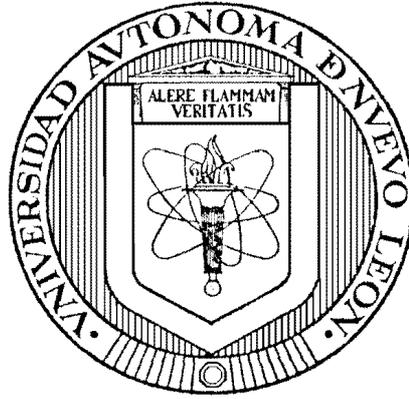


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTIMACIÓN FASORIAL BAJO OSCILACIONES DE POTENCIA  
APLICANDO EL MÉTODO DE SHANKS

POR

ING. ALEJANDRO TORRES MUÑOZ

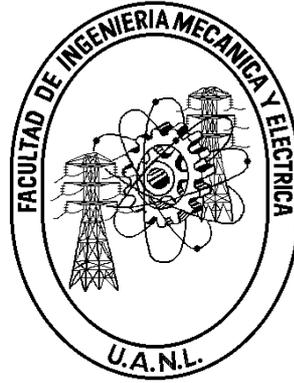
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD  
EN POTENCIA

CD. UNIVERSITARIA

DICIEMBRE DEL 2006

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTIMACIÓN FASORIAL BAJO OSCILACIONES DE POTENCIA  
APLICANDO EL MÉTODO DE SHANKS

POR

ING. ALEJANDRO TORRES MUÑOZ

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD  
EN POTENCIA

CD. UNIVERSITARIA

DICIEMBRE DEL 2006

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Estimación Fasorial bajo Oscilaciones de Potencia Aplicando el Método de Shanks**” realizada por el alumno **Ing. Alejandro Torres Muñoz**, matrícula 1011906 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Potencia.

El Comité de Tesis

---

Asesor  
Dr. José Antonio de la O Serna

---

Coasesor:  
Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

---

Coasesor:  
Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez

---

Vo. Bo.  
Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez  
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Diciembre del 2006

*Este trabajo se lo dedico a mi familia por su amor y apoyo incondicional, pero en especial a esa persona que me brindó su amistad, amor, comprensión y paciencia.*

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Alejandro Torres Muñoz, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2006

**Profesor Asesor: Dr. José Antonio de la O Serna**

La creciente demanda de energía eléctrica, los cambios climáticos originados por el calentamiento global de la tierra y la falta de medios de transmisión de energía, han provocado que los sistemas eléctricos de potencia en México, así como en la mayor parte del mundo trabajen prácticamente en sus límites operativos, por lo que resulta necesario contar con las herramientas necesarias que nos permitan controlar y monitorear los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP) bajo condiciones de estado estable, así como transitorias.

Una de las formas tradicionales para controlar y monitorear la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia, los cuales la mayor parte del tiempo están sometidos a un gran estrés, es por medio de la medición o estimación de las señales típicas del SEP (voltaje, corriente y potencia eléctrica), las cuales pueden cambiar súbitamente al momento de realizar conmutaciones de carga o inclusive en el instante de ser liberada una falla en el sistema, ocasionando bajo ciertas condiciones oscilaciones de potencia que se caracterizan por tener lentas variaciones de amplitud a frecuencias menores a la fundamental.

Los algoritmos tradicionales utilizados actualmente para la medición fasorial asumen que la amplitud y la fase de las señales de voltaje y corriente son constantes durante el intervalo de observación, es decir, comúnmente la estimación del fasor se basa en el concepto de estado estable, lo que implica una fuerte restricción ante condiciones de oscilación, pues limita el control y monitoreo efectivo de los SEP bajo condiciones transitorias.

Por tal motivo, en esta investigación se propone un nuevo algoritmo de estimación fasorial que considere las variaciones tanto de amplitud como de la fase en función del tiempo, por medio de la aplicación de los métodos de diseño de filtros digitales de predicción lineal, los cuales hacen uso del principio de mínimos cuadrados, con el fin de obtener el modelo ARMA (Modelo Autorregresivo de Promedio Móvil) que mejor se adapte a los segmentos de corta duración cuando las señales de voltaje y corriente manifiestan las variaciones de amplitud y fase típicas de una oscilación en sistemas de potencia.

El algoritmo propuesto hace uso de la metodología de Shanks para estimar los elementos del modelo MA (Modelo de Promedio Móvil), los cuales aportan la información fasorial correspondiente a la señal a analizar, de manera que, por medio de estos coeficientes, se le da un seguimiento más adecuado a la dinámica del SEP y de esta forma se genera un algoritmo de estimación fasorial de segundo orden el cual, por medio del análisis de la estimación de la primera y segunda derivada del fasor dinámico, se puede usar como medio para distinguir de manera segura y efectiva entre una falla y una oscilación.

