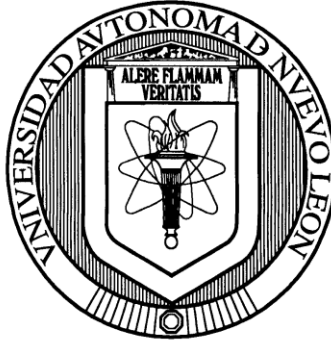


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL EN MODOS
DESLIZANTES PARA SISTEMAS ESTOCASTICOS

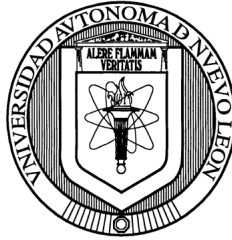
PRESENTA

JESÚS GUADALUPE RODRÍGUEZ GONZÁLEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA FISICA INDUSTRIAL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L. AGOSTO DE 2005

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS



ALGORITMOS DE FILTRADO Y CONTROL EN MODOS
DESLIZANTES PARA SISTEMAS ESTOCASTICOS

PRESENTA

JESÚS GUADALUPE RODRÍGUEZ GONZÁLEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERIA FISICA INDUSTRIAL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L. AGOSTO DE 2005

Índice

Resumen	1
Capítulo 1.-	
1.1.-Introducción	2
1.2.-Antecedentes	3
1.3.-Hipótesis	8
1.4.-Contribuciones	9
1.4.1.- Diseño de un filtro óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en las observaciones.	9
1.4.2.- Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.	9
1.4.3.- Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control.	10
1.4.4.- Diseño de un controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.	10
1.4.5.- Diseño de un controlador óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control y en las observaciones .	11
1.4.6.- Comparación del desempeño de filtros clásicos vs. Filtros de modos deslizantes para sistemas lineales estocásticos.	11
Capítulo 2.- Marco teórico	12
2.1.- Teoría de probabilidad y estadística	12
2.1.1.- Conceptos básicos de probabilidad	12
2.1.2.- Variables aleatorias	13
2.1.3.- Conceptos básicos de estadística	13
2.1.4.- Procesos estocásticos	14
2.2.- Teoría de filtrado óptimo	14
2.2.1.- filtro de Kalman Bucy	14
2.2.2.- Filtro de Kalman Bucy extendido	17

2.2.3.- Filtro óptimo polinomial de grado 3 con observaciones lineales	18
2.3.- Teoría de modos deslizantes	19
2.3.1.-Conceptos básicos	19
2.3.2.- Control por modos deslizantes	22
2.3.3.- Modos deslizantes integrales	24
Capítulo 3.-	
Diseño de un filtro óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en las observaciones.	29
3.1.- Problema del filtro óptimo con un retardo en la observación.	29
3.1.1.-Planteamiento del problema	29
3.1.2.- Solución al problema del filtrado óptimo con retardo en la observación	30
3.2.- Problema de robustificación en control de sistemas con un retardo fijo a través de modos deslizantes	33
3.2.1.- Planteamiento del problema	33
3.2.2.- Solución al problema de robustificación a través de modos deslizantes integrales	35
3.3.- Diseño de un filtro óptimo y robusto para sistemas con retardo en las observaciones aplicando la técnica de modos deslizantes integrales	36
3.3.1.- Planteamiento del problema	36
3.3.2.- Algoritmo solución	38
3.4.- Ejemplo	39
3.5.- Resultados de las simulaciones	42
Capítulo 4.-	
Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.	46
4.1.- Problema de control óptimo con retardo fijo en la entrada de control	46
4.1.1.- Planteamiento del problema	46
4.1.2.- Filtro óptimo para ecuación de estado lineal y observaciones lineales con retardo.	47
4.1.3.- Solución al problema de control óptimo.	49

4.2.- Robustificación de un sistema de control con retardo a través de modos deslizantes	50
4.2.1.- Planteamiento del problema.	50
4.2.2.- Solución al problema de robustificación a través de modos deslizantes integrales.	51
4.3.- diseño de un control robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.	53
4.3.1.- Planteamiento del problema.	53
4.4.- Ejemplo	54
4.5.- Resultados de las simulaciones	57
4.6.- Demostración	59
Capítulo 5.-	
Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control.	63
5.1.- Problema de control óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control.	63
5.1.1.- Planteamiento del problema	63
5.1.2.- Filtro óptimo para ecuaciones de estado lineal y observaciones lineales con múltiples retardos.	64
5.1.3.- Solución al problema de control óptimo.	66
5.2.- Robustificación de un sistema de control con múltiples retardos a través de modos deslizantes integrales.	67
5.2.1.- Planteamiento del problema	67
5.2.2.- Solución al problema de robustificación a través de modos deslizando integrales.	69
5.3 Diseño de un control robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.	71
5.3.1.- Planteamiento del problema	71
5.4 Ejemplo.	72
5.5 Resultados de las simulaciones.	76
Capítulo 6.-	
Diseño de un controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.	79
6.1 Problema del control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones	79

6.1.1.- Planteamiento del problema	79
6.1.2.- Principio de separación para sistemas con retardo	80
6.1.3.- Solución al problema de control óptimo.	81
6.2 Ejemplo.	82
6.3 Resultados de las simulaciones	86
Capítulo 7.-	
Diseño de un controlador óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control y en las observaciones .	88
7.1 Problema del control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones	88
7.1.1.- Planteamiento del problema del controlador óptimo	88
7.2 Problema de robustificación del controlador para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.	90
7.2.1.- Planteamiento del problema del controlador robusto	90
7.2.2.- Principios de diseño para el compensador de perturbación en el estado.	91
7.2.3.- Principios de diseño para el compensador de perturbación en la observación.	93
7.3 Robustificación del controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.	95
7.4 Ejemplo.	98
7.5 Resultados de las simulaciones	102
Capítulo 8.-	
Comparación del desempeño de filtros clásicos vs. Filtros de modos deslizantes para sistemas lineales estocásticos.	104
8.1 Sistemas Lineales.	104
8.1.1.- Algoritmo de filtrado de modos deslizantes para Sistemas Lineales	104
8.1.2.- Algoritmo para sistemas con dinámica estable.	106
8.1.3.- Algoritmo para sistemas con dinámica inestable.	107
8.1.4.- Ejemplo.	108
8.1.5- Resultados de las simulaciones..	109

8.2 Filtro para sistemas cuadráticos, con observaciones lineales	113
8.2.1.- Algoritmo de filtrado óptimo para una ecuación de estado cuadrática y observaciones Lineales	113
8.2.2.-Filtro de Kalman Bucy extendido.	113
8.3 Filtro de modos deslizantes	115
8.3.1.-Filtrado de modos deslizantes con dinámica estable	115
8.3.2.- Filtrado de modos deslizantes con dinámica inestable.	117
8.4.- Ejemplo.	119
8.5- Resultados de las simulaciones.	120
Capítulo 9- Conclusiones y trabajos futuros	xx
Bibliografía	123
Anexos	132

Resumen

En esta tesis se establecen las condiciones para aplicar las técnicas de: filtrado óptimo y modos deslizantes, simultáneamente, a sistemas estocásticos. Se definen algoritmos de robustificación por modos deslizantes que son aplicados a diferentes tipos de sistemas lineales estocásticos, observados y no observados, con diferentes tipos de retardo: fijos y múltiples, y son evaluados. También se obtienen las ecuaciones de filtrado y controlador óptimo para dichos sistemas, a través de la aplicación del principio de dualidad y el principio de separación para obtenerlas.

Capítulo 1.

1.1 Introducción.

El control automático ha jugado un papel muy importante en el avance de la ingeniería y de la ciencia, los avances en este campo han permitido optimizar el desempeño de los sistemas dinámicos, mejorar la productividad, disminuir el trabajo repetitivo en muchas operaciones manuales en la industria manufacturera del mundo. La esencia del control automático es su diversa aplicabilidad en diversas áreas del conocimiento, con enfoque sistémico, sin restringirse a ciertos fenómenos físicos o intelectuales, como son, por mencionar algunos: procesos de control químico, robótica, biomedicina, economía, aeronáutica, procesos industriales y de manufactura. Esto ubica al control automático como una área de gran interés para su estudio e investigación.

Esta tesis se enfoca a obtener el controlador óptimo, filtro óptimo y un método para robustificar sistemas lineales estocásticos con retardos fijos y múltiples, ya que existen una gama amplia de aplicaciones de ingeniería los cuales se describen con ecuaciones lineales con retardo y no se contaba con la herramienta correspondiente.

1.2 Antecedentes.

Desde 1920, se han presentado trabajos relevantes en el área de control automático para sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Actualmente se trabaja en la optimización de sistemas estocásticos y determinísticos, control inteligente, control difuso, redes neuronales, control por modos deslizantes[6, 51, 68].

En la década de 1930, V. Kulebakin[103], publica las primeras ideas respecto al control de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales discontinuas, particularmente sistemas en los que la discontinuidad se presenta en la entrada de control, para este tipo de sistemas conocidos hoy como sistemas de estructura variable, las herramientas de análisis desarrolladas no son aplicables debido a la discontinuidad en la ecuaciones.

La investigación de sistemas de estructura variable continua y en la década de los 50's, particularmente en 1957, Emel 'yanov diseño un control por retroalimentación para sistemas lineales de segundo orden [107], cuya aportación fue que la ganancia por retroalimentación del control podía tomar diversos valores constantes dependiendo de la dinámica del sistema. Aunque no se utilizó el término sistema de estructura variable, en si cada uno de los sistemas considerados en la aportación, consistentes de un conjunto de sistemas lineales y una lógica de conmutación para su control forman lo que ahora conocemos como sistemas de estructura variable[107, 49, 56].

En 1964 Emel 'yanov y sus colegas[107] intentaron controlar procesos de tecnología química, cuya dinámica de las plantas de segundo orden, no lineales e inestables con diversos puntos de equilibrio, aplicándose por primera vez el término de control de estructura variable. Dadas las características de las plantas y a que no podían ser estabilizadas por un control lineal, experimentaron el "cortar y pegar", algo así como formar un rompecabezas, con las diferentes piezas de las estructuras disponibles, como veremos en el siguiente ejemplo, de tal manera que el nuevo sistema tenga la característica de estabilidad asintótica global.

Ejemplo: Sea el sistema

$$\ddot{x} = -kx$$

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{si } \dot{x} > 0 \\ k_2 & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases}; k_1 > k_2 > 0$$

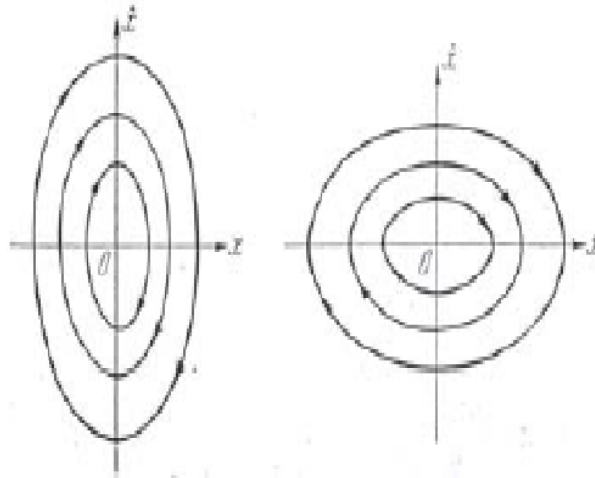


Figura 1: Graficando este sistema obtenemos dos subsistemas que no son asintóticamente estables.

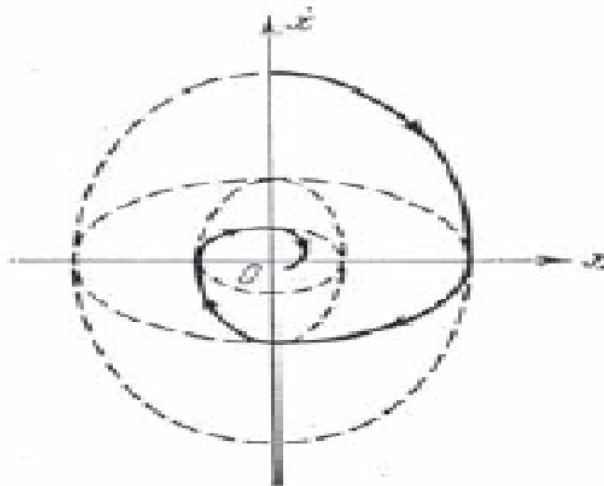


Figura 2: Al "cortar y pegar" segmentos de los subsistemas, obtenemos un sistema asintóticamente estable.

Otra forma de estabilización es encontrar una trayectoria, línea de conmutación, en un plano de estado de una de las estructuras con movimiento convergente. Entonces la lógica de conmutación, en el control, debe encontrarse de tal manera que los estados alcancen dicha trayectoria, para cualquier condición inicial y una vez alcanzada movere a lo largo de ella.

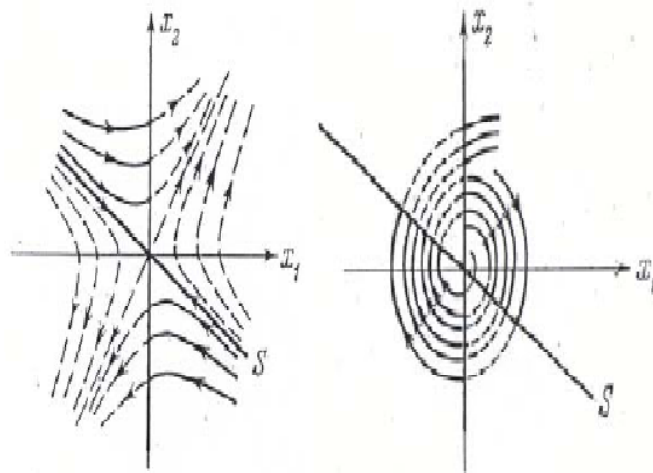


Figura 3: Nos muestra dos estructuras inestables.

Después de "cortar y pegar" segmentos de los subsistemas, encontramos un sistema asintóticamente estable, con una línea de conmutación definida:

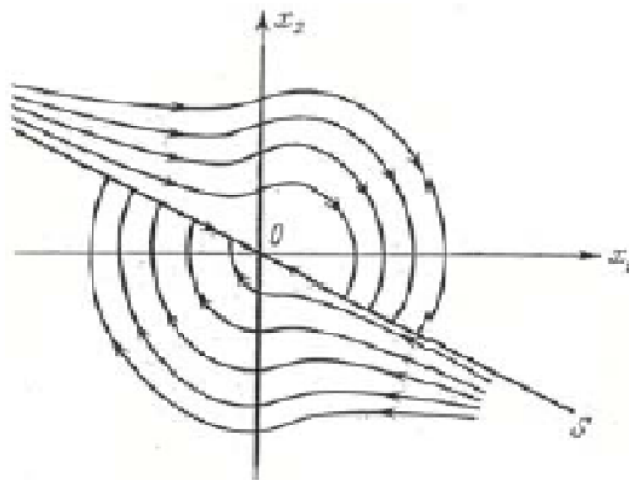


Figura 4: Sistema de estructura variable asintóticamente estable.

Debe observarse como algunas de las trayectorias son orientadas hacia una línea de conmutación $s = x_2 + cx_1 = 0$. Esto significa que alcanzando esta línea, la trayectoria de estado no puede separarse de ella, y en movimientos futuros el vector de estado permanecerá en esta línea. A este movimiento se le

llama modo deslizante. Este modo deslizante juega un papel dominante en las investigaciones futuras de la teoría de sistemas de estructura variable.

Deben notarse tres hechos importantes[7, 101, 102, 106, 107]:

- 1.-El sistema original, está descrito por una ecuación no lineal de segundo orden,
- 2.- El orden de la ecuación de movimiento es reducido después de que aparecen los modos deslizantes, la ecuación es lineal y homogénea.
- 3.-El modo deslizante no depende de la dinámica de la planta, está determinado por parámetros propios de diseño.

En la década de los 60's concluía, por la comunidad científica, la primer etapa en el desarrollo de los sistemas de estructura variable, la cual se enfocó principalmente a sistemas lineales de orden arbitrario con control escalar, los resultados fueron herramientas de análisis en el espacio de estado, en un entorno muy limitado de aplicaciones prácticas, aportaciones plasmadas en los libros[48, 98]. A finales de los 60's y principios de los 70's se gestó una segunda etapa en el desarrollo de los sistemas de estructura variable. en la que el rango de los problemas discutidos en ese contexto fue ampliado; este desarrollo en la teoría de sistemas de estructura variable demandó la creación de nuevas herramientas matemáticas y métodos de diseño.[103] .

El problema fundamental de las ecuaciones de modos deslizantes es que al contener discontinuidades en el control, dada la ecuación de movimiento relevado, no se satisfacen los teoremas de existencia y unicidad de la solución, por lo que se requieren métodos de diseño especiales. En 1961 Filippov plantea una metodología para la solución de esta problemática[107, 39, 46]

Posteriormente, desde la publicación del Dr. Utkin, en 1977, del artículo Sistemas de Estructura Variable con Modos Deslizantes, se ha mostrado un gran interés por estas técnicas de control y sus aplicaciones. La técnica de control por modos deslizantes tiene las siguientes ventajas:

- 1.- Insensibilidad, esto es la técnica nos ofrece mayor robustez para perturbaciones acopladas.
- 2.- Habilidad de reducir el orden de la dinámica, como se muestra en el ejemplo anterior.

En las últimas dos décadas, las aportaciones a los sistemas de estructura variable y control relevado culminan con los libros [101, 103, 107] , y con las contribuciones de los artículos [75, 102] .

Por otro lado, la importancia del problema de filtrado óptimo para sistemas con dinámica lineal y retardo en las observaciones fue reconocido desde hace tiempo. Los problemas de filtrado óptimo y control para sistemas lineales con retardo en la medición y su dual el problema de control óptimo permanecen sin solución teórica general para sistemas con retardos múltiples y variables. La dualidad entre los problemas de control y filtrado en sistemas lineales implica que el estimado de estado óptimo para un sistema con retardo en las observaciones esté relacionado directamente al problema del regulador óptimo cuadrático, con retardo en la entrada de control, el cual se estudió en [5, 66] . Existen muy pocas publicaciones que consideran el problema de filtrado óptimo, en el que las ecuaciones de estado y observación están corrompidas con ruido estocástico, para sistemas con retardo en las observaciones. La presencia de perturbaciones no Gaussianas en la ecuación de observación no pueden ser procesadas a través del filtro de Kalman-Bucy, lo cual lleva a un deterioro en la calidad de la estimación de estado [56, 61]. Por esta razón el problema de robustez de filtrado óptimo es muy actual. Normalmente la técnica de modos deslizantes se utiliza para la robustificación de algoritmos óptimos en sistemas sin retardo [42] aunque es imposible aplicar modos deslizantes para sistemas con control retardado y la robustez de un control por modos deslizantes en el espacio de variables requiere algunas restricciones en las incertidumbres[42, 44, 77, 90] .Recientes resultados en el diseño de observadores robustos para sistemas estocásticos no lineales están en [82] ,estudios de aplicación de la técnica de modos deslizantes para robustificación del filtro óptimo para sistemas estocásticos, se muestran en [33] .

1.3 Hipótesis

A partir de la situación planteada en los antecedentes, se establecen las siguientes líneas de investigación:

1.- Es posible inducir las ecuaciones de filtrado óptimo para sistemas lineales con retardo fijo en las observaciones y bajo que restricciones en la perturbación es posible aplicar la técnica de modos deslizantes y obtener un algoritmo de robustificación.

2.- Es posible aplicar el principio de dualidad a las ecuaciones de filtrado óptimo para sistemas lineales con retardo fijo en las observaciones y definir las ecuaciones del regulador óptimo para estos sistemas, y bajo que restricciones en la perturbación es posible aplicar la técnica de modos deslizantes y obtener un algoritmo de robustificación.

3.- Es posible aplicar el principio de dualidad a las ecuaciones de filtrado óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos en las observaciones y definir las ecuaciones del regulador óptimo para estos sistemas, y bajo que restricciones en la perturbación es posible aplicar la técnica de modos deslizantes y obtener un algoritmo de robustificación.

4.- Es posible aplicar el principio de separación a sistemas lineales no observados, estocásticos con retardo fijo en la entrada y en la observación y establecer las ecuaciones del controlador óptimo y bajo que restricciones en la perturbación es posible aplicar la técnica de modos deslizantes y obtener un algoritmo de robustificación.

5.- Es posible proponer un algoritmo de filtrado por modos deslizantes para sistemas lineales estocásticos, y evaluar su desempeño contra los filtros disponibles.

6.- Es posible proponer un algoritmo de filtrado por modos deslizantes para sistemas no lineales cuadráticos estocásticos, y evaluar su desempeño contra los filtros disponibles.

1.4 Contribuciones

A continuación se describen las aportaciones de este trabajo.

1.4.1 Diseño de un filtro óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en las observaciones.

El capítulo 3 presenta las ecuaciones de filtrado óptimo para sistemas lineales estocásticos con retardo fijo en la observación. Dichas ecuaciones son obtenidas a partir de las ecuaciones de Ito, se obtienen ecuaciones similares a las ecuaciones de Kalman-Bucy, semejantes al predictor de Smith[96], contienen factores de ajuste en la matriz de ganancia del filtro y en el término cuadrático de la ecuación de varianza.

Posteriormente se aplica la técnica de modos deslizantes integrales para desarrollar un algoritmo de robustificación que compensará las perturbaciones al sistema. Se definen las características de la perturbación, deben ser acopladas, para que el algoritmo propuesto pueda eliminarlas. La perturbación desconocida es no Gaussiana, posiblemente determinística, no lleva información y debe suprimirse para garantizar la calidad del estimado.

Este capítulo se redactó tomando como base el artículo: Optimal and Robust Integral Sliding Mode Filter Design for Systems with Delayed Observations[24], que se publicó en el siguiente congreso: 2002, 7th. *International Workshop on Variable Structure Systems, Sarajevo.*

1.4.2 Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.

En el capítulo 4 se obtienen las ecuaciones de un regulador óptimo para sistemas lineales con retardo fijo en el control sujeto a un criterio cuadrático. Estas ecuaciones se obtienen aplicando el principio de dualidad, y los resultados obtenidos se demuestran aplicando el principio del máximo[63, 85]

Posteriormente se aplica la técnica de modos deslizantes integrales para desarrollar un algoritmo de robustificación que compensará las perturbaciones al sistema. Se definen las características de la perturbación, deben ser acopladas, para que el algoritmo propuesto pueda eliminarlas. La perturbación de-

sconocida es no Gaussiana, posiblemente determinística, no lleva información y debe suprimirse para garantizar la calidad del estimado. En conjunto el regulador óptimo y robusto:

- 1.-suprime las perturbaciones en tiempo finito.
- 2.- Garantiza la convergencia en tiempo finito del estado perturbado al optimamente conrolado.

Este capitulo se redactó tomando como base el artículo: Optimal and Robust Sliding Mode Control for Linear Systems with Time Delay in Control Input[19],que se publicó en la siguiente revista: 2003, *Journal of the Franklin Institute*.

1.4.3 Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control.

El capítulo 5 se presentan las ecuaciones de un regulador optimo diseño para sistemas lineales con múltiples retardos en el cotntrol y un criterio cuadrático. Estas ecuaciones se obtienen aplicando el principio de dualidad, los resultados obtenidos se demuestran aplicando el principio del máximo[63, 85]. El filtro óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos es una aportación reciente[20] .

Posteriormente se aplica la técnica de modos deslizantes integrales al control óptimo obtenido, y se presenta un algoritmo para robustificarlo, compensando las perturbaciones del sistema.

Este capitulo se redactó tomando como base el artículo: Optimal and Robust Sliding Mode Control for Linear Systems with Multiple Time Delay in Control Input[18],que se publicó en la siguiente revista: Asian Journal on Control, Vol.5, No.4.pag. 557-567

1.4.4 Diseño de un controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada de control y en las observaciones.

En el capitulo 6 se formulan las ecuaciones del controlador óptimo para sistemas lineales con retardo fijo en el estado y en las observaciones, sujeto a un criterio cuadrático, el sistema es no observado. Estas euaciones se obtienen aplicando el principio de separación.

Este capitulo se redactó tomando como base el artículo: Optimal Controller For Linear Systems with Time Delays in Input and Observations,que se publicó en la siguiente revista: Dynamics of Discrete Continuous & Impulsive Systems

1.4.5 Diseño de un controlador óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control y en las observaciones.

Es el capítulo 7 una continuación del capítulo 6, aquí se presenta un algoritmo para robustificar el controlador óptimo obtenido en el capítulo anterior. Se presenta un resultado interesante respecto a las condiciones de acoplamiento, una vez satisfecha la condición de acoplamiento, el compensador diseñado en la ecuación de estado puede simultáneamente suprimir las perturbaciones en la observación; así como el compensador diseñado en la ecuación de observación puede simultáneamente suprimir las perturbaciones en el estado, es decir un solo compensador suprime ambas perturbaciones.

Este capítulo se redactó tomando como base el artículo: Integral Sliding Mode design for Robust Filtering and Control of Linear Stochastic Time Delay Systems[16], que se publicó en el siguiente congreso: 2004, 8th. International Workshop on Variable Structure Systems, Spain.

1.4.6 Comparación del Desempeño de Filtros Clásicos vs. Filtros de Modos Deslizantes para Sistemas Estocásticos.

En el capítulo 8 se presentan los resultados de un estudio comparativo del desempeño de los filtros clásicos para sistemas estocásticos lineales y no lineales cuadráticos, versus el algoritmo para el filtro de modos deslizantes respectivos para cada tipo de sistema. Los filtros presentan un mejor desempeño respecto a los filtros disponibles basado en los criterios de comparación.

Este capítulo se redactó tomando como base los siguientes artículos:

1) Comparative Study of Sliding Mode, Optimal, and Extended Kalman Bucy Filters performance for Quadratic Stochastic Systems[15], que se publicó en el siguiente congreso: 2004, Symposium on System Structure, IFAC, Oaxaca; y

2) Comparative Study of Kalman Bucy and Sliding Mode Filters performance for Linear Stochastic Systems[14], que se publicó en el siguiente congreso: 2003, IEEE International Symposium on Intelligent Control, Houston, Tx.

Capítulo 2.

Marco teórico.

Para la redacción de este capítulo se consultaron las siguientes referencias [6, 7, 9, 10, 14, 15, 16, 26,] [29, 31, 32, 49, 50, 51, 53, 55, 64, 67, 68, 69, 74, 86, 92, 99, 101, 103, 107]:

2.1 Teoría de Probabilidad y Estadística.

2.1.1. Conceptos básicos de probabilidad.-

Espacio de probabilidad: se denota por Ω , con elementos denotados por ω . Ω es un espacio muestra básico, y sus elementos ω son muestras o resultados de los experimentos aleatorios, este espacio contiene todas las posibles salidas definidas para el experimento.

Evento: es un subconjunto del espacio Ω .

Función de probabilidad: $\Pr\{\}$, es la probabilidad que se presente un evento dado. Es decir sea el evento A, asignamos el número $\Pr\{A\}$, es llamado la probabilidad de A.

La función de probabilidad satisface los siguientes axiomas

(i) $\Pr\{A\} \geq 0$

(ii) $\Pr\{\Omega\} \triangleq 1$

(iii) if $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j, i, j = 1 \dots n$, entonces $\Pr\{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n\} = \Pr\{A_1\} + \dots + \Pr\{A_n\}$ los eventos son mutuamente exclusivos.

(iv) $\Pr\{\phi\} = 0$

(v) $\Pr\{A\} = 1 - \Pr\{\Omega - A\} \leq 1$

Experimento aleatorio.- es un ensayo en el cual la salida varia de manera impredecible cuando el ensayo es repetido en las mismas condiciones.

Probabilidad condicional.- Para eventos que no son independientes, la probabilidad de que ocurra el evento A, dado que ha ocurrido el evento B, se denota como

$$\Pr\{A | B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{B\}} \quad (2.1)$$

Teorema de Bayes.-

$$\Pr\{A_i B\} = \frac{\Pr\{B | A_i\} \Pr\{A_i\}}{\sum_{i=1}^n \Pr\{B | A_i\} \Pr\{A_i\}} \quad (2.2)$$

Eventos independientes.- Si conocemos que la ocurrencia de un evento B no altera la probabilidad de otro evento A, entonces decimos que el evento A es independiente del evento B:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A | B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\} \quad (2.3)$$

2.1.2. Variables aleatorias.-

Variable aleatoria.- Una variable aleatoria X, es una función que asigna un número real a cada salida en el espacio muestra de un experimento aleatorio. Existen tres tipos de variables aleatorias: discretas, continuas y mixtas.

Función de distribución de probabilidad F(x), es la manera de especificar la probabilidad con la cual diferentes valores son tomados por una variable aleatoria se define: $F(x) = \Pr(X \leq x)$

Función densidad de probabilidad f(x), la cual se define $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ La inversa de la definición para la función densidad de probabilidad es $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ una característica evidente de cualquier distribución de probabilidad o función de densidad es $F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$

Función de distribución de probabilidad conjunta.- Si tenemos más de una variable aleatoria, dos, la probabilidad de la ocurrencia de pares de valores en un rango especificado es dado por la Función de distribución de probabilidad conjunta $F_2(x, y) = \Pr(X \leq x \text{ y } Y \leq y)$ donde X y Y son dos variables aleatorias bajo consideración.

Función densidad de probabilidad conjunta.- para dos variables aleatorias esta dada por: $f_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}$

2.1.3. Conceptos básicos de Estadística

Esperanza de variables aleatorias.- La esperanza de una variable aleatoria es definida como la suma de todos los valores aleatorios que puede tomar, cada uno ponderado por la probabilidad relacionada a cada valor. Para una variable aleatoria que toma valores sobre un rango continuo, la sumatoria se convierte en integración.

Valor medio de X.- La esperanza de X, o el valor medio de X, la media de la distribución de X, o el primer momento de X está dado por $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Es necesario frecuentemente encontrar la esperanza de una función de una variable aleatoria. Si Y se define como una función de la variable aleatoria X, entonces la esperanza de Y se define: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

Valor medio cuadrático.-Es un parámetro descriptivo de una distribución de X, y se define $E[X^2]$ se le llama también el segundo momento de X.

Varianza.- De la variable aleatoria X se define como la variación de la variable aleatoria con respecto a su media, esto es

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2] \quad (2.4)$$

Desviación estándar.- La desviación estándar de una variable aleatoria X, se define

$$STD[X] = \sqrt{VAR[X]} \quad (2.5)$$

2.1.4. Procesos estocásticos.

Ruido Blanco.-es un tipo especial de proceso estocástico, el cual definimos formalmente como un proceso Gaussiano blanco $\{x_t \ t \in T\}$ como un proceso Gaussiano con

$$E\{(X - E[X_t])(X - E[X_t])^T\} = Q(t) \delta(t - \tau) \quad (2.6)$$

dónde $Q(t)$ es una matriz de covarianza semidefinida positiva y $\delta(t - \tau)$ es la función delta Dirac. Para conocer más las propiedades del ruido blanco Gaussiano, consideremos la función de densidad espectral de potencia, la cual es la transformada de Fourier de la función de correlación.

