$$

como E_p es función de M y $f^+(E_p)$ y $f^-(E_p)$ son funciones de E_p se aplica la derivada para un producto de dos funciones

$$0 = \frac{\frac{\partial M}{\partial m_0} - \frac{\partial m_0}{\partial m_0}}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{M}{E_p} \frac{\partial}{\partial m_0} (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \frac{\partial}{\partial m_0} \left(\frac{M}{E_p} \right) \right] \quad (4.40)$$

al derivar E_p y $f^\pm(E_p)$ respecto a m_0 se obtiene

$$\frac{\partial E_p}{\partial m_0} = \frac{M \frac{\partial M}{\partial m_0}}{\sqrt{p^2 + M^2}}; \quad \frac{\partial f^\pm(E_p)}{\partial m_0} = -\frac{\beta e^{\beta(E_p \mp \mu)} \frac{\partial E_p}{\partial m_0}}{(1 + e^{\beta(E_p \mp \mu)})^2} \quad (4.41)$$

se sustituye (4.41) en (4.40) para dar

$$0 = \frac{\frac{\partial M}{\partial m_0} - \frac{\partial m_0}{\partial m_0}}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{M}{E_p} \left(\frac{\beta e^{\beta(E_p - \mu)} \frac{\partial E_p}{\partial m_0}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{\beta e^{\beta(E_p + \mu)} \frac{\partial E_p}{\partial m_0}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{E_p \frac{\partial M}{\partial m_0} - M \frac{\partial E}{\partial m_0}}{E_p^2} \right) \right] \quad (4.42)$$

$$0 = \frac{\frac{\partial M}{\partial m_0} - \frac{\partial m_0}{\partial m_0}}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{M}{E_p} \left(\frac{\beta e^{\beta(E_p - \mu)} \frac{M \frac{\partial M}{\partial m_0}}{\sqrt{p^2 + M^2}}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{\beta e^{\beta(E_p + \mu)} \frac{M \frac{\partial M}{\partial m_0}}{\sqrt{p^2 + M^2}}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) \right. \\ \left. + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{E_p \frac{\partial M}{\partial m_0} - M \frac{M \frac{\partial M}{\partial m_0}}{\sqrt{p^2 + M^2}}}{E_p^2} \right) \right] \quad (4.43)$$

sustituyendo la definición de susceptibilidad quiral (4.38)

$$0 = \frac{\chi_S - 1}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{M}{E_p} \left(\frac{\beta e^{\beta(E_p - \mu)} M \chi_S}{\sqrt{p^2 + M^2}} (1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta e^{\beta(E_p + \mu)} M \chi_S}{\sqrt{p^2 + M^2}} (1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2 \right) + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{E_p \chi_S - M \frac{M \chi_S}{E}}{E_p^2} \right) \right] \quad (4.44)$$

$$0 = \frac{\chi_S - 1}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{M}{E} \beta M \chi_S \left(\frac{e^{\beta(E_p - \mu)}}{E_p (1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_p + \mu)}}{E_p (1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) \right. \\ \left. + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \chi_S \left(\frac{E_p^2 - M^2}{E^3} \right) \right] \quad (4.45)$$

$$0 = \frac{\chi_S - 1}{2G} - \chi_S \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{\beta M^2}{E_p^2} \left(\frac{e^{\beta(E_p - \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_p + \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) \right. \\ \left. + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{p^2}{E_p^3} \right) \right] \quad (4.46)$$

despejando para χ_S

$$\frac{1}{2G} = \chi_S \left\{ \frac{1}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{\beta M^2}{E_p^2} \left(\frac{e^{\beta(E_p - \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_p + \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{p^2}{E_p^3} \right) \right] \right\} \quad (4.47)$$

$$\chi_S = \left[1 - \frac{2G N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp \cdot p^2 \left[\frac{\beta M^2}{E_p^2} \left(\frac{e^{\beta(E_p - \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_p + \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{p^2}{E_p^3} \right) \right] \right]^{-1} \quad (4.48)$$

Se puede identificar una transición de fase mediante la localización de singularidades en la susceptibilidad quiral [120, 121], ya que está relacionada con la segunda derivada del potencial termodinámico respecto a la masa [122, 123]

$$\chi_S = \frac{T}{V} \frac{\partial^2}{\partial m_0^2} \ln Z = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial m_0^2} \quad (4.49)$$

La segunda derivada de una función proporciona información sobre su concavidad y puntos de inflexión, en el caso del potencial termodinámico la concavidad se asocia con la estabilidad de las soluciones de la ecuación de *gap*. Si $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} > 0$ ($\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0$), la función del potencial termodinámico es cóncava hacia arriba y por lo tanto el estado es estable, o al menos metaestable. Por el contrario si $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} < 0$ ($\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0$), la función es cóncava hacia abajo, por lo tanto el estado asociado es inestable [104]. Existe una singularidad cuando $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} = 0$ que corresponde al punto de inflexión del potencial termodinámico.

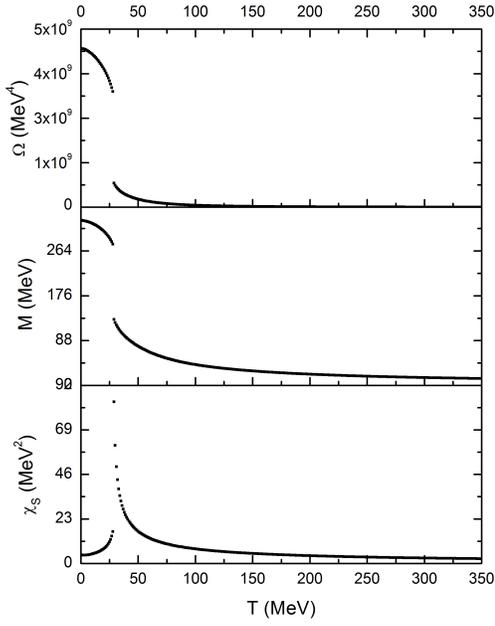
Una transición de primer orden se muestra en la Fig. 4.4a donde el potencial termodinámico es discontinuo así como su primera derivada, la masa constitutiva. En dicho punto (μ, T) , la susceptibilidad quiral que corresponde a la segunda derivada del potencial termodinámico presenta una asíntota vertical. En el caso del límite quiral, se puede presentar una transición de segundo orden como en la Fig. 4.4b, donde tanto el potencial termodinámico como su primera derivada son continuos, sin embargo la susceptibilidad quiral tiene una asíntota vertical de igual forma que el orden anterior. En la zona de coexistencia de fases, tanto el potencial termodinámico como sus derivadas son regulares en todo el rango de temperatura para un valor de potencial químico dado, este comportamiento corresponde a la Fig. 4.4c.

4.4. Métodos de regularización

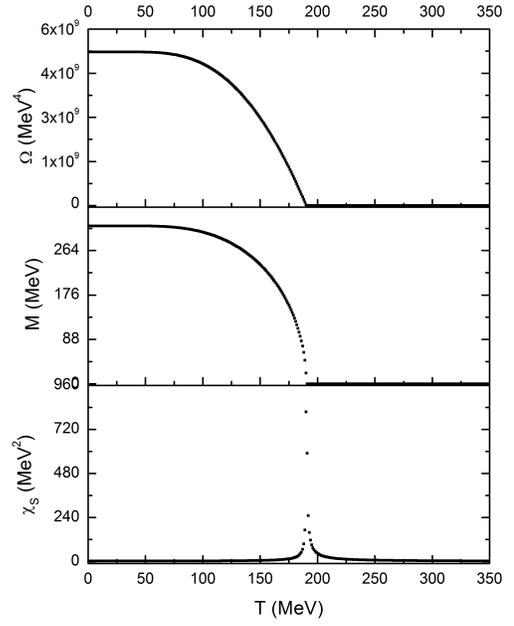
El modelo de NJL es no renormalizable, es decir, no es posible deshacerse de todas las divergencias de la teoría agregando un número finito de contratérminos a la lagrangiana [124]. Todas las cantidades físicas son finitas, por lo que las divergencias aparecen solo en los pasos intermedios del cálculo y se tienen que cancelar de una manera u otra, para esto se necesitan algunos métodos para añadir, quitar, mutiplicar o dividir las cantidades aparentemente divergentes y obtener resultados finitos al final.

Lo que hace la regularización es introducir un parámetro nuevo, por ejemplo ϵ , a la cantidad aparentemente divergente \mathcal{O} . Así dicha cantidad ahora es función de ϵ , $\mathcal{O}(\epsilon)$, se asume que en el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene la cantidad original. Entonces para un ϵ muy pequeño pero finito la cantidad es finita $|\mathcal{O}(\epsilon)| < \infty$ [125]. Los esquemas de regularización tienen que satisfacer ciertas condiciones físicas, como la obtención de la ecuación de *gap* a partir de la minimización de la energía y la existencia de un bosón de Goldstone resultante del rompimiento espontáneo de la simetría [53].

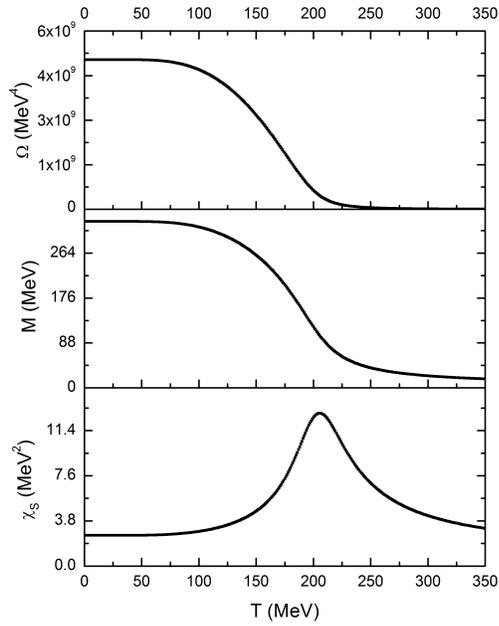
La justificación para el empleo de estos procedimientos es que los valores bajos del momento son los más relevantes del modelo y que se requiere hacer suposiciones



(a) Transición de primer orden



(b) Transición de segundo orden



(c) *Crossover*

Figura 4.4: Clasificación del comportamiento de las cantidades termodinámicas del sistema

adicionales ajenas al modelo para poder hacer predicciones correspondientes a los momentos más altos. Por lo tanto, el modelo es capaz de hacer predicciones confiables siempre y cuando se analicen los momentos debajo de cierto valor de referencia, el cual está asociado a un valor de escala del cual dependen las interacciones.

Existen varios esquemas de regularización que pueden ser aplicados a las integrales divergentes del modelo de NJL, para el cual existen dos parámetros, la escala de masa Λ y la constante de acoplamiento G . Ninguno de estos parámetros se ha obtenido directamente en pruebas empíricas de primera mano, por lo que la forma en la que se obtienen es ajustarlos para reproducir ciertas constantes que sí se conocen de manera experimental con cierto grado de precisión, como la masa del pión, la constante de decaimiento del pión y, en menor medida, el condensado de quarks. Es importante mencionar que las características cuantitativas y cualitativas del modelo pueden cambiar con la elección del esquema de regularización y de los parámetros, y como ningún esquema se ha obtenido de trabajar con la QCD desde primeros principios, es muy importante conocer cuáles son las diferencias cualitativas y cuantitativas de todos estos esquemas [126].

Cuando una integral divergente en el ultravioleta se regulariza, invariablemente se debe limitar el integrando con un factor que lo atenúe para altos valores de la variable de integración; a este factor suele llamársele 'factor de forma'. El factor de forma tiene que cumplir con la condición de tender a cero cuando la variable de integración tiende a infinito. Para que el factor de forma sea covariante de Lorentz, debe de calcularse a partir de aplicar simetrías geométricas (esférica, cilíndrica, etc.) sobre una cantidad que sea escalar de Lorentz, por ejemplo, el cuadrimomento.

4.4.1. Corte ultravioleta

La forma más sencilla de controlar las divergencias ultravioleta es realizar un corte en los valores del trimomento, las integrales se acotan en el límite superior por $\mathbf{p}^2 = \Lambda^2$, donde Λ corresponde al corte ultravioleta. Con este método de regularización se tiene la ventaja de que se conserva la estructura analítica de las expresiones, condición necesaria para utilizar el formalismo de Matsubara [44]. El corte ultravioleta en el trimomento es una regularización no covariante porque el trimomento no es un escalar de Lorentz, sin embargo al trabajar a temperatura y potencial químico finito, no se cumple con la covariancia de cualquier manera. La regularización de la integral se lleva a cabo mediante la sustitución [126]

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \theta(\Lambda - \mathbf{p}) \quad (4.50)$$

donde $\theta(x)$ corresponde a la función escalón, por lo tanto la integral divergente se transforma en

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \theta(\Lambda - \mathbf{p}) = \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (1) + \int_\Lambda^\infty \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (0) \quad (4.51)$$

de esta forma se descartan las contribuciones de momento mayores que el corte ultravioleta, por lo que el condensado (4.37) se reescribe como

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.52)$$

con este resultado, la susceptibilidad quiral se obtiene aplicando el corte a la expresión (4.48)

$$\chi_S = \left[1 - \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \cdot p^2 \left\{ \frac{\beta M^2}{E^2} \left(\frac{e^{\beta(E_p - \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_p + \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{p^2}{E^3} \right) \right\} \right]^{-1} \quad (4.53)$$

4.4.2. Corte infrarrojo

Dado que el modelo de NJL no confina los quarks, los hadrones (por ejemplo el meson σ o ρ) pueden decaer en quarks libres $\sigma \rightarrow \bar{\psi}\psi$, proceso que no se observa en la naturaleza. La falta de confinamiento está relacionada con el hecho de que en la región infrarroja las interacciones entre quarks mediadas por gluones no están bien incluidas. De hecho el modelo está formulado para trabajar en escalas intermedias de cientos de MeV hasta 1 GeV donde domina la dinámica del sabor de los quarks [127]. Para abordar este problema se introduce un corte infrarrojo en las integrales de momento de los quarks dado que las interacciones entre los campos en la materia confinada para momentos bajos no estarán presentes ya que los quarks están encerrados en hadrones [128].

Con la introducción del corte ultravioleta e infrarrojo se divide el rango de momento en tres partes [129]:

1. Cortas distancias (momento grande, región ultravioleta) donde los quarks no están confinados y la simetría quiral está restaurada.
2. Largas distancias (momento bajo, región infrarroja) donde los quarks están confinados.
3. Intervalo $\Lambda_{\text{IR}}^2 \leq \mathbf{p}^2 \leq \Lambda_{\text{UV}}^2$ donde se produce el rompimiento espontáneo de la simetría quiral y el condensado de quarks está presente.

A pesar de que el objetivo de este trabajo no es involucrar estados hadrónicos, se incluye el corte infrarrojo para estudiar su efecto sobre el diagrama de fases, con esto en mente, la ecuación para el condensado de quarks está dada por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_{p_{\min}}^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.54)$$

el límite inferior de integración se toma como $p_{\min} = M(T, \mu)$, donde $M(T, \mu)$ es la masa constitutiva de los quarks que depende de T y μ . Se considera el valor del

momento como variable en lugar de $p_{\min} = \text{const}$ ya que de esta forma se garantiza que el meson sigma permanezca como un estado ligado por encima de la temperatura que satisface la ecuación $\varsigma_M(T) = 2\sqrt{2}M(T)$, donde $\varsigma_M(T)$ es la masa de sigma [130].