Para llevar a cabo la evaluación del algoritmo de estimación fasorial propuesto se contemplan diversos escenarios. Uno de ellos es probar el algoritmo ante una señal teórica la cual está constituida por los tres estados típicos de una señal (prefalla, falla y postfalla), así como ante una señal real tomada de un PMU (Unidad de Medición Fasorial) de la red mexicana, ambos casos son comparados con los resultados obtenidos por el modelo en [3] tomando en cuenta los mismos escenarios y en base a ello determinar las ventajas y desventajas de ambos modelos.

Aún es necesario realizar más pruebas y estudios referente a la complejidad numérica para validar el algoritmo propuesto. Sin embargo, los resultados obtenidos en esta investigación demuestran que el algoritmo se puede utilizar para discriminar entre una falla y una oscilación, no obstante dichos resultados pueden ser mejorados al diseñar un estimador del tipo no causal.

# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Índice General</b>	<b>vi</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	1
1.2 Antecedentes . . . . .	2
1.3 Objetivo . . . . .	3
1.4 Alcances . . . . .	5
1.5 Estructura de la tesis . . . . .	5
<b>2 Métodos de Predicción Lineal</b>	<b>8</b>
2.1 Introducción . . . . .	8
2.2 Aproximación por Mínimos Cuadrados . . . . .	8
2.3 La Función en Transferencia de un Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo . .	13
2.3.1 Modelo de Promedio Móvil (MA) . . . . .	14
2.3.2 Modelo Autorregresivo (AR) . . . . .	15
2.3.3 Modelo Autorregresivo de Promedio Móvil (ARMA) . . . . .	15
2.4 Métodos de Aproximación Lineal . . . . .	16
2.4.1 Método de Aproximación de Padé . . . . .	16
2.4.2 Método de Prony . . . . .	18

2.4.3	Método de Shanks . . . . .	22
2.5	Evaluación y Comparación de los Métodos de Predicción Lineal . . . . .	25
2.6	Conclusiones del capítulo . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Modelo Matemático de la Oscilación</b>	<b>34</b>
3.1	Introducción . . . . .	34
3.2	Metodología . . . . .	35
3.2.1	Análisis Temporal . . . . .	45
3.2.2	Análisis Frecuencial . . . . .	61
3.3	Conclusiones del capítulo . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Predicción Frecuencial</b>	<b>67</b>
4.1	Introducción . . . . .	67
4.2	Metodología . . . . .	68
4.2.1	Estimación Frecuencial . . . . .	69
4.2.2	Estimación Fasorial . . . . .	73
4.3	Análisis Temporal . . . . .	79
4.4	Conclusiones del capítulo . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Evaluación y Comparación de Metodologías de Estimación Fasorial</b>	<b>99</b>
5.1	Introducción . . . . .	99
5.2	Comparación y Evaluación de Resultados . . . . .	99
5.2.1	Evaluación del modelo $\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$ . . . . .	101
5.2.2	Evaluación del modelo $\hat{s}^{(2)}(n) = \alpha^n \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\hat{\omega}_0 n)$ . . . . .	104
5.2.3	Evaluación del modelo $\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ p_0^{(2)} + p_1^{(2)} \frac{n}{1!} + p_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$ . . . . .	107
5.2.4	Comparación de los errores de estimación . . . . .	110
5.3	Conclusiones del capítulo . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>114</b>
6.1	Introducción . . . . .	114
6.2	Conclusiones . . . . .	114
6.3	Aportaciones . . . . .	118
6.4	Trabajos Futuros . . . . .	119

**Bibliografía**

# Índice de Tablas

2.1	Evaluación del Error de Estimación. . . . .	31
5.1	Evaluación del Error Cuadrático de Amplitud. . . . .	110
5.2	Evaluación del Error Cuadrático de Frecuencia. . . . .	111