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\omega} \gamma(t + \tau, t) d\tau \quad (2.7)$$

2.2 Teoría de filtrado óptimo

2.2.1 Filtro de Kalman Bucy

Consideremos el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w_1(t), \quad (2.8)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + w_2(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.9)$$

Aquí $col[w_1(t), w_2(t)]$ es un proceso de ruido blanco co intensidad

$$\begin{pmatrix} V_1(t) & V_{12}(t) \\ V_{12}^T(t) & V_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq t_0 \quad (2.10)$$

Además, el estado inicial, $x(t_0)$, es no correlacionado con w_1 y w_2 ,

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \quad (2.11)$$

$$E\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^T\} = Q_0 \quad (2.12)$$

y $u(t), t \geq t_0$, es la entrada dada al sistema. Consideremos el observador

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (2.13)$$

Entonces el problema de encontrar la función maricial $K(\tau), t_0 \leq \tau \leq t$, y la condición inicial $\hat{x}(t_0)$, tal que minimice

$$E\{e^T(t)W(t)e(t)\}, \quad (2.14)$$

dónde

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.15)$$

y dónde $W(t)$ es una matriz de ponderación simétrica definida positiva, es conocido como problema de observación óptimo. Si se satisface además que

$$V_2(t) > 0, \quad t \geq t_0 \quad (2.16)$$

el problema de observación óptimo es llamado no singular, esto es el ruido en el estado de excitación y en ruido en la observación asumimos que son no correlacionados. Este problema fue resuelto primero por Kalman and Bucy en 1961, la solución esta dada por:

Teorema. Consideremos el problema de observación óptimo. Supongamos también que es no singular y que la excitación de estado y el ruido en la observación son no correlacionados. Entonces, la solución al problema de observación óptimo es obtenida seleccionando la matriz de ganancia:

$$K^0(t) = Q(t) C^T(t) V_2^{-1}(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.17)$$

dónde $Q(t)$ es la solución a la ecuación matricial de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + V_1(t) - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)Q(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.18)$$

con la condición inicial

$$Q(t_0) = Q_0 \quad (2.19)$$

la condición inicial del observador debemos seleccionarlo de tal manera que

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.20)$$

Si se cumple esta condición inicial y $K^0(t)$, se calcula adecuadamente, entonces la esperanza

$$E \left\{ [x(t) - \hat{x}(t)] W(t) [x(t) - \hat{x}(t)]^T \right\} \quad (2.21)$$

es minimizada para todo $t \geq t_0$. La matriz de varianza del error de reconstrucción está dado por:

$$E \left\{ [x(t) - \hat{x}(t)] [x(t) - \hat{x}(t)]^T \right\} = Q(t) \quad (2.22)$$

mientras el error de reconstrucción medio cuadrático es:

$$E \left\{ [x(t) - \hat{x}(t)]^T W(t) [x(t) - \hat{x}(t)] \right\} = \text{tr} [Q(t) W(t)] \quad (2.23)$$

Este filtro es un estimador lineal de media cuadrática mínima, esto es, no podemos encontrar otra funcional lineal de las observaciones y de la entrada que nos produzca un estimado del estado con un error de reconstrucción medio cuadrático más pequeño.

2.2.2 Filtro de Kalman Bucy Extendido.

Ahora extenderemos la estimación óptima de sistemas lineales a través del filtro de Kalman, al caso más general cuando el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + w(t) \quad (2.24)$$

El vector f es una función no lineal del estado y $w(t)$ es un ruido gaussiano de media cero y tiene una matriz de densidad espectral $Q(t)$. La observación está dada por

$$z(t) = h(x(t), t) + v(t) \quad (2.25)$$

Presentaremos una de varias técnicas prácticas para estimar el estado del sistema no lineal. La técnica consiste en aplicar el método de aproximación por series de Taylor para obtener un sistema "lineal" y calcular su estimado. Debemos expandir f en su serie de Taylor alrededor de un vector conocido $\bar{x}(t)$ cercano a $x(t)$. En particular si f se expande alrededor del estimado del vector de estado $\bar{x}(t) = \hat{x}(t)$. El algoritmo conocido como filtro de Kalman extendido es:

Sea el modelo del sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + w(t); \quad w(t) \sim N(0, Q(t)) \quad (2.26)$$

Con las observaciones

$$z(t) = h(x(t), t) + v(t); \quad v(t) \sim N(0, R(t)) \quad (2.27)$$

y las condiciones iniciales

$$x(0) \sim N(\hat{x}_0, P_0) \quad (2.28)$$

Además supondremos

$$E[w(t)v^T(\tau)] = 0 \quad \text{para toda } t \text{ y toda } \tau \quad (2.29)$$

La ecuación del estimado del estado, esta dada por:

$$\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), t) + K(t) [z(t) - h(\hat{x}(t), t)] \quad (2.30)$$

La ecuación de la covarianza del error es:

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), t) P(t) + P(t) F^T(\hat{x}(t), t) + Q(t) - P(t) H^T(\hat{x}(t), t) R^{-1}(t) H(\hat{x}(t), t) P(t) \quad (2.31)$$

Además la ecuación de la ganancia está dada por:

$$K(t) = P(t) H^T(\hat{x}(t), t) R^{-1}(t) \quad (2.32)$$

Para la linealización :

$$F(\hat{x}(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x(t)} \text{ evaluada en } x(t) = \hat{x}(t) \quad (2.33)$$

y

$$H(\hat{x}(t), t) = \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x(t)} \text{ evaluada en } x(t) = \hat{x}(t) \quad (2.34)$$

2.2.3 Filtro óptimo polinomial de grado 3 con observaciones lineales.

Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x^2(t) + a_3(t)x^3(t) + b(t)dW_1(t) \quad (2.35)$$

con las observaciones lineales

$$y(t) = A_0(t) + A(t)x(t) + B(t)dW_2(t) \quad (2.36)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.37)$$

dónde $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos independientes de Wiener, entre si y el valor inicial Gaussiano $x_0, x \in R^n$.

La ecuación del estimado óptimo toma la forma

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)p(t) + a_2(t)m^2(t) + a_3(t)(3p(t) * m(t) + m^3(t))) + P^T(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) \quad (2.38)$$

La ecuación para la varianza

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t) * P(t) + 2[P(t) * m^T(t)]a_2^T(t) + 3a_3(t)[p(t) * P(t)] + 3[p(t) * P(t)]^T a_3^T(t) + 3a_3(t)[m^T(t) * P(t)] + 3(P(t) * (m^2(t))^T)a_3^T(t) + (b(t)b^T(t)) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt \quad (2.39)$$

dónde

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0)] \quad (2.40)$$

El producto $m(t) * P(t)$ entre un vector $m(t)$ y una matriz $P(t)$ se define como la matriz cuyos renglones son iguales a los renglones de $P(t)$ multiplicado por el mismo elemento correspondiente de $m(t)$:

$$\begin{bmatrix} m_1(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \dots & P_{1n}(t) \\ m_2(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \dots & P_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n(t) & P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \dots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(t)P_{11}(t) & m_1(t)P_{12}(t) & \dots & m_1(t)P_{1n}(t) \\ m_2(t)P_{21}(t) & m_2(t)P_{22}(t) & \dots & m_2(t)P_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n(t)P_{n1}(t) & m_n(t)P_{n2}(t) & \dots & m_n(t)P_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

y la matriz transpuesta $P(t) * m^T(t) = (m(t) * P(t))^T$ es definida como la matriz cuyas columnas

son iguales a las columnas de $P(t)$ multiplicados por los mismos elementos correspondientes de $m(t)$.

Entonces la ecuación para el estimado óptimo $m(t)$ y la ecuación de la matriz de covarianza $P(t)$ forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado en el caso de una ecuación de estado polinomial de grado 3

y observaciones lineales, respectivamente.

2.3 Teoría de modos deslizantes.

2.3.1 Conceptos básicos.

Sistemas de estructura variable.

En sistemas de estructura variable permitimos que el control cambie la estructura del sistema, es decir, a través del control el sistema conmuta, en cualquier instante, de un conjunto de funciones continuas de estado a otro. El problema de diseño del control de sistemas de estructura variable consiste en seleccionar los parámetros de cada estructura y definir la lógica de conmutación. Existen muchas herramientas de análisis y diseño de controladores y observadores para sistemas lineales y no lineales; estas herramientas no se aplican a sistemas de estructura variable los cuales consisten de un conjunto de subsistemas continuos y un control discontinuo.

Modos Deslizantes.

Los modos deslizantes se conciben para sistemas dinámicos cuyo desempeño esencial en lazo abierto es modelado con ecuaciones diferenciales ordinarias, al realimentar el sistema y aplicar una acción de control discontinua, obtenemos un sistema de estructura variable definido en el dominio del tiempo y es gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias con el lado derecho discontinuo. Si tenemos un control como una función de conmutación de los estados del sistema, conmutando a alta frecuencia, ese movimiento es llamado modo deslizante.

Ejemplo. Consideremos el sistema escalar: $\dot{x} = f(x) + u$ con la variable de estado $x(t)$, $f(x)$ es una función acotada $|f(x)| < f_0$, $f_0 = \text{constante}$, y el control como una función de relevación estado por $u = u_0 \text{sign}(e)$, $u_0 = \text{constante}$, la señal de error $e = s = r(t) - x$, $r(t)$ es el valor de referencia; los valores de e y de $\dot{e} = \dot{r}(t) - f(x) - u_0 \text{sign}(e)$, tienen diferentes signos siempre que $u_0 > f_0 + |\dot{r}(t)|$. Como observamos en la gráfica, esto significa que la magnitud de la señal de error decae en un tiempo finito, y es idénticamente igual a cero después de un intervalo T . El argumento de la función de control, e , es igual a cero en su punto de discontinuidad. Al desempeño del sistema para $t > T$, donde la trayectoria de estado pertenece a la línea de conmutación, se le llama modo deslizante, es decir al movimiento de la trayectoria de estado en la línea de conmutación. Los modos deslizantes pueden aparecer no solo en sistemas con control discontinuo sino también en sistemas dinámicos con discontinuidades en las ecuaciones de movimiento. Los sistemas donde se presentan los modos deslizantes muestran dos

características: reducción del orden del sistema y baja sensibilidad a la variación de parámetros y perturbaciones.

Superficie de conmutación.

La superficie de conmutación $s_i(x) = 0$, línea de conmutación en el caso escalar, es una superficie $(n - m)$ dimensional en R^n determinada por la intersección de m superficies de conmutación $s_i(x) = 0$. Las superficies de conmutación son diseñadas tal que la respuesta del sistema restringida a $s(x) = 0$ tenga el desempeño deseado, así como características de estabilidad y seguimiento. Una técnica para diseñar estas superficies de conmutación es el método de control equivalente.

Método de control equivalente.

Es un procedimiento para deducir las ecuaciones de modos deslizantes y satisfacen la metodología de Filippov's. Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (2.42)$$

$$x, f(x) \in R^n, B(x) \in R^{n \times m}, u(x) \in R^m$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}$$

$$s(x)^T = [s_1(x) \quad \dots \quad s_m(x)]$$

cada superficie $s_i(x) = 0$ es el conjunto de puntos de discontinuidad para la componente del control correspondiente u_i . Dado que el movimiento en el modo deslizante implica que $s(x) = 0$ para $t > 0$ podemos asumir que $\dot{s} = 0$ también. Las ecuaciones de la superficie de conmutación para el sistema (2.42) tienen la forma:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \quad \text{donde } G = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.43)$$

Asumimos que la matriz GB es no singular para cualquier x , encontrar el control equivalente es la solución a (2.43), :

$$u_{eq}(x) = -(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x) \quad (2.44)$$

y substituyendo $u_{eq}(x)$ en (2.42), obtenemos la ecuación del modo deslizante :

$$\dot{x} = f(x) - B(x)(G(x)B(x))^{-1}G(x)f(x) \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) representa el modo deslizante en la superficie $s(x) = 0$

Desde un punto de vista geométrico, el método de control equivalente, significa reemplazar el control discontinuo en la intersección de superficies de conmutación por un control continuo tal que el vector de velocidad de estado permanezca en la superficie tangencial.

Condiciones de estabilidad

La existencia del modo deslizante requiere estabilidad de la trayectoria de estado hacia la superficie deslizante $s(x) = 0$ al menos asintóticamente en la vecindad de la superficie, en la región llamada de atracción. Geométricamente, el vector tangente, o la derivada en el tiempo del vector de estado debe apuntar hacia la superficie deslizante en la región de atracción. Para el análisis aplicamos el segundo método de Lyapunov, la estabilidad de la superficie de conmutación requiere seleccionar una función de Lyapunov generalizada $V(t, x)$ la cual es definida positiva y su derivada, si existe, con respecto al tiempo es negativa en la región de atracción.

2.3.2 Control por modos deslizantes.

Control unitario

Este es uno de los métodos de diseño de un control discontinuo que refuerce el modo deslizante en alguna superficie sin la selección individual de cada componente del control como una función de estado discontinuo. Este método implica diseñar el control basado en la función de Lyapunov seleccionada para un sistema nominal en lazo abierto o retroalimentado. Este control se determina tal que la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov se negativa a lo largo de las trayectorias del sistema con perturbaciones causadas por las incertidumbres en el modelo de la planta y las condiciones del entorno.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t) \quad (2.46)$$

con vectores de estado y control $x \in R^n$ $u \in R^m$ y los vectores de estado dependientes $f(x, t)$ $h(x, t)$ y la matriz de control de entrada $B(x, t) \in R^{n \times m}$. El vector representa las perturbaciones del sistema y su influencia en el proceso de control debe ser rechazada. La ecuación

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.47)$$

representa un sistema nominal en lazo abierto el cual asumimos que es asintóticamente estable con una función candidata de Lyapunov conocida,

$$V(x) > 0 \quad (2.48)$$

$$W_o = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=0, u=0} = \text{grad}(V)^T f < 0 \quad \text{grad}(V)^T = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \right], \quad (2.49)$$

asumimos que el vector de perturbación $h(h, t)$ satisface las condiciones de acoplamiento

$h(x, t) \in \text{rango} B(x, t)$, por lo tanto existe un vector $\gamma(x, t) \in R^m$ tal que:

$$h(x, t) = B(x, t)\gamma(x, t) \quad (2.50)$$

donde $\gamma(x, t)$ puede ser un vector desconocido con una cota superior conocida $\gamma_0(x, t)$, tal que

$$\|\gamma(x, t)\| < \gamma_0(x, t) \quad (2.51)$$

calculemos la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (2.47) en (2.51)

$$W = \frac{dV}{dt} = W_o + \text{grad}(V)^T B(u + \gamma) \quad (2.52)$$

para el control u que depende del estimado de la cota superior de la perturbación desconocida, seleccionada como:

$$u = -\rho(x, t) \frac{B^T \text{grad}(V)}{\|B^T \text{grad}(V)\|} \quad (2.53)$$

sujeto a la función escalar $\rho(x, t) > \gamma_0(x, t)$ y $\|B^T \text{grad}(V)\|^2 = (\text{grad}(V)^T B)(B^T \text{grad}(V))$, la

derivada en el tiempo de la función de Lyapunov toma la forma

$$W = W_o - \rho(x, t) \|B^T \text{grad}(V)\| + \text{grad}(V)^T B\gamma(x, t) \quad (2.54)$$

$$W < W_o - \|B^T \text{grad}(V)\| [\rho(x, t) - \gamma_0(x, t)]$$

$$W < 0$$

y es negativa. Esto implica que el sistema perturbado con el control (2.53) es asintóticamente estable también. Dos características importantes deben ser subrayadas para el sistema con el control (2.53) :

1.- El control (2.53) es sometido a discontinuidades en una superficie de dimensión $(n - m)$ $s(x) = B^T grad(V) = 0$, y es una función de estado continua después de esa superficie. Esta es su principal diferencia respecto a las otras técnicas de diseño.

2.- La perturbación $h(x, t)$ es rechazada debido al reforzamiento del modo deslizante en la superficie $s(x) = 0$. Si la perturbación (2.50) es rechazada, entonces el control u debe ser igual a $-\gamma(x, t)$ lo cual no es generalmente el caso para el control (2.53) más allá de la superficie de discontinuidad $s(x) = B^T grad(V) \neq 0$. Esto significa que el modo deslizante ocurre en la superficie $s(x) = 0$ y el valor del control equivalente es igual a $u_{eq} = -\gamma(x, t)$.

Note de la norma del control (2.53) con la ganancia unitaria $\rho(x, t) = 1$,

$$\left\| \frac{B^T grad(V)}{\|B^T grad(V)\|} \right\| \quad (2.55)$$

es igual a 1 para cualquier valor del vector de estado. esto explica el término control unitario para (2.50).

Adicionalmente, podemos utilizar el control unitario directamente con la función de Lyapunov como una segunda etapa en el procedimiento de diseño para el control por modos deslizantes: selección de una superficie deslizante $s(x) = 0$ y forzar el modo deslizante en esa superficie de acuerdo a algún criterio de desempeño y el control toma la forma:

$$u = -\rho(x, t) \frac{D^T s(x)}{\|D^T s(x)\|} \quad (2.56)$$

con $D = GB$, $G = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} \right\}$ y D asumimos que es no singular.

La ecuación de la proyección del movimiento del sistema (2.46) en el subespacio s tiene la forma

$$\dot{s} = G(f + h) + Du \quad (2.57)$$

2.3.3 Modos deslizantes integrales.

Planteamiento del problema.

Para un sistema dinámico dado representado por la ecuación estado-espacio

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (2.58)$$

con $x \in R^n$ siendo el vector de estado y $u \in R^m$ siendo el vector de control de entrada (rango $B(x) = m$), suponer que existe una ley de control de retroalimentación $u = u_0(x)$, la cual puede ser continua o

discontinua, tal que el sistema (2.58) puede ser estabilizado de una manera deseada (ejem. su trayectoria de estado sigue una trayectoria de referencia con una exactitud dada). Denotamos este sistema de lazo cerrado ideal como:

$$\dot{x}_0 = f(x_0) + B(x_0)u_0 \quad (2.59)$$

donde x_0 representa la trayectoria de estado del sistema ideal bajo control u_0 . Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el sistema (2.58) opera bajo condiciones de incertidumbre que pueden ser generadas por variación de parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas. Bajo esta consideración, la trayectoria real del sistema de control de lazo cerrado puede ser resumida por

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + h(x, t) \quad (2.60)$$

en la cual el vector $h(x, t)$ comprende la perturbación debida a la variación de parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas y es asumido para cumplir las siguientes condiciones semejantes:

$$h(x, t) \in \text{span} [B(x)] \quad (2.61)$$

o equivalentemente,

$$h(x, t) = B(x) u_h \text{ con } u_h \in R^m \quad (2.62)$$

En otras palabras, control u es asumido para ser apto para influir en todas las componentes del vector $h(x, t)$ a través de la matriz de control $B(x)$.

Asumiendo que $h(x, t)$ es limitada y que un límite superior puede ser encontrado como

$$|h_i(x, t)| \leq h_i^+(x, t) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.63)$$

con $h_i^+(x, t)$ siendo funciones escalares positivas conocidas. El reto de diseño de control así llega a ser: Encontrar un control bajo $u(x, t)$ tal que las trayectorias del sistema (2.60) satisfacen $x(t) = x_0(t)$ empezando del instante de tiempo inicial.

Principios de diseño

Para el sistema (2.60), primero rediseñamos la ley de control a ser

$$u = u_0 + u_1 \quad (2.64)$$

Donde $u_0 \in R^m$ es el control ideal definido en (2.49) y $u_1 \in R^m$ es diseñado para rechazar el término de perturbación $h(x,t)$. La sustitución de la ley de control (2.64) en (2.60) da

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0 + B(x)u_1 + h(x, t) \quad (2.65)$$

Ahora definimos una variable deslizante como

$$s = s_0(x) + z \quad (2.66)$$

dónde

$$s, s_0, z \in R^m \quad (2.67)$$

la cual consiste de dos partes: la primera parte $s_0(x)$ puede ser diseñada como una combinación lineal de los estados del sistema similar al diseño convencional de modo deslizante; la segunda parte introduce el término integral y será determinado abajo.

La filosofía del modo deslizante integral es: En orden para lograr $x(t) = x_0(t)$ en todas las veces $t > 0$, el control equivalente de u_1 , denotado por u_{1eq} , debería completar

$$B(x)u_{1eq} = -h(x, t) \quad (2.68)$$

o, en términos de (2.52)

$$u_{1eq} = -u_h \quad (2.69)$$

El control equivalente u_{1eq} describe exactamente las trayectorias del sistema cuando "se desliza" a lo largo de la variable $s_0(x) = 0$ en (2.67).

En orden para definir adecuadamente la variable auxiliar $z(x,t)$ en (2.67) para lograr (2.69) poner la derivada con respecto al tiempo de s igual a cero,

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{z} = \frac{\partial s_0}{\partial x} \{f(x) + B(x)u_0(x) + B(x)u_{1eq}(x) + B(x)u_h\} + \dot{z} \quad (2.70)$$

Para asegurar el requerimiento (2.69), se define

$$\dot{z} = -\frac{\partial s_0}{\partial x} \{f(x) + B(x)u_0(x)\} \quad (2.71)$$

dónde

$$z(0) = -s_0(x(0)) \quad (2.72)$$

donde la condición inicial $z(0)$ es determinada basada en el requerimiento $s(0) = 0$. En otras palabras, el modo deslizante es para ocurrir empezando del ejemplo de tiempo inicial. Puesto que la ecuación (2.69) es satisfecha, la ecuación de movimiento del sistema en modo deslizante será:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0(x) \quad (2.73)$$

similar a las trayectorias del sistema ideal (2.59)

Definición : Modo deslizante integral.

Un modo deslizante es un modo deslizante integral si su ecuación de movimiento es del mismo orden que el sistema original, (ejem. el orden del movimiento deslizante es igual a n). El control u_1 en (2.64) es definido para aplicar el modo deslizante a lo largo de la variable (2.67) a través de la función discontinua

$$u_1 = -M(x)sign(s) \quad (2.74)$$

donde $M(x)$ es una función escalar positiva para la ganancia de control. Sustituyendo de (2.74) y (2.72) en (2.70) da

$$\dot{s} = \frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)u_h - \frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)M(x)sign(s) \quad (2.75)$$

En la ecuación (2.75) s_0 debe ser seleccionada tal que la matriz $\frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)$ es no singular durante la respuesta entera del sistema.

Entonces la función escalar $M(x)$ puede ser seleccionada dependiendo en la propiedad de $\frac{\partial s_0}{\partial x} B(x)$ tal que el modo deslizante es aplicado en la variable $s = 0$

En las aplicaciones de robustificación de esta tesis, seleccionamos la superficie tal que:

$$s(x) = B^+ x$$

para que

$$\frac{\partial s}{\partial x} B = B^+ B = I$$

Esto nos asegura que:

- 1.- No se amplifican las perturbaciones desacopladas si las hay no rompen el sistema.
- 2.- Minimiza la influencia de las perturbaciones desacopladas.

Capítulo 3.

Diseño de un filtro óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en las observaciones.

3.1 Problema del filtro óptimo con un retardo fijo en la observación.

3.1.1 Planteamiento del Problema.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo, con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq 0$ con incrementos continuos por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$ procesos independientes de Wiener. El proceso aleatorio parcialmente observado F_t -medible $(x(t), y(t))$ es descrito por una ecuación diferencial ordinaria para la dinámica de estado del sistema

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

y una ecuación diferencial con retardo para el proceso de observación:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + B(t)dW_2(t), \quad (3.2)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $y(t) \in R^m$ es el proceso de observación, $x_0 \in R^n$ la condición inicial es un vector Gaussiano tal que $x_0, W_1(t), W_2(t)$ son independientes. El proceso de observación $y(t)$ depende del estado retardado $x(t-h)$, donde h es un retardo fijo, el cual asume que la disponibilidad de la información del estado del sistema, para propósitos de observación, es posible solamente después de un cierto tiempo h . La función valuada vectorialmente $a_0(s)$ describe los efectos de la entrada al sistema, el control y las perturbaciones. Todos los coeficientes en las ecuaciones (3.1) y (3.2) son funciones continuas determinísticas con variaciones acotadas. Se asume también que $A(t, s)$ es una matriz diferente de cero, y que la matriz $B(t, s)B^T(t, s)$ es definida positiva. Todos los coeficientes en (3.1) y (3.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

El problema de estimación consiste en encontrar el estimado del estado del sistema $x(t)$ basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, la cual es la esperanza de $(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$

con respecto a la σ -álgebra generada por las observaciones

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) | F_t^Y] \quad (3.3)$$

en cada momento t , en otras palabras, nuestro objetivo es encontrar la esperanza condicional

$$m(t) = \hat{x}(t) = E(x(t) | F_t^Y). \quad (3.4)$$

Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y] \quad (3.5)$$

es la varianza del error de la estimación .

La solución que se propone, a este problema de filtrado óptimo, está basado en la fórmula diferencial de Ito para la esperanza condicional $E(x(t) | F_t^Y)$ y la varianza $P(t)$ (citada en [87]) y servirá como base para construir un filtro robusto utilizando la técnica de modos deslizantes.

3.1.2 Solución al Problema de filtrado óptimo con retardo en las observaciones.

En la situación simplificada de un retardo fijo, obtendremos las ecuaciones de filtrado óptimo directamente de la formula diferencial de Ito de la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ ver [87]

$$dm(t) = E(\varphi(x) | F_t^Y) + E(x[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t, s)B^T(t, s))^{-1} (dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt), \quad (3.6)$$

donde $\varphi(x)$ es un término drift en la ecuación de estado igual a $\varphi(x) = a_0(t) + a(t)x(t)$ y $\varphi_1(x)$ es un término drift en la ecuación de observación igual a $\varphi_1(x) = A_0(t) + A(t)x(t-h)$. Realizando las sustituciones y notando que $E(x(t-h) | F_t^Y) = E(x(t-h) | F_{t-h}^Y) = m(t-h)$, la ecuación del estimado toma la forma

$$dm(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + E(x(t)[A(t)(x(t-h) - m(t-h))]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1} (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt) = \\ dm(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\ (B(t, s)B^T(t, s))^{-1} (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt). \quad (3.7)$$

La expresión obtenida es la ecuación del mejor estimado y es muy similar a la del filtro de Kalman, a excepción del término $E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T | F_t^Y)$ en vez de $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$. Sin embargo, el término formador puede ser expresado como una función de la varianza, utilizando la fórmula de Cauchy para $x(t)$ como la solución de la ecuación lineal (3.1) y $m(t)$ como su esperanza condicional. tal que,

$$x(t) - m(t) = \Phi(t, t-h)(x(t-h) - m(t-h)) + \int_{t-h}^t \Phi(t, \tau)b(\tau)dW_1(\tau), \quad (3.8)$$

donde $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de solución fundamental para la ecuación homogénea (3.1), esto es solución de la ecuación matricial

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = a(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(t, t) = I, \quad (3.9)$$

donde I es la matriz de identidad. En otras palabras, $\Phi(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t a(s)ds$. Entonces, el término del retardo en la ecuación de estimación es igual a $E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T | F_t^Y) = E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds) = P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)$, y la ecuación completa toma la forma

$$dm(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)A^T(t) \times (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt). \quad (3.10)$$

De tal modo que la ecuación del estimado óptimo, semejante al caso clásico de Kalman-Bucy, incluye la matriz de ganancia $P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)(B(t)B^T(t))^{-1}$ la cuál depende de la varianza estimada, pero multiplicada por un factor de ajuste debido al retardo $\exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)$. Ahora el problema es encontrar la ecuación para $P(t)$ de una manera cerrada.

Para este propósito, la fórmula diferencial de Ito aplicada a la esperanza condicional, la varianza $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$, puede ser usada (nuevamente citaremos [87]):

$$dP(t) = E((x(t) - m(t))\varphi^T(x) | F_t^Y) + E(\varphi(x)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + b(s)b^T(s) - E(x(t)[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& E([\varphi_1 - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]x^T(t) | F_t^Y) + \\
& E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))[\varphi_1 - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)] | F_t^Y) \times \\
& (B(t, s)B^T(t, s))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

donde el último término debe entenderse como un tensor tridimensional (bajo el signo de esperanza) convolucionado con un vector, el cual genera la matriz. Ahora, sustituyendo las expresiones para φ y φ_1 , la ecuación anterior toma la forma

$$\begin{aligned}
dP(t) &= E((x(t) - m(t))x^T(t)a^T(t) | F_t^Y) + \\
& E(a(t)x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + b(s)b^T(s) - \\
& E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T A^T(t) | F_t^Y) \times \\
& (B(t, s)B^T(t, s))^{-1} E(A(t)(x(t-h) - m(t-h))x^T(t) | F_t^Y) + \\
& E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t-h) - m(t-h) | F_t^Y) \times \\
& A^T(t)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la ecuación (3.8) para los valores retardados del error y considerando que $E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T | F_t^Y) = E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds) = P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)$, la expresión se reduce a

$$\begin{aligned}
dP(t) &= P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(s)b^T(s) - \\
& P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)A^T(t) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1} A(t) \exp(-\int_{t-h}^t a(s)ds)P(t) + \\
& E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t) | F_t^Y) \times \\
& \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds)A^T(t)(B(t, s)B^T(t, s))^{-1} \times \\
& (dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

El último término en esta fórmula contiene el tercer momento central condicional $E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t) | F_t^Y)$ de $x(t)$ con respecto a las observaciones, el cual es igual a cero, debido a que $x(t)$ es condicionalmente Gaussiana, en vista de que la Gaussianidad de los ruidos y de las condiciones iniciales y linealidad de las ecuaciones de observación y del estado. Entonces, el último término completo

se desaparece y obtenemos la siguiente ecuación para la varianza

$$\begin{aligned}
dP(t) = & P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(s)b^T(s) - \\
& P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t)(B(t,s)B^T(t,s))^{-1} \times \\
& A(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a(s)ds\right)P(t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Las ecuaciones de filtrado obtenidas (3.10) y (3.14) deben de complementarse con las condiciones iniciales $m(t_0) = E[x(t_0) | F_{t_0}^Y]$ y $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$. Debemos notar, que este sistema es muy similar al filtro de Kalman-Bucy convencional, excepto los ajustes debido a los retardos en las ecuaciones del estimado y la varianza, calculados con la fórmula de Cauchy para la ecuación de estado. Son, también, muy similares a las arrojadas por el predictor de Smith [96] comunmente utilizado para diseñar control robusto para sistemas con retardo en el tiempo. No obstante, el filtro obtenido es óptimo con respecto a la forma de introducir el proceso de observación, dado que es obtenido de la ecuación diferencial exacta de Ito, para la esperanza condicional y la varianza.

En el caso de una matriz constante a en la ecuación de estado, el filtro óptimo toma una forma especialmente simple ($\exp\left(-\int_{t-h}^t a^T ds\right) = \exp(-a^T h)$)

$$\begin{aligned}
dm(t) = & a_0(t) + am(t) + P(t) \exp(-a^T h)A^T(t) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
dP(t) = & P(t)a^T + aP(t) + b(s)b^T(s) - \\
& P(t) \exp(-a^T h)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t) \exp(-ah)P(t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ahora, en la siguiente sección, se deriva el filtro de modos deslizantes robusto correspondiente al filtro óptimo obtenido con retardo en las observaciones que está basado en los principios generales de diseño de compensadores por modos deslizantes.

3.2 Problema de robustificación en control de sistemas con un retardo fijo a través de modos deslizantes integrales.

3.2.1 Planteamiento del Problema.

Sea el sistema de control con retardo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h)) + Bu(t), \quad (3.17)$$

donde $x \in \mathbf{R}^n$ es el vector de estado y $u(t) \in \mathbf{R}^m$ es el control sin memoria de rango $B = m$, supongamos que existe un estado diferenciable, esto es, una ley de control de retroalimentación $u_0(x(t)) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^m)$, tal que la dinámica del sistema ideal de lazo cerrado toma la forma

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t), x_0(t-h)) + Bu_0(x_0(t)), \quad (3.18)$$

y tiene ciertas propiedades deseadas.

Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el sistema (3.18) opera bajo condiciones de incertidumbre que pueden ser generados por variaciones en los parámetros y perturbaciones externas. Ahora consideremos la trayectoria real del sistema de control de lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h)) + Bu + g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t), \quad (3.19)$$

donde g_1, g_2 son incertidumbres suaves que representan perturbaciones y no linealidades en el sistema (3.17). Para g_1, g_2 , asumimos que se satisfacen las condiciones de acoplamiento estándar: $g_1, g_2 \in \text{span}B$, o, en otras palabras, existen unas funciones suaves γ_1, γ_2 tales que

$$g_1(x(t), t) = B\gamma_1(x(t), t), \quad (3.20)$$

$$g_2(x(t-h), t) = B\gamma_2(x(t-h), t), \quad (3.21)$$

$$\|\gamma_1(x(t), t)\| \leq q_1\|x(t)\| + p_1, \quad q_1, p_1 > 0, \quad (3.22)$$

$$\|\gamma_2(x(t-h), t)\| \leq q_2\|x(t-h)\|, \quad q_2 > 0. \quad (3.23)$$

Asumimos las siguientes condiciones iniciales para el sistema (3.17)

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \varphi \in \mathbf{C}[-h, 0], \quad (3.24)$$

De tal manera que, el problema de control ahora consiste en la robustificación al diseñar el control del sistema (3.18) con respecto a las incertidumbres g_1, g_2 : de tal manera que debemos encontrar la ley de control tal que las trayectorias del sistema (3.17) con condiciones iniciales (3.24) coincidan con la trayectoria $x_0(t)$ con las mismas condiciones iniciales (3.24).

