UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO - MATEMATICAS

Propuesta Didáctica:

“Las TICs como herramientas cognitivas en el desarrollo de la habilidad de solución de desigualdades cuadráticas"

Que para obtener el grado de Maestría en Enseñanza de las Ciencias con Especialidad en Matemáticas

Presenta:

Lic. Elizabeth Guajardo García

Ciudad Universitaria **San Nicolás de los Garza, N. L.**

Agosto 2008

INDICE

RESUMEN

Ante el impacto cultural de la denominada “era de la información” la autora, expone una propuesta didáctica que propicie en los alumnos universitarios la adquisición de un aprendizaje significativo de desigualdades cuadráticas. El cual implica la concatenación coherente de varias nociones conceptuales previas. Aunque dichas nociones están presentes en muchas áreas de las ciencias, su comprensión por parte de muchos estudiantes y algunos profesores ha sido muy limitada; por ello, puede decirse que su tratamiento parece no haber surtido efecto alguno en su aprendizaje.

Con sustento en el marco teórico del presente trabajo, la propuesta incluye un método gráfico para apoyar el método analítico de resolución de dichas desigualdades, implementando el uso de la tecnología en el aula, para contribuir al desarrollo de la habilidad de transferencia del proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas.

La investigación se realizó en el nivel superior con alumnos de la materia Cálculo Diferencial (Matemáticas I) del primer semestre de las Licenciaturas en Matemáticas, en Física y Computación que se imparten en la Facultad de Ciencias Físico – Matemáticas de la UANL (FCFM - UANL).

INTRODUCCIÓN

La importancia de la educación como factor estratégico para lograr el desarrollo sustentable, ha sido punto de acuerdo en los debates sobre el futuro de la educación superior en todo el mundo.

La sociedad del conocimiento, a su vez, demanda a las instituciones educativas una respuesta concreta a través de estrategias y políticas que impulsen un cambio de cultura, y que posibiliten que éstas se conviertan en motor para el desarrollo y sean instrumento para la realización de aspiraciones colectivas.

Considerando que el desarrollo de la tecnología tiene implicaciones en los procesos de aprendizaje y en los métodos de enseñanza, y por consecuencia en las Instituciones educativas, es importante recalcar que el impacto cultural que estamos viviendo en la denominada “era de la información” representa un compromiso serio para las instituciones educativas, las cuales deberán generar un mayor número de accesos al conocimiento, por medio de estrategias pedagógicas auxiliándose de las nuevas tecnologías para la educación.

Es evidente que en este mundo globalizado donde la información juega un papel muy importante, es indispensable proporcionar a los alumnos más herramientas de acceso al conocimiento, pero en México como en el resto de Latinoamérica, estamos viviendo en una “brecha digital” entre los que aprueban el uso de las tecnologías y los que no las conocen, por lo que la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), como Institución educativa del siglo XXI inmersa en el contexto de la globalización, necesita propiciar que sus estudiantes y profesores puedan cruzar esa brecha digital permitiéndoles tener acceso a las nuevas tecnologías, para ayudarles en el desarrollo de habilidades, la obtención de conocimiento y sobre todo haciendo que deseen acercarse a ellas; que las conozcan y sepan la utilidad que tienen para su formación y desempeño.

La presente investigación se enmarca en los objetivos y los propósitos de la Visión del Futuro UANL 2012 la cual tiene metas hacia la revisión de la pertinencia de los programas, la actualización de la oferta educativa, un impulso más definitivo para el desarrollo científico y la investigación, la consolidación de los cuerpos académicos, la administración racional de los recursos y, en fin, el fortalecimiento institucional basado en lineamientos y normas internacionales, sin dejar de lado las propuestas de la UNESCO en la materia.

Así pues, los retos que deberá enfrentar la Universidad son de tales dimensiones que implican creatividad para buscar nuevas formas de desarrollar sus funciones con base en la pertinencia, la calidad, la equidad, la innovación, la competitividad y la internacionalización; y tendrá que hacerlo de tal manera que alcance niveles de calidad muy superiores a los que existen actualmente.

La educación superior juega un papel esencial en la formación de los individuos que han decidido estudiar una carrera, ya que los posibilita para desarrollarse como miembros activos de la sociedad. Sin embargo, las Universidades enfrentan graves problemas de reprobación y rezago escolar con mayores índices en asignaturas de matemáticas.

El Cálculo, entre dichas asignaturas de las matemáticas, reviste gran importancia en los currículos de las diversas instituciones por sus numerosas aplicaciones en la vida cotidiana. No obstante, a nivel internacional, Artigue (1995) nos reporta que existe una serie de dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo.

El Cálculo Diferencial (Matemáticas I) se presenta, en el primer semestre de las Licenciaturas en Matemáticas, en Física y Computación que se imparten en la Facultad de Ciencias Físico – Matemáticas de la UANL (FCFM - UANL).

La problemática de reprobación en el área de Cálculo Diferencial, se constató con base en la experiencia docente de la autora, como maestra del curso de Matemáticas I de primer semestre en la FCFM – UANL, en el cual se inicia con los números reales y la relación de orden entre ellos. Es en este contexto donde se sitúan las desigualdades cuadráticas. (Anexo 1)

El problema se ha manifestado en el curso de Matemáticas I a partir de las dificultades que tienen los alumnos para resolver desigualdades cuadráticas. Con frecuencia se observa que algunos de ellos resuelven desigualdades cuadráticas como si fueran ecuaciones cuadráticas, es decir, ven una expresión cuadrática en una desigualdad y lo que hacen es tratar de resolverla despejando la variable cuadrática (esto es muy común cuando no aparece el termino lineal) o factorizan y obtienen como resultado un intervalo que no tiene fundamento o no coincide con lo que resuelven analíticamente. Los alumnos no se ubican en el contexto en el que se está trabajando la expresión cuadrática, además se observa que no tienen una visualización clara de lo que es resolver una desigualdad. Entonces el proceso de solución de una ecuación cuadrática esta incidiendo o repercute en el proceso de solución de una desigualdad cuadrática.

De lo anterior, la autora identifica como **PROBLEMA** un conflicto cognitivo al transferir el proceso de solución de ecuaciones cuadráticas en la resolución de desigualdades cuadráticas. Siendo el **OBJETO DE ESTUDIO** el proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial en la Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

En correspondencia con el problema se formula como **OBJETIVO GENERAL DEL TRABAJO** el diseñar estrategias didácticas para implementar el uso de la tecnología en el aprendizaje de desigualdades cuadráticas.

Generalmente al explicar este tema la autora llegaba a una contradicción o a un conflicto cognitivo del porque no se puede resolver una desigualdad cuadrática como una ecuación cuadrática y daba énfasis en la diferencia del conjunto solución de una ecuación y el de una desigualdad, pero al momento de los exámenes se dada cuenta que había alumnos con las deficiencias expuestas anteriormente.

En este contexto, la autora plantea como **CAMPO DE ACCIÓN** la habilidad de transferencia del proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas.

Con base a lo anterior, la propuesta incluye un método gráfico para apoyar el método analítico de resolución de desigualdades cuadráticas haciendo uso de Software (Graphmatica y Sketchpad) que ayude a que los alumnos tengan una visión más clara de la solución de una desigualdad con referencia en los estudios recientes que muestran evidencias que el uso de herramientas tecnológicas pueden favorecer el aprendizaje de las matemáticas.

El alcance del trabajo es posible a partir de la siguiente **HIPOTESIS**: Si se diseñan estrategias didácticas centradas en el aprendizaje, implementando el uso de la tecnología se contribuirá al desarrollo de la habilidad de transferencia del proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas.

TAREAS CIENTÍFICAS

Para realizar este trabajo se desarrollaron las siguientes tareas científicas:

1. Revisar bibliografía y fuentes sobre los conceptos de Conflicto Cognitivo, Obstáculos Epistemológicos, Modelo del Pensamiento Geométrico de los Van Hiele, Visualización Matemática, Estrategias Didácticas, Uso de la Tecnología (TIC's) en el Proceso Enseñanza Aprendizaje (PEA), Competencias Matemáticas, etc.

2. Diseñar, aplicar y analizar cuestionarios y encuestas.
3. Diseñar actividades didácticas con el uso de la tecnología que propicien la comprensión de la solución de una desigualdad cuadrática.
4. Aplicar y validar las actividades propuestas
5. Interpretar lo resultados.

MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EMPLEADOS

- Empíricos: En la etapa facto perceptible se identificaron elementos de la experiencia docente y permitió conocer el objeto de estudio.
- Abstracción – Concreción: A partir del diagnóstico de la realidad objetiva, se abstrajo el objeto de estudio y el campo de acción.
- Análisis – Síntesis: A partir de la revisión bibliográfica y de las diversas fuentes se descubrieron relaciones esenciales y características generales en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Observación Participativa: En una dinámica de observación del tipo investigación – acción, se valoró la propuesta para mejorar las acciones y la eficiencia.
- Inductivo – Deductivo: Se aplicó para formular proposiciones generales e inferir la hipótesis y conclusiones a partir de los resultados particulares de las diferentes actividades didácticas.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta consta de tres capítulos en el capítulo 1 se muestra el marco contextual del problema, en el capítulo 2 el marco teórico y finalmente en el capítulo 3 la propuesta didáctica con su validación.

CAPÍTULO I

Introducción

En este capítulo se pretende proporcionar un panorama general sobre el marco contextual en el que se identifican elementos que evidencian problemas educativos en la enseñanza de las desigualdades cuadráticas.

1.1. Marco Contextual

Las inecuaciones son un tema que normalmente se incluye en el primer semestre de Facultades de Ingeniería y Ciencias Exactas.

Como un primer acercamiento al análisis de los elementos constitutivos del problema, a la autora le pareció oportuno utilizar el cuestionario y la entrevista, como instrumentos de recogida de datos, asumiendo en su realización diferentes recomendaciones propias de la metodología cualitativa.

De esta manera y, tras un proceso de validación adecuado, pasamos un cuestionario (Anexo 2) a 49 alumnos procedentes de dos semestres (primer semestre con alumnos repetidores y segundo semestre) en la FCFM - UANL. Todos ellos ya habían sido instruidos en el concepto y solución de desigualdades cuadráticas, ya que se imparte en el curso de Matemáticas I de Primer Semestre. La autora observó que la mayoría no recordaba como se resuelven las desigualdades cuadráticas o en el mejor de los casos hicieron intentos, pero erróneos y sólo algunos resolvieron el cuestionario con éxito.

En los resultados que damos a continuación mostramos algunos errores y dificultades detectados en la revisión del cuestionario pasado a los alumnos e intentar acercarnos a las causas de los mismos. En ningún momento, nos planteamos hacer un análisis estadístico exhaustivo de los datos recogidos aunque en el (Anexo 3) mostramos algunos resultados globales.

- En la solución de la desigualdad

$$x^2 \leq 16$$

Un considerable porcentaje de alumnos aplica el algoritmo de resolución de la ecuación

$$x^2 = 16$$

es decir, sustituyen el signo "=" por el signo "≤". Incluso presenta la solución de forma análoga a la de las ecuaciones:

$$x \leq \pm 4$$

Después de esto concluyen que $-4 \leq x \leq 4$, es la solución correcta de la desigualdad, pero no coincide con la desigualdad anterior $x \leq \pm 4$ que carece de significado.

- Para resolver la desigualdad

$$2x^2 + 5x - 1 < 2x + 1$$

Nuevamente un considerable porcentaje de alumnos aplica el algoritmo de resolución de la ecuación

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Y muestran las soluciones:

$$x < \tfrac{1}{2} \qquad y \qquad x < -2$$

Después no concluyen nada de las desigualdades anteriores. Es decir, para ellos allí termina el problema o no saben como encontrar el intervalo solución de la desigualdad original. Intentan recordar y así lo manifiestan: “Es que no me acuerdo como se hacia”, “Me suena algo, pero no me acuerdo”.

Es indiscutible que las calificaciones reprobatorias son consecuencia de diferentes factores que inciden en la falta de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades entre las cuales la autora identifica que la mayoría de los errores se debe a la deficiente transferencia de la habilidad de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia la resolución de desigualdades cuadráticas.

La ecuación de segundo grado y su algoritmo de resolución son bien conocidos por los alumnos y han servido, mucho antes de trabajar con las desigualdades, para resolver multitud de ejercicios. Es decir, el alumno ha demostrado su eficacia y precisión. Todo alumno que ha trabajado con ecuaciones sabe que “la fórmula no falla” que todo consiste en saber aplicarla, para tener el “buen” resultado. Realmente una fórmula es un poderoso instrumento de cálculo, de modo que cobra consistencia que va a formar un obstáculo para el estudio de las desigualdades.

Si bien el estudio de desigualdades comienza en el bachillerato enfocando sobre todo las lineales y se vuelve a incluir en primer semestre de la universidad, incluyendo a las desigualdades cuadráticas, es a través del cuestionario hecho en alumnos de primer semestre de FCFM – UANL, que la autora observó los errores en su interpretación y sobre todo el deficiente desarrollo de la habilidad de transferencia en su resolución. Además, observó deficiencias en los conocimientos previos que los alumnos deben de tener al llegar a la universidad. Siendo uno de los factores el cambio de preparatoria a facultad.

Dichas deficiencias permite a la autora identificar la necesidad de diseñar una propuesta didáctica, a fin de contribuir al logro de condiciones requeridas para el desarrollo de niveles del pensamiento matemático, en lo que respecta al aprendizaje de desigualdades, considerando las propiedades descritas por los Van

Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico, de secuencia, ascenso y falta de concordancia. Pues se constata que "…. si el maestro, materiales instruccionales, contenido, vocabulario y demás, están en un nivel más alto, al estudiante no le será posible seguir el proceso de pensamiento empleado".

1.2. Antecedentes Teóricos

Del análisis bibliográfico, se ha identificado que en general, existe poco interés en investigar problemas de enseñanza aprendizaje del tema, tanto de los profesores como de los responsables del diseño de los planes y programas de estudio. Al parecer se desconoce que "puedan jugar un papel importante en la construcción de un lenguaje gráfico estrechamente relacionado con el lenguaje analítico", tal y como lo señalan Farfán, R., Ferrari, M., Martínez – Sierra, G. (2000).

La autora presenta algunos trabajos relacionados con el estudio de las desigualdades para exponer las tendencias del problema a lo largo de la historia y poder constatar la existencia del problema de investigación desde un análisis histórico-lógico.

Gallo y Battú (1997) observan como en la didáctica de las desigualdades se ocupan técnicas sin significados, es decir, modelos rígidos que se aplican en forma correcta pero impropia. Se observa una confusión entre el concepto de ecuación y él de desigualdad de tal manera que para resolver desigualdades se aplican los mismos modelos de las ecuaciones.

Farfán y Albert (1997) afirman que la dificultad técnica obstaculiza la comprensión de las desigualdades y su enseñanza, "reduciendo su presentación escolar a unos cuantos ejemplos complejos a fin de completar el programa establecido. Por otra parte, las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla la minoría no contribuyen de manera substancial a un posterior estudio del cálculo".

Para ello los autores enfocan el tema apoyándose prioritariamente en el elemento gráfico llevando al alumno a la necesidad de desarrollar un trabajo algebraico para poder aprovechar las metodologías gráficas aprendidas.

Paulo Boero (1998) apunta la limitación de las técnicas tradicionales para la resolución de inecuaciones y evidencia el hecho de que los maestros no dan la importancia necesaria a las inecuaciones, ni buscan maneras de mejorar su didáctica. La forma de enseñar dicho tema facilita el encuadramiento mental de los alumnos, la evalución y el aprendizaje, como consecuencia de la reducción de la complejidad del problema y de la resolución de inecuaciones a través de su modelación lógica – algebraica. Por ello, Boero argumenta que tal método de enseñanza es inerte.

Bazzini (1999) observa que normalmente se aprenden primero las ecuaciones y luego las desigualdades. Esto provoca en muchos estudiantes el establecimiento de analogías incorrectas que se apoyan en la semejanza con que se presentan las dos operaciones en los que no se verifica la aplicabilidad de los procesos que se van eligiendo.

En su artículo Malara, Brandoli y Fiori (1999) presentan los resultados de pruebas aplicadas a estudiantes recién ingresados en la universidad relativos al estudio de las desigualdades. El objetivo es checar la naturaleza del control que los estudiantes logran ejercer sobre el sentido de las desigualdades. Lo que se observa –en un contexto en que se le da mucho énfasis al estudio de las desigualdades a nivel de escuela secundaria superior– es la presencia de lagunas conceptuales, actitudes estereotipadas en los procesos resolutivos, falta de control de los significados de las notaciones algebraicas y una capacidad muy reducida de coordinar los distintos lenguajes algebraico, verbal y gráfico.

Alvarenga, K. B. (1999) coloca su investigación en el marco de la Teoría APOE, (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). La autora plantea que para obtener un mejoramiento tanto de la enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas, se necesita un cambio en el modelo de enseñanza tradicional. El objetivo del trabajo de la autora es la presentación de algunas de las construcciones mentales (esquemas) que un estudiante puede desarrollar para comprender el concepto de desigualdad. En su investigación observó muchos errores en su interpretación y sobre todo en su resolución. Por su amplia aplicación en varias áreas como economía, cálculo númerico y diferencial, computación, entre otras y porque su comprensión es necesaria en el estudio de otros conceptos, que deben concatenarse de forma coherente, resulta pertinente analizar y crear una mejor manera de enseñanza para que los estudiantes realmente aprendan las inecuaciones.

Garrote, M.; Hidalgo, M. J. y Blanco, L. J. (2004) realizan una investigación llevada a cabo con alumnos de primer curso de Bachillerato con el objetivo de describir y analizar algunos de sus errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas. A partir de esa investigación presentan las siguientes conclusiones (sólo se mencionarán las más relevantes con nuestro problema de investigación):

- La comprensión del concepto de inecuación es deficiente en una parte importante de nuestros alumnos. Muchos de ellos no establecen diferencias significativas entre este concepto y el de ecuación, es decir, la diferencia entre unas y otras es el signo que se escribe entre los dos términos que forman parte de las mismas, mientras que en las ecuaciones utilizamos el signo “=”, en las inecuaciones utilizamos los signos “<”, “>”, “$\leq$ ”, o “ $\geq$”. Además, este signo carece de valor semántico ya que se utiliza como un nexo entre los dos miembros de la inecuación.
- Siguiendo con la interpretación que los alumnos hacen de los signos utilizados en el trabajo con inecuaciones, añadir que esa ausencia de significado también se manifiesta en dificultades al leer de izquierda a

derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones x > 1 y 1 < x.