De manera análoga al corte ultravioleta, la susceptibilidad quiral para este método de regularización se obtiene aplicando el corte superior e inferior a la ecuación (4.48)

$$\chi_S = \left[1 - \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_{p_{\min}}^{\Lambda} dp \cdot p^2 \left\{ \frac{\beta M^2}{E^2} \left(\frac{e^{\beta(E_p - \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_p + \mu)}}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})^2} \right) + (1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)) \left(\frac{p^2}{E^3} \right) \right\} \right]^{-1} \quad (4.55)$$

4.4.3. Regularización de tiempo propio

Se trata de un esquema covariante de regularización donde la divergencia se aísla en una integral respecto al tiempo propio, un parámetro que no es referente al sistema de coordenadas o a la norma [131]. La integral divergente se ajusta con un factor de amortiguamiento que desaparece cuando $p \rightarrow \infty$, lo que permite incluir todos los valores de momento. El término de energía se puede reescribir en términos de la siguiente expresión [132, 133]

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau A} \rightarrow \frac{1}{E_p} = \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-\tau E_p^2}}{\sqrt{\pi\tau}} \quad (4.56)$$

sea $\tau_{UV} = \frac{1}{\Lambda_{UV}^2}$ el límite inferior de la integral, donde Λ_{UV} es el corte ultravioleta en el momento que promueve la convergencia, el condensado (4.37) se transforma en

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau_{UV}}^\infty d\tau \frac{e^{-\tau E_p^2}}{\sqrt{\tau}} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.57)$$

se realiza un cambio de variable donde $x = \sqrt{\tau} E_p$; $\frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{2}{E_p} dx$ para dar

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x=\sqrt{\tau_{UV}} E_p}^\infty dx e^{-x^2} \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.58)$$

de la segunda integral se puede obtener

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx e^{-x^2} = 1 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^a dx e^{-x^2} + \int_a^\infty dx e^{-x^2} \right] = 1 \quad (4.59)$$

así para una variable aleatoria con media 0 y varianza $\frac{1}{2}$, la función error describe la probabilidad en el rango $[-x, x]$ por lo que la integral de la distribución Gaussiana se define como

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x dt e^{-t^2} \quad (4.60)$$

sustituyendo (4.59) y (4.60) en (4.58) se obtiene la forma final del condensado para la regularización de tiempo propio

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} E_p) [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.61)$$

donde $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ es la función error complementaria.

La susceptibilidad quiral se obtiene al reemplazar la expresión anterior para el condensado en (4.39) y realizar la derivada (4.38)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_0} 0 &= \frac{\frac{\partial M}{\partial m_0} - \frac{\partial m_0}{\partial m_0}}{2G} \\ &- \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\partial}{\partial m_0} \left\{ \frac{M}{E_p} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} E_p) [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \right\} \end{aligned} \quad (4.62)$$

al realizar la derivada del triple producto, la expresión final es

$$\begin{aligned} \chi_S &= \left[1 - \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left\{ \frac{\beta M^2}{E_p^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} E_p) \left[\frac{e^{\beta(E_p+\mu)}}{[e^{\beta(E_p+\mu)} + 1]^2} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{e^{\beta(E_p-\mu)}}{[e^{\beta(E_p-\mu)} + 1]^2} \right] + [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \left[\frac{M}{E_p} \left(\frac{-2\sqrt{\tau_{UV}} M e^{-\tau_{UV}(p^2+M^2)}}{\sqrt{\pi} \sqrt{p^2 + m^2}} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} E_p) \left(\frac{1}{E_p} - \frac{M^2}{E_p^3} \right) \right] \right] \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.63)$$

4.4.4. Pauli-Villars

El método de Wolfgang Pauli y Felix Villars conserva la invariancia de norma mediante la introducción de masas auxiliares reguladoras que se utilizan como parámetros matemáticos que tienden a infinito ($\mathbf{p} \rightarrow 0$) [134]. En este procedimiento la función divergente se reescribe como una suma de funciones modificadas de la forma $f(M, \mathbf{p}) = \sum_i C_i f(M_i, \mathbf{p})$ [135], cuyos parámetros están restringidos por $\sum_i C_i = 0$ y $\sum_i C_i M_i^2 = 0$ [134], donde M_i representa la masa de las partículas auxiliares pesadas, para un regulador Λ se define como

$$M_i = \sqrt{M^2 + a_i \Lambda^2} \quad (4.64)$$

donde $a_0 = 0$ y $C_0 = 1$ corresponde al primer término de las series y representa la masa no regularizada $M_0 = M$, de las restricciones anteriores se obtiene

$$C_1 + C_2 = -1; \quad a_1 C_1 + a_2 C_2 = 0 \quad (4.65)$$

la solución a este sistema de ecuaciones no es única, sin embargo los valores que se escogen usualmente son $a_i = 0, 2, 1$ y $C_i = 1, 1, -2$ [53], así las sustracciones tienen

la forma

$$\int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} f(M, \mathbf{p}) \rightarrow \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \left[f(M, \mathbf{p}) + f\left(\sqrt{M^2 + 2\Lambda^2}, \mathbf{p}\right) - 2f\left(\sqrt{M^2 + \Lambda^2}, \mathbf{p}\right) \right] \quad (4.66)$$

sustituyendo en la expresión del condensado (4.37) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = & -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 M \left\{ \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^2}} \right. \\ & \times \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}+\mu)} + 1} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^2 + 2\Lambda^2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2}+\mu)} + 1} \right] \\ & \left. - \frac{2}{\sqrt{p^2 + M^2 + \Lambda^2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2}+\mu)} + 1} \right] \right\} \quad (4.67) \end{aligned}$$

La ecuación para la susceptibilidad quiral está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_0} 0 = & \frac{\frac{\partial M}{\partial m_0} - \frac{\partial m_0}{\partial m_0}}{2G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\partial}{\partial m_0} \left\{ \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \right. \\ & \times \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}+\mu)} + 1} \right] \\ & + \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2 + 2\Lambda^2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2}+\mu)} + 1} \right] \\ & \left. - \frac{2M}{\sqrt{p^2 + M^2 + \Lambda^2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2}+\mu)} + 1} \right] \right\} \quad (4.68) \end{aligned}$$

$$\chi_S = \left[1 - \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 (S_1 + S_2 + S_3) \right]^{-1} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} S_1 = & \frac{\beta M^2}{p^2 + M^2} \left[\frac{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}+\mu)}}{\left[e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}+\mu)} + 1 \right]^2} + \frac{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}-\mu)}}{\left[e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}-\mu)} + 1 \right]^2} \right] \\ & + \frac{p^2}{(p^2 + M^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2}+\mu)} + 1} \right] \quad (4.70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 = & \frac{\beta M^2}{p^2 + M^2 + 2\Lambda^2} \left[\frac{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2+\mu})}}{\left[e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2+\mu})} + 1 \right]^2} + \frac{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2-\mu})}}{\left[e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2-\mu})} + 1 \right]^2} \right] \\
& + \frac{p^2(p^2 + 2\Lambda^2)}{(p^2 + M^2 + 2\Lambda^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2-\mu})} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+2\Lambda^2+\mu})} + 1} \right] \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 = & \frac{-2\beta M^2}{p^2 + M^2 + \Lambda^2} \left[\frac{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2+\mu})}}{\left[e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2+\mu})} + 1 \right]^2} + \frac{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2-\mu})}}{\left[e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2-\mu})} + 1 \right]^2} \right] \\
& + \frac{2p^2(p^2 + \Lambda^2)}{(p^2 + M^2 + \Lambda^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2-\mu})} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2+M^2+\Lambda^2+\mu})} + 1} \right] \quad (4.72)
\end{aligned}$$

4.5. Compilación de esquemas

Los efectos no perturbativos de la QCD que se dan en la región de bajas energías se pueden estudiar mediante teorías efectivas como el modelo Nambu-Jona Lasinio que se basa en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. Con este método se pueden obtener resultados en el vacío y a temperatura y potencial químico finitos. El orden de las transiciones depende del conjunto de parámetros y el método de regularización que se emplean. En general se espera que a $\mu = 0$ se presente un *crossover* y en el otro extremo, a $T = 0$ una transición de primer orden, sin embargo aunque el ajuste de los parámetros que se usan en el modelo reproduzcan de forma correcta las observables físicas en el vacío, a temperatura y potencial químico finitos se puede obtener un escenario distinto [136].

Existen varias investigaciones enfocadas al estudio de la dependencia del modelo con el método de regularización como lo son

- Kohyama [137] utilizan los esquemas corte tridimensional en el momento, corte cuatridimensional en el momento, Pauli-Villars, regularización dimensional y tiempo propio para estudiar las propiedades de los mesones y el diagrama de fases. Reprodujeron de forma satisfactoria las propiedades de los mesones con todos los esquemas de regularización, además las fronteras de fase son similares para masa corriente de los quarks pequeñas, $m_u = 3, 5$ MeV. Las características de los diagramas de fases difieren al aumentar (disminuir) la masa corriente (corte).
- Costa [136] utiliza el corte tridimensional en el momento como método de regularización en PNJL, compara dos casos: (I) uno donde regulariza solo la parte divergente de la ecuación de *gap*, por lo que se permite que existan estados

de los quarks con momentos grandes (parte térmica) y (II) otro donde aplica el corte ultravioleta a todas las integrales. También comparan dos conjuntos de parámetros, obtienen un mayor impacto sobre el diagrama de fases en este aspecto. Los diagramas de fase obtenidos de (I) y (II) son muy similares cuando se utiliza el mismo conjunto de parámetros, el CEP se desplaza hacia valores un poco mayores de temperatura y menores de potencial químico cuando no se realiza el corte en todas las integrales.

- Fujihara [138] utiliza el corte tridimensional en el momento y la regularización dimensional para estudiar la fase superconductora del color a altas densidades. La escala de potencial químico donde se encuentra esta fase ($\mu \approx 400 - 800$ MeV) es del orden del corte ultravioleta por lo que el método de regularización podría no tener efecto sobre los resultados. Demostraron que la fase superconductora del color 'se termina' cuando la magnitud del corte ultravioleta se aproxima al valor de potencial químico mientras que con la regularización dimensional dicha fase aumenta de tamaño al aumentar el potencial químico. El CEP se encuentra a valores más altos de temperatura y menores de potencial químico en la regularización dimensional que en el corte ultravioleta.
- Wang [139] estudia los efectos del volumen finito y las condiciones de frontera en la transición de fase quiral. Utilizan regularización de tiempo propio dado que no impone cortes en los valores de momento a comparación del corte ultravioleta, esto es de mayor importancia dado que al discretizar el espacio de momento se desprecian las contribuciones de momentos altos que se dan en pequeños volúmenes. Demuestran que el rompimiento espontáneo de la simetría quiral ya no es un concepto válido para volúmenes menores que un cubo de arista $L = 0.25$ fm.
- Cui [133] utiliza la regularización de tiempo propio para describir la transición de fase quiral. Obtuvieron un *crossover* completo que separa la fase de simetría rota de la restaurada, es decir no encontraron un CEP ni transición de primer orden. Compararon los resultados de utilizar una constante de acoplamiento G y una que depende de la temperatura y el potencial químico $G(T, \mu) = G_1 + G_2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, describieron un diagrama de fases totalmente diferente para esta última constante, donde existe un CEP para $G_1 < 0.85G$.

En la Tabla 4.1 se resumen las ecuaciones de *gap* que se emplean en cada método de regularización, se resuelven de forma numérica con los parámetros adecuados para obtener la masa constitutiva M y por consiguiente el parámetro de orden $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

Tabla 4.1: Compilación de las ecuaciones de gap para cada método de regularización.

	$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \hat{m}_0)\psi + \frac{G}{2}[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2]$
Esquema	Ecuación de gap
UV	$0 = \frac{M-m_0}{G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)]$
IR	$0 = \frac{M-m_0}{G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_{p_{min}}^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)]$
PTR	$0 = \frac{M-m_0}{G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} \text{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} E_p) [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)]$
PV	$0 = \frac{M-m_0}{G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 M \left\{ \frac{1}{E_{p,1}} [1 - f^+(E_{p,1}) - f^-(E_{p,1})] \right.$ $\left. + \frac{1}{E_{p,2}} [1 - f^+(E_{p,2}) - f^-(E_{p,2})] - \frac{2}{E_{p,3}} [1 - f^+(E_{p,3}) - f^-(E_{p,3})] \right\}$
$E_p = E_{p,1} = \sqrt{p^2 + M^2}, E_{p,2} = \sqrt{p^2 + M^2 + 2\Lambda^2}, E_{p,3} = \sqrt{p^2 + M^2 + \Lambda^2}.$	

4.6. Parámetros

Además del esquema de regularización, los resultados del modelo NJL son sensibles a los parámetros que se usan en cada regularización [136, 140, 141]. Los parámetros se ajustan de tal manera que se reproduzcan valores conocidos de ciertas observables físicas, como la masa del pión m_π , constante de decaimiento del pión f_π y también muy frecuentemente se incluye el valor del condensado de quarks $\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3} \approx \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle^{1/3}$ obtenido de las QCD *sum rules* [109]. De este ajuste se obtiene el valor del corte Λ y la constante de acoplamiento G para una determinada masa corriente m_0 .

[137] reporta el valor de M entre 200 y 400 MeV, conforme m_0 aumenta, también lo hace M , la relación es inversamente proporcional entre $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ y m_0 . Se cumple la proporción $M \propto G \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ aunque $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ sea pequeño ya que M puede ser grande debido a un valor de G grande. El valor de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es independiente del esquema de regularización (no se incluye el infrarrojo), por lo tanto se obtiene el mismo valor para una m_0 fija. La masa constitutiva M de los quarks se espera sea en promedio 1/3 GeV, 330 MeV ya que la masa del protón y del neutrón es de aproximadamente 1 GeV, estos están formados por 3 quarks ligeros. Este resultado se cumple para el esquema UV mientras que para PTR y PV se obtienen valores menores. Cada procedimiento tiene un conjunto de ecuaciones que se resuelven para reproducir las constantes, estos sistemas de ecuaciones se describen en el apéndice C. Los valores de las constantes y los parámetros usados en cada regularización se muestran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Parámetros usados en cada método de regularización.

Esquema	Λ	G	m_0	$ \langle\bar{\psi}\psi\rangle ^{\frac{1}{3}}$	f_π	m_π
[137]UV (A)	665	9.42	5	253	94	135
[109]UV (B)	651	10.08	5.5	251	92.3	139.3
[137]UV (C)	942	4.00	3	300	94	135
[137]PTR	1097	6.14	5	253	94	135
[130]IR	588.7	6.11	5	259	94	139.5
*PV	885.45	6.96	5	253	92	138

G está definida como $G \times 10^{-6}$ y sus unidades son $[\text{MeV}]^{-2}$, para las otras constantes son $[\text{MeV}]$. *El conjunto de parámetros para PV se obtuvo al realizar el ajuste como se describe en el apéndice C.

El método de regularización más comúnmente utilizado es el corte ultravioleta por lo que se usa como punto de referencia para hacer comparaciones. Como se observa en la Tabla 4.2 se emplean 3 conjuntos diferentes de parámetros para UV con el fin de observar la magnitud de la influencia del cambio de parámetros en las características del diagrama de fases además del método de regularización. Estos tres conjuntos se denotan por UV (A), UV (B) y UV (C).

Capítulo 5

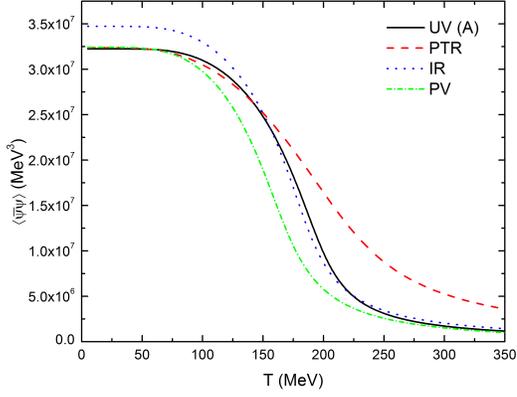
Resultados

5.1. Parámetro de orden

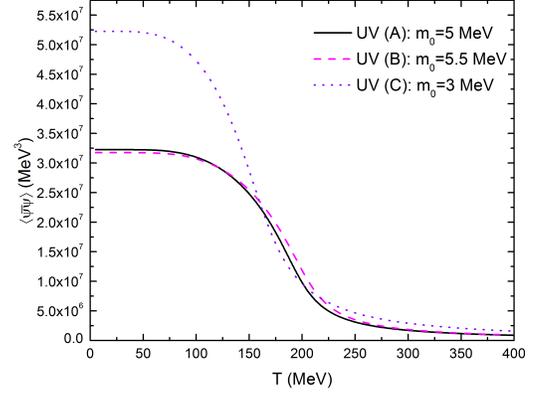
El rompimiento espontáneo de la simetría quiral en la QCD es proceso muy importante que explica la masa de los hadrones que constituyen la materia que existe en el Universo. En el modelo de NJL todos los términos de la Lagrangiana son invariantes bajo transformaciones quirales, a excepción del término de masa, por lo que la simetría quiral solo se cumple cuando la masa corriente de los quarks es cero. De la ecuación de *gap* (4.15) se sabe que la masa constitutiva es función de la temperatura y el potencial químico, sin embargo cuando la masa corriente es finita, la masa constitutiva nunca es cero. En este escenario cuando se alcanza una temperatura o potencial químico críticos se trata con una restauración parcial o aproximada de la simetría quiral donde la masa constitutiva tiende al valor de la masa corriente.