3.2.2 Solución al problema de robustificación a través de modos deslizantes integrales.

Definiremos una ley de control para el sistema (3.17) de la siguiente manera

$$u(t) = u_0(x(t)) + u_1(t), \quad (3.25)$$

donde $u_0(x(t))$ es la ley de control de retroalimentación sin memoria diseñada para (3.18), y $u_1(t) \in \mathbf{R}^m$ es el control generado con modos deslizantes integrales en algún espacio de estado auxiliar para rechazar las incertidumbres g_1, g_2 . La sustitución de la ley de control (3.25) en el sistema (3.17) produce

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & f(x(t), x(t-h)) + Bu_0(x(t)) + Bu_1(t) + \\ & g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Definamos la función auxiliar

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (3.27)$$

donde $s_0(x(t)) \equiv u_0(x(t))$, y $z(t)$ es una variable auxiliar que se define a continuación. Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & \dot{z}(t) + G(x(t))[f(x(t), x(t-h)) + Bs_0(x(t)) \\ & + B(\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-h), t)) + Bu_1], \end{aligned} \quad (3.28)$$

dónde $G(x(t)) = ds_0(x(t))/dx$.

La filosofía del control por modos deslizantes integrales es la siguiente: el procedimiento para lograr que $x(t) \equiv x_0(t)$ para todo $t \in (-h, \infty)$, el modo deslizante debe estar conformado sobre la superficie s , dado que el siguiente compensador de perturbaciones debe obtenerse del movimiento de modos deslizantes

$$Bu_{1eq} = -B\gamma_1(x(t), t) - B\gamma_2(x(t-h), t). \quad (3.29)$$

Definamos la variable auxiliar z como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = -G(x(t))[f(x(t), x(t-h)) + Bu_0(x(t))] \quad (3.30)$$

con la condición inicial $z(0) = -s_0(x(0))$. Entonces la ecuación de la superficie deslizante toma la forma

$$\dot{s}(t) = G(x(t))[B(\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-h), t)) + Bu_1]. \quad (3.31)$$

Finalmente, para realizar el modo deslizante, el control relevador es diseñado:

$$u_1 = -M(x(t), x(t-h), t) \text{sign}[s(t)], \quad (3.32)$$

donde $M = q(\|x(t)\| + \|x(t-h)\|) + p$, $q > q_1, q_2$, $p > p_1$.

La siguiente sección presenta la robustificación del filtro óptimo diseñado, respecto al caso de una señal de observación corrompida con una perturbación desconocida no Gaussiana y, posiblemente, determinística, la cual no contiene información y debe ser suprimida para garantizar la calidad de la estimación. Diseñaremos este filtro robusto utilizando la asignación de modos deslizantes a la superficie de la observación y subsecuentemente los movimientos hacia y a lo largo de esta superficie utilizando el control relevador.

3.3 Diseño de un filtro óptimo y robusto para sistemas con retardo en las observaciones aplicando la técnica de modos deslizantes integrales.

3.3.1 Planteamiento del Problema.

Sea el proceso de observación (3.2) corrompido con perturbaciones desconocidas

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + B(t)dW_2(t) + (g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t))dt, \quad (3.33)$$

donde $g_1(x(t), t)$ y $g_2(x(t-h), t)$ son ruidos no Gaussianos y, posiblemente, determinísticos los cuales no llevan información y dependen de los estados actual y con retardo. Esta clase de perturbaciones en la observación ha sido frecuentemente encontrada en las señales electromagnéticas (ver [109]), cuando un impulso parásito del transmisor afecta la señal recibida directamente y después de la reflexión en el objetivo, grabándose con el mismo retardo que el de la onda esperada. Tales perturbaciones obviamente deterioran la calidad de la estimación y deben ser eliminadas.

Para este propósito, asumamos que la perturbación satisface las siguientes condiciones (note que no estamos asumiendo las condiciones de acoplamiento)

$$\|g_1(x(t), t)\| \leq q_1\|x(t)\| + p_1, \quad q_1, p_1 > 0, \quad (3.34)$$

$$\|g_2(x(t-h), t)\| \leq q_2 \|x(t-h)\|, \quad q_2 > 0, \quad (3.35)$$

$$g_1(x(t_0), t_0) = g_2(x(t_0-h), t_0) = 0, \quad (3.36)$$

proporcionándonos restricciones razonables en su crecimiento y asumiendo que no hay perturbaciones en el momento inicial. La última condición $g_1(x(t_0), t_0) = g_2(x(t_0-h), t_0) = 0$ significa actualmente que las perturbaciones son consideradas centradas con respecto a su valor inicial en el punto t_0 y esas constantes iniciales están incluidas en el término conocido $A_0(t)$; en otras palabras, el error sistemático inicial es conocido. El proceso de observación (3.33) puede ser separado en la parte útil y en la parte parásita, $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$, donde $dy_0(t) = (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + B(t)dW_2(t)$ y $dy_p(t) = (g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t))dt$. Si solo utilizamos la señal útil $y_0(t)$, el estimado ideal $m_0(t)$ está dado por la ecuación (3.10)

$$dm_0(t) = a_0(t) + a(t)m_0(t) + P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy_0(t) - (A_0(t) + A(t)m_0(t-h))dt). \quad (3.37)$$

Esta última ecuación define la trayectoria deseada, donde el estimado $m(t)$ basado en las observaciones corrompidas $y(t)$; debemos sustituirla en (3.10). En este punto, el problema es sugerir un ajuste de sintonización fina $y_1(t)$ tal que, al agregarlo a las observaciones actuales $y(t)$, nos garantice convergencia del estimado corrompido $m(t)$ respecto al estimado ideal $m_0(t)$.

La siguiente técnica de modos deslizantes resuelve este problema. Sea $s(t) = 0$ una superficie deslizante tal que se defina en tal forma que la convergencia de esta superficie implique la convergencia del estimado perturbado $m(t)$ al ideal $m_0(t)$.

Definamos $s(t)$ como $s(t) = z(t) + s_0(t)$, donde $s_0(t) = m(y(t))$ y $z(t)$ es una variable auxiliar a ser asignada. Las condiciones de movimiento a lo largo del manifold deslizante, $ds(t)/dt = 0$, generan:

$$ds(t) = dz(t) + G(t)[(A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + B(t)dW_2(t) + \\ (g_1(x(t), t)dt + g_2(x(t-h), t) + y_{1eq}(t))dt] = 0, \quad (3.38)$$

donde $G(t) = ds_0(y(t))/dy$, y $y_1(t)$ es la sintonización fina a las observaciones cuyos valores en la superficie deslizante se denotan por $y_{1eq}(t)$. El valor de esta sintonización fina en la superficie deslizante

debe ser igual a:

$$y_{1eq}(t) = -(g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t)), \quad (3.39)$$

esto compensará ambas perturbaciones desconocidas. Para realizar esto, en vista de $ds(t)/dt = dz(t)/dt + ds_0(t)/dt$, la variable auxiliar $z(t)$ está asignada por la ecuación

$$dz(t) = -G(t)[(A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + B(t)dW_2(t)], \quad (3.40)$$

con las condiciones iniciales $z(t_0) = -s_0(x(t_0)) = -E[x(t_0) | F_{t_0}^Y]$, las cuales nos aseguran que $G(t)[\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t)] = 0$ y $m(t) = m_0(t)$, dado que las condiciones iniciales para $m(t)$ y $m_0(t)$ son las mismas : $m(t_0) = m_0(t_0) = E[x(t_0) | F_{t_0}^Y]$. Aquí, la trayectoria perturbada coincide con la deseada, en la superficie deslizante $s(t) = 0$, si la ecuación (3.39) se satisface en esta superficie. En este sentido, la ecuación (3.39) define la función de la superficie deslizante $s(t)$ a través de la ecuación

$$\dot{s}(t) = G(t)[g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t) + y_{1eq}(t)], \quad (3.41)$$

asumamos que este modo deslizante debe alcanzarse en la superficie $s(t) = 0$. Lo único que falta por hacer ahora es diseñar el ajuste fino $y_1(t)$ que nos permita alcanzar la superficie deslizante $s(t) = 0$ en un tiempo finito y lleve a $y_{1eq}(t)$ a él. Esto puede hacerse utilizando diseño de control relevador convencional en la forma

$$y_1(t) = -M(x(t), x(t-h), t)sign[s(t)], \quad (3.42)$$

where $M = q(|x(t)| + |x(t-h)|) + p$, $q > q_1, q_2$, $p > p_1$.

3.3.2 Algoritmo solución.

Entonces, el algoritmo de robustificación se define a continuación. Para robustificar el filtro óptimo obtenido en (3.10),(3.14) con retardo en las observaciones y perturbaciones $g_1(x(t), t)$ y $g_2(x(t-h), t)$ en (3.33), las observaciones corrompidas $y(t)$ deben ser corregidas adicionándole un término $y_1(t)$ el cual se asigna

$$y_1(t) = -M(x(t), x(t-h), t)sign[s(t)], \text{ donde}$$

$$s(t) = z(t) + s_0(t),$$

$s_0(t) = m(y(t))$ y $m(t)$ satisface la ecuación (3.10),

$z(t)$ satisface la ecuación diferencial $dz(t) = -G(t)[(A_0(t)+A(t)x(t-h))dt+B(t)dW_2(t)] = -G(t)dy_0(t)$

con la condición inicial $z(t_0) = -s_0(x(t_0)) = -E[x(t_0) | F_{t_0}^Y]$, donde $y_0(t)$ es una realización con valor *a priori* conocido de la observación ideal no corrompida, y

$$G(t) = ds_0(y(t))/dy.$$

El algoritmo de robustificación diseñado asegura la coincidencia del estimado obtenido sobre las observaciones ideales (3.2) y las observaciones corrompidas (3.33) para todo $t \in (-h, \infty)$.

3.4 Ejemplo.

Los siguientes dos sistemas han sido seleccionados para verificar el desempeño de los algoritmos de filtrado robusto obtenidos por simulaciones. El primer sistema sin retardo está definido por la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad x(0) = 1, \quad (3.43)$$

y las observaciones

$$y(t) = x(t) + \psi(t) + (\exp(3t) - 1), \quad (3.44)$$

donde $g_1 = \exp(3t) - 1$ es una perturbación parásita y $\psi(t)$ es un ruido blanco Gaussiano. El segundo sistema con retardo en las observaciones está dado por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad (3.45)$$

$$x(t) = 1, \text{ for } t \in [1, 0]$$

y las observaciones

$$y(t) = x(t-1) + \psi(t) + (\exp(3t) - 1), \quad (3.46)$$

donde $g_2 = \exp(3t) - 1$ es una perturbación parásita y $\psi(t)$ es un ruido blanco Gaussiano. Los ruidos blancos en (3.44) y (3.46) están realizados como las funciones Matlab de ruido blanco Gaussiano en las simulaciones en ambos casos.

Dado que las observaciones (3.44) y (3.46) contienen perturbaciones parásitas, la observación ideal y_0 sirve para propósitos de diseño como filtro óptimo de referencia y es definido por

$$y_0(t) = x(t) + \psi(t), \quad (3.47)$$

para el sistema sin retardo, y por

$$y_0(t) = x(t-1) + \psi(t), \quad (3.48)$$

para el sistema con retardo. El filtro de referencia de Kalman-Bucy para el estado (3.43) sobre las observaciones (3.47) toma la forma

$$\dot{m}_0(t) = -m_0(t) + P(t)[y_0(t) - m_0(t)], \quad m_0(0) = 0.5, \quad (3.49)$$

$$\dot{P}(t) = -2P(t) - P^2(t), \quad P(0) = 0.5,$$

donde las condiciones iniciales para el estimado y su varianza son seleccionadas igual a 0.5. Las gráficas del estado (3.43) y del estimado óptimo ideal (3.49) se muestran en la Figura 1. El filtro óptimo de referencia (3.15)–(3.16) toma la siguiente forma para el estado (3.45) sobre las observaciones (3.48)

$$\dot{m}_0(t) = -m_0(t) + P(t) \exp(-1)[y_0(t) - m_0(t-1)],$$

$$m_0(t) = 0.5, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\dot{P}(t) = -2P(t) - (P(t) \exp(-1))^2, \quad P(0) = 0.5, \quad (3.50)$$

donde las condiciones iniciales para el estimado y su varianza son seleccionadas iguales a 0.5. Las gráficas del estado (3.45) y el estimado óptimo ideal (3.50) son presentadas en la Figura 2.

Asumamos ahora que las perturbaciones parásitas están presentes en las observaciones (3.44) y (3.46). En este caso, el filtro de Kalman-Bucy dado por el estado (3.43) sobre las observaciones (3.44) toma la forma

$$\dot{m}(t) = -m(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad m(0) = 0.5,$$

$$\dot{P}(t) = -2P(t) - P^2(t), \quad P(0) = 0.5. \quad (3.51)$$

Las gráficas del estado (3.43) y del estimado (3.51) se muestran en la Figura 3. El filtro (3.15)–(3.16) toma la siguiente forma para el estado (3.45) sobre las observaciones (3.46)

$$\dot{m}(t) = -m(t) + P(t) \exp(-1)[y(t) - m(t-1)],$$

$$m(t) = 0.5, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\dot{P}(t) = -2P(t) - (P(t) \exp(-1))^2, \quad P(0) = 0.5. \quad (3.52)$$

Las gráficas del estado (3.45) y su estimado (3.52) son mostradas en la Figura 4.

Como podemos observar, los estimados (3.51) y (3.52) divergen significativamente de los valores reales de los vectores de estado, si los valores de los ruidos parásitos g_1 y g_2 son suficientemente grandes. Para mejorar la calidad de la estimación, ahora aplicaremos el algoritmo de robustificación.

En ambos casos, con y sin retardos, el algoritmo para asignar el compensador y_1 es el siguiente: $y_1(t) = -M \text{sign}[s(t)]$, donde $s(t)$ tiene la siguiente expresión $s(t) = z(t) + s_0(t)$ y $s_0(t) = m(y(t))$, Esto significa que los estimados satisfacen (3.51) y (3.52), respectivamente. La variable auxiliar $z(t)$ es asignada $\dot{z}(t) = -P(t)y_0(t)$, $z(0) = 0$, para el sistema sin retardo, esto significa que se conoce *a priori* la realización de la observación ideal $y_0(t)$ la cual satisface (1.47) y la varianza $P(t)$ satisface la segunda ecuación en (3.49), dado $G(t) = ds_0(y(t))/dy = P(t)$. Para el sistema con retardo en las observaciones, la variable auxiliar $z(t)$ está asignada como $\dot{z}(t) = -P(t) \exp(-1)y_0(t)$, $z(0) = 0$, significando un cierto conocimiento *a priori* de la realización de las observaciones ideales $y_0(t)$ que satisfacen (3.48), y la varianza $P(t)$ satisface la segunda ecuación en (3.50), dado $G(t) = ds_0(y(t))/dy = P(t) \exp(-1)$. La ganancia M esta seleccionada como $M = \exp(2t)$ en ambos casos.

Entonces, el filtro de modos deslizantes robusto para el sistema sin retardo toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= -m(t) + P(t)[y(t) + y_1(t) - m(t)], \quad m(0) = 0.5, \\ \dot{P}(t) &= -2P(t) - P^2(t), \quad P(0) = 0.5. \end{aligned} \quad (3.53)$$

La gráfica del estimado (3.53) es dada en la Figura 5 versus las gráficas del estado real (3.43) y el estimado ideal (3.49). es interesante notar que el estimado de modos deslizantes robusto (3.53) es más cercano al estado real en comparación con el estimado ideal (3.49), posiblemente debido a cierta resonancia de interacción del ruido blanco y perturbaciones parásitas.

Consecuentemente, el filtro de modos deslizantes robusto para el sistema con retardo toma la forma

$$\dot{m}(t) = -m(t) + P(t) \exp(-1)[y(t) + y_1(t) - m(t-1)],$$

$$m(t) = 0.5, t \in [-1, 0],$$

$$\dot{P}(t) = -2P(t) - (P(t) \exp(-1))^2, \quad P(0) = 0.5. \quad (3.54)$$

La gráfica del estimado (3.54) es mostrada versus la gráfica del estado real (3.45) y su estimado ideal (3.50), en la Figura 6. Aunque el desempeño del estimado por modos deslizantes integrales (3.54) es un poco peor respecto al estimado ideal (1.50), el estimado (3.54) converge al estado real (3.45), debido a esto mejora significativamente el desempeño del estimado corrompido (3.52). Note que dadas las condiciones iniciales $z(0) = 0$ para $z(t)$ no son iguales para $-m_0(0) = -0.5$ en este ejemplo, las figuras 5 y 6 presentan los filtros convencionales de modos deslizantes para el estimado robustificado $m(t)$, no para el caso integral.

3.5 Resultados de las simulaciones.

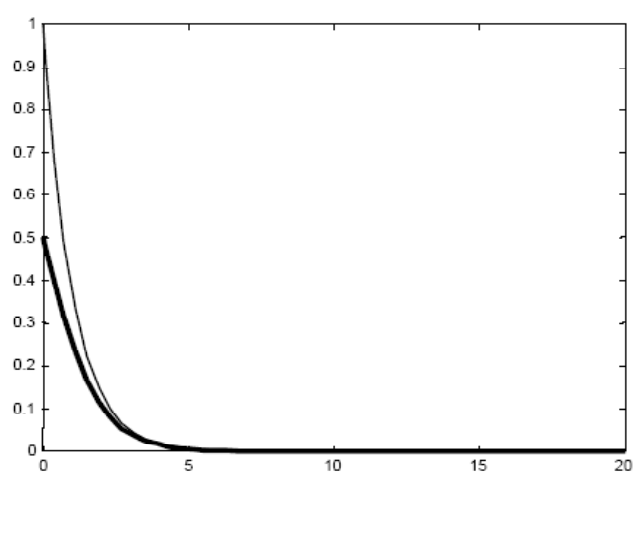


Figura 1: La gráfica del estado (3.43) línea de 1 punto, y el estimado ideal óptimo de Kalman-Bucy (3.49) con observaciones sin retardo, línea de 2.25 puntos.

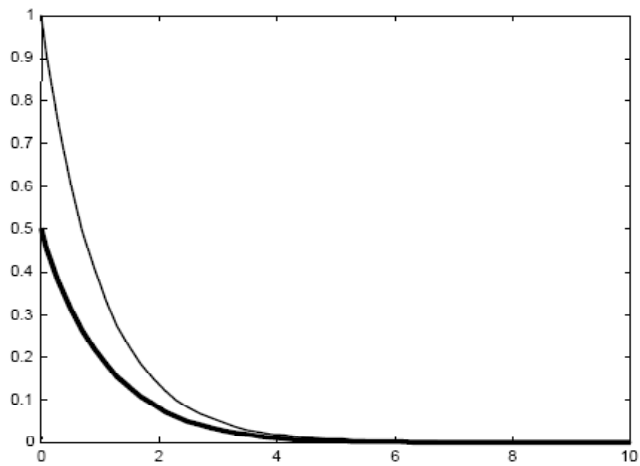


Figura 2: La gráfica del estado (3.45) línea de 1 punto, y el estimado ideal óptimo (3.50) del filtro de la sección 3 con observaciones con retardo, línea de 2.25 puntos.

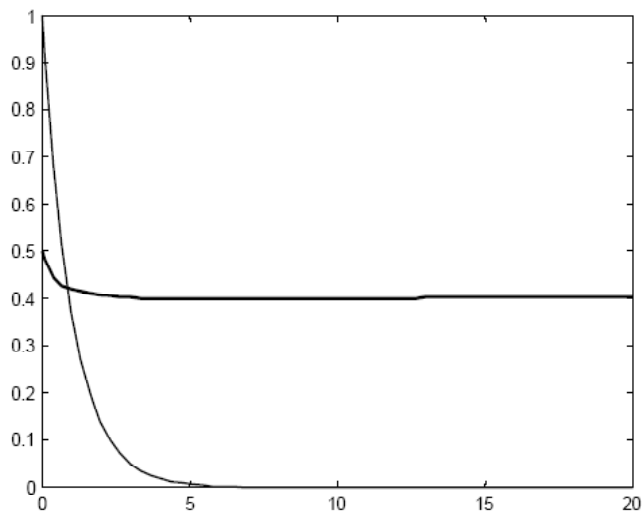


Figura 3: La gráfica del estado (3.43) línea de 1 punto, y el estimado (3.51) calculado sobre las observaciones (3.44) sin retardo, con perturbaciones parásitas, línea de 1.5 puntos.

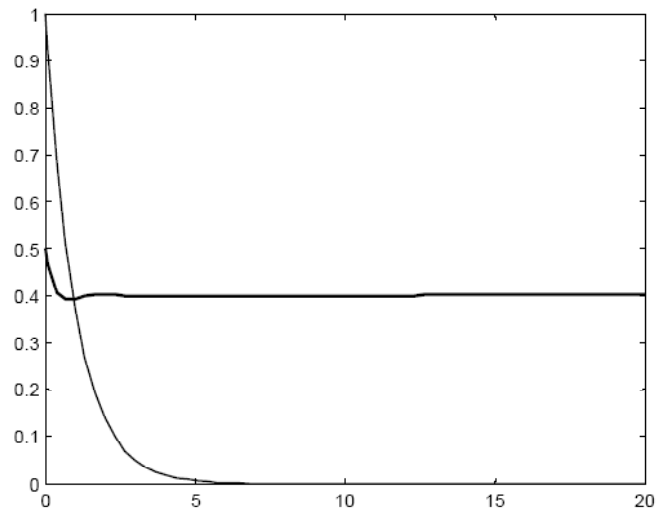


Figura 4: La gráfica del estado (3.45) línea de 1 punto, y el estimado (3.52) calculado sobre las observaciones (3.46) sin retardo, y con perturbaciones parásitas, línea de 1.5 puntos.

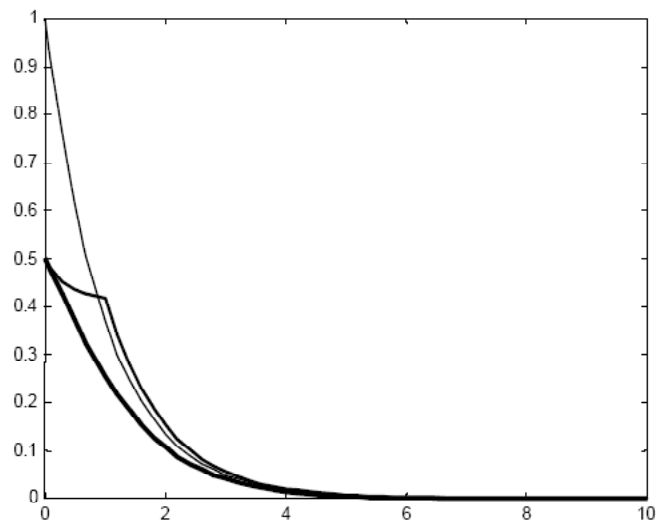


Figura 5: La gráfica del estado (3.43) línea de 1 punto, el estimado ideal óptimo de Kalman-Bucy (3.49) sobre observaciones sin retardo línea de 2.25 puntos, y el estimado robusto por MDI, (3.53) calculado sobre las observaciones compensadas sin retardo, línea de 1.5 puntos.

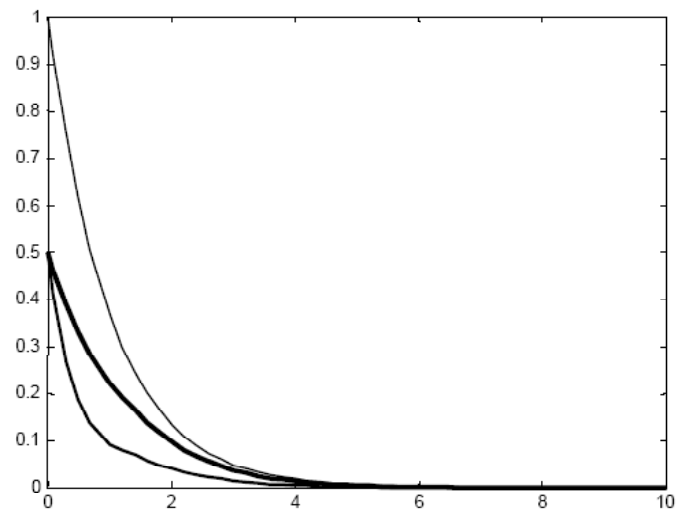


Figura 6: Las gráficas del estado (3.45) línea de 1 punto, y el estimado ideal óptimo (3.50) del filtro de la sección 3 sobre observaciones con retardo línea de 2.25 puntos, y el estimado robusto por MDI, (3.54) calculado sobre las observaciones compensadas con retardo, línea de 1.5 puntos.

Capítulo 4.

Diseño de un control óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.

4.1 Problema de control óptimo con retardo fijo en la entrada de control.

4.1.1 Planteamiento del Problema.

Considere un sistema lineal con retardo en la entrada de control:

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)u(t-h), \quad (4.1)$$

Con condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [-h, 0]$, donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $u(t) \in R^m$ es la variable de control, y $\phi(s)$ es una función continua a trozos dada en el intervalo $[-h, 0]$. La existencia de la solución única de la ecuación (4.1) es entonces garantizada por el teorema de Carathéodory (ver, por ejemplo, [39]). La función de costo cuadrática a ser minimizada se define como:

$$J = \frac{1}{2}[x(T) - x_1]^T \psi [x(T) - x_1] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds, \quad (4.2)$$

dónde x_1 es un vector dado, R es positiva y ψ , L son matrices simétricas nonnegativas definidas, y $T > t_0$ es un cierto momento.

El problema de control óptimo consiste en encontrar la ley de control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (4.1). Para encontrar la solución a este problema de control óptimo, aplicaremos el principio de dualidad [40]. En el caso de sistemas lineales sin retardo, si el control óptimo existe en el problema de control óptimo para un sistema lineal con una función de costo cuadrática J , el filtro óptimo existe para el sistema lineal dual con perturbaciones Gaussianas y pueden encontrarse a partir de la solución del problema de control óptimo, utilizando simples transformaciones algebraicas. (Dualidad entre las matrices de ganancia y entre las ecuaciones de la matriz de ganancia y las ecuaciones de la

varianza), y viceversa (vease [40]). Tomando en cuenta la dualidad física de los problemas de filtrado y control, la última conjetura debe ser válida para todos los casos dónde el control óptimo, o viceversa el filtro óptimo, existe en una forma cerrada de dimensión finita [11]. Esta proposición es ahora aplicada al problema de filtrado óptimo para sistemas lineales cuyos estados tengan observaciones con retardos, lo cual es lo dual al problema de control óptimo establecido por (4.1),(4.2), en cuyo caso el filtro óptimo ya ha sido obtenido.(ver [13]).

4.1.2 Filtro óptimo para ecuación de estado lineal y observaciones lineales con retardo.

Ahora, recordaremos para propósitos de referencia las ecuaciones de filtrado óptimo para una ecuación de estado lineal con observaciones lineales con retardo obtenidas en [13].

Sea un proceso aleatorio no observable $x(t)$, descrito por una ecuación diferencial ordinaria, cuya dinámica de estado esta dada por:

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.3)$$

y un proceso de observación dado por una ecuación diferencial con retardo :

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + F(t)dW_2(t), \quad (4.4)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $y(t) \in R^m$ es el proceso de observation, la condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que $x_0, W_1(t), W_2(t)$ son independientes.El proceso de observación $y(t)$ depende del estado retardado $x(t-h)$, dónde h es un desplazamiento que nos representa un retardo fijo, el cual asume que la colección de información en el estado del sistema para propósitos de observación es posible sólo después de un cierto tiempo h . La función vectorial $a_0(s)$ describe el efecto de las entradas del sistema, controles y perturbaciones. Se asume que $A(t)$ es una matriz diferente de cero y $F(t)F^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (4.3), (4.4) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

El problema de estimación es encontrar el estimado de el estado del sistema $x(t)$ basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, el cual minimiza la norma Euclídeana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) | F_t^Y] \quad (4.5)$$

en cada instante t . En otras palabras, nuestro objetivo es encontrar la esperanza condicional

$$m(t) = \hat{x}(t) = E(x(t) | F_t^Y). \quad (4.6)$$

Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y] \quad (4.7)$$

es la varianza del error de la estimación.

La solución al problema establecido es dado por el siguiente sistema ecuaciones de filtrado, el cual es cerrado con respecto a las variables introducidas, $m(t)$ y $P(t)$:

$$dm(t) = (a_0(t) + a(t)m(t))dt + P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t) \times \\ (F(t)F^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt). \quad (4.8)$$

$$dP(t) = (P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(t)b^T(t) - \\ P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1} \times \\ A(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a(s)ds\right)P(t))dt. \quad (4.9)$$

El sistema de ecuaciones de filtrado (4.8) y (4.9) debe de complementarse con las condiciones iniciales:

$$m(t_0) = E[x(t_0) | F_{t_0}^Y] \quad (4.10)$$

y

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]. \quad (4.11)$$

Debemos notar, que este sistema es similar al filtro convencional del Kalman-Bucy, excepto los ajustes para los retardos en las ecuaciones del estimado y varianza, calculadas a partir de la fórmula de Cauchy para la ecuación de estado lineal.

En el caso de tener una matriz constante a en la ecuación de estado, el filtro óptimo toma la forma especialmente simple, tomando en cuenta que $(\exp(-\int_{t-h}^t a^T ds) = \exp(-a^T h))$

$$dm(t) = (a_0(t) + am(t))dt + P(t) \exp(-a^T h) A^T(t) \times \quad (4.12)$$

$$(F(t)F^T(t))^{-1} (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt),$$

$$dP(t) = (P(t)a^T + aP(t) + b(t)b^T(t) - \quad (4.13)$$

$$P(t) \exp(-a^T h) A^T(t) (F(t)F^T(t))^{-1} A(t) \exp(-ah) P(t)) dt.$$

Entonces, las ecuaciones (4.8) o (4.12) para el estimado óptimo $m(t)$ y las ecuaciones (4.9) y (4.13) para su matriz de covarianza $P(t)$ forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado en el caso de ecuaciones de estado lineales y observaciones lineales con retardo.

4.1.3 Solución al problema de control óptimo.

Retomemos el problema de control óptimo para la ecuación de estado lineal (4.1) con retardo en la entrada de control lineal y la función de costo (4.2). Este problema es el dual al problema de filtrado para el estado lineal (4.3) con retardo en las observaciones lineales (4.4). Puesto que la matriz de ganancia del filtro óptimo en (4.8) esta dada por:

$$K_f = P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s) ds) A^T(t) (F(t)F^T(t))^{-1}, \quad (4.14)$$

la matriz de ganancia en el problema de control óptimo toma la forma de su transpuesta dual:

$$K_c = (R(t))^{-1} B^T(t) \exp(\int_{t-h}^t a^T(s) ds) Q(t), \quad (4.15)$$

la ley de control óptima está dada por:

$$u_{opt}(t) = K_c x = (R(t))^{-1} B^T(t) \exp(\int_{t-h}^t a^T(s) ds) Q(t) x(t), \quad (4.16)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución a la siguiente ecuación dual a la ecuación de la varianza (4.9)

$$\begin{aligned} dQ(t) = & (-a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - \\ & Q(t) \exp(\int_{t-h}^t a(s) ds) B(t) R^{-1}(t) \times \\ & B^T(t) \exp(\int_{t-h}^t a^T(s) ds) Q(t)) dt, \end{aligned} \quad (4.17)$$

con la condición terminal $Q(T) = \psi$.

Al susutituir la ecuación de control óptimo (4.16) en la ecuación de estado (4.1), obtenemos la ecuación de estado óptimamente controlada:

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)(R(t))^{-1}B^T(t) \times \exp\left(\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)Q(t)x(t)dt, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.18)$$

Los resultados obtenidos en esta sección , basados en el principio de dualidad, son demostrados (la prueba es dada en la sección de demostración) aplicando la ecuación general del principio máximo de Pontryagin [63] [85]. (La programación dinámica de Bellman [26] [79] puede servir como un método de demostración alternativa.). Debe notarse, sin embargo, que la aplicación del principio del máximo al presente caso nos dará sólo las ecuaciones de estado y co-estado, es decir, no nos provee una forma explícita del control óptimo o vector de co-estado. Así que, la actual aproximación generada por el principio de dualidad nos brinda una forma explícita del control óptimo y del vector de co-estado, los cuales deben ser luego sustituidos en las ecuaciones dadas por las herramientas óptimas rigurosas y verificados.