- La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones y si lo que pretendemos es que el alumno no reduzca su aprendizaje de inecuaciones a meras tareas mecánicas, es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da contenido semántico a las técnicas de resolución.

Martínez (2006) presenta en su tesis de Maestría las concepciones de los estudiantes relativos al análisis gráfico de desigualdades, encontradas en diversas investigaciones (Alvarenga, K. B. (2003); Cerizola, R. N.; Pérez, H. N.; Martínez, R.; Franzini, D. (2000); Mini A. M.; Paez O. H. (2000); Valero S. (2004) y Acuña (2001,2005)). Las concepciones encontradas por mencionar algunas fueron:

- Los estudiantes resuelven pero de forma muy mecánica, ya que imitan métodos memorizados y no comprenden ni justifican la técnica utilizada.
- Los estudiantes tratan de resolver analíticamente las inecuaciones.
- Sólo tratan de dar valores a *x* que satisfaga la misma.
- Realizan transposición de términos.
- No logran percibir que en ambos miembros de la inecuación tienen una función.
- No logran expresar en intervalo las soluciones.
- Algunos estudiantes, a pesar de haber obtenido una gráfica correcta, ésta fue considerada como una cosa más, sin percibir que era realmente la clave para la resolución del problema.
- Transforman las desigualdades en igualdades y resuelven las igualdades.
- No todos tienen claro el concepto de inecuación, ni su uso.

Borello (2007) afirma que hay que tomar en cuenta que en los últimos años los alumnos encuentran muchas dificultades en desarrollar razonamientos abstractos y por esto se les dificulta cada vez más aquel enfoque lógico-algebraico que ha caracterizado los estudios de sus maestros. Por lo tanto los docentes están llamados a interrogarse acerca de la metodología de enseñanza de las desigualdades y tienen la tarea de buscar nuevos caminos para favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

Por otro lado, en la década de los 80's encontramos publicaciones acerca del uso de la tecnología para trabajar hojas de cálculo en la enseñanza de las desigualdades, pero en dichas publicaciones no se ha enfocado el problema de la resolución de desigualdades cuadráticas en relación a las preconcepciones que el alumno tiene sobre los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas.

1.3. Conclusiones del Capítulo

Después de recorrer todas las investigaciones sobre el tema de desigualdades la autora puede constatar que su problema de investigación es un problema que no se presenta únicamente en FCFM-UANL, sino que desde años atrás este ya se ha manifestado. Se puede concluir:

- La comprensión del concepto de desigualdad es deficiente en una parte importante de los alumnos.
- Muchos de ellos no establecen diferencias significativas entre este concepto y el de ecuación.
- La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con desigualdades y si lo que pretendemos es que el alumno no reduzca su aprendizaje de desigualdades a meras tareas mecánicas, es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de desigualdad.
- Se observa que aplican la técnica de resolver una ecuación cuadrática en las desigualdades cuadráticas, sin analizar en que contexto están trabajando la expresión cuadrática.

CAPITULO II

Introducción

Dada la problemática descrita en el proceso enseñanza aprendizaje de las desigualdades cuadráticas en la FCFM – UANL, se hará mención de los fundamentos teóricos sobre los cuales respaldaremos la propuesta.

2.1. Conflicto Cognitivo

El conflicto cognitivo interviene en la dinámica de la interacción del organismo con el medio como un mecanismo de desequilibrio capaz de provocar una reestructuración cognitiva (nuevo estado de equilibrio). Reestructuración cognitiva es otra manera de denominar el proceso de equilibración que desempeña un papel fundamental en la construcción de la inteligencia y en el avance del conocimiento y del aprendizaje. Para Piaget, que concede un papel muy reducido a la experiencia social en el desarrollo cognitivo, el *conflicto* se produce cuando los esquemas de sujeto no consiguen aprehender el objeto de la acción material o intelectual. El propio sujeto pone en marcha un proceso de autorregulación para integrar el elemento provocador del conflicto y acomodar (modificando/cambiando) las estructuras cognitivas preexistentes a los nuevos datos.

2.1.1. El conflicto cognitivo en el proceso de construir aprendizajes significativos

El aprendizaje se produce como consecuencia de la interacción entre el que aprende y los contenidos de aprendizaje, lo cual genera un cambio en su estructura de pensamiento y le permite perfeccionar sus teorías sobre el mundo.

Los seres humanos poseemos una estructura de pensamiento que está constituida tanto por conceptos como por procedimientos y actitudes, los cuales cambian y evolucionan como fruto de la interacción entre sujetos y objetos, en un proceso social y constructivo cuyo principio básico es la *equilibración*.

Cuando nuestras concepciones sobre la realidad y lo que ocurre en esta no coinciden, es decir, cuando nuestros esquemas entran en contradicción, se genera una situación de desequilibrio cognitivo o *conflicto cognitivo* que constituye el "motor" del aprendizaje. En búsqueda de una solución, el ser humano construye respuestas, se plantea interrogantes, investiga, descubre, etc., hasta llegar al conocimiento que lo hace restablecer el equilibrio.

Dentro de esta perspectiva, la actividad por la cual el estudiante reestructura sus esquemas mentales constituye el mejor o quizá el único camino para que consiga un verdadero aprendizaje. La acción pedagógica en este marco deberá estar orientada a crear un ambiente rico y estimulante en el que no existan trabas para que el alumno despliegue su actividad autoestructurante.

Los esquemas de conocimiento del estudiante sólo pueden ser modificados si él es consciente de lo que sabe y de lo que no, es decir, si ante la nueva información presentada, siente que sus ideas previas son insuficientes. El objetivo es provocar en los estudiantes conflictos que generen el desequilibrio de sus esquemas de conocimiento, lo cual sólo será posible si el estudiante encuentra desafiante y motivante la superación de los retos planteados.

Sucede a menudo que los estudiantes "aprenden" cosas sin cambiar verdaderamente sus esquemas mentales, se trata de aprendizajes memorísticos o superficiales que se realizan sin esfuerzo por entender pero que, con frecuencia, resultan suficientemente útiles para las demandas requeridas en las tareas. En ese sentido es responsabilidad del profesor dirigir las tareas de aprendizaje de los alumnos a la construcción del conocimiento de manera que generen la motivación de los estudiantes y permitan el logro de los objetivos del curso.

Para que este proceso se desarrolle intencionalmente en el ámbito educativo, el rol del profesor es fundamental. Es él quien debe provocar conflictos, planteando situaciones que entren en contradicción colisión con los esquemas previos de sus estudiantes.

2.2. Obstáculos Epistemológicos

En *La formación del espíritu científico*, Bachelard (1938) establece la idea de ***obstáculo epistemológico****, el cual debe comprenderse como el efecto limitativo de un sistema de conceptos sobre el desarrollo del pensamiento, y da un listado extenso de los mismos, que impiden que un modo de pensamiento pre-científico conciba asimismo el enfoque científico.* Brousseau se basa en esta idea al analizar el aprendizaje.

Si el aprendizaje lo entendemos como adaptación al medio, esto implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado.

Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos (Brousseau, 1983).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se *precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo.*

Brousseau (1983) da las siguientes **características de los obstáculos**:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Se distinguen los siguientes **tipos de obstáculos**:

- OBSTÁCULOS ONTOGENÉTICOS (a veces llamados obstáculos psicogenéticos): se deben a las características del desarrollo del niño.
- OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS: que resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.
- OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS: intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Evidenciado por medio de un análisis histórico, tal tipo de obstáculo debe ser considerado como parte del significado del concepto. Por tanto, encontrarlo y superarlo parece ser una condición necesaria para la construcción de una concepción relevante.

Observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan deberse a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

2.3. El Modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geométrico

El modelo está conformado por **cinco niveles de entendimiento**, etiquetados como "visualización", "análisis", "deducción informal", "deducción formal" y "rigor", que describen características del proceso de pensamiento. Auxiliado por experiencias instruccionales adecuadas, en él se afirma que el aprendiz se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización), donde el espacio es simplemente observado -las propiedades de las figuras no son reconocidas explícitamente- a través de la secuencia anteriormente enlistada hasta el más alto (rigor), el cual se relaciona con los aspectos abstractos formales de la deducción. Algunos estudiantes son expuestos al último nivel, o tienden a él.

NIVEL 0 (nivel básico): Visualización

En esta primera etapa, los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales como algo provisto de componentes o atributos. Las figuras geométricas, veamos el caso, son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Una persona que funciona a este nivel puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas especificadas y, dada una figura, reproducirla.

NIVEL 1: Análisis

En nivel 1 comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas. Es notorio que las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas. Después de usar varios de tales ejemplos, los estudiantes pueden hacer generalizaciones para la clase de paralelogramos. Las relaciones entre propiedades, sin embargo, aún no pueden ser explicadas por los estudiantes en este nivel, en el cual todavía no se ven las interrelaciones entre las figuras, ni se entienden las definiciones.

NIVEL 2: Deducción informal

Aquí, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo por que tienen todas sus propiedades).

Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo ni el rol de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares.

NIVEL 3: Deducción formal

En este nivel se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica en un sistema de axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Una persona puede construir, y no solo memorizar, demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distingue entre una afirmación y su recíproca.

NIVEL 4: Rigor

En esta etapa el aprendiz puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclideanas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

Este es el nivel final que se desarrolla en los trabajos originales y ha recibido poca atención por parte de los investigadores. Pierre Marie Van Hiele ha confesado que esta interesado en los primeros tres niveles en particular. (Alan Hoffer, 1985).

2.3.1. Propiedades del Modelo

Además de proporcionar nociones sobre las ideas que corresponden específicamente a cada nivel de pensamiento geométrico, el matrimonio Van Hiele identificó algunas generalidades que caracterizan al modelo. Estas propiedades son particularmente significativas para los educadores, pues los orientan para tomar decisiones instruccionales.

1.- Secuencial. Como en la mayoría de las teorías sobre el desarrollo, una persona debe avanzar en orden a lo largo de los niveles. Para desempeñarse con éxito en un nivel particular, un aprendiz debe haber asimilado las estrategias de los niveles precedentes.

2.- Ascenso. Pasar o no de un nivel a otro depende más del contenido y los métodos de instrucción recibidos que de la edad. Ningún método de instrucción lleva a un estudiante a brincar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles. Van Hiele indica que es posible enseñar "a aun alumno aventajado habilidades arriba de su nivel actual, del mismo modo que se puede entrenar a niños en aritmética de fracciones sin decirles lo que significan las fracciones o a niños mas grandes en diferenciación e integración aunque no sepan lo que es un cociente diferencial o integral" (Freudenthal, 1973, p. 25).

3.- Intrínseco y extrínseco. Los objetos inherentes a un nivel se convierten en objetos de estudio en el siguiente. Por ejemplo, en el nivel 0 sólo la forma de una figura es percibida. Está, por supuesto, determinada por sus propiedades, pero solo hasta que se alcanza el nivel 1 la figura es analizada y sus componentes y sus propiedades son descubiertos.

4.- Lingüístico. "Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para conectar esos símbolos" (Pierre Van Hiele., 1984. a, p. 246). Así, una relación que es "correcta" en un nivel puede ser modificada en otro (por ejemplo, un cuadrado es también un rectángulo, ¡y un paralelogramo!). Un estudiante en el nivel 1 no concibe que esta clase de anidado puede darse realmente. Este tipo de nociones y su lenguaje correspondiente, sin embrago, son fundamentales para el nivel 2.

5.- Falta de concordancia. Si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe en otro, el aprendizaje y el progreso deseado pueden no ocurrir. En particular si el maestro, materiales instruccionales, contenido, vocabulario y demás, están en un nivel más alto, al estudiante no le será posible seguir el proceso de pensamiento empleado.

2.4. Visualización Matemática

La Visualización Matemática es un tema actual de investigación, en el cual se ha promovido la búsqueda y sistematización de conocimientos sobre su papel en la génesis de los conceptos y en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática. En particular, se ha investigado sobre el pensamiento visual y el proceso de formación y desarrollo de la visualización al resolver problemas de Matemática.

Se encontró que diversos autores, han publicado relevantes investigaciones sobre conceptos y habilidades que están estrechamente vinculados a la visualización en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, tales como imagen mental, abstracción, intuición matemática, percepción, imaginar, comprender, comunicar, modelar, representación mental y transferencia en sistemas semióticos de conceptos.

De la investigación bibliográfica, se retoman como mas significativas a las siguientes concepciones: Partiendo del Modelo Van Hiele (1957), donde se concibe a la visualización como el Nivel 0 (o básico); se prosigue con Zimmermann & Cunningham (1990), quienes definen a la *visualización matemática* como un proceso de formación de imágenes (mentalmente, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento.

También se encontró la importante investigación de Duval, R.(1998), que junto con De Guzmán, M (1996), como autoridades en el tema, tomaron a la visualización como "...un verdadero camino de *codificación y decodificación*...", abordaron problemas relativos a las interacciones entre "ver" y *razonar en geometría,* analizaron diferencias entre *Visión Humana* (percepción de objetos físicos), *Visión* (icónica espontánea) y *Tipos de Visualización* (Isomórfica, Homeomórfica, Analógica y Diagramática)*,* afirmando que para *ver en Matemática*, "la visualización tridimensional y bidimensional es una representación que, a diferencia de la percepción, no se desarrolla en el espacio real en tres dimensiones, sino que se proyecta sobre una superficie en dos dimensiones (roca, papel, pantalla electrónica...), no es una maqueta en tres dimensiones, pero se visualiza la profundidad propia de la percepción visual, gracias al surgimiento de la perspectiva".

En el nivel superior, los conceptos y métodos del análisis matemático presentan una gran riqueza de contenidos visuales, que en la opinión de De Guzmán, M. (1998), están constantemente presentes en los mecanismos mentales del matemático, y rara vez pasan a representaciones escritas, por una especie de atadura inconsciente, heredada.

Aunque en la literatura especializada se encuentran muchos trabajos sobre visualización, esta no siempre se conceptualiza, o se conceptualiza de diferentes maneras, pero orientada a formas de representación mental del objeto que se estudia, o en el mejor de los casos a una representación icónica o diagramática del objeto.

Entre las diversas concepciones encontradas, López Vera, L. (2006) define a la Visualización Matemática Tridimensional como un sistema de habilidades cuyas componentes son las habilidades de representación, transferencia y ubicación espacial, y en particular, define a la habilidad de ubicación espacial para un espacio modelado en coordenadas cartesianas. Considerando a la Visualización, como *"La habilidad de codificar y decodificar objetos físicos o matemáticos, abstractos o concretos, con riqueza de contenidos visuales, representados y ubicados en un sistema de coordenadas tridimensional, cuya representación y ubicación puede ser expresada analíticamente".*

De las investigaciones educativas sobre las habilidades de representación, transferencia y ubicación espacial, como sistema que la conforman, se encontró lo siguiente:

2.4.1. Habilidad de Representar

*S*e concibe como una de las habilidades componentes de la visualización, considerando que *un objeto matemático se representa por una expresión algebraica, por una forma tabular, por una gráfica, o por una palabra*.

En la Tesis Doctoral de Álvarez, J. (2001), se define a la habilidad de *representación gráfica* para la formación del Arquitecto, como *macrohabilidad* y como *proceso*. Las etapas que define son: Asimilación de la información, Representación selectiva, Representación interna, Representación externa, Modelación, Evaluación del modelo propuesto, Comunicación y Comprobación de la satisfacción de la necesidad. El objetivo en programas de Geometría Descriptiva en Arquitectura o Ingeniería Civil, es analizar propiedades de los Sistemas de Proyección con *punto al infinito* o *propio* y desarrollar la habilidad de representar objetos, trazando y/o analizando intersecciones, paralelismo o perpendicularidad entre rectas o entre planos, pero sin considerar *sistemas coordenados*.

Se retoma aquí el discurso de Duval, R. (1998) quien afirma que “Toda representación se refiere a un objeto, al menos para el sujeto que la produce. Si el sujeto no dispone mas que de una sola representación, el objeto que pretende identificar a través de esta, no puede ser distinguido de su representación; el objeto se confunde con la representación y se tienen tantos objetos como representaciones. El conocimiento científico comienza cuando el sujeto es capaz de disponer de varias representaciones para un mismo objeto *y transitar de una representación a otra* según el tratamiento que se de a dicho objeto”.

2.4.2. Habilidad de Transferencia

Se encontró que, aunque no definen a la *transferencia*, su relevancia en la visualización se enuncia en Hitt, F. (1998) cuando afirma que “la visualización matemática requiere de la *habilidad de convertir* un problema de un sistema semiótico de representación a otro”; y en Duval (1998) como *conversión cognitiva*, cuando afirma que “La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la *conversión cognitiva*”. Otra acepción de Transferencia, es la que se tiene cuando se habla de la aplicación del aprendizaje previo como ayuda al aprendizaje subsecuente dentro del mismo contexto matemático, proceso que se conoce como “reestructuración de conceptos en la construcción de conceptos”, o bien, cuando las ideas desarrolladas en la solución de un problema pueden ser aplicadas a la solución de otro problema en contextos iguales o diferentes. La transferencia positiva ocurre cuando el aprendizaje anterior facilita el nuevo. La expresión transferencia negativa quiere decir que el aprendizaje anterior interfiere con el nuevo o lo hace más difícil.

