

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA
PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO**

POR:

ING. ARISTÓTELES ALBERTO OLIVARES HERNÁNDEZ

TESIS

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA DE SISTEMAS**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L.

NOVIEMBRE DE 2006

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA
PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO**

POR:

ING. ARISTÓTELES ALBERTO OLIVARES HERNÁNDEZ

TESIS

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA DE SISTEMAS**

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L.

NOVIEMBRE DE 2006

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “**MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO**”, realizada por el alumno **Aristóteles Alberto Olivares Hernández**, con número de **1015196**, sea aceptado para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Arturo Berrones Santos
Asesor

Dr. Mauricio Cabrera Ríos
Revisor

Dr. Francisco Angel Bello
Revisor

Vo.Bo.
Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez
División de Estudios de Posgrado

Ciudad Universitaria, Noviembre de 2006

DEDICATORIA

Quiero dedicar de todo corazón este logro en mi vida profesional

A mi Hijo:

Reynaldo Alberto Olivares Arenas

*Quien me motiva a salir adelante, realizar mis sueños y
quien es mi más preciado tesoro.*

A mi Esposa:

Clara Mayela Arenas García

*Que siempre ha estado conmigo dándome ánimos, comprensión,
paciencia y amor. Este logro también es suyo.*

A mis Padres:

Jorge Olivares García y Leticia Margarita Hernández de la Garza

*Quienes me han apoyado siempre incondicionalmente y
me han dado cuanto han podido.*

A mi Hermano:

Jorge Bernabé Olivares Hernández

Quien siempre me ha apoyado y me ha brindado su ayuda.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a la Universidad Autónoma de Nuevo León (U.A.N.L.) la oportunidad que me brindó para realizar mis estudios.

A mi segunda casa la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (F.I.M.E.) por todo el apoyo brindado durante mis estudios de maestría y licenciatura.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyarme económicamente mediante una beca de estudios de tiempo completo y permitir desarrollarme como Asistente de Investigación.

Quedo muy agradecido al Postgrado en Ingeniería de Sistemas (PISIS) por darme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Arturo Berrones Santos, asesor de mi tesis por haberme guiado durante todo este tiempo y por brindarme su apoyo y su amistad.

Agradezco al Dr. Mauricio Cabrera Ríos y al Dr. Francisco Ángel Bello, por sus valiosos comentarios y sugerencias que enriquecieron el contenido de esta tesis.

Agradezco a la Dra. Ada M. Álvarez Socarrás y al Dr. Roger Z. Ríos Mercado por abrirme las puertas al PISIS y aceptarme como estudiante de tiempo completo para contribuir en el área de investigación de operaciones.

Al personal de la empresa de telecomunicaciones AVANTEL, especialmente a Adolfo Garza y Guillermo Moreno, por abrirle las puertas a este proyecto.

Deseo agradecer a todos los profesores y compañeros del PISIS por compartir conmigo sus conocimientos y que de una u otra forma me ayudaron durante el estudio de la maestría, especialmente al Dr. Oscar Chacón Mondragón por brindarme su amistad y apoyo incondicional.

A mis padres, por darme la vida y con ella amor, educación, confianza, valores morales y sus valiosos consejos que me han ayudado a ser mejor persona. Los quiero muchísimo y Dios me los cuide muchos años.

Agradezco eternamente a mi esposa, por darme todo su amor, por llenarme la vida de alegría y hacer que valore cada día de mi vida, por brindarme siempre su apoyo, confianza, tiempo y compañía. Mayela, TE AMO, ayer, hoy y siempre.

Sobre todo, estoy eternamente agradecido a Dios por acompañarme en todo momento, prestarme vida y salud, por ayudarme a no darme por vencido en momentos difíciles y porque gracias Dios estoy aquí.

RESUMEN

Aristóteles Alberto Olivares Hernández

Candidato para el Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Título del Estudio:

MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO

Número de páginas: 76

Objetivos y Método de Estudio

En las empresas es común la necesidad de describir de la mejor manera comportamientos de variables de interés dentro de los procesos que se llevan a cabo día a día. Desafortunadamente el comportamiento de estas variables involucra un alto grado de complejidad debido a diversos factores que pueden ser conocidos o desconocidos. La

descripción más adecuada de estas variables permitirá una planeación eficiente de la utilización de los recursos disponibles para lograr objetivos específicos.

Los modelos de caminata aleatoria presentan algunas ventajas con respecto a otras metodologías de pronóstico, cuando el horizonte para el pronóstico comienza a crecer en la escala del tiempo, esto debido a su simplicidad.

El desarrollo del presente trabajo se enfoca a un problema de pronóstico de series de tiempo a mediano-largo plazo. La metodología propuesta está dirigida al pronóstico de las propiedades estadísticas de la serie de tiempo de interés. Se consideran tres modelos de caminata aleatoria: caminata aleatoria simple o *RW* (Random Walk) por sus siglas en inglés, caminata aleatoria persistente o *PRW* (Persistent Random Walk) y caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados o *RWDSP* (Random Walk with Delay State Persistence).

Para tratar el problema de pronóstico de series de tiempo a mediano-largo plazo, se propone la aplicación de una generalización del modelo de caminata aleatoria persistente, el modelo de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados (A. Berrones y H. Larralde, 2001), esta generalización supone que la distribución de probabilidad para la dirección del paso “ n ” depende del estado del paso “ $n-T$ ”, para un valor de T arbitrario.

La aplicación del modelo de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados involucra el ajuste de los parámetros del modelo, por lo anterior y dada la importancia que tiene el problema de pronóstico de series de tiempo en la actividad industrial, los objetivos de esta tesis son:

- Hacer un estudio de las propiedades generales que presentan las series de tiempo.
- Desarrollar e implementar una metodología para el ajuste de los parámetros del modelo.
- Efectuar un estudio computacional para evaluar el desempeño del modelo en el pronóstico de las propiedades estadísticas de series de tiempo.

Con lo anterior se propone una metodología basada en aplicación de modelos de caminata aleatoria para la predicción del primer y segundo momento del proceso mediante el ajuste de los parámetros del modelo.

Contribuciones y conclusiones

Como resultado de este trabajo de investigación se entrega una metodología de solución estructurada en Visual Basic mediante la programación de macros en Excel. Como resultado de esta metodología se entrega un pronóstico de la media y la varianza de la serie de tiempo analizada, basado en las propiedades de memoria de la serie de tiempo.

El análisis del problema de pronóstico de series de tiempo mediante el enfoque de modelos de caminata aleatoria permitió conocer algunos fenómenos relacionados con la periodicidad de algunas series de tiempo, así como determinar el o los valores de T (longitud del ciclo de persistencia) para proporcionar información útil de la serie con el objetivo de mejorar el desempeño del pronóstico. La implementación de la metodología permite un fácil acceso a este análisis de series de tiempo para su aplicación directa en la industria en áreas como planeación, producción, control de inventarios, etc.

FIRMA DEL ASESOR: _____
Dr. Arturo Berrones Santos

ÍNDICE

DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTOS	v
RESUMEN	vii
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Organización de la Tesis.....	1
1.2 Descripción y Relevancia del Problema	3
1.3 Antecedentes	5
1.4 Objetivo.....	6
1.5 Justificación	7
1.6 Hipótesis.....	7
CAPÍTULO 2. MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA	8
2.1 Caminata Aleatoria Simple	8
2.2 Caminata Aleatoria con Persistencia Retardada entre Estados (<i>RWDSP</i>) ...	10

CAPÍTULO 3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE MODELOS DE LA	
CAMINATA ALEATORIA	14
3.1 Modelo de Caminata Aleatoria Simple.....	14
3.1.1 Estimación de la Tendencia de la Serie de Tiempo.....	15
3.1.2 Estimación de la Varianza	16
3.1.3 Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia.....	17
3.2 Modelo de Caminata Aleatoria con Persistencia Retardada entre	
Estados (<i>RWDSP</i>)	18
CAPÍTULO 4. PRUEBAS PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL	
MODELO DE <i>RWDSP</i> BAJO DIFERENTES CONDICIONES DE	
INCERTIDUMBRE.....	23
4.1 Descripción del Algoritmo de Estimación de Parámetros	23
4.2 Planeación del Experimento.....	24
4.3 Ejecución del Experimento	25
4.4 Análisis del Experimento.....	26
CAPÍTULO 5. CASOS DE ESTUDIO	38
5.1 Pronóstico a Mediano Plazo de Tendencia en Valores Accionarios.....	40
5.2 Análisis de Demanda en Sistemas de Telecomunicaciones.....	45

CAPÍTULO 6. HERRAMIENTA DE APOYO PARA ANÁLISIS DE SERIES	
DE TIEMPO	50
6.1 Introducción	50
6.2 Programación de Macros en Excel.....	51
6.3 Ventajas y Desventajas de Excel	53
6.4 Descripción de la Herramienta Desarrollada	54
CAPÍTULO 7. PERSPECTIVAS: PRONÓSTICO A CORTO PLAZO Y	
ESTIMACIÓN DE DEPENDENCIA ESTADÍSTICA	57
7.1 Introducción	57
7.2 Pronóstico a Corto Plazo con Modelos Discretos de Máxima	
Verosimilitud	58
7.3 Estimadores de Dependencia Estadística en Series de Tiempo	61
CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y APORTACIONES	62
8.1 Conclusiones	62
8.2 Aportaciones.....	63
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	65
ÍNDICE DE FIGURAS.....	68
ÍNDICE DE TABLAS	69
APÉNDICE A.....	70

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Organización de la Tesis

En el capítulo uno, describimos el problema y sus antecedentes, así como los detalles de los objetivos de esta tesis.

En el capítulo dos, planteamos nuestra propuesta de utilizar modelos de caminata aleatoria para tratar con el problema que se aborda en esta tesis, comenzamos con la descripción general de cada uno de los modelos que tomamos en consideración. Además de esto damos un breve bosquejo de algunas de las aplicaciones recientes de modelos de caminata aleatoria con retardo y finalizamos con la descripción detallada de los aspectos

particulares del modelo de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados (Random Walk with Delay State Persistence, *RWDSP*).

En el capítulo tres, hacemos una descripción del enfoque que utilizamos para la aplicación del modelo de *RWDSP* para la predicción de propiedades estadísticas de series de tiempo, dentro de lo cual definimos de forma particular el término “estacionalidad”. Además proponemos la aplicación de un método de máxima verosimilitud para la estimación de parámetros del modelo de *RWDSP* y la solución del problema de optimización que involucra este método.

En el capítulo cuatro, desarrollamos un diseño de experimentos para analizar el comportamiento de la metodología ante diferentes características de persistencia que pudieran presentar los procesos que se desarrollan bajo este modelo.

En el capítulo cinco, analizamos dos ejemplos de series de tiempo reales, presentamos el resultado de métodos tradicionales de caracterización de propiedades estadísticas y los resultados de la metodología que proponemos para cada ejemplo.

En el capítulo seis, describimos los aspectos generales de la instauración computacional de la metodología mediante la programación de macros en Visual Basic, así como las ventajas y desventajas de utilizar Excel para este trabajo.

En el capítulo siete, bosquejamos una posible extensión de la aplicación de la metodología de máxima verosimilitud para el pronóstico en un horizonte de tiempo a corto plazo, así como una nueva medida del grado de dependencia.

En el capítulo ocho, damos nuestras conclusiones del presente trabajo de tesis, así como las aportaciones que logramos con el mismo, además complementamos con las posibles líneas de investigación que se desprenden como resultado del estudio que realizamos.

1.2 Descripción y Relevancia del Problema

Dentro de las actividades diarias se presentan un gran número de situaciones que nos obligan a tomar decisiones, las cuales pueden ser tan sencillas como llevar consigo un paraguas, abrigarse antes de salir de casa, o tan complejas como decidir si se incluye un componente nuevo en el diseño de un automóvil, o comprar maquinaria que ampliaría la capacidad de producción de algún producto específico. Un factor que influye de manera importante en el proceso de toma de decisiones es el pronóstico, entenderemos por pronóstico la estimación de un valor futuro de una variable de interés.

En los ejemplos antes mencionados, podemos tener diferentes fuentes de información, de las cuales proviene el pronóstico que nos apoyará en tomar alguna de las alternativas posibles. Para obtener pronósticos se pueden emplear técnicas cualitativas o cuantitativas, en las técnicas cualitativas, un pronóstico es casi siempre el resultado de una expresión de los juicios u opiniones personales de uno o más expertos, a este procedimiento se le conoce como técnica subjetiva (F. Hillier y G. Liberman, 1997). En el caso en que tenemos que decidir llevar o no un paraguas, nosotros podemos tener dos fuentes de información: la experiencia de alguna persona que sabemos tiene buen conocimiento del clima de la localidad o el pronóstico del clima proporcionado por el noticiero local.

Estas dos fuentes de información observan comportamientos particulares del mismo sistema, las diferencias entre las fuentes de información, son la metodología que fundamenta la emisión de un juicio y la forma de observar los factores de interés.

Cuando el juicio es emitido basado en la experiencia, el experto toma en cuenta sucesos previamente observados, “aprendidos”, que vuelven a presentarse en el comportamiento actual del sistema, en este tipo de situaciones, el experto lo que podría estar haciendo es detectar una persistencia de estos acontecimientos que caracterizan el estado actual del sistema. Es importante notar que el experto solo se basa en la observación del sistema sin tomar en cuenta aspectos cuantitativos tales como mediciones de presión atmosférica, humedad relativa, velocidad del viento, etc., esto propicia que su pronóstico no proporcione una magnitud del comportamiento del sistema, por ejemplo, pudiera no ser suficiente un paraguas y en realidad lo que deberíamos hacer es quedarnos en casa.

Por otra parte, el juicio emitido por el noticiero local puede estar basado en técnicas más precisas de estimación, ver por ejemplo (R. Woodman, 1999). Ya que los pronósticos emitidos son más acertados y proporcionan una mayor cantidad de información acerca del comportamiento del sistema, estas técnicas de pronóstico si toman en cuenta factores determinados cuantitativamente y son capaces de predecir enormes cambios de una manera razonablemente anticipada, en un horizonte de tiempo finito.

Así como el pronóstico del clima nos ayuda a tomar decisiones simples, estas técnicas son directamente aplicables a campos como: la actividad industrial (M. Padilla, 2003); la economía (T. Ohira, et al. 2002); la salud y la biología, por mencionar algunos.

Dentro de los diversos procesos que se desarrollan en nuestro entorno, existen algunos procesos que por su comportamiento nos dan la impresión de presentar alguna característica repetitiva. Por ejemplo, las ventas de algunos productos de consumo se rigen por temporadas, en las que tales productos se venden o dejan de vender con una magnitud mayor que fuera de ellas. Al igual que las ventas de estos productos, los energéticos presentan una característica similar, el consumo o los precios de algunos energéticos también se ven afectados por la temporada del año. Así podemos enlistar una gran cantidad de ejemplos de procesos que presentan esta característica. A este tipo de comportamiento se le llama estacionalidad.

El pronóstico es una pieza fundamental en el desarrollo de las actividades industriales, de los ejemplos mencionados anteriormente podemos imaginar a una empresa productora de lubricantes automotrices que está interesada en aumentar sus utilidades netas; con este objetivo en mente algo que los directivos no pueden dejar de lado es la oferta y la demanda de las materias primas necesarias para la fabricación de sus productos, además de la demanda que tiene cada uno de ellos. Conociendo esta información es posible tomar decisiones como el tipo y cantidad de cada producto que van a producir, la cantidad de inventario que mantendrán en sus almacenes, las campañas de publicidad que lanzarán en ese periodo de ventas y los convenios con otras empresas del mismo ramo para producir o que les produzcan en caso de ser necesario.

Seguramente los objetivos de esta empresa serían alcanzados si se conociera de antemano la información antes mencionada de manera precisa. Desafortunadamente los factores de interés que describimos arriba no son constantes y mucho menos conocidos, por el contrario presentan comportamientos bastante complejos que lejos de hacer fácil la planeación, la dificultan al extremo que en lugar de mejorar las utilidades de la empresa podrían llegar a representar pérdidas.

Algunas realidades con las que se podrían enfrentar los directivos de esta compañía son que el precio real de las materias primas necesarias para fabricar sus productos fuera, por mucho, mayor que el que ellos esperaban y se vieran obligados a aumentar los precios para mantener un balance saludable; o bien, que la demanda real fuera mucho menor a la estimada, lo cual produciría un crecimiento en los niveles de inventario de producto terminado, impactando directamente los costos operacionales de la empresa. Puede también ocurrir que la demanda sea mucho mayor a la estimada, provocando escasez de producto. Esto se traduciría en clientes insatisfechos, frenado del crecimiento, entre otras cosas.

Por lo anterior observamos la necesidad de contar con una técnica adecuada que proporcione una buena estimación del comportamiento de las variables de interés y que sea un apoyo ante la incertidumbre que rodea a estas variables, con el objetivo de cumplir al máximo con las expectativas de la empresa con el fin de evitar lo más posible los problemas mencionados anteriormente.

1.3 Antecedentes

Dentro del análisis de series de tiempo existe una gran cantidad de trabajos de investigación que tratan con procesos que presentan este comportamiento, dentro de estos trabajos el objetivo principal es detectar la componente “estacional” mediante alguna metodología y una vez detectada, separar la serie de tiempo en esta y otras componentes, como lo son la tendencia y la aleatoriedad.

Una vez hecho esto, se procede a adecuar un modelo que sea capaz de describir estos comportamientos y proporcione un pronóstico. El éxito de este modelo se mide de acuerdo con su capacidad de pronosticar nuevas observaciones con una diferencia mínima entre el nuevo valor observado y el pronóstico proporcionado por el modelo además de poder proporcionar intervalos de confianza para el pronóstico.

En el presente trabajo de tesis proponemos un enfoque diferente motivado por dos razones, la primera razón es que dados los avances recientes dentro de los modelos de caminata aleatoria y mediante una definición adecuada de estacionalidad, se hace posible la aplicación directa de estos modelos sin necesidad de descomponer la serie de tiempo, pues existe la duda de que tal descomposición altere la serie de tiempo. Además, debido a que los modelos de caminata aleatoria buscan determinar la estacionalidad de las dependencias entre pasos - acción que a la larga produce este efecto global - sus estimaciones son menos sensibles a efectos del periodo de tiempo que se observó.

La segunda razón es que en ambientes donde la magnitud del ruido presente en el sistema es mucho mayor que el o los efectos de estacionalidad, estos efectos podrían ser disfrazados y no detectarse la presencia de esta componente.

1.4 Objetivo

El objetivo de esta tesis es expandir el área de aplicación del modelo de *RWDS*P al campo de pronóstico de series de tiempo, con la finalidad de ofrecer una nueva alternativa para el análisis de los procesos estocásticos que generan estas series. Con este objetivo surge la necesidad de estimar de alguna manera los parámetros del modelo, por lo cual es necesario el desarrollo de una metodología para la estimación de estos parámetros.

1.5 Justificación

El problema de pronóstico es muy común en diversos sectores productivos. Este problema ha sido estudiado mediante enfoques de pronóstico puntual, lo cual limita enormemente la longitud del horizonte de pronóstico, y con un error de predicción que crece con el horizonte de pronóstico. Para muchos métodos usuales, el crecimiento en el error es exponencial para horizontes de pronóstico lo suficientemente grandes.

Es de interés práctico la aplicación y análisis del desempeño de nuevas técnicas de pronóstico que pudieran presentar alternativas a las técnicas que actualmente están en uso. Particularmente en esta tesis se estudian los modelos de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados, dada su poca aplicación, en el área de pronósticos de series de tiempo.

1.6 Hipótesis

Los procesos de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados comparten propiedades estadísticas importantes con series de tiempo reales de interés por sus aplicaciones.

En resumen el trabajo realizado en esta tesis comprende el estudio del modelo de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados aplicado al pronóstico de series de tiempo, la problemática que surge con la estimación de los parámetros del modelo de *RWDSP*, el desarrollo del modelo de optimización para la estimación de estos parámetros, la instauración computacional de la metodología de estimación, el análisis del desempeño del modelo de estimación de parámetros bajo diferentes condiciones de incertidumbre, el estudio de dos casos de series de tiempo reales que comparten propiedades estadísticas con los modelos de caminata aleatoria, así como el desarrollo de una herramienta de apoyo para realizar este análisis.

CAPÍTULO 2

MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA

2.1 Caminata Aleatoria Simple

Consideremos a una persona que se le permite dar pasos en cualquiera de dos direcciones hacia delante o hacia atrás dependiendo del resultado de un evento aleatorio $Z = \{-1, +1\}$. En intervalos de tiempo fijos, esta persona tiene una probabilidad constante p para moverse hacia delante ($Z = +1$) y una probabilidad $q = 1 - p$ para moverse hacia atrás ($Z = -1$). Durante cualquier intervalo de tiempo el movimiento esperado ($E[Z]$) y la varianza ($Var[Z]$) son:

Primer Momento:

$$E[Z] = (+1)p + (-1)q = p - q \quad (2.1)$$

Segundo Momento:

$$E[Z^2] = (+1)^2 p + (-1)^2 q = 1 \quad (2.2)$$

Varianza:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= \text{Var}[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2 \\ &= 1 - (p - q)^2 = (p + q)^2 - (p - q)^2 \\ &= 4pq \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nos interesa saber donde es más probable que esté la persona, con respecto a su posición inicial, después de que ha dado n pasos. Denotamos este movimiento como X_n . El resultado del evento aleatorio Z tienen la propiedad de Markov. Esta simplemente dice que el siguiente paso es independiente de cualquiera de los resultados anteriores. Así que esto nos permite escalar linealmente todos los momentos del movimiento por un factor n . Un importante resultado de esto, es que los n pasos dados, son proporcionales al tiempo de duración, por tanto la varianza de una caminata aleatoria incrementa linealmente con el tiempo.