El parámetro de orden para el rompimiento de la simetría quiral es el condensado de quarks que describe la densidad de pares quark-antiquark que se encuentran en el vacío de la QCD. Es diferente de cero en la fase con simetría rota y cero (para quarks sin masa) en la fase con simetría restaurada. El condensado de quarks obtenido numéricamente se muestra en la Fig. 5.1 para un barrido de temperatura, $T \in (0, 350]$ MeV a potencial químico cero. Se observa que para todos los esquemas de regularización el parámetro de orden cambia rápidamente de forma continua lo que indica una zona de *crossover*, resultado que concuerda con lo reportado por LQCD para 2 sabores de quarks [142, 143, 144]. En la Fig. 5.1a se muestra que el valor del condensado es el mismo para todos los métodos de regularización para $m_0 = 5$ MeV a excepción del IR que difiere ligeramente debido a la exclusión de los momentos bajos. El impacto de la variación de los parámetros para el corte ultravioleta se refleja en la Fig. 5.1b donde al disminuir el valor de la masa constitutiva a $m_0 = 3$ MeV la magnitud del condensado aumenta drásticamente, mientras que la variación del parámetro de orden de $m_0 = 5$ a $m_0 = 5.5$ MeV es mínima.

Ahora se describe el condensado de quarks obtenido numéricamente a $T \approx 0$ y potencial químico finito, $\mu \in [0, 350]$ en la Fig 5.2. Para los casos UV (A), UV (B) e IR se observa una discontinuidad de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ a un determinado potencial químico, lo que indica una transición de primer orden. El comportamiento del parámetro de

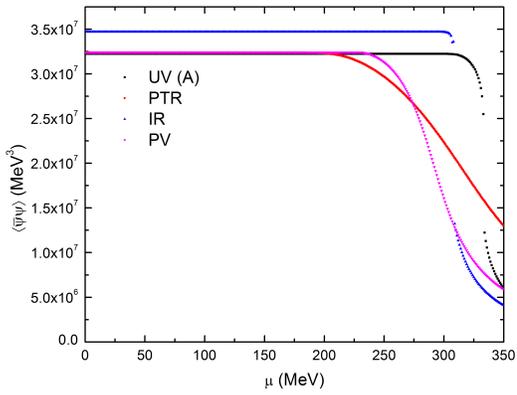


(a) Todos los esquemas, $m_0 = 5$ MeV

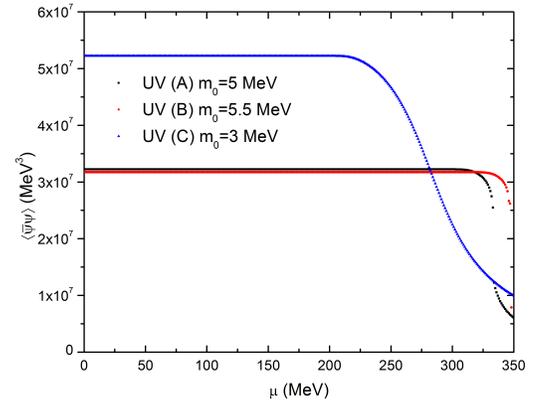


(b) Corte ultravioleta

Figura 5.1: Condensado quiral como función de la temperatura a $\mu = 0$



(a) Todos los esquemas, $m_0 = 5$ MeV



(b) Corte ultravioleta

Figura 5.2: Condensado quiral como función del potencial químico a $T \approx 0$

orden en UV (C), PTR y PV es el de una función suave, esto se interpreta como la presencia de un *crossover*.

5.1.1. Puntos críticos

Cuando m_0 es finita el condensado quiral nunca es cero, sin embargo, cuando el potencial químico es mayor que μ_{CEP} el valor de la masa constitutiva llega a su mínimo lo que representa la restauración aproximada de la simetría quiral, en este escenario se considera que la masa de los quarks dinámicamente generada ha desaparecido. En este caso es difícil determinar donde termina el *crossover* solo tomando en cuenta el parámetro de orden, sin embargo, mediante el comportamiento de la susceptibilidad quiral se pueden localizar los puntos críticos que indican una transición de fase.

Para los esquemas UV (A), UV (B) e IR, el *crossover* a $\mu = 0$ ocupa un rango de temperatura que disminuye al aumentar el potencial químico hasta que se alcanza un valor tan alto que la zona se reduce a un punto, el CEP, y se convierte en una

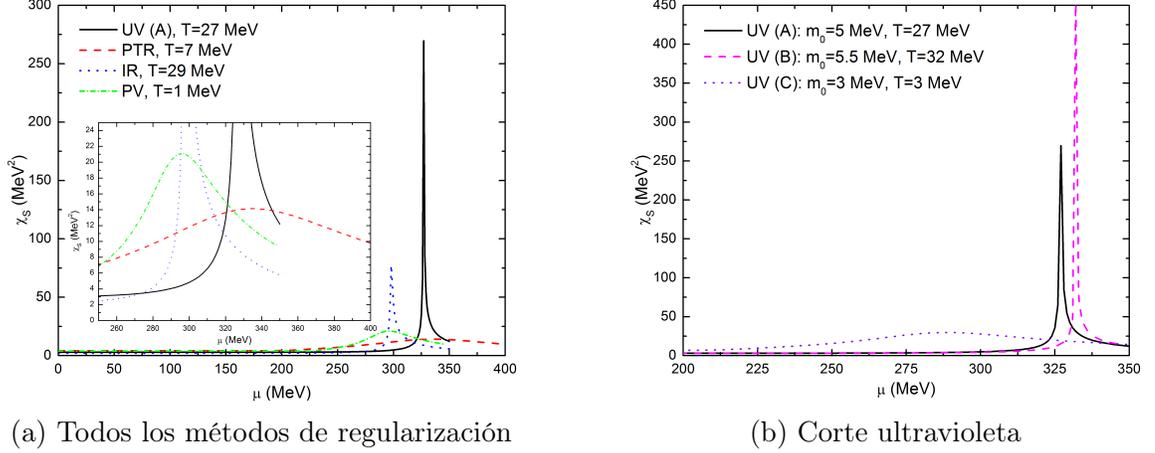


Figura 5.3: Susceptibilidad quiral como función del potencial químico

transición de fase de primer orden. Esta característica especial de los diagramas de fase se observa como un pico pronunciado (asociado a la discontinuidad del parámetro de orden) en la Fig. 5.3. Para UV (A) el CEP se localiza en $T = 27$ MeV y $\mu = 327$ MeV, para UV (B) en $T = 37$ MeV y $\mu = 332$ MeV y para IR en $T = 29$ MeV y $\mu = 298$ MeV. Mientras que para los esquemas UV (C), PTR y PV la susceptibilidad quiral es una función regular para todo el rango de potencial químico por lo que no existe un CEP, en la Fig. 5.3a se muestra el máximo absoluto de la susceptibilidad quiral de estos esquemas en el barrido $T - \mu$. El método de PV y PTR son los que necesitan los valores más grandes de m_0 para que aparezca un CEP en el diagrama de fases [137]. En la Fig. 5.3b se observa que el rango de la susceptibilidad quiral aumenta conforme aumenta el valor de la masa corriente de los quarks en el corte ultravioleta, estos resultados además de la masa constitutiva obtenida en cada esquema se resumen en la Tabla 5.1

Tabla 5.1: Resultados [MeV] obtenidos para los diferentes métodos de regularización y masas corriente.

Esquema	m_0	M	T_{CEP}	μ_{CEP}	T_c Loc	T_c Glob
UV (A)	5	308.740	27	327	199	173
UV (B)	5.5	325.525	37	332	207	176
UV (C)	3	211.980	-	-	165	152
PTR	5	203.790	-	-	220	205
IR	5	217.160	29	298	189	159
PV	5	230.553	-	-	170	154

'Loc' corresponde al criterio local y 'Glob' al criterio global.

5.1.2. Transiciones de fase

En los primeros instantes del Universo existió un plasma de partículas relativistas como los quarks, leptones, bosones de gauge y bosones de Higgs y a medida que el tiempo avanzó, ocurrieron subsecuentes transiciones de fase a través de rompimientos espontáneos de simetrías. Estos eventos incluyen la transición de fase de la unificación total, donde se asume que la interacción gravitacional, fuerte y electrodébil estaban unificadas y descritas por una sola teoría cuántica en la escala de Planck $\sim 10^{19}$ GeV. La gran unificación comprende a la unificación de la interacción fuerte y electrodébil [145, 146] en un rango de temperatura de $10^{14} - 10^{16}$ GeV y la transición de fase del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil a una temperatura de 300 GeV. Durante las transiciones de fase, algunos de los bosones de gauge y otras partículas adquieren masa vía el mecanismo de Higgs, además la simetría de la teoría se rompe a una simetría menor. A una temperatura de 100 a 300 MeV ($t \sim 10^{-5}$ s) se presentó una transición asociada con el rompimiento de la simetría quiral y el confinamiento del color, después de la cual las partículas gobernadas por la interacción fuerte son estados de tripletes de quarks sin color (bariones) y estados quar-antiquark sin color (mesones) [147].

Los detalles y naturaleza de las transiciones son de interés cosmológico, ya que inhomogeneidades locales en la densidad de número bariónico pudieron afectar el resultado de la nucleosíntesis primordial que sucedió entre 10^{-2} a 10^2 s y $T \sim 10$ a 0.1 MeV [148]. La temperatura del *crossover* quiral marca la época donde aparecieron los hadrones masivos durante la evolución del Universo temprano, este proceso sucedió a un potencial químico casi nulo ($\mu \approx 0$), mientras que al existir una diferencia entre la cantidad de quarks y antiquarks ($\mu \neq 0$) el *crossover* dio lugar a las diferentes regiones del diagrama de fases de la QCD [142].

A medida que aumenta la temperatura, las interacciones entre los quarks ocurren a distancias pequeñas donde el acoplamiento débil tiene mayor relevancia, mientras que a grandes distancias estas interacciones se debilitan. Como consecuencia, la materia nuclear a muy alta temperatura no presenta confinamiento ni rompimiento espontáneo de la simetría quiral [25, 149, 150]. También se espera que se restaure la simetría quiral a altas densidades bariónicas aún a temperatura cero.

En la Fig. 5.4 se muestra un diagrama de fases ejemplo con las regiones que se describen con las especificaciones que se impusieron al modelo de NJL en este trabajo, se localiza una temperatura crítica T_c (pseudocrítica en sentido estricto, ya que el *crossover* corresponde a un rango de temperaturas) que corresponde al valor de la temperatura a potencial químico cero donde se encuentra la zona de coexistencia de fases, un *critical end point* en el punto (μ_{CEP}, T_{CEP}) que indica el 'inicio' de la línea de transición de primer orden. La línea de transición separa dos fases, la de simetría quiral restaurada a alta temperatura y potencial químico y la de simetría quiral rota a temperatura y potencial químico bajos.

La ausencia o presencia de la simetría quiral es lo que distingue una fase de otra en los modelos que describen el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. La susceptibilidad quiral indica el cambio del parámetro de orden respecto a la masa corriente, entonces con ayuda de ella se puede localizar el punto donde ocurre el

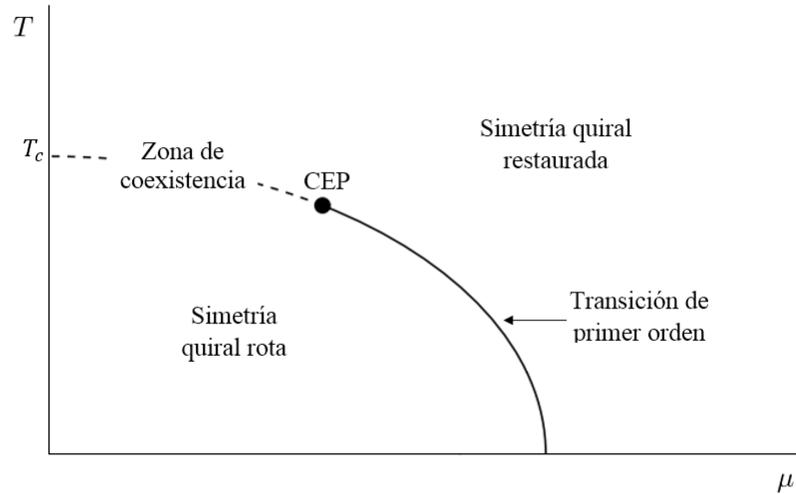


Figura 5.4: Diagrama de fases ideal para el modelo NJL con dos sabores

cambio de fase observando su comportamiento. Al realizar el barrido en el plano $T-\mu$, el parámetro de orden cambia su valor (y por lo tanto la susceptibilidad quiral) con diferentes patrones. Asakawa y Yazaki [112] reportan que a suficientemente alta temperatura $T > T_{CEP}$ no hay alguna línea de transición que se pueda definir en el plano $T-\mu$. Más aún, las propiedades termodinámicas cambian relativamente rápido a través de una banda en el plano por lo que es necesario trazar el diagrama de fases de forma diferente a la fase de primer orden. Cuando existe un CEP, el parámetro de orden toma un valor específico, las transiciones de fase se reconocen por un salto en el parámetro de orden a valores más altos que los del CEP, pero este valor no necesariamente coincide con el máximo local de la susceptibilidad quiral en la zona de *crossover*, aunque para las transiciones propias siempre coinciden. Por esta razón se utilizan dos diferentes criterios para localizar la zona de *crossover* en el diagrama de fases.

Criterio global

En este criterio se toma en cuenta solo el máximo global de la susceptibilidad quiral, en caso de que esta no sea finita para algún rango de potencial químico, entonces solo el valor de potencial químico más pequeño en ese rango se toma en cuenta. El valor del parámetro de orden (condensado quiral) a dicha temperatura y potencial químico determinado se usa como valor de referencia para determinar la fase. Si el condensado en un punto en particular es mayor que el valor de referencia, entonces la fase corresponde a la de simetría rota y si es igual o menor se trata de la fase con simetría restaurada.

Criterio local

Para este criterio, se toma en cuenta el máximo local de la susceptibilidad quiral en cada valor de potencial químico. La susceptibilidad quiral se expresa como una

función de la temperatura y la transición de fase ocurre a un valor de temperatura donde se encuentra el máximo local de la susceptibilidad quiral para un potencial químico determinado. Este valor puede ser finito o no, si y solo si el valor es finito, entonces se trata del *crossover*. Los valores de temperatura que son más bajos describen la fase de simetría rota y los que son más altos se atribuyen a la fase de simetría restaurada.

Comparación entre criterios

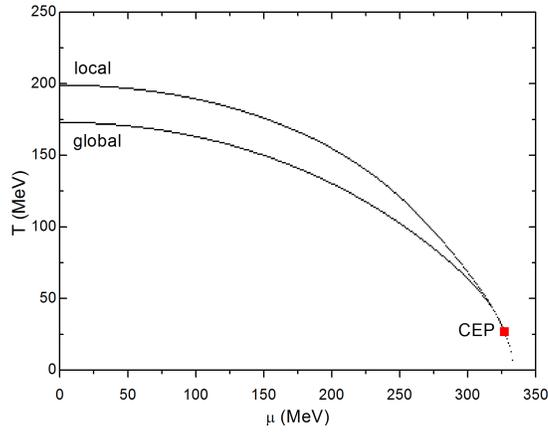
Aunque ambos criterios dependen en gran medida de los puntos críticos, tienen diferencias fundamentales. La más importante es que el criterio global depende en el valor absoluto del parámetro de orden, mientras que el criterio local depende más de la susceptibilidad quiral.

Ambos criterios describen la fase de primer orden de la misma forma, es un resultado esperado debido a la discontinuidad del parámetro de orden en la transición. De las Figs. 5.5a, 5.5b y 5.5d que tienen CEP, ambos criterios coinciden en el CEP para seguir juntos en la transición de fase de primer orden en los potenciales químicos altos y temperaturas bajas. En la zona de *crossover* no se espera que las curvas de los criterios coincidan como en 5.5c, 5.5e y 5.5f donde las curvas se intersectan pero no coinciden a potenciales químicos altos debido a que la zona de *crossover* no ha terminado. Lo mismo ocurre cuando se presenta un CEP, a temperaturas altas y potenciales químicos bajos donde se describe el *crossover* los criterios no son coincidentes.