# Índice de Figuras

2.1	Aproximación de una Función de grado " $n$ " a una Serie de Datos . . . . .	9
2.2	Proyección de $y(n)$ en la Imagen de $A$ . . . . .	10
2.3	Problema de mínimos cuadrados para un ajuste de una recta . . . . .	12
2.4	Diagrama del Método de Prony . . . . .	18
2.5	Diagrama del Método de Shanks . . . . .	22
2.6	Respuesta impulsional $h_d(n)$ del filtro digital Chebyshev de Tipo II . . . . .	26
2.7	Diseño de Filtro basado en el método de Padé . . . . .	27
2.8	Diseño de Filtro basado en el método de Prony . . . . .	28
2.9	Diseño de Filtro basado en el método de Shanks . . . . .	30
3.1	Polos en el Plano $Z$ . . . . .	38
3.2	Diagrama Shanks . . . . .	39
3.3	Proyección de $s_d(n)$ sobre el subespacio formado por $\omega_0$ . . . . .	40
3.4	Diagrama de Flujo de Estimación Fasorial . . . . .	44
3.5	Señal Teórica $s_d(n)$ . . . . .	45
3.6	Modelo Constante . . . . .	46
3.7	Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Constante	47
3.8	Modelo Lineal . . . . .	48
3.9	Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Lineal . .	49
3.10	Modelo Cuadrático . . . . .	50
3.11	Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Cuadrático	51
3.12	Señal Real . . . . .	52
3.13	Estimación de la Señal Real . . . . .	53
3.14	Amplitud y Fase de la Señal Reconstruida . . . . .	54

3.15	Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Cuadrático . . . . .	56
3.16	Estimación Instantánea de la Señal Real con un estimador de dos ciclos . . . . .	57
3.17	Estimados de la Amplitud y la Fase Instantánea de la Señal Reconstruida . . . . .	58
3.18	Estimación de la Frecuencia así como la primera y segunda derivada de la fase Instantáneas . . . . .	59
3.19	Respuesta en Frecuencia del Modelo de orden cero para ventanas de $N=1/8, 1/4, 1/2, 1$ de ciclo . . . . .	62
3.20	Respuesta en Frecuencia del Modelo de Primer Orden para ventanas de $N=1/4, 1/2, 1, 2$ de ciclo . . . . .	63
3.21	Respuesta en Frecuencia del Modelo de Segundo Orden para ventanas de $N=1/2, 1, 2, 4$ de ciclos . . . . .	64
4.1	Señal Teórica de 60 Hz que incluye un 5 <sup>to</sup> armónico con una oscilación periódica de 6 Hz . . . . .	71
4.2	Polos del Estimador AR del Modelo Constante . . . . .	72
4.3	Polos en el Plano Z . . . . .	73
4.4	Diagrama de Flujo de Estimación Fasorial . . . . .	78
4.5	Modelo Constante considerando la estimación frecuencial . . . . .	80
4.6	Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Constante . . . . .	81
4.7	Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Constante . . . . .	82
4.8	Estimación de $s_d(n)$ por medio del Modelo Lineal, considerando las variaciones de frecuencia . . . . .	83
4.9	Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Lineal . . . . .	84
4.10	Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Lineal . . . . .	85
4.11	Estimación de $s_d(n)$ por medio del Modelo Cuadrático, considerando las variaciones de frecuencia . . . . .	86
4.12	Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Cuadrático . . . . .	87
4.13	Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Cuadrático . . . . .	88
4.14	Estimación de la Señal Real . . . . .	89
4.15	Amplitud y Fase de la Señal Reconstruida . . . . .	90
4.16	Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Cuadrático . . . . .	92
4.17	Estimación Instantánea de la Señal Real con un estimador de dos ciclos . . . . .	93

4.18	Estimados de la Amplitud y la Fase Instantánea de la Señal Reconstruida . . . . .	94
4.19	Estimación de la Frecuencia así como la primera y segunda derivada de la fase . . . . .	95
5.1	Señal Teórica Propuesta con los tres estados de típicos de una señal . . . . .	100
5.2	Estimación de Amplitud y Fase de la señal teórica usando el modelo (3.2.8) . . . . .	101
5.3	Estimación de la Frecuencia usando el modelo (3.2.8) . . . . .	103
5.4	Estimación de Amplitud y Fase de la señal teórica usando el modelo (4.2.13) . . . . .	105
5.5	Estimación de la Frecuencia usando el modelo (4.2.13) . . . . .	106
5.6	Estimación de Amplitud y Fase de la señal teórica usando el modelo propuesto en [3] . . . . .	107
5.7	Estimación de la Frecuencia usando el modelo propuesto en [3] . . . . .	109

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

Una oscilación de potencia es un régimen anormal de operación que provoca alteraciones en los parámetros del sistema en ausencia de fallas. Las oscilaciones de potencia entre máquinas síncronas de un sistema eléctrico de potencia se originan por lo general, como consecuencia de la desconexión tardía de un corto circuito, o ya sea por la desconexión de una línea de enlace o una planta generadora, bajo ciertas circunstancias.