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{i=1}^n Z_i \\ E(X_n) &= E\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) = \sum_{i=1}^n E(Z_i) \\ E(X_n) &= n(p - q) \\ \text{Var}(X_n) &= 4npq \\ \sigma(X_n) &= 2\sqrt{pq} \sqrt{n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nótese que la media de la caminata aleatoria simple, sigue una tendencia lineal en el tiempo, mientras que la desviación estándar, resulta proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

2.2 Caminata Aleatoria con Persistencia Retardada entre Estados (*RWDSP*)

Una característica común que muestran muchas series de tiempo económicas es la presencia de estacionalidad. Estrictamente hablando, esto quiere decir que podemos identificar uno o más intervalos de tiempo característicos para los cuales la serie de tiempo muestra aproximadamente un comportamiento similar de manera repetitiva. La presencia de estacionalidad puede ser atribuida a un gran número de causas. Por ejemplo, el ritmo natural de la tierra induce comportamiento estacional ligeramente de forma directa en muchos productos y bienes.

La estacionalidad puede ser también una consecuencia de la estructura intrínseca que rige al proceso, tal que podemos encontrar soluciones periódicas o cuasi-periódicas para mapeos lineales y no lineales, respectivamente. Debido a la fuerte componente estocástica de muchas series de tiempo, la estacionalidad podría no ser evidente, aún en casos en los cuales se esperaría la presencia de estacionalidad. Con el objetivo de proporcionar una definición de estacionalidad en ambientes fuertemente estocásticos (i. e. definiciones más allá de las dadas en términos de armónicos), muchos autores han introducido el concepto de persistencia retardada (A. Berrones y H. Larralde, 2001; T. Ohira, et al. 2002). Aquí introducimos este concepto a través del modelo de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados.

El enunciado general de la *RWDSP*, se describe a continuación. Definimos el estado $S(n)$ de un caminante en el n -ésimo paso como una función de etiquetas que puede tomar los valores de +1 y -1.

Denotamos a $\phi(l)_+$ y $\phi(l)_-$ como las distribuciones de pasos correspondientes a cada estado del caminante. Entonces, dados un conjunto de T pasos iniciales (con sus

correspondientes etiquetas de estados), permitimos que el estado del caminante se desarrolle de acuerdo a las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{aligned} P(S(n) | S(n-T)) &= \frac{1}{2}(1 + S(n)\varepsilon), & S(n-T) &= +1 \\ P(S(n) | S(n-T)) &= \frac{1}{2}(1 - S(n)\varepsilon'), & S(n-T) &= -1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

las cuales son la forma más general para este problema. Estas ecuaciones están determinadas por los “parámetros de persistencia”, ε y ε' , y la longitud del ciclo de persistencia o “parámetro de retardo”, T .

Una vez que el estado del caminante en el n -ésimo paso de tiempo está determinado, el $(n+1)$ -ésimo paso es seleccionado de la correspondiente distribución de paso. Claramente, si $\varepsilon=\varepsilon'=0$ todos los efectos de memoria se pierden y el proceso se reduce a una caminata aleatoria Markoviana con distribución de paso dada por $\Phi(l) = 1/2(\phi_+(l) + \phi_-(l))$.

Debido a que T puede tomar un valor arbitrario, las probabilidades de transición dan lugar a efectos de memoria arbitrariamente largos. Lo cual provoca que la función característica de la *RWDSP* pueda ser escrita en forma cerrada (A. Berrones y H. Larralde, 2001), por lo tanto la *RWDSP* puede ser utilizada como un caso simple en el cual pueden estudiarse con detalle efectos no Markovianos.

Para nuestros propósitos, el siguiente resultado podría ser suficiente: consideremos la realización particular en la cual las distribuciones de pasos están dadas por $\phi^\pm = \delta(x \mp \sigma)$, donde σ es la desviación estándar de la distribución de probabilidad que generó los pasos y se estima de la primer diferencia de la serie de tiempo. El aspecto de interés es la distribución de probabilidad para la posición del caminante después de n pasos, $x(n)$. Denotamos a N como la parte entera de n/T , mientras que n lo podemos escribir como $n=NT+q$, donde q es un entero adecuado. Comenzando desde las condiciones iniciales en las cuales los T primeros pasos son valores *i.i.d.* (independientes e idénticamente distribuidos) extraídos de una distribución aleatoria simétrica, en este caso la media y la varianza de $x(n)$ están dadas por las siguientes dos ecuaciones

$$\langle x \rangle = -\frac{\beta}{(1-\alpha)^2} [T(1-\alpha^N) + q\alpha^N(1-\alpha)] + (NT+q)\frac{\beta}{1-\alpha} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 &= \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^4} \left\{ T(1-\alpha^N)^2 + q[(1-\alpha^N)^2 - (1-\alpha^{N+1})^2] \right\} \\ &\quad - \frac{2}{(1-\alpha^2)} \left[\alpha - \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^2} \right] [T(1-\alpha^N) + q[(1-\alpha^{N+1}) - (1-\alpha^N)]] \\ &\quad + (NT+q) \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \left(1 - \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon'), \quad \beta = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') \quad (2.8)$$

y renombrando las ecuaciones de las probabilidades de transición con el objetivo de simplificarlas tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} a &= p(S(n)|S(n-T)) = \frac{1}{2}(1+S(n)\varepsilon), & S(n) &= +1 \\ b &= p(S(n)|S(n-T)) = \frac{1}{2}(1-S(n)\varepsilon'), & S(n-T) &= -1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Las ecuaciones anteriores representan la probabilidad de pasar a cualquiera de los estados $+1$, -1 , estando, T pasos atrás en el estado $+1$ para el caso de a y b para el caso en que se encuentra T pasos atrás en -1 . De lo anterior podemos analizar propiedades particulares para distintos valores de los parámetros del modelo. Por ejemplo, cuando $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon' = 1$, sin ser ambos iguales a 1, entonces el estado correspondiente $+1$ o -1 se vuelve un estado absorbente. Es decir, el proceso termina en alguno de los dos estados después de un número finito de pasos. Por otro lado, cuando ambos parámetros son iguales a 1, se tiene un

proceso periódico: la secuencia de pasos se repite de manera exacta con un periodo T . Un ejemplo de este caso se tiene en los generadores de números al azar, donde una secuencia de valores pseudo-aleatorios se repite después de un determinado ciclo. Otro caso importante se tiene cuando $\varepsilon = \varepsilon' = 0$. En este caso el proceso se reduce a una secuencia de valores aleatorios independientes, cuya suma consiste en una caminata aleatoria simple. Para un proceso de esta naturaleza se tiene una predictabilidad nula de los estados.

Cuando ε y ε' se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$, al menos uno de ellos es distinto de cero y $T > 1$, tenemos el caso de una *RWDSP*. Este proceso contrasta con los casos discutidos anteriormente de la siguiente manera: los estados no son perfectamente predecibles pero presentan dependencias cíclicas con periodo T . La fuerza de dichas dependencias entre estados es función de los parámetros de persistencia ε y ε' .

Más adelante explicaremos como podemos aprovechar las propiedades que presentan este tipo de modelos de caminata aleatoria en el pronóstico de series de tiempo. En el siguiente capítulo presentamos una metodología para la estimación de los parámetros del modelo de *RWDSP*.

CAPÍTULO 3

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE MODELOS DE LA CAMINATA ALEATORIA

3.1 Modelo de Caminata Aleatoria Simple

Cuando utilizamos el modelo de caminata aleatoria simple, estamos suponiendo que la serie de tiempo bajo análisis sigue una tendencia lineal y que la serie es producto de sumar variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Teniendo presentes los supuestos mencionados anteriormente, para la aplicación del modelo RW es necesario calcular la línea recta que pronosticará la pendiente de la serie, además sabemos que la desviación estándar del modelo de RW es directamente

proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, como se presentó en la ecuación (2.4). Así que el modelo nos proporciona el intervalo de confianza para la serie, el cual está dado por la desviación estándar por arriba y por abajo de la tendencia pronosticada.

Finalmente tendremos un pronóstico para cada periodo de tiempo t , que consistirá de un valor promedio sobre la línea de tendencia, un límite inferior y un límite superior, que proporcionarán el rango de variabilidad que podemos esperar tenga la serie de tiempo que estamos analizando.

3.1.1 Estimación de la Tendencia de la Serie de Tiempo

Como el modelo de *RW* supone que la serie de tiempo que analizamos sigue una tendencia lineal, utilizaremos una recta que minimice el error cuadrado, o dicho de otra manera una recta de mínimos cuadrados. La ecuación de la recta es $\bar{y}_t = mt + b$, esta ecuación nos proporcionará el pronóstico para el valor medio de la serie para cada instante de tiempo.

Si se dispone de M datos de la forma y_t , se encuentra la recta que minimiza el error cuadrático con respecto a los puntos observados de la serie de tiempo. Calculamos los parámetros de la recta, m y b , de la siguiente forma:

$$m = \frac{n(\sum ty) - (\sum t)(\sum y)}{n(\sum (t^2)) - (\sum t)^2} \quad b = \frac{(\sum y)(\sum (t^2)) - (\sum t)(\sum ty)}{n(\sum (t^2)) - (\sum t)^2} \quad (3.1)$$

Las sumatorias se efectúan sobre los M datos disponibles.

De esta forma obtenemos la primera de tres funciones que describirán el modelo completo, esta función la llamamos \bar{y}_t ; las otras dos funciones son muy similares entre sí y representan los límites inferior y superior del modelo, a estas funciones las llamamos y_t^d y y_t^u respectivamente. Estas últimas dos funciones involucran a la función que describe la tendencia, con la diferencia que lleva un término que describe la variabilidad esperada en

cada paso del tiempo, a este término lo llamamos $\sigma(t)$, que a su vez es una función del tiempo y esta representada por la siguiente ecuación:

$$\sigma(t) = \sqrt{\text{Var}(\varepsilon_t)}\sqrt{t} \quad (3.2)$$

Dada la definición anterior, podemos escribir las ecuaciones restantes del modelo, las cuales quedan de la siguiente forma: $y_t^d = \bar{y}_t - \sigma(t)$ y $y_t^u = \bar{y}_t + \sigma(t)$. Hasta este punto solo falta definir el término $\text{Var}(\varepsilon_t)$, el cual representa la estimación de la varianza de los pasos de la serie de tiempo y se explica a continuación.

3.1.2 Estimación de la Varianza

Para este trabajo utilizamos dos procedimientos para estimar la varianza de los pasos de la serie, mediante un estimador estadístico de la varianza y mediante un análisis de fluctuaciones sin tendencia. El primero, proporciona un valor que representa la estimación de la varianza de la distribución de probabilidad que generó los pasos de la serie. El segundo, representa la varianza promedio observada en el tiempo en que se desarrolló la serie de tiempo. En esta parte solo describiremos el primer procedimiento, ya que este se basa en el supuesto del modelo de *RW*. El otro procedimiento lo describimos en otro apartado.

La razón por la que hacemos énfasis en que la varianza que estamos estimando es la varianza de los pasos de la serie, es que estamos suponiendo que la serie de tiempo es una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*v.a.i.i.d.*), así que, el tratar de estimar la varianza de la serie, nos daría la varianza de la acumulación de estas variables aleatorias, lo cual no es lo que nos interesa. Nuestro interés en la varianza de los pasos está basado en el mismo supuesto de la suma de variables aleatorias (*s.v.a.*), y en la definición más básica del modelo de *RW*, que dice que el siguiente paso será igual al paso actual más un error aleatorio, así que si sabemos la varianza de este error aleatorio,

sabremos el rango en el que podemos esperar que se dé el siguiente paso y así estimar un rango de variabilidad para los pasos en un horizonte de tiempo futuro.

La manera en que estimamos esta varianza es haciendo una transformación de la serie original a la primera diferencia hacia delante de la serie de tiempo. Una vez que tenemos la serie transformada, aplicamos la siguiente formula para obtener el valor que nos interesa:

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{n \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 - (\sum_{t=1}^n \varepsilon_t)^2}{n(n-1)} \quad (3.3)$$

Donde ε_t representa la serie transformada $\varepsilon_t = y_{t+1} - y_t$, $t = 1, \dots, n-1$. En este momento ya podemos obtener el pronóstico para cada periodo de tiempo t , con sus respectivos límites inferior y superior.

3.1.3 Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia

Este procedimiento proporciona un comportamiento de la varianza promedio en el tiempo y consiste en formar grupos anidados de los datos originales, esto quiere decir que vamos a tener $n-1$ grupos de datos a los cuales vamos a llamar C_i , donde el grupo $i = 1$ contiene los primeros dos datos, el grupo $i = 2$ contiene los primeros tres datos, ..., el grupo $i = n-1$ contiene los n datos, además el conjunto de datos que se genera al aproximar el proceso por una recta de mínimos cuadrados también lo agrupamos de esta forma. Teniendo los datos agrupados de esta manera a ambos grupos les aplicamos la siguiente fórmula:

$$\sigma(i+1) = \sqrt{\frac{1}{i+1} \sum_{t=1}^{i+1} (y_t - \bar{y}_i)^2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.4)$$

$$C_i = C_{i-1} \cup \{y_{i+1}\}, \quad \text{donde} \quad |C_i| = i+1$$

La expresión anterior lo que dice es que la variabilidad promedio al tiempo $i+1$ viene dada por la raíz cuadrada del promedio de las diferencias al cuadrado entre el

conjunto de datos originales y el conjunto de datos generados por la recta de mínimos cuadrados desde el tiempo $t = I$ hasta $t = i+I$. La expresión $|C_i|$ indica la cantidad de elementos que contiene el conjunto, por ejemplo, si $i=I$, $|C_I| = 2$.

Para cada conjunto de los datos originales obtendremos un valor de $\sigma(t)$, con este conjunto de valores, construiremos los límites del modelo de caminata aleatoria, representado por la siguiente expresión:

$$\bar{y}_t = mt + b \quad , \quad y_t^u = \bar{y}_t + \sigma(i) \quad , \quad y_t^d = \bar{y}_t - \sigma(i) \quad (3.5)$$

3.2 Modelo de Caminata Aleatoria con Persistencia Retardada entre Estados (RWDSP)

La definición de la caminata aleatoria con retardo se extiende al caso en que las variables que se están sumando dejan de ser independientes y presentan un comportamiento de dependencia muy particular. Este comportamiento de dependencia consiste en que dados T pasos iniciales el estado $S(n)$ dependerá del tipo de paso que fue el estado $S(n-T)$, esto quiere decir que si por ejemplo el estado $S(n-T)$ fue un tipo de paso positivo (+) el estado $S(n)$ será positivo con una probabilidad a o negativo con una probabilidad $1-a$. Por otra parte, si el estado $S(n-T)$ fue un tipo de paso negativo (-) el estado $S(n)$ será positivo con una probabilidad b o negativo con una probabilidad $1-b$. Además de lo anterior es importante señalar que el proceso que analizaremos en este trabajo tiene la característica de ser discreto en sus estados y en el tiempo.

De lo anterior escribimos las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{aligned} P(S(n)|S(n-T)) &= \frac{1}{2}(1 + S(n)\epsilon) \quad \text{si } S(n-T) = (+) \\ P(S(n)|S(n-T)) &= \frac{1}{2}(1 - S(n)\epsilon') \quad \text{si } S(n-T) = (-) \end{aligned} \quad (3.6)$$

De acuerdo al ejemplo anterior

$$a = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon), \quad 1 - a = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \quad (3.7)$$

Una cuestión de interés práctico que surge de esta definición de caminata aleatoria es que podemos estimar la probabilidad de que ocurra una secuencia de n pasos (para $n > T$). Si la caminata aleatoria tiene los parámetros ε , ε' y longitud del ciclo de persistencia T , esta probabilidad esta dada en términos de las probabilidades de transición definidas anteriormente, como sigue:

$$P(S) = P(S(k)|S(k-T)) * P(S(k+1)|S(k+1-T)) * P(S(k+2)|S(k+2-T)) * \dots * P(S(n)|S(n-T)) \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) contiene $n-T$ términos lo cual representará la cantidad de elementos contenidos en el conjunto S ($|S|=n-T$). Sustituyendo la expresión de probabilidad correspondiente a cada tipo de término y factorizando la expresión resultante nos queda la siguiente ecuación:

$$P(S) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r1} (1 + \varepsilon)^{r1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{r2} (1 - \varepsilon)^{r2} * \left(\frac{1}{2}\right)^{r3} (1 + \varepsilon')^{r3} * \left(\frac{1}{2}\right)^{r4} (1 - \varepsilon')^{r4} \quad (3.9)$$

donde $r1+r2+r3+r4=n$. Es decir, $r1$ será el número de veces que se presentó la transición $+1$ a $+1$ en la secuencia observada de estados. Así mismo $r2$ es el número de veces que se presentó la transición de -1 a $+1$. De forma análoga se define $r3$ y $r4$, de tal suerte que la longitud total de la secuencia viene dada por la suma de $r1, r2, r3, r4$.

La ecuación (3.9) corresponde a las cuatro posibles transiciones del proceso.

El cálculo de la probabilidad de ocurrencia de la secuencia S sería simple si conociéramos el valor de los parámetros ε y ε' y longitud de ciclo de persistencia T ,

desafortunadamente para series de tiempo que representan procesos reales no es posible conocer estos parámetros, de ante mano.

Algo que si es posible, es estimar los parámetros de la serie bajo el supuesto de que la serie presenta el comportamiento descrito por el modelo *RWDS*, de tal manera que los parámetros que estimemos hagan máxima la probabilidad de ocurrencia de la secuencia de pasos S , todo esto para distintos valores de T . Un enfoque similar fue utilizado por T. Ohira, et al. (2002), aplicado para codificación de señales. En el estudio de T. Ohira, et al. (2002), se tienen dos probabilidades de transición y un término de retardo (p , q y σ), y presenta algunos ejemplos donde menciona que fija el valor de $q=1-q=0.5$ y fija también $\sigma = 10$, variando el valor de p . En su trabajo, T. Ohira, et al. (2002) grafica histogramas de tiempo de residencia en el estado -1 , para los cuales observa el fenómeno de resonancia como un pico más alto en el periodo igual al retardo. Menciona que si logra ajustar el ruido (p) apropiadamente, es posible observar la altura del pico del histograma del tiempo de residencia, alcanzar el valor máximo.

Nuestra propuesta de maximizar la probabilidad de ocurrencia de la secuencia de pasos S , plantea un problema de optimización, que por las características de la función objetivo y las variables, podemos clasificarlo como un problema de optimización no lineal sin restricciones. Sin embargo, como las variables de decisión, ε y ε' , son continuas en el intervalo $(-1,1)$ y están elevadas a una potencia ri , el problema se vuelve numéricamente inestable. Esto es así porque la longitud de secuencia n es arbitraria. De este modo las potencias ri pueden ser arbitrariamente grandes. Dado que ε y ε' tienen un valor absoluto menor que 1, resulta que la función objetivo tiende exponencialmente a cero conforme crece la longitud de secuencia observada. Esto conlleva a que se pueda tener un problema de optimización fuera de las capacidades de precisión de la computadora. Se han realizado pruebas numéricas tratando de resolver el problema de optimización dado por la ecuación (3.9), observando el tipo de dificultades mencionadas incluso para secuencias cortas.

Por lo anterior propusimos aprovechar las propiedades del logaritmo y hacer una transformación de este tipo con el objetivo de hacer lineal la función y los exponentes convertirlos en coeficientes, obteniendo la siguiente expresión:

$$P(S) = r_1 \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 + \varepsilon) \right] + r_2 \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 - \varepsilon') \right] + r_3 \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 + \varepsilon') \right] + r_4 \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 - \varepsilon) \right]$$

(3.10)

Por simplificación hacemos un cambio de variable donde definimos

$$x_1 = \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 + \varepsilon) \right], \quad x_2 = \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 - \varepsilon') \right], \quad x_3 = \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 + \varepsilon') \right], \quad x_4 = \text{Log} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (1 - \varepsilon) \right]$$

(3.11)

Por último planteamos el problema de optimización resultante:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + r_4 x_4 \\ \text{s.a.} \quad & e^{x_1} + e^{x_2} = 1 \\ & e^{x_3} + e^{x_4} = 1 \\ & -\infty < x_i < 0 \end{aligned}$$

(3.12)

Por adecuación hacemos otro cambio de variable $x_i' = -x_i$, $\forall i$, para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & r_1 x_1' + r_2 x_2' + r_3 x_3' + r_4 x_4' \\ \text{s.a.} \quad & e^{x_1'} + e^{x_2'} = 1 \\ & e^{x_3'} + e^{x_4'} = 1 \\ & 0 < x_i' < \infty \end{aligned}$$

(3.13)

Resolviendo este problema para diferentes valores de T , si el proceso presenta un comportamiento de caminata aleatoria con retardo, la solución óptima del problema es única y es la que corresponde al valor de T real del proceso.

La figura 3.1 es el resultado de la aplicación del modelo de estimación de parámetros de *RWDSP* para valores del parámetro T en un rango de valores desde 1 hasta 30.