4.2 Robustificación de un sistema de control con retardo a través de modos deslizantes integrales.

4.2.1 Planteamiento del problema.

Sea el sistema de control con retardo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)u(t-h), \quad (4.19)$$

Dónde $x \in R^n$ es el vector de estado y $u(t-h) \in R^m$ es la entrada de control de rango $B = m$, supondremos la existencia y diferenciabilidad del estado x en la ley de control $u_0(x(t-h))$, tal que la dinámica del sistema ideal de lazo cerrado toma la forma:

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t)) + B(t)u_0(x_0(t-h)), \quad (4.20)$$

y tiene las propiedades deseadas.

Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el sistema (4.19) opera bajo condiciones de incertidumbre que pueden ser generadas por variaciones en los parámetros y perturbaciones externas. Consideremos

entonces, como trayectoria real del sistema de control en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)u + g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t), \quad (4.21)$$

donde g_1, g_2 son funciones suaves que representan las incertidumbres, perturbaciones, y no-linealidades del sistema (4.19). Para g_1, g_2 , supondremos que se satisfacen las condiciones de acoplamiento estándar: $g_1, g_2 \in \text{span}B$.

En otras palabras, supondremos que existen las funciones suaves γ_1, γ_2 tales que

$$g_1(x(t), t) = B(t)\gamma_1(x(t), t), \quad (4.22)$$

$$g_2(x(t-h), t) = B(t)\gamma_2(x(t-h), t), \quad (4.23)$$

$$\|\gamma_1(x(t), t)\| \leq q_1\|x(t)\| + p_1, \quad q_1, p_1 > 0, \quad (4.24)$$

$$\|\gamma_2(x(t-h), t)\| \leq q_2\|x(t-h)\|, \quad q_2 > 0. \quad (4.25)$$

Asumiremos que el sistema (4.19) satisface las siguientes condiciones iniciales

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad (4.26)$$

donde $\varphi(\theta)$ es una función continua a trozos definida en el intervalo $[-h, 0]$.

Entonces, el problema de control óptimo ahora consiste en robustificar el control diseñado para el sistema (4.20) con respecto a las incertidumbres g_1, g_2 : encontrar tal ley de control que define las trayectorias del sistema (4.21) con condiciones iniciales (4.26) coincidentes con las trayectoria $x_0(t)$ con la misma condición inicial (4.26).

4.2.2 Solución al problema de robustificación a través de modos deslizantes integrales.

Ahora, rediseñaremos la ley de control del sistema (4.19) en la forma:

$$u(t-h) = u_0(x(t-h)) + u_1(t), \quad (4.27)$$

donde $u_0(x(t-h))$ es el control de retroalimentación ideal diseñado para (4.20), y $u_1(t) \in R^m$ es el control con retardo generando un modo deslizante integral en algún espacio auxiliar para rechazar las incertidumbres g_1, g_2 . Sustituyendo la ley de control (4.27) en la dinámica del sistema (4.19) obtenemos:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)u_0(x(t-h)) + B(t)u_1(t) + g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t). \quad (4.28)$$

Definamos la funcion auxiliar

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (4.29)$$

donde $s_0(x(t)) \equiv u_0(x(t))$, y $z(t)$ es la variable auxiliar definida por la ecuación (4.32). Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{z}(t) + G(t)[f(x(t)) + B(t)s_0(x(t-h))] + \\ &B(\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-h), t)) + B(t)u_1(t)], \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $G(t) = ds_0(x(t))/dx(t)$.

La filosofia del control por modos deslizantes es la siguiente:

Para lograr que se cumpla $x(t) \equiv x_0(t)$ para todo $t \in (T, \infty)$, donde T es un cierto momento finito, el modo deslizante debe ser organizado en la superficie $s(t)$, ya que la siguiente compensación de la perturbación debe ser obtenida del movimiento de modo deslizante:

$$B(t)u_{1eq}(t) = -B(t)\gamma_1(x(t), t) - B(t)\gamma_2(x(t-h), t). \quad (4.31)$$

Definiendo la variable auxiliar $z(t)$ como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = -G(t)[f(x(t)) + B(t)u_0(x(t-h))], \quad (4.32)$$

con la condición inicial $z(\theta) = -s_0(\varphi(\theta))$ para $\theta \in [-h, 0]$.

Entonces, la ecuación de la superficie deslizante toma la forma:

$$\dot{s}(t) = G(t)[B(t)(\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-h), t)) + B(t)u_1(t)]. \quad (4.33)$$

Finalmente, para lograr el modo deslizante, el control con retardo es diseñado:

$$u_1(t) = -M(x(t), x(t-h), t)\text{sign}[s(t)], \quad (4.34)$$

donde

$$M = q(\|x(t)\| + \|x(t-h)\|) + p, \quad (4.35)$$

$$q > q_1, q_2, p > p_1.$$

La siguiente sección presenta la robustificación del control óptimo diseñado (4.16). Este regulador robusto es diseñado asignando la superficie de modos deslizantes de acuerdo a (4.29)–(4.30) y subsiguientemente moviendose hacia y a lo largo de esta superficie utilizando el control relevador (4.30).

4.3 Diseño de un control robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.

4.3.1 Planteamiento del problema.

Consideremos nuevamente el sistema lineal (4.1) con retardo en la entrada de control, cuyo desempeño está ahora afectado por incertidumbres suaves g_1, g_2 representando las perturbaciones y no linealidades del sistema (4.1)

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)u(t-h) + g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t) \quad (4.36)$$

con la condición inicial $x(s) = \varphi(s)$, $s \in [-h, 0]$, donde $\varphi(s)$ es una función continua a trozos definida en el intervalo $[-h, 0]$. Asumiremos que las perturbaciones satisfacen las condiciones de acoplamiento estándar

$$g_1(x(t), t) = B(t)\gamma_1(x(t), t), \quad (4.37)$$

$$g_2(x(t-h), t) = B(t)\gamma_2(x(t-h), t), \quad (4.38)$$

$$\|\gamma_1(x(t), t)\| \leq q_1\|x(t)\| + p_1, \quad q_1, p_1 > 0, \quad (4.39)$$

$$\|\gamma_2(x(t-h), t)\| \leq q_2\|x(t-h)\|, \quad q_2 > 0, \quad (4.40)$$

proporcionándonos restricciones razonables para su crecimiento. Utilizaremos la misma función de costo cuadrática (4.2).

El problema es robustificar el control óptimo obtenido (4.16), utilizando el método especificado por las ecuaciones (4.29)–(4.30).

Definamos este nuevo control de la siguiente manera (4.27): $u(t) = u_0(x(t-h)) + u_1(t)$, donde el control óptimo $u_0(x(t-h))$ coincide con (4.16) y la componente de robustificación $u_1(t)$ es obtenida de acuerdo a la ecuación (4.34)

$$u_1(t) = -M(x(t), x(t-h), t)\text{sign}[s(t)], \quad (4.41)$$

$$M = q(\|x(t)\| + \|x(t-h)\|) + p, \quad (4.42)$$

$$q > q_1, q_2, p > p_1. \quad (4.43)$$

Consecuentemente, la función de la superficie de modos deslizantes $s(t)$ se define como

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (4.44)$$

donde

$$s_0(x(t)) = u_0(x(t)) = (R(t))^{-1}B^T(t) \exp\left(\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)Q(t)x(t), \quad (4.45)$$

y la variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con retardo

$$\dot{z}(t) = -G(t)[a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)u_0(x(t-h))], \quad (4.46)$$

con las condiciones iniciales $z(\theta) = -s_0(\varphi(\theta))$ para $\theta \in [-h, 0]$.

De acuerdo a (4.30), la matriz $G(t)$ es definida por:

$$G(t) = ds_0(x(t))/dx(t) = (R(t))^{-1}B^T(t) \exp\left(\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)Q(t), \quad (4.47)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati (4.17).

4.4 Ejemplo.

Esta sección presenta un ejemplo de diseño de un regulador óptimo para un sistema (4.1) sujeto al criterio (4.2) aplicando las ecuaciones (4.16)–(4.17), compararemos este regulador con un regulador óptimo lineal diseñado de tal manera que la matriz Q es seleccionada para un sistema sin retardo, perturbaremos el regulador óptimo obtenido con ruido, y diseñaremos un compensador a través de la técnica de modos deslizantes para la perturbación aplicando el esquema (4.44)–(4.46).

Iniciemos con un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 0.1), \quad (4.48)$$

con la condición inicial $x(s) = 0$ para $s \in [-0.1, 0)$ y $x(0) = 1$.

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 0.25$, que minimice el criterio

$$J = \frac{1}{2}[x(T) - x^*]^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)dt, \quad (4.49)$$

donde $T = 0.25$, y $x^* = 10$ es un valor grande para $x(t)$ *a priori* inalcanzable en el tiempo T .

En otras palabras, el problema de control óptimo es de maximizar el estado $x(t)$ utilizando la mínima energía de control u .

Ahora construiremos primero un regulador para el cual la ley de control óptima y la matriz $Q(t)$ son calculadas de la misma manera como se hace un regulador lineal óptimo para un sistema lineal sin retardo en la entrada de control, esto es $u_{opt}(t) = (R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)x(t)$ (ver [40] como referencia).

Dado que $B(t) = 1$ en (4.48) y $R(t) = 1$ en (4.49), el control óptimo es actualmente igual a

$$u(t) = Q(t)x(t), \quad (4.50)$$

donde $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \quad (4.51)$$

con la condición terminal $Q(T) = \psi$.

Dado que $a(t) = 1$, $B(t) = 1$ en (4.48), y $L = 0$ y $\psi = 1$ en (4.49), esta última ecuación toma la forma

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - (Q(t))^2, \quad Q(0.25) = 1. \quad (4.52)$$

Al sustituir el control óptimo (4.50) en la ecuación (4.48), el sistema controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + Q(t-0.1)x(t-0.1), \quad (4.53)$$

El resultado de aplicar el regulador (4.50),(4.52) al sistema (4.48) es mostrado en la Figura 1, la cual nos muestra las gráficas del estado controlado (4.53) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio adelantado por el valor de 0.1, (4.49) $J(t-0.1)$ en el intervalo $[0.1, T+0.1]$, y el control adelantado por el valor de 0.1 (4.26) $u(t-0.1)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (4.53) y el criterio (4.49) en el momento final $T = 0.25$ son $x(0.25) = 1.5097$ y $J(0.25) = 36.2598$.

Ahora aplicaremos el regulador óptimo (4.3)–(4.4) para sistemas lineales con retardo en la entrada de control para el sistema (4.48).

Dado que $a(t) = 1$, $B(t) = 1$, y $h = 0.1$ en (4.48) y $\psi = 1$, $R(t) = 1$, y $L = 0$ en (4.49), en este caso, $\exp(\int_{t-h}^t a^T(s)ds) = \exp(0.1)$ y la ley de control óptimo (4.16) toma la forma

$$u_{opt}(t) = \exp(0.1)Q(t)x(t), \quad (4.54)$$

donde $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - (\exp(0.1)Q(t))^2, \quad Q(0.25) = 1, \quad (4.55)$$

Al sustituir la ley de control óptimo (4.54) en (4.48), el sistema controlado óptimamente toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + \exp(0.1)Q(t - 0.1)x(t - 0.1), \quad (4.56)$$

El resultado de aplicar el regulador (4.54),(4.55) al sistema (4.48) son mostrados en la Figura 2, la cual presenta las gráficas del estado óptimamente controlado (4.56) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio adelantado por el valor de 0.1, (4.25) $J(t - 0.1)$ en el intervalo $[0.1, T + 0.1]$, y el control óptimo adelantado por el valor de 0.1, (4.54) $u_{opt}(t - 0.1)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores de el estado (4.56) y el criterio (4.54) en el momento final $T = 0.25$ y $x(0.25) = 1.668$ y $J(0.25) = 35.3248$.

La siguiente tarea es introducir una perturbación en el sistema óptimamente controlado (4.56). Esta perturbación determinística es realizada como una constante: $g(t) = -2$. Las condiciones de acoplamiento son válidas debido a que el estado, $x(t)$ y el control $u(t)$ tienen las mismas dimensiones: $dim(x) = dim(u) = 1$. Las restricciones en el crecimiento de la perturbación se satisfacen con $q_1 = 0$ y $p_1 = 2$, dado que $\|g(t)\| = 2$. La ecuación del sistema perturbado (4.56) toma la forma

$$\dot{x}(t) = -2 + x(t) + \exp(0.1)Q(t - 0.1)x(t - 0.1), \quad (4.57)$$

El desempeño del estado del sistema se deteriora significativamente después de introducir la perturbación. La Figura 3 presenta las gráficas del estado perturbado (4.57) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio adelantado por el valor de 0.1, (4.49) $J(t - 0.1)$ en el intervalo $[0.1, T + 0.1]$, y el control adelantado por el valor de 0.1, (4.54) $u(t - 0.1)$ en el intervalo $[0, T]$.

Los valores del estado (4.57) y el criterio (4.54) en el momento final $T = 0.25$ son $x(0.25) = 1.0514$ y $J(0.25) = 40.4596$. El estado (4.57) casi no se incrementa de su valor inicial $x(0) = 1$, aunque este debe ser maximizado, y el valor del criterio casi no se decrementa y llega a tomar un valor mucho mayor que en los casos precedentes.

Finalmente, diseñaremos un control robusto aplicando la técnica de modos deslizantes integrales que compensará la perturbación introducida. La nueva ecuación de estado controlada es:

$$\dot{x}(t) = -2 + x(t) + \exp(0.1)Q(t - 0.1)x(t - 0.1) + u_1(t), \quad (4.58)$$

donde el compensador $u_1(t)$ es obtenido de acuerdo a (4.34)

$$u_1(t) = -M(x(t), x(t-h), t) \text{sign}[s(t)], \quad (4.59)$$

La superficie de modos deslizantes $s(t)$ es definida por (4.44)

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (4.60)$$

donde

$$s_0(x(t)) = u_0(x(t)) = \exp(0.1)Q(t)x(t), \quad (4.61)$$

y la variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con retardo

$$\dot{z}(t) = -G(t)[x(t) + u_0(x(t-h))] = -G(t)[x(t) + \exp(0.1)Q(t-0.1)x(t-h)], \quad (4.62)$$

con la condición inicial $z(s) = 0$ para $s \in [-0.1, 0)$ y $z(0) = -1$.

De acuerdo con (4.30), la matriz $G(t)$ es igual a

$$G(t) = ds_0(x(t))/dx(t) = \exp(0.1)Q(t), \quad (4.63)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati (4.55).

Al introducir el compensador (4.59) en la ecuación de estado (4.58), es mejorado el desempeño del estado del sistema. La Figura 4 presenta las gráficas del estado compensado (4.58) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio adelantado por el valor de 0.1, (4.25) $J(t-0.1)$ en el intervalo $[0.1, T+0.1]$, y la suma del control adelantado por el valor de 0.1, (4.54) y del compensador (4.59), $u(t-0.1) + u_1(t)$, en el intervalo $[0, 0.25]$. Los valores del estado (4.58) y el criterio (4.49) en el momento final $T = 0.25$ son $x(0.25) = 1.6779$ y $J(0.25) = 36.9207$.

De esta manera, el valor del estado controlado después de aplicar el compensador (4.59) es insignifican- temente menor respecto al valor obtenido del regulador óptimo (4.54)–(4.55) para sistemas lineales con retardo en la entrada de control, y mucho mejor que los valores obtenidos para el sistema perturbado (4.57). Por supuesto, el valor del criterio aquí es peor que el obtenido para el regulador óptimo (aunque es 70 % mejor en comparación al estado perturbado), dado que una energía de control adicional es requerida para suprimir la perturbación.

4.4 Resultados de las simulaciones.

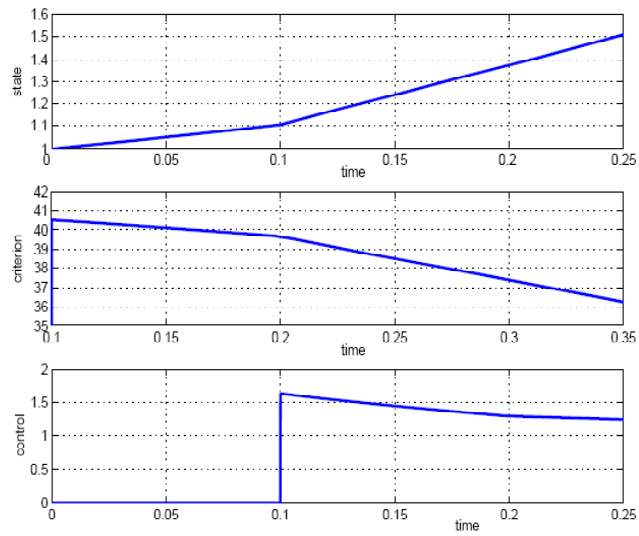


Figura 1: Desempeño del mejor regulador lineal disponible para sistemas sin retardo. Gráficas del estado controlado (4.53) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.25]$, el criterio (4.49) $J(t - 0.1)$ adelantado 0.1 en el intervalo $[0.1, 0.35]$, y el control, adelantado 0.1, (4.50) $u(t - 0.1)$ en el intervalo $[0, 0.25]$.

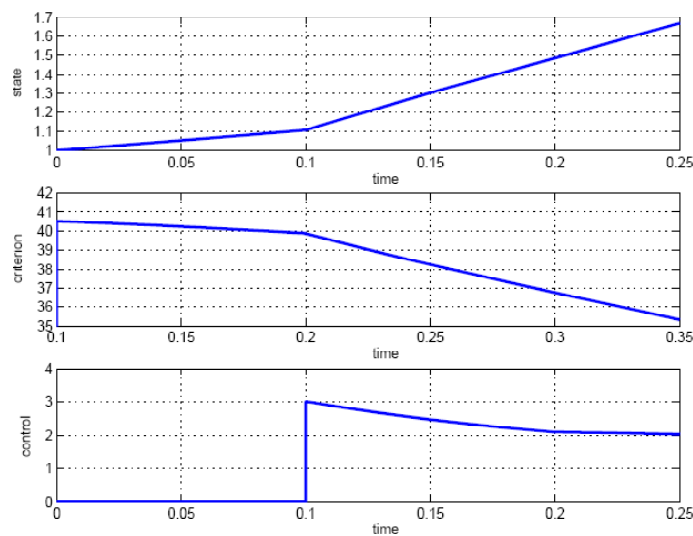


Figura 2: Desempeño del regulador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada de control. Gráficas del estado óptimamente controlado (4.56) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.25]$, el criterio (4.49) $J(t - 0.1)$ adelantado 0.1 en el intervalo $[0.1, 0.35]$, y el control óptimo, adelantado 0.1, (4.54) $u_{opt}(t - 0.1)$ en el intervalo $[0, 0.25]$.

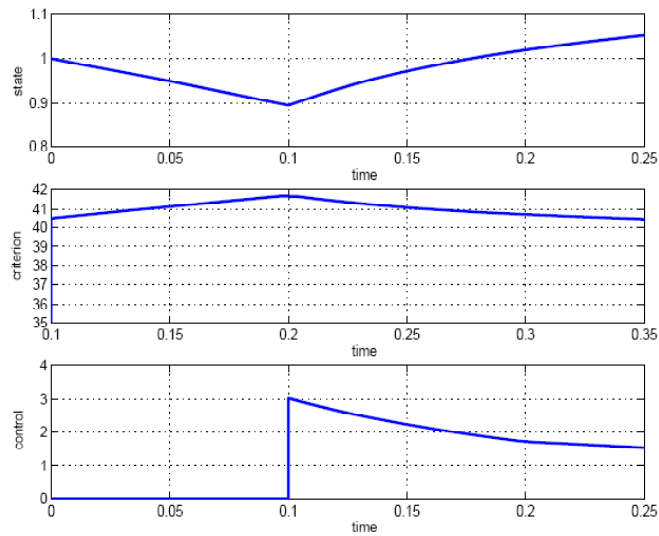


Figura 3: Desempeño del sistema controlado en presencia de perturbaciones. Gráficas del estado perturbado (4.57) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.25]$, el criterio (4.49) $J(t - 0.1)$ adelantado 0.1 en el intervalo $[0.1, 0.35]$, y el control, adelantado 0.1, (4.54) $u(t - 0.1)$ en el intervalo $[0, 0.25]$.

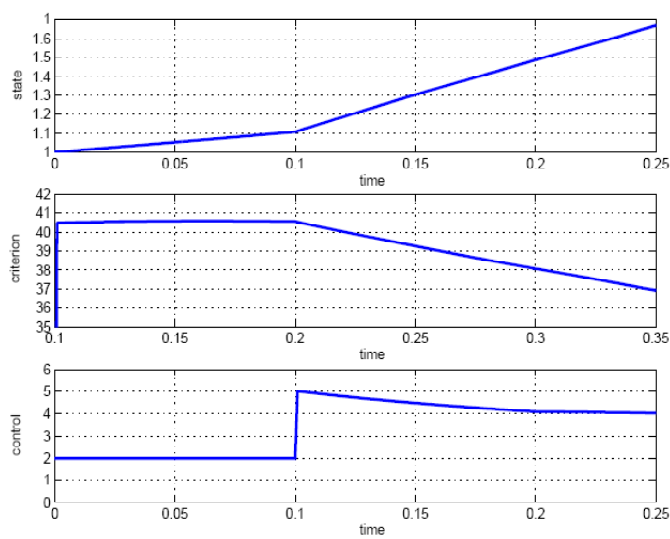


Figura 4: Desempeño del sistema controlado después de aplicar el compensador robusto diseñado por MDI. Gráficas del estado compensado (4.58) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.25]$, el criterio (4.49) $J(t - 0.1)$ adelantado 0.1 en el intervalo $[0.1, 0.35]$, y la suma del control, adelantado 0.1, (4.54) y el compensador (4.59), $u(t - 0.1) + u_1(t)$, por MDI, en el intervalo $[0, 0.25]$.

4.5 Demostraciones.

Prueba de la solución al problema de control óptimo.- Definamos la función Hamiltoniana, [45] [85] para el problema del control óptimo (4.1),(4.2) como:

$$H(x, u, q, t) = u^T R(t)u + x^T L(t)x + q^T [a_0(t) + a(t)x + B(t)u_1(u)], \quad (4.64)$$

donde $u_1(u) = u(t-h)$. Aplicando las condiciones del principio del máximo $\partial H/\partial u = 0$ a esta función Hamiltoniana específica (4.64) obtenemos

$$\partial H/\partial u = 0 \Rightarrow R(t)u(t) + (\partial u_1(t)/\partial u)^T B^T(t)q(t) = 0. \quad (4.65)$$

Denotemos $(\partial u_1(t)/\partial u) = M(t)$, la ley de control óptima es obtenida:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)M^T(t)B^T(t)q(t). \quad (4.66)$$

Tomando en cuenta el problema de linealidad y causalidad, encontraremos una $q(t)$ como una función lineal de $x(t)$

$$q(t) = -Q(t)x(t), \quad (4.67)$$

donde $Q(t)$ es una matriz simétrica cuadrada de dimensión n . Con esto obtenemos la ecuación completa del control óptimo

$$u^*(t) = R^{-1}(t)M^T(t)B^T(t)Q(t)x(t), \quad (4.68)$$

Notemos que la condición de transversalidad [45] [85] para $q(T)$ implica que $q(T) = -\partial J/\partial x(T) = -\psi x(T)$ y, por lo tanto, $Q(T) = \psi$.

Utilizando la ecuación de co-estado $dq(t)/dt = -\partial H/\partial x$, obtenemos:

$$-dq(t)/dt = L(t)x(t) + a(t)q(t), \quad (4.69)$$

y sustituyendo (4.67) en (4.68), obtenemos

$$\dot{Q}(t)x(t) + Q(t)d(x(t))/dt = L(t)x(t) - a(t)Q(t)x(t), \quad (4.70)$$

Sustituyendo la expresión para $\dot{x}(t)$ de la ecuación de estado (4.1) en (4.70) obtenemos:

$$\dot{Q}(t)x(t) + Q(t)a(t)x(t) + Q(t)B(t)u(t-h) = L(t)x(t) - a(t)Q(t)x(t), \quad (4.71)$$

En vista de la linealidad del problema, diferenciar la última expresión respecto a x no implica pérdida de generalidad. Al tomar en cuenta que $(\partial u(t-h)/\partial x(t)) = (\partial u(t-h)/\partial u(t))(\partial u(t)/\partial x(t)) = M(t)R^{-1}(t)M^T(t)B^T(t)Q(t)$ y al diferenciar la ecuación (4.71) con respecto a x , ésta es transformada en la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = L(t) - Q(t)a(t) - a(t)Q(t) - Q(t)B(t)M(t)R^{-1}(t)M^T(t)B^T(t)Q(t). \quad (4.72)$$

Ahora, encontraremos el valor de la matriz $M(t)$ para este problema. Antes que nada, notemos que [61] la función Hamiltoniana $H(x^*, u^*, q^*, t)$ es constante para parámetro t para el control óptimo (4.68) $u^*(t)$, el estado óptimo correspondiente (4.1) $x^*(t)$ y el co-estado $q^*(t)$ satisfacen (4.67), y $Q(t)$ satisface la ecuación (4.72), y es igual a:

$$H(x^*, u^*, q^*, t) = u^{*T}R(t)u^* + x^{*T}L(t)x^* + d(x^{*T}Q(t)x^*)/dt = C = const, \quad (4.73)$$

Integrando la última igualdad de $t-h$ a t obtenemos:

$$\int_{t-h}^t [u^{*T}(s)R(s)u^*(s) + x^{*T}(s)L(s)x^*(s)]ds + x^{*T}(t)Q(t)x^*(t) - x^{*T}(t-h)Q(t-h)x^*(t-h) = Ch. \quad (4.74)$$

Diferenciando la fórmula obtenida respecto a $x^*(t)$ y a $u^*(t)$ y tomando en cuenta, las expresiones para el óptimo control para $u^*(t)$ y $u^*(t-h)$ dadas en (4.68), obtenemos:

$$(R^{-1}(t)M^T(t)B^T(t)) = (M(t))^{-1}(R^{-1}(t-h)M^T(t-h) \times B^T(t-h)) \exp\left(\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right), \quad (4.75)$$

También, aplicando

$$\partial x(t)/\partial x(t-h) = \exp\left(\int_{t-h}^t a(s)ds\right), \quad (4.76)$$

La última fórmula seguida de la fórmula de Cauchy para la solución de la ecuación lineal de estado (4.1)

$$x(t) = \Phi(t, t-h)x(t-h) + \int_{t-h}^t \Phi(t, \tau)a_0(\tau)d\tau + \int_{t-h}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau-h)d\tau, \quad (4.77)$$

donde $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de soluciones fundamentales de la ecuación homogénea (4.1). Esto es, la solución de la ecuación matricial

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = a(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(t, t) = I, \quad (4.78)$$

donde I es la matriz identidad. En otras palabras, $\Phi(t, t-h) = \exp \int_{t-h}^t a(s) ds$.

Además, debemos notar, que al diferenciar dos veces la fórmula (4.73) con respecto a $x^*(t)$, la expresión $R^{-1}(t)M^T(t)B^T(t)$ no depende actualmente en $B(t)$ o $R^{-1}(t)$ como una función del tiempo t . Entonces, el valor de la matriz $M(t)$ para este problema, puede ser determinado de (4.75) asumiendo que el tiempo $t-h$ es igual a t en la función matricial $R^{-1}(t-h)M^T(t-h)B^T(t-h)$. Finalmente, la fórmula (4.75) nos proporciona la siguiente igualdad para calcular $M(t)$

$$M^T(t)B^T(t) = B^T(t) \exp \left(\int_{t-h}^t a^T(s) ds \right), \quad (4.79)$$

Sustituyendo la fórmula (4.79) en (4.68) y (4.72) obtenemos las fórmulas deseadas (4.16) y (4.17) para la ley de control óptimo $u^*(t)$ y la función matricial $Q(t)$. La solución al problema de control óptimo queda demostrada.

Capítulo 5.

Diseño control óptimo y robusto para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control.

5.1 Problema de control óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control.

5.1.1 Planteamiento del problema.

Consideremos un sistema con múltiples retardos en la entrada de control:

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u(t - h_i), \quad (5.1)$$

con la condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [-h, 0]$.

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema, $u(t) \in R^m$ es la variable de control, $h = \max\{h_1, \dots, h_p\}$ es el máximo retardo presente en el sistema, $\phi(s)$ es una función continua a trozos definida en el intervalo $[-h, 0]$, y $a_0(t)$, $a(t)$, $B(t)$, y $B_i(t)$ son funciones matriciales continuas a trozos de dimensiones apropiadas. La existencia de una solución única de la ecuación (5.1) es asegurada por el teorema de Carathéodory [39].

La función de control $u(t)$ regula el estado del sistema fusionando los valores de $u(t)$ en varios momentos $t - h_i$, $i = 1, \dots, p$, donde h_i son los retardos, así como en el tiempo actual t , lo cual asume que el estado del sistema actual depende no solamente del valor actual de $u(t)$ sino también de su valor después de ciertos retardos h_i , $i = 1, \dots, p$. Esta situación es frecuentemente encontrada en, por ejemplo, sistemas de control de redes.

La función de costo cuadrática a ser minimizada se define:

$$J = \frac{1}{2}[x(T) - x_1]^T \psi [x(T) - x_1] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds, \quad (5.2)$$

donde x_1 es un vector dado, R es una matriz positiva y ψ , L son matrices simétricas nonnegativas definidas, y $T > t_0$ es un cierto momento del tiempo.

El problema del control óptimo consiste en encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (5.1). Para encontrar la solución a este problema de control óptimo, aplicaremos el principio de dualidad [61]. En el caso de sistemas lineales sin retardo, si el control óptimo existe en el problema de control óptimo para un sistema lineal con una función de costo cuadrática J , el filtro óptimo existe para el sistema lineal dual con perturbaciones Gaussianas y pueden encontrarse a partir de la solución del problema de control óptimo, utilizando simples transformaciones algebraicas. (Dualidad entre las matrices de ganancia y entre las ecuaciones de la ganancia y la varianza), y viceversa [22]. Tomando en cuenta la dualidad física de los problemas de filtrado y de control, la última conjetura debe ser válida para todos los casos donde el control óptimo, o vice versa el filtro óptimo, existe en una forma cerrada de dimensión finita [13]. Esta proposición es ahora aplicada al problema de filtrado óptimo para sistemas lineales cuyos estados tengan observaciones con múltiples retardos, lo cual es lo dual al problema de control óptimo (5.1), (5.2), en cuyo caso el filtro óptimo ya ha sido obtenido [20].

5.1.2 Filtro óptimo para ecuación de estado lineal y observaciones lineales con múltiples retardos.

Ahora, recordaremos para propósitos de referencia las ecuaciones de filtrado óptimo para una ecuación de estado lineal con observaciones lineales con múltiples retardos, obtenidos en [20]. Sea el proceso aleatorio no observable $x(t)$ descrito por una ecuación diferencial ordinaria cuya dinámica de estado está dada por:

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.3)$$

y la ecuación diferencial con múltiples retardos, es dada por el proceso de observación:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t) + \sum_{i=1}^p A_i(t)x(t - h_i))dt + F(t)dW_2(t), \quad (5.4)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $y(t) \in R^m$ es el proceso de observación, la condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$, $W_2(t)$ son independientes. El proceso de observación $y(t)$ depende de los estados retardados $x(t - h_i)$, $i = 1, \dots, p$, donde h_i son retardos, así como del estado

sin retardo $x(t)$, lo cual asume que la colección de información del estado del sistema para propósitos de observación se hace no solamente al tiempo actual sino también después de ciertos retrasos, definidos en intervalos de tiempo $h_i, i = 1, \dots, p$. La función vectorial $a_0(s)$ describe el efecto de las entradas del sistema: el control y las perturbaciones. Se asume que $A(t)$ es una matriz diferente de cero y $F(t)F^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (5.3), (5.4) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

El problema de estimación consiste en encontrar el estimado del estado del sistema $x(t)$ basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, el cual minimiza la norma Euclídeana 2:

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t))], \quad (5.5)$$

en cada instante t . En otras palabras, nuestro objetivo es encontrar la esperanza condicional

$$m(t) = \hat{x}(t) = E(x(t) | F_t^Y), \quad (5.6)$$

Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y], \quad (5.7)$$

es la varianza del error de la estimación.