2.4.3. Habilidad Ubicación Espacial Matemática

De la revisión bibliográfica y experiencias didácticas, se identificaron dos niveles significativos de desarrollo de la Habilidad de Ubicación Espacial Matemática, posteriores a la habilidad primaria respecto al espacio físico, como se define a continuación, con carácter secuencial y de ascenso en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades* del pensamiento geométrico:

- Ubicación Espacial (Saiz, I. 1998)**:** Es la habilidad del sujeto de controlar (identificar, comprender y comunicar) sus relaciones de posición con el *espacio sensible.* Permite establecer espacialmente la relación objeto-sujeto e identificar las direcciones principales del espacio y de las referencias espaciales.
- Ubicación Espacial (Lurcat, Liliane 1976): Se basa en una percepción espacial, donde se identifican lateralidades del objeto (arriba-abajo, al frente y atrás, a la izquierda y derecha) y se transfieren las del sujeto.
- Habilidad de Ubicación Espacial Matemática Bidimensional (López Vera, L. 2006)**:** Determinar lateralidades de objetos representados en el espacio modelado bidimensional: *izquierda-derecha de X=0, arriba-abajo de Y=0.* (objetos de una o dos dimensiones sobre R^2)
- Habilidad de Ubicación Espacial Matemática Tridimensional (López Vera, L. 2006)**:** Determinar lateralidades de objetos representados en el espacio modelado tridimensional: *arriba-abajo de Z=0 o Z=K, izquierda-derecha de Y=0 o Y=K, al frente-atrás de X=0 o X=K.* (objetos de una, dos o tres dimensiones sobre R^3, antes y después de transformaciones geométricas y/o transformaciones de coordenadas)

De las definiciones aportadas por López Vera (2006) sobre la ubicación espacial requerida en el nivel universitario, la autora retoma para la presente investigación a la definición que corresponde a la Habilidad de Ubicación Espacial Matemática Bidimensional

2.5. Estrategias didácticas

De la revisión bibliográfica, se consideran relevantes para la presente propuesta didáctica, las siguientes concepciones sobre estrategias de enseñanza:

- Son procedimientos que el maestro utiliza en forma reflexiva y flexible para promover el logro de aprendizajes significativos en los alumnos.
- Son medios o recursos para prestar la ayuda pedagógica.
- Se clasifican en Preinstruccionales, Coinstruccionales y Postinstruccionales

Estrategias Preinstruccionales

- Hacer una identificación previa de los conceptos centrales de la información que los alumnos van a aprender.
- Tener presente qué es lo que se espera que aprendan
- Explorar los conocimientos previos de los alumnos para activarlos (cuando los alumnos los posean) o generarlos (cuando se sepa que los alumnos poseen escasos conocimientos o no los tienen).

Estrategias Coinstruccionales

Apoyan los contenidos durante el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, cubren funciones para que el alumno mejore la atención y detecte la información principal; logre una mejor codificación y conceptualización de los contenidos de aprendizaje; y organice, estructure e interrelacione las ideas importantes. Las estrategias de este tipo son: Ilustraciones, redes y mapas conceptuales, analogías y cuadros sinópticos.

Estrategias Postinstruccionales

Se presentan al término del proceso de enseñanza aprendizaje, con el objetivo de formar en el alumno una visión sintética, integradora e incluso crítica del material, además le permite valorar su propio aprendizaje. Las estrategias de este tipo son: resúmenes parciales y finales, organizadores gráficos como cuadros sinópticos, redes y mapas conceptuales.

2.6. Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas

Popper, filósofo contemporáneo, mencionó que si hoy reviviera un arquitecto fallecido hace por lo menos 30 años, estaría obsoleto de su profesión, lo mismo ocurriría con otras profesiones, como el médico o el ingeniero. Pero qué pasaría en el caso del profesor, seguramente seguiría utilizando los medios tradicionales para impartir sus clases: el gis y el pizarrón. Aunque sabemos, que ya existen muchas posibilidades para que la enseñanza no siga siendo así.

El acelerado desarrollo de las distintas ramas del conocimiento y la tecnología, sobre todo en los medios de comunicación, han influido en un mundo globalizado de constantes y profundos cambios que inciden en la educación.

El impacto cultural que estamos viviendo en la denominada "era de la información" representa un compromiso serio para las instituciones educativas, las cuales deberán generar un mayor número de accesos al conocimiento, por medio de estrategias pedagógicas auxiliándose de las nuevas tecnologías para la educación.

Los jóvenes que hoy estudian en nuestras aulas, están viviendo el movimiento postmoderno, con un proceso globalizador y sobre todo un acelerado cambio en los procesos tecnológicos. Los alumnos están habituados a la televisión de cable, al *internet*, al *chat*, a los video-juegos, a los sistemas interactivos, todo ello forma parte de su entorno, el cual manifiesta un agudo contraste con la realidad de la enseñanza tradicional de una institución educativa a la que asiste todos los días. Por eso la Escuela debe replantear sus estrategias de enseñanza y proponer nuevos modelos educativos que atiendan las necesidades de su población y permitan al alumno acercarse al conocimiento a través de ese mundo de herramientas multimedia.

La tecnología es una herramienta que ha venido a fortalecer los sistemas educativos, a través de nuevos discursos y propuestas metodológicas, esto se denota ya que los espacios educativos han sido objeto de diversas transformaciones a medida que las estrategias y medios de comunicación han cambiado. Este hecho revela, a los procesos comunicativos como fundamentos primordiales de la educación. En la actualidad, con el avance de la informática y de las telecomunicaciones dicha afirmación no solamente tiene vigencia, sino que además está influyendo de una manera vertiginosa en las estructuras educativas.

Es evidente que en este mundo globalizado donde la información juega un papel muy importante, es indispensable proporcionar a los alumnos más herramientas de acceso al conocimiento. Ahora bien, si estos materiales van acorde con su mundo de imagen, video, audio, interactividad, *internet*, juegos y sistemas multimedia, el alumno se sentirá en un ambiente “relajado” y familiar por lo que se generan variables cognitivas muy favorables para el aprendizaje.

Actualmente el manejo de los datos a través de sistemas de información, exige el aprovechamiento de todos los recursos tecnológicos a nuestro alcance. La utilización de los diferentes medios, como la televisión, las computadoras y todos los servicios que se generan a través de ella, ayudan a fomentar la independencia y la autonomía del estudiante en la adquisición del conocimiento. Además genera los siguientes resultados.

- Propicia un aprendizaje autónomo ligado a una experiencia extraescolar. Los sistemas interactivos buscan capacitar y entrenar al estudiante en enseñarlo a aprender y aprender a tecnificarse, forjando su autonomía en cuanto a tiempo, estilo, ritmo y método de aprendizaje, al permitir la toma de conciencia de sus propias capacidades y posibilidades para su autoformación.
- Impartir una enseñanza innovadora y de calidad: Impartir una enseñanza fuera de las aulas, en su casa, en los centros de cómputo.

- Facilitar al alumno la adquisición de actitudes, intereses y valores que le faciliten los mecanismos precisos para regirse por sí mismo, lo que le llevará a responsabilizarse en un aprendizaje independiente de manera permanente.

2.7. Herramientas Computacionales como Herramientas Cognitivas.

De la revisión bibliográfica, la autora considera de suma relevancia lo afirmado por Dörfler (2007 en prensa), acerca de que las herramientas computacionales se pueden concebir como herramientas cognitivas.

La autora coincide en que las herramientas computacionales permiten aproximaciones matemáticas desde diferentes ángulos del que es hecho tradicionalmente, ya que los aprendices pueden desarrollar una visión del proceso dinámico al incorporar varias representaciones gráficas para identificar los conjuntos solución de las desigualdades cuadráticas en función de intervalos con gráficas positivas y negativas de rectas y/o parábolas que resultan de la factorización.

La obtención del conocimiento a través de los medios exige en los sujetos la decodificación de los mensajes simbólicamente representados. Cada medio por la naturaleza de su sistema simbólico, por el modo de representación y estructuración de dichos mensajes, demanda que los alumnos activen distintas estrategias y operaciones cognitivas para que el conocimiento ofertado sea comprendido, almacenado significativamente y posteriormente recuperado y utilizado.

La investigación sobre los medios desde el punto de vista de Manuel Area Moreira (1999) ha puesto de manifiesto que en la interacción con los sistemas y estructuraciones simbólicas de los mismos, los sujetos no sólo adquieren conocimiento sobre los contenidos o información semántica que se ofrece, sino también sobre el tipo de actividad y habilidad intelectual necesaria para la adquisición de los mensajes. *En la presente investigación también se concibe a los medios como potenciadores de habilidades intelectuales en los alumnos*, ya que el análisis cualitativo y cuantitativo se realiza implementando procesos dinámicos a través de las TIC´s las cuales pueden contribuir al desarrollo de la habilidad de transferencia, para cambiar la cualidad de los objetos matemáticos y los procesos de experiencias aprendidas tal como lo afirma Dörfler (en prensa)

2.7.1. Plataforma Nexus ante demandas institucionales

Las demandas que enfrenta nuestra Universidad en términos de cobertura en los niveles de bachillerato, profesional, postgrado y educación continua, así como con respecto a la calidad de los procesos académicos, determinó la necesidad de implementar modalidades alternativas a la presencial que responda a estos desafíos.

La Dirección de Educación a Distancia de la Universidad Autónoma de Nuevo León implementó La PLATAFORMA NEXUS sustituyendo a la PLATAFORMA BLAKBOARD. Para dicha implementación ofrece cursos de actualización docente.

La presente propuesta toma como referencia el Diplomado en “Formación de Formadores en Educación a Distancia” ofrecido para cumplir con las demandas de la Visión UANL 2012, a fin del que el personal docente de la UANL sea capaz de identificar los elementos teóricos y tecnológicos que sustentan la modalidad a distancia, permitiendo con esto la capacidad de analizar las prácticas educativas exitosas para implementarlas y multiplicarlas con calidad en su entorno de trabajo.

La autora propone actividades para propiciar el aprendizaje del tema desigualdades cuadráticas, en plataforma NEXUS como escenario virtual para un contexto real

El diseño de las actividades apoyadas con imágenes en Word obtenidas con asistentes matemáticos para resolver gráficamente una desigualdad cuadrática *en escenario virtual* (Soportado por la plataforma NEXUS UANL), se propone como complemento para un ambiente de aprendizaje presencial dirigido a los alumnos del tronco común de la Licenciatura en Física, en Matemáticas, Ciencias Computacionales y Actuaría en aulas de FCFM UANL, como contexto real.

La metodología semi-virtual, se asume como el uso de la tecnología para apoyar los procesos de aprendizaje y de formación de los estudiantes de una modalidad de educación presencial con un componente virtual. Dicha metodología tiene como estrategia para el diseño del curso, el modelo sistémico de diseño instruccional de Dick & Carey. Esta metodología propuesta parte de: un análisis de necesidades educativas del estudiante, una definición de competencias e indicadores de competencia a potenciar en la asignatura, un diseño de contenidos, actividades, apoyos y evaluación.

La metodología soportada por la plataforma NEXUS utiliza como instrumentos: la guía metodológica con sus unidades didácticas y el manual para su elaboración. En dicha guía se deben proponer actividades individuales y de grupo, para todo el curso de Matemáticas I (Cálculo Diferencial). Ante dicha demanda, la autora considera como un aporte práctico las actividades que implementan el uso de los asistentes matemáticos de geometría dinámica Sketchapd y Graphmatica para resolver gráficamente una desigualdad cuadrática.

2.8. Competencias Matemáticas

Ante la demanda institucional (Visión 2012) de propiciar el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos de la UANL, se realizó una investigación bibliográfica acerca de las concepciones que se tiene sobre Competencias.

La esencia del concepto de competencia implica saber hacer y saber actuar, entendiendo, lo que se hace, comprendiendo cómo se actúa, asumiendo de manera responsable las implicaciones y consecuencias de las acciones realizadas y transformando los contextos a favor del bienestar humano. (Abdón Montenegro, pág. 13)

Al concepto de competencia le es inherente el saber hacer en contexto, (ICFE, 1999) asociando el saber a conocimientos, que pueden ser explícitos o implícitos, el saber hacer a acción, actuación y desempeño y el contexto al poder transferir en situaciones diferentes a aquellas en que se produjo el aprendizaje.

La autora coincide con la concepción de Iglesias, R. M. (2005), quien define a las competencias como "un conjunto de capacidades que incluyen conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiesta en su desempeño en situaciones y contextos diversos".

2.8.1. Clasificación de las competencias

La Clasificación De Competencias Asumida Por La Universidad Autónoma De Nuevo León: La Dirección de Estudios de Licenciatura de la UANL, presenta un documento orientativo aprobado por el H. Consejo Universitario el 9 de junio de 2005, en el cual expone la siguiente clasificación de competencias:

- **Competencias generales:**
  Se entiende como la posesión y desarrollo de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que permiten al sujeto llevar a cabo actividades en su área profesional de manera eficiente, eficaz y pertinente, adaptarse a nuevas

situaciones, anticipar problemas, evaluar las consecuencias de su trabajo y participar activamente en la mejora de su práctica.

- **Competencias instrumentales:**
  Estas competencias comprenden las capacidades, destrezas y habilidades que tienen una función instrumental en el ámbito profesional actual y pueden ser de naturaleza lingüística, metodológica, tecnológica o cognoscitiva, propias del perfil profesional necesario para la competitividad internacional y local.
- **Competencias de interacción social:**
  Son las competencias que facilitan el proceso de desarrollo humano personal e interpersonal, es decir, la interacción social y cooperación a través de la expresión de sentimientos, la crítica y la autocrítica.
- **Competencias integradoras:**
  Este tipo de competencias comprende aquellas relacionadas con el desarrollo de conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores que integran tanto a las competencias instrumentales como a las de interacción social, y que permiten que el egresado alcance, junto al desarrollo de las competencias específicas de su profesión, una formación integral que lo haga competitivo, tanto a nivel local, como nacional e internacional.
- **Competencias específicas de la profesión:**
  Forma particular de ser, saber y saber hacer actividades específicas para la satisfacción de necesidades sociales, y la producción de bienes y servicios en determinados sectores de la población. Son aquellas referidas a un campo profesional particular que responden a los requerimientos propios de un ejercicio profesional.
- **Competencias particulares de la asignatura:**
  Desde el área de conocimiento o de aplicación de la asignatura son desarrolladas como producto de las actividades de aprendizaje del curso.

La autora considera relevante para la presente investigación, la siguiente clasificación de Competencias Cognitivas que pueden adquirir carácter orientativo, propuesta por Tobón (pág. 215) .

Competencia	Actividades didácticas
Interpretativas	- Paráfrasis: exponer el planteamiento de un autor con las propias palabras - Ejemplificación: construir ejemplos de cómo se aplica un tema determinado - Analogías: establecer las semejanzas de un asunto con otro - Red conceptual: elaborar de forma gráfica las relaciones entre las ideas centrales y secundarias de un tema con determinados propósitos - Lectura: leer un documento, determinar su estructura y comprender su sentido - Análisis de obras de arte: observar obras de arte, analizarlas y plantear comentarios sobre su sentido
Argumentativas	- Justificación: exponer las razones para emplear determinado procedimiento en la realización de una actividad - Causalidad: analizar las causas y consecuencias de un determinado fenómeno - Debate: realizar un diálogo grupal en el cual los estudiantes analicen un asunto, exponiendo diferentes posiciones y argumentos
Propositivas	- Construir problemas: identificar y describir problemas en el análisis de un determinado tema - Resolver problemas: buscar soluciones a los problemas de manera creativa e innovadora - Hipotetizar: formular y sustentar hipótesis para explicar determinados problemas - Elaboración literaria: describir situaciones e imaginar mundos posibles

2.9. Conclusiones del Capítulo

De la revisión bibliográfica se concluye que diversas comunidades de investigación educativa identifican obstáculos epistemológicos, ontogenéticos y didácticos que generan conceptos erróneos o incompletos que han sido en principio eficientes para resolver algún tipo de problemas, como la solución de ecuaciones cuadráticas, pero que falla cuando se aplica a otro tipo de problemas análogos o parecidos como la solución de desigualdades cuadráticas.

Tanto de la experiencia docente de la autora, como de la revisión bibliográfica, se constata que: debido al éxito previo, los alumnos se resisten a modificar sus concepciones creyendo que le son suficientes sus conocimientos previos.

La autora concluye que es necesario el diseño de estrategias didácticas que permitan al alumno identificar los errores específicos que son constantes y resistentes, así como la necesidad de cambiar sus concepciones.

Se ha identificado que la implementación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas contribuirá al desarrollo de competencias Interpretativas, Argumentativas y Propositivas para la satisfacción de necesidades sociales que respondan a los requerimientos propios de un ejercicio profesional.

CAPITULO III

Introducción

El propósito de esta investigación es dar una propuesta didáctica que ayude a los alumnos a identificar que el proceso de solución de una ecuación cuadrática, se constituye en una herramienta conceptual para resolver una desigualdad cuadrática, ya que tal como se constató en el Capítulo I, es común que el 60% de los alumnos reprueban el primer examen parcial del curso de Cálculo Diferencial, que corresponde a dicho tema. (Anexo 4)

3.1. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

La presente propuesta didáctica está constituida por una planeación de actividades en la cual se implementan los siguientes tipos de estrategias definidas anteriormente en el Capítulo II:

1. Estrategias Preinstruccionales
    - Una prueba inicial.
    - Análisis de los resultados de la prueba inicial.

2. Estrategias Coinstruccionales
    - Una secuencia de actividades planteadas en un material de apoyo impreso autoinstruccional, que propicie a través de la orientación del docente, la identificación de los elementos conceptuales requeridos para aplicar el proceso de solución de ecuaciones cuadráticas al proceso de solución de desigualdades cuadráticas.
    - Actividades complementarias utilizando los asistentes matemáticos Graphmatica y Sketchpad en la solución de desigualdades.
    - Una estructuración del contenido teórico más relevante del tema en formato electrónico.

3. Estrategias Postinstruccionales:
    - Preguntas intercaladas
    - Retroalimentación
    - Evaluación

3.2. Estrategias Preinstruccionales

En esta etapa de diagnóstico, la autora aplicó una prueba inicial y actividades como el ejercicio siguiente, para identificar el nivel de desarrollo de habilidades y conceptos previos:

Ejercicio:

Coloca en el recuadro >, < , ó = según sea el caso:

1. $2 \ \square \ 3$
2. $5 \ \square \ 1$
3. $\frac{1}{2} \ \square \ 2$
4. $\frac{3}{2} \ \square \ \frac{4}{5}$
5. $-1 \ \square \ -5$

Con este ejercicio la autora obtuvo risas de algunos alumnos, les parecía algo muy obvio, pero después la autora preguntó:

¿Qué significa geométricamente que el 2 es menor que el 3?. Los alumnos contestaron que significa que el dos esta a la izquierda de el tres en la recta numérica.