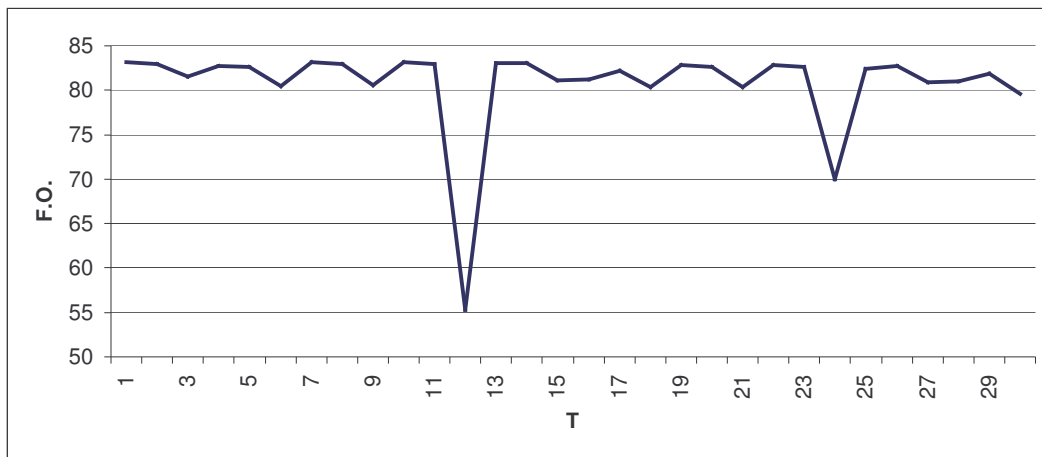


Figura 3.1. La gráfica representa los valores de la función objetivo del problema (3.13) obtenidos al resolver el problema para distintos valores de T

En el ejemplo mostrado en la figura 3.1, se ha considerado una secuencia de 120 pasos producidos mediante una simulación del proceso *RWDSP*, la simulación fue realizada por un programa hecho en fortran. El parámetro T fue escogido como $T=12$. Nótese que el algoritmo reporta el mínimo correcto para $T=12$. en el capítulo 4 se ofrece una descripción más detallada del algoritmo propuesto.

En el siguiente capítulo presentamos el diseño y análisis de un experimento para probar el modelo de estimación de parámetros bajo diversas condiciones de incertidumbre, así como para diferentes longitudes de las secuencias observadas. Además presentamos los resultados obtenidos del experimento.

CAPÍTULO 4

PRUEBAS PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL MODELO DE *RWDSP* BAJO DIFERENTES CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

4.1 Descripción del Algoritmo de Estimación de Parámetros

Para poder aplicar el modelo de *RWDSP* es necesario conocer los parámetros del proceso particular que deseamos analizar. Una manera de hacerlo es buscar los valores de ε , ε' y T que hagan que la probabilidad de ocurrencia de $S(n)$ sea maximizada. Esta probabilidad está expresada por la ecuación (3.8).

Dado un conjunto de datos y_n , generados por el proceso de interés, procedemos a realizar una serie de transformaciones para adecuar y_n , con la finalidad de obtener la información necesaria para la estimación de los parámetros del modelo. En primer lugar $S(n)$ debe cumplir que sea discreta en el tiempo, además, el modelo solo considera dos posibles estados, un paso positivo y uno negativo, así que debemos adecuar y_n para cumplir con esta condición.

Para obtener $S(n)$ hacemos una diferenciación de y_n hacia atrás, para explicarlo definimos $S(n) = y_n - y_{n-1}$, para valores de $n \geq 2$. Una vez hecho esto, $S(n)$ contiene los cambios de dirección que han ocurrido en y_n , lo cual nos es de utilidad para asignarle valor a los coeficientes r_i , mencionados en el capítulo anterior. Para poder hacer el conteo de cada coeficiente, primero es necesario establecer los valores de T que deseamos analizar para estimar los parámetros. Ya que tenemos los valores de los coeficientes, resolvemos el problema (3.13) para cada valor de T que hemos elegido. El valor mínimo de la función objetivo del problema (3.13) nos indicará que valor de T es el ciclo de persistencia.

4.2 Planeación del Experimento

El objetivo de este experimento es determinar si las propiedades estadísticas de los procesos dificultan la estimación de los parámetros mediante la metodología propuesta anteriormente. Para hacer esto decidimos investigar el efecto que tienen los parámetros ε , ε' y T sobre la medida de desempeño que plantearemos más adelante.

Además de esto también deseamos saber si la cantidad de veces que hemos observado el ciclo de persistencia afecta de alguna manera en la estimación de los parámetros de persistencia del proceso, a este término le hemos llamado P .

Debido a que dos de los factores que deseamos investigar no son independientes, nos vemos en la necesidad de tomar uno de ellos como elemento de bloqueo, originalmente tomamos T como elemento de bloqueo, más adelante explicaremos los efectos, sobre el

análisis del diseño, que implicó haber hecho esto y replantearemos el experimento para obtener los resultados deseados.

Dado que queremos revisar 3 factores a 3 niveles cada uno, eso nos genera un diseño factorial completo 3^3 de una réplica, lo cual nos da un total de 27 combinaciones de factores, con 3 bloques para obtener un total de 81 corridas experimentales.

En este estudio no es necesario hacer orden aleatorio, debido a que es un experimento computacional y hacerlo en secuencia no altera el resultado.

Los niveles de los factores son los siguientes:

$$T = \{1,4,6\} \quad (\text{Bloque})$$

$$P = \{15,20,30\}$$

$$\varepsilon = \{0.5,0,-0.5\}$$

$$\varepsilon' = \{0.5,0,-0.5\}$$

La medida de desempeño esta dada por la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{(\varepsilon - \hat{\varepsilon})^2 + (\varepsilon' - \hat{\varepsilon}')^2}$$

El rango en que varia esta medida es $(0,2\sqrt{2})$, siendo cero el mejor valor posible y $2\sqrt{2}$ el peor valor posible, con esto medimos el error cuadrado de estimación, para determinar el error absoluto.

4.3 Ejecución del Experimento

La simulación de los datos se hizo mediante un programa computacional codificado en fortran, en una PC con procesador Pentium 4 y 512 MB en memoria RAM.

Cada proceso que se generó tenía en total 1000 pasos, generamos un conjunto de 27 procesos con propiedades estadísticas distintas. Todas las operaciones y comparaciones se realizaron en Excel mediante la programación de macros con Visual Basic. En el **Apéndice A** puede encontrar las tablas de los datos experimentales que se utilizaron en la ejecución.

4.4 Análisis del Experimento

Una vez que obtuvimos la respuesta de la estimación de parámetros de la caminata aleatoria con retardo, procedimos a realizar el análisis estadístico del experimento.

En el momento que definimos un diseño factorial 3^k , estamos suponiendo que el modelo de predicción que está detrás del diseño factorial utilizado, describirá de forma “aceptable” el comportamiento de nuestro sistema. Para determinar si la descripción es “aceptable” o no, introducimos el concepto de residuos, los cuales son la diferencia entre la predicción que proporciona el modelo del diseño factorial y el punto real proporcionado por nuestro sistema. El modelo debe cumplir que los residuos sigan una distribución normal, sean independientes y tengan igualdad de varianza.

Para más detalles sobre el modelo de predicción del diseño factorial referirse a (D. Montgomery, 1997).

Como paso inicial verificamos que cumpla con los supuestos sobre los residuos: normalidad, independencia e igualdad de varianza.

De la gráfica de residuos que nos proporciona el Minitab, el cual es un paquete computacional con herramientas de análisis estadístico, observamos que no es evidente alguna violación a los supuestos.

La figura se divide en cuatro secciones, las dos secciones del lado izquierdo son resultado del análisis de normalidad de los residuos, la gráfica superior izquierda se le

llama la prueba del lápiz gordo, en esta gráfica observamos si los puntos están alineados sobre la recta, lo cual indica que no se viola el supuesto de normalidad.

En la parte inferior izquierda observamos un histograma de los residuos, en el que deberíamos observar una forma semejante al de una curva de probabilidad normal, para seguir cumpliendo este supuesto.

En la parte superior derecha tenemos una gráfica de dispersión de los residuos, la cual nos ayuda a observar el comportamiento de la varianza de los residuos, con esta gráfica probamos el supuesto de igualdad de varianza.

Por último en la sección inferior derecha tenemos la gráfica de los residuos contra el orden de los datos, esta no ayuda a observar si existe algún patrón reconocible en los residuos, con lo cual buscamos cumplir el supuesto de independencia.

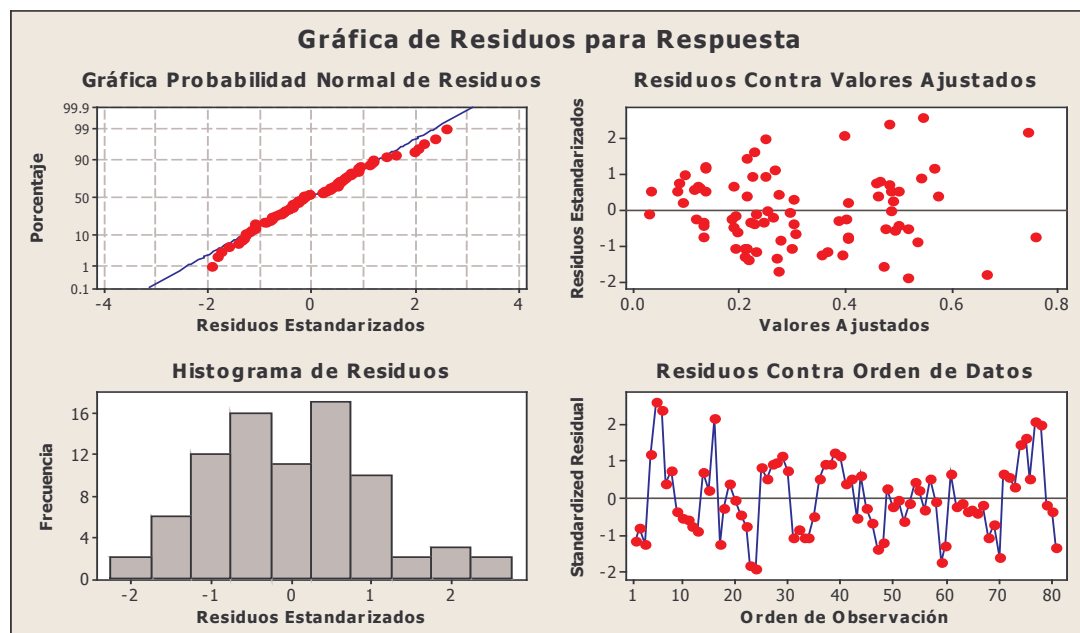


Figura 4.1 Gráfica de residuos

Para verificar lo anterior hacemos las pruebas estadísticas formales correspondientes.

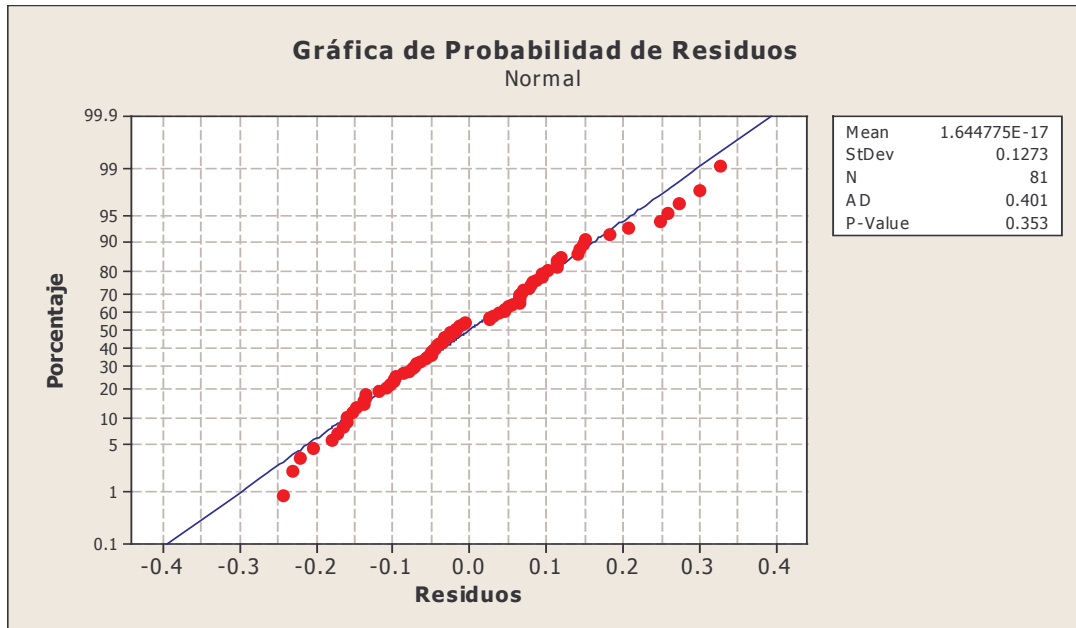


Figura 4.2 Prueba de normalidad. Resultado de la prueba de Anderson-Darling

Realizamos una prueba de correlación y obtuvimos los siguientes resultados:

Correlations: Bloque, Factor 1, Factor 2, P, RESI1				
	Bloque	Factor 1	Factor 2	P
Factor 1	0.000 1.000			
Factor 2	-0.000 1.000	0.000 1.000		
P	0.000 1.000	0.000 1.000	0.000 1.000	
RESI1	-0.000 1.000	0.000 1.000	0.000 1.000	-0.000 1.000

Cell Contents: **Pearson correlation**

P-Value

Tabla 4.1 Análisis de correlación entre los factores del experimento

Probamos igualdad de varianza con los siguientes resultados que se muestran a continuación:

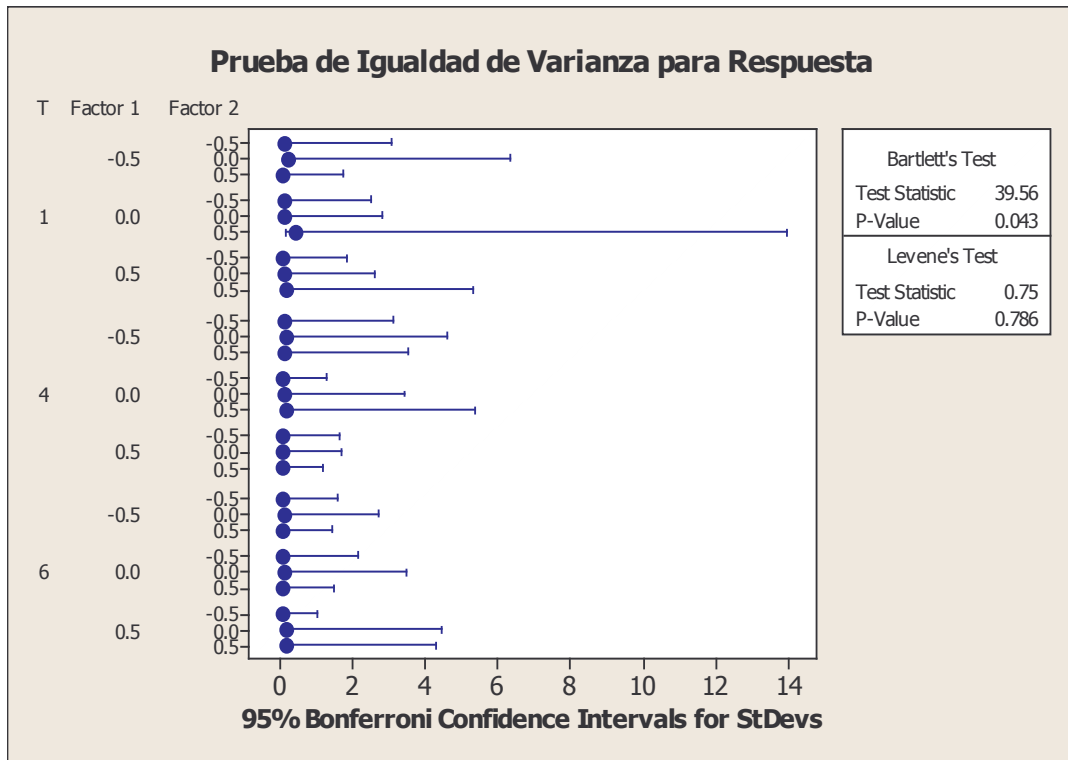


Figura 4.3 Prueba de igualdad de varianza de respuesta contra factores

Según se muestra en la figura 4.3, para la prueba de Bartlett no hay igualdad de varianza a un nivel de significancia de 0.05, sin embargo la prueba de Levene contradice este resultado, observando los resultados de la gráfica, podemos ver que solo un punto muestra no seguir el mismo comportamiento de los demás, así que podemos pensar que este punto podría estar alterando el resultado de la prueba de Bartlett.

Al hacer el análisis del diseño factorial que construimos obtenemos lo siguiente:

General Linear Model: Respuesta versus Bloque, Factor 1, Factor 2, P							
Factor	Type	Levels	Values				
Bloque	fixed	3	1, 4, 6				
Factor 1	fixed	3	-0.5, 0, 0.5				
Factor 2	fixed	3	-0.5, 0, 0.5				
P	fixed	3	15, 20, 30				
Analysis of Variance for Respuesta, using Adjusted SS for Tests							
Source		DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Bloque		2	1.32025	1.32025	0.66012	26.49	0.000
Factor 1		2	0.19464	0.19464	0.09732	3.90	0.026
Factor 2		2	0.14123	0.14123	0.07061	2.83	0.068
P		2	0.19797	0.19797	0.09898	3.97	0.025
Factor 1*Factor 2		4	0.10446	0.10446	0.02612	1.05	0.392
Factor 1*P		4	0.06789	0.06789	0.01697	0.68	0.608
Factor 2*P		4	0.03071	0.03071	0.00768	0.31	0.871
Factor 1*Factor 2*P		8	0.17976	0.17976	0.02247	0.90	0.522
Error		52	1.29603	1.29603	0.02492		
Total		80	3.53295				
S = 0.157873 R-Sq = 63.32% R-Sq(adj) = 43.56%							

Tabla 4.2 Análisis de varianza del diseño de experimentos

Realizando un ANOVA mostrado en la tabla 4.2 centramos nuestra atención en dos cosas, primera, el efecto del factor 2 no es significativo con α de 0.05, lo cual es extraño debido a que el factor es parte determinante de las propiedades estadísticas del proceso y la significancia estadística del bloque es indicador de que está representando más fuente de variación de la que hubiésemos esperado. Segunda, a pesar que el modelo cumple con todos los supuestos, el valor R^2 es demasiado pequeño, de tal manera que el modelo explica solo un poco más de la mitad de la variación presente en nuestro experimento.

Por esta razón proponemos replantear el diseño de experimentos mediante un intercambio entre los factores que presentan dependencia, es importante mencionar que el replanteamiento fue posible por tener un diseño factorial completo, además por ser un experimento computacional no representó un problema mayor.

Experimento replanteado

Los niveles de los factores son los siguientes:

$$P = \{15,20,30\} \quad (\text{Bloque})$$

$$T = \{1,4,6\}$$

$$\varepsilon = \{0.5,0,-0.5\}$$

$$\varepsilon' = \{0.5,0,-0.5\}$$

De la gráfica de residuos que nos proporciona el Minitab, observamos que el experimento sigue cumpliendo con los supuestos.

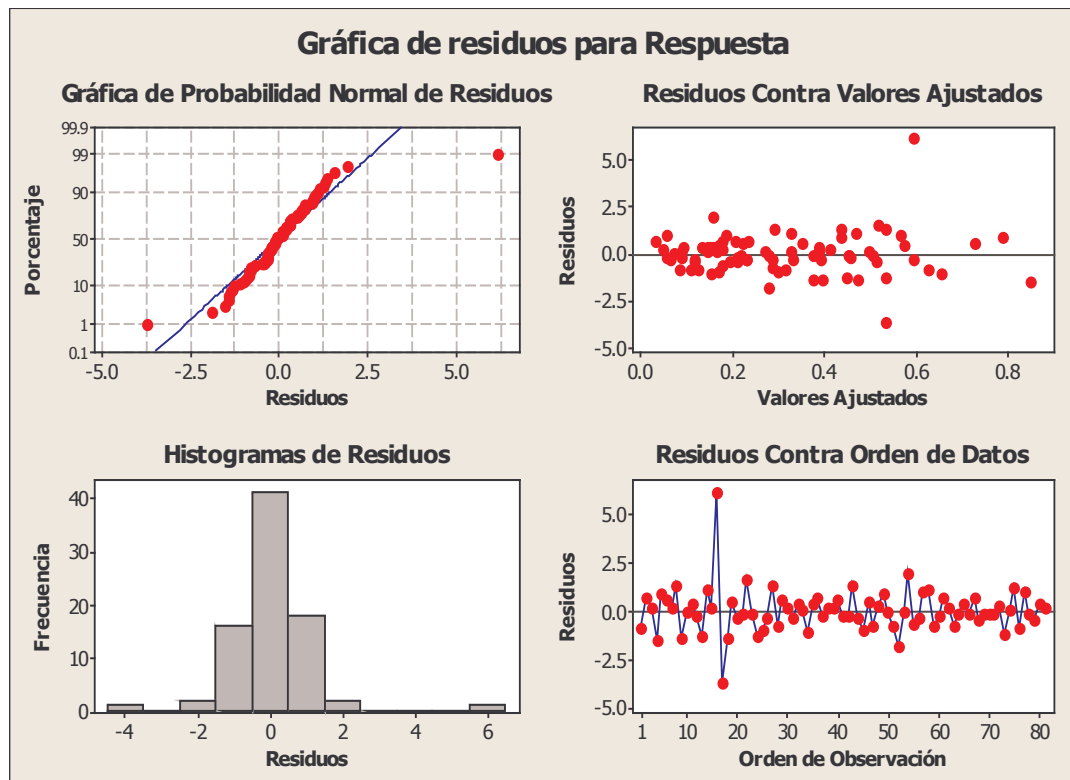


Figura 4.4 Gráfica de residuos del experimento replanteado

El análisis para este diseño de experimentos se presenta a continuación:

General Linear Model: Respuesta versus Bloque, T, Factor 1, Factor 2							
Factor	Type	Levels	Values				
Bloque	fixed	3	15, 20, 30				
T	fixed	3	1, 4, 6				
Factor 1	fixed	3	-0.5, 0, 0.5				
Factor 2	fixed	3	-0.5, 0, 0.5				
Analysis of Variance for Respuesta, using Adjusted SS for Tests							
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P	
Bloque	2	0.19797	0.19797	0.09898	7.86	0.001	
T	2	1.32025	1.32025	0.66012	52.40	0.000	
Factor 1	2	0.19464	0.19464	0.09732	7.73	0.001	
Factor 2	2	0.14123	0.14123	0.07061	5.61	0.006	
T*Factor 1	4	0.20257	0.20257	0.05064	4.02	0.006	
T*Factor 2	4	0.11582	0.11582	0.02896	2.30	0.071	
Factor 1*Factor 2	4	0.10446	0.10446	0.02612	2.07	0.098	
T*Factor 1*Factor 2	8	0.60095	0.60095	0.07512	5.96	0.000	
Error	52	0.65505	0.65505	0.01260			
Total	80	3.53295					
S = 0.112237 R-Sq = 81.46% R-Sq(adj) = 71.48%							

Tabla 4.3 Análisis de varianza para el experimento replanteado

De acuerdo a la tabla ANOVA 4.3 para el experimento replanteado observamos que los efectos principales son todos significativos y solo dos de las interacciones de segundo orden no son significativas, todo esto a un nivel $\alpha=0.05$.