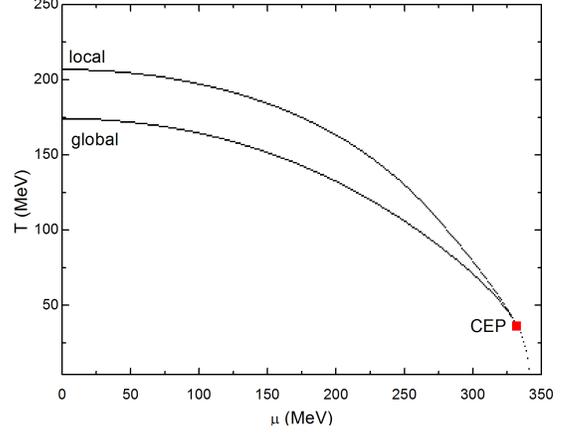
5.1.3. Zona de *crossover*

El *crossover* describe un conjunto de valores de temperatura y potencial químico donde coexisten dos fases diferentes en vez de una transición de fase bien definida [61]. Este fenómeno está presente en todas las teorías efectivas a bajos potenciales químicos para masa corriente de los quarks finita, los modelos que tienen este comportamiento concuerdan con los resultados de LQCD en esta zona del diagrama de fases [151, 72]. Como consecuencia de que la masa corriente de los quarks sea finita, la simetría quiral nunca se restaura de forma estricta porque el condensado nunca es igual a cero. Sin embargo, las transiciones de primer orden aún se pueden identificar aunque el parámetro de orden no sea exactamente cero en la fase de simetría restaurada. En estos casos se puede considerar que el sistema presenta una transición de fase aunque la simetría quiral no esté completamente restaurada.

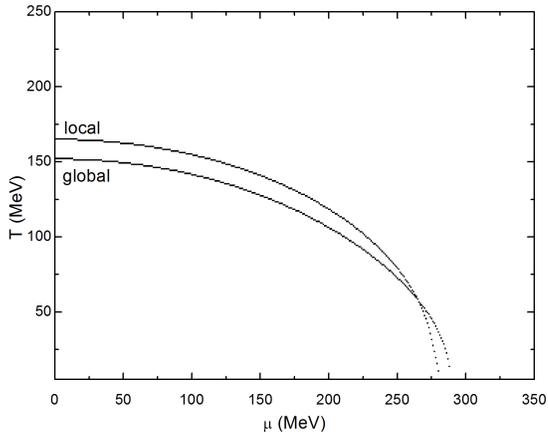
Identificar una transición de fase es menos complicado que definir la región de *crossover*, porque en el primer caso, el parámetro de orden cambia su valor de forma abrupta mientras que en el segundo caso el parámetro de orden cambia su valor de forma rápida y gradual. Hay que tener en cuenta al definir el *crossover*, que esta región termina en las coordenadas (μ, T) del CEP donde una transición de primer orden continua después de dicho punto hacia potenciales químicos más altos.



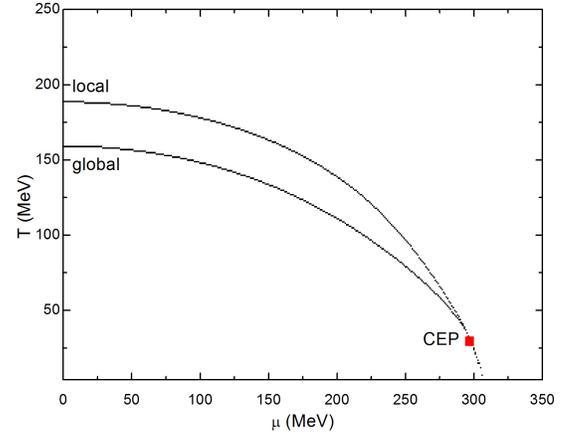
(a) UV (A), $m_0 = 5$ MeV



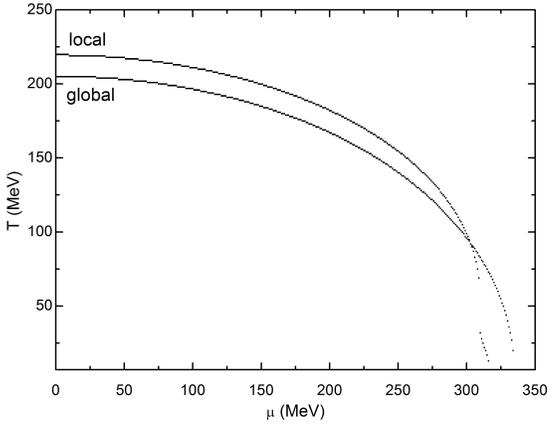
(b) UV (B), $m_0 = 5.5$ MeV



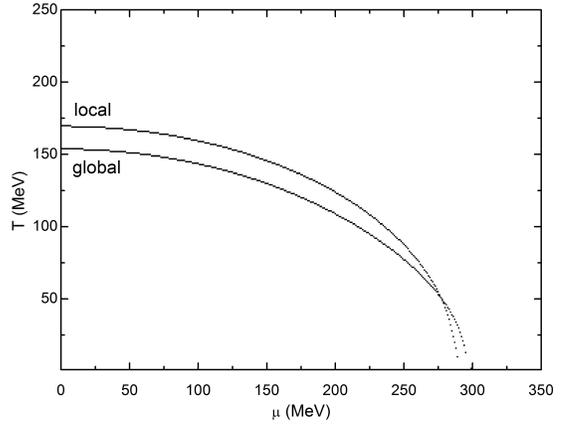
(c) UV (C), $m_0 = 3$ MeV



(d) IR, $m_0 = 5$ MeV



(e) PTR, $m_0 = 5$ MeV



(f) PV, $m_0 = 5$ MeV

Figura 5.5: Superposición de criterios de los diagramas de fase

Discontinuidad del condensado

Una forma de definir la región del *crossover* es tomar el primer salto del parámetro de orden después del CEP y considerar la región de coexistencia de fases como todos

los valores del condensado quiral que están entre los valores del salto como se muestra en la Fig. 5.6. Cuando el potencial químico se incrementa de μ_{CEP} a $\mu_{\text{CEP}} + \Delta\mu$ se puede obtener el valor del salto en el parámetro de orden de $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_a$ a $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_b$ donde $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_a > \langle\bar{\psi}\psi\rangle_b$ mientras aumenta la temperatura. Con esta definición, se considera la zona de *crossover* como el conjunto de valores (μ, T) donde el valor del condensado quiral se encuentra entre $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_a$ y $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_b$. Las ventajas de este criterio es que se asegura matemáticamente que la región de *crossover* termine exactamente en el CEP y que en cada punto (μ, T) contenido en la zona ambas fases coexistan.

Al usar este criterio, la zona de *crossover* termina exactamente en las coordenadas del CEP, en (27, 327) MeV para UV (A), (37, 332) para UV (B) y (29, 298) para IR, estos diagramas se muestran en la Fig. 5.7. La principal desventaja de esta descripción es que depende de la resolución del cálculo y del hecho de que es necesario que exista un CEP cuando en realidad no es necesario que exista para que la zona de *crossover* esté presente.

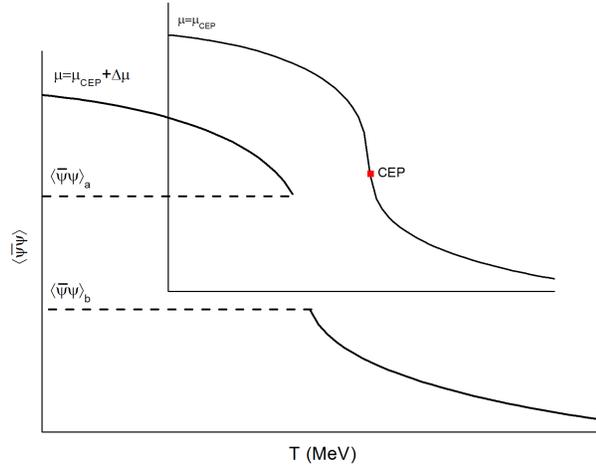


Figura 5.6: Criterio de discontinuidad del condensado

Punto de inflexión

Otra forma de definir el *crossover* que no requiere de la existencia del CEP involucra la susceptibilidad quiral. Tomando en cuenta el hecho de que para cualquier punto (μ, T) de la zona de *crossover* la susceptibilidad quiral es una curva acampañada (no presenta picos pronunciados), se puede considerar la región de *crossover* como todo lo contenido entre los dos puntos de inflexión de la curva. Esto tiene la ventaja que no depende de la resolución del cálculo ni de la existencia del CEP. Sin embargo, al definir el *crossover* de esta forma, no se asegura que termine en el CEP si es que existe.

En este criterio, cuando existe el CEP como en las Figs. 5.8a, 5.8c y 5.8e la región va disminuyendo su ancho y para valores altos de potencial químico continua de forma puntual. Esta continuación se puede interpretar como la transición de fase de primer orden, que concuerda con lo obtenido en los diagramas de las Figs. 5.5a,

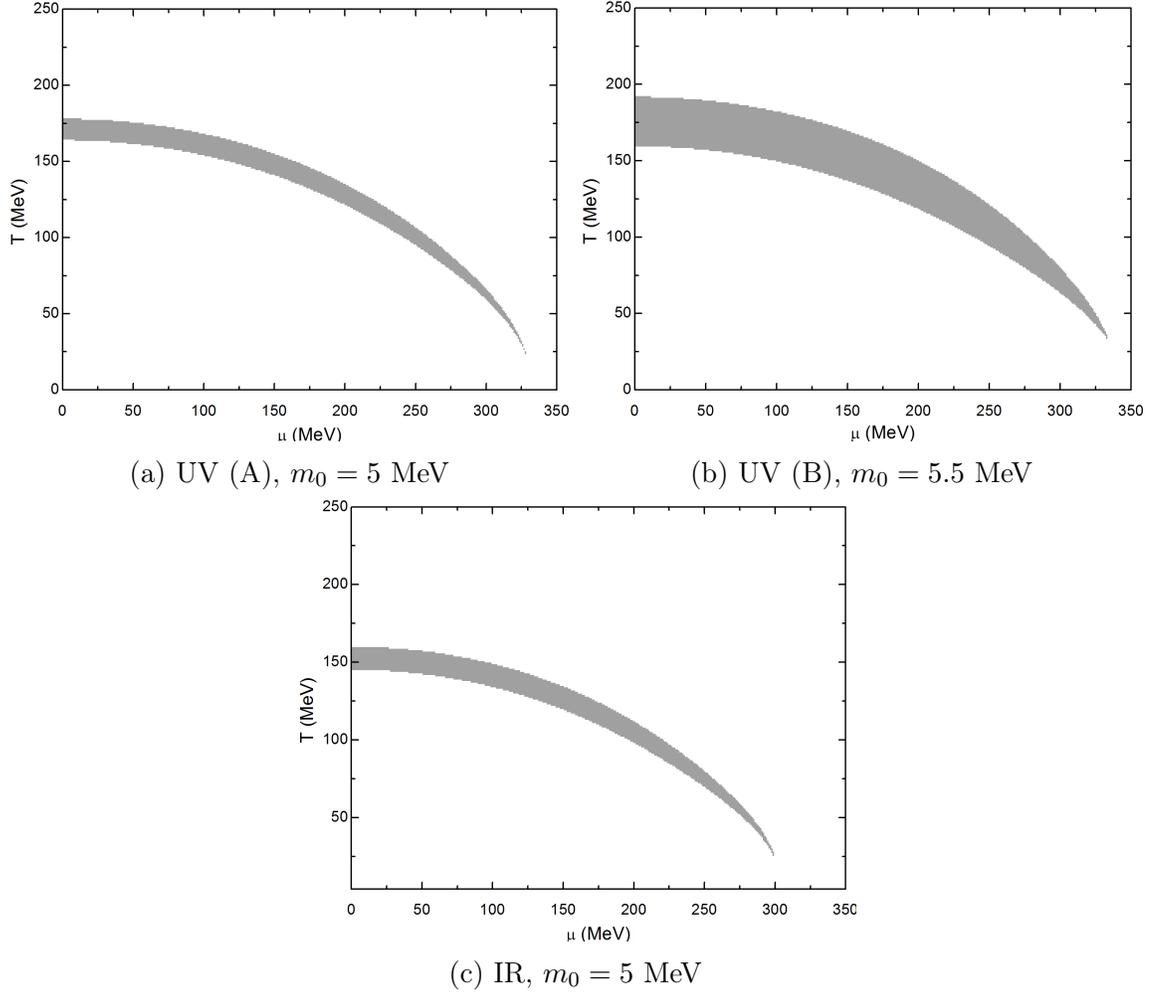
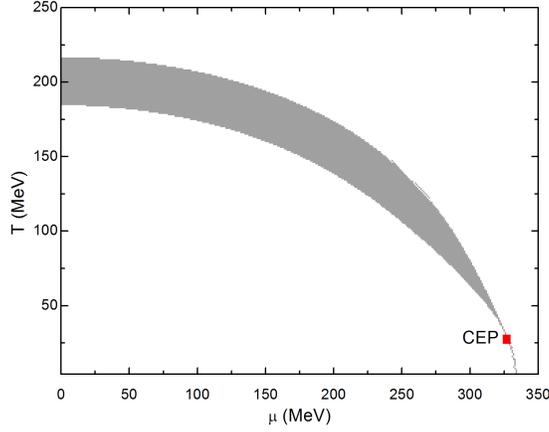


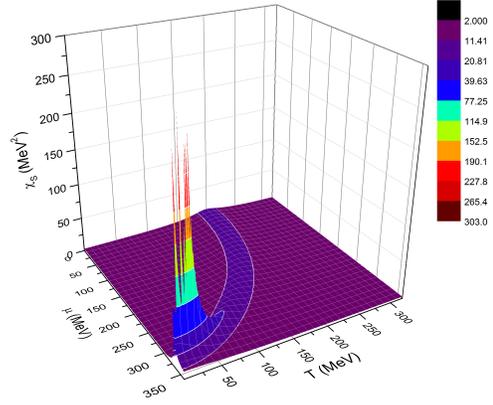
Figura 5.7: Diagramas de fase para el criterio de la discontinuidad del condensado

5.5b y 5.5d. En las Figs. 5.8b, 5.8d y 5.8f se muestra la susceptibilidad quiral donde la zona de *crossover* corresponde a la parte de alta temperatura y potenciales bajos donde la gráfica tiene un comportamiento suave, al avanzar hacia las coordenadas (μ_{CEP}, T_{CEP}) los picos se hacen más pronunciados hasta que se alcanza la región de primer orden donde aparecen las divergencias en la susceptibilidad, éstas se encuentran a potenciales químicos altos y temperaturas bajas.

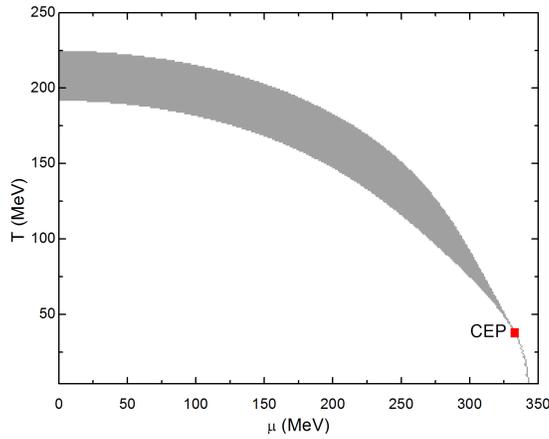
Cuando no existe un CEP como en los diagramas de las Figs. 5.9a, 5.9c y 5.9e la región de *crossover* continua sin cerrarse hasta tocar el eje del potencial químico. En los casos de las Figs. 5.9a y 5.9c el ancho de la región permanece prácticamente constante durante todo el barrido, mientras que en la Fig. 5.9e para potenciales químicos altos el ancho disminuye. En las correspondiente susceptibilidades quirales de las Figs. 5.9b, 5.9d y 5.9f se muestra el comportamiento suave en todo el barrido, la anchura de la gráfica determinada por los puntos de inflexión corresponde a la extensión del *crossover* en los diagramas de fases. No existen divergencias en la susceptibilidad quiral que indiquen una transición de fase.