Después la autora continuó con lo siguiente:

¿Qué me pueden decir de $2x + 3 \; \square \; 5x - 2$?

Con números parece muy fácil pero ahora incluyendo una variable… ¿Es tan fácil que lo anterior? ¿En que cambia? ¿Cómo saber si es >, < ó = ? ¿De qué depende? ¿Qué sucede si la $x = 1$? ¿Qué sucede si la $x = -1$? ¿Qué se puede concluir?

La autora junto con los alumnos concluyen lo siguiente: no se puede llenar el espacio, porque ‘x’ no tiene un valor determinado, que puede ser >, < ó =.

Después la autora plantea lo siguiente:

¿Qué significa geométricamente que $2x + 3$ es menor que $5x - 2$?

La **prueba inicial** ayuda a que el profesor conozca mejor a sus alumnos, y establezca las bases que posee cada alumno para entender los nuevos conocimientos. En esta investigación la prueba inicial, es para situarnos en las condiciones en que se presentan los alumnos al iniciar un curso de Cálculo Diferencial, particularmente a la autora le interesa saber si el alumno tiene la noción básica de desigualdad, el uso de intervalos, situar números en la recta numérica real y las reglas de los signos, como conceptos previos para la construcción de significados en el aprendizaje de desigualdades. (Anexo 5)

La información recabada en el **Análisis de los resultados de la prueba inicial**, ayudará a realizar ajustes al plan de trabajo, de tal manera que si la mayoría de los alumnos tienen problemas en algún aspecto, el maestro debe guiarlos para que investiguen información que les sea de utilidad o bien pueda optar por un asesoramiento extra clase, a fin de que cuenten con los elementos necesarios. La información obtenida de la prueba inicial no debe dar origen a una calificación, puede usarse para fijar metas a corto plazo con el fin de planear las actividades más adecuadas para el alumno, de acuerdo a sus bases y facultades.

3.3. Estrategias Coinstruccionales

La autora considera conveniente el uso de un **material de apoyo autoinstruccional** (impreso y en archivo electrónico) en donde el alumno lleve a cabo actividades para interiorizar conocimientos procedimentales y pueda llegar a sus propias conclusiones. Este documento en Word contiene explicaciones y ejemplos para que los alumnos puedan entender mejor los conceptos más importantes de este tema.

En la presente propuesta didáctica, el material de apoyo autoinstruccional, toma como punto de partida a los siguientes conocimientos previos al tema de Desigualdades Cuadráticas:

1) Operaciones con Conjuntos
2) Tipos de Intervalos
3) Relación de Orden de los Números Reales
4) Solución de Desigualdades lineales

El documento de apoyo impreso deberá ser entregado a cada uno de los alumnos una vez que termine de contestar la prueba incial. El documento está estructurado de tal forma que sea de fácil uso para el estudiante. Cada subtema tiene una pequeña introducción y orientaciones para su desarrollo, a través de ejemplos y ejercicios. Si los alumnos tienen alguna duda, podrán consultar al documento en archivo electrónico, a su maestro durante la clase y/o en horas de asesoría. Se incluye material en Word para consulta extraclase en Plataforma NEXUS UANL.

Adicionalmente al documento de apoyo la autora consideró conveniente llevar a cabo una explicación del tema por parte del maestro en el aula, a través de una **presentación electrónica**, utilizando para esto las facilidades de Power Point de Microsoft. Esto implica que el maestro esté preparado para retroalimentar y estructurar la explicación de los conceptos nuevos, apoyado en la presentación electrónica, la cual tiene solamente los conceptos más importantes con un ejemplo de cada uno de ellos, considerando que el documento de apoyo deberá ser leído con anterioridad por el propio alumno.

Se incluye material en PPT que corresponde al mismo tema, diseñado para retroalimentación en clase. (Anexo 6)

Asimismo se propone el uso de la tecnología con la ayuda de los asistentes matemáticos **Sketchpad y Graphmatica**, la finalidad de la implementación de las TIC´s es auxiliar al alumno para que desarrolle la habilidad de transferencia entre el registro gráfico y el registro geométrico en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales requeridos en el aprendizaje del *método gráfico para la solución de una desigualdad cuadrática.* La autora considera que la actividad del alumno a través de una serie de ejercicios le permitirá entender la diferencia entre el proceso de solución algebraica de una desigualdad cuadrática y el proceso de solución gráfica de la misma.

A la vez, se considera que los asistentes matemáticos **Sketchpad y Graphmatica**, permitirán al alumno observar que la solución de una ecuación se representa gráficamente por los puntos de intersección entre el eje X y la curva gráfica de la ecuación (si existen), a diferencia de la solución de una desigualdad, la cual, se representará a través de intervalos.

Se incluye material en Sketchapd y Graphmatica que corresponde al mismo tema, diseñado para resolver gráficamente una desigualdad cuadrática.

3.3.1. MATERIAL DE APOYO AUTOINSTRUCCIONAL PROPUESTO EN WORD PARA CONSULTA EXTRACLASE EN PLATAFORMA NEXUS UANL

i) Conceptos Básicos de Desigualdades Cuadráticas:

Se propone apoyar este material en Word con una presentación en Power Point (Anexo 6)

Una **desigualdad cuadrática** es de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$ (ó > 0, ≥ 0, ≤ 0), donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. La desigualdad cuadrática está en su **forma estándar** cuando el número cero está a un lado de la desigualdad.

Las siguientes expresiones $x^2 + 2x < 15$ y $x^2 \geq 2x + 3$ representan *desigualdades cuadráticas*.

De manera que, la forma estándar de las dos desigualdades anteriores serían: $x^2 + 2x - 15 < 0$ y $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

ii) Procedimientos para resolver desigualdades cuadráticas

Existen diferentes métodos para obtener el resultado de las desigualdades cuadráticas desde tres diferentes contextos, a saber: algebraicos, numérico, y gráfico.

Se han identificado algunos métodos con tratamiento algebraico y / o numérico. Entre ellos están los siguientes: método de resolución de desigualdades cuadráticas factorizables y el método de valores muestra (o prueba en intervalos). A continuación un explicación detallada de cada uno de ellos.

Procedimiento para resolver desigualdades cuadráticas factorizables:

Primer Paso: Escribir la desigualdad cuadrática en la forma estándar es decir: $ax^2 + bx + c < 0$ (ó >0, ≥ 0, ≤ 0).

Segundo Paso: Factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c$. En caso que la cuadrática sea irreducible (que no tenga factores), este método no se puede aplicar.

Tercer Paso: Considere los casos necesarios para que se cumpla la desigualdad. Por ejemplo:

Si la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable, entonces:

$$ax^2 + bx + c = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)$$

de manera que si $ax^2 + bx + c > 0$

$$\Rightarrow \quad (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) > 0$$

Para que un producto sea mayor que cero (positivo), aplicamos la "Ley de los Signos", obtenido lo siguiente: o ambos factores son mayores que cero ((+)(+) = +) o ambos factores son menores que cero ((-)(-) = +)

Esto es:

$\Rightarrow$ Caso I $a_1 x + b_1 > 0$ y $a_2 x + b_2 > 0$, ((+) por (+) da (+))

ó

Caso II $a_1 x + b_1 < 0$ y $a_2 x + b_2 < 0$, ((–) por (–) da (+))

por otro lado si $ax^2 + bx + c < 0$, aplicando nuevamente la "Ley de los Signos" tenemos:

$\Rightarrow \qquad (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) < 0$

Para que un producto sea menor que cero (negativo), hay dos casos: o el primer factor es mayor que cero y el segundo factor es menor que cero o viceversa, esto es:

$\Rightarrow$ Caso I $\quad a_1 x + b_1 > 0 \quad$ y $\quad a_2 x + b_2 < 0$, esto es, “ (+) por (–) da (–) ”

ó

Caso II $\quad a_1 x + b_1 < 0 \quad$ y $\quad a_2 x + b_2 > 0$, esto es, “ (–) por (+) da (–) ”

Observaciones:

1) Lo anterior también es válido si reemplazamos ‘<’ y ‘>’ por ‘≤’ y ‘≥’.

2) Con esto reducimos el problema a resolver desigualdades lineales; y el conjunto solución de la desigualdad cuadrática será obtenido como intersección y unión de los conjuntos solución de las desigualdades lineales. Decimos intersección, cada vez que al “traducir” los casos (I) y (II) se involucre un “y”; decimos unión, cada vez que involucremos un “ó”.

Cuarto Paso: Encuentre el conjunto solución de cada uno de los casos.

Quinto Paso: Dar la solución en forma de intervalos y graficarla.

Ejemplo. Resolver la desigualdad $x^2 \leq 1$. Escribir la solución con la notación de intervalos y representarla gráficamente en la recta real.

Primer paso: Escribir la desigualdad cuadrática en la forma estándar:

$$x^2 - 1 \leq 0$$

Segundo paso: Factorizar el polinomio dado, en este caso tenemos que factorizar $x^2 - 1$, por lo tanto se tiene:

$$(x + 1)(x – 1)$$

entonces, nos queda entonces una desigualdad de la forma:

$$(x + 1)(x – 1) \leq 0$$

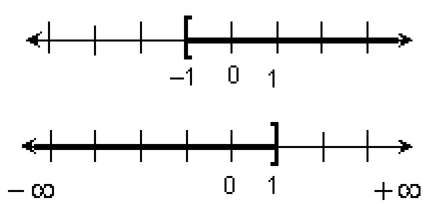
Tercer paso: Los casos que se deben considerar son los siguientes:

Caso I: $(x + 1) \geq 0$ y $(x – 1) \leq 0$
ó
Caso II: $(x + 1) \leq 0$ y $(x – 1) \geq 0$

Cuarto paso: Resolver cada uno de los casos

Solución Caso I:
$x \geq -1$ y $x \leq 1$, es decir,
$[-1; +\infty) \cap (-\infty; 1]$

Geométricamente tenemos:



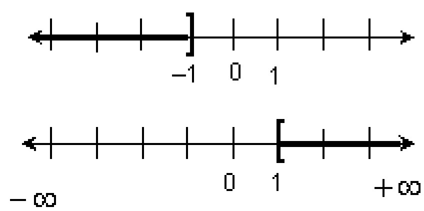
Al intersectar los conjuntos solución (representados geométricamente) obtenemos el conjunto solución para Caso I, este es: S_1: $x \in [-1; 1]$

Solución Caso II:

$x \leq -1$ y $x \geq 1$,

$(-\infty; -1] \quad \cap \quad [1; +\infty)$

Geométricamente tenemos:



Observamos que estos conjuntos, NO se intersectan, es decir, su intersección es el conjunto vacío, por tanto el conjunto solución es: $S_2 : \phi$

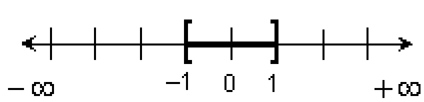
Quinto Paso:

Solución General.

La solución general S será la unión de S_1 y S_2, es decir,

$S = S_1 \cup S_2 = [-1; 1] \cup \phi$, de donde $S = x \in [-1; 1]$

Graficamente:



ACTIVIDAD 1 DEL MATERIAL IMPRESO

Con respecto al ejemplo anterior contesta lo siguiente:

1) Resuelve la ecuación $x^2 - 1 = 0$

2) Se observa que la solución de una ecuación cuadrática son dos valores para x, a saber, x_1 = x_2 =

3) ¿Que diferencia encuentras entre el tipo de solución de la desigualdad $x^2 - 1 \leq 0$ y la de la ecuación $x^2 - 1 = 0$?

4) ¿Es lo mismo resolver una ecuación cuadrática que una desigualdad cuadrática? ¿Qué diferencias encuentras?

5) ¿Qué es lo que se te dificulta en este método?

6) Resolver la desigualdad dada. Escribir la solución con la notación de intervalos y representarla gráficamente.

a) $2x^2 + 5x - 1 < 2x + 1$
b) $x^2 - 2x \leq -1$
c) $x^2 - 5x + 6 < 0$

Como se ha podido apreciar con el ejemplo anterior el método analítico para resolver desigualdades cuadráticas puede ser un poco tedioso. Existe un método alternativo conocido como el método de valores muestra (o prueba en intervalos).

<u>Procedimiento para resolver desigualdades cuadráticas utilizando el Método de Valores Muestra.</u>

Este método se basa en realizar pruebas numéricas y verificar en que intervalos se cumple la desigualdad.

Primero, se resuelve la ecuación de segundo grado (que son los valores en donde la ecuación es igual a cero) y se obtienen los intervalos de posible solución.

Luego, se escogen valores de esos intervalos y se sustituyen en la desigualdad original verificando cuales cumplen y cuales no. La solución son los intervalos en donde se cumple la desigualdad original. A continuación se procederá a explicar el procedimiento a seguir con este método de dos formas.

a) Forma 1

Primer Paso: Escribir la desigualdad cuadrática en la forma estándar es decir: $ax^2 + bx + c < 0$ (ó >0, ≥ 0, ≤ 0).

Segundo Paso: Factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c$ y obtener las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$. En caso que no se pueda, calcular el discriminante $D = b^2 - 4ac$, si el discriminante es negativo entonces:
a) Si $a > 0$ implica que $ax^2 + bx + c > 0$ para todo valor real de x.
b) Si $a < 0$ implica que $ax^2 + bx + c < 0$ para todo valor real de x.

Observación: Con lo anterior, la solución de una desigualdad cuadrática en donde el discriminante de $ax^2 + bx + c$ sea negativo es: $\mathbb{R}$ ó ϕ

Tercer Paso: Ubicar las raíces reales sobre una recta. Estas raíces dividen la recta numérica en intervalos.

Cuarto Paso: Determinar el signo de cada binomio en los distintos intervalos que se originan; para ello se le asignará a la variable un valor arbitrario que pertenezca a cada intervalo que se esta analizando (es útil hacer una pequeña tabla).

Quinto Paso: Determinar que signo le corresponde al producto de los binomios en cada intervalo estudiado.

Sexto Paso: Seleccionar los intervalos para los cuales se cumple la desigualdad. El conjunto solución es la unión de los mismos.

Ejemplo: Dada la siguiente desigualdad $x^2 + 5x > -6$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

Primer Paso: Escribir la desigualdad cuadrática en la forma estándar

$x^2 + 5x + 6 > 0$

Segundo paso: Factorizar el polinomio dado, por lo tanto se tiene:

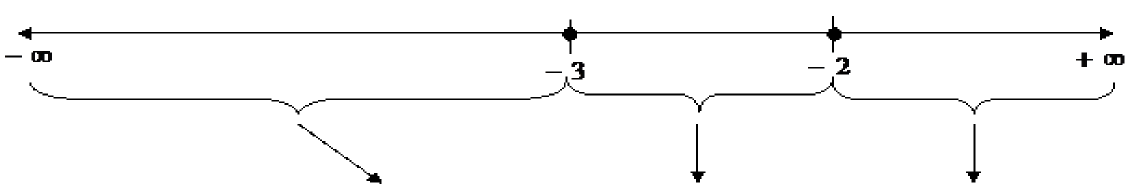
$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$, entonces las raíces son $x = -3$ y $x = -2$,

Nos queda entonces una desigualdad de la forma:

$(x+3)(x+2) > 0$

Tercer paso: Ubicamos las raíces sobre la recta real.

Cuarto Paso: Se le asignan valores arbitrarios a x en cada intervalo, y se determinan los signos.



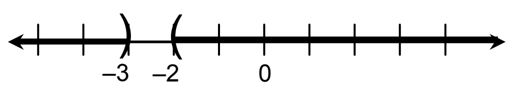
	$(-\infty; -3)$	$(-3; -2)$	$(-2; +\infty)$
signo de $(x+3)$	$-$	$+$	$+$
signo de $(x+2)$	$-$	$-$	$+$
signo de $(x+3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Quinto Paso: Determinar que signo le corresponde al producto de los binomios en cada intervalo estudiado.

Sexto Paso: Se aprecia entonces en la representación anterior que la desigualdad se cumple para aquellos intervalos donde el producto de los dos binomios es positivo por lo tanto la solución viene dada por:

S = x $\in$ $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$

Gráficamente:



Observación: Si la desigualdad anterior hubiera sido $x^2 + 5x \geq -6$, entonces el conjunto solución sería: S = x $\in$ $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$, es decir, se incluyen los extremos de los intervalos.

b) Forma 2

Primer Paso: Escribir la desigualdad cuadrática en la forma estándar es decir: $ax^2 + bx + c < 0$ (ó >0, ≥ 0, ≤ 0).

Segundo Paso: Factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c$ y obtener las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$. En caso que no se pueda, calcular el discriminante $D = b^2 - 4ac$, si el discriminante es negativo entonces:

a) Si $a > 0$ implica que $ax^2 + bx + c > 0$ para todo valor real de x.

b) Si $a < 0$ implica que $ax^2 + bx + c < 0$ para todo valor real de x.

Observación: Con lo anterior, la solución de una desigualdad cuadrática en donde el discriminante de $ax^2 + bx + c$ sea negativo es: $\mathbb{R}$ ó ϕ

Tercer Paso: Usa las raíces (soluciones) del paso # 2 como puntos críticos. Ordena las raíces en orden ascendente (de menor a mayor) en una recta numérica. Las raíces dividirán la recta numérica en intervalos abiertos; el signo algebraico del polinomio no puede cambiar en ninguno de estos intervalos.

Cuarto Paso: Prueba cada uno de los intervalos obtenidos en el paso #3, seleccionando un número en cada intervalo y sustituyéndolo en la variable de la inecuación. El signo algebraico del valor obtenido es el signo del polinomio sobre el intervalo completo.

Quinto Paso: Escribe la solución en notación de intervalos y representa la solución en la recta numérica.

<u>Ejemplo 1.</u> Resolver la desigualdad $1 \geq 2x^2 + x$.

Solución:

Paso 1: $-2x^2 - x + 1 \geq 0$.

Paso 2: (Factorizar): Vamos a factorizar usando el método de las raíces. Usted puede chequear que las raíces de $-2x^2 - x + 1 = 0$ son -1 y $½$.