Para poder determinar de alguna manera qué nivel de los factores afecta de manera más adversa a la estimación de los parámetros, podemos apoyarnos con las gráficas de interacciones para los distintos factores, las cuales se mostrarán más adelante. Una cuestión de interés desde el inicio de este experimento, era determinar si los niveles de los factores que definen las características estadísticas de los ejemplos influyen en la estimación de los parámetros.

Con este objetivo presentamos las gráficas de interacciones para los factores T y P, de los cuales podemos observar de manera más evidente el comportamiento de la respuesta ante el cambio de los niveles del factor. Es importante señalar que estas gráficas descartan otras posibles interacciones entre los factores que se analizan y factores que no se toman en cuenta, sin embargo proporcionan una idea de como pueden afectar los cambios entre niveles de los factores en la medida de desempeño.

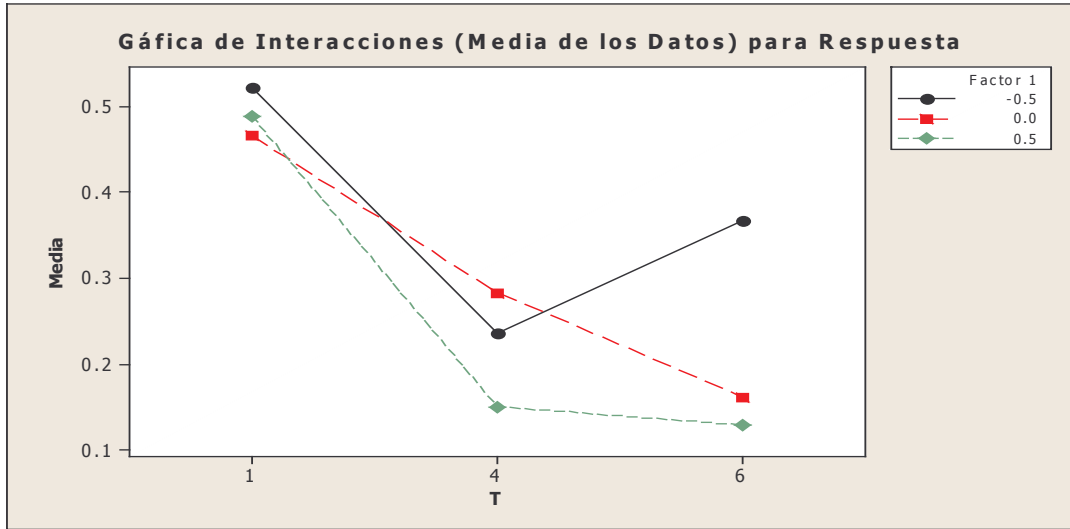


Figura 4.5 Gráfica de interacciones entre el Factor 1 y T

En la gráfica de la figura 4.5, podemos observar que el pasar de un valor de $T=6$ a $T=4$ empeora la respuesta con los niveles de 0 y 0.5 del factor 1, lo cual no sucede con el nivel de -0.5 , el resultado de la Figura 4.5 está de acuerdo con la tabla 4.3, la cual indica que la interacción entre T y el Factor 1 representa variación significativa, con $p = 0.006$.

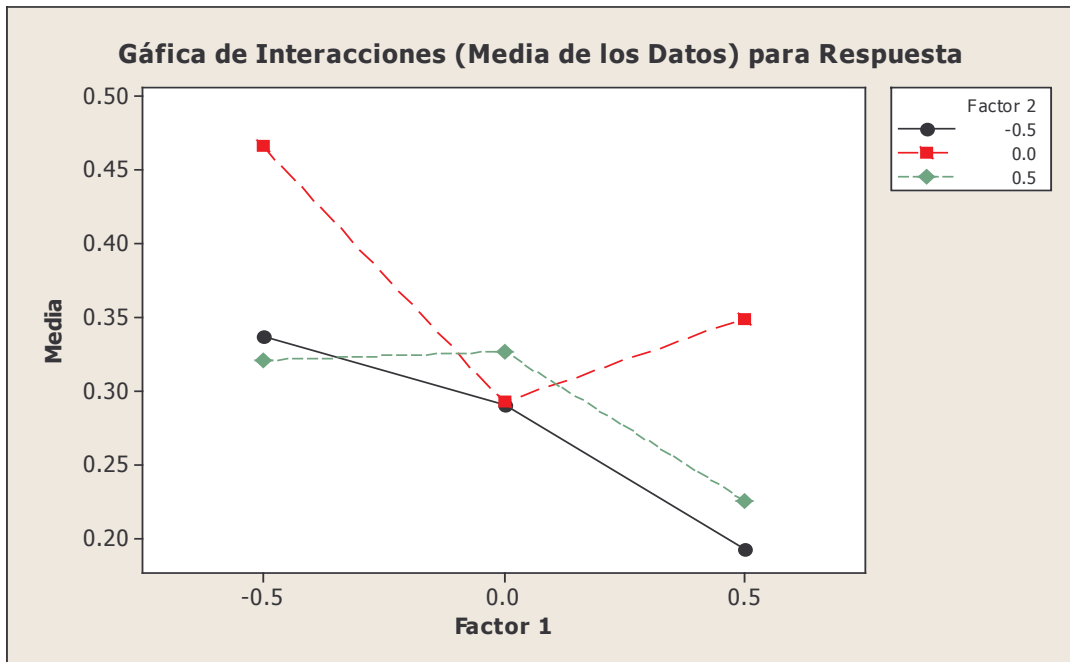


Figura 4.6 Gráfica de interacciones entre el Factor 1 y Factor 2

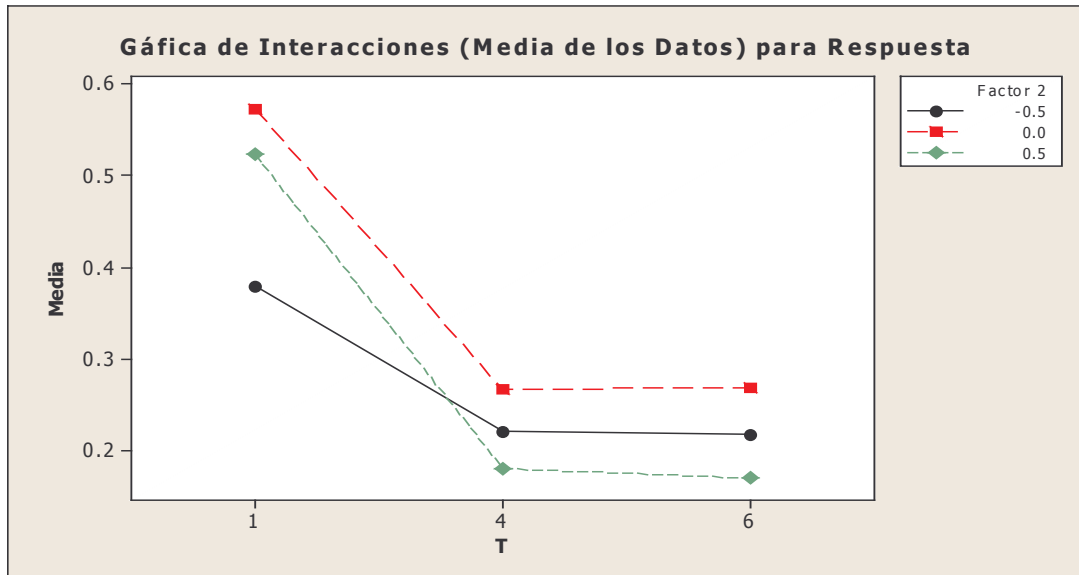


Figura 4.7 Gráfica de interacciones entre el Factor 2 y T

En las graficas presentadas en las figuras 4.6 y 4.7, observamos que la medida de desempeño es mejor a los niveles de 4 y 6 del factor T, lo cual es un indicio de que procesos que tengan una longitud del ciclo de persistencia con valor igual a 1, presentaran mayor dificultad para la estimación de sus parámetros. Podemos observar que la Figura 4.7 apoya el resultado de que la interacción T-Factor 2 no es significativa, de acuerdo a la tabla 4.3, con valor $p = 0.071$, probando con un valor de $\alpha = 0.05$.

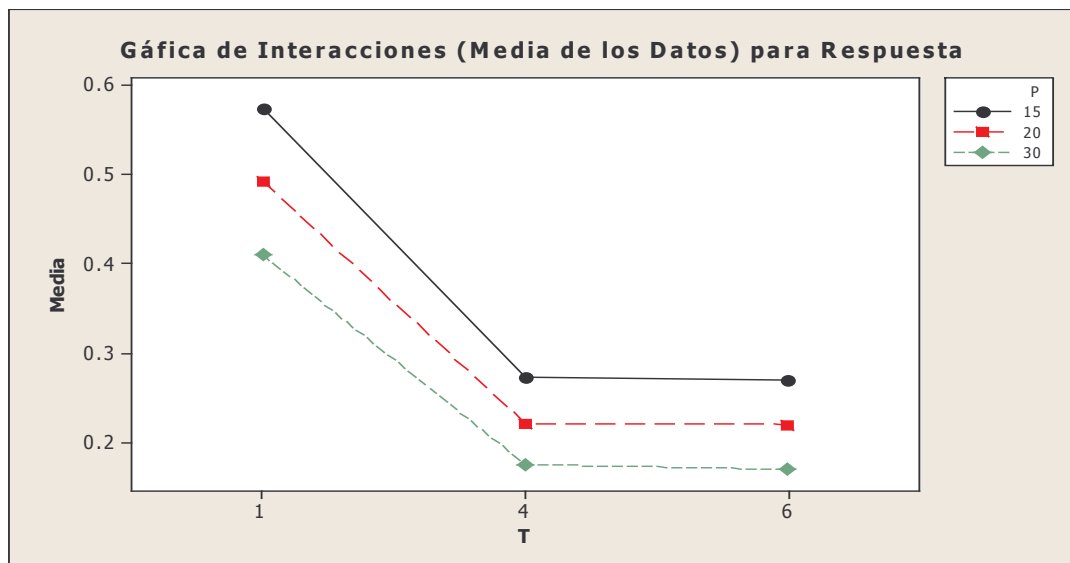


Figura 4.8 Gráfica de interacciones entre el P y T

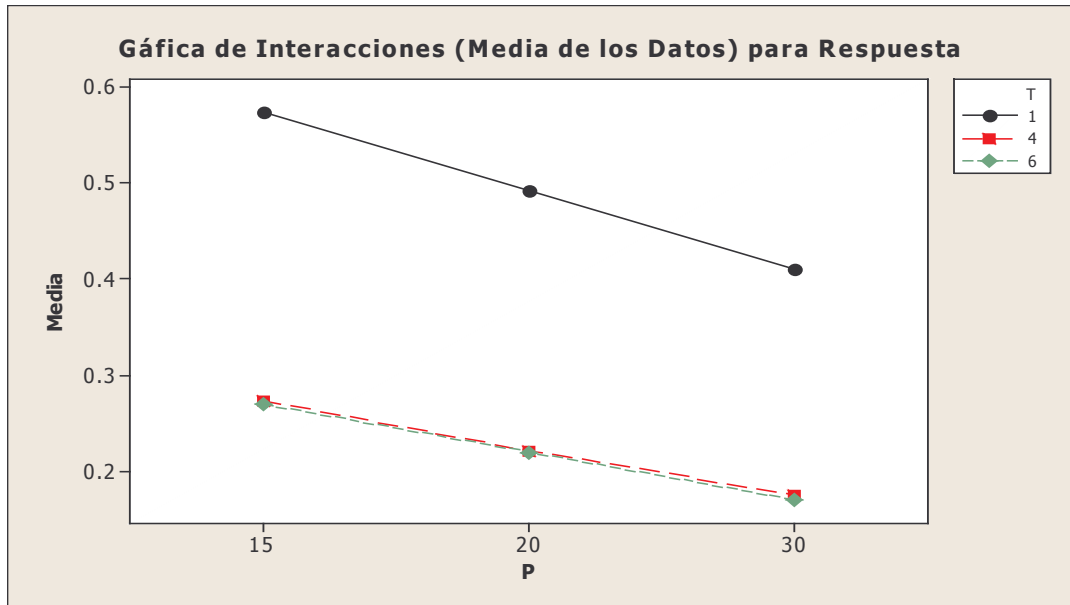


Figura 4.9 Gráfica de interacciones entre T y P

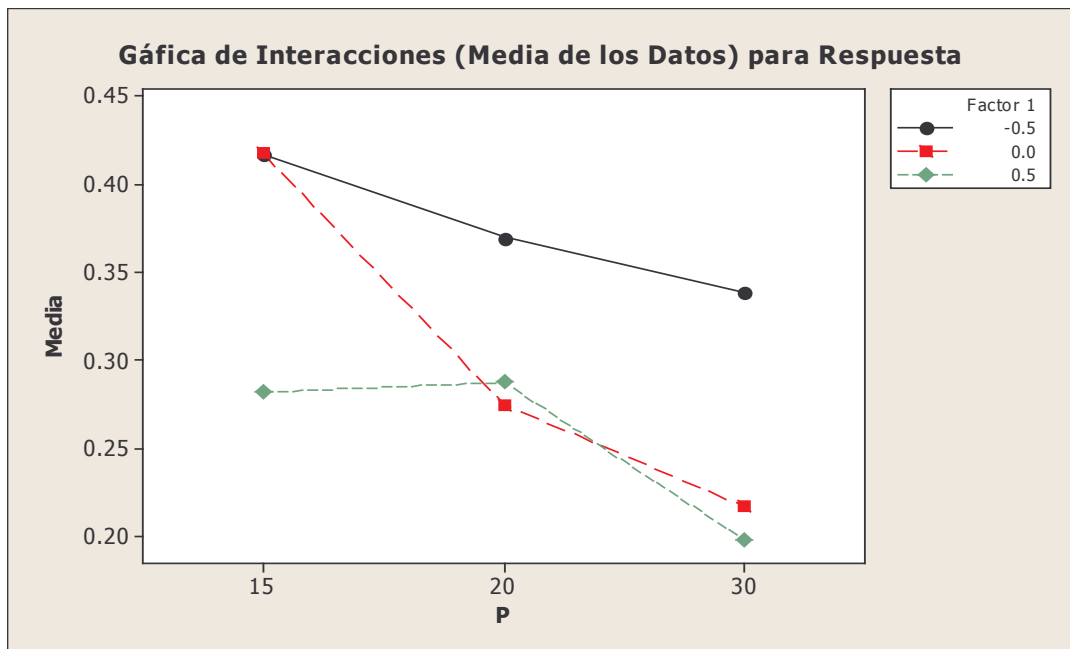


Figura 4.10 Gráfica de interacciones entre el Factor 1 y P

De acuerdo con la figura 4.10, podemos observar que a medida que incrementamos el número de veces que observamos el ciclo de persistencia (P), mejora la estimación de los

parámetros, además resaltamos los evidentes cambios de comportamiento entre los niveles de factores que, como ya habíamos mencionado pueden deberse a interacciones con otros factores que aquí no tomamos en consideración.

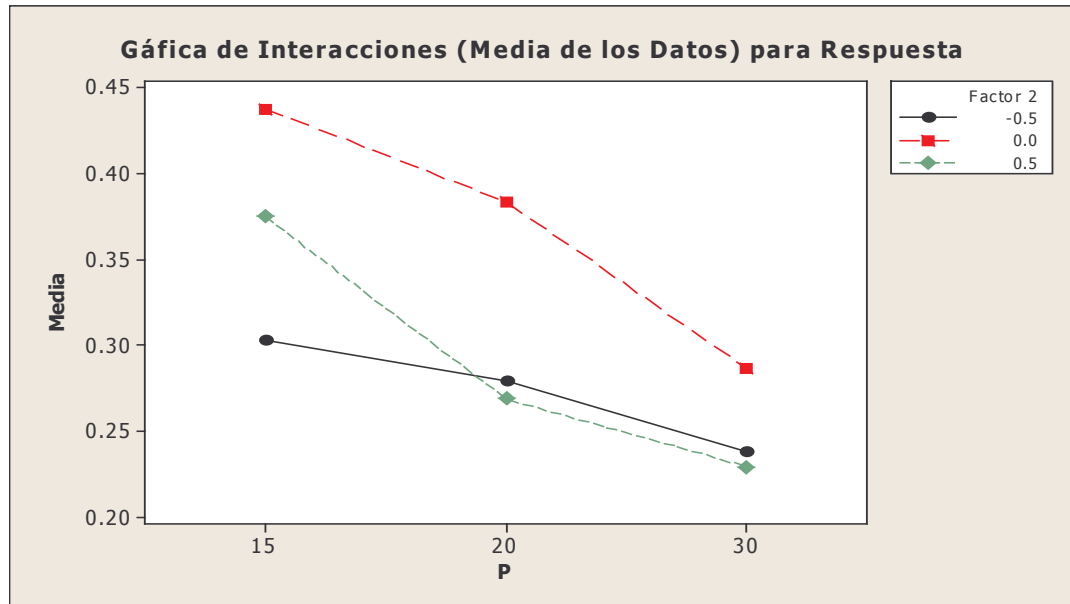


Figura 4.11 Gráfica de interacciones entre el Factor 2 y P

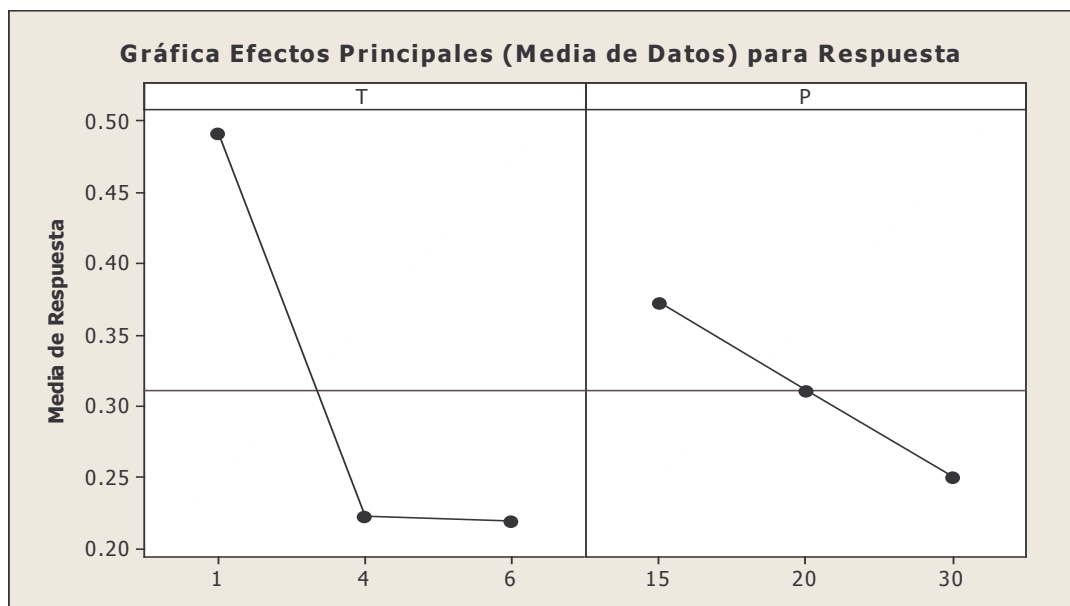


Figura 4.12 Gráfica de Efectos principales de los factores P y T

La gráfica de efectos principales nos diría que tenemos una mejor estimación de los parámetros ε y ε' con el nivel 30 y 6 de los factores P y T respectivamente.

De la inspección de la tabla 4.3, así como de las gráficas de interacciones y efectos principales, concluimos que la longitud del ciclo de persistencia (T) y la cantidad de veces que observamos el ciclo de persistencia (P) afectan a la estimación de los parámetros de persistencia.

CAPÍTULO 5

CASOS DE ESTUDIO

Una de las suposiciones básicas en la teoría de la economía es que el mercado es eficiente, entendiendo por eficiente que todos los actores económicos cuentan con una información suficientemente completa del mercado. Por lo tanto ningún inversionista cuenta con información privilegiada con respecto a los demás, que le pueda ser posible explotar o predecir su comportamiento (E. Fama, 1976). Sin embargo, un mito común entre los inversionistas, es que existe un comportamiento predecible en la dinámica del mercado. Existen numerosos trabajos recientes en el campo de la econo-física los cuales indican que estas creencias de los inversionistas son reales y el mercado, en alguna forma, muestra dinámica predecible (Y. Zang, 1999; A. Lo, et al. 2000; A. Tsonis, et al. 2000; P. Jefferies, et al. 2001; H. Takayasu, 2002; T. Ohira, et al. 2002). Entre estos trabajos, es de interés

particular el realizado por T. Ohira, et al. (2002), en el cual presentan otra evidencia de tal comportamiento predecible, mediante el análisis de datos del tipo de cambio del yen-dólar.

En este trabajo utilizan dos conjuntos de datos compuestos de valores del yen tomados a intervalos de tiempo de 7 segundos en promedio. Con este estudio muestran que tales conjuntos de datos a “alta frecuencia” siguen una estructura de probabilidad condicional bastante particular, se analiza solamente los movimientos positivos y negativos. Además, resaltan la imposibilidad de aprovechar esta propiedad para el comercio actual, debido a su alta frecuencia y a la existencia de costos de transacción.