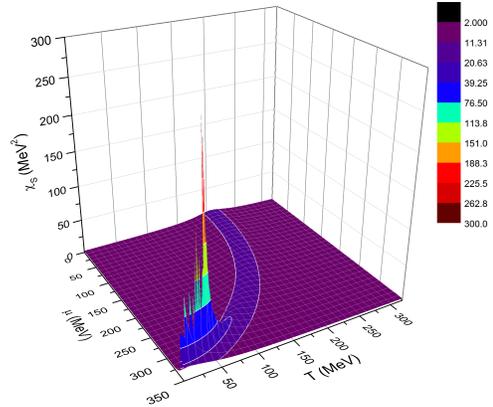
(a) UV (A), $m_0 = 5$ MeV



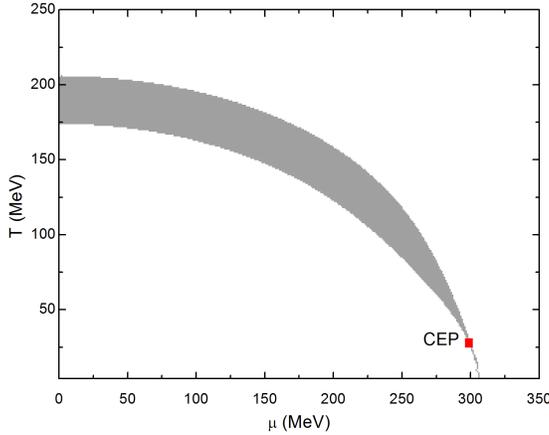
(b) UV (A), $m_0 = 5$ MeV



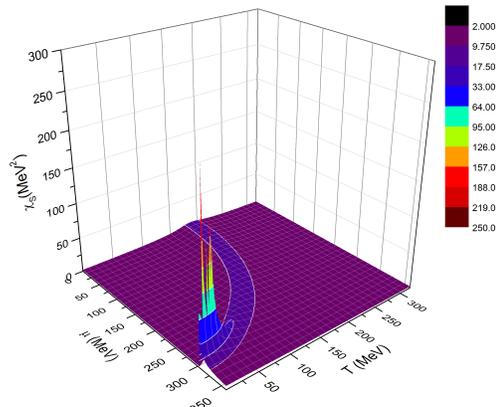
(c) UV (B), $m_0 = 5.5$ MeV



(d) UV (B), $m_0 = 5.5$ MeV



(e) IR, $m_0 = 5$ MeV

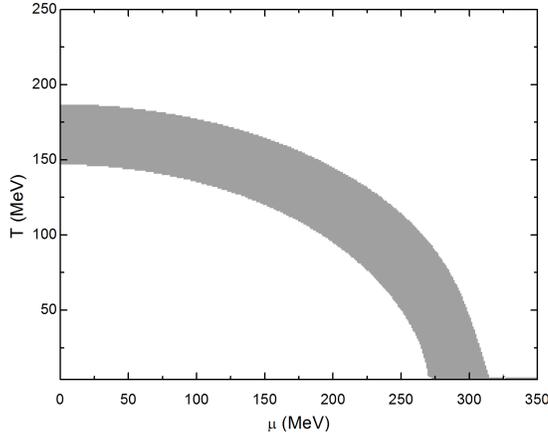


(f) IR, $m_0 = 5$ MeV

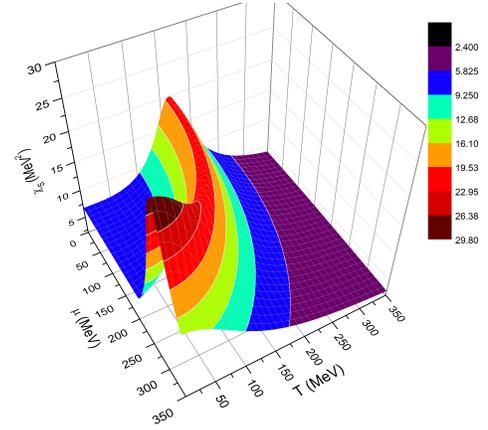
Figura 5.8: Diagramas de fase para el criterio del punto de inflexión donde existe CEP (izquierda) y susceptibilidad quiral (derecha)

5.2. Discusión

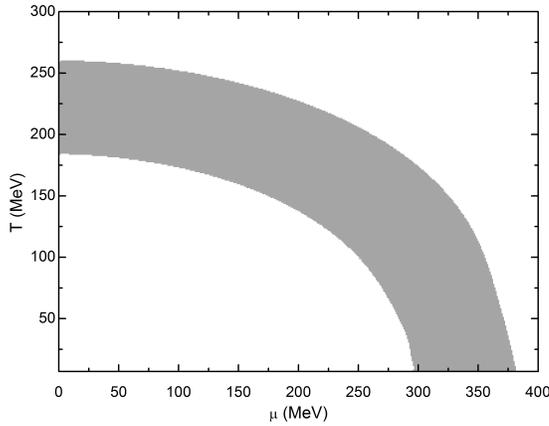
El modelo NJL es muy sensible al conjunto de parámetros que se usa, sin embargo aun con las diferencias en los valores de m_0 se observa que el método de regularización



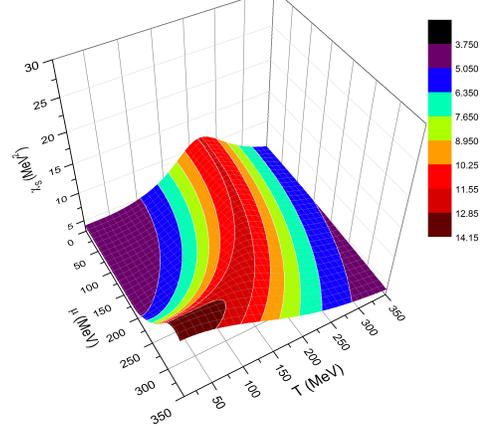
(a) UV (C), $m_0 = 3$ MeV



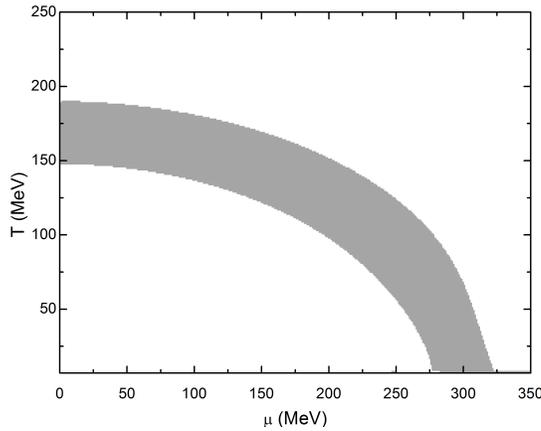
(b) UV (C), $m_0 = 3$ MeV



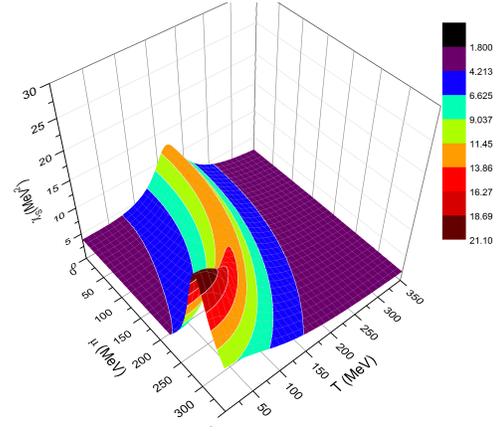
(c) PTR, $m_0 = 5$ MeV



(d) PTR, $m_0 = 5$ MeV



(e) PV, $m_0 = 5$ MeV



(f) PV, $m_0 = 5$ MeV

Figura 5.9: Diagramas de fase para el criterio del punto de inflexión donde no existe CEP (izquierda) y susceptibilidad quiral (derecha)

tiene mayor impacto en los diagramas. Al aumentar la masa corriente de los quarks en el corte ultravioleta, las temperaturas críticas para ambos criterios aumentan, sin embargo, se encontró que el esquema de PTR exhibe los valores más altos de T_c

para ambos criterios aun cuando en el corte ultravioleta la $m_0 = 5.5$ MeV es mayor que la usada en PTR. Al comparar la constante de acoplamiento G de todos los métodos de regularización, se observa que aquellos esquemas que tienen los valores más bajos de G son los que no presentan CEP, el CEP aparece cuando G es grande [137]. Este comportamiento concuerda con el hecho de que G representa la magnitud de la interacción entre quarks, por lo que a mayores valores, la condensación de pares quark-antiquark es mayor.

El hecho de que los diagramas del esquema IR sean diferentes del UV es un caso notable dado que el corte infrarrojo se introduce para evitar ciertos fenómenos relacionados al confinamiento, característica que no está presente en el modelo NJL, además los resultados obtenidos solo están relacionados a la simetría quiral. Las temperaturas críticas en ambos criterios son ligeramente diferentes, las de IR se encuentran alrededor de 10 unidades por debajo de las encontradas para UV, T_{CEP} es prácticamente la misma pero μ_{CEP} es casi 30 unidades menor en IR que en UV.

Respecto al criterio del *crossover*, se observa que en los casos donde existe el CEP, ambos criterios proporcionan regiones que no se traslapan, pero ambos terminan en un punto en el CEP. No se esperaría un traslape entre criterios o que los dos terminen en el CEP, un criterio depende de los valores del condensado mientras que el otro depende del comportamiento de la susceptibilidad.

El criterio del punto de inflexión continúa como una línea que representa la transición de primer orden, que a su vez actúa como punto de inflexión para la susceptibilidad quiral. Esto no ocurre en el criterio de la discontinuidad del condensado donde el *crossover* se determina con el conjunto de valores del condensado que están entre la discontinuidad indicada por el salto que no aparece después del CEP (las discontinuidades de la región de primer orden). Si no hay CEP la posición de ambos puntos de inflexión está bien separada, lo que da como resultado una región de *crossover* amplia en todo el diagrama (Figs. 5.9a, 5.9c, 5.9e). Se puede considerar al criterio de la discontinuidad del condensado como una extensión del criterio global, donde se usa el valor del condensado como condición para clasificar las fases, mientras que el condensado se define como el conjunto de valores alrededor de dicha condición. Por esto, las regiones de *crossover* definidas con el criterio de la discontinuidad del condensado siempre continenen las curvas del criterio global antes de alcanzar el CEP (Figs. 5.5a, 5.5b y 5.5d).

Por otro lado, el criterio del punto de inflexión se basa en los valores de susceptibilidad quiral alrededor de la transición de primer orden y del *crossover*. El criterio local da origen a la curva generada por los máximos locales de la susceptibilidad quiral. Esta curva siempre está contenida entre las dos curvas obtenidas por los puntos de inflexión de la susceptibilidad quiral en el plano $T - \mu$. Debido a esto, las regiones de *crossover* del criterio del punto de inflexión (Figs. 5.8, 5.9) siempre contienen las curvas del criterio local y puede o no contener las del criterio global (Fig. 5.5). El traslape de las curvas de ambos criterios no se debe interpretar como el límite de la región de *crossover*, si no como dos formas diferentes de localizar los puntos donde el *crossover* tiene su máxima extensión.

5.3. Conclusión

En este trabajo se estudió el diagrama de fases en el plano $T - \mu$ de la cromodinámica cuántica con el modelo de Nambu-Jona-Lasinio. Se propusieron métodos para determinar la anchura del crossover y se analizaron estos métodos en varios esquemas de regularización. En particular, se encontró que la anchura del crossover y la posición del CEP son muy sensibles al método de regularización y a la elección de los parámetros del modelo. La posición del CEP es incierta, porque hasta al día de hoy no se ha podido obtener ningún resultado experimental para la materia que interactúa fuertemente bajo estas condiciones tan extremas. Las condiciones en las cuales se pueden conocer los parámetros de la teoría, como el condensado, bajo técnicas de primeros principios, como LQCD, están bastante limitados a potenciales químicos muy cercanos a cero, lo que hace atractivo el usar un enfoque fenomenológico que solamente las teorías efectivas como el modelo de NJL han podido lograr hasta hoy.

Lo difícil de este problema es que existen muchas dificultades al tratar de hacer una extensión de los datos conocidos de LQCD hacia potenciales químicos cada vez mayores. Los parámetros conocidos con los cuales se hace el ajuste de datos, como f_π , m_π , etc., dejan demasiada libertad a los valores que pueden tomar los parámetros del modelo. Por esto, los datos pueden cambiar drásticamente en lo cualitativo en el cambio de un esquema a otro. Esto sin mencionar el método de regularización, el cual se implementa pensando en que se debe encontrar nueva física en escalas comparables o mayores al parámetro de corte de cada esquema de regularización.

De todas formas, los datos parecen ser cualitativamente consistentes en cada esquema de regularización, por lo que es posible encontrar propiedades cualitativas interesantes con el uso de estos modelos. Definir un criterio para determinar los límites de una zona difusa como lo es el crossover también puede ser de gran utilidad, ya que es posible predecir la frecuencia con la que pueden ocurrir ciertos fenómenos relacionados con la simetría quiral.

En cuanto a los criterios, se recupera un diferente ancho para la sección del crossover con cada uno. La susceptibilidad siempre tiene un buen comportamiento en esta zona, lo cual hace aun más fácil hacer una comparación de esta con el comportamiento del condensado. El hecho de que ambos criterios no se traslapen en la zona de bajos potenciales químicos dificulta determinar el punto de inicio y final del crossover desde un punto de vista general. Aunque matemáticamente el ancho es infinito, en realidad se distingue una fase quiral de la otra al indicar la presencia o ausencia total del condensado quiral. Como la simetría quiral está explícitamente rota esto no se puede lograr en la naturaleza, pero incluso en el caso donde teóricamente se pudiera llegar a lograr, la presencia o ausencia de condensados siempre está sujeta a cambiar, incluso en el vacío, mediante las fluctuaciones cuánticas de este.

Apéndice A

Grupos

Las restricciones en la Lagrangiana son impuestas por las simetrías presentes en los fenómenos de estudio, estas se representan mediante la teoría de grupos. Una colección de elementos g_i forma un grupo si se cumplen las siguientes condiciones [35]

1. Cerradura bajo la operación de multiplicación, si g_i y g_j son elementos del grupo, entonces $g_i \cdot g_j$ también es elemento.
2. Ley asociativa de la multiplicación $g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k$
3. Elemento identidad $\mathbf{1}$, existe un elemento $\mathbf{1}$ tal que $g_i \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot g_i = g_i$
4. Para cada elemento g_i existe un inverso g_i^{-1} tal que $g_i \cdot g_i^{-1} = \mathbf{1}$

En general, los elementos de un grupo no conmutan, $g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i$, pero si todos los elementos del grupo conmutan, el grupo es llamado grupo abeliano.

A.1. Transformación unitaria

Cualesquier operador A se denomina invariante bajo la transformación unitaria U si $U^\dagger A U = A$, o si $[U, A] = 0$ [154]. Si el Hamiltoniano H es invariante bajo alguna transformación unitaria U , entonces U es llamada simetría del Hamiltoniano. Por lo tanto el valor esperado de un estado $|\psi\rangle$ para un Hamiltoniano simétrico es invariante bajo la transformación U aplicado al estado

$$(\langle\psi|U^\dagger) H (U|\psi\rangle) = \langle\psi|(U^\dagger H U) |\psi\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle \quad (\text{A.1})$$

Una transformación unitaria U es una simetría del Hamiltoniano H si el conmutador es cero, $[U, H] = 0$ [48]. Que la transformación sea unitaria, asegura que la probabilidad de transición entre estados se conserve

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2 \quad (\text{A.2})$$

entonces se cumple que $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$.

A.2. Grupo $U(1)$

Corresponde al grupo de rotaciones en el plano cuyos elementos están parametrizados por un solo número, el ángulo de rotación θ , los elementos se identifican por los vectores unitarios $e^{i\theta}$ en el plano complejo donde forman un círculo unitario, además los números complejos se pueden ver como matrices unitarias 1×1 [155].