Así

$$-2x^2 - x + 1 = -2\left(x - ½\right)\left(x + 1\right).$$

Vamos a escribir nuestro polinomio como el producto de dos factores. Así el -2 lo distribuimos en $(x - ½)$, para obtener finalmente:

$$-2x^2 - x + 1 = (1 - 2x)(x + 1)$$

Paso 3: Colocar las raíces de los factores en la recta real. Estas son –1 y ½

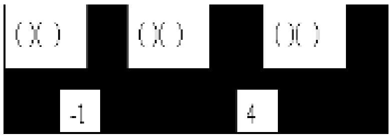
Paso 4: Colocar dos pares de paréntesis encima de cada intervalo establecido por las raíces Evaluar cada uno de los factores en los valores de prueba. En nuestro caso (1 – 2x) es el primer factor y (x + 1) segundo factor. Como valores de prueba se pueden tomar – 2, 0 y 1 respectivamente.

Colocar el signo resultante de cada multiplicación.

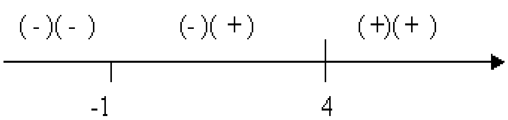
Paso 5: Como nuestra desigualdad es: $-2x^2 - x + 1 \geq 0$, equivalente a $(1 - 2x)(x + 1) \geq 0$, el conjunto solución será el intervalo donde el producto es positivo, este es [–1 ; ½]. Observe que en este caso se incluye los extremos del intervalo por haber una igualdad en la desigualdad.

<u>Ejemplo 2</u>. Dada la siguiente desigualdad $(x-4)\,(x+1) > 0$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

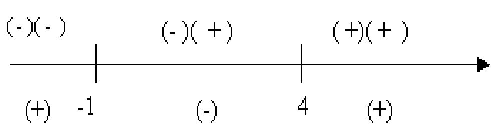
Solución: Al tener la desigualdad en su forma canónica podemos factorizar como: (x - 4)(x + 1)



Colocamos las raíces de los factores en la recta real; en este caso –1 y 4. Estos números particionan la recta real en tres intervalos: $(-\infty;-1)$, (-1 ; 4) y $(4;\infty)$. En cada uno de ellos el signo de cada factor será el mismo. Colocaremos encima de cada intervalo dos pares de paréntesis en donde irá el signo del primer factor dentro del primer par de paréntesis y el signo del segundo factor dentro del segundo paréntesis.



Entonces para determinar el signo de cada factor en cada intervalo usaremos valores de prueba pertenecientes a cada intervalo. Para el intervalo $(-\infty;-1)$ usaremos como valor de prueba $x = -10$.
$x + 1 = -9$, pero sólo nos interesa el signo "-", igualmente:
$x - 4 = -6$, pero sólo colocaremos el "-" en el intervalo



Debajo de cada intervalo colocaremos un par de paréntesis y dentro el signo resultante de la multiplicación de signos de los factores en el intervalo respectivo.
La solución a nuestra pregunta se basa en que intervalos el producto es estrictamente positivo, así concluimos que la solución es el conjunto $(-\infty;-1) \cup (4;\infty)$.

Algunas desigualdades resultan triviales. Ellas en general ocurren cuando la expresión cuadrática no tiene raíces reales y por consiguiente no se puede factorizar.

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad $0 \geq x^2 + 1$.

Solución: Observe que el lado derecho no se puede factorizar. Esta desigualdad tendrá una solución trivial: $\mathbb{R}$ ó ϕ. Hay una manera lógica para determinar cual conjunto. Como $x^2 + 1$ es un número estrictamente positivo, pues es la suma de dos números positivos. Así nunca va a ser menor que 0. Por tanto la solución es el conjunto vacío.

Observación: Si la desigualdad hubiera sido $0 \leq x^2 + 1$, entonces la solución de la desigualdad sería S = x $\in \mathbb{R}$.

ACTIVIDAD 2 DEL MATERIAL IMPRESO

I. Relaciona ambas columnas anotando en el paréntesis la letra que corresponda a la solución de la desigualdad dada.

$(2x+3)(5x-2) \geq 0$	( )	$a)$	$(-1;2)$
$(x-2)(x+1) < 0$	( )	$b)$	$\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{5};\infty\right)$
$-x^2 + 4x - 3 > 0$	( )	$c)$	$(-\infty;-1) \cup (5;\infty)$
$3x^2 \geq 2x - 5$	( )	$d)$	$(1;3)$
$-x^2 + 4x + 5 < 0$	( )	$e)$	$(-\infty;\infty)$

II. ¿Para que sirve la solución de la ecuación $(x-2)(x+1) = 0$ en la solución de la desigualdad $(x-2)(x+1) < 0$?

III. ¿Qué es lo que se te dificulta en este método?

3.3.2. Material en Sketchapd que corresponde al mismo tema, diseñado para resolver gráficamente una desigualdad cuadrática

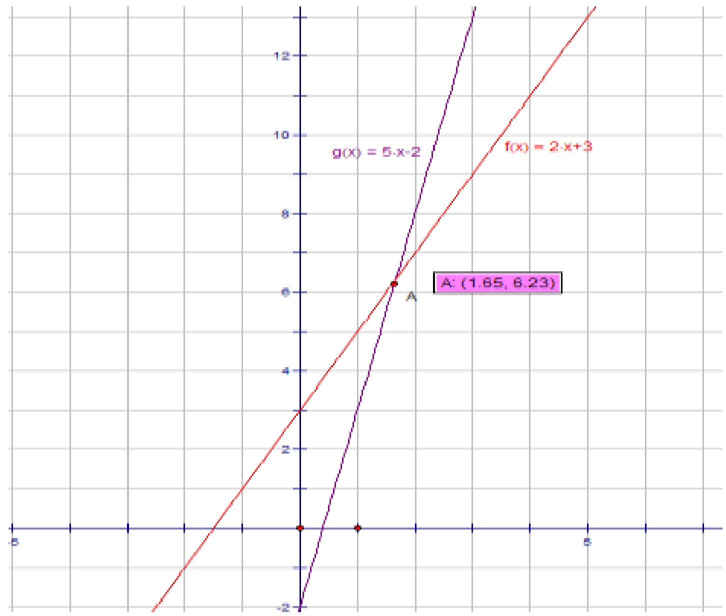
El objetivo de la propuesta es que el alumno pueda diferenciar entre resolver una desigualdad (que en este caso la autora se concentrara en las desigualdades cuadráticas) y resolver una ecuación, partiendo del hecho de que el alumno ya conoce las propiedades de las desigualdades y además que ya tuvo la instrucción y practica de resolver ecuaciones lineales, entonces para iniciar la propuesta la autora partió de lo que el alumno ya sabe con el objetivo de llevarlo a la solución de una desigualdad cuadrática.

Actividad A. Graficación de rectas como conocimiento previo que se constituye en herramienta conceptual para resolver desigualdades cuadráticas.

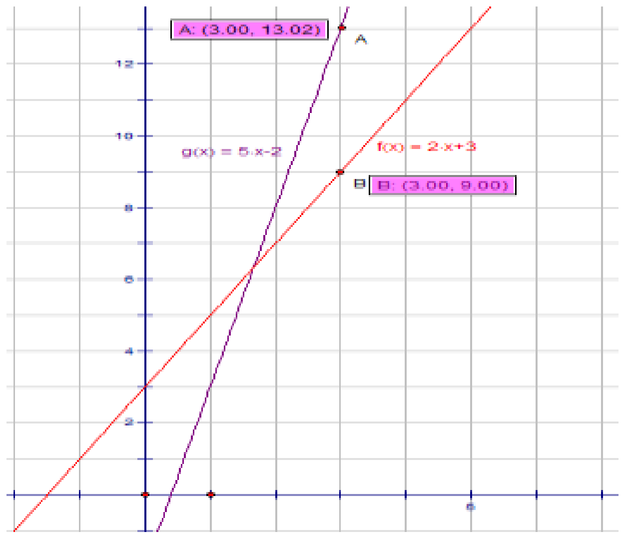
Retomando los cuestionamientos que se realizaron al final de la etapa preinstruccional, acerca de:

¿Qué significa geométricamente que $2x + 3$ es menor que $5x – 2$?

La autora explica que lo anterior se puede leer como: encontrar ‘x’ tal que la gráfica de $2x + 3$ está debajo de la grafica de $5x – 2$, entonces con la ayuda del paquete Sketchpad presenta las gráficas de $2x + 3$ y $5x – 2$

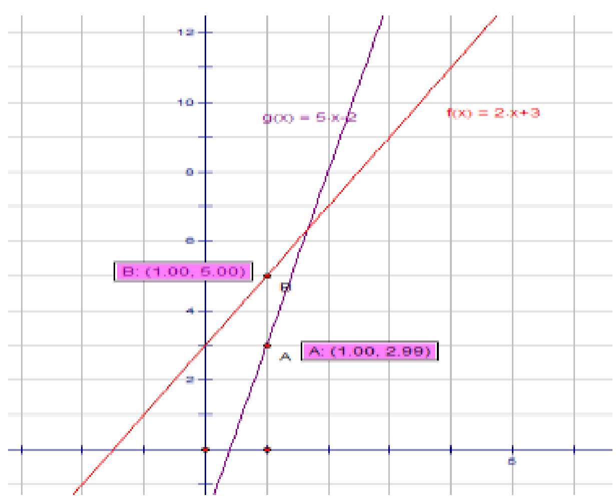


Entonces la autora preguntó: ¿para que valores de ‘x’ la gráfica de 2x + 3 está debajo de la grafica de 5x – 2?, la autora les comentó a los alumnos que el punto de intersección de las rectas marca cuando una esta arriba o debajo de la otra, que con la ayuda del paquete computacional se puede colocar un punto sobre una de las funciones y moverlo hasta aproximar el punto de intersección y pedirle la coordenada del punto, aclara que el valor exacto se puede obtener con el método analítico, porque gráficamente es una aproximación. Si los alumnos no lo pueden ver a simple vista cuando una recta esta debajo o arriba de la otra, el paquete tiene la ventaja de poner un punto sobre cada función y moverlo para observar como cambia la coordenada ‘y’ del punto, entonces se coloca un punto con la misma coordenada en ‘x’ sobre cada recta y se observa las coordenadas ‘y’ del punto. Para el valor más grande de la coordenada ‘y’ de los puntos significa que la gráfica a la cual pertenece esta arriba de la otra.



En este caso el punto A (3, 13) tiene el valor mas grande en la componente ‘y’ del punto, entonces se concluye que 5x – 2 > 2x + 3 para $x \in \left(5/3 ; \infty\right)$ ó lo equivalente a decir que: Para $x \in \left(5/3 ; \infty\right)$ la grafica de 5x – 2 esta arriba de 2x + 3, que es lo mismo decir que 2x + 3 esta debajo de 5x – 2 en el intervalo mencionado anteriormente. Con esto queda resuelta la desigualdad 2x + 3 < 5x – 2 .

Lo anterior fue colocando un punto sobre cada grafica a la derecha del punto de intersección, ahora que sucede si colocamos un punto sobre cada grafica a la izquierda:



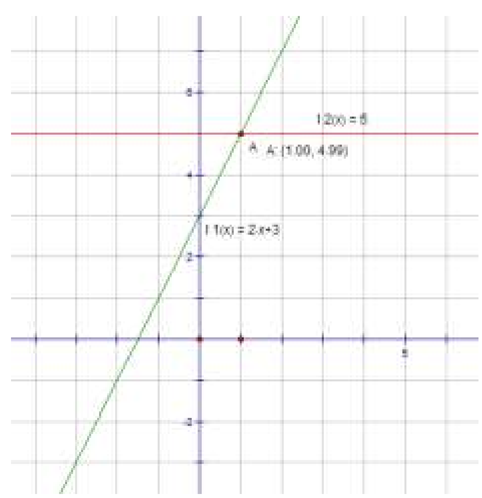
Se observa que ahora el punto B (1, 5) tiene mayor componente ‘y’ que A (1, 3), entonces se puede decir que: 2x + 3 > 5x – 2 para x $\in \left(-\infty;\ {}^{5}\!/_{3}\right)$

De esta manera se le puede ayudar al alumno para determinar los valores de ‘x’ en los cuales la gráfica de 2x + 3 está debajo o arriba de la grafica de 5x – 2.

Actividad B. En la etapa coinstruccional, se investiga la solución de una desigualdad lineal.

En esta actividad la clase continua resolviendo la siguiente desigualdad 2x + 3 > 5

La autora presenta una tabla para poder diferenciar el método analítico de resolverla y el método gráfico:

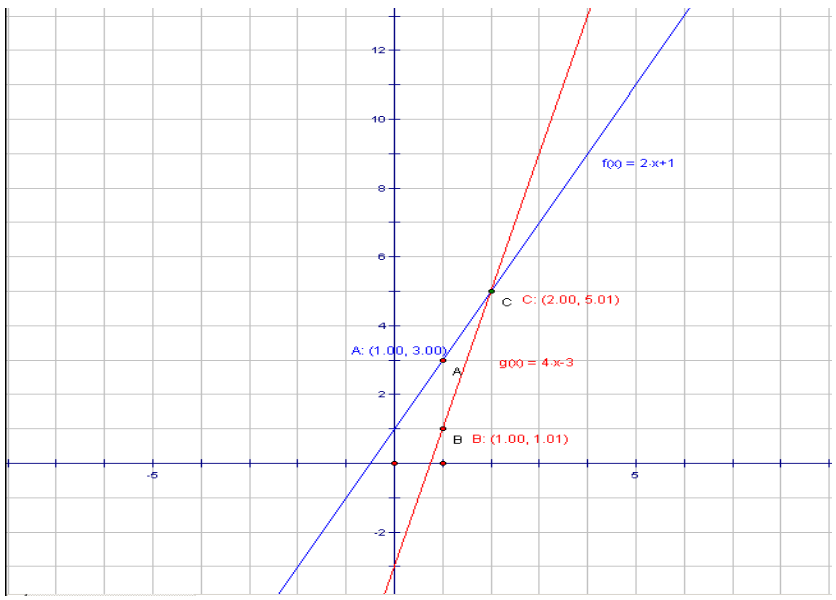
Resolver una desigualdad analíticamente	**Resolver una desigualdad geométricamente**
Es encontrar los valores de ‘x’ que satisfacen la inecuación	Es encontrar los valores de ‘x’ tales que l_1 está arriba de l_2
2x + 3 > 5 “despejar la x” es parte del proceso y aplicar propiedades de la relación de orden.	Si l_1: $y = 2x + 3$ l_2: $y = 5$ 

EJERCICIOS PROPUESTOS

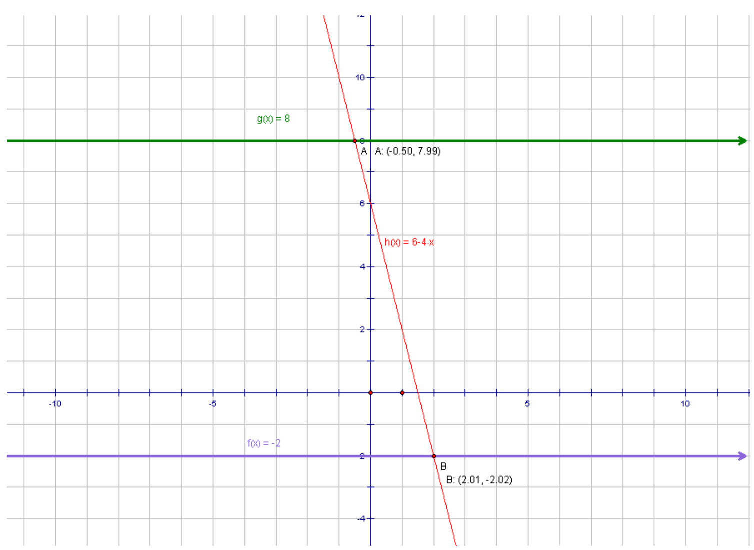
La autora presentó los siguientes ejercicios

Resuelve por el método gráfico las siguientes desigualdades.

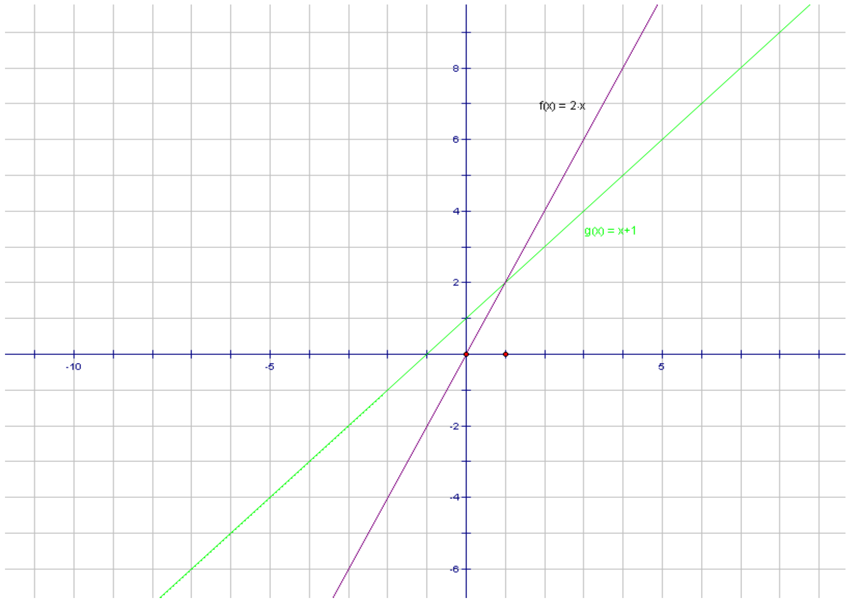
1) $2x + 1 < 4x - 3$



2) $-2 < 6 - 4x < 8$

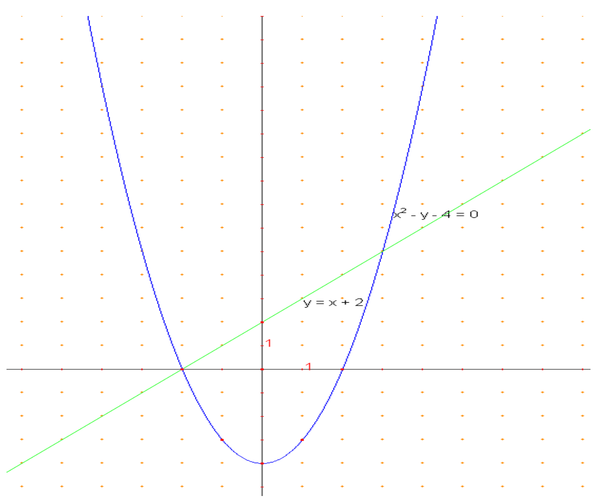


3) $2x < x + 1 < 3$



Actividad C. Ejemplo de una desigualdad cuadrática, soportado con el asistente Sketchpad comparando posiciones de gráficas de cuadráticas y rectas.