En este capítulo mostramos cuatro casos de estudio de series de tiempo reales que presentan propiedades estadísticas que asemejan las descritas por T. Ohira, et al. (2002), sin embargo, a diferencia de su trabajo, la metodología propuesta en este estudio de tesis proporciona resultados en escalas de tiempo más realistas, por ejemplo, días o meses, lo cual permite aprovechar la estructura probabilística definida mediante el modelo de *RWDSP*, aquí utilizado, y obtener beneficios de aquellos procesos financieros que presenten valores de probabilidad distintos de 0.5.

Adicionalmente, la metodología propuesta en esta tesis hace uso de un modelo de optimización para la estimación de los parámetros de la *RWDSP*, facilitando la aplicación de la metodología para cualquier serie de tiempo que se desee analizar.

Lo anterior es posible gracias a que no es necesario seleccionar valores de los parámetros del modelo, bajo distintos criterios que dependan del ejemplo particular.

Los parámetros del modelo serán seleccionados bajo el criterio de máxima verosimilitud, aquellos que maximicen la probabilidad de ocurrencia de la serie, el cual es resuelto por el modelo de optimización propuesto.

Con el propósito de probar la metodología en series de tiempo generadas por procesos reales, nos dimos a la tarea de seleccionar un conjunto de casos de estudio: una serie de tiempo generada por los valores de la acción de Dow Jones, otra serie generada por la demanda de unidades de ancho de banda en una empresa de telecomunicaciones, una

generada por la producción de energía eléctrica y finalmente una generada por las ventas de calentadores de agua.

En el análisis de series de tiempo es de interés la caracterización y predicción de valores de la serie. Para ello se debe conocer si sus diferencias son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, así como la función de correlación y el espectro de frecuencias de Fourier.

5.1 Pronóstico a Mediano Plazo de Tendencia en Valores Accionarios

Un aspecto del análisis financiero con gran interés práctico es la predicción de tendencias al mediano plazo (S. Makridakis, et al. 1998). Un pronóstico adecuado resulta en un apoyo a la toma de decisiones, por ejemplo, a la realización de una inversión. Sin embargo, de acuerdo con la ya mencionada hipótesis del mercado eficiente (E. Fama, 1976), carece de sentido realizar predicciones a mediano-largo plazo dado el hipotético comportamiento del mercado como una caminata aleatoria simple. En este ejemplo se muestra mediante el análisis de un conjunto de datos específico, el mercado puede mostrar predictibilidad, y cómo aprovechar dicha predictibilidad para el análisis de cantidades de interés. De los resultados aquí presentados se desprende que el mercado, al menos en aspectos específicos, es mejor descrito mediante un proceso de caminata aleatoria con persistencia retardada, lo que le confiere un mayor grado de predictibilidad.

El problema que se aborda aquí es el siguiente: dada una serie de tiempo mensual para los valores de una cierta acción, se desea pronosticar la tendencia global, ya sea a la alza o a la baja, que dicha serie de datos mostrará en un intervalo de tiempo futuro. En el ejemplo aquí discutido se considerará un intervalo de 12 meses, aunque el método bien puede aplicarse para cualquier intervalo. De esta forma, el problema se plantea como sigue: dadas 12 observaciones de una serie de tiempo mensual, se desea pronosticar la tendencia global durante los siguientes 12 meses. Para tal efecto se aplicarán los algoritmos de análisis de datos propuestos en esta tesis, después de un preprocesamiento adecuado de los datos. La muestra consiste en 244 valores mensuales de la acción de Dow Jones (advíertase

que estos datos se refieren a cotizaciones de una acción específica, en este caso a las acciones del corporativo Dow Jones, no al índice Dow Jones) en el período 1985 – 2005.

Existe una variedad de métodos para el cálculo de pronósticos a mediano plazo en series de tiempo, en su mayoría basados en modelos de correlación lineal con factores externos o en apreciaciones no cuantitativas (S. Makridakis, et al. 1998). El método aquí propuesto es enteramente cuantitativo y no requiere de datos externos a la propia serie.

Los datos se presentan en la siguiente figura:

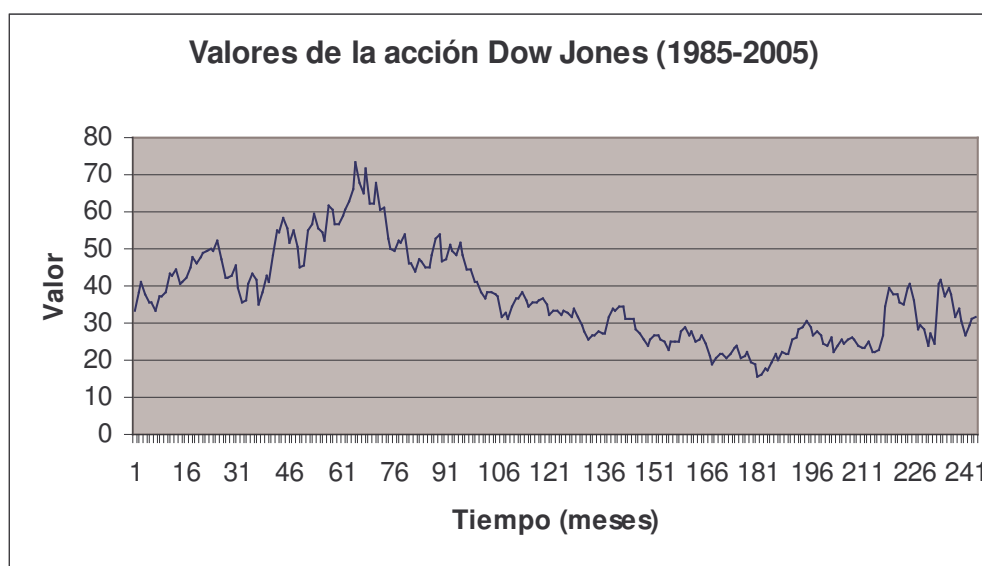


Figura 5.1 Valores en el tiempo del valor de la acción de Dow-Jones

Para este ejemplo se consideran las tendencias promedio anuales (TPA), definidas como el promedio de las pendientes locales sobre un año:

$$TPA(t) = \frac{1}{12} \sum_{n=t-12}^t (x_n - x_{n-1}) \quad (5.1)$$

Dichos promedios, calculados sobre los datos de la primera gráfica (tomando como punto de partida el mes 25), se muestran en la siguiente figura:

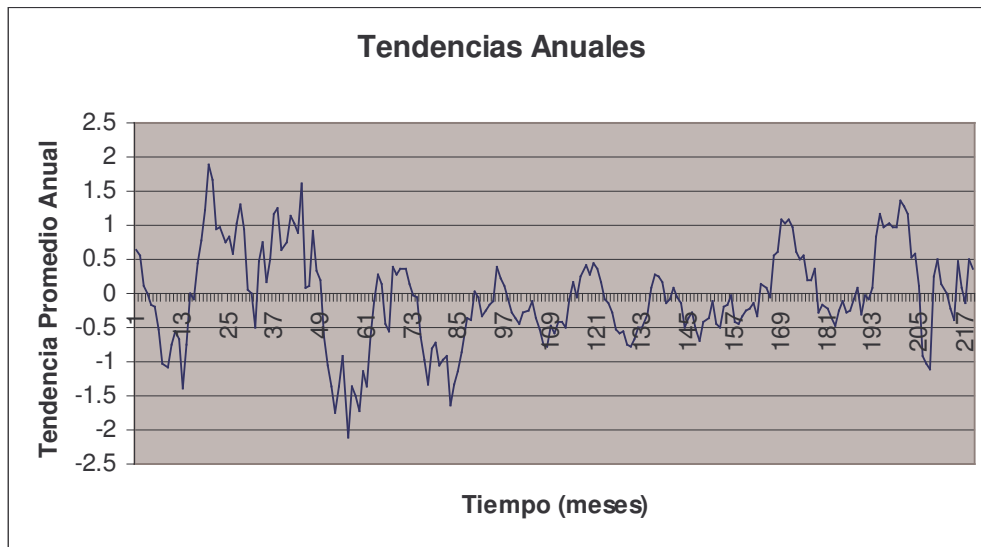


Figura 5.2 Tendencias promedio anuales de la acción de Dow-Jones, calculadas de acuerdo con la Ec. (5.1)

La gráfica muestra la evolución de las tendencias calculadas sobre ventanas de 12 meses, mes a mes. Los cambios mes a mes (pasos) se presentan a continuación:

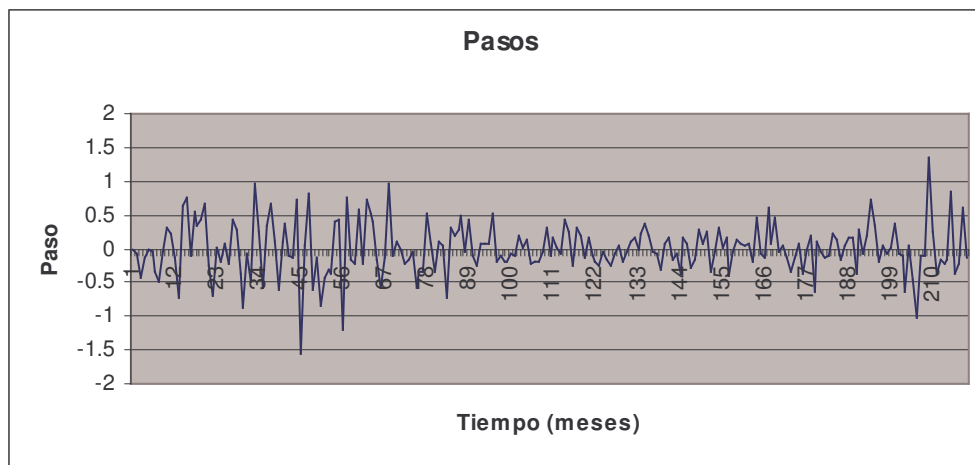


Figura 5.3 Diferencias entre los pasos de la figura 5.2

La serie de tiempo de los pasos es consistente con un proceso estacionario. Para apoyar esta aseveración, se calcula la transformada de Fourier de los datos, para poder observar si existe alguna frecuencia dominante que pudiera ser indicio de la existencia de un ciclo en la serie y su función de autocorrelación para observar si existe alguna dependencia lineal a mediano o largo plazo (esto lo hacemos con la finalidad de obtener información sobre las dependencias de la serie analizada):

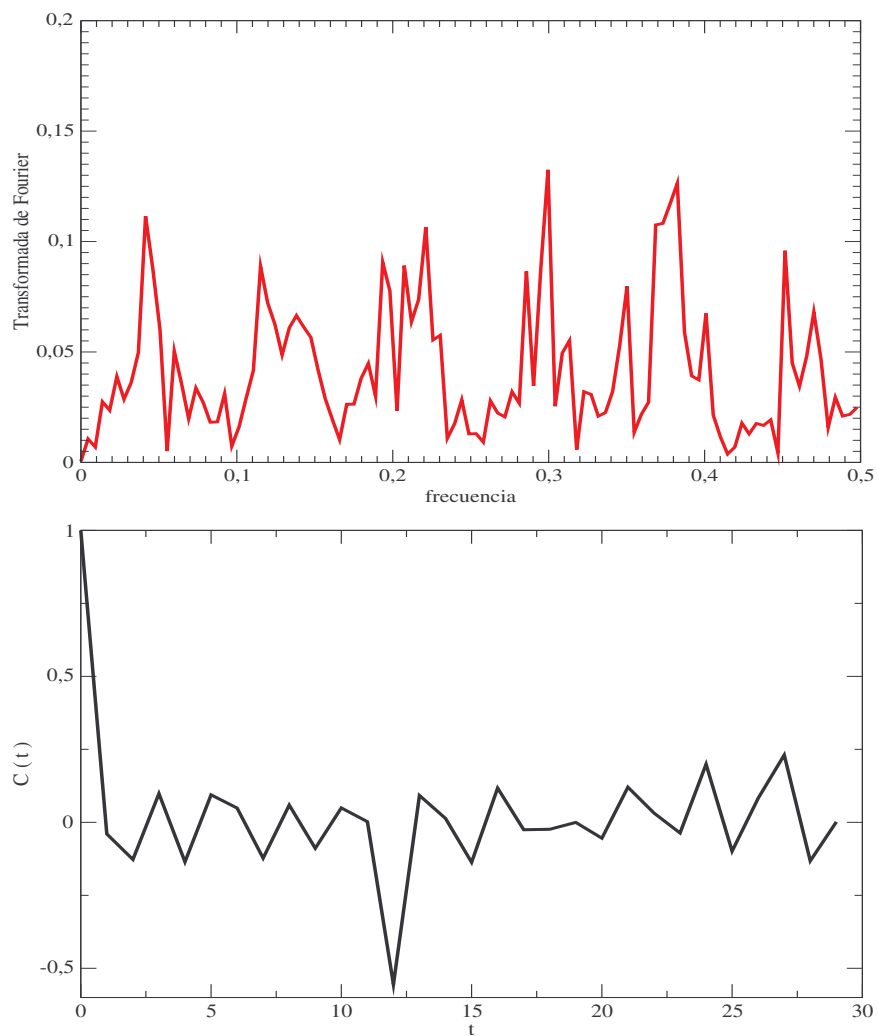


Figura 5.4 Espectro de Fourier y función de autocorrelación de la secuencia de pasos de la figura 5.3

Las curvas indican que los pasos son aproximadamente independientes.

El decaimiento exponencial de la función de autocorrelación y el espectro de Fourier con banda ancha (valores significativos para todo el rango de frecuencias y valor finito en la frecuencia cero) son indicativas de un proceso estacionario (G. Box, et al. 1994). Es interesante advertir la presencia de una autocorrelación significativa en el mes 12. Aunque dicho valor observado pasa una prueba estadística del 95% en cuanto a su nivel de significancia, en base al espectro, es difícil concluir que el proceso no es un ruido blanco. En el espectro se observa una multitud de frecuencias relevantes, donde muchas no son armónicas entre sí. Se procede a analizar los datos mediante los algoritmos presentados en esta tesis. La dependencia anual se torna evidente al ajustar los datos a un modelo *RWDSP* para diferentes valores de T:

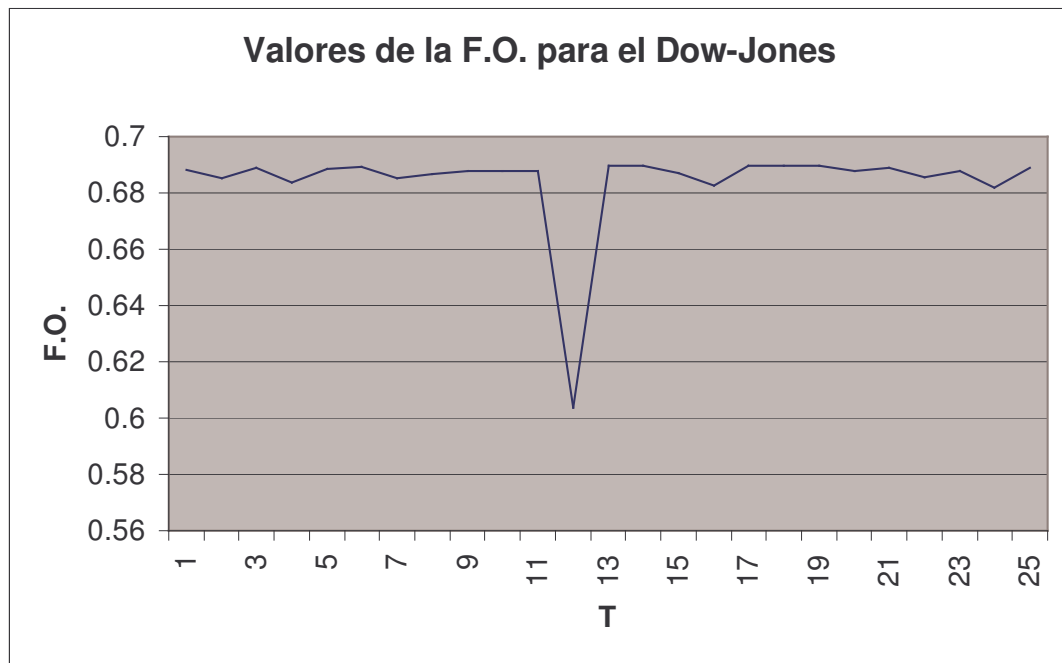


Figura 5.5 Valores de la Función Objetivo que resultan al resolver el problema (3.13) para distintos valores de T de la acción de Dow-Jones

La metodología propuesta en esta tesis resulta muy superior para discernir el grado de dependencia entre los datos, que los métodos lineales tradicionales, como se muestra en la figura 5.5.

Los parámetros del modelo *RWDSP* en $T=12$ vienen dados por $\varepsilon = -0.44, \varepsilon' = -0.37$, los cuales implican las probabilidades de transición

$$P(1_{\tau}|1_{\tau-12}) = 0.28, P(1_{\tau}|-1_{\tau-12}) = 0.685. \quad (5.2)$$

Una consecuencia de este análisis es que los cambios relativos mes a mes en las tendencias anuales son predecibles. Con esto en mente, se realizó el siguiente ejercicio de pronóstico (mediante un programa en C++): dado un cambio relativo con signo + se pronostica un cambio relativo con signo – doce meses al futuro. Dado un cambio relativo con signo – se pronostica un cambio relativo con signo + doce meses al futuro. Los pronósticos se comparan con los datos observados y se calcula el error de predicción para cada tipo de estado. Resulta que el error de predicción para el estado + es del 31% y para el estado – es del 27%, valores en muy buen acuerdo con las probabilidades de transición encontradas para el modelo *RWDSP*. Un importante aspecto práctico de este resultado es que la tendencia global, a la alza o a la baja sobre todo un año, se puede pronosticar a partir de los cambios relativos en tendencia anual del año anterior. Este resultado constituye un punto de partida importante para la construcción de herramientas de análisis para el apoyo a la toma de decisiones en el sector financiero.

5.2 Análisis de Demanda en Sistemas de Telecomunicaciones

En este ejemplo se considera una serie mensual de datos de uso de una red de telecomunicaciones. Los resultados aquí presentados se han integrado dentro de una herramienta computacional de planeación, desarrollada en convenio para la empresa Avantel por estudiantes y profesores de nuestro Posgrado. En la figura 5.6 se muestra la función de autocorrelación para una muestra típica de uso de red, después de diferenciar la serie de tiempo una vez para obtener un comportamiento estacionario (G. Box, et al. 1994). Se advierte un decaimiento rápido en la correlación, aunque hay algunos valores significativos dentro del rango de meses 1 – 12. El espectro de Fourier de esta muestra, presentado en la figura 5.7, es consistente con ruido blanco. La gráfica logarítmica del

espectro de potencia se muestra en la figura 5.8. En este caso se han considerado los datos sin diferenciar, es decir la suma temporal de los datos diferenciados. Como es bien sabido, una suma de términos de ruido blanco genera una caminata aleatoria simple (G. Weiss, 1994). El espectro reportado en la figura 5.8 es consistente con la ley de potencia asociada a una caminata aleatoria simple [que debe ser de -2 , (G. Weiss, 1994)]. En la figura se indica que el valor obtenido es -1.79 . Sin embargo, el ajuste con una caminata aleatoria simple es mejor para la frecuencias chicas, esto es para tiempos grandes. A partir de este hecho y de la función de autocorrelación mostrada en la figura 5.6, se concluye que los datos se describen adecuadamente por una caminata aleatoria simple, para frecuencias menores a 0.1 , es decir, para tiempos mayores a 10 meses. Antes de ese intervalo, existen correlaciones significativas entre los datos, que pueden aprovecharse para hacer pronósticos a corto plazo.