A.3. Grupo $SU(N)$

Comprende el grupo de matrices unitarias de orden N con determinante 1 [156]. Cada matriz U de $N \times N$ del grupo se puede representar con los generadores t^A para $A = 1, \dots, N^2 - 1$ como

$$U(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{N^2-1}) = e^{i\Lambda_A t^A} \quad (\text{A.3})$$

Dado que la matriz debe ser unitaria, los generadores deben ser Hermitianos, además como $\det U = 1$, la traza de los generadores t^A debe ser cero y siguen el álgebra

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \quad (\text{A.4})$$

donde f es una constante de estructura antisimétrica del grupo. En el caso especial $N = 3$, los generadores t^A de $SU(3)$ están dados por las matrices de Gell-Mann

$$t^A = \frac{\lambda^a}{2} \quad (\text{A.5})$$

los valores de la constante de estructura son

$$f_{123} = 1, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A.6})$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.7})$$

el conmutador se escribe como

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i \sum_{c=1}^8 \frac{\lambda^c}{2} \quad (\text{A.8})$$

Para el caso de $N = 2$, $SU(2)$ corresponde al conjunto de transformaciones unitarias especiales que actúan en vectores 2D con componentes complejas y en la operación de multiplicación matricial [157]. Hay $2^2 - 1$ parámetros, por lo tanto 3 generadores, J_1, J_2, J_3 . Las matrices tienen la forma

$$\begin{bmatrix} a & b^* \\ b & -a \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

donde a es real. Hay 3 parámetros: $a, \text{Re}(b)$ e $\text{Im}(b)$. Un conjunto de generadores (más no el único) está dado por las matrices de espín de Pauli $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, tienen las siguientes propiedades

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{A.10})$$

el conmutador está definido por

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad (\text{A.11})$$

la constante de estructura del grupo está dada por el tensor Levi-Civita ϵ_{ijk} (B.2)

Apéndice B

Álgebra de Dirac

B.1. Matrices

De las condiciones (2.5) que deben cumplir las matrices (2.1) se obtiene

$$2\delta^{ij} = \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = \beta^2 \alpha^i \alpha^j + \beta^2 \alpha^j \alpha^i = -(\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i) \quad (\text{B.1})$$

$$0 = \alpha^i \beta + \beta \alpha^i \Rightarrow \beta \alpha^i \beta + \beta^2 \alpha^i = \gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i \quad (\text{B.2})$$

el conjunto de matrices γ^μ satisfacen la regla de anticonmutación

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4 \quad (\text{B.3})$$

donde I_4 corresponde a la matriz identidad en 4 dimensiones. Las matrices que satisfacen esta condición forman una álgebra de Clifford, $g^{\mu\nu}$ corresponde a la métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g^{\mu\nu} \quad (\text{B.4})$$

de la regla (B.3) se obtiene

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = -(\gamma^i)^2 = I_4, \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (\text{B.5})$$

Se definen las matrices gamma covariantes como

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = \{\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3\} \quad (\text{B.6})$$

con el producto de las matrices γ^μ se pueden definir otras dos, la primera es

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (\text{B.7})$$

con $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123}$, y la segunda está dada por

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (\text{B.8})$$

con esta matriz y la regla (B.3) se obtiene

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \quad (\text{B.9})$$

Se definió la transformación axial en (2.46) y la quiralidad como (2.48) en base a la matriz γ^5 , sus propiedades son

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \quad (\text{B.10})$$

B.2. Tensor antisimétrico Levi-Civita

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ; ijk = \text{permutación par de } 123 \\ -1 & ; ijk = \text{permutación impar de } 123 \\ 0 & ; \text{si cualesquier dos índices son iguales} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & ; \mu\nu\alpha\beta = \text{permutación par de } 0123 \\ -1 & ; \mu\nu\alpha\beta = \text{permutación impar de } 0123 \\ 0 & ; \text{si cualesquier dos índices son iguales} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

B.3. Otras representaciones

En la representación quiral las matrices se expresan como

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

también se pueden reescribir como

$$\gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Con esta representación las proyecciones quirales adoptan la forma

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \psi, \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \psi \quad (\text{B.15})$$

B.4. Producto de matrices

$$\left. \begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4I_4 \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu &= 4g^{\alpha\beta} I_4 \end{aligned} \right| \begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\mu &= -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

B.5. Traza

La traza de una matriz se define como la suma de los elementos de la diagonal, para una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$ es

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{B.17})$$

entonces $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$ y $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$, donde T corresponde a la transpuesta. Para las matrices A , B y C

$$\text{Tr}(A + B + C) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C), \quad \text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA) \quad (\text{B.18})$$

con estas definiciones, las matrices gamma cumplen las siguientes identidades

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \} = 0 \\ \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma_\mu \} = 16 \\ \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 \} = -4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\ \text{traza de un producto impar} \\ \text{de matrices } \gamma^\mu \text{ es cero} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr} \{ \gamma_5 \} = \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 0 \\ \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \} = 4(g^{\mu\nu} g^{\beta\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \\ \text{traza del producto de } \gamma^5 \text{ por un número} \\ \text{impar de matrices } \gamma^\mu \text{ es cero} \end{array} \quad (\text{B.19})$$

B.6. Notación *slash* de Feynman

Se introduce como notación para la contracción de cualquier cuadrivector a^μ con las matrices γ^μ y se escribe $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$, con esta notación la ecuación de Dirac (2.10) se escribe como

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (\text{B.20})$$

o de forma equivalente $(\not{p} - m)\psi(x) = 0$. Para cualesquier cuadrivectores a_μ , b_μ se tiene

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) a_\mu b_\nu = 2a \cdot b \quad (\text{B.21})$$

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b - i\sigma^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \quad (\text{B.22})$$

por lo tanto $\not{p}\not{p} = p^2$, también se obtiene

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2 \quad (\text{B.23})$$

otras identidades útiles son

$$\left. \begin{array}{l} \gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu = -2\not{a} \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4ab \\ \text{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_n) = 0, \quad n \text{ impar} \end{array} \right| \begin{array}{l} \gamma^\mu \not{a}\not{b} \gamma_\mu = 4ab \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b} \gamma^5) = 0 \\ \not{a}\not{b} = a \cdot b - i\sigma^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \end{array} \quad (\text{B.24})$$

Esta sección está basada en [158] y el capítulo *Dirac field* en [42].

Apéndice C

Ajuste de parámetros

Cualquiera de las regularizaciones para el modelo NJL se caracteriza por tres parámetros: la constante de acoplamiento G , el corte Λ y la masa corriente m_0 . Estos parámetros se fijan de tal manera que se reproduzcan en el vacío el condensado quiral, la masa del pión y su constante de decaimiento. Además se puede obtener el valor la masa constitutiva M en el vacío que corresponde a dichos parámetros. Por lo tanto, se tienen 4 incógnitas con las que se forma un sistema de ecuaciones que se resuelven para reproducir las constantes físicas.

C.1. Corte ultravioleta

1. Ecuación de *gap* para M

$$M = m_0 + \frac{4GN_cN_f}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (\text{C.1})$$

2. Condensado quiral

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_cN_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (\text{C.2})$$

3. Constante de decaimiento del pión

$$f_\pi^2 = \frac{N_cM^2}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2 M}{(\sqrt{p^2 + M^2})^3} \quad (\text{C.3})$$

C.2. Corte Infrarrojo

1. Ecuación de *gap* para M

$$M = m_0 + \frac{4GN_cN_f}{2\pi^2} \int_{\Lambda_{IR}}^\Lambda dp \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (\text{C.4})$$

2. Condensado quiral

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_{\Lambda_{IR}}^{\Lambda} dp \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (\text{C.5})$$

3. Ecuación Bethe-Salpeter para un mesón [153]

$$1 + 8GN_c N_f \int_M^{\Lambda} dp \frac{p^2 \sqrt{p^2 + M^2}}{\pi^2 [m_\pi^2 - 4(p^2 + m^2)]} = 0 \quad (\text{C.6})$$

C.3. Regularización de tiempo propio

1. Ecuación de *gap* para M

$$M = m_0 + \frac{4GN_c N_f}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \text{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} \sqrt{p^2 + M^2}) \quad (\text{C.7})$$

2. Condensado quiral

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \text{erfc}(\sqrt{\tau_{UV}} \sqrt{p^2 + M^2}) \quad (\text{C.8})$$

3. Constante de decaimiento del pión

$$f_\pi^2 = -\frac{N_c M^2}{4\pi^2} \text{Ei}\left(\frac{-M^2}{\Lambda^2}\right) \quad (\text{C.9})$$

donde $\text{Ei}(-M^2/L^2)$ corresponde a la integral exponencial

$$\text{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t} \quad (\text{C.10})$$

C.4. Pauli-Villars

1. Ecuación de *gap* para M

$$M = m_0 + \frac{GN_c N_f M}{2\pi^2} \left[M^2 \log(M^2) - 2(M^2 + \Lambda^2) \log(M^2 + \Lambda^2) \right. \\ \left. + (M^2 + 2\Lambda^2) \log(M^2 + 2\Lambda^2) \right] \quad (\text{C.11})$$

2. Condensado quiral

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f M}{8\pi^2} \left[M^2 \log(M^2) - 2(M^2 + \Lambda^2) \log(M^2 + \Lambda^2) \right. \\ \left. + (M^2 + 2\Lambda^2) \log(M^2 + 2\Lambda^2) \right] \quad (\text{C.12})$$

3. Constante de decaimiento del pión

$$f_\pi^2 = -\frac{N_c M^2}{4\pi^2} \left[\log \left(\frac{M^2 + 2\Lambda^2}{M^2} \right) - 2 \log \left(\frac{M^2 + \Lambda^2}{M^2} \right) \right] \quad (\text{C.13})$$

La relación de Gell-Mann, Oakes y Renner (GMOR) [159] conecta los parámetros del rompimiento espontáneo y explícito de la simetría quiral con las constantes de estructura del pión, el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ se traduce en la constante de decaimiento del pión f_π . La masa corriente m_0 finita de los fermiones traslada la masa del pión m_π de su valor cero que se cumple en el límite quiral a uno que es proporcional a $\sqrt{m_0}$ [45]. Esta relación (ecuación número 4 para todos sistemas anteriores) es independiente del esquema de regularización y con ella se fija el valor de m_0 [53, 109]

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0^u + m_0^d}{2f_\pi^2} \langle \bar{\psi}_u \psi_u + \bar{\psi}_d \psi_d \rangle \quad (\text{C.14})$$

Apéndice D

Thermal field theory

D.1. Cuantización

En la representación de Schrödinger se tienen los operadores de momento \hat{p} y posición \hat{q} que se aplican sobre el estado representado por la función de onda $\psi(q, t)$. La densidad de probabilidad de que a un tiempo t el estado cuántico se encuentre en una posición q y $q + dq$ está dada por

$$|\psi(q, t)|^2 = \psi^*(q, t)\psi(q, t) \quad (\text{D.1})$$

el estado debe satisfacer la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q, t)\psi(q, t) = 1 \quad (\text{D.2})$$

Para un operador \hat{O} su valor esperado es

$$\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q, t)\hat{O}\psi(q, t) \quad (\text{D.3})$$

la función de onda avanza en el tiempo de acuerdo a la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(q, t) \quad (\text{D.4})$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano en función de los operadores \hat{p} y \hat{q} . La representación de coordenadas del operador de momento se obtiene mediante

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} \psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial^2}{\partial t \partial q} \psi(q, t) \quad (\text{D.5})$$

entonces se obtiene $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, a partir de esta representación se obtiene la relación de conmutación canónica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \quad (\text{D.6})$$

como resultado se obtiene la imposibilidad de la medición de la posición y el momento de un estado cuántico, el principio de incertidumbre de Heisenberg.

La función de onda ψ se puede escribir como la proyección del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ sobre los vectores base de las posición $|q\rangle$

$$\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle \quad (\text{D.7})$$

$|q\rangle$ son eigenestados del operador de posición \hat{q} que satisfacen la ecuación de eigenvalores $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$, el eigenvalor q es el valor esperado de la posición del estado $|q\rangle$. La función de onda en el espacio de momentos está dada por

$$\psi(p, t) = \langle p|\psi(t)\rangle \quad (\text{D.8})$$

además, los vectores base del momento satisfacen la ecuación de eigenvalores $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$. Los eigenestados de posición y momento forman una base ortonormal que satisface las condiciones de ortogonalidad

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q') \quad (\text{D.9})$$

$$\langle p|p'\rangle = 2\pi\hbar\delta(p - p') \quad (\text{D.10})$$

y las relaciones de completitud

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| = 1 \quad (\text{D.11})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle\langle p| = 1 \quad (\text{D.12})$$

las funciones de onda en el espacio de momentos y de coordenadas se relacionan al sustituir (D.12) en (D.7)

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \langle q|p\rangle \psi(p, t) \quad (\text{D.13})$$

Al trabajar en el espacio de coordenadas se puede pasar al espacio de momentos mediante

$$\langle q|p\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}qp} \quad (\text{D.14})$$

por lo tanto, las funciones de onda en el espacio de momentos y de coordenadas están relacionadas por

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}qp} \psi(p, t) \quad (\text{D.15})$$

Esta sección está basada en [160].

D.2. Integral de camino

Sea la representación de Schrödinger donde los vectores y operadores son independientes del tiempo y los vectores de estado son dependientes del tiempo, entonces la evolución del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (\text{D.16})$$

El Hamiltoniano es independiente del tiempo, por lo tanto el vector de estado a un tiempo t_f está relacionado a un vector de estado a un tiempo anterior t_i por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|\psi(t_i)\rangle \quad (\text{D.17})$$

se define el operador de evolución temporal como \hat{U}

$$\hat{U}(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)} \quad (\text{D.18})$$

Ahora se introduce la representación de Heisenberg donde toda la dependencia temporal está en los operadores, el vector de estado independiente del tiempo en esta representación está definido como

$$|\psi\rangle_H \equiv |\psi(t_i)\rangle_S \quad (\text{D.19})$$

para que ambas representaciones sean equivalentes, se necesita que los vectores base del espacio de coordenadas sean dependientes del tiempo en la representación de Heisenberg

$$|q(t)\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S(t_f-t_i)}|q\rangle_S \quad (\text{D.20})$$

La función de onda $\psi(q, t) = |\psi(t)\rangle_S$ cuyo vector de estado $|\psi(t)\rangle_S$ está en la representación de Schrödinger, está relacionada a la representación de Heisenberg $|\psi\rangle_H$ por

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_H(t_f-t_i)}|\psi\rangle_H \quad (\text{D.21})$$

de (D.20) y (D.21) se obtiene

$$\psi(q, t) = \langle q(t)|\psi\rangle_H \quad (\text{D.22})$$

de las relaciones de completez se puede escribir

$$\langle q_f(t_f)|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle \langle q_i(t_i)|\psi\rangle dq_i \quad (\text{D.23})$$

de (D.22) la función de onda queda como

$$\psi(q_f, t_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle \psi(q_i, t_i) dq_i \quad (\text{D.24})$$

con este resultado, se define el propagador K como

$$\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle = K(q_f(t_f) : q_i(t_i)) \quad (\text{D.25})$$

Para expresar $\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle$ como una integral de camino, se divide el intervalo de tiempo entre t_i y t_f en $(n + 1)$ fracciones iguales τ

$$\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f(t_f)|q_n(t_n)\rangle \langle q_n(t_n)|q_{n-1}(t_{n-1})\rangle \dots \langle q_1(t_1)|q_i(t_i)\rangle \quad (\text{D.26})$$

la integral se realiza sobre fracciones más pequeñas de cada fracción $(q_j(t_j) : q_{j-1}(t_{j-1}))$, para calcular el propagador, de (D.20) se tiene

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}(t_{j+1})|q_j(t_j)\rangle &= \langle q_{j+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|q_j\rangle \\
&= \left\langle q_{j+1}\left|1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau + O(\tau^2)\right|q_j\right\rangle \\
&= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar}\langle q_{j+1}|\hat{H}|q_j\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] - \frac{i\tau}{\hbar}\langle q_{j+1}|\hat{H}|q_j\rangle \quad (\text{D.27})
\end{aligned}$$

Para el caso particular donde H es de la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (\text{D.28})$$

se obtiene

$$\left\langle q_{j+1}\left|\frac{\hat{p}^2}{2m}\right|q_j\right\rangle = \int \frac{dp}{h} \exp[p(q_{j+1} - q_j)] \frac{p^2}{2m} \quad (\text{D.29})$$

$$\left\langle q_{j+1}|\hat{V}(q)|q_j\right\rangle = \int \frac{dp}{h} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] V(\bar{q}_j) \quad (\text{D.30})$$

donde $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1})$ y a partir de estas dos últimas expresiones se obtiene para H

$$\left\langle q_{j+1}|\hat{H}|q_j\right\rangle = \int \frac{dp}{h} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] H(p, \bar{q}_j) \quad (\text{D.31})$$

de (D.27) se obtiene el propagador completo en el límite continuo y se escribe como

$$\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}q}{h} \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right] \quad (\text{D.32})$$

donde $q(t_i) = q_i$, $q(t_f) = q_f$.

En el límite continuo q se convierte en una función de t y la integral es una integral funcional, una integral sobre todas las funciones. La amplitud de transición se puede expresar de otra forma, antes de pasar al límite continuo en (D.32) se realiza la integración sobre p mediante la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \quad (\text{D.33})$$

se obtiene

$$\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle = N \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q})dt\right] = N \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(t_f, t_i)\right] \quad (\text{D.34})$$

donde $L = T - V$ es la Lagrangiana clásica y S corresponde a la acción.

Esta sección está basada en el capítulo *Path Integrals and Quantum Mechanics* en [34].