La solución al problema establecido es dado por el siguiente sistema de ecuaciones de filtrado, el cual es cerrado respecto a las variables introducidas, $m(t)$ y $P(t)$:

$$dm(t) = (a_0(t) + a(t)m(t))dt + P(t)[A^T(t) + \sum_{i=1}^p \exp(-\int_{t-h_i}^t a^T(s)ds)A_i^T(t)] \times \\ (F(t)F^T(t))^{-1} (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t) + \sum_{i=1}^p A_i(t)m(t-h_i))dt), \quad (5.8)$$

$$dP(t) = (P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(t)b^T(t) - \\ P(t)[A^T(t) + \sum_{i=1}^p \exp(-\int_{t-h_i}^t a^T(s)ds)A_i^T(t)] \times \\ (F(t)F^T(t))^{-1} [A(t) + \sum_{i=1}^p A_i(t) \exp(-\int_{t-h_i}^t a(s)ds)]P(t))dt, \quad (5.9)$$

El sistema de ecuaciones de filtrado (5.8) y (5.9) debe de complementarse con las condiciones iniciales:

$$m(t_0) = E[x(t_0) | F_{t_0}^Y], \quad (5.10)$$

y

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y], \quad (5.11)$$

Debemos notar que este sistema es similar al filtro convencional de Kalman-Bucy, excepto por los ajustes para los retardos en las ecuaciones del estimado y de la varianza, calculados a partir de la fórmula de Cauchy para la ecuación lineal de estado.

En el caso de tener una matriz constante a en la ecuación de estado, el filtro óptimo toma la forma especialmente simple, tomando en cuenta que $(\exp(-\int_{t-h}^t a^T ds) = \exp(-a^T h))$:

$$dm(t) = (a_0(t) + am(t))dt + P(t)[A^T(t) + \sum_{i=1}^p \exp(-a^T h_i) A_i^T(t)] \times (F(t)F^T(t))^{-1} (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t) + \sum_{i=1}^p A_i(t)m(t-h_i))dt), \quad (5.12)$$

$$dP(t) = (P(t)a^T + aP(t) + b(t)b^T(t) - P(t)[A^T(t) + \sum_{i=1}^p \exp(-a^T h_i) A_i^T(t)] \times (F(t)F^T(t))^{-1} [A(t) + \sum_{i=1}^p A_i(t) \exp(-ah_i)] P(t))dt. \quad (5.13)$$

Entonces, las ecuaciones (5.8) o (5.12) para el estimado óptimo $m(t)$ y las ecuaciones (5.9) o (5.13) para su matriz de covarianza $P(t)$ forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado en el caso de ecuaciones de estado lineales y observaciones lineales con múltiples retardos.

5.1.3 Solución al problema de control óptimo.

Retomemos el problema de control óptimo para la ecuación lineal de estado (5.1) con múltiples retardos en la entrada de control lineal y la función de costo cuadrática (5.2). Este problema es dual al problema de filtrado para el estado lineal (5.3) y la observación lineal con múltiples retardos (5.4).

Puesto que la matriz de ganancia del filtro óptimo en (5.8) es igual a

$$K_f = P(t)[A^T(t) + \sum_{i=1}^p \exp(-\int_{t-h_i}^t a^T(s)ds) A_i^T(t)](F(t)F^T(t))^{-1}, \quad (5.14)$$

la matriz de ganancia en el problema de control óptimo toma la forma de su transpuesta dual

$$K_c = (R(t))^{-1} [B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t), \quad (5.15)$$

y la ley de control óptima está dada por:

$$u_{opt}(t) = K_c x = (R(t))^{-1} [B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t) x(t), \quad (5.16)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución a la siguiente ecuación dual a la ecuación de la varianza (5.9)

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= -a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - \\ &Q(t) [B(t) + \sum_{i=1}^p \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds) B_i(t)] R^{-1}(t) \times \\ &[B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t), \end{aligned} \quad (5.17)$$

con la condición final $Q(T) = \psi$.

Al sustituir la ecuación de control óptimo (5.16) en la ecuación de estado (5.1), obtenemos la ecuación de estado óptimamente controlada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)(R(t))^{-1} [B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t)x(t) + \\ &\sum_{i=1}^p B_i(t)(R(t))^{-1} [B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t-h_i)x(t-h_i), \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Los resultados obtenidos en esta sección, a partir del principio de dualidad, son demostrados aplicando la ecuación general del principio del máximo de Pontryagin [85] [60], La programación dinámica de Bellman [26] [79] puede servir como un método de demostración alternativa. Debe notarse, sin embargo, que la aplicación del principio del máximo al presente caso nos dará sólo las ecuaciones de estado y de co-estado del sistema, y no nos brinda una forma explícita del control óptimo y del vector de co-estado. Así que, la solución obtenida del principio de dualidad, nos brinda una forma explícita del control óptimo y del vector de co-estado, las cuales deben ser luego substituidos en las ecuaciones dadas por las herramientas rigurosas de optimización y verificados.

5.2 Robustificación de un sistema de control con múltiples retardos a través de modos deslizantes integrales.

5.2.1 Planteamiento del problema.

Sea el sistema de control con multiples retardos

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u(t - h_i), \quad (5.19)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estado, $u(t) \in R^m$ es la entrada de control, los rangos de las matrices B , B_i son completos e iguales a m , y $B_i \in \text{Span}(B)$, supongamos que existe una ley de control por realimentación de estado $u_0(x(t))$, la diferencial de x , tal que la dinámica del sistema en lazo cerrado ideal toma la forma:

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t)) + B(t)u_0(x_0(t)) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_0(x_0(t - h_i)), \quad (5.20)$$

y tiene las propiedades deseadas.

Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el sistema (5.19) opera bajo condiciones de incertidumbre que son generadas por variaciones en los parámetros y perturbaciones externas. Consideremos, entonces, la trayectoria real del sistema de control de lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)u(x(t)) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u(x(t - h_i)) + g(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t), \quad (5.21)$$

donde g es una función suave que representa las incertidumbres, perturbaciones y no linealidades del sistema (5.19). Para g , asumimos que se satisfacen las condiciones de acoplamiento estándar: $g \in \text{Span}(B)$.

En otras palabras, asumimos que existe una función suave γ tal que

$$g(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t) = B(t)\gamma(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t), \quad (5.22)$$

$$\|\gamma_1(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t)\| \leq q_0\|x(t)\| + \sum_{i=1}^p q_i\|x(t - h_i)\| + p_1, \quad q_0, q_1, \dots, q_p, p_1 > 0, \quad (5.23)$$

También asumimos las siguientes condiciones iniciales para el sistema (5.19)

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad (5.24)$$

donde $\varphi(\theta)$ es una función continua a trozos definida en el intervalo $[-h, 0]$.

Entonces, el problema de control ahora consiste en robustificar el control diseñado para el sistema (5.20) con respecto a la incertidumbre g : encontrar la ley de control que define la trayectoria del sistema (5.21) con condiciones iniciales (5.24) coincidentes con las trayectorias $x_0(t)$ con la misma condición inicial (5.24).

5.2.2 Solución al problema de robustificación a través de modos deslizantes integrales.

Ahora, rediseñaremos la ley de control para el sistema (5.19) en la forma:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t), \quad (5.25)$$

donde $u_0(t)$ es el control por retroalimentación de estado diseñado para (5.20), y $u_1(t) \in R^m$ es el control con retardo generando un modo deslizante integral en algún espacio auxiliar para rechazar la incertidumbre g . Substituyendo la ley de control (5.25) en la dinámica del sistema (5.21) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & f(x(t)) + B(t)u_0(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_0(t - h_i) + \\ & B(t)u_1(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_1(t - h_i) + g(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t), \end{aligned} \quad (5.26)$$

Definamos la función auxiliar

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (5.27)$$

donde $s_0(x(t)) \equiv u_0(x(t))$, y $z(t)$ es una variable auxiliar definida en (5.30).

Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & \dot{z}(t) + G(t)[f(x(t)) + B(t)u_0(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_0(t - h_i) \\ & + B(t)u_1(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_1(t - h_i) + B(t)\gamma(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t)], \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde $G(t) = ds_0(x(t))/dx(t) = du_0(x(t))/dx(t)$ esta disponible para el diseño del modo deslizante, debido a que la ganancia del control para u_0 es ya conocida. Además, asumamos que la matriz $G(t)B(t)$ es no singular esto es $(G(t)B(t))^{-1}$ existe.

La filosofía del control por modos deslizantes integrales es la siguiente: para lograr que $x(t) = x_0(t)$ para todo $t \in (-h, \infty)$, el modo deslizante debe estar organizado sobre la superficie $s(t)$, en vista de que la siguiente compensación de la perturbación debe obtenerse en el movimiento del modo deslizante.

$$B(t)u_{1eq}(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_{1eq}(t - h_i) = -B(t)(\gamma(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t)). \quad (5.29)$$

Note que el control equivalente $u_{1eq}(t)$ es determinado sin ambigüedad a partir de la última igualdad y de la condición inicial para $x(t)$, dado que los rangos de las matrices B, B_i son completas e iguales a m , $B_i \in \text{Span}(B)$, y, por lo tanto, se puede obtener la pseudoinversa de B .

Definamos la variable auxiliar $z(t)$ como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = -G(t)[f(x(t)) + B(t)u_0(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_0(t - h_i)], \quad (5.30)$$

con las condiciones iniciales $z(\theta) = -s_0(\varphi(\theta))$ para $\theta \in [-h, 0]$.

Entonces, la ecuación de la superficie deslizante toma la forma:

$$\dot{s}(t) = G(t)[B(t)\gamma(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t) + B(t)u_1(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_1(t - h_i)]. \quad (5.31)$$

Finalmente, para realizar el modo deslizante, el control relevador correspondiente es diseñado:

$$u_1(t) = -TM(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t)SIGN[S(t)], \quad S(t) = [G(t)B(t)]^T s(t), \quad (5.32)$$

donde

$$M = q(\|x(t)\| + \sum_{i=1}^p \|x(t - h_i)\|) + p, \quad (5.33)$$

donde $SIGN[S(t)] = [sign[S_1(t)], sign[S_2(t)], \dots, sign[S_m(t)]]^T$, $S_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ son las coordenadas del vector $S(t)$, y $q > q_0, q_1, \dots, q_p$, $p > p_1$. El factor escalar T en (5.32) es el control relevador aplicado como conmutador, esta idea es establecida en (cita xxx), trabajandolo de tal manera que $B_i(t)T = 0$, para cualquier $i = 1, \dots, p$, y $B(t)T = B(t)$. La aplicación como conmutador T directo sobre el control relevador u_1 solamente al canal de control presente, permite controlar todos los canales retardados sin entradas de control. Esta acción concreta la intención original al diseñar el compensador de modos deslizantes en tiempo presente.

La convergencia hacia y a lo largo de la superficie de modos deslizantes $s(t) = 0$ la aseguramos por medio de la función de Lyapunov $V(t) = s^T(t)s(t)/2$ para el sistema (5.26) con la entrada de control $u_0(t)$ of (5.16) y $u_1(t)$ definida en (5.32):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s^T(t)G(t)[B(t)u_1(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_1(t - h_i) + B(t)\gamma(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t)] \leq \quad (5.34) \\ &-|S(t)|(q(\|x(t)\| + \sum_{i=1}^p \|x(t - h_i)\|) + p) + S^T[G(t)B(t)]^{-1}G(t)[B(t)\gamma(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_p), t)] < 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde $|S(t)| = \sum_{i=1}^m |S_i(t)|$.

La siguiente sección presenta la robustificación del control óptimo diseñado (5.16). Este regulador robusto es diseñado asignando la superficie de modos deslizantes de acuerdo a las ecuaciones (5.27)–(5.28) y subsiguientemente moviéndose hacia y a lo largo de esta superficie utilizando el control relevador (5.32).

5.3 Diseño de un control robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control.

5.3.1 Planteamiento del problema.

Consideremos nuevamente el sistema lineal (5.1) con múltiples retardos en la entrada de control, cuyo desempeño está ahora afectado por la incertidumbre suave g representando las perturbaciones y no linealidades del sistema (5.1)

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u(t-h_i) + g(x(t), x(t-h_1), \dots, x(t-h_p), t), \quad (5.35)$$

con la condición inicial $x(s) = \varphi(s)$, $s \in [-h, 0]$, donde $\varphi(s)$ es una función continua a trozos definida en el intervalo $[-h, 0]$. Asumamos que las perturbaciones satisfacen las condiciones de acoplamiento estándar

$$g(x(t), x(t-h_1), \dots, x(t-h_p), t) = B(t)\gamma(x(t), x(t-h_1), \dots, x(t-h_p), t), \quad (5.36)$$

$$\|\gamma_1(x(t), x(t-h_1), \dots, x(t-h_p), t)\| \leq q_0\|x(t)\| + \sum_{i=1}^p q_i\|x(t-h_i)\| + p_1, \quad q_0, q_1, \dots, q_p, p_1 > 0, \quad (5.37)$$

proporcionándonos restricciones razonables para su crecimiento. Utilizamos la misma función de costo cuadrática (5.2).

El problema es robustificar el control óptimo obtenido (5.16), aplicando el método especificado por las ecuaciones (5.27)–(5.28).

Definamos este nuevo control en la forma (5.25): $u(t) = u_0(t) + u_1(t)$, donde el control óptimo $u_0(t)$ coincide con (5.16) y la componente de robustificación $u_1(t)$ es obtenida de acuerdo a la ecuación

(5.32)

$$u_1(t) = -TM(x(t), x(t-h_1), \dots, x(t-h_p), t) \text{SIGN}[S(t)], \quad S(t) = G^T(t)B^T s(t), \quad (5.38)$$

donde

$$M = q(\|x(t)\| + \sum_{i=1}^p \|x(t-h_i)\|) + p, \quad (5.39)$$

$$q > q_0, q_1, \dots, q_p, \quad p > p_1, \quad (5.40)$$

Las desigualdades (5.40), y T es la aplicación conmutada de control relevador diseñada en la subsección anterior. Consecuentemente, la función de la superficie de modos deslizantes $s(t)$ se define como:

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (5.41)$$

donde

$$s_0(x(t)) = u_0(t) = (R(t))^{-1} [B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t) x(t), \quad (5.42)$$

y la variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con múltiples retardos

$$\dot{z}(t) = -G(t)[a_0(t) + a(t)x(t) + B(t)u_0(t) + \sum_{i=1}^p B_i(t)u_0(t-h_i)], \quad (5.43)$$

con las condiciones iniciales $z(\theta) = -s_0(\varphi(\theta))$ para $\theta \in [-h, 0]$.

De acuerdo con (5.28), la matriz $G(t)$ es definida por:

$$G(t) = (R(t))^{-1} [B^T(t) + \sum_{i=1}^p B_i^T(t) \exp(\int_{t-h_i}^t a^T(s) ds)] Q(t), \quad (5.44)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati (5.17).

5.4 Ejemplo.

Esta sección presenta un ejemplo del diseño de un regulador óptimo para el sistema (5.1) sujeto al criterio (5.2) aplicando las ecuaciones (5.16) y (5.17); compararemos éste, con un regulador donde la matriz Q es seleccionada, como un regulador óptimo lineal, para un sistema sin retardos, perturbaremos el regulador óptimo obtenido con ruido, y diseñaremos un compensador robusto a través de la técnica de modos deslizantes para la perturbación aplicando el esquema (5.41)–(5.43).

Iniciemos con un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t-0.1) + u(t), \quad (5.45)$$

con la condición inicial $x(s) = 0$ para $s \in [-0.1, 0)$ y $x(0) = 1$.

El problema de control óptimo consiste en encontrar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 0.15$, que minimice el criterio

$$J = \frac{1}{2}[x(T) - x^*]^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt, \quad (5.46)$$

donde $T = 0.15$, y $x^* = 25$ es un valor grande para $x(t)$ *a priori* inalcanzable en el tiempo T .

En otras palabras, el problema de control óptimo consiste en maximizar el estado $x(t)$ utilizando la mínima energía de control u .

Ahora construiremos primero un regulador donde la ley de control óptimo y la matriz $Q(t)$ son calculados en la misma manera como se hace en un regulador lineal óptimo para un sistema lineal sin retardo en la entrada de control, esto es $u_{opt}(t) = (R(t))^{-1} B^T(t) Q(t) x(t)$ (ver [61] como referencia).

Dado que $B(t) = 1$ en (5.45) y $R(t) = 1$ en (5.46), el control óptimo es actualmente igual a

$$u(t) = Q(t)x(t), \quad (5.47)$$

donde $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \quad (5.48)$$

con la condición terminal $Q(T) = \psi$.

Dado que $a(t) = 1$, $B(t) = 1$ en (5.45), y $L = 0$ y $\psi = 1$ en (5.46), esta última ecuación toma la forma

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - (Q(t))^2, \quad Q(0.15) = 1, \quad (5.49)$$

Al sustituir el control óptimo (5.47) en la ecuación (5.45), el sistema controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + Q(t - 0.1)x(t - 0.1) + Q(t)x(t), \quad (5.50)$$

El resultado de aplicar el regulador (5.47),(5.49) al sistema (5.45) son mostrados en la Figura 1, la cual nos presenta las gráficas del estado controlado (5.50) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0, T]$, y el control (5.47) $u(t)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (5.50) y el criterio (5.46) en el momento final $T = 0.15$ son $x(0.15) = 1.4923$ y $J(0.15) = 276.4835$.

Ahora aplicaremos el regulador óptimo (5.16)–(5.17) para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control para el sistema (5.45).

Dado que $a(t) = 1$, $B(t) = 1$, $B_1(t) = 1$, y $h = 0.1$ en (5.45) y $\psi = 1$, $R(t) = 1$, y $L = 0$ en (5.46), en este caso, $\exp(\int_{t-h}^t a^T(s)ds) = \exp(0.1)$ y la ley de control óptimo (5.16) toma la forma

$$u_{opt}(t) = (1 + \exp(0.1))Q(t)x(t), \quad (5.51)$$

donde $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - ((1 + \exp(0.1))Q(t))^2, \quad Q(0.15) = 1, \quad (5.52)$$

Al sustituir la ley de control óptimo (5.51) en (5.45), el sistema óptimamente controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + (1 + \exp(0.1))[Q(t - 0.1)x(t - 0.1) + Q(t)x(t)], \quad (5.53)$$

El resultado de aplicar el regulador (5.51),(5.52) al sistema (5.45) son mostrados en la Figura 2, la cual presenta las gráficas del estado óptimamente controlado (5.53) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0, T]$, y el control óptimo (5.51) $u_{opt}(t)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (5.53) y el criterio (5.51) en el momento final $T = 0.15$ son $x(0.15) = 2.8944$ y $J(0.15) = 248.8386$.

La siguiente tarea es introducir una perturbación en el sistema óptimamente controlado (5.53). Esta perturbación determinística es realizada como una constante: $g(t) = -10$. Las condiciones de acoplamiento son válidos, debido a que el estado $x(t)$ y el control $u(t)$ tienen la misma dimensión: $dim(x) = dim(u) = 1$. Las restricciones en el crecimiento de la perturbación se satisfacen con $q_0 = 0$ y $p_1 = 10$, dado $||g(t)|| = 10$.

La ecuación del sistema perturbado (5.53) toma la forma

$$\dot{x}(t) = -10 + x(t) + (1 + \exp(0.1))[Q(t - 0.1)x(t - 0.1) + Q(t)x(t)], \quad (5.54)$$

El desempeño del estado del sistema se deteriora significativamente después de introducir la perturbación. La Figura 3 presenta las gráficas del estado perturbado (5.54) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0, T]$, y el control (5.51) $u(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor de el estado (5.54) y el criterio (5.46) al momento final $T = 0.15$ son $x(0.15) = 0.6472$ y $J(0.15) = 298.5231$. El estado (5.54) se decrementa de su valor inicial $x(0) = 1$, aun cuando debería ser maximizado, y el

valor del criterio se incrementa de su valor inicial $J(0) = 288$, aun cuando debería de ser minimizado, y llega a ser mucho más grande que en los casos precedentes.

Finalmente diseñemos un control robusto a través de la técnica de modos deslizantes integrales que compense las perturbaciones introducidas. La nueva ecuación de estado controlada es:

$$\dot{x}(t) = -10 + x(t) + (1 + \exp(0.1))[Q(t-0.1)x(t-0.1) + Q(t)x(t)] + u_1(t-0.1) + u_1(t), \quad (5.55)$$

donde el compensador $u_1(t)$ es obtenido de acuerdo a (5.32)

$$u_1(t) = -M(x(t), x(t-h), t) \text{sign}[s(t)], \quad (5.56)$$

La superficie de modos deslizantes $s(t)$ es definida por (5.41)

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t)), \quad (5.57)$$

donde

$$s_0(x(t)) = u_0(x(t)) = (1 + \exp(0.1))Q(t)x(t), \quad (5.58)$$

y la variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con retardo

$$\dot{z}(t) = -G(t)[x(t) + u_0(t) + u_0(t-h)] = -G(t)[x(t) + (1 + \exp(0.1))[Q(t-0.1)x(t-0.1) + Q(t)x(t)]], \quad (5.59)$$

con la condición inicial $z(s) = 0$ para $s \in [-0.1, 0)$ y $z(0) = -(1 + \exp(0.1))Q(0)$.

De acuerdo con (5.28), la matriz $G(t)$ es igual a

$$G(t) = ds_0(x(t))/dx(t) = (1 + \exp(0.1))Q(t), \quad (5.60)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati (5.52).

Al introducir el compensador (5.56) en la ecuación de estado (5.55), es mejorado el desempeño del sistema. La Figura 4 presenta las gráficas del estado compensado (5.55) $x(t)$ en el intervalo $[0, T]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0, T]$, y la suma de el control (5.51) y el compensador (5.56), $u(t) + u_1(t)$ (control por modos deslizantes equivalente), en el intervalo $[0, T]$. El valor del estado (5.55) y el criterio (5.46) en el momento final $T = 0.15$ son $x(0.15) = 2.893$ y $J(0.15) = 267.6933$. Entonces, el valor del estado controlado despues de aplicar el compensador (5.56) es apenas indistinguiblemente menor que aquellos valores obtenidos para el regulador optimo (5.51)–(5.52) para sistemas lineales con

múltiples retardos en la entrada de control, y mucho mejor que los valores para el sistema perturbado (5.54). Por supuesto, el valor del criterio aquí es peor que el obtenido para el regulador óptimo (aunque es mejor que para el regulador (5.47),(5.49)), dado a que una energía de control adicional es requerida para suprimir la perturbación.

5.5 Resultados de las simulaciones.

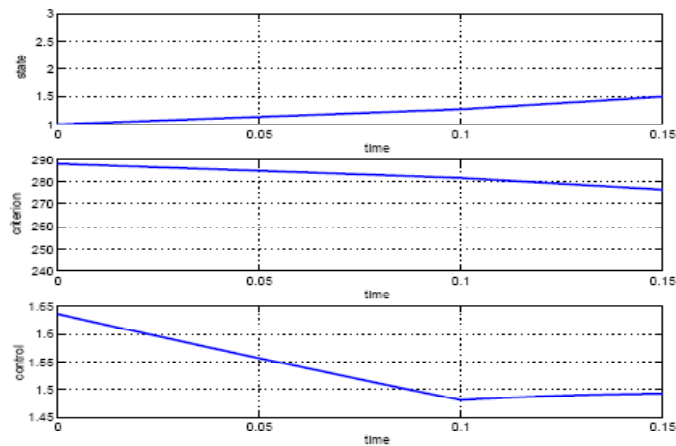


Figura 1: Desempeño del mejor regulador disponible para sistemas lineales sin retardo. Gráficas del estado controlado (5.50) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$, y el control, (5.47) $u(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$.

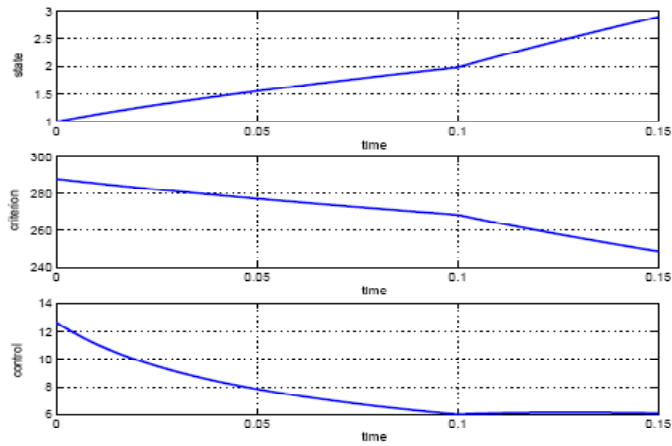


Figura 2: Desempeño del regulador óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada de control. Gráficas del estado optimamente controlado (5.53) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0.1, 0.15]$, y el control óptimo, (5.51) $u_{opt}(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$.

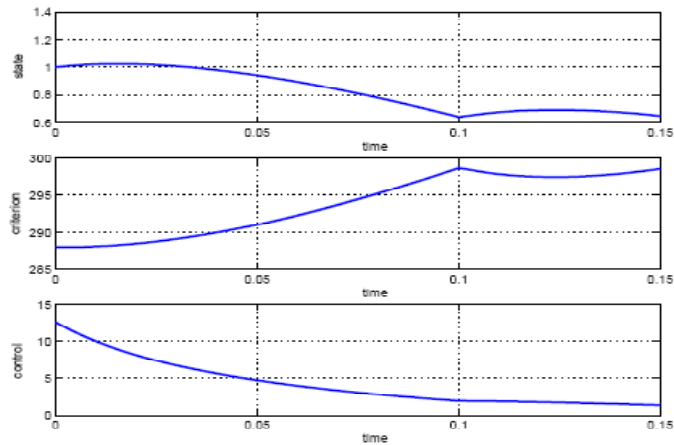


Figura 3: Desempeño del sistema controlado en presencia de perturbaciones. Gráficas del estado perturbado (5.54) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0.1, 0.15]$, y el control, (5.51) $u(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$.

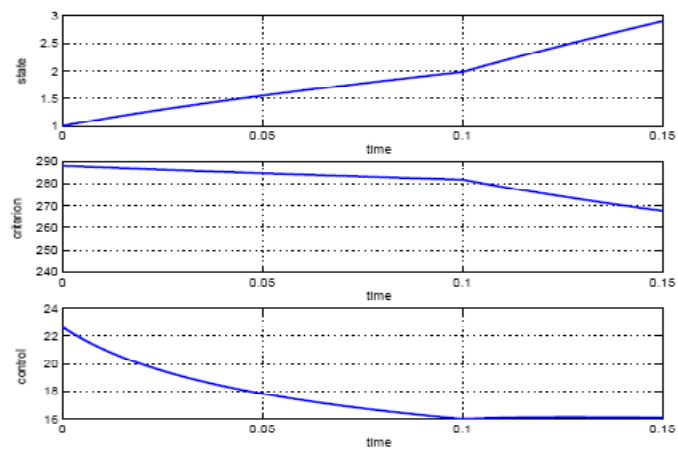


Figura 4: Desempeño del sistema controlado después de aplicar el compensador robusto diseñado por MDI. Gráficas del estado compensado (5.55) $x(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$, el criterio (5.46) $J(t)$ en el intervalo $[0, 0.15]$, y la suma del control, (5.51) y el compensador (5.56), $u(t) + u_1(t)$, por MDI, en el intervalo $[0, 0.15]$.

Capítulo 6.

Diseño de un controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada de control y en las observaciones.

6.1 Problema del control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.

6.1.1 Planteamiento del problema.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia de σ -álgebras con incrementos continuos por la derecha $F_t, t \geq 0$, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos independientes de Wiener. El proceso aleatorio parcialmente observado F_t -medible $(x(t), y(t))$ es descrito por una ecuación diferencial ordinaria para la dinámica de estado, descrito por el sistema

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + B(t)u(t - \tau)dt + b(t)dW_1(t), \quad (6.1)$$

con la condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - \tau, t_0]$, y la ecuación diferencial con retardo, para el proceso de observación, es dada por:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t - h))dt + F(t)dW_2(t), \quad (6.2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $u(t) \in R^m$ es la entrada de control, $y(t) \in R^p$ es el proceso de observación, $\phi(s)$ es un proceso estocástico Gaussiano continuo a trozos, en el promedio cuadrático (ver [88] para la definición) definido en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$, tal que $\phi(s)$, $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes.

El proceso de observación $y(t)$ depende del estado retardado $x(t - h)$, donde h es el retardo en la observación, con lo cual se asume que la colección de información de los estados del sistema para propósitos de observación es posible sólo después de un cierto tiempo h . Asumiremos que la matriz $A(t)$ es una matriz diferente de cero y $F(t)F^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (6.1)–(6.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas. La función de control $u(t)$ regula el estado del sistema empleando los valores de $u(t)$ al instante previo $t - \tau$, donde τ es un retardo del

control, el cual asume la existencia de un cierto plazo de tiempo τ entre el momento de aplicar la señal de control al actuador y el momento de alcanzar la entrada al sistema. Esta situación es frecuentemente encontrada en, por ejemplo, sistemas de control de redes [52] [110].

Además, la función de costo cuadrática J a ser minimizada es definida como sigue:

$$J = E\left[\frac{1}{2}x^T(T)\Phi x(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds\right], \quad (6.3)$$

donde K es una matriz definida positiva y Φ, L son matrices simétricas no negativas definidas, $T > t_0$ es un cierto momento del tiempo, el símbolo $E[f(x)]$ significa la esperanza de la función (media) f de la variable aleatoria x , y a^T denota la transpuesta de la matriz (vector) a .

El problema del control óptimo consiste en encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria no observada $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (6.1).

6.1.2 Principio de separación para sistemas con retardo.

Así como para sistemas lineales estocásticos sin retardo, el principio de separación permanece válido para sistemas lineales estocásticos con retardos en el control y en la observación. De hecho, podemos reemplazar el estado del sistema no observable $x(t)$ por su estimado óptimo $m(t)$ dado por la ecuación (ver [20] para su definición y derivación)

$$dm(t) = (a_0(t) + a(t)m(t))dt + B(t)u(t - \tau)dt + P(t) \times \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt), \quad (6.4)$$

con la condición inicial $m(s) = E(\phi(s))$, $s \in [t_0 - \tau, t_0)$ y $m(t_0) = E(\phi(t_0) | F_{t_0}^Y)$, $s = t_0$. Aquí, $m(t)$ es el mejor estimado para el proceso no observable $x(t)$ en el instante t basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, esto es la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$. El mejor estimado $m(t)$ minimiza el criterio

$$H = E[(x(t) - m(t))^T(x(t) - m(t))], \quad (6.5)$$

con respecto a la selección del estimado m como una función de la observación $y(t)$, en cada momento t [88].

La ecuación complementaria para la matriz de varianza del error $P(t)$ toma la forma (ver [20] para su definición)

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(t)b^T(t) - \\ & P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1} \times \\ & A(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a(s)ds\right)P(t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

con la condición inicial $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$.

Se verifica fácilmente [61] que el problema de control óptimo para el estado del sistema (6.1) y la función de costo (6.3) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (6.4) y la función de costo J representada por

$$\begin{aligned} J = & E\left\{\frac{1}{2}m^T(T)\Phi m(T) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \text{tr}[P(s)L(s)]ds + \text{tr}[P(T)\Phi]\right\}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\text{tr}[A]$ denota la traza de la matriz A . La última parte de J es independiente del control $u(t)$ o del estado $x(t)$, por lo que establecemos la función de costo reducida y efectiva M a ser minimizada, tiene la forma

$$\begin{aligned} M = & E\left\{\frac{1}{2}m^T(T)\Phi m(T) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T m^T(s)L(s)m(s)ds\right\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

Entonces, la solución para el problema de control óptimo especificado por las ecuaciones (6.1),(6.3) puede encontrarse resolviendo el problema de control óptimo dado por las ecuaciones (6.4),(6.8). Sin embargo, el valor mínimo del criterio J debe ser determinado utilizando (6.7). Esta conclusión muestra el principio de separación para sistemas lineales con retardo en el control y en la observación.