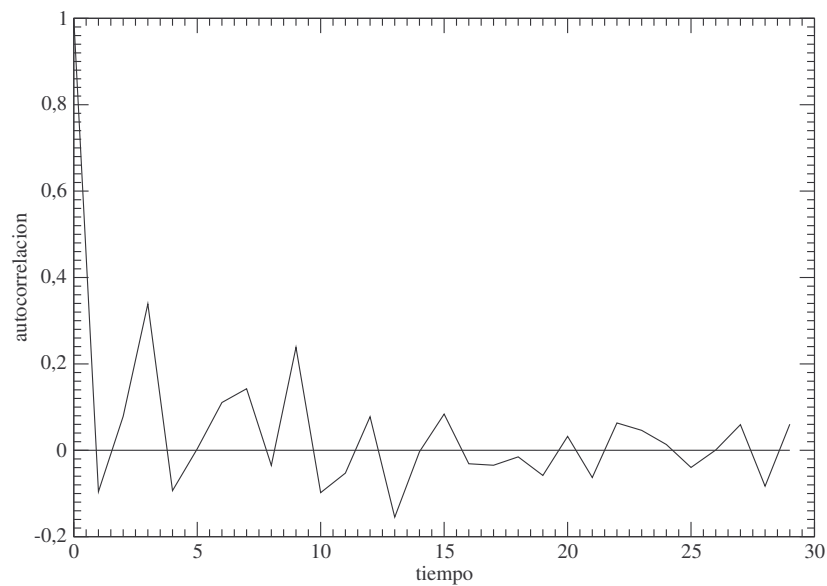


Figura 5.6 Función de autocorrelación de los pasos de la serie de tiempo de telecomunicaciones

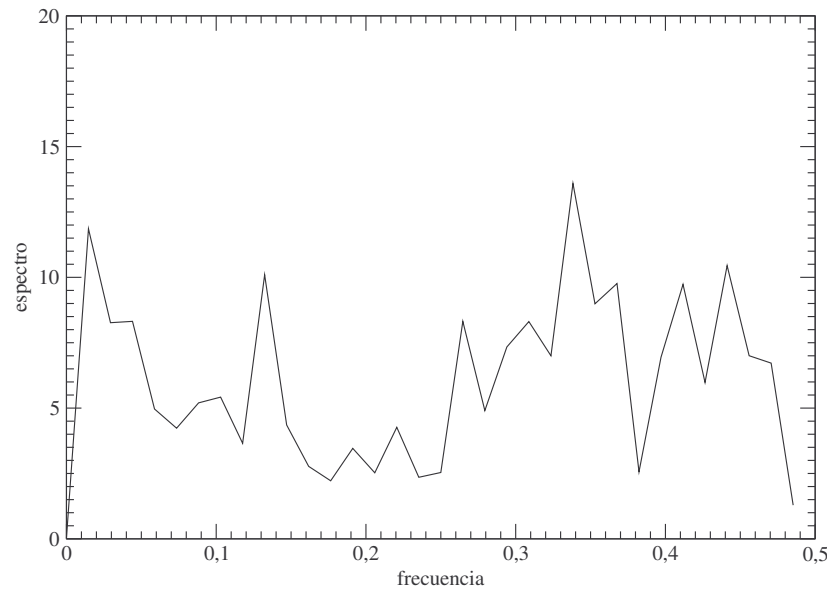


Figura 5.7 Espectro de Fourier de los pasos de la serie de tiempo de telecomunicaciones

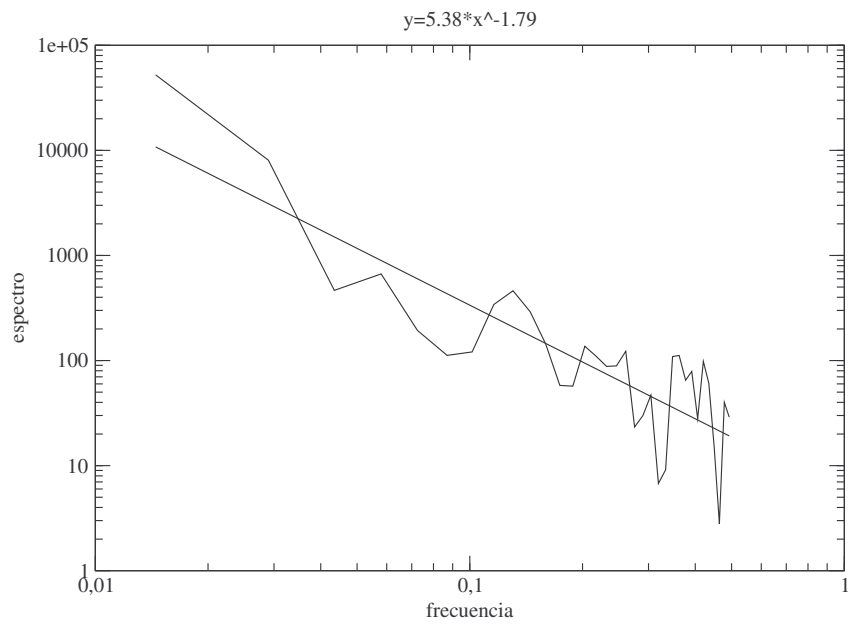


Figura 5.8 Espectro de Fourier de la suma de los pasos de la serie de tiempo de telecomunicaciones.

El espectro es consistente con una caminata aleatoria simple para frecuencias menores a 0.1

Las conclusiones anteriores han sido reevaluadas empleando el algoritmo de análisis que se propone en esta tesis. Los resultados se muestran en la figura 5.9. Vemos que no existen diferencias notables en los mínimos de la función objetivo para los distintos valores de T.

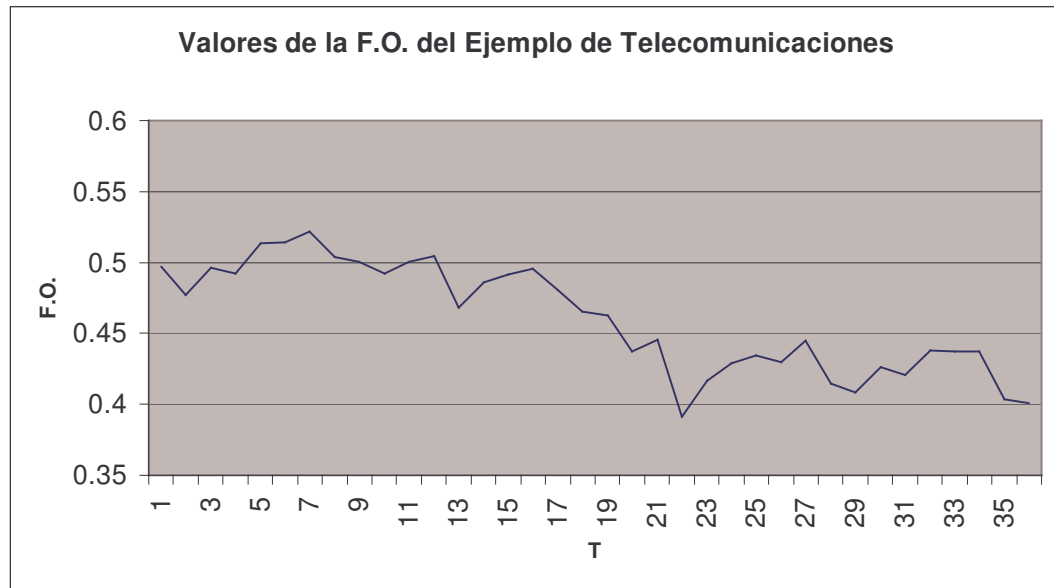


Figura 5.9 Valores de la Función Objetivo que resultan al resolver el problema (3.13) para distintos valores de T de la serie de Telecomunicaciones

El análisis anterior justifica modelar los datos (para el mediano – largo plazo), como una caminata aleatoria simple. Dado que para una caminata aleatoria simple se puede obtener una descripción estadística completa, dicho modelo se aprovecha para estimar las propiedades estadísticas relevantes del proceso de demanda en el largo plazo. Esto contrasta con el uso tradicional que se hace de la caminata aleatoria simple, como un pronóstico *ingenuo* de corto plazo (S. Makridakis, et al. 1998).

Se aplica el modelo de caminata aleatoria simple para generar escenarios plausibles de demanda futura, con los cuales se alimenta un modelo de optimización. Este esquema ha sido implementado dentro del ya mencionado software desarrollado para una importante firma en el sector de las telecomunicaciones. En la figura 5.10 se muestra un ejemplo de las salidas que genera el software.

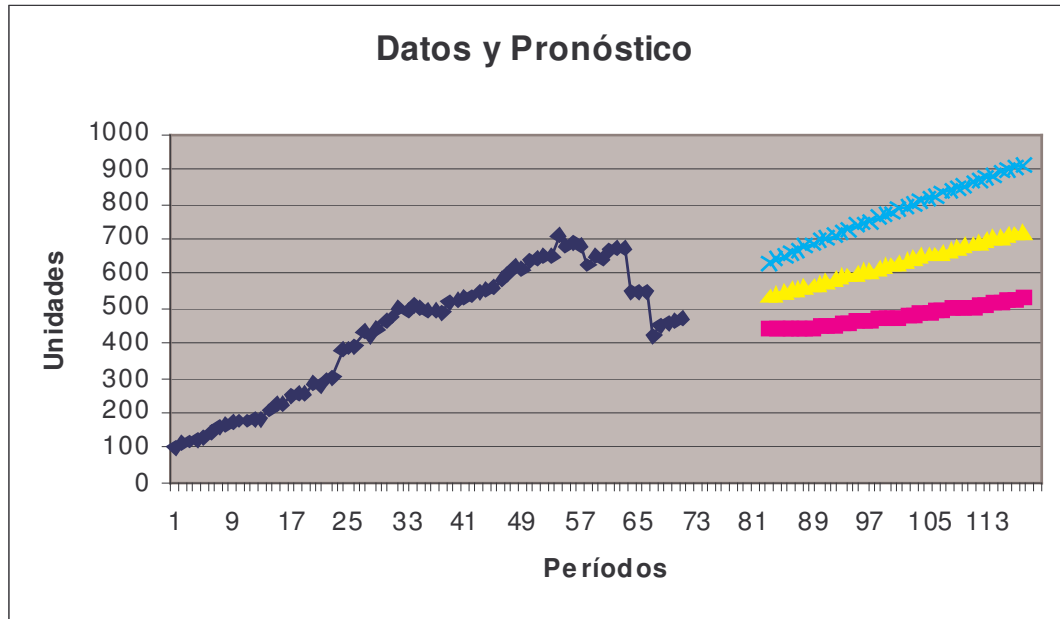


Figura 5.10 Pronóstico generado mediante el algoritmo basado en caminata aleatoria simple

En el este capítulo presentamos dos ejemplos de series de tiempo reales que tienen las características descritas por los modelos de caminata aleatoria mencionados en el capítulo 2. Este hecho representa un paso importante en el objetivo de esta tesis, ya que es una prueba que respalda nuestra hipótesis.

CAPÍTULO 6

HERRAMIENTA DE APOYO PARA ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO

6.1 Introducción

Dada la gran cantidad de series de tiempo a las que se les puede aplicar la metodología de estimación de parámetros para el modelo de *RWDSP* y la robustez que muestran tanto la metodología de estimación como el modelo ante las diferentes series, vemos la necesidad de contar con una herramienta de apoyo que sea automática y que requiera una inversión mínima de tiempo, esfuerzo y dinero para su utilización.

Con estos tres criterios en mente, procedimos a buscar entre las diferentes alternativas para desarrollo de aplicaciones aquella que cumpliera estas características, además de complementar el análisis de las series con herramientas ya existentes.

En el caso de este trabajo de tesis, MS Excel fue el programa que cumplió con las necesidades de la herramienta de apoyo, al contar con opciones para hacer automáticos los procedimientos de análisis mediante la programación de macros en Visual Basic, además de las herramientas que ya proporciona el Excel por si mismo.

Aunado a la opción de automatizar las tareas que se realicen en Excel, también tiene la ventaja de ser un paquete computacional bastante comercial y podemos decir que la mayor parte de las computadoras lo tienen disponible para su uso, sin embargo, en caso de que no fuera así, hasta la versión más económica tiene disponibles las opciones necesarias para el desarrollo de la herramienta.

El diseño de MS Excel está orientado para realizar tareas sencillas, como operaciones aritméticas, hasta análisis estadísticos avanzados o solución de problemas de optimización, gracias a esto, el aprendizaje en el uso de Excel no representa una inversión de tiempo significativa. Es importante aclarar que el usuario por ningún motivo se vera en la necesidad de realizar o aprender programación para el uso de la herramienta, la cual es solo para facilitar los medios de entrada, salida y complemento de análisis de la información proporcionada por el usuario.

A continuación daremos una breve explicación de la programación de macros en Excel, ventajas y desventajas de utilizarlo, explicaremos en términos generales la herramienta de apoyo desarrollada y finalizaremos con las conclusiones del capítulo.

6.2 Programación de Macros en Excel

La presente sección no pretende ser un curso o guía para el lector dentro de la programación de macros, su objetivo es dar una descripción a grandes rasgos de la aplicación utilizada para el desarrollo de la herramienta, el lector que este interesado en

profundizar en la programación de macros en Excel puede referirse a (J. Walckenbach, 2003).

Dentro de la aplicación de MS Excel encontramos un editor de Visual Basic, el cual nos permite crear nuestras propias funciones para utilizarlas dentro de las hojas de cálculo de Excel o crear macros que realicen una tarea específica que cumpla con nuestras necesidades o las de alguien más.

Podemos tener acceso al editor de Visual Basic con la combinación de teclas Alt+F11, del teclado de nuestra computadora. Una vez activa la ventana del editor, podemos visualizar las barras de herramientas en la parte superior, en la parte izquierda de la ventana aparece el navegador de proyectos, donde podemos ver los libros de Excel que tenemos abiertos, así como el contenido de cada libro, en caso que no este visible el navegador de proyectos lo podemos insertar desde el menú Ver-Explorador de Proyectos.

Para poder comenzar a utilizar el editor, es necesario insertar un módulo de programa, esto se hace presionando el botón derecho del ratón sobre el libro donde deseamos insertar la macro, aparece una ventana de dialogo en la que seleccionamos insertar y después seleccionamos módulo.

Una vez hecho esto ya es posible comenzar con la inserción de las instrucciones que componen la macro que necesitamos. La lógica de programación y la sintaxis del lenguaje de Visual Basic no son complicados, si usted ya esta familiarizado con algún lenguaje de programación, fortran o C por ejemplo, no será difícil familiarizarse con Visual Basic.

Como lo mencionamos arriba, la sintaxis de Visual Basic es muy similar a la de C, por ejemplo, podemos hacer declaraciones de diferentes tipos de variables, utilizar ciclos controlados por contador o por centinela, trabajar con arreglos y matrices, utilizar sentencias de selección por casos (switch).

Una vez terminado el desarrollo de la macro puede interactuar con otras macros del mismo libro o de otros libros, así como utilizar comandos de Excel, tales como abrir

libros ya existentes, insertar gráficas, abrir libros nuevos de Excel, guardar cambios, insertar funciones dentro de las celdas de las hojas de cálculo, por mencionar algunos.

6.3 Ventajas y Desventajas de Excel

La ventaja de poder programar macros en Excel se deriva de que cuenta con un editor de Visual Basic dentro de las propias funciones del programa, esto facilita en gran parte la labor de programación y aprendizaje del manejo de macros dentro de Excel.

Excel tiene un grabador de macros automático, con el que se pueden realizar tareas sencillas interactuando con los objetos de Excel y al mismo tiempo ir generando código ejecutable con este grabador de macros, en el caso de que no conozca una instrucción para utilizar un objeto específico de Excel, basta con activar el grabador de macros, realizar la secuencia de pasos con la que utiliza el objeto que desconoce y finalizar la grabación de la macro, con esto Excel automáticamente genera el código que corresponde a cada uno de los pasos que usted realizó.

La sintaxis del editor de Visual Basic es bastante amigable, comparado con otros editores, lo cual facilita la detección de errores, la depuración del código y un fácil seguimiento de la secuencia lógica del código.

La programación de macros en Excel también permite utilizar las funciones y complementos que contiene, como por ejemplo el Solver de Excel.

Las desventajas de utilizar Excel, es que su ambiente gráfico es muy amigable y por lo tanto no es eficiente. La herramienta del Solver consume una cantidad importante de los recursos de memoria para su ejecución, lo cual se hace notorio en equipos que tienen este recurso bastante limitado. Las versiones del Solver no son estándar, ya que cambian con las distintas versiones del Excel, lo cual imposibilita su uso en versiones distintas a la que fue programado. No tiene muchas opciones para trabajar con archivos de texto.

6.4 Descripción de la Herramienta Desarrollada

Como ya lo mencionamos, el producto de este trabajo de tesis es una herramienta de apoyo para el análisis de series de tiempo, la cual está fundamentada en la teoría de los modelos de caminata aleatoria con retardo.

En la presente sección nos dedicaremos a proporcionar los pormenores de la herramienta desarrollada.

La herramienta se encuentra dentro un libro de Excel común, dentro de este libro podemos tener tantas hojas como nos lo permitan los recursos de memoria de la computadora que estemos utilizando y la propia versión de Excel.

Para poder llevar a cabo el análisis es necesario colocar la información de la serie de tiempo que deseamos analizar, a partir de la primera columna, en cualquiera de las hojas del libro donde estemos trabajando. El vector debe cumplir lo siguiente:

- En la segunda fila debemos colocar el nombre de la serie que estamos analizando.
- En la fila 6, debemos poner la cantidad de datos que componen la serie.
- De la fila 7 en adelante, colocamos los datos correspondientes a la serie.

La razón por la que debe cumplir con lo anterior es debido a que la macro está diseñada para comenzar en la primera columna y detener su ejecución hasta encontrar una columna vacía, lo que significaría que no hay más series de tiempo para analizar.

El nombre de la serie de tiempo es necesario porque la herramienta crea un nuevo archivo con este nombre para poder diferenciarlo de las demás series, en donde guarda los resultados obtenidos del análisis para cada una de las series, el archivo es almacenado en un directorio predefinido.

En resumen, la herramienta generará un archivo por cada vector columna que sea contiguo, esto es, pueden existir más columnas con información dentro de la misma hoja,

pero solo se realizará el análisis a partir de la primera columna hasta que se encuentre con la primer columna vacía.

En caso de que la primer columna de la hoja activa sea vacía la macro finaliza sin realizar ningún cálculo. De no cumplirse con los tres puntos mencionados arriba, el resultado del análisis no será el correcto. De este modo podemos realizar el análisis para tantas series como columnas tenga el Excel.

A continuación explicaremos detalladamente los pasos que sigue la macro al realizar el análisis de la serie de tiempo.

En el libro que contiene la macro, pegamos la información correspondiente a la(s) serie(s) que deseamos analizar, nombre de la serie en la columna 1 fila 2, cantidad total de datos que contiene la serie en la columna 1 fila 6, vector columna que comienza en la columna 1 fila 7, en el menú herramientas seleccionamos la opción macro, después seleccionamos la macro que realiza el análisis y la ejecutamos.

Como primer paso la macro activa el libro de trabajo, después le pregunta al usuario cuantos valores de T desea analizar, la macro inserta una hoja para cada valor de T , revisa que la celda que debe contener el nombre de la serie no sea vacío, si la celda es vacía termina su ejecución, en caso contrario crea un nuevo libro con el nombre de la serie, a continuación procede a realizar la copia del vector de datos en el libro nuevo, inserta en el libro nuevo los datos más relevantes del análisis, procede a calcular el vector de diferencias, asigna una etiqueta a cada elemento del vector de diferencias, de acuerdo a lo siguiente, si el elemento es mayor o igual a cero le asigna un signo positivo, si es menor que cero le asigna uno negativo, con esto tenemos el vector de etiquetas, realiza el conteo de los coeficientes ri 's, y los almacena dentro de la hoja en el libro nuevo, lleva a cabo la definición de variables, restricciones y función objetivo, además realiza el cálculo de la solución exacta en base a los coeficientes ri 's y manda llamar al Solver de Excel para solucionar el problema de optimización planteado.

Repite estos pasos para cada valor de T hasta completar la cantidad de valores proporcionada por el usuario, una vez que finaliza determina que valor de T obtuvo la

función objetivo más baja, y lo reporta como valor mínimo de función objetivo. Después de terminar con esto, revisa si existe otra serie de tiempo para analizar, si la hay repite el procedimiento, si no finaliza.

De esta forma uno puede realizar el análisis de varias series de tiempo a la vez y poder consultar los reportes de cada una por separado e identificarlos fácilmente, además otro aspecto importante es que se logró una herramienta que cumple con las tres necesidades que mencionamos al inicio del capítulo minimizar tiempo, costo y esfuerzo.

En el siguiente capítulo hablamos sobre algunas líneas de investigación que se desprenden del presente trabajo de tesis.

CAPÍTULO 7

PERSPECTIVAS: PRONÓSTICO A CORTO PLAZO Y ESTIMACIÓN DE DEPENDENCIA ESTADÍSTICA

7.1 Introducción

El método desarrollado en esta tesis para estimar los parámetros de transición en el modelo *RWDS*P puede ser muy útil en otros problemas estocásticos. Como se demostrará más adelante, el problema de maximización de la verosimilitud presentado en el capítulo 3, tiene solución analítica si la secuencia observada incluye al menos una vez a cada uno de los estados del sistema. Resulta que esta solución puede calcularse de manera sencilla a través de la transformación logarítmica propuesta en la ecuación (3.10). Este resultado puede entonces aprovecharse para otros problemas que involucran dependencia estadística.

Un aspecto que hace especialmente relevantes a las perspectivas que se desprenden de este trabajo de tesis, es que los métodos propuestos no dependen de los supuestos usuales de las herramientas de análisis estadístico de datos. En particular:

i) No se asume ninguna distribución de probabilidad. Al discretizar los datos, se estiman probabilidades de transición. Estas representan una aproximación de la estructura continua de probabilidad, sobre la cual no se asume nada.

ii) El análisis no está limitado a las dependencias lineales. Al estimar probabilidades de transición (y no otras medidas, como coeficientes de correlación), se toman implícitamente en cuenta tanto las dependencias lineales como las no lineales.

Estas ventajas se ven limitadas, sin embargo, por la necesidad de discretización de los datos. Una línea interesante de investigación que se desprende de esta tesis, es el sometimiento a prueba de los métodos introducidos en este capítulo.

Se discuten a continuación dos líneas de trabajo pertinentes:

- 1) Pronóstico a corto plazo mediante modelos discretos de máxima verosimilitud.
- 2) Estimadores del grado de dependencia estadística en series de tiempo.