D.3. Función de partición

La función de partición para un sistema descrito por el Hamiltoniano H en equilibrio a temperatura finita $\frac{1}{\beta}$ está dada por [111]

$$Z = \text{Tr} \exp \left\{ -\beta \left(\hat{H} - \mu \hat{N} \right) \right\} \quad (\text{D.35})$$

donde \hat{N} es el operador de número neto de partículas y μ corresponde al potencial químico. La traza se puede evaluar usando un conjunto completo de eigenvectores de \hat{H} , $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$Z = \text{Tr} \exp \{ -\beta \hat{H} \} = \sum_n \exp \{ -\beta E_n \} \quad (\text{D.36})$$

se puede reescribir la traza usando un conjunto completo de eigenvectores del operador de posición

$$Z = \int dq \langle q | \exp \{ -\beta \hat{H} \} | q \rangle \quad (\text{D.37})$$

de donde $\exp \{ -\beta \hat{H} \}$ se puede interpretar como el operador de evolución temporal en el formalismo del tiempo imaginario, al comparar con (D.34) se obtiene

$$Z = \int \mathcal{D}q \exp [-S] = \int \mathcal{D}q \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L} \right] \quad (\text{D.38})$$

donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana. Para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, la densidad Lagrangiana que incluye los campos auxiliares σ y $\boldsymbol{\pi}$ es

$$\mathcal{L} = \psi [i(\gamma_0 \partial_0 - \gamma_i \partial_i) - m\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}] \psi - \frac{\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2}{2G} \quad (\text{D.39})$$

al sustituirla en la ecuación de partición (D.38) se obtiene

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\boldsymbol{\pi} \exp \left\{ i \int dt \int d^3\mathbf{x} \left[\bar{\psi} (i\gamma_0 \partial_t - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m - \mu\gamma^0 + \sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \psi - \frac{\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2}{2G} \right] \right\} \quad (\text{D.40})$$

para un sistema con simetría de isospín, el valor esperado del mesón pseudoescalar $\boldsymbol{\pi}$ es cero

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ i \int dt \int d^3\mathbf{x} \left[\bar{\psi} (\gamma_0 (i\gamma_0 \partial_t - \mu) - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - (m - \sigma)) \psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (\text{D.41})$$

al sustituir los operadores de momento $p_0, \mathbf{p} = i\partial_t, -i\boldsymbol{\nabla}$ se obtiene

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ i \int dt \int d^3\mathbf{x} \left[\bar{\psi} (\gamma_0 (p_0 - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma)) \psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (\text{D.42})$$

en el formalismo del tiempo imaginario se realiza una rotación de Wick

$$t \rightarrow it = \tau, \quad t = -i\tau \quad (\text{D.43})$$

$$p_0 \rightarrow ip_0 = \omega_n, \quad p_0 = -i\omega_n \quad (\text{D.44})$$

donde las frecuencias de Matsubara son $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ para los quarks, la función de partición se transforma en

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma \exp\left\{ \int_0^\beta dt \int d^3\mathbf{x} \left[\bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma))\psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (\text{D.45})$$

Para trabajar en el espacio de momentos, se calcula la transformada de Fourier de los campos, para lo cual también se realiza la rotación de Wick

$$\psi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{-ip_\mu x^\mu} \psi(p^\mu), \quad \bar{\psi}(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{ip_\mu x^\mu} \bar{\psi}(p^\mu) \quad (\text{D.46})$$

con esto, la función de partición es

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma \exp\left\{ \frac{1}{V} \sum_{n'} \sum_{\mathbf{p}'} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \int_0^\beta \int d^3\mathbf{x} \left[\exp\{ -i[\tau(\omega_{n'} - \omega_n) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}] \} \bar{\psi} [\gamma_0(-i\omega_n - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma)] \psi \right] \right\} \exp\left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \frac{\sigma^2}{2G} \right\} \quad (\text{D.47})$$

La integral en el tiempo imaginario es

$$\int_0^\beta e^{-2i\pi T\tau(n'-n)} d\tau = \begin{cases} \beta & ; \text{si } n' = n \\ 0 & ; \text{si } n' \neq n \end{cases} \quad (\text{D.48})$$

y para la parte espacial se tiene

$$\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(p'_x - p_x)x} \right]^3 \quad (\text{D.49})$$

la definición de transformada y transformada inversa de Fourier en una dimensión está dada por

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p') e^{-i(p'-p)x} dp' dx \quad (\text{D.50})$$

la expresión para la distribución delta de Dirac es

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p') \delta(p - p') dp' \quad (\text{D.51})$$

con estas expresiones, (D.49) se puede reescribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p'_x - p_x)x} dx = 2\pi\delta(p_x - p'_x) \quad (\text{D.52})$$

además (D.49) tiene dimensiones de volumen, para $p'_x = p_x$ se asume un cubo con centro en el origen, entonces la integral se transforma en

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i(p'_x - p_x)x} dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = L \quad (\text{D.53})$$

el límite de integración original se recupera cuando $L \rightarrow \infty$. Al sustituir los resultados de las integrales de (D.48) y (D.53) en (D.47) con las condiciones $n' = n$ y $p'_x = p_x$ se obtiene

$$Z = \exp \left\{ \frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right\} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \beta \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \left[\bar{\psi} [\gamma_0(-i\omega_n - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma)] \psi \right] \right\} \quad (\text{D.54})$$

A potencial químico finito, el propagador inverso de Dirac está definido por

$$D^{-1} = -i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma_0 \mu + M \quad (\text{D.55})$$

donde $M = m - \sigma$ es la masa constitutiva, al aplicar la rotación de Wick, el propagador inverso se transforma en

$$D^{-1} = i\gamma_0 \omega_n - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 \mu + M \quad (\text{D.56})$$

al sustituir en la función de partición se tiene

$$Z = \exp \left\{ \frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right\} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\beta \sum_n \sum_{\mathbf{p}} [\bar{\psi} D^{-1} \psi] \right\} \quad (\text{D.57})$$

el propagador inverso en términos de las matrices de Dirac está dado por

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \begin{bmatrix} i\omega_n & 0 \\ 0 & -i\omega_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i\omega_n + \mu + M & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -i\omega_n - \mu + M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

para diagonalizar el término $\bar{\psi} D^{-1} \psi$ se utilizan las reglas de transformación unitarias $\psi \rightarrow P\psi$ y $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} P^\dagger$, donde P es una matriz ortogonal, $P^\dagger = P^{-1}$ y $\det P = 1$, al sustituir en la función de partición se obtiene

$$Z = \exp \left\{ \frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right\} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\beta \sum_n \sum_{\mathbf{p}} [\bar{\psi} P^\dagger D^{-1} P \psi] \right\} \quad (\text{D.59})$$

el término $P^\dagger D^{-1} P \equiv D_D^{-1}$ es una matriz diagonalizada, por lo tanto el producto se puede expresar como $\bar{\psi} P^\dagger D^{-1} P \psi = \bar{\psi} D_D^{-1} \psi = \psi^\dagger \gamma_0 D_D^{-1} \psi$

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \gamma_0 D_D^{-1} \psi &= \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} D_{D1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{D2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{D3}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{D4}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.60})$$

con este resultado la función de partición se reescribe como

$$\begin{aligned} Z &= \exp \left\{ \frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right\} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\beta \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \left[D_{D1}^{-1} \psi_1^* \psi_1 + D_{D2}^{-1} \psi_2^* \psi_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_{D3}^{-1} \psi_3^* \psi_3 - D_{D4}^{-1} \psi_4^* \psi_4 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

Como los campos ψ y $\bar{\psi}$ representan fermiones, son anticonmutables, por lo tanto se trabajan como variables de Grassman, estas son elementos de un espacio vectorial que anticonmutan entre ellos $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$, entonces $\theta_i^2 = \theta_i \theta_i = 0$. Se realiza la expansión de los campos a primer orden, ya que todos los cuadrados o potencias mayores de las variables de Grassman son cero y se obtiene

$$Z = \exp \left[\frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right] \beta^4 \prod_n \prod_{\mathbf{p}} (\beta D_{D1}^{-1}) (\beta D_{D2}^{-1}) (\beta D_{D3}^{-1}) (\beta D_{D4}^{-1}) \quad (\text{D.62})$$

dado que D_D^{-1} es una matriz diagonal

$$Z = \exp \left[\frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right] \prod_n \prod_{\mathbf{p}} \det(\beta D_D^{-1}) \quad (\text{D.63})$$

como la diagonalización de D^{-1} se hizo mediante una transformación unitaria, entonces $\det(D_D^{-1}) = \det(D^{-1})$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} i\omega_n + \mu + M & 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & i\omega_n + \mu + M & 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + M & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + M \end{bmatrix} \quad (\text{D.64})$$

$$\begin{aligned} \det(\beta D^{-1}) &= \beta^4 \det(D^{-1}) \\ &= \beta^4 \{ [M^2 - (i\omega_n + \mu)^2 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2] \}^2 \\ &= \beta^4 \{ [M^2 - (i\omega_n + \mu)^2 + p^2] \}^2 \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

sustituyendo este resultado y la relación relativista de energía momento $E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + M^2$ en la función de partición

$$Z = \exp \left[\frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right] \prod_n \prod_{\mathbf{p}} \beta^4 [E_{\mathbf{p}}^2 - (i\omega_n + \mu)^2]^2 \quad (\text{D.66})$$

El potencial termodinámico en términos de la función de partición está definido como $\Omega = -T \ln Z$ (esta definición corresponde a (4.26), donde se hace la prescripción $\frac{\Omega}{V} = \Omega$) sustituyendo la función de partición se obtiene

$$\Omega = \frac{V \sigma^2}{2G} - T \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left[\frac{E_{\mathbf{p}}^2 + (\omega_n - i\mu)^2}{T^2} \right]^2 \quad (\text{D.67})$$

dado que ω_n representa a todos los múltiplos impares de πT desde $-\infty$ hasta ∞ , por lo tanto la suma sobre n es invariante ante la transformación $\omega_n \rightarrow \omega_{-n}$ y como ω_n es impar, entonces $\omega_{-n} = -\omega_n$, al desarrollar el álgebra de los binomios al cuadrado se obtiene

$$\Omega = \frac{V \sigma^2}{2G} - T \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left\{ \left[\frac{(E_{\mathbf{p}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] \left[\frac{(E_{\mathbf{p}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] \right\} \quad (\text{D.68})$$

se utiliza la siguiente relación de Matsubara

$$\sum_n \ln \left[\frac{\alpha^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] = \frac{\alpha}{T} + 2 \ln [1 + e^{-\frac{\alpha}{T}}] \quad (\text{D.69})$$

y se obtiene

$$\Omega = \frac{V \sigma^2}{2G} - 2 \sum_{\mathbf{p}} \left\{ E_{\mathbf{p}} + T \ln \left[1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{p}} - \mu}{T}} \right] + T \ln \left[1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{p}} + \mu}{T}} \right] \right\} \quad (\text{D.70})$$

Para realizar la suma sobre \mathbf{p} se considera un cubo con condiciones de frontera periódicas $\psi(0) = \psi(L)$, donde L es la arista del cubo. Para cada dimensión se tiene

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_p e^{-ipx} \psi(p) \quad (\text{D.71})$$

en unidades naturales, por lo tanto $p = \frac{2n\pi}{L}$. La suma de todos los estados se aproxima al continuo pasando n a términos de p

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \sum_{n_x, n_y, n_z} = \left[\frac{L}{2\pi} \right]^3 \int d^3 \mathbf{p} \quad (\text{D.72})$$

se aproxima el volumen del cubo $L^3 = V$ a infinito, esto es equivalente a la integral en todo el espacio de momentos, con esto, el potencial termodinámico por unidad de volumen está dado por

$$\frac{\Omega}{V} = \frac{\sigma^2}{2G} - 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E_{\mathbf{p}} + T \ln \left[1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{p}} - \mu}{T}} \right] + T \ln \left[1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{p}} + \mu}{T}} \right] \right\} \quad (\text{D.73})$$

Bibliografía

- [1] Ayala A. et al., Phys. Rev. D, 84 (2011) 056004.
- [2] Rischke D. H., Prog. Part. Nucl. Phys., 52 (2004) 197.
- [3] Shuryak E., Nucl. Phys. A, 750 (2005) 64.
- [4] Braun-Munzinger P., Stachel J., Nature, 448 (2007) 302.
- [5] Barducci A., Casalbuoni R., De Curtis S., Gatto R., Pettini G., Phys. Lett. B, 231 (1989) 463.
- [6] Gastineau F., Nebauer R., Aichelin J., Phys. Rev. C, 65 (2002) 045204.
- [7] Luo X., Shi S., Xu N., Zhang Y., Particles, 3 (2020) 278.
- [8] Xu ., STAR Collaboration, Nucl. Phys. A, 931 (2014) 1.
- [9] Adamczyk L. et. al., STAR Collaboration, Phys. Rev. C, 96 (2017) 044904.
- [10] Becattini F., Bleicher M., Kollegger T., Schuster T., Steinheimer J., Stock R., Phys. Rev. Lett., 111 (2013) 082302.
- [11] STAR Collaboration, rXiv:1007.2613 [nucl-ex].
- [12] Gupta S., Luo X., Mohanty B., Ritter H. G., Xu N., Science, 332 (2011) 1525.
- [13] Fukushima K., Hatsuda T., Rep. Prog. Phys., 74 (2011) 014001.
- [14] Carbone A., Polls A., Rios A., Phys. Rev. C, 98 (2018) 025804.
- [15] Elliott J. B., Lake P. T., Moretto L. G., Phair L., Phys. Rev C, 87 (2013) 054622.
- [16] Karnaukhov V. A. et al., Phys. Atom. Nuclei, 71 (2008) 2067.
- [17] Alford M., Rajagopal K., Wilczek F., Phys. Lett. B, 422 (1998) 247.
- [18] Buballa M., Oertel M., Nucl. Phys. A, 703 (2002) 770.
- [19] Alford M., Berg (es J., Rajagopal K., Nucl. Phys. B, 558 (1999) 219.
- [20] Alford M., Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 51 (2001) 131.

- [21] Tanimoto T., Bentz W., Cloët C., Phys. Rev. C, 101 (2020) 055204.
- [22] Grigorian H., Blaschke D., Voskresensky D., Phys. Rev. C, 71 (2005) 045801.
- [23] Banik S., Bandyopadhyay D., Phys. Rev. D, 67 (2003) 120003.
- [24] Schaefer B.-J., Wambach J., Phys. Part. Nucl., 39 (2008) 1025.
- [25] Harris J. W., Müller B., Annu. Rev. Part. Sci., 46 (1996) 71.
- [26] Gupta S. et al., Science, 332 (2001) 1525.
- [27] de Forcrand P., Philipsen O., Phys. Rev. Lett., 105 (2010) 152001.
- [28] Kharzeev D., Levin E., Tuchin K., J. High Energy Phys., 06 (2009) 055.
- [29] Watanabe H., Brauner T., Phys. Rev. D, 85 (2012) 085010.
- [30] Schäfer T., Son D. T., Stephanov M. A., Toublan D., Verbaarschot J. J. M., Phys. Lett. B, 522 (2001) 67.
- [31] Gies H., Wetterich C., Phys. Rev D, 69 (2004) 025001.
- [32] Alhaidari A. D., Bahlouli H., Al-Hasan A., Phys. Lett. A, 349 (2006) 87.
- [33] Kragh H., Am. J. Phys., 52 (1984) 1024.
- [34] Ryder L. H. (1996). Quantum Field Theory, Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- [35] Kaku M. (1993). Quantum Field Theory: A modern introduction, New York, Estados Unidos: Oxford University Press.
- [36] Krivoruchenko M. I., Tursunov A., Symmetry, 12 (2020) 35.
- [37] Noether E., Transp. Theory Stat. Phys., 1 (1971) 183.
- [38] Buchholz D., Doplicher S., Longo R., Ann. Phys., 170 (1986) 1.
- [39] Bañados M., Reyes I., Int. J. Mod. Phys. D, 25 (2016) 1630021.
- [40] Thornton S. T., Marion J. B. (2003). Classical Dynamics of Particles and Systems, Belmont, Estados Unidos de América: Thomson-Brooks/Cole.
- [41] Casalbuoni R. (ciclo académico 1998-1999). Advanced Quantum Field Theory, lecturas impartidas en: Dipartimento di Fisica, Università di Firenze, Italia.
- [42] Peskin M. E., Schroeder D. V. (1995). An Introduction To Quantum Field Theory, Boca Raton, Estados Unidos de América: CRC Press.
- [43] Zyla P. A. et al., Prog. Theor. Exp. Phys., 2020 (2020).