En esta actividad se resuelve la siguiente desigualdad $x^2 - 4 > x+2$



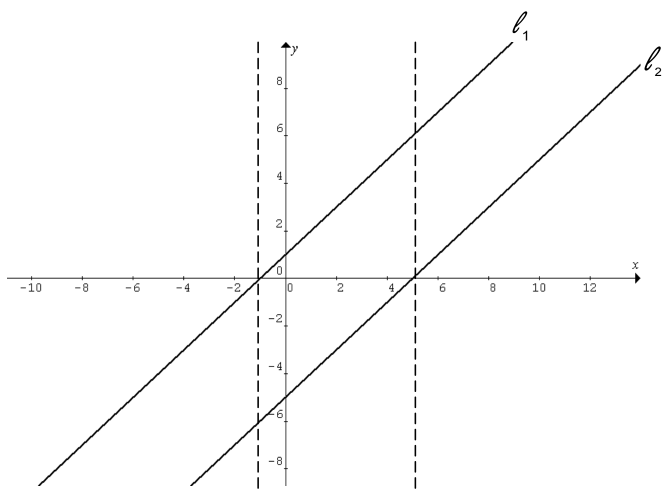
Actividad D. Solución de una desigualdad cuadrática, soportado con el asistente Sketchpad comparando posiciones de rectas para resolver una desigualdad cuadrática graficando sus factores.

Para esta actividad se resuelve en clase la siguiente desigualdad $x^2 - 4x - 5 > 0$

Solución: Al factorizar la expresión cuadrática tenemos $(x + 1)(x - 5) > 0$

Luego si consideramos las graficas de $\ell_1 : y = x + 1$, $\ell_2 : y = x - 5$,

observamos que:



ℓ_1 y ℓ_2 están sobre el eje X si $x > 5$

ℓ_1 y ℓ_2 están bajo el eje X si $x < -1$

Con ello, $x + 1 > 0$ y $x - 5 > 0$ si $x > 5$

$x + 1 < 0$ y $x - 5 < 0$ si $x < -1$

es decir, $(x + 1)(x - 5) > 0$ si $x \in (5; \infty)$,

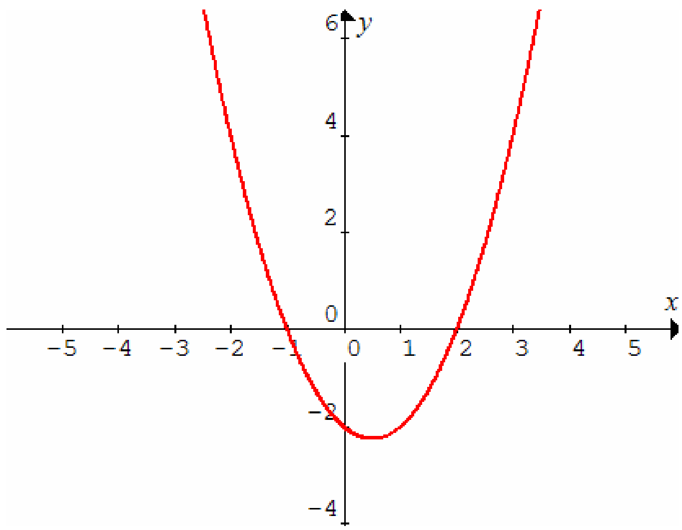
pero también, $(x + 1)(x - 5) > 0$ si $x \in (-\infty; -1)$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación dada es: $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$

3.3.3. Método Gráfico apoyado en el Graphmatica graficando las funciones cuadráticas.

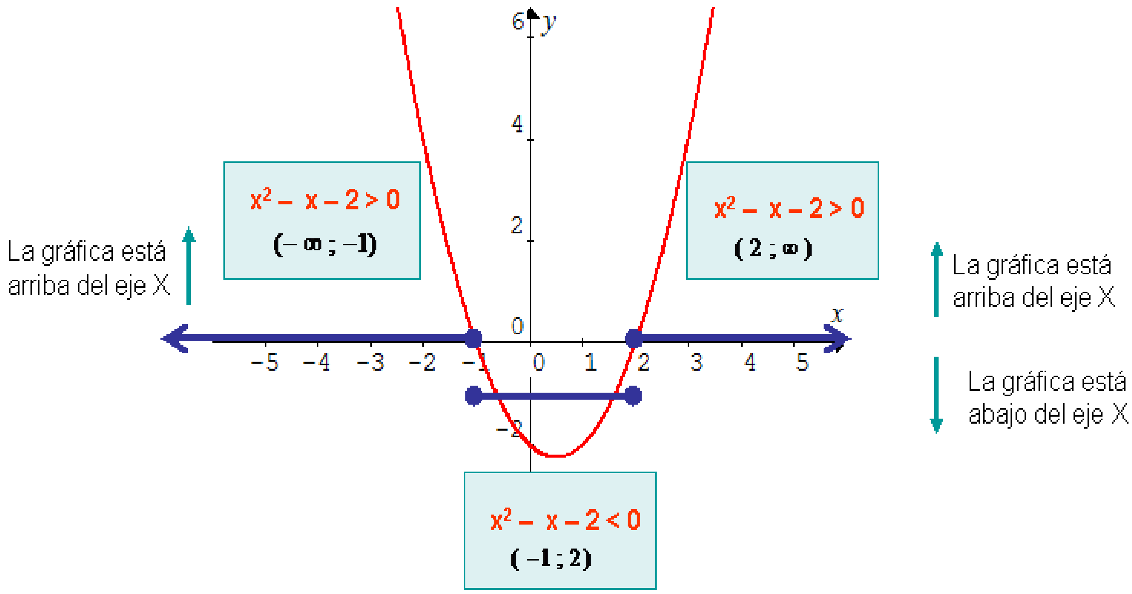
Para la resolución de este tipo de desigualdad basta con graficar la parábola que representa a la cuadrática y encontrar sobre la curva la región que satisface que sea mayor, menor y/o igual a cero. Es decir, aquella región determinada por la curva que se encuentra por encima, por debajo y/o que contenga al eje de las abscisas, por ejemplo:

Dada la siguiente desigualdad $x^2 - x - 2 > 0$, graficamos $x^2 - x - 2 = 0$, y obtenemos lo siguiente:



La solución de la desigualdad original $x^2 - x - 2 > 0$ son los intervalos de la variable x en donde la gráfica está arriba del eje "x" (es decir, en donde la "y" es mayor a cero).

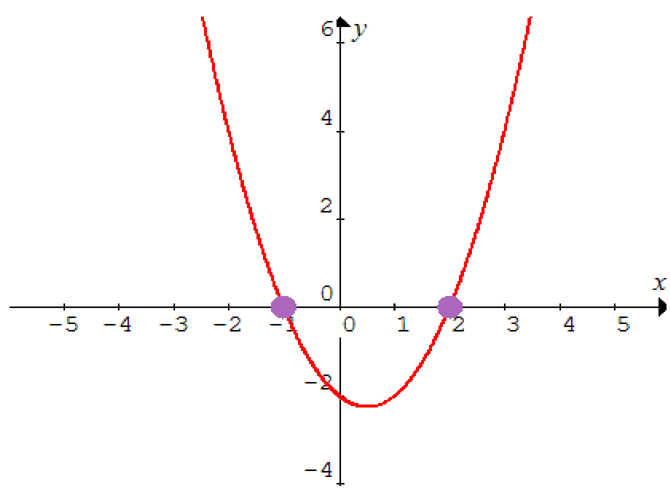
Solución de la desigualdad $x^2 - x - 2 > 0$



Entonces la solución es S = $x \in (-\infty\, ; -1) \cup (2\, ; \infty)$

Actividad A. Comparación de la solución de una ecuación cuadrática y una desigualdad cuadrática de forma gráfica

Solución de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$



Entonces el conjunto solución de esta ECUACIÓN es: S = $\{\, -1 \;\; , 2 \,\}$

Actividad B. Método gráfico de resolver una desigualdad cuadrática

Paso 1: Escribir la inecuación cuadrática en la forma estándar es decir: $ax^2 + bx + c < 0$ (ó >0, ≥ 0, ≤ 0).

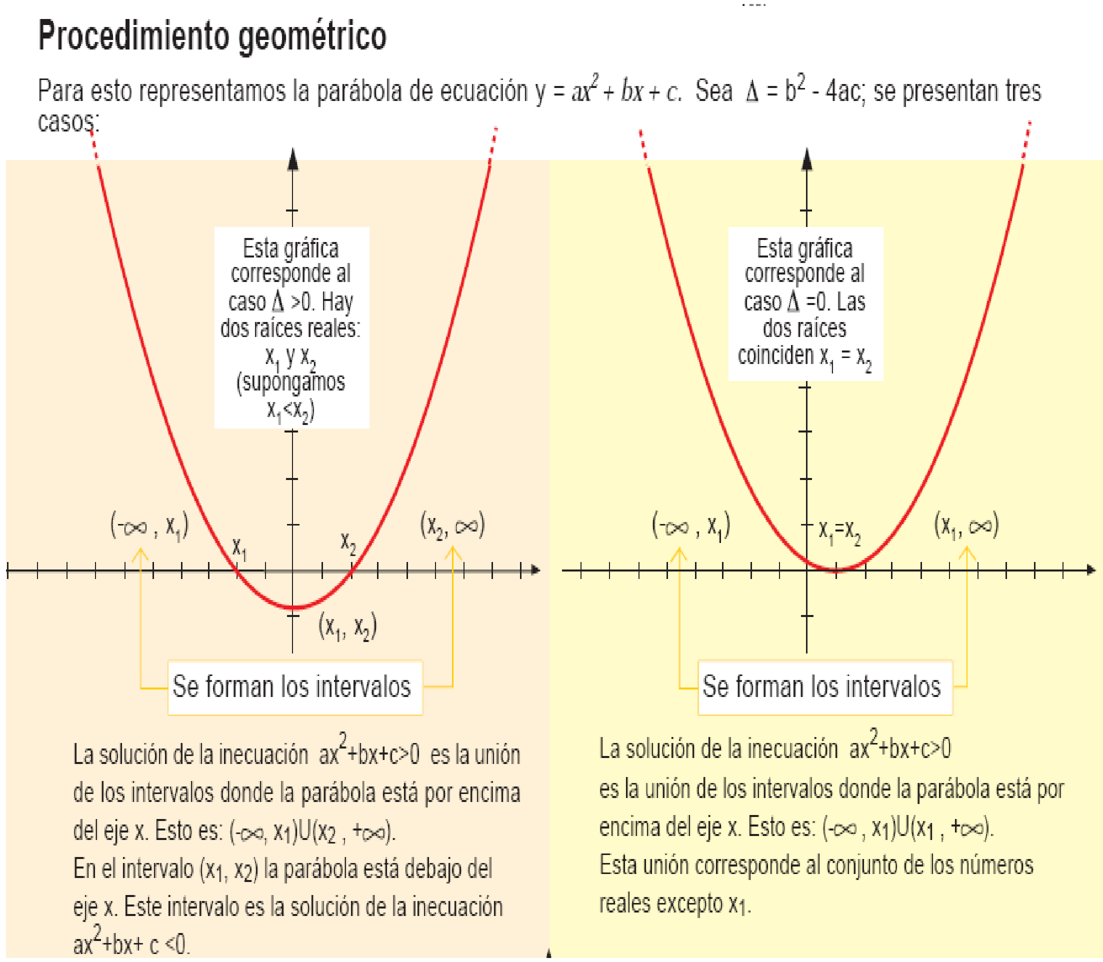
Paso 2: Dibujar la parábola $y = ax^2 + bx + c$

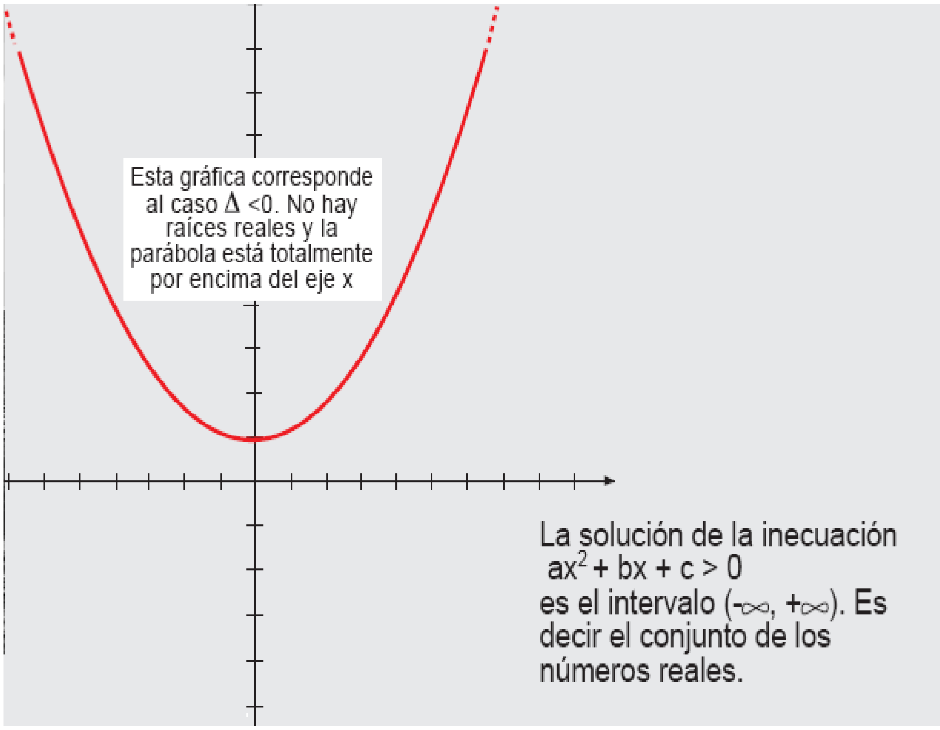
Paso 3: Determinar puntos de intersección (si los hay) de la parábola y el eje X.

Paso 4: Observar en la gráfica la región que se nos pide en la desigualdad ya sea debajo, encima y/o que contenga al eje de las abscisas.

Paso 5: Dar la solución

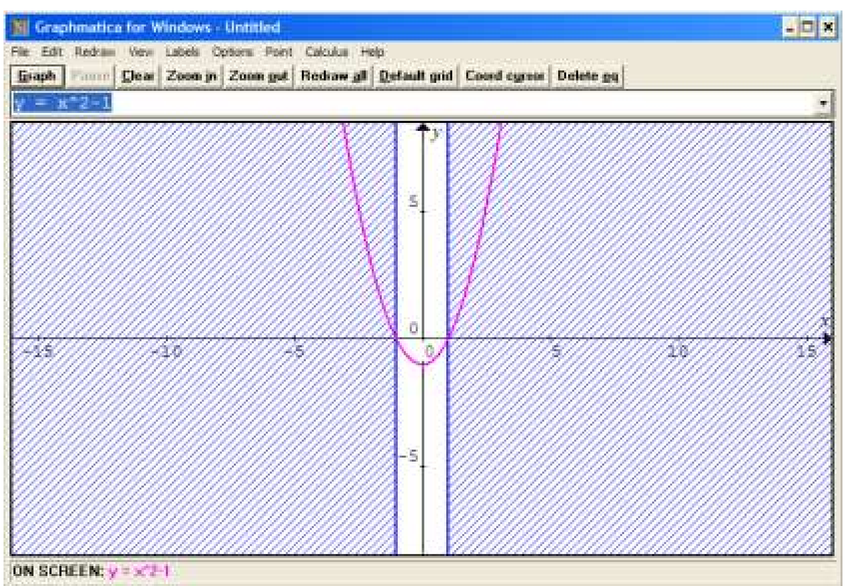
Para eso se hace uso de las siguientes diapositivas:



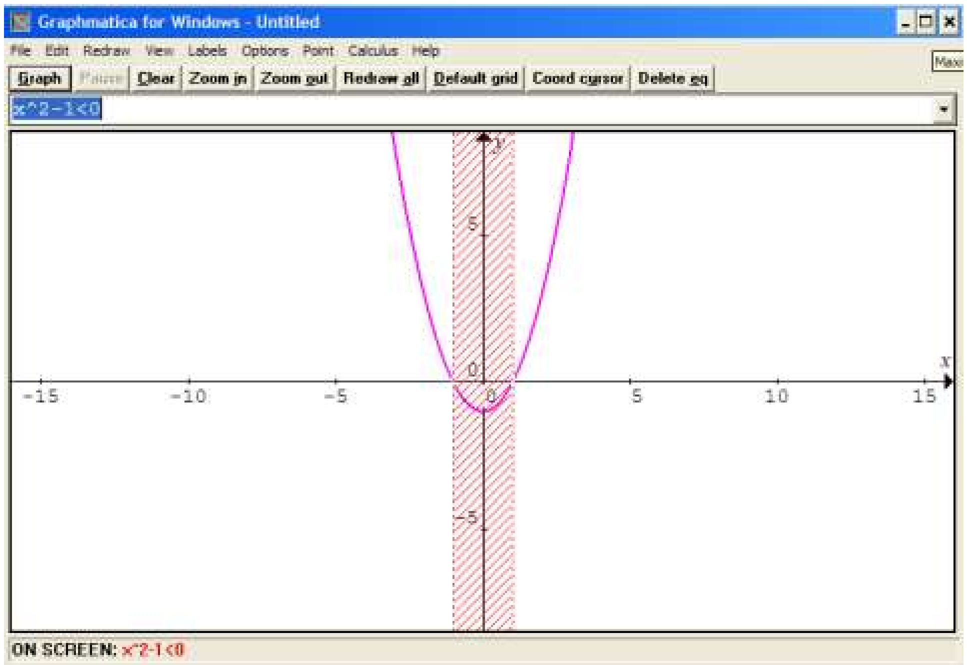


EJERCICIOS PROPUESTOS

1) $x^2 - 1 \geq 0$



2) $x^2 - 1 < 0$



Actividad C. Práctica de solución de desigualdades cuadráticas con la ayuda de una página electrónica (Anexo 7)

3.4. Estrategias Postinstruccionales

Se entiende que el maestro concebido como un facilitador del aprendizaje, está preparado tanto para realizar una **evaluación** a través de preguntas intercaladas y cuestionarios previos a un examen, como para responder las preguntas que surjan en la exposición, preparando con anterioridad la **retroalimentación** del tema, a través de otros ejemplos adicionales que expondrá con la ayuda del pizarrón. El maestro debe disipar las dudas que pudieran ocurrir en la presentación, respecto a lo que se diagnostico en la prueba inicial y además aquellas interrogantes que surgieron con motivo de la lectura del documento de apoyo.