7.2 Pronóstico a Corto Plazo con Modelos Discretos de Máxima Verosimilitud

Primero encontraremos la solución exacta para el problema de maximización de verosimilitud presentado en el capítulo 3 (a este respecto, se agradece al Dr. Igor Litvinchev por las útiles conversaciones sostenidas con él). Comencemos recapitulando las probabilidades de transición para el modelo *RWDSP*:

$$\begin{aligned}
 P(S_n | S_{n-T}) &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon S_n), S_{n-T} = +1 \\
 P(S_n | S_{n-T}) &= \frac{1}{2}(1 - \varepsilon' S_n), S_{n-T} = -1
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Mediante la ecuación (7.1) es posible expresar la probabilidad de ocurrencia de cualquier secuencia de observaciones. Por ejemplo, digamos que se han observado los pasos

+	+	-	+	-	-	-	+	-	+
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

y se asume un modelo con $T = 4$. De este modo, los primeros 4 pasos representan condiciones iniciales. La secuencia observada dadas esas condiciones iniciales es: -, -, -, +, -, +. Usando (7.1) podemos escribir la probabilidad de ocurrencia de dicha secuencia como

$$P(-, -, -, +, -, +) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \frac{1}{2}(1 - \varepsilon') \dots \quad (7.2)$$

En general, la probabilidad de ocurrencia para cualquier secuencia de estados es:

$$P(\hat{S}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-T} (1 + \varepsilon)^{r_1} (1 - \varepsilon)^{r_2} (1 + \varepsilon')^{r_3} (1 - \varepsilon')^{r_4} \quad (7.3)$$

donde n es la longitud total de la secuencia, T es el retardo y las r 's son el número de veces que se observa cada una de las 4 transiciones posibles (lo cual implica que $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = n - T$). El problema de máxima verosimilitud es entonces encontrar T , ε y ε' tales que $P(\hat{S})$ sea máxima. Este problema es equivalente a maximizar el logaritmo de $P(\hat{S})$, una transformación usual en los problemas de máxima verosimilitud (J. Freund et al., 2000). El problema de optimización resultante es:

$$\text{máx} \ln P(\hat{S}) = \text{máx} \left((n - T) \ln(1/2) + r_1 \ln(1 + \varepsilon) + r_2 \ln(1 - \varepsilon) + r_3 \ln(1 + \varepsilon') + r_4 \ln(1 - \varepsilon') \right) \quad (7.4)$$

Para T fija, este problema se resuelve simplemente derivando con respecto a ε y ε' , con lo que se reduce a un problema algebraico cuya solución viene dada por

$$\varepsilon = \frac{r1-r2}{r1+r2}, \varepsilon' = \frac{r3-r4}{r3+r4} \quad (7.5)$$

Nótese que si T es considerada variable de decisión, el sistema algebraico resultante involucra ecuaciones trascendentales, para el cual encontrar una solución cerrada es mucho más difícil. Por otra parte, la solución (7.5) existe si y sólo si $r1+r2 \neq 0$ y $r3+r4 \neq 0$. El que esta condición sea satisfecha depende de la longitud de la secuencia observada. Ante pocas observaciones la condición puede violarse. En un caso así se usa la metodología presentada en el capítulo 3.

Este análisis no está limitado a secuencias binarias ni a un solo retardo temporal. Consideremos por ejemplo, un sistema con 4 estados y 2 retardos:

$$S = \{S1, S2, S3, S4\}$$

$$P(S_n = S1 | S_{n-T1}, S_{n-T2}) = \begin{matrix} \beta1, S_{n-T1} = S1, S_{n-T2} = S1 \\ \beta2, S_{n-T1} = S1, S_{n-T2} = S2 \\ \vdots \\ \beta16, S_{n-T1} = S4, S_{n-T2} = S4 \end{matrix} \quad (7.6)$$

Los parámetros β 's se encuentran siguiendo ya sea el método presentado en el capítulo 3 o resolviendo un sistema algebraico lineal de 48 ecuaciones.

La propuesta para pronóstico a corto plazo que se desprende de esta tesis es la siguiente: dada una serie de tiempo y_t , discretizarla y construir transiciones de probabilidad del tipo dado por las ecuaciones (7.1) y (7.6). Entonces estimar los parámetros de persistencia (considerando dados los parámetros de retardo temporal). Una vez encontrados estos parámetros, se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de cualquier secuencia futura. Se puede además, buscar la secuencia con probabilidad de ocurrencia máxima mediante un análisis combinatorio.

7.3 Estimadores de Dependencia Estadística en Series de Tiempo

Si se discretiza una serie de tiempo de la manera discutida en la sección anterior, y se estiman sus parámetros de persistencia, con ellos puede definirse una medida de dependencia estadística, como sigue:

$$m = 2 \cdot \left| \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k}{k} - \frac{1}{2} \right| \quad (7.7)$$

donde es evidente que $0 \leq m \leq 1$. Un valor de $m = 0$ indica que dado un conjunto de estados pasados, cualquier secuencia puede observarse en el futuro con igual probabilidad. Un valor de $m = 1$ implica que para cada secuencia de estados pasados, existe una única secuencia futura. Esta medida abarca tanto dependencias lineales como no lineales, lo cual contrasta con las estimaciones basadas en coeficientes de correlación, que detectan sólo dependencias lineales. Se pueden proponer un buen número de aplicaciones útiles a la medida (7.7). Por ejemplo para detección de caos: si los datos en una serie de tiempo se encuentran estadísticamente descorrelacionados pero indican $m > 0$, ello sería evidencia de dependencias puramente no lineales en los datos. Siguiendo los mismos argumentos, la medida (7.7) podría utilizarse para propósitos de caracterización e identificación de modelos de series de tiempo.

Creemos que la medida (7.7) abre una línea de investigación interesante. Un primer paso es construir criterios para el grado de significancia de m sobre muestras finitas.

En resumen, el trabajo realizado en esta tesis proporciona, además de los casos ya mencionados en las secciones anteriores, un amplio campo de opciones para profundizar en el estudio de las características estadísticas que puede abarcar al variar la cantidad de estados y la cantidad de periodos de retardo. Además también es posible profundizar en el estudio de un conjunto más amplio de series de tiempo reales y analizar la correspondencia entre los resultados de métodos estadísticos tradicionales, tales como los mencionados en el capítulo 5, y la metodología propuesta en esta tesis.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y APORTACIONES

8.1 Conclusiones

El desarrollo del presente trabajo de tesis dio como resultado la comprobación de la hipótesis inicial, que consiste en que los procesos de caminata aleatoria con persistencia retardada entre estados comparten propiedades estadísticas con series de tiempo reales de interés.

Para esto, desarrollamos una metodología para la estimación de los parámetros del modelo de caminata aleatoria con retardo, basada en el criterio de máxima verosimilitud. A pesar de que el problema de optimización resultante tiene solución analítica, optamos por el

planteamiento del problema de optimización asociado al criterio de máxima verosimilitud y su solución mediante el Solver de Excel.

Lo anterior debido a que la solución analítica del problema de optimización pudiera no estar definida cuando la serie de tiempo analizada no ha presentado todos los estados posibles de transición, como se mencionó en el capítulo 7.

Como conclusión del presente trabajo de tesis, la aplicación de la metodología de estimación de parámetros a series de tiempo reales, proporcionó resultados que apoyan nuestra hipótesis.

Además con los resultados obtenidos en el capítulo 4, concluimos que la estimación de los parámetros del modelo *RWDSP*, en la mayor parte de los casos, se ve afectada en forma adversa cuando el ciclo de persistencia (T) es igual a 1.

Gracias a la definición de las probabilidades de transición, la aplicación del modelo es directamente extensible al pronóstico de procesos con más de dos estados y múltiples periodos de retardo.

Adicionalmente el modelo también se puede aplicar para pronóstico a corto plazo, como se mencionó en el capítulo 7, ya que se estiman probabilidades de transición las cuales pueden ser utilizadas para simular la serie de tiempo que se está analizando y pronosticar valores futuros en base a estas probabilidades de transición.

8.2 Aportaciones

La principal aportación del presente trabajo de tesis fue la aplicación del modelo de *RWDSP* para pronóstico de series de tiempo, abriendo así, un amplio campo de estudio para este modelo, al comprobar la existencia de que existen series de tiempo reales que comparten propiedades estadísticas con este proceso estocástico.

El beneficio de este trabajo se traduce en una alternativa de análisis para series de tiempo, que por no tener supuestos sobre la distribución de probabilidad de la serie analizada, facilita su aplicación y favorece su robustez ante los diversos casos que pudieran presentarse.

El desarrollo de una herramienta automatizada, para la estimación de parámetros del proceso, permite una fácil aplicación de la metodología de análisis a cualquier serie de tiempo.

De las aportaciones de este trabajo podemos resaltar los siguientes puntos:

- Proporciona un enfoque diferente para el análisis de series de tiempo, mediante la definición de estados, permite una amplia gama de posibilidades de estudio para la misma serie de tiempo.
- Va más allá de la detección de dependencias lineales.

La aplicación del modelo *RWDS*P proporciona un punto de partida para el desarrollo de nuevas técnicas de estudio de series de tiempo, así como para la caracterización más detallada de las propiedades estadísticas del modelo, mediante el uso de datos simulados.

Los resultados del presente trabajo han sido presentados en:

- Aristóteles Alberto Olivares Hernández. MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO. Seminario de Investigación del Posgrado en Ingeniería de Sistemas. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, Abril 2005.
- Aristóteles Alberto Olivares Hernández. MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO. XV Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico, Morelia, Michoacán, Abril 2005.
- Aristóteles Alberto Olivares Hernández. MODELOS DE CAMINATA ALEATORIA PARA PREDICCIÓN A MEDIANO-LARGO PLAZO. XXXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México DF, Octubre 2005.

REFERENCIAS

BIBLIOGRÁFICAS

A. Berrones y H. Larralde, “Simple model of a random walk with arbitrarily long memory”, *Physical Review E*, Vol.63, No. 3, ID.031109, 2001.

A. Lo, H. Mamaysky y J. Wang, “Foundations of Technical Analysis: Computational algorithms, statistical inference, and empirical implementation”, *Journal of Finance*, Vol.55, No.4, 1705-1765, 2000.

A. Olivares y A. Berrones, “Algoritmo para la Estimación de Parámetros de Paso en Caminatas Aleatorias con Retardo”, *Rep. Técnico PISIS*, 2006.

A. Smith, “The taming of the skew”, *Quantitative Finance*, Vol.1, 298-300, 2001.

A. Tsonis, F. Heller, H. Takayasu, K. Marumo y T. Shimizu, “A characteristic time scale in dollar yen exchange rates”, *Physica A*, Vol.291, 574-582, 2001.

D. Montgomery, “Design and Análisis of Experiments”, *John Wiley & Sons, New York*, cuarta edición, 1997.

E. Fama, “Foundations of Finance”, *Basic Books, New York*, 1976.

F. Hillier y G. Lieberman, “Introducción a la Investigación de Operaciones”, *Mc Graw Hill*, sexta edición, 1997.

G. Box, G. Jenkins y G. Reinsel, “Time Series Analysis”, *Prentice Hall*, tercera edición, 1994.

G. Weiss, “Aspects and Applications of the Random Walk”, *North-Holland*, 1994.

H. Takayasu, “Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics”, *Springer-Verlag, Tokyo*, 2002.

H. Takayasu, M. Takayasu, M. Okazaki, K. Marumo y T. Shimizu, “Fractal Properties in Economics. In Paradigms of Complexity, M. M. Novak”, *World Scientific*, 243-258, 2000.

J. Freund, I. Miller y M. Miller, “Estadística Matemática con Aplicaciones”, *Prentice Hall*, sexta edición, 2000.

J. Walkenbach, “EXCEL 2003 Power Programming with VBA”, *Wiley Publishing, Inc., Indianapolis, Indiana*, 2003.

M. Padilla, “Aplicación del modelo Bass y la Curva de Gompertz para el pronóstico de las ventas de autos limpios”, *Tesis profesional. México: ITAM*, 2003

P. Je_eries, M. Hart, P. Hui y N. Johnson, “From market games to real-world markets”, *European Physical Journal B*, Vol.20, 493-501, 2001.

R. Woodman, “Modelo Estadístico de Pronóstico de las Precipitaciones en la Costa Norte del Perú”, *Instituto Geofísico del Perú*, 1999.

S. Makridakis, S. Wheelwright y R. Hyndman, “Forecasting: Methods and Applications”, *Wiley*, tercera edición, 1998.

T. Ohira, N. Sazuka, K. Marumo, T. Shimizu, M. Takayazu y H. Takayazu, “Predictability of currency market exchange”, *Physica A*, Vol.308, No. 1-4, 368-374, 2002.

T. Ohira y T. Yamane, “Delayed Stochastic Systems” *Physical Review E*, Vol.61, 1247-1257, 2000.

T. Ohira y Y. Sato, “Resonance with noise and delay”, *Physical Review Letters*, Vol.82, 2811-2815, 1999.

Y. Zhang, “Toward a theory of marginally efficient markets”, *Physica A*, Vol.269, 30-44, 1999.

Z. Chen, P. Hu, P. Carpena, Bernaola-P. Galvan, E. Stanley y P. Ivanov, “Effect of Nonlinear Filtres on Detrended Fluctuation Analysis”, *Physical Review E*, Vol.71, ID.011104, 2005.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura No.	Descripción	Página
3.1	La gráfica representa los valores de la función objetivo del problema (3.13) obtenidos al resolver el problema para distintos valores de T	22
4.1	Gráfica de residuos	27
4.2	Prueba de normalidad. Resultado de la prueba de Anderson-Darling	28
4.3	Prueba de igualdad de varianza de respuesta contra factores	29
4.4	Gráfica de residuos del experimento replanteado	31
4.5	Gráfica de interacciones entre el factor 1 y T	33
4.6	Gráfica de interacciones entre el factor 1 y factor 2	33
4.7	Gráfica de interacciones entre el factor 2 y T	34
4.8	Gráfica de interacciones entre el P y T	34
4.9	Gráfica de interacciones entre T y P	35
4.10	Gráfica de interacciones entre el factor 1 y P	35
4.11	Gráfica de interacciones entre el factor 2 y P	36
4.12	Gráfica de Efectos principales de los factores P y T	36
5.1	Valores en el tiempo del valor de la acción de Dow-Jones	41
5.2	Tendencias promedio anuales de la acción de Dow-Jones, calculadas de acuerdo con la Ec. (5.1)	42
5.3	Diferencias entre los pasos de la figura 5.2	42
5.4	Espectro de Fourier y función de autocorrelación de la secuencia de pasos de la figura 5.3. Las curvas indican que los pasos son aproximadamente independientes	43

5.5	Valores de la Función Objetivo que resultan al resolver el problema (3.13) para distintos valores de T de la acción de Dow-Jones	44
5.6	Función de autocorrelación de los pasos de la serie de tiempo de telecomunicaciones	46
5.7	Espectro de Fourier de los pasos de la serie de tiempo de telecomunicaciones	47
5.8	Espectro de Fourier de la suma de los pasos de la serie de tiempo de telecomunicaciones. El espectro es consistente con una caminata aleatoria simple para frecuencias menores a 0.1	47
5.9	Valores de la Función Objetivo que resultan al resolver el problema (3.13) para distintos valores de T de la serie de Telecomunicaciones	48
5.10	Pronóstico generado mediante el algoritmo basado en caminata aleatoria simple	49

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla No.	Descripción	Página
4.1	Análisis de correlación entre los factores del experimento	28
4.2	Análisis de varianza del diseño de experimentos	30
4.3	Análisis de varianza para el experimento replanteado	32

APÉNDICE A

Los datos mostrados en las tablas siguientes, corresponden a las series de tiempo que se utilizaron para llevar a cabo el experimento.

El encabezado de columna corresponde al nombre de la serie, enseguida se proporciona la semilla con la que fue generada la simulación del proceso de *RWDS*P para el proceso particular, esto mediante el programa codificado en fortran. A continuación se muestran los parámetros de memoria con los que fue generado el proceso y su equivalencia con los respectivos valores de ε y ε' , así como el valor de T que le corresponde.

	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	Proceso 4	Proceso 5	Proceso 6	Proceso 7	Proceso 8	Proceso 9	Proceso 10	Proceso 11	Proceso 12	Proceso 13
Semilla	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13
a	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.5	0.5	0.5	0.5
b	0.75	0.75	0.75	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.75	0.75	0.75	0.5
E	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0
E	-0.5	-0.5	-0.5	0	0	0	0.5	0.5	0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0
T	1	4	6	1	4	6	1	4	6	1	4	6	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
2	0	-2	0	0	2	0	0	-2	0	-2	-2	2	0
3	1	-3	1	1	3	-1	-1	-1	-3	-1	-1	3	1
4	2	-4	2	2	4	0	-2	0	-4	-2	0	2	2
5	3	-3	3	1	3	-1	-3	-1	-5	-3	1	1	1
6	2	-2	4	0	4	0	-4	-2	-6	-2	0	2	0
7	1	-3	3	-1	3	-1	-3	-1	-7	-3	1	1	1
8	2	-2	4	-2	4	-2	-2	-2	-6	-4	0	0	2
9	3	-3	5	-1	5	-1	-1	-3	-7	-3	1	-1	1
10	4	-2	6	0	6	0	0	-4	-8	-2	0	0	0
11	5	-1	7	1	5	-1	1	-5	-9	-3	1	1	-1
12	6	0	8	2	4	-2	2	-4	-10	-2	0	2	-2
13	5	1	9	1	5	-1	3	-5	-11	-1	-1	3	-1
14	6	2	10	2	6	-2	4	-4	-10	0	-2	4	-2
15	7	3	11	3	7	-1	5	-5	-11	-1	-3	3	-3
16	8	4	12	2	6	0	6	-4	-10	0	-2	4	-2
17	9	5	11	3	7	1	7	-5	-9	1	-1	3	-3
18	10	6	12	4	8	2	8	-4	-10	0	0	4	-4
19	11	7	13	3	7	3	9	-5	-9	1	1	3	-3
20	12	8	12	4	6	4	10	-4	-8	2	0	4	-4
21	13	7	13	3	7	5	11	-5	-9	3	1	3	-5
22	14	8	12	2	8	6	10	-4	-10	2	2	4	-6
23	15	7	13	3	7	7	9	-5	-9	3	1	3	-7
24	14	8	12	4	8	8	8	-4	-10	2	2	4	-6
25	15	9	13	3	9	9	7	-5	-9	3	1	5	-5
26	16	8	14	2	10	10	6	-6	-10	4	0	4	-6
27	17	9	15	3	11	9	5	-7	-11	3	1	3	-7
28	16	10	14	4	12	8	4	-6	-10	4	0	4	-8
29	17	11	15	5	13	9	3	-7	-9	5	1	5	-9
30	18	10	16	6	14	10	2	-6	-10	6	2	6	-10
31	19	11	17	7	15	9	1	-7	-9	5	3	7	-9
32	20	12	16	8	16	8	0	-8	-10	6	2	8	-10
33	21	13	17	9	17	7	-1	-7	-11	5	3	9	-9
34	22	14	16	10	18	8	0	-6	-12	6	2	10	-8
35	23	13	17	11	19	9	-1	-7	-11	5	3	11	-9
36	24	14	18	10	20	10	-2	-8	-12	6	4	10	-10
37	25	13	17	11	21	11	-3	-7	-11	5	3	11	-11
38	24	14	18	12	22	12	-4	-6	-12	6	2	10	-10
39	25	15	19	11	23	13	-3	-5	-11	5	3	11	-9
40	26	16	20	10	24	14	-2	-4	-12	6	4	12	-10
41	27	17	19	9	23	15	-1	-3	-13	5	5	13	-9
42	26	18	20	8	24	16	0	-4	-14	6	4	14	-8
43	25	17	21	7	25	17	1	-3	-13	5	5	13	-9
44	26	18	22	8	24	18	2	-2	-14	6	6	14	-10
45	27	19	23	9	23	19	3	-1	-13	5	5	13	-11
46	28	20	24	10	24	20	4	-2	-14	6	4	14	-12
47	29	21	23	11	23	19	3	-1	-15	5	5	15	-13
48	30	22	24	12	22	20	2	-2	-16	6	6	16	-14
49	31	21	23	13	23	21	1	-1	-17	7	7	17	-15
50	32	22	24	14	24	22	2	-2	-18	6	8	16	-16
51	33	23	25	15	25	21	3	-3	-17	7	7	17	-17
52	32	24	26	16	24	22	2	-4	-18	8	6	16	-18
53	33	25	27	17	23	23	1	-3	-19	9	7	17	-17
54	34	26	28	18	24	24	0	-4	-20	10	6	18	-16
55	35	27	27	19	25	23	1	-5	-21	9	7	17	-17
56	36	28	26	18	26	24	2	-4	-22	10	6	18	-16
57	35	29	25	17	27	25	3	-3	-21	9	7	17	-17
58	36	30	26	18	28	26	4	-4	-22	10	8	16	-18
59	37	31	27	19	27	25	3	-5	-23	9	9	15	-17
60	38	30	28	20	28	26	2	-4	-24	8	10	14	-16
61	39	31	29	19	29	25	1	-5	-25	9	11	15	-15
62	40	32	28	20	30	24	0	-6	-26	10	12	16	-16
63	41	33	29	21	29	25	-1	-5	-27	11	13	17	-15
64	42	34	30	22	30	24	-2	-6	-28	10	14	16	-14
65	41	35	31	23	31	23	-1	-7	-29	11	15	17	-15
66	42	34	30	22	32	24	-2	-8	-28	10	16	18	-16
67	43	35	29	23	33	25	-3	-9	-29	11	17	17	-17
68	44	34	30	24	34	26	-4	-10	-30	10	18	18	-18
69	45	35	31	25	35	27	-5	-11	-31	11	17	19	-19
70	46	34	32	26	36	26	-6	-12	-30	12	16	18	-20