6.1.3 Solución al problema de control óptimo.

Basado en la solución del problema de control óptimo obtenido en [22] en el caso de sistemas cuyos estados son observables con retardo en la entrada de control, los siguientes resultados son válidos para el problema de control óptimo (6.4),(6.8), donde los estados del sistema (el estimado $m(t)$) son completamente disponibles y, por lo tanto, observables.

La ley de control óptimo esta dada por

$$u^*(t-h) = (R(t))^{-1}B^T(t) \exp\left(\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right)Q(t-h)m(t-h), \quad (6.9)$$

donde la función matricial es la solución de la siguiente ecuación dual a la ecuación para la varianza

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - \\ & Q(t) \exp\left(\int_{t-\tau}^t a(s)ds\right)B(t)R^{-1}(t) \times \\ & B^T(t) \exp\left(\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right)Q(t), \end{aligned} \quad (6.10)$$

con la condición terminal $Q(T) = \psi$.

En el proceso de deducción de la ecuación (6.10), se tomo en cuenta que el último término de la ecuación (6.4), $P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt)$, es un ruido blanco Gaussiano.

Después de sustituir el control óptimo (6.9) en la ecuación (6.4) para el estado del sistema reconstruido $m(t)$, la siguiente ecuación de estado óptimamente controlada es obtenida:

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_0(t) + a(t)m(t) + B(t)(R(t))^{-1}B^T(t) \times \\ & \exp\left(\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right)Q(t-\tau)m(t-\tau))dt + P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t) \times \\ & (F(t)F^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt), \end{aligned} \quad (6.11)$$

con la condición inicial $m(s) = E(\phi(s))$, $s \in [t_0 - \tau, t_0)$ y $m(t_0) = E(\phi(t_0) | F_{t_0}^Y)$, $s = t_0$.

Entonces, la ecuación de estado del estimado óptimamente controlado (6.11), la ecuación matricial de componentes de ganancia (6.10), la ley de control óptima (6.9), y la ecuación de varianza (6.6) nos da una solución completa para el problema del controlador óptimo para un sistema lineal de estado no observados con retardo en el control y en la observación.

6.2 Ejemplo.

En esta sección presentamos un ejemplo de diseño de un controlador para un sistema lineal con retardos en la entrada y en la observación utilizando el esquema (6.9)–(6.11) y comparemos versus un controlador para el cual que las matrices P y Q son seleccionadas conforme a un controlador lineal óptimo para un sistema sin retardos.

Iniciemos con un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 0.1), \quad x(s) = \phi(s), \quad s \in [-0.1, 0], \quad (6.12)$$

donde $\phi(s) = N(0, 1)$ para $s \in [-0.1, 0]$, y $N(0, 1)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unitaria. El proceso de observación está dado por :

$$y(t) = x(t - 0.2) + \psi(t), \quad (6.13)$$

donde $\psi(t)$ es un ruido blanco Gaussiano, el cual es la derivada débil en el promedio cuadrático de un proceso estándar de Wiener [88]. Las ecuaciones (6.12) y (6.13) presentan la forma convencional de las ecuaciones (6.1) y (6.2), la cual se usa actualmente en la práctica [9].

El problema de control consiste en encontrar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, que minimice el criterio

$$J = E\left\{\frac{1}{2}[x(T) - x^*]^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt\right\}, \quad (6.14)$$

donde $T = 0.45$, y $x^* = 25$ es un valor grande de $x(t)$ *a priori* inalcanzable en el tiempo T . En otras palabras, el problema de control consiste en maximizar el estado no observado $x(t)$ utilizando la mínima energía de control u .

Iniciemos construyendo primero un controlador donde la ley de control y las matrices $P(t)$ y $Q(t)$ son calculadas de la misma manera que para un controlador lineal óptimo para un sistema lineal sin retardo en la entrada de control, esto es $u^*(t) = (R(t))^{-1} B^T(t) Q(t) m(t)$ ver [61]. Dado que $B(t) = 1$ en (6.12) y $R(t) = 1$ en (6.14), la ley de control es igual a

$$u(t) = Q(t) m(t); \quad (6.15)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & a_0(t) + a(t)m(t) + B(t)u(t - \tau) + P(t)A^T(t) \times \\ & (F(t)F^T(t))^{-1}(y(t) - (A_0(t) + A(t)m(t - h))), \end{aligned} \quad (6.16)$$

con la condición inicial $m(s) = E(\phi(s))$, $s \in [t_0 - \tau, t_0)$ y $m(t_0) = E(\phi(t_0) | F_{t_0}^Y)$, $s = t_0$;

$Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \quad (6.17)$$

con la condición terminal $Q(T) = \psi$; y $P(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(t)b^T(t) - \\ & P(t)A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1}A(t)P(t), \end{aligned} \quad (6.18)$$

con la condición inicial $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$. Dado que $t_0 = 0$, $a_0(t) = 0$, $a(t) = 1$, $B(t) = 1$, $b(t) = 0$, $\tau = 0.1$ en (6.12), $A_0(t) = 0$, $A(t) = 1$, $F(t) = 1$, $h = 0.2$ en (6.13), y $L = 0$ y $\psi = 1$ en (6.14), las últimas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & m(t) + u(t - 0.1) + P(t)(y(t) - m(t - 0.2)), \\ m(s) = & 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - (Q(t))^2, \quad Q(0.45) = 1, \quad (6.20)$$

$$\dot{P}(t) = 2P(t) - (P(t))^2, \quad P(0) = P_0, \quad (6.21)$$

Al sustituir el control el control (6.15) en (6.19), la ecuación del estimado controlado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & m(t) + Q(t - 0.1)m(t - 0.1) + P(t)(y(t) - m(t - 0.2)), \\ m(s) = & 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

Para la simulación numérica del sistema (6.12),(6.13), el valor inicial $x(0) = 0.05$ es asignado como la realización de la variable Gaussiana $x(0) = \phi(0)$ en (6.12), los valores $m_0 = 1.9$ y $P_0 = 10$ son asignados como las condiciones iniciales del estimado $m(t)$ y la ganancia del filtro $P(t)$, respectivamente, y la perturbación $\psi(t)$ en (6.13) es realizado aplicando la función de MatLab para el ruido blanco Gaussiano.

Los resultados de aplicar el controlador (6.15)–(6.22) al sistema (6.12),(6.13) son mostrados en la Figura 1, la cual nos presenta las gráficas de el estado (6.12) $x(t)$ controlado por (6.15), el estimado

controlado (6.22) $m(t)$, el criterio (6.14) $J(t)$, el control (6.15) $u(t)$, la ganancia del filtro (6.21) $P(t)$, y la ganancia del control (6.20) $Q(t)$, en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (6.12), el estimado (6.22), y el criterio (6.14) al momento final $T = 0.45$ son $x(0.45) = 4.0064$, $m(0.45) = 4.7841$, y $J(0.45) = 236.0656$.

Ahora apliquemos el controlador óptimo (6.6)–(6.11) para sistemas lineales con retardo en el control y en la observación al sistema (6.11), (6.12).

Dado que $\exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds) = \exp(-0.2)$ y $\exp(\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds) = \exp(0.1)$, la ley de control (6.9) toma la forma

$$u^*(t) = (\exp(0.1))Q(t)m(t), \quad (6.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= m(t) + u^*(t - 0.1) + (\exp(-0.2))P(t)(y(t) - m(t - 0.2)), \\ m(s) &= 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - (\exp(0.1)Q(t))^2, \quad Q(0.45) = 1, \quad (6.25)$$

$$\dot{P}(t) = 2P(t) - (\exp(-0.2)P(t))^2, \quad P(0) = P_0, \quad (6.26)$$

Al sustituir el control (6.23) en la ecuación (6.24), la ecuación del estimado controlado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= m(t) + (\exp(0.1))Q(t - 0.1)m(t - 0.1) + \\ &(\exp(-0.2))P(t)(y(t) - m(t - 0.2)), \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$m(s) = 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0. \quad (6.28)$$

Los resultados de aplicar el controlador (6.6)–(6.11) al sistema (6.12),(6.13) son mostrados en la Figura 2, la cual nos presenta las graficas del estado (6.12) $x(t)$ controlado por (6.23), el estimado controlado (6.27) $m(t)$, el criterio (6.14) $J(t)$, y el control (6.23) $u^*(t)$, la varianza (6.26) $P(t)$, y la ganancia del control (6.25) $Q(t)$, en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (6.12), el estimado controlado (6.27), y el criterio (6.14) al momento final $T = 0.45$ son $x(0.45) = 6.049$, $m(0.45) = 6.055$, y

$J(0.45) = 219.664$. Existe una mejoría definitiva en los valores del estado controlado y el estimado controlado al ser maximizado y el criterio al ser minimizado, en comparación al caso precedente, debido a la optimalidad del controlador (6.6)–(6.11) para sistemas lineales con retardo en la entrada y en la observación.

Por lo tanto, el controlador diseñado para sistemas lineales con retardos en la entrada y en la observación regula las variables del sistema mucho mejor que el mejor controlador lineal disponible para sistemas sin retardo desde ambos puntos de vista, como se comenta en la conclusión.

6.3 Resultados de las simulaciones.

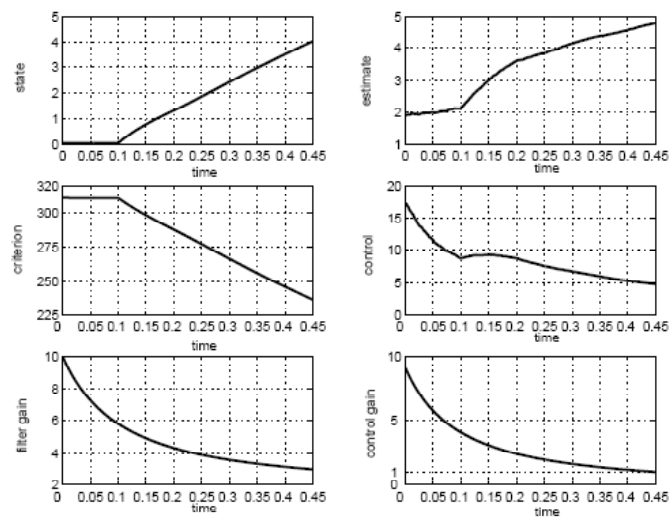


Figura 1: Gráficas del estado (6.12) $x(t)$ gobernado por el mejor controlador lineal (6.15) disponible para sistemas sin retardo, el estimado controlado (6.22) $m(t)$, el criterio (6.14) $J(t)$ el control (6.15) $u(t)$, la ganancia del filtro (6.21) $P(t)$, y la ganancia del control (6.20) $Q(t)$ en el intervalo $[0, 0.45]$.

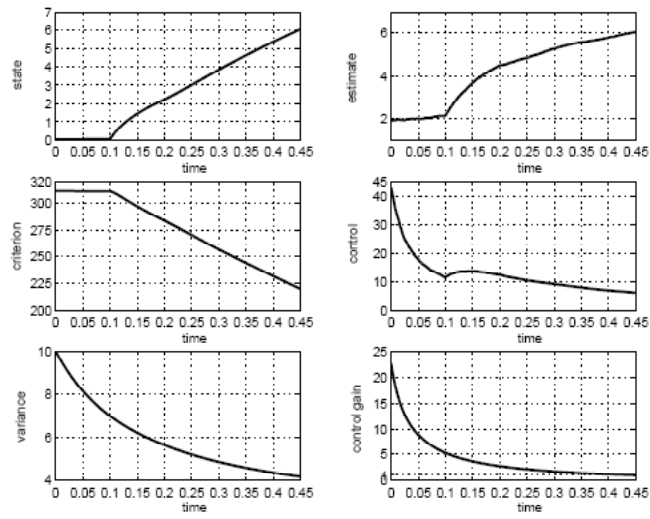


Figura 2: Gráficas del estado (6.12) $x(t)$ gobernado por el controlador lineal óptimo (6.23) diseñado para sistemas con retardo, en la entrada y en las observaciones, el estimado controlado (6.27) $m(t)$, el criterio (6.14) $J(t)$, el control (6.23) $u^*(t)$, la varianza (6.26) $P(t)$, y la ganancia del control (6.25) $Q(t)$ en el intervalo $[0, 0.45]$.

Capítulo 7.

Diseño de un controlador óptimo y robusto para sistemas lineales con retardo en la entrada de control y en las observaciones.

7.1 Problema del control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.

7.1.1 Planteamiento del problema del controlador óptimo.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia de σ -álgebras con incrementos continuos por la derecha $F_t, t \geq 0$, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos de Wiener independientes. El proceso aleatorio, F_t -medible, parcialmente observado $(x(t), y(t))$ es descrito por la ecuación diferencial con retardo, para el estado del sistema, por:

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + B(t)u(t - \tau)dt + b(t)dW_1(t), \quad (7.1)$$

con la condición inicial $x(s) = \phi(s), s \in [t_0 - \tau, t_0]$, y el proceso de observación:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t - h))dt + F(t)dW_2(t), \quad (7.2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $u(t) \in R^m$ es la entrada de control, $y(t) \in R^p$ es el proceso de observación, $\phi(s)$ es un proceso estocástico Gaussiano continuo a trozos, en el promedio cuadrático (ver [88] para su definición) definido en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$ tal que $\phi(s), W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes.

El proceso de observación $y(t)$ depende del estado retardado $x(t - h)$, donde h es el retardo en la observación, el cual supone que el conjunto de información de los estados del sistema para propósitos de observación es posible solamente después de un cierto tiempo h . Asumiremos que $A(t)$ es una matriz diferente de cero y $F(t)F^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (7.1)–(7.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas. La función de control $u(t)$ regula los estados del sistema utilizando los valores de $u(t)$ en el momento previo $t - \tau$, donde τ es un retardo en el control, el cual asume que existe un cierto intervalo de tiempo τ entre el momento de elaborar la señal de control por

el el acutador y el moemento en que ésta alcanza la entrada del sistema. Esta situación es frecuentemente encontrada en, por ejemplo, sistemas de control de redes.

Además, la función de costo cuadrática J a ser minimizada se define como sigue:

$$J = E\left[\frac{1}{2}x^T(T)\Phi x(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T x^T(s)L(s)x(s)ds\right], \quad (7.3)$$

donde K es definida positiva y Φ, L son matrices simétricas no negativas definidas, $T > t_0$ es u instante dado, el símbolo $E[f(x)]$ representa la esperanza, o media, de una función f de una variable aleatoria x , y a^T denota la transpuesta de un vector, o matriz a .

El problema del controlador óptimo consiste en encontrar el control $u^*(t), t \in [t_0, T]$, que minimiza el criterio J a lo largo de la trayectoria no observada $x^*(t), t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado (7.1).

La siguiente solución a este problema fue obtenida [19] [21] [23]. La ley de control óptima es dada por

$$u^*(t - \tau) = (R(t))^{-1}B^T(t) \exp\left(-\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right)Q(t)m(t - \tau), \quad (7.4)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -a^T(t)Q(t) - Q(t)a(t) + L(t) - \\ & Q(t) \exp\left(-\int_{t-\tau}^t a(s)ds\right)B(t)R^{-1}(t) \times \\ & B^T(t) \exp\left(-\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right)Q(t), \end{aligned} \quad (7.5)$$

con la condición terminal $Q(T) = \Phi$.

Al susituir el control óptimo (7.4) en la ecuación del estimado óptimo,obtenemos la siguiente ecuación para el estado estimado óptimamente controlado

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a(t)m(t) + B(t)(R(t))^{-1}B^T(t) \exp\left(-\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right) \times \\ & Q(t)m(t - \tau))dt + P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right) \times \\ & A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t - h))dt), \end{aligned} \quad (7.6)$$

con la condición inicial $m(s) = E(\phi(s))$, $s \in [t_0 - \tau, t_0)$ y $m(t_0) = E(\phi(t_0) | F_{t_0}^Y)$, $s = t_0$, donde la matriz de varianza del error $P(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} dP(t) = & (P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(t)b^T(t) - \\ & P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t)(F(t)F^T(t))^{-1} \times \\ & A(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a(s)ds\right)P(t)dt. \end{aligned} \quad (7.7)$$

con la condición inicial $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | y(t_0))$.

Entonces, la ecuación para el estado estimado óptimamente controlado (7.6), la ecuación matricial cuyos componentes representan la ganancia (7.5), la ley de control óptima (7.4), y la ecuación de varianza (7.7) nos da la solución completa del problema de control óptimo para estados no observados de sistemas lineales con retardo en el control y en las observaciones.

7.2 Problema de robustificación del controlador para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.

7.2.1 Planteamiento del problema del controlador robusto.

En aplicaciones practicas, un sistema de control opera bajo condiciones de incertidumbre que pueden generarse por variaciones en los parámetros o perturbaciones externas. Consideremos la trayectoria real del sistema de control perturbado

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(t)u + g_1(x(t), t) + g_2(x(t - \tau), t), \quad (7.8)$$

Aquí $u \in R^m$ es la entrada de control, el rango de la matriz $B(t)$ es completo e igual a m para cualquier $t > t_0$, y la matriz pseudoinversa de B es uniformemente acotada:

$$\|B^+(t)\| \leq b^+, \quad b^+ = \text{const} > 0, \quad B^+(t) := [B^T(t)B(t)]^{-1}B^T(t), \quad (7.9)$$

y $B^+(t)B(t) = I$, donde I es la matriz identidad m -dimensional. Las entradas g_1 y g_2 representan perturbaciones suaves correspondientes a las perturbaciones y no linealidades en el sistema. Para g_1, g_2 , asumimos que las condiciones de acoplamiento estandar se satisfacen: $g_1, g_2 \in \text{span}B$, o, en otras

palabras, existen funciones suaves γ_1, γ_2 tales que

$$g_1(x(t), t) = B(t)\gamma_1(x(t), t), \quad (7.10)$$

$$g_2(x(t - \tau), t) = B(t)\gamma_2(x(t - \tau), t), \quad (7.11)$$

$$\|\gamma_1(x(t), t)\| \leq q_1\|x(t)\| + p_1, \quad q_1, p_1 > 0, \quad (7.12)$$

$$\|\gamma_2(x(t - \tau), t)\| \leq q_2\|x(t - \tau)\| + p_2, \quad q_2, p_2 > 0, \quad (7.13)$$

Las últimas dos condiciones proveen restricciones razonables en el crecimiento de las incertidumbres.

También consideremos el sistema de control nominal

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t)) + B(t)u_0(x_0(t - \tau), t), \quad (7.14)$$

donde una cierta ley de control dependiente del retardo $u_0(x(t - \tau), t)$ es realizado.

El problema es reproducir el movimiento del estado nominal determinado por (7.14) en el sistema de control perturbado (7.8).

Asumimos las siguientes condiciones iniciales para el sistema (7.14)

$$x(s) = \phi(s), \quad (7.15)$$

donde $\phi(s)$ es una función continua a trozos definida en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$.

Entonces, el problema de control, consiste en la robustificación del control diseñado para el sistema nominal (7.14) con respecto a las incertidumbres g_1, g_2 : es decir encontrar ley de control $u = u_0(x(t - \tau), t) + u_1(t)$ tal que las trayectorias perturbadas (7.8) con las condiciones iniciales (7.15) coincidan con las trayectoria nominal (7.14) con la misma condición inicial (7.15).

7.2.2 Principios de diseño para el compensador de perturbación en el estado.

Diseñaremos una ley de control para (7.8) en la forma:

$$u(t) = u_0(x(t - \tau), t) + u_1(t), \quad (7.16)$$

donde $u_0(x(t - \tau), t)$ es el control nominal por retroalimentación diseñado para (7.14), y $u_1(t) \in R^m$ es el control relevador generando el modo deslizante integral en algún espacio auxiliar para rechazar las

incertidumbres g_1, g_2 . Substituyendo la ley de control (7.16) en el sistema (7.8), obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = & f(x(t)) + B(t)u_0(x(t-\tau), t) + B(t)u_1(t) + \\ & g_1(x(t), t) + g_2(x(t-\tau), t),\end{aligned}\quad (7.17)$$

Definamos la función auxiliar

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t), t), \quad (7.18)$$

donde $s_0(x(t), t) = B^+(t)x(t)$, y $z(t)$ es la variable auxiliar definida en (7.24). Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) = & \dot{z}(t) + G(t)[f(x(t)) + B(t)u_0(x(t-\tau), t) + \\ & B(\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-\tau), t) + B(t)u_1(t))] + (\partial s_0(x(t), t)/\partial t),\end{aligned}\quad (7.19)$$

$$G(t) = \partial s_0(x(t), t)/\partial x = B^+(t), \quad (7.20)$$

$$\partial s_0(x(t), t)/\partial t = (d(B^+(t))/dt)x(t). \quad (7.21)$$

Debemos notar que en esta estructura modificada de modos deslizantes integrales (con respecto a xx), no se requiere que el control óptimo $u_0(x(t))$ sea diferenciable, y que la superficie de modos deslizantes dada por la matriz $GB = B^+B = I$ siempre es invertible.

La filosofía del control por modos deslizantes integrales es la siguiente: Para lograr que $x(t) = x_0(t)$ para todos $t \in [t_0, \infty)$, el modo deslizante debe estar organizado en la superficie $s(t)$, dado que la siguiente compensación de la perturbación debe obtenerse en el movimiento del modo deslizante.

$$\begin{aligned}B^+(t)B(t)u_{1eq}(t) = \\ - B^+(t)B(t)\gamma_1(x(t), t) - B^+(t)B(t)\gamma_2(x(t-h), t),\end{aligned}\quad (7.22)$$

esto es

$$u_{1eq}(t) = -\gamma_1(x(t), t) - \gamma_2(x(t-h), t), \quad (7.23)$$

Debemos notar que el control equivalente $u_{1eq}(t)$ puede determinarse sin ambigüedad a partir de la última igualdad y de la condición inicial para $x(t)$.

Definamos la variable auxiliar $z(t)$ como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = -B^+(t)[f(x(t)) + B(t)u_0(x(t-\tau), t)] + d((B^+(t))/dt)x(t), \quad (7.24)$$

con la condición inicial $z(0) = -s_0(0) = -B^+(0)\varphi(0)$.

Entonces, la ecuación de la superficie deslizante toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= B^+(t)[B(t)(\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-\tau), t) + B(t)u_1(t))] = \\ &= \gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-\tau), t) + u_1(t) = 0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

Finalmente, para realizar el modo deslizante, el control relevador se diseña:

$$u_1(t) = -M(x(t), x(t-\tau), t)\text{sign}[s(t)], \quad (7.26)$$

$$M = q(\|x(t)\| + \|x(t-\tau)\|) + p, \quad (7.27)$$

Además $q > q_1, q_2$, $p > p_1 + p_2$, donde $\text{sign}[s(t)] = [\text{sign}(s_1(t)), \dots, \text{sign}(s_m(t))]$ para $s(t) \in R^m$,

La convergencia hacia y a lo largo de la superficie del modo deslizante $s(t) = 0$ es asegurada por la función de Lyapunov $V(t) = s^T(t)s(t)/2$ para el sistema (7.10) con la entrada de control $u_1(t)$ definida en (7.26):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s^T(t)[\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-h), t) + u_1(t)] \leq \\ &= -|s(t)|([q(\|x(t)\| + \|x(t-\tau)\|) + p] + \\ &= [\gamma_1(x(t), t) + \gamma_2(x(t-\tau), t)]) < 0, \end{aligned} \quad (7.28)$$

donde $|s(t)| = \sum_{i=1}^m |s_i(t)|$.

7.2.3 Principios de diseño para el compensador de perturbación en la observación.

Sea el proceso de observación (7.2) corrompido con la perturbación desconocida

$$\begin{aligned} dy(t) &= (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + F(t)dW_2(t) + \\ &= (k_1(x(t), t) + k_2(x(t-h), t))dt, \end{aligned} \quad (7.29)$$

donde $k_1(x(t), t)$ y $k_2(x(t-h), t)$ no son ruidos Gaussianos, posiblemente determinísticos, que no portan información útil y dependen de los estados actuales y retrazados. Tales perturbaciones obviamente deterioran la calidad de la estimación y deben ser eliminados.

Para este propósito, asumamos que debemos notar que no hemos supuesto el cumplimiento de las condiciones de acoplamiento las cuales nos ofrecen restricciones razonables en su crecimiento, las perturbaciones satisfacen las siguientes condiciones ;

$$\|k_1(x(t), t)\| \leq q_3 \|x(t)\| + p_3, \quad q_3, p_3 > 0, \quad (7.30)$$

$$\|k_2(x(t-h), t)\| \leq q_4 \|x(t-h)\| + p_4, \quad q_4, p_4 > 0, \quad (7.31)$$

El proceso de observación (7.29) está formado por una parte útil, que lleva información, y una parte parasita, $y(t) = y_u(t) + y_p(t)$, donde $dy_u(t) = (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + B(t)dW_2(t)$ y $dy_p(t) = (g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t))dt$.

Si únicamente la señal útil $y_u(t)$ está presente, el filtro óptimo basado en la observación $y_u(t)$ nos genera el estimado dedeado $m_u(t)$ para el estado no observado $x(t)$. En este punto el problema es sugerir una componente de "ajuste" $y_1(t)$ que, al ser agregada a la observación actual $y(t) = y_u(t) + y_p(t)$, compense las perturbaciones en la observación k_1, k_2 .

La siguiente técnica de modos deslizantes resuelve este problema:

Definamos la superficie deslizante $\sigma(t)$ como $\sigma(t) = z(t) + \sigma_0(t)$, donde $\sigma_0(t) = m(t)$ y $z(t)$ es la variable auxiliar a ser asignada.

La condición de movimiento a lo largo de la superficie deslizante, $d\sigma(t)/dt = 0$, requiere que:

$$d\sigma(t) = dz(t) + (E(f(x(t)) | F_{t_0}^Y) + B(t)u(t-\tau))dt + C(t)[dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt + y_1(t)dt] = 0, \quad (7.32)$$

donde $y(t)$ es el proceso de observación perturbado (7.29), $C(t) = P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds) A^T(t) (F(t)F^T(t))^{-1}$ es la matriz de ganancia del filtro, y $y_1(t)$ es el "ajuste" a la observación, cuyo valor en la superficie deslizante es denotado por $y_{1eq}(t)$. El valor del "ajuste" en la superficie deslizante debe ser igual a

$$y_{1eq}(t) = -(k_1(x(t), t) + k_2(x(t-h), t)), \quad (7.33)$$

lo cual compensará las perturbaciones desconocidas. Al hacer esto, en vista de $d\sigma(t)/dt = dz(t)/dt + d\sigma_0(t)/dt$, la variable auxiliar $z(t)$ es definida por la dinámica:

$$\begin{aligned} dz(t) = & (-E(f(x(t)) | F_{t_0}^Y) - B(t)u(t - \tau))dt - \\ & C(t)[dy_u(t) - (A_0(t) + A(t)m(t - h))dt], \end{aligned} \quad (7.34)$$

con la condición inicial $z(0) = -\sigma_0(0) = -m(0)$, donde $y_u(t)$ es el promedio de algunas realizaciones *a priori* conocidas de la señal útil. Así, el estimado $m(t)$ basado en las observaciones perturbadas con el compensador $y(t) + y_1(t)$ y el estimado deseado $m_u(t)$ coinciden en el promedio cuadrático, como variables aleatorias, en la superficie deslizante $\sigma(t) = 0$, y la ecuación de la superficie deslizante toma la forma

$$\dot{\sigma}(t) = k_1(x(t), t) + k_2(x(t - h), t) + y_{1eq}(t) = 0, \quad (7.35)$$

Asegurando así la compensación de las perturbaciones en la observación.

Finalmente, para realizar el modo deslizante, diseñamos el control relevador:

$$y_1(t) = -M_1(x(t), x(t - h), t) \text{sign}[\sigma(t)], \quad (7.36)$$

donde $M_1 = \tilde{q}(\|x(t)\| + \|x(t - h)\|) + \tilde{p}$, $\tilde{q} > q_3, q_4$, $\tilde{p} > p_3 + p_4$.

La convergencia en el promedio cuadrático hacia y a lo largo de la superficie del modo deslizante es demostrada utilizando la misma función de Lyapunov que en la subsección precedente.

A continuación, se presenta la robustificación del controlador óptimo diseñado en (7.4)–(7.7). Este regulador robusto es diseñado asignando la superficie de modos deslizantes de acuerdo a (7.18)–(7.19) y (7.32)–(7.34), y subsiguientemente moviéndose hacia y a lo largo de esta superficie utilizando el control relevador (7.26), (7.36).

7.3 Robustificación del controlador óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada y en las observaciones.

Consideremos la ecuación de estado perturbada (7.1), cuya trayectoria es afectada por las incertidumbres g_1, g_2 , que representan las perturbaciones y no linealidades del sistema

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + B(t)u(t - \tau)dt +$$

$$b(t)dW_1(t) + g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t), \quad (7.37)$$

con la condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - \tau, t_0]$, y la ecuación de observación (7.2), la cual es afectada por las incertidumbres k_1, k_2 , que representan las perturbaciones y no linealidades en la observación (7.2)

$$\begin{aligned} dy(t) = & (A_0(t) + A(t)x(t-h))dt + F(t)dW_2(t) + \\ & (k_1(x(t), t) + k_2(x(t-h), t))dt. \end{aligned} \quad (7.38)$$

También asumamos que las incertidumbres satisfacen las condiciones de acoplamiento estándar y las de crecimiento (7.10), dadas en secciones anteriores, y la función de costo cuadrática (7.2).

La ecuación del estimado óptimamente controlado (7.7) para el estado (7.37) sobre las observaciones (7.38) toma la forma

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a(t)m(t) + B(t)(R(t))^{-1}B^T(t) \times \\ & \exp\left(-\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds\right)Q(t)m(t-\tau) + Bg_1(x(t), t) + \\ & Bg_2(x(t-h), t))dt + P(t) \exp\left(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds\right)A^T(t) \times \\ & (F(t)F^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt), \end{aligned} \quad (7.39)$$

con la condición inicial $m(s) = E(\phi(s))$, $s \in [t_0 - \tau, t_0]$ y $m(t_0) = E(\phi(t_0) | F_{t_0}^Y)$, $s = t_0$.

El problema es robustificar el controlador óptimo obtenido en (7.4)–(7.7), utilizando los métodos especificados por (7.18)–(7.26) y (7.32)–(7.36).

Primero, definamos el nuevo control (7.16) como sigue: $u(t) = u_0(x(t-\tau), t) + u_1(t)$, donde el control óptimo $u_0(x(t-\tau), t)$ coincide con (7.4) y la componente de robustificación $u_1(t)$ es obtenida conforme la ecuación (7.26)

$$u_1(t) = -M(x(t), x(t-\tau), t) \text{sign}[s(t)], \quad (7.40)$$

$$M = q(\|x(t)\| + \|x(t-\tau)\|) + p, \quad (7.41)$$

$q > q_1, q_2$, $p > p_1 + p_2$.

Consecuentemente, la función para la superficie del modo deslizante $s(t)$ es definida como:

$$s(t) = z(t) + s_0(x(t), t), \quad (7.42)$$

donde $s_0(m(t), t) = B^+(t)m(t)$, y la variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned} dz(t) = & -B^+(t)[a(t)m(t)dt + \\ & B(t)(R(t)^{-1}B^T(t) \exp(-\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds)Q(t)m(t-\tau)dt + \\ & C(t)(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt)], \end{aligned} \quad (7.43)$$

con la condición inicial $z(0) = -B^+(0)\varphi(0)$, donde $C(t) = P(t) \exp(-\int_{t-h}^t a^T(s)ds) A^T(t) (F(t)F^T(t))^{-1}$.

Note que el compensador $u_1(t)$ introducido en este momento puede también compensar las perturbaciones en la observación k_1, k_2 , si la matriz de ganancia del filtro $C(t)$ pertenece al espacio de imágenes de la matriz $B(t)$, esto es, $C(t) = B(t)M(t)$.