La autora recomienda que el docente diseñe una actividad postinstruccional para evaluar en clase o una actividad extraclase el tema de desigualdades. La autora propone las siguientes:

Actividad A.

El objetivo de esta actividad es que el alumno vea la aplicación en la vida cotidiana de las desigualdades vistas en clase y poder averiguar si el alumno comprendió el método grafico.

1. Resuelve la siguiente desigualdad. Escribe la solución con la notación de intervalos y represéntala gráficamente.

$$\frac{80 + 85 + 70 + 75 + x}{5} \geq 80$$

2. Resuelve el siguiente problema:

Considera que obtuviste 80, 85, 70 y 75 en cuatro exámenes de tu clase de Matemáticas. Si representas por “x” la calificación del quinto examen. ¿Cuál debe ser tu calificación en él para que promedies 80 ó más?

3. Resuelve la siguiente desigualdad. Escribe la solución con la notación de intervalos y represéntala gráficamente.

$$x^2 - 107x + 700 < 0$$

4. Resuelve el siguiente problema:

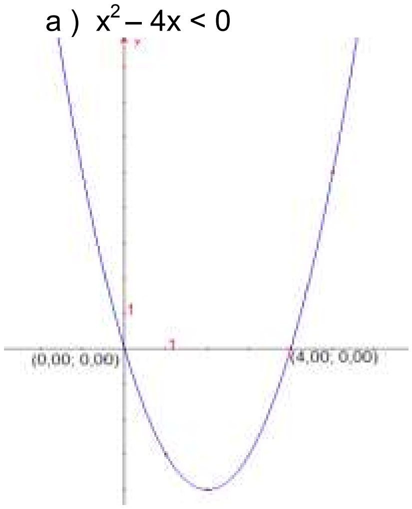
Una compañía que fabrica escritorios puede vender todos los que produce a $ 110 cada uno. Si "x" escritorios se venden cada semana, entonces el número de dólares en el costo total de producción semanal es $x^2 + 3x + 700$. ¿Cuántos escritorios deberán construirse semanalmente para que el fabricante garantice una ganancia?

5. Resuelve la siguiente desigualdad. Escribe la solución con la notación de intervalos y represéntala gráficamente.

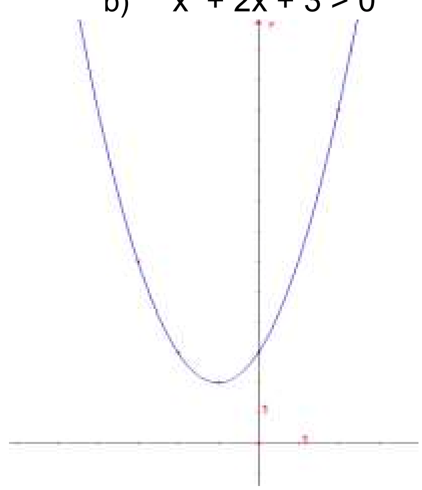
$x^2 + 2x + 3 < 0$

6. Encuentra la solución de las siguientes desigualdades, por el método gráfico.

a) $x^2 - 4x < 0$



b) $x^2 + 2x + 3 > 0$



Actividad B. Cuestionario

1. ¿Qué significa resolver una desigualdad?

2. ¿Es lo mismo resolver una desigualdad que una ecuación?
   Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

3. ¿Qué representa gráficamente la solución de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$?

4. ¿Qué representa gráficamente la solución de la desigualdad $x^2 - x - 6 > 0$?

5. ¿Para que sirve la solución de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ en la solución de la desigualdad $x^2 - x - 6 > 0$?

6. ¿Cuál método te parece más práctico a la hora de resolver una desigualdad?
   a. Método Algebraico
   b. Método Grafico
   c. Ambos

   Justifica tu respuesta

7. ¿El método gráfico te ayudó a comprender o entender el significado de resolver una desigualdad?
   Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

8. Que opinas acerca del uso de la computadora en el salón de clase

Finalmente se realizó un análisis de los resultados obtenidos en las actividades A y B (Anexo 8).

3.5. Evaluación de la Propuesta Didáctica

A través de las estrategias realizadas en la Etapa Post instruccional, se evaluó el desarrollo de la TRANSFERENCIA entre el REGISTRO GEOMÉTRICO Y EL REGISTRO ALGEBRAICO, asociando las actividades en relación a las etapas del MODELO DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMETRICO DE VAN HIELE como sigue:

Etapa	Actividad
1° Nivel - Visualización	Identificación de una desigualdad
2° Nivel - Análisis	Identificación de propiedades gráficas
3° Nivel - Deducción Informal	Identificación de relaciones esenciales de una desigualdad
4° Nivel - Deducción Formal	Identificación de propiedades analíticas
5° Nivel - Rigor	Aplicación de Propiedades de relación de orden y representación de la solución en términos de uniones e intersecciones de intervalos.

<u>CONCLUSIONES</u>

El objetivo de la presente Propuesta Didáctica, es llevar al alumno al desarrollo del 5° Nivel –Rigor, coincidiendo con Van Hielle respecto a que es un nivel que difícilmente alcanzan los alumnos de nivel preuniversitario, pero que si puede ser desarrollado en el nivel de licenciatura, para propiciar la Construcción de Conceptos para *Casos Generales* aplicando *propiedades de relación de orden* y la representación de la solución de una desigualdad cuadrática en términos de uniones e intersecciones de intervalos.

Aplicando el método de investigación acción se observó que efectivamente los medios juegan un roll de potenciadores de habilidades intelectuales en los alumnos, ya que el análisis cualitativo y cuantitativo se realizó implementando procesos dinámicos a través de *las TIC´s como herramientas cognitivas*, las cuales contribuyeron al desarrollo de la habilidad de transferencia, para cambiar la cualidad de los objetos matemáticos en el tema de desigualdades cuadráticas.

Las Estrategias Didácticas propuestas para implementar el uso de los asistentes matemáticos **Sketchpad y Graphmatica** en el aula, para que el desarrollo de la habilidad de transferencia entre el registro gráfico y el registro geométrico en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales requeridos en el aprendizaje del *método gráfico para la solución de una desigualdad cuadrática*, a las que se arriba como resultado del trabajo investigativo desarrollado, son un aporte práctico para el uso de estas tecnologías en la materia que nos ocupa.

RECOMENDACIONES

En relación a las dificultades derivadas de la complejidad de los elementos del calculo, los docentes deben tener en cuenta en la enseñanza de las desigualdades aspectos como: no introducir las técnicas de resolución demasiado rápido como simples pasos a seguir; asegurarse de que los símbolos utilizados están claramente diferenciados y que tienen valor semántico para los alumnos; establecer con claridad los requerimientos para realizar la transferencia entre los conceptos de ecuación cuadrática e inecuación cuadrática; no introducir la definición y la notación formal hasta que el concepto de inecuación, así como las técnicas de resolución, estén claramente adquiridos; en la medida de lo posible, evitar la complejidad notacional que en ocasiones resulta innecesaria.

BIBLIOGRAFIA

Aréchiga Maravillas, J. (2001): Problema de la Transferencia de las Matemáticas. Publicado en la página Web: http://www.uag.mx/63/a04-04.html

Barbosa, K. (2003): *La enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE*. Relime Vol. 6, Núm. 3, pp. 199-219

Borello, M. (2007): *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte.* Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México (Tesis de Maestría)

EDUTEKA (2003): Los manipulables en la enseñanza de las matemáticas. La integración de las TICs en Matemáticas. Computadores en el currículo Matemático. Sobre tecnología en la Clase de Matemáticas. Reseña de Software de Matemáticas. http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php

Farfán, R./Albert, A. (2001): *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. Edición especial CASIO. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Garrote, M./Hidalgo, M./Blanco, L. (2004). *Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones*. Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. Badajoz.

Hitt Espinosa, F. (1998): Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Educación Matemática, Vol.10 No.2, pp.23 – 45

López Vera, L. (2006): *Metodología para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Vectorial fundamentada en el desarrollo de la Visualización Matemática Tridimensional*. Centro de Estudios de Ciencias de la Educación, Universidad de Camagüey (CECEDUC), Cuba. (Tesis Doctoral)

ANEXOS

ANEXO 1: Programa de Matemáticas I

1. NÚMEROS REALES
1.1 Conjuntos (definición, unión, intersección, diferencia y complemento)
1.2 Sistema de coordenadas unidimensional.
1.3 Relación de orden (desigualdades).
1.4 Definición de intervalos (abierto, cerrado, semi – abiertos e infinitos).
1.5 Solución de desigualdades (lineales simples, lineales dobles, cuadráticas reducibles e irreducibles, producto y cociente de polinomios).
1.6 Definición de valor absoluto (dos formas), interpretación geométrica y propiedades.
1.7 Solución de desigualdades con valor absoluto

2. FUNCIONES
2.1 Definición, dominio e imagen.
2.2 Operaciones con funciones (adición, sustracción, producto, cociente y composición).
2.3 Gráfica de funciones (polinomial, racional, potencia, definida por secciones, seno y coseno).
2.4 Clasificación par e impar

3. LÍMITES
3.1 Definición de límite.
3.2 Teoremas.
3.3 Límites unilaterales.
3.4 Límites infinitos (asíntota vertical).
3.5 Límites en el infinito (asíntota horizontal).

4. CONTINUIDAD
4.1 Definición.
4.2 Tipos de discontinuidad.
4.3 Continuidad de una función compuesta.
4.4 Continuidad en un intervalo.
4.5 Teorema del valor intermedio.
4.6 Continuidad de funciones trigonométricas
4.7 Límites de funciones trigonométricas
4.8 Gráfica de funciones: tg x, ctg x, sec x , csc x

5. LA DERIVADA
5.1 Recta tangente a una curva.
5.2 Definición.
5.3 Diferenciabilidad y continuidad.
5.4 Teoremas
5.5 Regla de la cadena.
5.6 Teorema del valor intermedio
5.7 Derivadas de orden superior
5.8 Derivada Implícita

6. APLICACIONES DE LA DERIVADA
6.1 Valores máximos y mínimos de una función
6.2 Teorema de Rolle y Teorema del valor medio
6.3 Funciones crecientes y decrecientes (monótonas).
6.4 Criterio de la primera derivada.
6.5 Concavidad y punto de inflexión.
6.6 Criterio de la segunda derivada.
6.7 Asíntotas oblicuas.
6.8 Gráfica de funciones
6.9 Problemas de Optimización (razonados)

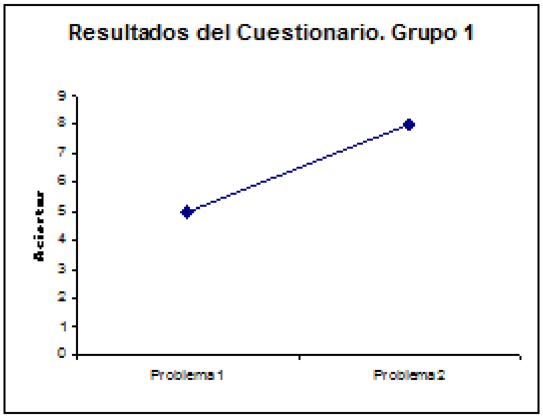
ANEXO 2: Cuestionario

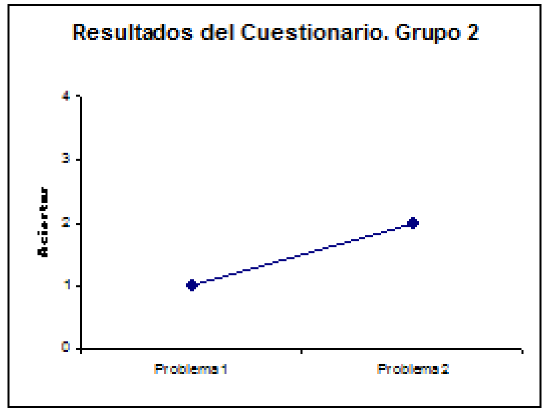
Nombre:____

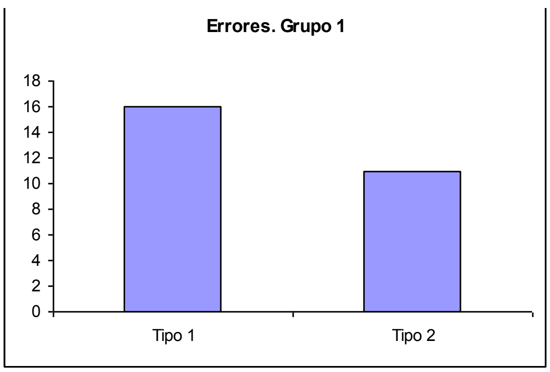
Resuelve las siguientes desigualdades cuadráticas. Expresa el resultado con la notación de intervalos y represéntala gráficamente en la recta real.

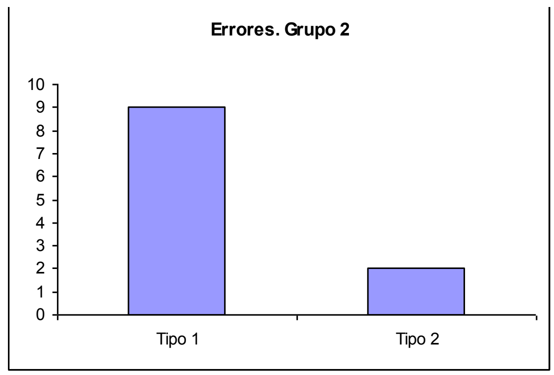
1. $x^2 \leq 16$
2. $2x^2 + 5x - 1 < 2x + 1$

ANEXO 3: Resultados globales del cuestionario





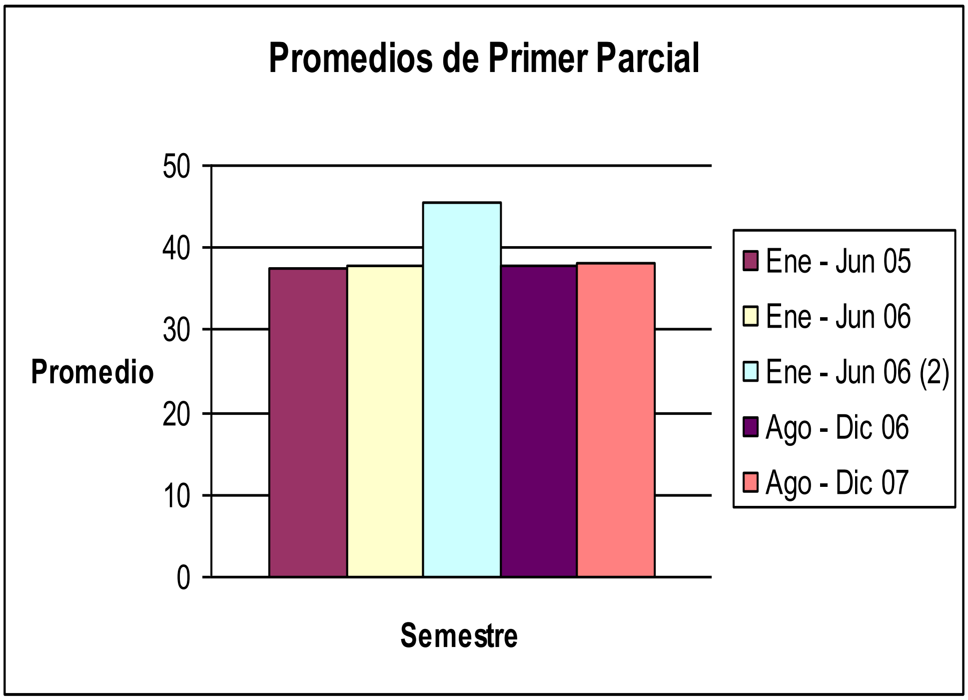




Donde el Error del tipo 1, que sucede en el problema 1, los alumnos despejan la ‘x’ como sigue: $x \leq \pm 4$.

El Error del tipo 2, que se da en el problema 2, los alumnos expresan la solución como: $x < ½$ y $x < -2$.