71	47	35	33	25	35	27	-7	-13	-29	11	17	19	-21
72	48	36	34	26	36	28	-6	-14	-28	12	16	18	-20
73	47	37	35	25	37	27	-5	-15	-27	11	17	17	-19
74	48	38	36	26	38	28	-4	-16	-28	12	18	18	-20
75	49	37	37	27	37	29	-3	-15	-29	13	17	17	-19
76	50	38	36	28	36	28	-2	-14	-28	14	18	18	-20
77	49	39	37	29	37	29	-1	-15	-27	15	19	17	-21
78	50	40	38	30	38	30	0	-16	-26	14	20	18	-20
79	51	41	39	29	37	29	-1	-15	-25	15	21	19	-19
80	52	42	40	30	36	30	-2	-14	-26	14	22	20	-20
81	51	41	39	31	37	31	-3	-15	-27	13	23	21	-21
82	52	40	40	30	38	32	-4	-16	-28	14	22	20	-22
83	51	41	41	29	37	31	-5	-15	-27	15	23	19	-23
84	50	42	40	30	36	30	-4	-14	-26	14	22	18	-24
85	49	43	41	31	37	31	-3	-15	-25	15	23	19	-23
86	50	44	42	32	38	30	-2	-16	-26	16	22	20	-24
87	51	45	41	33	37	29	-3	-15	-25	17	21	21	-25
88	52	44	42	34	36	30	-4	-16	-24	18	22	20	-26
89	51	45	43	33	35	31	-5	-17	-25	19	21	19	-25
90	50	46	42	34	36	30	-6	-18	-24	20	22	20	-24
91	49	47	43	35	37	29	-7	-17	-23	21	23	21	-25
92	48	48	44	34	36	30	-8	-16	-22	22	24	20	-26
93	47	49	45	35	37	29	-9	-15	-21	23	25	21	-27
94	46	50	46	36	36	28	-10	-16	-20	24	24	22	-26
95	47	51	45	37	37	29	-11	-17	-21	23	25	23	-25
96	48	52	44	38	38	28	-12	-16	-20	24	26	22	-26
97	47	53	43	39	37	27	-13	-15	-19	23	27	21	-27
98	48	54	44	40	38	28	-14	-14	-18	24	28	22	-26
99	49	55	43	41	39	29	-15	-13	-17	23	29	23	-25
100	50	54	44	42	40	30	-16	-12	-16	22	30	24	-26
101	51	53	45	43	39	31	-17	-11	-17	21	31	25	-25
102	50	54	46	44	40	32	-18	-10	-18	22	30	26	-26
103	51	53	47	45	39	31	-19	-9	-17	23	29	27	-25
104	52	54	48	46	40	30	-20	-8	-18	22	30	26	-26
105	51	55	47	47	39	31	-19	-7	-17	23	31	25	-27
106	52	56	48	46	40	30	-18	-8	-16	24	32	24	-26
107	53	57	49	45	41	31	-19	-7	-17	25	31	25	-25
108	54	58	48	46	40	32	-20	-8	-18	24	30	26	-26
109	55	57	49	45	41	31	-21	-7	-17	25	29	25	-25
110	56	56	50	44	42	30	-22	-8	-18	26	30	24	-24
111	57	57	51	43	43	31	-23	-9	-17	27	29	25	-23
112	56	58	50	44	44	30	-24	-8	-16	28	30	24	-22
113	57	59	49	45	45	31	-25	-7	-17	29	31	23	-23
114	58	60	50	46	44	32	-26	-6	-18	28	30	24	-22
115	59	61	51	47	43	31	-25	-7	-17	29	31	25	-21
116	60	60	52	48	44	32	-24	-6	-18	30	30	26	-22
117	61	61	53	49	45	33	-23	-7	-17	29	31	27	-21
118	62	62	54	50	44	32	-22	-6	-16	28	30	26	-22
119	63	63	55	51	45	33	-21	-7	-15	29	31	25	-23
120	64	62	56	52	46	34	-20	-6	-14	30	32	24	-24
121	63	63	57	51	47	35	-19	-5	-15	29	33	23	-25
122	62	64	58	52	48	36	-18	-4	-16	30	32	24	-24
123	61	63	59	53	49	35	-17	-3	-15	29	33	25	-25
124	62	62	60	54	50	34	-16	-2	-14	28	34	26	-26
125	61	61	61	55	49	35	-15	-3	-13	27	33	27	-25
126	62	62	62	56	50	34	-16	-2	-12	28	32	26	-24
127	63	61	63	57	49	35	-15	-1	-11	27	33	27	-23
128	64	62	64	58	50	36	-16	0	-12	26	34	26	-24
129	65	61	63	59	51	35	-15	-1	-11	27	35	27	-23
130	64	62	64	60	52	36	-14	0	-10	26	36	26	-24
131	65	63	65	61	53	37	-13	-1	-11	27	35	25	-25
132	64	64	66	62	52	38	-12	0	-10	28	36	26	-26
133	63	63	67	63	53	39	-13	-1	-9	27	37	27	-27
134	64	64	68	64	52	40	-14	0	-10	28	36	28	-28
135	65	63	69	65	53	39	-13	-1	-9	29	35	27	-29
136	66	64	70	66	54	40	-12	-2	-10	30	36	28	-30
137	67	65	71	65	53	41	-11	-3	-11	29	35	29	-31
138	66	66	72	66	54	40	-12	-2	-10	30	34	30	-32
139	67	67	73	67	53	41	-13	-3	-9	29	35	31	-31
140	66	68	74	68	54	42	-14	-4	-10	28	36	32	-32

141	65	69	75	67	55	41	-15	-3	-9	27	35	33	-33
142	64	70	76	66	56	42	-14	-2	-8	26	34	34	-32
143	65	71	77	65	55	43	-15	-3	-7	27	35	33	-33
144	64	72	76	64	56	44	-16	-4	-8	26	36	32	-32
145	65	73	77	65	57	43	-17	-3	-7	25	37	33	-33
146	66	74	78	66	58	44	-18	-2	-8	24	38	32	-32
147	67	73	77	67	59	43	-19	-1	-7	25	39	33	-33
148	66	74	78	68	60	44	-20	-2	-6	26	38	32	-32
149	67	75	79	67	61	45	-21	-1	-5	25	39	33	-31
150	68	74	80	66	62	46	-22	0	-4	26	38	34	-32
151	69	73	79	67	61	47	-23	1	-5	27	39	35	-31
152	70	74	80	68	62	46	-24	0	-4	26	40	36	-32
153	69	75	81	69	63	47	-23	1	-3	27	39	35	-33
154	70	74	82	70	64	48	-24	2	-2	26	40	34	-32
155	71	75	83	71	63	49	-23	1	-1	25	39	35	-31
156	70	76	84	72	64	50	-22	0	-2	24	40	34	-30
157	71	75	83	73	63	51	-21	-1	-3	25	41	33	-31
158	70	76	82	74	64	52	-20	0	-2	26	40	32	-32
159	69	75	81	75	63	51	-19	-1	-3	25	41	33	-31
160	68	76	82	74	64	52	-18	-2	-2	24	40	34	-32
161	69	75	83	73	63	53	-19	-3	-1	25	41	35	-33
162	68	76	82	74	62	52	-20	-2	0	24	40	36	-32
163	69	77	83	73	63	53	-21	-3	1	23	39	37	-33
164	70	78	82	72	64	54	-22	-4	2	22	40	38	-34
165	71	79	81	71	63	53	-23	-3	1	23	39	39	-33
166	70	80	80	72	62	54	-24	-2	2	24	40	38	-32
167	71	81	81	73	61	55	-25	-3	3	23	41	39	-31
168	72	82	82	72	62	56	-26	-4	4	22	42	38	-30
169	71	83	83	71	61	57	-27	-5	3	23	41	39	-29
170	70	84	82	70	62	56	-28	-4	2	22	42	40	-30
171	71	85	83	71	61	55	-29	-5	3	23	43	39	-31
172	72	86	84	72	62	56	-28	-6	4	24	44	40	-32
173	73	85	85	73	63	55	-27	-7	5	25	45	39	-31
174	74	86	86	74	64	56	-26	-6	6	26	46	40	-30
175	75	87	87	73	63	57	-25	-7	5	25	47	41	-29
176	74	86	86	74	64	56	-24	-8	4	26	46	40	-28
177	75	87	87	75	65	55	-23	-9	5	25	47	41	-29
178	74	88	88	76	66	56	-22	-8	6	24	46	40	-30
179	73	89	89	77	67	55	-21	-9	7	25	47	41	-29
180	74	88	90	78	68	56	-22	-10	8	26	48	42	-30
181	73	89	91	79	69	57	-23	-11	7	27	49	43	-29
182	72	90	92	80	70	58	-24	-12	8	26	50	44	-30
183	73	91	91	79	71	59	-25	-13	9	27	49	43	-31
184	74	92	92	80	70	60	-24	-14	10	26	48	44	-32
185	73	93	91	81	69	59	-23	-13	9	27	47	43	-31
186	74	94	92	82	70	60	-22	-14	10	26	46	42	-30
187	75	95	93	83	71	59	-21	-15	11	27	45	41	-29
188	74	96	94	84	72	60	-20	-16	10	26	46	42	-30
189	75	97	95	85	71	59	-19	-15	9	27	47	43	-29
190	76	98	96	86	72	60	-18	-14	8	26	48	42	-28
191	75	99	97	85	71	61	-17	-15	7	27	49	41	-29
192	76	100	98	84	72	62	-16	-16	8	26	48	42	-30
193	75	101	97	83	73	63	-15	-15	9	27	49	43	-31
194	74	100	98	84	74	64	-16	-16	8	28	50	44	-32
195	75	101	97	83	75	63	-17	-17	7	29	49	45	-31
196	76	102	98	82	76	64	-16	-18	8	30	48	46	-32
197	77	103	99	83	75	65	-17	-17	7	31	49	47	-31
198	78	102	98	84	76	66	-18	-18	8	32	48	48	-32
199	79	103	99	83	77	67	-17	-17	9	31	49	47	-33
200	78	104	100	84	78	68	-16	-18	8	32	48	48	-32

71	-7	-1	-33	-39	-29	-3	3	-1	-15	-21	1	-37	-33	-33
72	-6	0	-32	-40	-30	-4	4	0	-14	-22	0	-38	-34	-32
73	-7	1	-33	-39	-29	-3	3	1	-15	-23	-1	-39	-33	-31
74	-8	0	-32	-40	-28	-2	2	2	-16	-24	-2	-38	-34	-32
75	-7	1	-33	-41	-27	-3	3	3	-15	-25	-3	-39	-33	-33
76	-6	0	-34	-42	-28	-2	2	4	-16	-26	-2	-40	-34	-34
77	-5	1	-35	-41	-29	-3	3	3	-15	-27	-3	-41	-35	-33
78	-6	0	-36	-42	-30	-2	4	4	-16	-28	-2	-42	-36	-32
79	-7	-1	-37	-43	-29	-3	3	3	-15	-29	-1	-43	-37	-31
80	-8	-2	-38	-44	-30	-2	2	2	-16	-30	0	-44	-38	-32
81	-9	-3	-39	-43	-29	-3	1	1	-17	-31	1	-45	-37	-33
82	-10	-4	-38	-44	-30	-2	2	0	-16	-32	0	-46	-38	-34
83	-11	-5	-37	-43	-31	-3	3	1	-15	-31	1	-47	-39	-35
84	-10	-6	-38	-44	-30	-2	4	0	-14	-30	0	-48	-38	-36
85	-11	-7	-39	-45	-31	-3	5	-1	-13	-31	-1	-49	-37	-35
86	-12	-6	-40	-46	-30	-2	4	-2	-14	-32	-2	-50	-38	-36
87	-13	-7	-41	-46	-31	-3	5	-1	-15	-33	-1	-51	-37	-35
88	-14	-6	-42	-46	-32	-2	4	0	-16	-34	0	-52	-36	-36
89	-15	-7	-43	-47	-33	-3	3	-1	-17	-35	-1	-53	-35	-37
90	-14	-6	-44	-46	-32	-4	4	-2	-18	-34	-2	-52	-36	-38
91	-13	-5	-45	-45	-33	-3	5	-1	-17	-33	-3	-53	-35	-39
92	-14	-4	-46	-44	-34	-4	4	0	-18	-32	-2	-54	-34	-40
93	-15	-3	-45	-43	-35	-3	5	-1	-17	-31	-1	-55	-35	-41
94	-16	-4	-44	-44	-36	-4	6	0	-18	-32	-2	-56	-34	-42
95	-15	-3	-45	-43	-35	-3	7	1	-19	-31	-1	-57	-33	-41
96	-16	-4	-46	-42	-34	-4	6	2	-18	-32	-2	-58	-34	-40
97	-15	-5	-47	-43	-35	-5	5	1	-19	-31	-1	-59	-35	-41
98	-14	-4	-48	-44	-36	-4	4	0	-20	-32	-2	-60	-36	-42
99	-15	-5	-47	-43	-37	-3	5	1	-19	-33	-3	-59	-35	-43
100	-16	-6	-46	-42	-38	-4	6	2	-20	-32	-2	-60	-36	-44
101	-17	-5	-47	-41	-37	-5	5	1	-21	-31	-3	-61	-37	-45
102	-16	-4	-48	-42	-38	-6	6	0	-20	-32	-2	-62	-38	-44
103	-17	-3	-49	-41	-39	-5	5	1	-21	-33	-1	-61	-39	-43
104	-16	-4	-50	-42	-40	-4	4	0	-22	-34	0	-62	-38	-44
105	-15	-3	-51	-43	-41	-5	3	1	-23	-35	1	-63	-39	-43
106	-14	-4	-52	-44	-40	-4	2	2	-24	-36	0	-62	-40	-42
107	-15	-5	-53	-45	-39	-5	3	1	-23	-35	-1	-61	-41	-43
108	-16	-6	-54	-46	-40	-4	4	2	-24	-36	-2	-62	-42	-44
109	-15	-7	-55	-47	-39	-5	5	1	-23	-37	-1	-61	-43	-43
110	-16	-6	-54	-48	-40	-4	4	2	-24	-36	0	-60	-44	-42
111	-15	-5	-55	-49	-39	-5	5	1	-23	-37	-1	-61	-45	-43
112	-14	-4	-56	-50	-38	-4	4	2	-24	-38	0	-62	-44	-44
113	-15	-5	-57	-51	-39	-5	3	3	-23	-39	-1	-61	-45	-45
114	-14	-6	-58	-52	-40	-4	4	2	-24	-40	0	-62	-46	-46
115	-13	-7	-59	-53	-39	-3	3	3	-25	-39	1	-63	-45	-47
116	-12	-8	-60	-54	-38	-2	4	2	-24	-38	0	-64	-46	-46
117	-13	-7	-61	-53	-39	-3	5	3	-25	-37	1	-65	-47	-47
118	-12	-8	-60	-54	-40	-4	4	2	-26	-36	0	-64	-48	-48
119	-11	-7	-59	-55	-41	-3	5	1	-27	-37	-1	-65	-49	-49
120	-12	-8	-60	-56	-42	-4	4	0	-28	-38	-2	-64	-50	-48
121	-11	-7	-61	-57	-41	-5	3	-1	-27	-37	-3	-65	-51	-49
122	-12	-6	-62	-58	-40	-4	4	0	-28	-38	-4	-66	-52	-50
123	-11	-5	-63	-59	-41	-5	3	-1	-27	-37	-3	-65	-53	-51
124	-12	-4	-64	-60	-42	-4	2	0	-28	-36	-2	-66	-54	-52
125	-13	-5	-65	-61	-43	-3	1	1	-29	-37	-1	-67	-55	-53
126	-12	-6	-64	-62	-44	-4	0	2	-28	-36	0	-68	-56	-54
127	-11	-5	-65	-63	-43	-3	1	3	-29	-37	-1	-67	-57	-55
128	-10	-6	-66	-64	-44	-4	2	2	-30	-38	-2	-68	-58	-56
129	-11	-7	-67	-63	-43	-5	3	1	-31	-39	-3	-69	-57	-57
130	-10	-6	-68	-64	-44	-4	4	0	-32	-40	-4	-70	-58	-56
131	-11	-7	-69	-65	-43	-3	3	-1	-31	-41	-3	-71	-57	-57
132	-12	-6	-70	-64	-44	-4	4	-2	-30	-40	-4	-72	-56	-58
133	-13	-5	-71	-63	-45	-3	5	-3	-31	-39	-5	-73	-55	-59
134	-14	-6	-70	-62	-46	-4	4	-2	-32	-40	-6	-74	-56	-58
135	-13	-7	-69	-61	-45	-3	3	-1	-33	-41	-5	-75	-55	-59
136	-12	-6	-68	-62	-46	-4	2	0	-32	-42	-6	-74	-56	-60
137	-11	-5	-69	-61	-47	-3	3	-1	-31	-43	-7	-75	-55	-61
138	-10	-4	-70	-60	-48	-2	4	0	-30	-42	-8	-76	-54	-62
139	-9	-3	-69	-61	-49	-3	5	1	-31	-41	-7	-77	-55	-61
140	-8	-2	-68	-62	-50	-2	6	0	-32	-42	-8	-78	-56	-60

141	-9	-1	-69	-61	-51	-1	7	1	-33	-41	-9	-77	-57	-61
142	-10	-2	-70	-62	-52	-2	6	0	-32	-40	-10	-78	-58	-62
143	-11	-1	-69	-63	-51	-1	5	-1	-33	-41	-11	-79	-59	-61
144	-10	-2	-70	-62	-52	-2	6	-2	-34	-42	-10	-80	-60	-62
145	-11	-3	-71	-61	-51	-1	5	-3	-33	-41	-9	-79	-61	-63
146	-12	-2	-72	-60	-52	-2	4	-2	-34	-42	-10	-80	-62	-64
147	-13	-1	-73	-61	-51	-1	5	-3	-35	-41	-11	-81	-63	-65
148	-12	0	-74	-60	-50	-2	4	-2	-34	-40	-10	-82	-64	-64
149	-11	1	-75	-61	-49	-1	5	-1	-35	-39	-9	-83	-65	-65
150	-12	2	-76	-62	-50	0	6	0	-34	-38	-8	-84	-64	-64
151	-13	3	-77	-63	-51	1	5	-1	-35	-39	-9	-83	-65	-65
152	-14	2	-78	-62	-52	2	6	-2	-36	-38	-8	-84	-66	-64
153	-15	3	-77	-61	-53	1	7	-3	-35	-39	-7	-85	-67	-65
154	-14	4	-76	-62	-54	2	6	-4	-36	-38	-6	-86	-68	-66
155	-13	3	-75	-61	-53	1	7	-3	-37	-37	-7	-87	-69	-67
156	-14	2	-76	-62	-54	2	8	-4	-38	-36	-8	-88	-68	-66
157	-13	1	-75	-61	-55	1	9	-3	-39	-37	-7	-89	-69	-67
158	-14	0	-74	-62	-56	2	10	-2	-40	-38	-8	-90	-70	-66
159	-13	-1	-75	-61	-57	1	9	-1	-41	-39	-9	-91	-71	-67
160	-14	-2	-76	-62	-58	2	8	0	-40	-40	-8	-92	-72	-68
161	-15	-1	-77	-63	-57	1	9	-1	-41	-39	-7	-93	-71	-69
162	-14	-2	-76	-64	-58	2	10	0	-40	-40	-8	-92	-72	-68
163	-13	-3	-77	-63	-57	1	11	1	-41	-39	-9	-93	-73	-69
164	-14	-2	-78	-64	-58	2	12	0	-42	-38	-8	-94	-74	-70
165	-15	-3	-79	-65	-59	3	11	-1	-41	-39	-9	-95	-75	-71
166	-16	-4	-78	-66	-60	2	10	0	-42	-40	-10	-96	-76	-72
167	-15	-3	-79	-65	-61	1	9	1	-41	-41	-9	-95	-77	-73
168	-16	-2	-80	-66	-60	2	8	0	-40	-40	-10	-96	-78	-74
169	-17	-3	-79	-65	-61	3	9	1	-41	-41	-11	-95	-77	-75
170	-16	-4	-78	-66	-60	2	10	2	-42	-40	-10	-96	-78	-74
171	-15	-5	-77	-65	-61	1	11	3	-41	-39	-9	-97	-77	-75
172	-14	-6	-78	-66	-62	2	12	2	-42	-40	-8	-98	-78	-76
173	-15	-7	-77	-65	-61	1	11	1	-41	-39	-9	-99	-79	-77
174	-14	-6	-76	-66	-62	2	12	0	-40	-40	-8	-98	-80	-78
175	-15	-5	-75	-67	-63	1	11	1	-41	-39	-7	-97	-79	-77
176	-14	-6	-76	-68	-64	2	12	0	-40	-38	-6	-96	-78	-78
177	-13	-5	-77	-67	-65	1	13	1	-41	-39	-7	-97	-79	-79
178	-14	-4	-76	-66	-64	2	12	2	-42	-38	-6	-98	-78	-80
179	-13	-5	-75	-67	-63	1	13	3	-43	-39	-5	-99	-79	-81
180	-12	-6	-74	-68	-64	2	14	4	-44	-40	-6	-100	-80	-82
181	-13	-5	-75	-67	-65	3	13	3	-45	-41	-5	-101	-81	-83
182	-14	-6	-76	-68	-64	2	14	4	-44	-42	-4	-102	-82	-84
183	-15	-5	-77	-69	-65	3	13	3	-45	-43	-5	-103	-83	-85
184	-16	-6	-78	-68	-66	4	12	2	-44	-44	-6	-102	-82	-86
185	-17	-7	-79	-67	-67	3	11	1	-45	-43	-7	-103	-81	-87
186	-18	-6	-80	-68	-68	4	10	2	-44	-42	-8	-104	-80	-88
187	-17	-7	-81	-67	-69	3	9	3	-45	-41	-9	-105	-81	-89
188	-16	-8	-82	-68	-68	4	10	2	-44	-40	-8	-106	-82	-90
189	-15	-9	-83	-69	-67	3	9	1	-45	-41	-7	-107	-83	-89
190	-14	-8	-84	-70	-68	4	8	2	-46	-42	-8	-106	-82	-90
191	-13	-7	-83	-71	-69	3	7	3	-47	-43	-7	-105	-81	-89
192	-12	-6	-84	-72	-68	4	8	2	-48	-44	-6	-106	-82	-90
193	-13	-7	-85	-73	-69	3	7	1	-49	-43	-7	-107	-83	-91
194	-14	-8	-86	-74	-68	4	6	2	-50	-42	-8	-108	-84	-92
195	-15	-7	-87	-75	-67	3	7	1	-49	-43	-7	-109	-83	-93
196	-16	-8	-88	-76	-68	4	6	2	-48	-42	-8	-110	-84	-94
197	-17	-7	-89	-75	-69	5	7	3	-49	-43	-7	-111	-85	-93
198	-18	-6	-88	-76	-68	6	6	4	-48	-42	-6	-112	-84	-94
199	-19	-7	-87	-77	-67	5	5	3	-47	-41	-7	-113	-85	-95
200	-18	-8	-88	-78	-68	6	6	2	-48	-42	-6	-114	-84	-96