Este resultado se obtiene fácilmente de la ecuación del modo deslizante (7.19) y la estructura de la ecuación del estimado controlado perturbado (7.39). Así, el control introducido $u_1(t)$ puede compensar las perturbaciones del estado g_1, g_2 y las perturbaciones en la observación k_1, k_2 , si la condición de acoplamiento $C(t) = B(t)M(t)$ se satisface. Sin embargo, el compensador (7.36) puede aplicarse para compensar las perturbaciones en la observación en el caso no acoplado. Para este propósito, definamos el nuevo proceso de observación $y(t) + y_1(t)$, donde $y(t)$ es la observación actual, y la componente de robustificación $y_1(t)$ es obtenida de acuerdo a (7.36)

$$y_1(t) = -M_1(x(t), x(t-h), t) \text{sign}[\sigma(t)], \quad (7.44)$$

donde $M_1 = \tilde{q}(\|x(t)\| + \|x(t-h)\|) + \tilde{p}$, $\tilde{q} > q_3, q_4$, $\tilde{p} > p_3 + p_4$.

Consecuentemente, la función de la superficie del modo deslizante $\sigma(t)$ se define

$$\sigma(t) = z(t) + \sigma_0(t), \quad (7.45)$$

donde $\sigma_0(t) = m(t)$, y la variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned} dz(t) = & (-a(t)m(t) - \\ & B(t)(R(t)^{-1}B^T(t) \exp(-\int_{t-\tau}^t a^T(s)ds)Q(t)m(t-\tau))dt - \\ & C(t)[dy_u(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt], \end{aligned} \quad (7.46)$$

con la condición inicial $z(0) = -\sigma_0(0) = -m(0)$.

Las observaciones sin perturbación $y_u(t)$ pueden determinarse del sistema nominal correspondiente (7.37),(7.38), donde no existen perturbaciones, ruidos blancos, y las condiciones iniciales para (7.37) coinciden con m_0 .

Notemos que el compensador $y_1(t)$ introducido en este momento puede también compensar las perturbaciones en el estado g_1, g_2 , si las perturbaciones en el estado satisfacen las condiciones de acoplamiento con la matriz de ganancia del filtro $C(t)$, esto es.,

$$g_1(x(t), t) = C(t)\beta_1(x(t), t), \quad (7.47)$$

$$g_2(x(t-h), t) = C(t)\beta_2(x(t-h), t), \quad (7.48)$$

Este resultado se obtiene fácilmente de la ecuación de modos deslizantes (7.32) y la estructura de la ecuación del estimado perturbado controlado (7.39). Un caso de compensación conjunta de las perturbaciones en el estado y en la observación utilizando solamente el compensador de perturbaciones en la observación (7.36) es presentado en la siguiente sección.

7.4 Ejemplo

En esta sección presentamos un ejemplo de diseño de un controlador para un sistema lineal con retardo en la entrada y en las observaciones aplicando el esquema (7.4)–(7.7), perturbaremos el controlador obtenido con ruidos en las ecuaciones del estado y de la observación, y diseñaremos un compensador robusto de la perturbación en la observación para esos ruidos, a través de modos deslizantes, aplicando el esquema (7.32)–(7.36).

Consideremos un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t-0.1), \quad x(s) = \phi(s), \quad s \in [-0.1, 0], \quad (7.49)$$

donde $\phi(s) = N(0, 1)$ para $s \in [-0.1, 0]$, y $N(0, 1)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unitaria. El proceso de observación esta dado por

$$y(t) = x(t-0.2) + \psi(t), \quad (7.50)$$

donde $\psi(t)$ es un ruido blanco Gaussiano, es cual es la derivada débil en el promedio cuadrático de un proceso estandar de Wiener [88]. Las ecuaciones (7.49) y (7.50) nos presentan la forma convencional para las ecuaciones (7.1) y (7.2), las cuales se usan actualmente en la práctica, [9].

El problema de control consiste en encontrar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, que minimice el criterio

$$J = E\left\{\frac{1}{2}[x(T) - x^*]^2 + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt\right\}, \quad (7.51)$$

donde $T = 0.45$, y $x^* = 25$ es un valor grande de $x(t)$, *a priori*, inalcanzable por el sistema óptimamente controlado en el tiempo T . En otras palabras, el problema de control consiste en maximizar el estado no observado $x(t)$ aplicando la mínima energía de control u .

Apliquemos el controlador óptimo (7.4)–(7.7) para sistemas lineales con retardo en el control y en la observación al sistema (7.49),(7.50).

Dado que $\exp(-\int_{t-h}^t a^T(s) ds) = \exp(-0.2)$ y $\exp(-\int_{t-\tau}^t a^T(s) ds) = \exp(-0.1)$, la ley de control (7.4) toma la forma

$$u^*(t - 0.1) = (\exp(-0.1))Q(t)m(t - 0.1), \quad (7.52)$$

donde

$$\dot{m}(t) = m(t) + u(t - 0.1) + (\exp(-0.2))P(t)(y(t) - m(t - 0.2)), \quad (7.53)$$

$$m(s) = 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \quad (7.54)$$

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) - (\exp(-0.1)Q(t))^2, \quad Q(0.45) = 1, \quad (7.55)$$

$$\dot{P}(t) = 2P(t) - (\exp(-0.2)P(t))^2, \quad P(0) = P_0, \quad (7.56)$$

Al substituir el control (7.52) en (7.53), la ecuación del estimado óptimamente controlado toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & m(t) + (\exp(-0.1))Q(t)m(t - 0.1) + \\ & (\exp(-0.2))P(t)(y(t) - m(t - 0.2)), \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$m(s) = 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \quad (7.58)$$

Para la simulación numérica del sistema (7.49),(7.50), el valor inicial $x(0) = 0.05$ es asignado para la realización de la variable Gaussiana $x(0) = \phi(0)$ en (7.49), los valores $m_0 = 1.9$ y $P_0 = 10$ son asignados como las condiciones iniciales del estimado $m(t)$ y de la ganancia del filtro $P(t)$, respectiva-

mente, y la perturbación $\psi(t)$ en (7.50) es realizado utilizando la función de MatLab para el ruido blanco Gaussiano.

Los resultados de aplicar el controlador (7.4)–(7.7) al sistema (7.49),(7.50) son mostrados en la Figura 1. La cual presenta las gráficas del estado (7.49) $x(t)$ controlado por (7.52), el estimado controlado (7.57) $m(t)$, el criterio (7.51) $J(t)$, el control (7.52) $u^*(t)$, la varianza (7.56) $P(t)$, y la ganancia del control (7.55) $Q(t)$, en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (7.49), el estimado controlado (7.53), y el criterio (7.51) al momento final $T = 0.45$ son $x(0.45) = 6.87$, $m(0.45) = 6.876$, y $J(0.45) = 215.43$.

La siguiente tarea es introducir perturbaciones en el estado y en las observaciones del sistema controlado (7.49). Esas perturbaciones son realizadas como una constante: $g(t) = k(t) = 100$. Las condiciones de acoplamiento son válidas, debido a que el estado $x(t)$, el control $u(t)$, y las observaciones $y(t)$ tienen la misma dimensión: $\dim(x) = \dim(u) = \dim(y) = 1$. Las restricciones en el crecimiento de la perturbación se satisfacen con $q_1 = q_2 = p_2 = q_3 = q_4 = p_4 = 0$ y $p_1 = p_3 = 100$, dado que $\|g(t)\| = \|k(t)\| = 100$. La ecuación del controlador perturbado (7.57) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = m(t) + (\exp(-0.1))Q(t)m(t-0.1) + 100 + \\ (\exp(-0.2))P(t)(y(t) - m(t-0.2) + 100), \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$m(s) = 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \quad (7.60)$$

El desempeño del sistema se deteriora significativamente al introducir las perturbaciones. La Figura 2 presenta las gráficas del estado (7.49) $x(t)$ controlado por (7.52), el estimado controlado (7.59) $m(t)$, el criterio (7.51) $J(t)$, y el control (7.52) $u(t)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (7.49), el estimado controlado (7.59) y el criterio (7.51) al momento final $T = 0.45$ son $x(0.45) = 255.7$, $m(0.45) = 511$, y $J(0.45) = 96660$. El deterioro en el valor del criterio en comparación al obtenido utilizando el controlador óptimo (7.53) es de más de 300 veces.

Finalmente diseñaremos el compensador robusto en las observaciones, usando la técnica de modos deslizantes integrales, para las perturbaciones introducidas. La nueva ecuación de estado controlada es:

$$\dot{m}(t) = m(t) + (\exp(-0.1))Q(t)m(t-0.1) + 100 +$$

$$(\exp(-0.2))P(t)(y(t) - m(t - 0.2) + 100 + y_1(t)), \quad (7.61)$$

$$m(s) = 0, \quad s < 0, \quad m(0) = m_0, \quad (7.62)$$

donde el compensador $y_1(t)$ se obtiene conforme a (7.36)

$$y_1(t) = -M(x(t), x(t - h), t) \text{sign}[\sigma(t)], \quad (7.63)$$

y $M = 230.4 > p_1(\exp(0.2))(\max_{t \leq 0.45}(P^{-1}(t))) + p_3$.

La superficie de modos deslizantes $\sigma(t)$ se define como:

$$\sigma(t) = z(t) + \sigma_0(t), \quad (7.64)$$

donde $\sigma_0(t) = m(t)$.

La variable auxiliar $z(t)$ satisface la ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & -m(t) - (\exp(-0.1))Q(t)m(t - 0.1) - \\ & (\exp(-0.2))P(t)(y_u(t) - m(t - 0.2)), \end{aligned} \quad (7.65)$$

con la condición inicial $z(0) = -m(0) = -1.9$, donde las observaciones no perturbadas $y_u(t)$ son determinadas del sistema no perturbado (7.49),(7.50)

$$\dot{x}_u(t) = x(t) + (\exp(-0.1))Q(t)x_u(t - 0.1), \quad (7.66)$$

$$y_u(t) = x_u(t - 0.2), \quad (7.67)$$

con la condición inicial $x_u(s) = 0, \quad s < 0, \quad x_u(0) = m_0$.

Después de introducir el compensador (7.63) en la ecuación del controlador (7.61), el desempeño del estimado controlado es mejorado notablemente. La Figura 3 presenta las gráficas del estado (7.49) $x(t)$ controlado por (7.52), el estimado controlado (7.61) $m(t)$, el criterio (7.51) $J(t)$, y el control (7.52) $u(t)$, después de aplicar el compensador (7.63), en el intervalo $[0, T]$. Los valores del estado (7.49), el estimado controlado (7.61) y el criterio (7.51) en el momento final $T = 0.45$ son $x(0.45) = 8.087$, $m(0.45) = 8.066$, y $J(0.45) = 215.31$. Notemos que, los valores del criterio y del estado después de aplicar el compensador (7.63) son mejores que los valores obtenidos para el controlador (7.57), aunque la aproximación del estado real por el estimado $m(t)$ no es buena. Este fenómeno es producido por la diferencia en las realizaciones aleatorias del ruido blanco en las observaciones (7.50) en ambos casos.

Sin embargo, a pesar de esto, los valores obtenidos del criterio, el estado, y la variable controlada son absolutamente admisibles como representaciones de las variables óptimamente controladas (7.52)–(7.57) en el problema no perturbado, tomando en cuenta el valor máximo de las diferencias absolutas entre ambas realizaciones de las funciones de ruido blanco del MatLab, que alcanzan valores entre 6 y 8 en cada intervalo de la longitud de 0.05.

Este ejemplo muestra que el compensador en la observación (7.63) resume las acciones de los compensadores en el estado y en las observaciones (7.26) y (7.36), si estos fueran diseñados de manera independiente. Realmente, para estos compensadores, la superficie de modos deslizantes coincide: $s(t) = \sigma(t) = m(t) + z(t)$, donde $z(t)$ es definido por (7.65), y los compensadores son iguales a $u_1(t) = -M_1(x(t), x(t-h), t) \text{sign}[s(t)]$, $M_1 = 100.1 > p_1$, y $y_1(t) = -M_2(x(t), x(t-h), t) \text{sign}[\sigma(t)]$, $M_2 = 100.1 > p_3$. Tomando en cuenta que el compensador en la observación $y_1(t)$ forma parte de la ecuación (7.61) para la matriz de ganancia del filtro, a través del factor $(\exp(-0.2))P(t)$, el valor propuesto $M = 230.4 > p_1(\exp(0.2))(\max_{t \leq 0.45}(P^{-1}(t))) + p_3$ puede obtenerse para el compensador (7.63).

7.5 Resultados de las simulaciones.

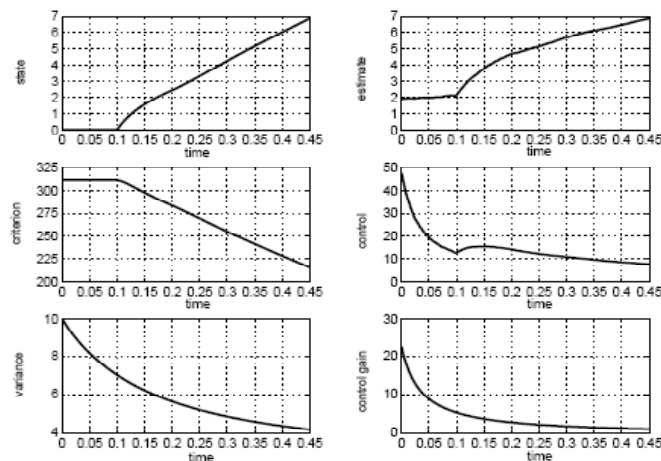


Figura 1: Gráficas del estado (7.49) $x(t)$ controlado por el regulador lineal óptimo (7.52) diseñado para sistemas con retardo en la entrada y en las observaciones, el estimado controlado (7.57) $m(t)$, el

criterio (7.51) $J(t)$ el control (7.52) $u^*(t)$ la varianza (7.56) $P(t)$, y la ganancia del control (7.55) $Q(t)$ en el intervalo $[0, 0.45]$.

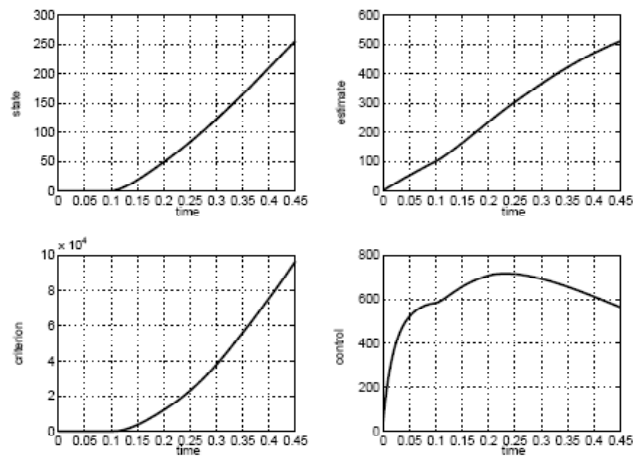


Figura 2: Sistema controlado en la presencia de perturbaciones. Gráficas del estado perturbado (7.49) $x(t)$, el estimado controlado perturbado (7.59) $m(t)$, el criterio perturbado (7.51) $J(t)$, y el control perturbado (7.52) $u(t)$ en el intervalo $[0, 0.45]$.

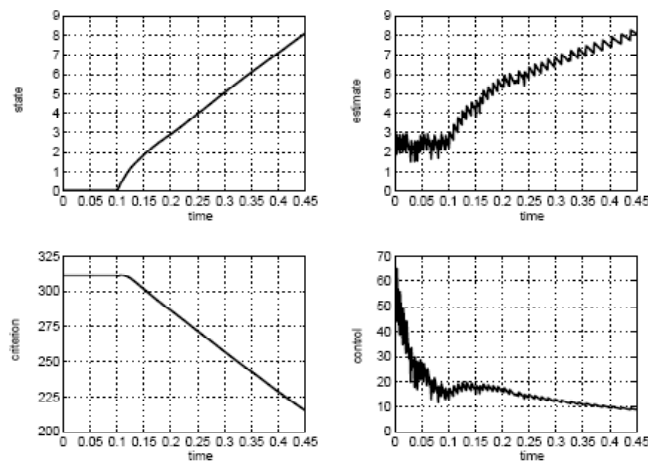


Figura 3: Sistema controlado después de aplicar el compensador robusto con MDI. Gráficas del estado compensado (7.49) $x(t)$, el estimado controlado compensado (7.61) $m(t)$, el criterio compensado (7.51) $J(t)$, y el control compensado (7.52) $u(t)$ en el intervalo $[0, 0.45]$.

Capítulo 8.

Comparación del desempeño de filtros clásicos vs. filtros de modos deslizantes para sistemas estocásticos.

8.1 Sistemas Lineales.

8.1.1 Algoritmo de filtrado de modos deslizantes para sistemas lineales estocásticos

Consideremos el sistema descrito por la ecuación diferencial lineal de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + Gw_1(t), \quad t \geq t_0, \quad (8.1)$$

y las observaciones lineales

$$y(t) = C(t)x(t) + w_2(t). \quad (8.2)$$

Aquí $w_1(t)$ es el ruido de excitación de estado, y $w_2(t)$ es el ruido en la observación de estado.

Se asume que el proceso conjunto $[w_1(t), w_2(t)]$ puede describirse como un ruido Gaussiano blanco con intensidad

$$\begin{bmatrix} v_1(t) & v_{12}(t) \\ v_{12}^T(t) & v_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq t_0.$$

Además, el estado inicial $x(t_0)$ es considerado no correlacionado con w_1 y w_2 ,

$$E \{x(t_0)\} = \bar{x}_0, \quad E \left\{ [x(t_0) - \bar{x}_0] [x(t_0) - \bar{x}_0]^T \right\} = Q_0,$$

donde $E(x)$ denota el valor esperado de la variable aleatoria x , y $u(t)$, $t \geq t_0$, es una entrada dada al sistema.

Las ecuaciones del Filtro de Kalman Bucy para el sistema (8.1) y (8.2) son, de acuerdo a (marco teorico):

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)u(t) + K(t) \left[y(t) - C(t)\tilde{x}(t) \right]. \quad (8.3)$$

$$K^0(t) = Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t), \quad (8.4)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la ecuación matricial de Riccati

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + G^T(t)V_1(t)G(t) - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)Q(t), \quad (8.5)$$

con la condición inicial $Q(t_0) = Q_0$. La condición inicial del filtro debe escogerse tal que $\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$.

8.1.2 Algoritmo para sistemas con dinámica estable

El siguiente filtro basado en la técnica de modos deslizantes es propuesto para el sistema dinámico cuyos estados están dados por (8.1)

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)\text{sign}[y(t) - C(t)\tilde{x}(t)], \quad (8.6)$$

donde $\tilde{x}(t)$ es el estimado diseñado, y $K(t)$ es la matriz de ganancia del filtro a ser asignada. Entonces, la dinámica del error de reconstrucción está dado por:

$$\frac{d}{dt}(x - \tilde{x}) = A(x - \tilde{x}) + Gw_1 - K\text{sign}[y - C\tilde{x}]. \quad (8.7)$$

El objetivo del filtro en modos deslizantes es el de alcanzar la superficie del modo deslizante definido como

$$s = y - C\tilde{x} = C[x - \tilde{x}] + w_2 = 0. \quad (8.8)$$

Al alcanzar la superficie $s = 0$, la dinámica del error de reconstrucción es:

$$\frac{d}{dt}(x - \tilde{x}) = A(x - \tilde{x}) + Gw_1. \quad (8.9)$$

Si el sistema original (8.1) es estable (esto es, la matriz A es estable), el error de estimación converge a cero para cualquier realización acotada del ruido blanco w_1 . La convergencia asintótica del error de estimación a cero también toma lugar [55] en el filtro de Kalman-Bucy para sistemas estables, donde la ecuación de varianza del error toma la forma (8.4)

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) + G^T(t)V_1(t)G(t) - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)Q(t). \quad (8.10)$$

Sin embargo, debe notarse que, primero, el error del filtro de Kalman-Bucy muestra una convergencia estrictamente asintótica, mientras que el estimado por el filtro de modos deslizantes (refxxx) alcanza una K - vecindad de el estado real en un tiempo finito y, segundo, la condición de estabilización debe ser satisfecha [55] para convergencia del estimado por el filtro de Kalman-Bucy.

8.1.3 Algoritmo para sistemas con dinámica inestable

Considere ahora el caso de dinámica inestable (esto es, la matriz A es inestable) en el sistema original (8.1). Si el par (A, C) es observable, la condición de modos deslizantes $s = 0$ significa que

$$s = y - C \tilde{x} = C[x - \tilde{x}] + w_{20} = 0, \quad (8.11)$$

donde w_{20} son las componentes del ruido blanco $w_2(t)$ correspondientes a las componentes observables de $x(t)$. En otras palabras, al alcanzar el modo deslizante en la superficie $s = 0$, los estimados de las componentes observables del vector de estado convergen a la K - vecindad de sus valores reales en un tiempo finito. Entonces, la diferencia entre ellos es especificada por la realización del ruido blanco $w_{20}(t)$.

En el filtro de Kalman-Bucy, el error de estimación para las componentes observables se especifican por los valores asintóticos de la varianza $Q(t)$, $t \rightarrow \infty$. Para sistemas invariantes en el tiempo, esto es determinado conforme la solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$0 = \dot{Q} = AQ + QA^T + V_1 - QC^T V_2^{-1} CQ, \quad (8.12)$$

y puede ser bastante mayor si la norma de la matriz inestable A es mayor por si misma. Esto también significa que la convergencia asintótica del estimado de Kalman-Bucy para las componentes observables, la cual también tiene lugar actualmente [55], puede ser muy lento.

Para componentes inestables y no observables, la dinámica de su error de estimación no es afectada por las condiciones de modos deslizantes $s = y - C \tilde{x} = 0$ y está dada directamente por

$$\frac{d}{dt}(x - \tilde{x})_{NO} = A(x - \tilde{x})_{NO} + bw_{1NO}, \quad (8.13)$$

donde el subíndice NO indica la componente no observable del vector de estado. En este caso, el error de reconstrucción obviamente diverge de cero.

En el filtro de Kalman-Bucy, el error de estimación para las componentes no observables e inestables están dadas por

$$\frac{d}{dt}(x - \tilde{x})_{NO} = A(x - \tilde{x})_{NO} + Gw_{1NO} - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t) \left[y - C \tilde{x} \right]_{NO},$$

y su varianza satisface la ecuación (8.5), cuya solución asintóticamente diverge a infinito. Entonces, ambos filtros, comparados, dan estimados no confiables para las componentes no observables e inestables de (8.1). Aun así, el estimado en modos deslizantes parece más adecuado dado que su ecuación contiene solamente un ruido blanco, en el lado derecho, mientras que la ecuación del estimado de Kalman-Bucy contiene dos de ellos, tomando en consideración que $y - C \tilde{x}$ es ruido en el caso de componentes no observables.

8.1.4 Ejemplo.

En los siguientes dos ejemplos, las condiciones iniciales son $x_1=8, \tilde{x}_1= x_3 = 7, x_2=5, \tilde{x}_2= x_4 = 4$, el ruido blanco Gaussiano es realizado como la función de matlab correspondiente y el tiempo de simulación es igual a $T = 2$. La perturbación es ausente en la ecuación de estado, $V_1(t) = 0$, y es considerada de manera estándar en la ecuación de observación, $V_2(t) = 1$. En todas las gráficas, x_1 y x_2 son componentes del estado real no observable, x_3 y x_4 son sus estimados, respectivamente.

Ejemplo 1. Consideremos primero un sistema lineal bidimensional con componente estable y observable y una inestable y no observable.

$$\dot{x}_1 = x_1, \tag{8.14}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2, \tag{8.15}$$

$$y = x_2 + w_2. \tag{8.16}$$

Las ecuaciones del filtro en modos deslizantes (8.6) toman la forma

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 + 15 \text{sign}(y - \tilde{x}_2), \tag{8.17}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 + 5 \text{sign}(y - \tilde{x}_2), \tag{8.18}$$

donde la matriz de ganancia es asignada como $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$. Las ecuaciones del Filtro de Kalman-Bucy (8.3)-(8.5) están dadas por

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 + \begin{matrix} q_{11} \\ q_{21} \end{matrix} (y - \tilde{x}_2), \tag{8.19}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 + \frac{q_{12}}{q_{22}} (y - \tilde{x}_2), \quad (8.20)$$

donde $\{q_{11}, q_{12}, q_{22}\}$ son elementos de una matriz simétrica definida positiva Q que satisface la ecuación (8.5).

Los resultados de las simulaciones son mostrados para el filtro en modos deslizantes en la Figura 1 y para el filtro de Kalman-Bucy en la Figura 2.

Example 2. Considere ahora un sistema bidimensional con una componente inestable y observable y otra componente estable y no observable

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad (8.21)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2, \quad (8.22)$$

$$y = x_1 + w_2. \quad (8.23)$$

Las ecuaciones del filtro en modos deslizantes (8.6) toman la forma

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 + 15 \text{sign}(y - \tilde{x}_1) \quad (8.24)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 + 5 \text{sign}(y - \tilde{x}_1) \quad (8.25)$$

donde la matriz de ganancia es asignada como $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$. Las ecuaciones del filtro de Kalman-Bucy (8.3)-(8.5) están dadas por

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 + \frac{q_{11}}{q_{21}} (y - \tilde{x}_1),$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 + \frac{q_{12}}{q_{22}} (y - \tilde{x}_1),$$

donde $\{q_{11}, q_{12}, q_{22}\}$ son los elementos de la matriz simétrica definida positiva Q que satisface la ecuación (8.5).

Los resultados de las simulaciones son mostrados para el Filtro en modos deslizantes en la Figura 3 y para el Filtro de Kalman-Bucy en la Figura 4.

8.1.5 Resultados de las simulaciones.

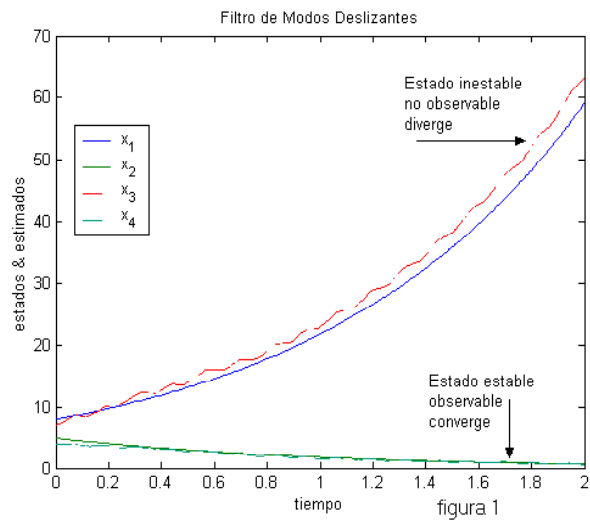


Figura 1:

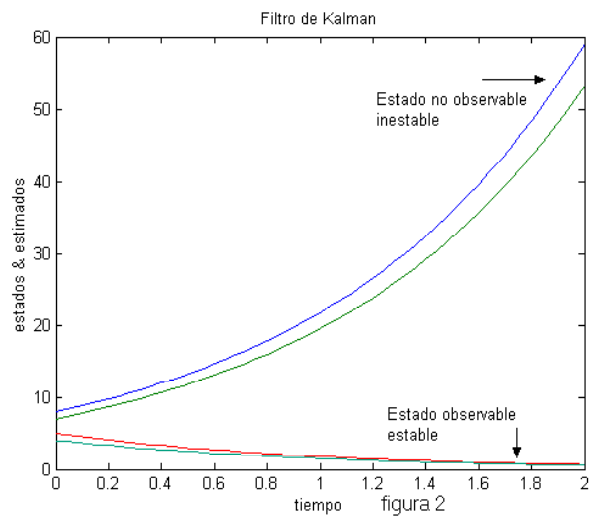


Figura 2:

De acuerdo con la teoría desarrollada, los resultados de las simulaciones obtenidas demuestran convergencia del error de reconstrucción de ambos filtros a cero, para la componente estable, observable y divergencia asintótica al infinito para la componente inestable, no observable. Sin embargo, se debe notar que el valor del estimado del filtro de modos deslizantes es menos divergente en la componente real inestable al tiempo final de la simulación $T = 2$ que del estimado del filtro de Kalman-Bucy, y que

el estimado del filtro en modos deslizantes alcanza la componente real estable más rápido que lo hace el filtro de Kalman-Bucy.

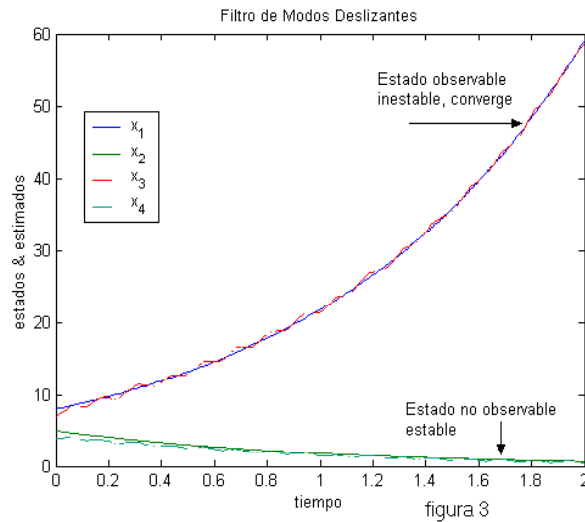


Figura 3:

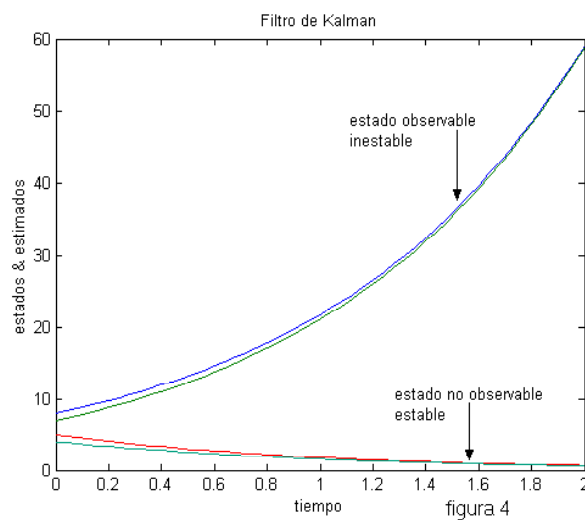


Figura 4:

De acuerdo con la teoría desarrollada, los resultados de las simulaciones realizadas, demuestran convergencia del error de reconstrucción de ambos filtros a cero para ambos componentes, estable y no observable, así como para la inestable y observable. Sin embargo, otra vez, se debe notar que los valores de los estimados del filtro de modos deslizantes, alcanzan el estado real mucho más rápido que lo hace

el filtro de Kalman-Bucy, este demuestra mejor comportamiento de los estimados por el filtro de modos deslizantes desde el punto de vista de diferencia absoluta entre los valores del estado real y su estimado.

8.2 Filtro para sistemas con estados cuadráticos y observaciones lineales.

8.2.1 Filtro óptimo para una ecuación de estado cuadráticas y observaciones lineales.

Sea el proceso aleatorio no observable $x(t)$ que satisface la ecuación cuadrática [12]

$$\begin{aligned} dx(t) = & (a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x(t)x^T(t))dt \\ & + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

y las observaciones lineales dadas por:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \quad (8.29)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado no observable $y(t) \in R^m$ es el proceso de observación, $a_1(t)$ es una matriz cuadrada n - dimensional, $a_2(t)$ es un tensor cúbico, n - dimensional, $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos de Wiener.

El problema de filtrado consiste en encontrar las ecuaciones dinámicas para el mejor estimado para el proceso real $x(t)$ al tiempo t , basado en las observaciones $Y(t) = [y(s) \mid t_0 \leq s \leq t]$, esto es la esperanza condicional $m(t) = E[x(t) \mid Y(t)]$ del proceso real $x(t)$ con respecto a las observaciones $Y(t)$.

La solución al problema establecido es dado por[12]el siguiente sistema de ecuaciones de filtrado, el cual es cerrado con respecto a las variables introducidas, $m(t)$ y $P(t)$:

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \quad (8.30)$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) \mid Y(t_0)), \quad (8.30)$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2(a_2(t)m(t))P(t) + 2P(t)(a_2(t)m(t))^T + b(t)b^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt \quad (8.31)$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T \mid Y(t_0)). \quad (8.32)$$

8.2.2 Filtro De Kalman Bucy Extendido.

En la ecuación del estimado óptimo (8.30), la matriz de ganancia del filtro óptimo es igual a $K_o(t) = P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}$ y puede calcularse en términos de la ecuación de la varianza (8.31).