ANEXO 4: **Resultados anteriores de primer Parcial de Matemáticas I**



ANEXO 5: Prueba Inicial

DESIGUALDADES. PRUEBA INICIAL

1. Comparar los siguientes pares de números poniendo en el recuadro el símbolo (< , > ó =) que convenga:

$2 \;\square\; 5$	$3 \;\square\; -5$	$\frac{1}{3} \;\square\; \frac{1}{2}$	$-2 \;\square\; -5$
$2^2 \;\square\; 4$	$(-1)^3 \;\square\; -1$	$-3^2 \;\square\; -9$	$0.25 \;\square\; 0.22$

2.- Ordena de mayor a menor:

$$-3,\ 20,\ 15,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{3}{5},\ 5,\ -4.$$

3.- Multiplica:

$(-5)\cdot 3 =$	$(-5)\,(3x^2 - 4x + 1) =$
$3 \cdot 2 =$	$(-x)\,(2x - 1) + 3(-8 + x^3) =$
$(-8)\cdot(-4) =$	$8(x^2 - 1) - 5(x + 3) - x^3(3 + 2x) =$

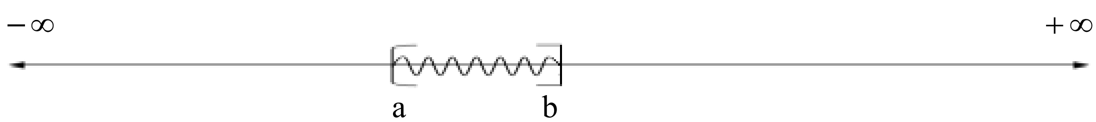
b) Completa el cuadro siguiente:

$\times$	+	-
+		
-		

4. Sitúa en la recta real los siguientes números:

$$-\frac{1}{2},\ 11,\ 0,\ \frac{3}{5},\ -\frac{3}{2},\ \frac{2}{7},\ -3$$

5. Sabiendo que (a , b] se representa en la recta numérica como:



Representa en cada recta:

(a, b)

[a, b)

[a, $+\infty$)

($-\infty$, b)

ANEXO 6: Elementos del anexo electrónico en Power Point

Procedimiento para resolver inecuaciones cuadráticas de forma analítica: **Primer Paso**: Escribir la inecuación cuadrática en la forma estándar es decir: $ax^2 + bx + c < 0$ (ó >0, ≥ 0, ≤ 0). **Segundo Paso**: Factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c$. En caso que no se pueda, calcular el discriminante $D = b^2 - 4ac$, si el discriminante es negativo entonces: ▪ a) Si $a > 0$ implica que $ax^2 + bx + c > 0$ para todo valor real de x. ▪ b) Si $a < 0$ implica que $ax^2 + bx + c < 0$ para todo valor real de x. Observación: Con lo anterior, la solución de una desigualdad cuadrática en donde el discriminante de $ax^2 + bx + c$ sea negativo es: R ó {}
Tercer Paso: Considere los casos necesarios para que se cumpla la inecuación. Por ejemplo: Si la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable, entonces: $ax^2 + bx + c = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)$ de manera que si $ax^2 + bx + c > 0$ $(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) > 0$ ▪ Caso I $a_1 x + b_1 > 0$ y $a_2 x + b_2 > 0$ ó ▪ Caso II $a_1 x + b_1 < 0$ y $a_2 x + b_2 < 0$ por otro lado si $ax^2 + bx + c < 0$ $(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) < 0$ ▪ Caso I $a_1 x + b_1 > 0$ y $a_2 x + b_2 < 0$ ó ▪ Caso II $a_1 x + b_1 < 0$ y $a_2 x + b_2 > 0$

Observaciones:

- 1) Lo anterior también es válido si reemplazamos ‘<’ y ‘>’ por ‘’ y ‘’ .
- 2) Con esto reducimos el problema a resolver inecuaciones lineales; y el conjunto solución de la inecuación cuadrática será obtenido como intersección y unión de los conjuntos solución de las inecuaciones lineales. Decimos intersección, cada vez que al “traducir” los casos (I) y (II) se involucre un “y”; decimos unión, cada vez que involucremos un “ó”.

Cuarto Paso: Encuentre el conjunto solución de cada uno de los casos.

Quinto Paso: Dar la solución en forma de intervalos y graficarla.

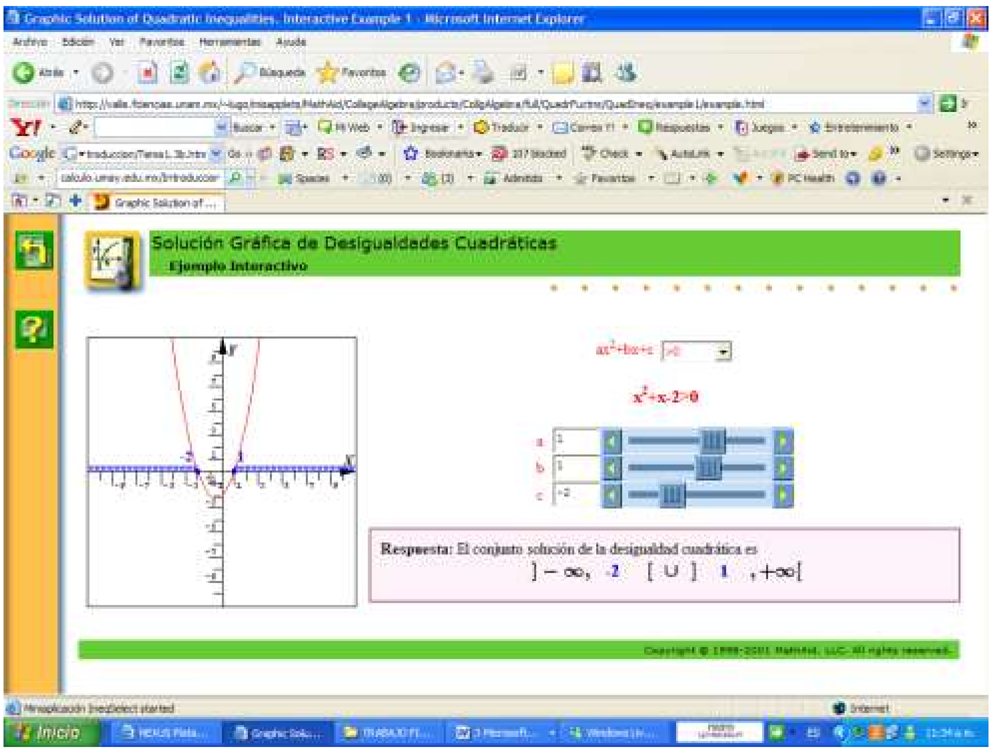
EJEMPLO DE SOLUCIÓN ANALÍTICA QUE RESPALDA A LA SOLUCIÓN GRÁFICA

$x^2 -3x -8 \leq -2x -2$	Desigualdad inicial.
$(x^2 -3x -8)+2x \leq (-2x-2)+2x$	Sumándole 2x a ambos miembros de la inecuación.
$x^2 -x -8 \leq -2$	Efectuando la operación indicada.
$(x^2 -x -8) +2 \leq -2 +2$	Sumándole 2 a ambos miembros de la inecuación.
$x^2 -x -6 \leq 0$	Efectuando las operaciones indicadas.
$(x-3)\ (x+2) \leq 0$	Factorizando el miembro izquierdo.
$x-3 \geq 0$ y $x+2 \leq 0$ ó $x-3 \leq 0$ y $x+2 \geq 0$	Para que un producto de dos factores sea negativo uno de los factores debe ser negativo y el otro positivo. Para que sea nulo, por lo menos uno de los factores debe ser nulo
La solución es el intervalo cerrado: $[x_1, x_2]=[-2, 3]$	

Anexo 7: Práctica utilizando una página electrónica

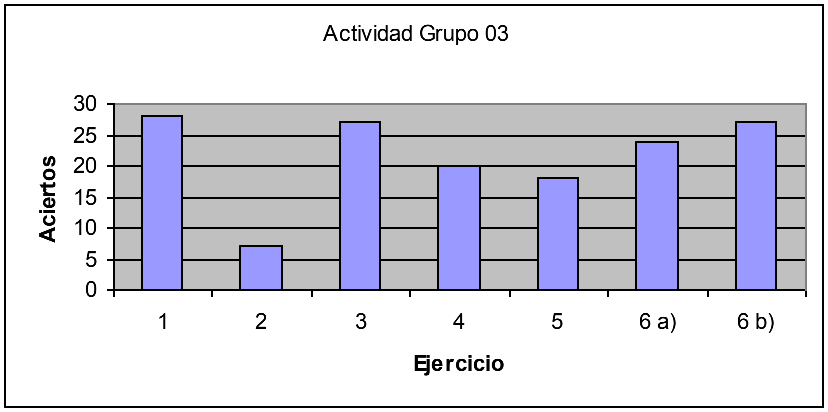
La página es:

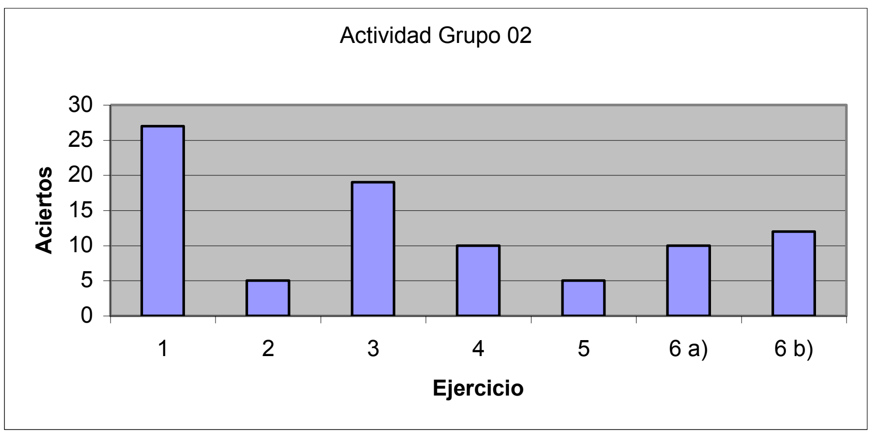
http://valle.fciencias.unam.mx/~lugo/misapplets/MathAid/CollegeAlgebra/products/CollgAlgebra/full/QuadrFuctns/QuadIneq/example1/example.html



ANEXO 8: Análisis de los Resultados obtenidos en las actividades postintruccionales.

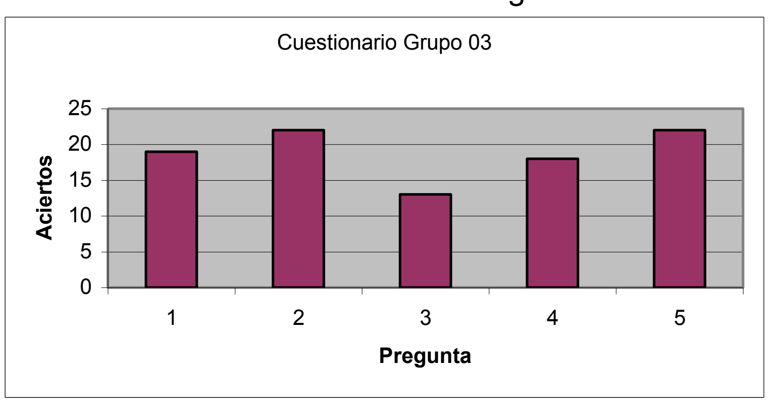
En la Actividad A. se obtuvieron los siguientes resultados:

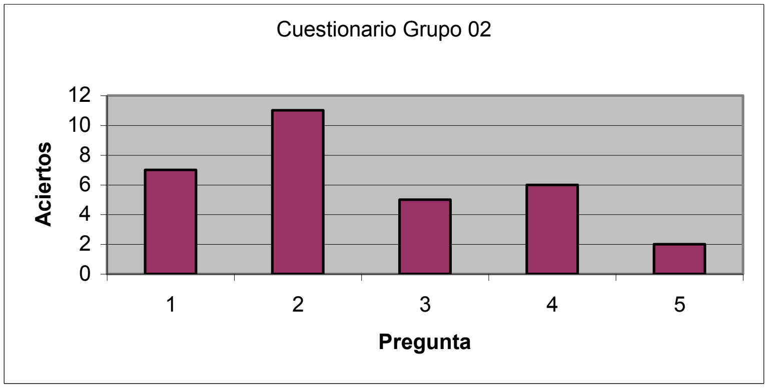




En la Actividad B. los siguientes:

Para las Preguntas de 1 a la 5 se obtuvieron los siguientes resultados:



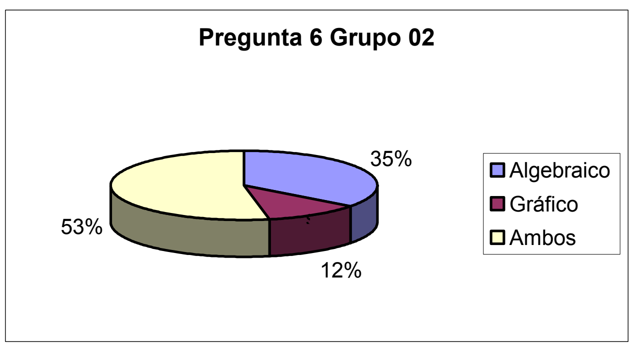


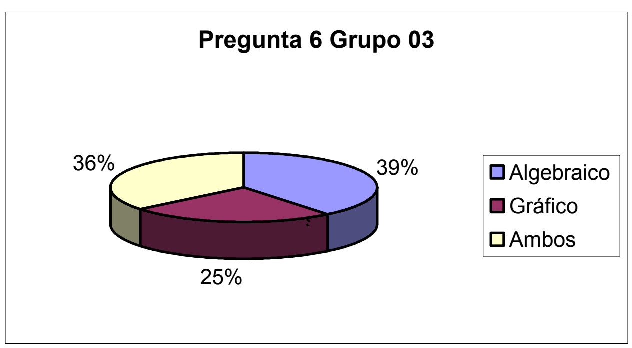
Para la Pregunta 6: ¿Cuál método te parece más práctico a la hora de resolver una desigualdad?

a. Método Algebraico
b. Método Grafico
c. Ambos

Justifica tu respuesta

Se obtuvo lo siguiente:



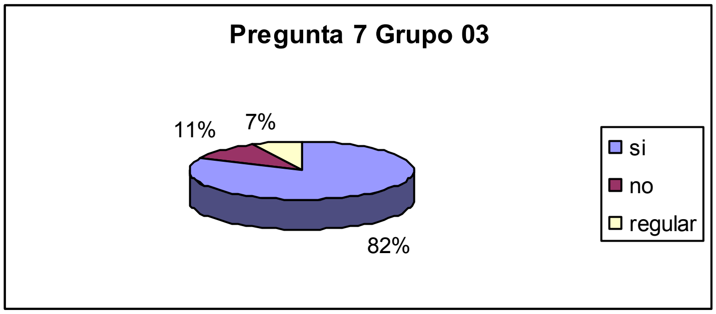


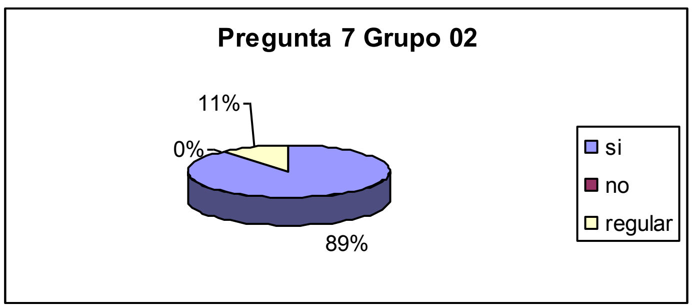
En las justificaciones se obtuvieron como respuestas significativas: El algebraico es más exacto, el gráfico ayuda a visualizar mejor la respuesta

Para la Pregunta 7: ¿El método gráfico te ayudó a comprender o entender el significado de resolver una desigualdad?

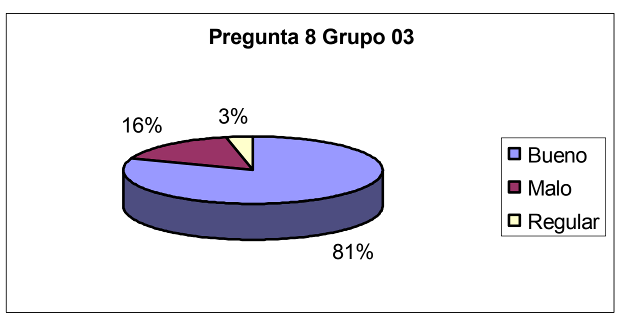
Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

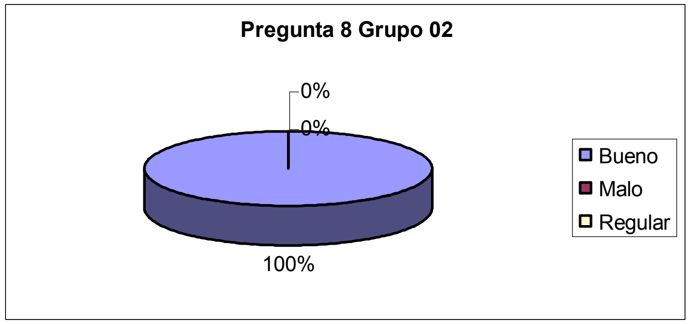
Se recabó lo siguiente:



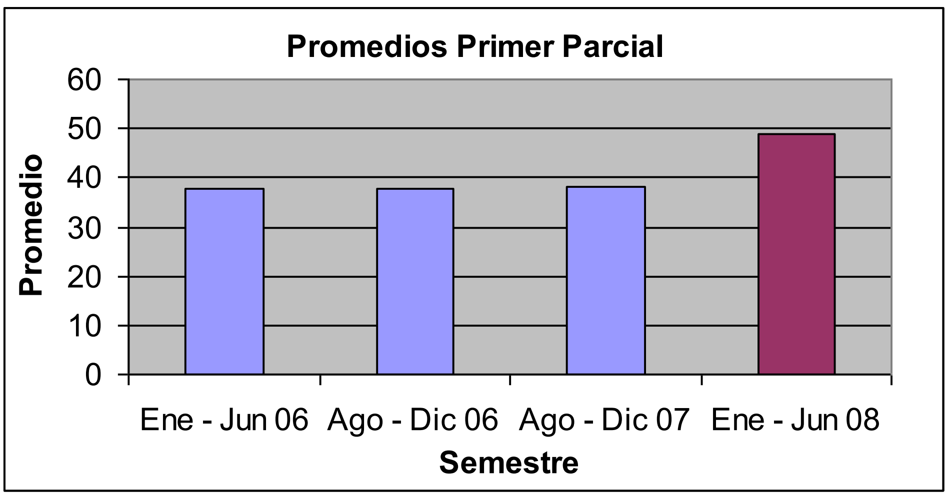


Para a pregunta 8: ¿Que opinas acerca del uso de la computadora en el salón de clase? La mayoría respondió que es bueno ya que la clase se hace mas atractiva y pueden entender mejor los resultados obtenidos algebraicamente.





Además se tuvo un incremento en los promedios del primer parcial que se ve reflejado en la siguiente gráfica:



Donde la barra guinda indica el semestre en el cual se llevó a cabo la propuesta tomando el Grupo 02, el cual obtuvo comparado con el Grupo 03 mas bajo promedio ya que el Grupo 03 tuvo un promedio de 55.