- [44] Buballa M., Phys. Rep., 407 (2005) 205.
- [45] Vogl U., Weise W., Prog. Part. Nucl. Phys., 27 (1991) 195.
- [46] Sazdjian H., EPJ Web Conf., 137 (2017) 02001.
- [47] Goldstone J., Salam A., Weinberg S., Phys. Rev., 127 (1962) 965.
- [48] Beekman A. J., Rademaker L., van Wezel J., SciPost Phys. Lect. Notes 11 (2019).
- [49] Mohapatra R. N. (1986). Spontaneous Symmetry Breaking, Nambu-Goldstone Bosons, and the Higgs Mechanism. En: Unification and Supersymmetry. Contemporary Physics (Based on Lectures at the University of Maryland College Park) (pp. 20-35). New York, Estados Unidos de América: Springer.
- [50] Brauner T., Symmetry, 2 (2010) 609.
- [51] Pich A., arXiv:1804.05664 [hep-ph]
- [52] Hatsuda T., Kunihiro T., Phys. Rep., 247 (1994) 221.
- [53] Klevansky S. P., Rev. Mod. Phys., 64 (1992) 649.
- [54] Scherer S., Schinder M. R., arXiv:hep-ph/0505265
- [55] Fukushima K., Sasaki C., arXiv:1301.6377 [hep-ph]
- [56] Nishimori H., Ortiz G. (2010). Phase transitions and critical phenomena. En Elements of Phase Transition and Critical Phenomena (pp. 1-12). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.
- [57] Meyer-Ortmanns H., Rev. Mod. Phys., 68 (1996) 473.
- [58] Jaeger G., Arch. Hist. Exact Sc., 53 (1998) 51.
- [59] Fisher M. E., Rep. Prog. Phys., 30 (1967) 615.
- [60] Stephanov M., Rajagopal K., Shuryak E., Phys. Rev. Lett., 81 (1998) 4816.
- [61] Stephanov M. A., Int. J. Mod. Phys. A, 20 (2005) 4387.
- [62] Gvai R. V., Gupta S., Phys. Rev. D, 71 (2005) 114014.
- [63] Endrödi G., Fodor Z., Katz S. D., Szabó K. K., J. High Energ. Phys., 1 (2011).
- [64] Hansen H., Stiele R., Costa P., Phys. Rev. D, 101 (2020) 094001.
- [65] Schaefer B.-J., Wagner M., Wambach J., Phys. Rev. D, 81 (2010) 074013.
- [66] Pawłowski J. M., AIP Conf. Proc., 1343 (2011) 75.

- [67] Herbst T. K., Pawłowski J. M., Schaefer B.-J., Phys. Lett. B, 696 (2011) 58.
- [68] Rajagopal K., Nucl. Phys. A, 661 (1999) 150.
- [69] Stephanov M. A., arXiv:hep-lat/0701002.
- [70] Wilson G. K., Phys. Rev. D, 10 (1974) 2445.
- [71] Ding H.-T., Nucl. Phys. A, 00 (2020) 1.
- [72] Ohnishi A., J. Phys.: Conf. Ser., 668 (2016) 012004.
- [73] Unger W. (2010). The chiral phase transition of QCD with 2+1 flavors (tesis doctoral). Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Alemania.
- [74] Karthik, N. (2014). Studies on gauge-link smearing and their applications to Lattice QCD at finite temperature (tesis doctoral). Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India.
- [75] Ding H.-T., Karsch F., Mukherjee S., Int. J. Mod. Phys. E, 24 (2015) 1530007.
- [76] Karsch F. (2002). Lattice QCD at High Temperature and Density. En: Plessas W., Mathelitsch L. (Ed.), Lectures on Quark Matter. Lecture Notes in Physics (pp. 209-249). Berlin, Heidelberg, Alemania: Springer, Berlin, Heidelberg.
- [77] Miura K., Nakano T. Z., Ohnishi A., Kawamoto N., Phys. Rev. D, 80 (2009) 074034.
- [78] Karsch F., Laermann E., Peikert A., Nucl. Phys. B, 605 (2001) 579.
- [79] Gupta R., arXiv:hep-lat/9807028.
- [80] Aarts G., J. Phys.: Conf. Ser., 706 (2016) 02204.
- [81] Chen H.-S., Luo X.-Q., Phys. Rev. D, 72 (2005) 034504.
- [82] Endródi G., Fodor Z., Szabó K. K., J. High Energ. Phys., 1 (2011).
- [83] Danzer J., Gatttringer C., Liptak L., Marinkovic M., Phys. Lett. B, 682 (2009) 240.
- [84] Splittorff K., Verbaarschot J. J. M., Phys. Rev. D, 75 (2007) 116003.
- [85] Aoki Y., Endródi G., Fodor Z., Katz S. D., Szabó K. K., Nature, 443 (2006) 675.
- [86] Bazavov A. et al. (HotQCD Collaboration), Phys Rev. D, 85 (2012) 054503.
- [87] Cheng M. et al., Phys. Rev. D, 77 (2008) 014511.
- [88] Allton C. R. et al., Phys. Rev. D, 66 (2002) 074507.

- [89] Braun-Munzinger P., Magestro D., Redlich K., Stachel J., Phys. Lett. B, 518 (2001) 41.
- [90] Borsányi S. et al., J. High Energ. Phys., 73 (2010).
- [91] Aoki Y., Fodor Z., Katz S. D., Szabó K. K., Phys. Lett. B, 643 (2006) 46.
- [92] Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., 122 (1961) 345.
- [93] Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., 124 (1961) 246.
- [94] Hansen H. et al., Phys. Rev. D, 75 (2007) 065004.
- [95] Zhang Z., Shi C., Zong H.-S., Phys. Rev. D, 101 (2020) 043006.
- [96] Hell T., Rößner S., Cristoforetti M., Weise W., Phys. Rev. D, 81 (2010) 074034.
- [97] Fukushima K., Phys. Lett. B, 591 (2004) 277.
- [98] Abuki H., et al., Phys. Rev. D, 78 (2008) 034034.
- [99] Schaefer B.-J., Pawłowski J. M., Wambach J., Phys. Rev. D, 76 (2007) 074023.
- [100] Valbuena-Ordóñez E., Mata-Carrizal N. B., Garza-Aguirre A. J., Morones-Ibarra J. R., Adv. High Energy Phys., 2020, 6760547.
- [101] Bardeen J., Cooper L. N., and Schrieffer J. R., Phys. Rev., 106 (1957) 162.
- [102] Fiolhais C., Fiolhais M., Sousa C., Urbano J. N., (1994), Many-Body Physics, Proc. Int. Conf., Coimbra, Portugal, World Scientific.
- [103] Volkov. M. K., Radzhabov A. E., Phys.-Uspekhi, 49 (2006) 551.
- [104] Zhao Y., Chang L., Yuan W., Liu Y.-x., Eur. Phys. J. C, 56 (2008) 483.
- [105] Ebert, D. (1998). Bosonization in particle physics. En Meyer-Ortmanns H., Klümper A. (Ed.), Field Theoretical Tools for Polymer and Particle Physics. Lecture Notes in Physics (pp. 103-114). Berlín, Heidelberg, Alemania: Springer, Berlin, Heidelberg
- [106] Blaschke D., Ebert D., Nucl. Phys. B, 921 (2017) 753.
- [107] Ebert D., Reinhardt H., Volkov M. K., Prog. Part. Nucl. Phys., 33 (1994) 1.
- [108] Hubbard J., Phys. Rev. Lett., 3 (1959) 77.
- [109] Ratti C., Thaler M. A., Weise W., Phys. Rev. D, 73 (2006) 014019.
- [110] Kikkawa K., Prog. Theor. Exp. Física, 56 (1976) 947.

- [111] Kapusta, J., Gale, C. (2006). Review of quantum statistical mechanics. En: Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications (Cambridge Monographs on Mathematical Physics (pp. 1-11). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- [112] Asakawa M., Yazaki K., Nucl. Phys. A, 504 (1998) 668.
- [113] Ferreira M. et al., Phys. Rev. D, 89 (2014) 016002.
- [114] Herbst T. K., Pawlowski J. M., Phys. Lett. B, 696 (2011) 58.
- [115] Saad T., (2008-2013). Please Make Me a Note. Recuperado de: <http://pleasemakeanote.blogspot.com/2010/02/9-derivation-of-continuity-equation-in.html>
- [116] Das A., Kumar D., Mishra H., Phys. Rev. D, 100 (2019) 094030.
- [117] Xu S.-S., Yin P.-L., Zong H.-S., Eur. Phys. C, 79 (2019) 399.
- [118] Wang B., Sun W.-M., Zong H.-S., Mod. Phys. Lett. A, 28 (2013) 1350064.
- [119] Sasaki C., Friman B., Redlich K., Phys. Rev. D, 75 (2007) 074013.
- [120] Boyd G., Fingberg J., Karsch F., Kärkkäinen L., Peterson B., Nucl. Phys. B, 376 (1992) 199.
- [121] Yuan W., Chen H., Liu Y.-x., Phys. Lett. B, 637 (2006) 69.
- [122] Karsch F., Laermann E., Phys. Rev. D, 50 (1994) 6954.
- [123] Fukushima K., Phys. Rev. D, 77 (2008) 114028.
- [124] Andersen J. O., Naylor W. R., Tranberg A., Rev. Mod. Phys., 88 (2016) 025001.
- [125] Murayama H., <http://hitoshi.berkeley.edu/230A/regularization.pdf>
- [126] Meissner T., Arriola E. R., Goeke K. Z., Phys. A - Atomic Nuclei 336 (1990) 91.
- [127] Ebert D., Feldmann T., Reinhardt H., Phys. Lett. B, 388 (1996) 154.
- [128] Dubinin A., Blaschke D., Kalinovsky Y. L., arXiv:1312.0559.
- [129] Blaschke D., Bureau G., Volkov M. K., Yudin V. L., arxiv.hep-ph/9812503.
- [130] Morones-Ibarra J. R., Garza-Aguirre A. J., Florez-Baez F.V., Mod. Phys. Lett. A, 34 (2019) 1950070.
- [131] Schwinger J., Phys. Rev., 82 (1951) 664.
- [132] Zhang J.-L., Shi Y.-M., Xu S.-S., Zong H.-S., Mod. Phys. Lett. A, 31 (2016) 1650086.

- [133] Cui Z.-F., Zhang J.-L., Zong H.-S., 7 (2017) 45937.
- [134] Pauli W., Villars F., Rev. Mod. Phys., 21 (1949) 434.
- [135] Kalinovsky Y. L., Friesen A. V., Phys. Elem. Part. Atom. Nucl., 12 (2015) 737.
- [136] Costa P., Hansen H., Ruivo M. C., de Sousa C. A., Phys. Rev. D, 81 (2010) 016007.
- [137] Kohyama H., Kimura D., Inagaki T., Nucl. Phys. B, 8966 (2015) 682.
- [138] Fujihara T., Kimura D., Inagaki T., Kvinikhidze A., Phys. Rev. D, 79 (2009) 096008.
- [139] Wang Q.-W., Xia Y., Zong H.-S., Mod. Phys. Lett. A, 33 (2018) 1850232.
- [140] Kohyama H., Kimura D., Inagaki T., Nucl. Phys. B, 906 (2016) 524.
- [141] Meissner T., Arriola E. R., Goeke K., z. pHYS. A - Atomic Nuclei, 336 (1990) 91.
- [142] Bazavov A. et. al. (HotQCD Collaboration), Phys. Lett. B, 795 (2019) 15.
- [143] Borsanyi S. et. al., Phys. Rev. Lett., 125 (2020) 052001.
- [144] Bhattacharya T. et. al. (HotQCD Collaboration), Phys. Rev. Lett., 113 (2014) 082001.
- [145] D. Boyanovsky D., de Vega H. J., Schwarz D. J., Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 56 (2006) 441.
- [146] Turner M. S., Tyson J. A., Rev. Mod. Phys., 71 (1999) S145.
- [147] Kolb E. W., Turner M. S. (1994). The Early Universe, Boca Raton, Estados Unidos de América: CRC Press.
- [148] Ignatius J., Schwarz J., Phys. Rev. Lett., 86 (2001) 2216.
- [149] Fukushima K., Ruggieri M., Gatto R., Phys. Rev. D, 81 (2010) 11431.
- [150] Pwalowski J. M., AIP Conf. Proc., 1343 (2011) 75.
- [151] Fodor Z., Katz S. D., J. High Energy Phys., 03 (2002) 014.
- [152] Du Y.-L., Cui Z.-F., Xia Y.-H., Zong H.-S., Phys. Rev. D, 88 (2013) 114019.
- [153] Wergieluk A., Blaschke D., Kalinovsky Y. L., Friesen A. V., Phys. Part. Nuclei Lett., 10 (2013) 660.
- [154] Dresselhaus M. S., Dresselhaus G., Jorio A. (2008). Group Theory, Application to the Physics of Condensed Matter. Heidelberg, Alemania: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- [155] Woit, P. (2017). Quantum Theory, Groups and Representations, An Introduction. Cham, Suiza: Springer International Publishing AG.
- [156] Hall B. C. (2003). Matrix Lie Groups. En: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction (pp. 3-23). New York, Estados Unidos de América: Springer-Verlag New York, Inc.
- [157] Haywood S. (2010). The Special Unitary Group $SU(2)$. En: Symmetries and Conservation Laws in Particle Physics (pp. 53-74). London, Inglaterra: Imperial College Press.
- [158] Ilisie V. (2015). Dirac Algebra. En: Concepts in Quantum Field Theory (pp. 69-84). UNITEXT for Physics. Cham, Suiza: Springer International Publishing AG.
- [159] Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B., Phys. Rev. D, 110 (1958) 1178.
- [160] Millington P. (2014). Quantum Statistical Mechanics. En: Thermal Quantum Field Theory and Perturbative Non-Equilibrium Dynamics (pp. 41-60). Cham, Suiza: Springer International Publishing AG.

Resumen biográfico

Nallaly Berenice Mata Carrizal

**Candidato para el grado de
Doctor en Ingeniería Física**

Tesis: Estudio del diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio con diferentes métodos de regularización

Datos personales:

- Nacida en Monterrey, Nuevo León el 5 de junio de 1986
- Hija de Margarita Carrizal Chávez y Arturo Mata Torres

Educación:

- Licenciado en Química Industrial, agosto 2003-diciembre 2007, Facultad de Ciencias Químicas, Universidad Autónoma de Nuevo León
- Licenciado en Física, agosto 2008-diciembre 2012, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León
- Maestría en Ingeniería Física Industrial, agosto 2013-julio 2015, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León

Publicaciones

En mi primer acercamiento al modelo Nambu-Jona-Lasinio, aprendí a trabajar con el potencial termodinámico, me familiaricé con los métodos de regularización y la susceptibilidad quiral, esta cantidad es la base para la descripción del diagrama de fases basado en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral cuando se considera la masa corriente de los quarks diferente de cero. Como resultado de este entrenamiento se realizó una publicación: *Chiral symmetry restoration and the critical end point in QCD*. Jose Rubén Morones-Ibarra, Armando Enriquez-Perez-Gavilan, Abraham Israel Hernández Rodríguez, Francisco Vicente Flores-Baez, Nallaly Berenice Mata-Carrizalez, Enrique Valbuena Ordoñez. Open Physics, volume 15:issue 1, 2017.

Con este trabajo previo, mi tesis doctoral se centra en la descripción del diagrama de fases, con especial atención en la región del *crossover*. Se emplean distintos criterios para definir el ancho de dicha zona, los criterios se distinguen por el tratamiento que se le da a los resultados de la susceptibilidad quiral. Además se utilizan diferentes métodos de regularización que también influyen en el diagrama de fases. Los resultados de la investigación están publicados en el artículo: *Dependence of the crossover zone on the regularization method in the two-flavor Nambu–Jona-Lasinio model*. José Rubén Morones-Ibarra, Nallaly Berenice Mata-Carrizal, Enrique Valbuena-Ordóñez, Adrián Jacob Garza-Aguirre. Open Physics, volume 18:issue 1, 2020.

Dado que el modelo Nambu-Jona-Lasinio en su formulación original no describe el confinamiento de los quarks, en un trabajo posterior, se incluyó el loop de Polyakov. En este modelo extendido se simulan los efectos del confinamiento al introducir un potencial efectivo relacionado al campo de los gluones. El objetivo de la investigación es la descripción de la región de *crossover* del diagrama de fases al usar diferentes potenciales efectivos con los criterios propuestos en el trabajo anterior. Los resultados se publicaron en el artículo: *Influence of the Effective Potential on the Crossover Width in the Two Flavor Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio Model*. E. Valbuena-Ordóñez, N. B. Mata-Carrizal, A. J. Garza-Aguirre, J. R. Morones-Ibarra. Advances in High Energy Physics, volume 2020, Article ID 6760547, 2020.