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t) * m^T(t))dt + K(t)[dy(t) - A(t)m(t)dt], \quad (8.33)$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | Y(t_0)). \quad (8.34)$$

Esta construcción es llamada el filtro de Kalman-Bucy extendido[49]. Una asignación de $K(t)$ frecuentemente encontrada esta basada en el modelo linealizado, esto es, $K(t) = Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}$, donde la matriz $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati correspondiente al sistema linealizado (8.28)

$$dQ(t) = (a_1(t)Q(t) + Q(t)a_1^T(t) + b(t)b^T(t))dt - Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} * A(t)Q(t) \quad (8.35)$$

$$Q(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | Y(t_0)). \quad (8.36)$$

El filtro extendido de Kalman-Bucy dado por las ecuaciones (8.33) y (8.35), así como el filtro óptimo para sistemas cuadráticos dados por (8.30) y (8.31), se utilizarán más adelante en las simulaciones para propósitos de comparación versus el filtro de modos deslizantes diseñado en la siguiente sección.

8.3 Filtro De modos deslizantes.

8.3.1 Filtro De modos deslizantes para sistemas con dinámica estable.

El siguiente filtro basado en la técnica de modos deslizantes es propuesto para el estado de la dinámica del sistema (8.28)

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} = & a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) \\ & + K(t)sign[y(t) - A(t)m(t)], \end{aligned} \quad (8.36)$$

donde $m(t)$ es el estimado diseñado, y $K(t)$ es la matriz de ganancia del filtro a ser asignada. Entonces, la dinámica del error de reconstrucción está dada por:

$$\frac{d}{dt}(x(t) - m(t)) = a_1(t)(x(t) - m(t)) + a_2(t)(x(t)x^T(t) - m(t)m^T(t)) + b(t)w_1(t) - K(t)sign[y(t) - A(t)m(t)]$$

donde $w_1(t)$ es el ruido blanco Gaussiano del estado correspondiente al proceso de Wiener $W_1(t)$.

El objetivo del filtro de modos deslizantes es lograr la superficie de modos deslizantes definida por:

$$s(t) = y(t) - A(t)m(t) = A(t)[x(t) - m(t)] + w_2 = 0, \quad (8.38)$$

donde $w_2(t)$ es el ruido blanco Gaussiano de la observación correspondiente al proceso de Wiener $W_2(t)$.

Al lograr la superficie $s(t) = 0$, la dinámica del error de reconstrucción esta dada por:

$$\frac{d}{dt}(x(t) - m(t)) = a_1(t)(x(t) - m(t)) + a_2(t)(x(t)x^T(t) - m(t)m^T(t)) + b(t)w_1(t). \quad (8.39)$$

Si el sistema original (8.28) es estable, esto es, las matrices $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son estables, el error de estimación converge a cero para cualquier realización acotada del ruido blanco w_1 . La convergencia asintótica del error de estimación a cero también toma lugar en el filtro óptimo cuadrático y puede ocurrir en el filtro de Kalman-Bucy extendido.

Sin embargo, debemos notar que, primero, la convergencia del error de estimación para estos filtros es estrictamente asintótica, mientras que el estimado del filtro de modos deslizantes alcanza una K -vecin-

dad del estado real en un tiempo finito y, segundo, la condición de estabilizabilidad debe satisfacerse[55] adicionalmente para asegurar la convergencia en los filtros óptimo cuadrático y de Kalman-Bucy extendido.

8.3.2 Filtro De modos deslizantes para sistemas con dinámica inestable.

Consideremos ahora el caso de dinámica inestable en el sistema original (8.28).

Para las componentes observables del vector de estado $x(t)$, la condición de modos deslizantes $s = 0$ significa que

$$s(t) = A(t)[x(t) - m(t)] + w_{2O} = 0, \quad (8.40)$$

donde w_{2O} son las componentes del ruido blanco $w_2(t)$ correspondientes a las componentes observables de $x(t)$.

En los filtros óptimo cuadrático y Kalman-Bucy extendido, el error de estimación para las componentes observables son especificadas por los valores asintóticos de la varianza $P(t)$ y $Q(t)$, $t \rightarrow \infty$, respectivamente, el cual puede tomar valores grandes si las normas de las matrices inestables ($a_2(t)$ o $a_1(t)$, respectivamente) son grandes.

Esto también significa que la convergencia asintótica del estimado del filtro óptimo cuadrático para las componentes observables, la cual toma lugar actualmente, puede ser muy lenta[55]. La convergencia asintótica del estimado del filtro de Kalman-Bucy extendido para las componentes observables es aún más lenta, si ocurre.

Para componentes no observables e inestables, la dinámica del error de la estimación no es afectado por la condición de modos deslizantes $s(t) = y(t) - A(t)m(t) = 0$ y es dado directamente por

$$\frac{d}{dt}(x(t) - m(t))_{NO} = a_1(t)(x(t) - m(t))_{NO} + a_2(t)(x(t)x^T(t) - m(t) * m^T(t))_{NO} + b(t)w_1(t) \quad (8.41)$$

donde el subíndice NO indica las componentes no observables del vector de estado. En este caso, el error de reconstrucción obviamente diverge de cero.

En el filtro óptimo cuadrático, el error de estimación para las componentes no observables e inestables están dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t) - m(t))_{NO} &= a_1(t)(x(t) - m(t))_{NO} & (8.42) \\
&+ a_2(t)(x(t)x^T(t) - m(t)m^T(t) - P(t))_{NO} + b(t) * \\
&w_1(t)_{NO} - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} * \\
&[dy(t)/dt - A(t)m(t)]_{NO},
\end{aligned}$$

y su varianza $P(t)$ satisface la ecuación (8.31), cuya solución asintóticamente diverge al infinito.

En el filtro de Kalman-Bucy extendido, el error de estimación para las componentes no observables e inestables está dado por:

$$\frac{d}{dt}(x(t) - m(t))_{NO} = a_1(t)(x(t) - m(t))_{NO} + b(t)w_1(t)_{NO} - Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} * [dy(t)/dt - A(t)m(t)]_{NO}, \quad (8.43)$$

y su varianza $Q(t)$ satisface la ecuación (8.35), cuya solución también diverge asintóticamente a infinito.

8.4 Ejemplos

En los siguientes dos ejemplos, las condiciones iniciales son $x_1=8, m_1 = 5, x_2=5, m_2 = 4$, el ruido blanco Gaussiano es realizado con la función correspondiente de matlab, y el tiempo de simulación es igual a $T = 0.12$. La perturbación no está presente en la ecuación de estado, $V_1(t) = 0$, y consideraremos una perturbación estándar en la ecuación de observación, $V_2(t) = 1$. En todas las gráficas, x_1 y x_2 son componentes del estado real no observado, m_1 y m_2 son sus estimados, respectivamente.

Example 1. Consideremos primero un sistema no lineal bidimensional con un estado estable observable y otro inestable y no observable

$$\dot{x}_1 = -x_1^2, \quad (8.44)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2, \quad (8.45)$$

$$y = x_1 + w_2. \quad (8.46)$$

Las ecuaciones del filtro de modos deslizantes toman la forma

$$\dot{m}_1 = -m_1^2 + 100 \times \text{sign}[y - m_2], \quad (8.47)$$

$$\dot{m}_2 = m_2^2 + 5 \times \text{sign}[y - m_2], \quad (8.48)$$

donde la matriz de ganancia es asignada como $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 100 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Las ecuaciones del filtro óptimo para el sistema cuadrático (8.28)-(8.29) están dadas por

$$\dot{m}_1 = -m_1^2 + P_{11} + P_{12} [y - Am_2], \quad (8.49)$$

$$\dot{m}_2 = m_2^2 - P_{22} + P_{22} [y - Am_2], \quad (8.50)$$

donde $\{P_{11}, P_{12}, P_{22}\}$ son los elementos de la matriz simétrica positiva definida P que satisface la ecuación (8.31).

Las ecuaciones del filtro de Kalman-Bucy extendido (8.33)-(8.35) son dadas por

$$\dot{m}_1 = -m_1^2 + Q_{12} [y - Am_2], \quad (8.51)$$

$$\dot{m}_2 = m_2^2 + Q_{22} [y - Am_2], \quad (8.52)$$

donde $\{Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}\}$ son elementos de la matriz simétrica positiva definida Q , que satisface la ecuación (8.35).

Example 2. Consideremos ahora un sistema bidimensional no lineal cuyos estados son: (a) inestable observable y (b) estable y no observable respectivamente.

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad (8.53)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^2, \quad (8.54)$$

$$y = x_1 + w_2. \quad (8.55)$$

Las ecuaciones del filtro de modos deslizantes toman la forma:

$$\dot{m}_1 = m_1^2 + 1700 \times \text{sign}[y - m_1], \quad (8.56)$$

$$\dot{m}_2 = -m_2^2 + 5 \times \text{sign}[y - m_1], \quad (8.57)$$

donde la matriz de ganancia es asignada como $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 1700 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Las ecuaciones del filtro óptimo para el sistema cuadrático (8.28)-(8.29) están dadas por:

$$\dot{m}_1 = m_1^2 + P_{11} + P_{11}[y - Am_1], \quad (8.58)$$

$$\dot{m}_2 = -m_2^2 - P_{22} + P_{12}[y - Am_1], \quad (8.59)$$

donde $\{P_{11}, P_{12}, P_{22}\}$ son elementos de la matriz simétrica definida positiva P que satisface la ecuación (8.31).

Las ecuaciones del filtro Kalman-Bucy extendido (8.33)-(8.35) están dadas por

$$\dot{m}_1 = m_1^2 + Q_{11}[y - Am_1], \quad (8.60)$$

$$\dot{m}_2 = -m_2^2 + Q_{12}[y - Am_1], \quad (8.61)$$

donde $\{Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}\}$ son elementos de la matriz simétrica definida positiva Q que satisface la ecuación (8.35).

8.5 Resultados de las simulaciones.

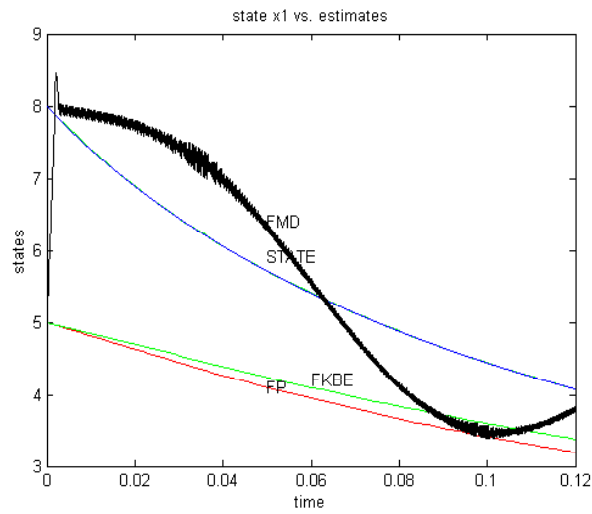


Figura 1:

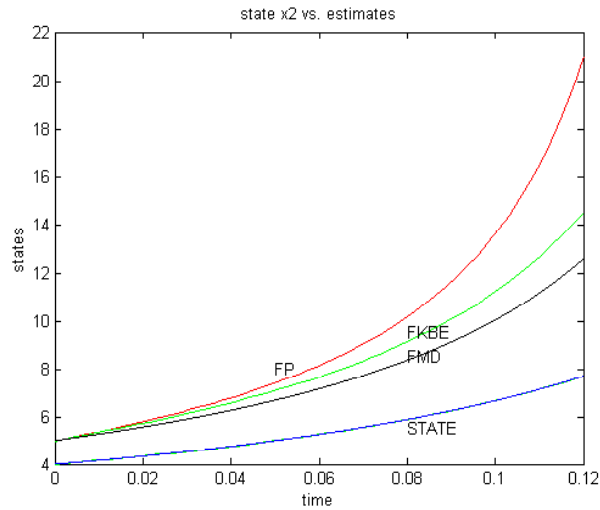


Figura 2:

Los resultados de la simulación para la componente x_1 y su estimado m_1 correspondientes a los diferentes filtros son mostrados en la Figura 1. La línea marcada *STATE* corresponde a la componente x_1 real, las líneas marcadas con *FMD*, *FP*, y *FKBE* corresponden a los estimados dados por el filtro de modos deslizantes, el filtro óptimo para sistemas cuadráticos, y el filtro de Kalman-Bucy extendido, respectivamente. Los resultados de la simulación para la componente x_2 y su estimado m_2 correspondientes a los diferentes filtros son mostrados en la Figura 2, con la misma identificación de línea.

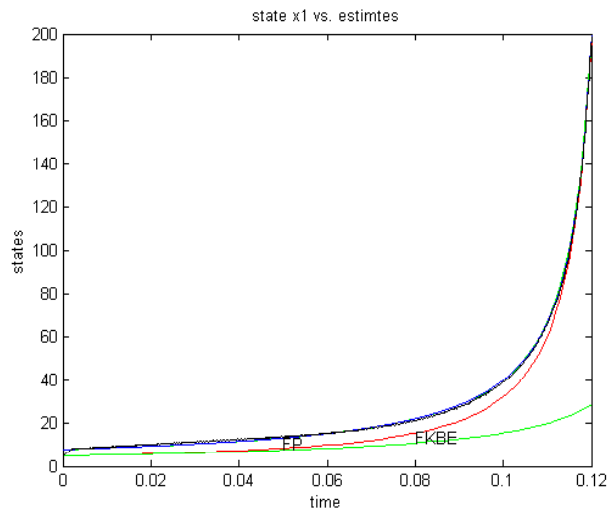


Figura 3:

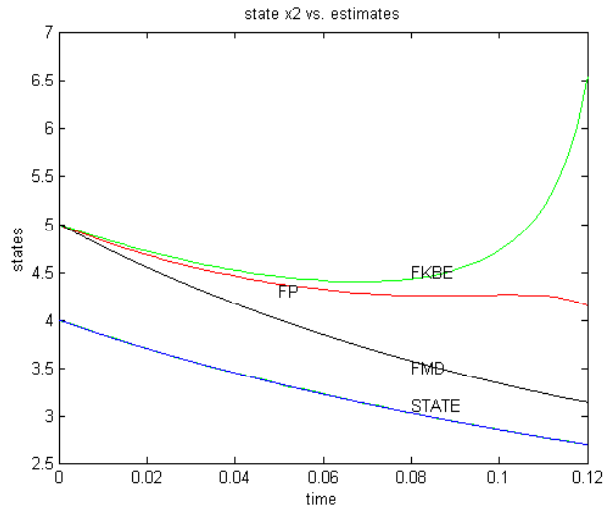


Figura 4:

Los resultados de la simulación para la componente x_1 y su estimado m_1 correspondientes a los diferentes filtros son mostrados en la Figura 3. La línea marcada *STATE* corresponde a la componente x_1 real, las líneas marcadas con *FMD*, *FP*, y *FKBE* corresponden a los estimados dados por el filtro de modos deslizantes, el filtro óptimo para sistemas cuadráticos, y el filtro de Kalman-Bucy extendido, respectivamente. Los resultados de la simulación para la componente x_2 y su estimado m_2 correspondientes a los diferentes filtros son mostrados en la Figura 4, con las misma identificación de líneas.

- [1.] C. T. Abdallah, K. Gu, S. Nucleescu (Eds.), *Proc. 3rd IFAC Workshop on Time Delay Systems*, OMNIPRESS, Madison (2001).
- [2.] Y. Alekal, P. Brunovsky, D. H. Chyung, and E. B. Lee, The quadratic problem for systems with time delays, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-16** (1971) 673–687.
- [3.] Alessandri, Design of sliding mode observers and filters for nonlinear dynamics systems, *Proc. 39th IEEE Conference on Decision and Control (Sydney, Australia, December, 12-15, 2000)*, pp. 2593-2598.
- [4.] H. L. Alexander, State estimation for distributed systems with sensing delay, *SPIE. Data Structures and Target Classification* **1470** (1991).
- [5.] R. L. Alford and E. B. Lee, Sampled data hereditary systems: linear quadratic theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **31** (1986) 60-65.
- [6.] B.D.O.Anderson,J.B.Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, 1990.
- [7.] J.Ackermann,V.I.Utkin,Sliding mode control design based on ackermann’s formula,IEEE transactions on automatic control,Vol.43(2),1pp.234-237,988.
- [8.] A.Azemi and E. Yaz, Sliding mode adaptive observer approach to chaotic synchronization, *ASME Transactions, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **122** (2000), 758-765.
- [9.] K.J. Åström, *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [10.] G.Bartolini,T.Zolezzi, Variable structure systems nonlinear in the control law,IEEE Transactions on automatic control, Vol.30,pp. 681-684,1985.
- [11.] G. Bartolini, W. Caputo, M. Cecchi, A. Ferrara, and L. Fridman, Vibration damping in elastic robotic structure via sliding modes, *Int. J. Robotic Systems*, Vol. 14, 675-696 (1997).
- [12.] M.V. Basin, On optimal filtering for polynomial system states, *ASME Trans. J. Dyn. Syst. Measur. Contr.*, **125**, (2003), 123-125
- [13.] M. V. Basin, M. A. Alcorta-Garcia, Optimal control for third degree polynomial systems and its automotive application, *in Proc. 41st Conf. on Decision and Control (Las Vegas, NV, December 10--13, 2002)*, 1745-1750 (2002).

- [14.] M.V. Basin, J.G. Rodriguez-Gonzalez, Comparative Study of Kalman-Bucy and sliding mode filters performance for linear stochastic systems, IEEE International Symposium on Intelligent Control, Houston, Tx., 2003.
- [15.] M.V. Basin, J.G. Rodriguez-Gonzalez, Comparative Study of sliding mode, optimal, and extended Kalman-Bucy filters performance for quadratic stochastic systems, Symposium on System Structure, IFAC, Oaxaca, 2004,
- [16.] M.V. Basin, L.M. Fridman, J.G. Rodriguez-Gonzalez, P. Acosta, Integral sliding mode design for robust filtering and control of Linear Stochastic Time Delay Systems, 8th. International Workshop on Variable Structure Systems, Spain. 2004.
- [17.] M.V. Basin, L.M. Fridman, J.G. Rodriguez-Gonzalez, P. Acosta, Robust integral sliding mode regulator for linear systems with time delay in control input, *Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado, U.S.A.*, 2003; 2138–2143.
- [18.] M.V. Basin, L.M. Fridman, J.G. Rodriguez-Gonzalez, P. Acosta, Optimal and robust sliding mode control for linear systems with multiple time delays in control input, *Asian Journal of Control* 2003; **5**:557–567.
- [19.] M.V. Basin, J.G. Rodriguez-Gonzalez, R. Martinez-Zuniga, Optimal control for linear systems with time delay in control input, *Journal of The Franklin Institute* 2004; **341**:267–278 (Special Issue on the 2003 Franklin Institute Awards).
- [20.] M. V. Basin, R. Martinez Zuniga, Optimal linear filtering over observations with multiple delays, in *Proc. American Control Conference 2003 (Denver, CO, June 4-6, 2003)*, 143-148 (2003).
- [21.] M.V. Basin, J.G. Rodriguez-Gonzalez, R. Martinez-Zuniga, Optimal controller for linear systems with time delays in input and observations, *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems* 2005; **12B**:1–11.
- [22.] M. V. Basin, J. Rodriguez-Gonzalez, and R. Martinez-Zuniga, Optimal control for linear systems with time delay in control input based on the duality principle, in *Proc. American Control Conference 2003, Denver, CO, June 2003*, pp. 2144–2149.
- [23.] M.V. Basin, R. Martinez-Zuniga, Optimal linear filtering over observations with multiple delays, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 2004; **14**:685–696.

- [24.] M. V. Basin, L. M. Fridman, P. Acosta, and J. Rodriguez-Gonzalez, Optimal and robust integral sliding mode filters over observations with delay, *in Proc. 7th International Workshop on Variable Structure Systems (Sarajevo, July 17--19, 2002)*, 163-174 (2002).
- [25.] M.V. Basin, L.M. Fridman, M. Skliar, Optimal and robust sliding mode filter for systems with continuous and delayed measurements, *Proceedings of the 41st Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, U.S.A., 2002*;2594–2599.
- [26.] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton (1957).
- [27.] E.K. Boukas, Z.K. Liu, *Deterministic and Stochastic Time-Delayed Systems*, Birkhauser: Boston, MA, 2002.
- [28.] W.-J. Cao, J.-X. Xu, Nonlinear integral type sliding surfaces for both matched and unmatched uncertain systems, *in Proc. American Control Conference (Arlington, VA, June 2001)*, 4369-4374 (2001).
- [29.] R.A.Decarlo,S.H.Zak,G.P.Matthees,Variable structure control of nonlinear multivariable systems, *proceedings of the IEEE*,vol.76,pp. 212-232,1988.
- [30.] M. C. Delfour, The linear quadratic control problem with delays in space and control variables: a state space approach, *SIAM. J. Contr. Optim.* **24** (1986) 835–883.
- [31.] J. M. Dion *et al.* (eds.), *Linear Time Delay Systems*, Pergamon, London, 1999.
- [32.] J. M. Dion, *Linear Time Delay Systems*, Pergamon, London (2001).
- [33.] S. Drakunov, On adaptive quasioptimal filter with discontinuous parameters, *Automation and Remote Control*, Vol. **44**, pp. 1167-75, 1983.
- [34.] S.V. Drakunov, V.I. Utkin, Sliding mode control in dynamic systems, *Int. J. Control*, Vol. 55, 1029-1037 (1993).
- [35.] J. L. Dugard and E.I. Verriest (eds.), *Stability and Control of Time-Delay Systems*, Springer, 1998.
- [36.] C. Edwards and S. Spurgeon, *On the development of discontinuous observers*, *Int. J. Control*, **59** (1994), 1211-1229.
- [37.] C. Edwards and S. Spurgeon,R.G.Hebden,On the design of sliding mode output feedback controllers,international journal of control, vol.76,pp.893-905,2003.

- [38.] D. H. Eller, J. K. Aggarwal, and H. T. Banks, Optimal control of linear time-delay systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.* Vol. AC-14, 678-687 (1969).
- [39.] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer, New York (1989).
- [40.] L. Fridman, P. Acosta, and A. Polyakov, Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems, in *Proc. 3rd IFAC Workshop on Time Delay Systems, Santa Fe, NM, December 10–12, 2001*, 239-244 (2001).
- [41.] L. Fridman, E. Fridman, and E. Shustin, Steady modes and sliding modes in relay control systems with delay, in *Sliding Mode in Engineering*, Barbot J.P., Perruquetti W. (Eds.), Marcel Dekker, New York, 263-294 (2002).
- [42.] E. Fridman, L. Fridman, and E. Shustin, Steady modes in the relay control systems with delay and periodic disturbances, *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, **122(4)** (2000), 732-737.
- [43.] L. Fridman, A. Levant, Higher Order Sliding Modes, in *Sliding Mode Control in Engineering*, J.P Barbot, W. Perruquetti (Eds.), Marcel Dekker, New York, 2002, pp. 53-102.
- [44.] L. Fridman, A. Polyakov, and P. Acosta. Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems. In *Proc. 3rd IFAC Workshop on TimeDelay Systems*, 239–244. OMNIPRESS, Madison, 2001.
- [45.] W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [46.] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer (1989).
- [47.] W. H. Fleming, R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, New York (1975).
- [48.] I. Flugge-Lotz, *Discontinuous automatic system*, Princeton university press, 1953.
- [49.] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, The MIT Press, 1974.
- [50.] A. Gelb, J.F. Kasper, R.A. Nash, *Applied Optimal Estimation*, The MIT Press, 2001.
- [51.] M. Green, D.J. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice Hall, 1995.

- [52.] P. Gupta and P. Kumar, A system and traffic dependent adaptive routing algorithm for ad hoc networks, in *Proc. 36th Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, December 1997, 2375–2380.
- [53.] H.Hashimoto,V.I.Utkin,J.X.Xu,H.Suzuki,F.Harashima,VSS observer for linear time varying system,IEEE 1990.
- [54.] F. H. Hsiao and S. T. Pan, Robust Kalman filter synthesis for uncertain multiple time-delay stochastic systems, *ASME Transactions. J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **118** (1996) 803–808.
- [55.] A.H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press (1970).
- [56.] R. E. Kalman, R. S. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, Vol. 83, pp. 95--108, 1961.
- [57.] R.E.Kalman,A new approach to linear filtering and prediction problems,transactions of the ASME-Journal of basic engineering,Vol.82,pp.35-45,1960.
- [58.] V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet, *Control of Systems with Aftereffect*, American Mathematical Society, Providence (1996).
- [59.] V. B. Kolmanovskii, A. D. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer, New York (1999).
- [60.] G. L. Kharatashvili, A maximum principle in external problems with delays, in *Mathematical Theory of Control*, A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (Eds.), Academic Press, New York (1967).
- [61.] H. Kwakernaak, R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, New York (1972).
- [62.] E. Kaszkurewicz and A. Bhaya, "Discrete-time state estimation with two counters and measurement delay", in *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, Kobe, Japan, December 1996.
- [63.] G. L. Kharatashvili, "A maximum principle in external problems with delays", in *Mathematical Theory of Control*, A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (eds.), Academic Press, New York, 1967.
- [64.] P.R.Kumar,P.Varaiya,*Stochastic Systems:Estimation,Identification, and Adaptive Control*, 1986.

- [65.] T. D. Larsen, N. A. Andersen, O. Ravn, and N. K. Poulsen. "Incorporation of the time-delayed measurements in a discrete-time Kalman filter", in *Proc. 37th Conf. on Decision and Control*, Tampa, FL, December 1998, 3972–3977.
- [66.] E. B. Lee and A. Olbrot. Observability and related structural results for linear hereditary systems. *Int. J. Control*, 34:1061–1078, 1970.
- [67.] A. Leon-Garcia, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Addison-Wesley, 1989.
- [68.] F. L. Lewis, *Optimal Control*, Interscience Publication, 1986.
- [69.] D. G. Luenberger, *Optimization by vector space Methods*, John Wiley & Sons, 1969.
- [70.] X. Q. Li, R. A. DeCarlo, Robust sliding mode control of uncertain time delay systems, *International Journal of Control* 2003; **76**:1296–1305.
- [71.] X. Li, S. Yurkovitch, Sliding Mode Control of Systems with Delayed States and Controls, in *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control*, K. D. Young, U. Ozguner (Eds.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, **247**, Springer Verlag, Berlin, 93-108 (1999).
- [72.] M. S. Mahmoud, *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Marcel Dekker: New York, 2000.
- [73.] M. Malek-Zavarei, M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, North-Holland, Amsterdam (1987).
- [74.] R. Marino, P. Tomei, *Nonlinear Control Design*, Prentice Hall, 1995.
- [75.] G. P. Matthews, R. A. DeCarlo, Decentralized tracking for a class of interconnected nonlinear systems using variable structure control, *Automatica* 1988; 24:187–193.
- [76.] E. A. Misawa, *Nonlinear state estimation using sliding observers*, Ph.D. thesis, MIT (1989).
- [77.] S.-K. Nguang, Comments on "Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation," *Automatica*, Vol. 37, 1677 (2001).
- [78.] M. N. Oguztoreli, A time optimal control problem for systems described by differential difference equations, *SIAM J. Control*, Vol. 1, pp. 290-310 (1963).

- [79.] M. N. Oguztoreli, *Time-Lag Control Systems*, Academic Press, New York (1966).
- [80.] Y. Orlov, L. Belkoura, M. Dambrine, and J.-P. Richard, On identifiability of linear time-delay systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 47, 1319-1324 (2002).
- [81.] Y. Orlov, W. Perruquetti, J.P. Richard, Sliding mode control synthesis of uncertain time-delay systems, *Asian Journal of Control* 2003; **5**:568–577.
- [82.] A.Poznyak, R. Martinez-Guerra, and A. Osorio-Cordero. Robust high gain observer for nonlinear closed loop stochastic systems. *Mathematical Methods in Engineering*, 6:31–60, 2000.
- [83.] A.S. Poznyak, Y.B. Shtessel, C.J. Gallegos, Min–max sliding-mode control for multimodel linear time varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 2003; **48**:2141–2150.
- [84.] A.S. Poznyak, Stochastic output noise effects in sliding mode state estimation, *Int. J. Control*, Vol. **76**, 2003, pp. 986-999.
- [85.] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, New York (1962).
- [86.] V. S. Pugachev, *Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers*, pergamon press, 1967.
- [87.] V. S. Pugachev and I. N. Sinitsyn. *Stochastic Diferential Systems: Analysis and Filtering*. John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [88.] V.S.. Pugachev,I.N. Sinitsyn, *Stochastic Systems: Theory and Applications*. World Scientific: Singapore, 2001.
- [89.] J.-P. Richard, F. Gouaisbaut, and W. Perruquetti, Sliding mode control in the presence of delay, *Kybernetika*, Vol. 37, 277-294 (2001).
- [90.] Y.-H. Roh, J.-H. Oh, Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation, *Automatica*, Vol. 37, pp. 1861-1865 (1999).
- [91.] H.Sira-Ramirez, Sliding motions in bilinear switched networks, *IEEE transactions on circuits and systems*, vol. 34, pp.919-933,1987.
- [92.] A.P.Sage, Ch.C.White, *Optimus Systems Contol*, Prentice-Hall,1977.

- [93.] Yu. B. Shtessel, A. S. I. Zinober, and I. Shkolnikov, Sliding mode control using method of stable system centre for nonlinear systems with output delay, in *Proc. 41st Conf. on Decision and Control (Las Vegas, NV, December 10–13, 2002)*, 993-998 (2002).
- [94.] Y.B. Shtessel, A.S.I. Zinober, I.Shkolnikov, Sliding mode control for nonlinear systems with output delay via method of stable system center, *ASME Trans. J. Dyn. Syst. Measur. Contr.*, **125** 253-257, (2003)
- [95.] J. J. Slotine, J. K. Hedrick, On sliding observers for nonlinear systems, *ASME Transactions, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. **109**, pp. 245-252, 1987.
- [96.] O. J. M. Smith, *Feedback Control Systems*, McGraw Hill, New York, 1958.
- [97.] H.W.Sorenson,Least squares estimation:from Gauss to Kalman,IEEE spectrum,Vol.7, pp. 63-68,1970.
- [98.] Y.Tsytkin, Theory of relay control systems,moscow ,1955.
- [99.] H.G.Tucker,A.Graduate Course in Probability, Academic Press, 1967.
- [100.] K. Uchida, E. Shimemura, T. Kubo, and N. Abe, The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay, *Automatica*, **24** (1988), 773-780.
- [101.] V. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer, New York (1992).
- [102.] V.I.Utkin, and J.Shi, *Integral sliding modes in system operating under uncertainty conditions*, in proc. Conference on Decision and Control, Kobe, Japan,dec.1996, pp. 4591-4596.
- [103.] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis, London (1999).
- [104.] J.X. Xu, Y.J. Pan, T.H. Lee, Analysis and design of integral sliding mode control based on Lyapunov's direct method, *Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado, U.S.A., 2003*; 192–196.
- [105.] K.D.Young,P.V.Kokotovic,V.I.Utkin,A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems,IEEE Transactions on automatic control,Vol. 22(6),pp.931-938,1977.
- [106.] K.D.Young,V.I.Utkin,U.Ozguner,A control engineer's guide to sliding mode control, IEEE transactions on control systems technology, vol.7, pp.328-342,1999.

- [107.] X.Yu,J.X.Xu, Variable structure systems:Towards the 21 century,Springer,2002.
- [108.] B.L. Walcott, M. J. Corless, S. H. Zak, Comparative study of nonlinear state observation techniques, *Int. J. Control*, Vol. 45, pp. 2109-2132, 1987.
- [109.] M. Wilt, C. Schenkel, B. Spies, C. Torres-Verdin, and D. Alumbaugh. Measurements of surface and borehole electromagnetic fields in 2-D and 3-D geology. In *Three-Dimensional Electromagnetics*, Geophysical development series, pages 545–564. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, 1999.
- [110.] L. Zhang, Z. Zhao, Y. Shu, L. Wang, and O.W.W. Yang, "Load balancing of multipath source routing in ad hoc networks", in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Communications 2002*, 3197–3201.