La oscilación de potencia no es en general simétrica debido a las asimetrías propias de los elementos del sistema, a la presencia de fallas asimétricas o disparos y recierres monopolares, además que la frecuencia varía durante la oscilación de potencia.

En los SEP las oscilaciones de potencia bajo ciertas circunstancias indican pérdida de estabilidad y riesgos de colapso, las cuales poseen lentas variaciones de amplitud a frecuencias menores a la fundamental [9] del orden de 0.1 a 5 Hz. Las bajas frecuencias son características de los sistemas eléctricos robustos y estas se presentan en los primeros instantes de la oscilación, en lo que respecta a las altas frecuencias aparecen típicamente en sistemas débiles en los ciclos

de oscilación posteriores al primero.

La magnitud de la oscilación depende de las condiciones iniciales del SEP al momento de eliminarse el fenómeno transitorio, la cual puede oscilar alrededor del valor nominal antes de que el estado estable sea alcanzado de nuevo, período en el cual los relevadores o equipos de medición presentan cierta dificultad en distinguir entre una oscilación y una falla, puesto que los algoritmos de estimación fasorial tradicionales que éstos usan no son lo suficientemente selectivos para llevar a cabo tal discriminación. Esto es debido a que dichos algoritmos suponen la amplitud y la fase de los parámetros característicos del SEP (señales de voltaje y corriente) de manera constante durante todo el intervalo de observación, limitando el control y monitoreo efectivo de los SEP bajo condiciones transitorias.

Por tal motivo, es indispensable contar con nuevos algoritmos de estimación que distingan de manera segura y efectiva entre una falla y una oscilación de potencia, ya que esto podría ser la causa de los recientes apagones (blackouts) ocurridos en los últimos años. Por ello, en esta investigación se propone una nueva metodología para la estimación fasorial, aplicando los métodos tradicionales de predicción lineal, para formar filtros digitales basados en el principio de mínimos cuadrados.

## 1.2 Antecedentes

Los algoritmos utilizados actualmente para la medición fasorial consideran amplitud y fase constante de los parámetros del SEP (señales de voltaje y corriente) durante el intervalo de observación, es decir, comúnmente la estimación del fasor se basa en el concepto de estado estable, lo que implica una fuerte restricción, pues limita el control y monitoreo efectivo de los SEP bajo condiciones transitorias [1].

En el año 2000, Stanković introdujo una nueva técnica para realizar las estimaciones del fasor dinámico definido en [12], el cual es muy útil en la descripción de las desviaciones que sufre la señal partiendo de un estado estable [11]. Esta idea se desarrolló sobre la consideración del modelo constante tradicional, cuya propuesta consiste en la estimación de dicho fasor por medio de las derivadas de los estimados de orden cero.

Recientemente, en [2] la estimación fasorial con fasoretas se utilizó en aplicaciones de protección presentando óptimos resultados en cuanto a rapidez y precisión, puesto que, la fasoreta, como transformada inversa del fasor, permite estimarlo con mayor rapidez.

En base a ello, surgió la idea de aplicar el concepto de la fasoreta bajo condiciones de oscilación [3] lo cual corresponde al concepto de fasor dinámico. En esta publicación el fasor dinámico se ve como un número complejo en función del tiempo, el cual es aproximado por medio de la serie de Taylor de segundo orden y con la ayuda del principio de mínimos cuadrados se estiman los mejores coeficientes que cumplan la sumatoria cuadrática del error, donde éstos describen el comportamiento dinámico de la amplitud y la fase al ocurrir un transitorio en las señales típicas del SEP.

### 1.3 Objetivo

Motivado por los resultados obtenidos en [3], el objetivo de esta tesis consiste en obtener un algoritmo, el cual pueda distinguir de manera segura y efectiva entre una falla y una oscilación de potencia por medio de la aplicación de los métodos de diseño de filtros digitales de predicción lineal aplicando el principio de mínimos cuadrados, con el fin de obtener el modelo ARMA que mejor se adapte a los segmentos de corta duración cuando las señales de voltaje y corriente manifiestan las variaciones de amplitud y fase típicas de una oscilación en sistemas de potencia.

El algoritmo propuesto utiliza el método de Shanks [8] para estimar los coeficientes del filtro de predicción lineal correspondientes al modelo MA, los cuales se caracterizan por tener la información fasorial correspondiente a la señal a analizar. Dichos coeficientes se obtienen al resolver las ecuaciones normales, las cuales, al expresarse de manera matricial, observamos que está formada por una matriz de Toeplitz, la cual puede ser invertida eficientemente por medio del algoritmo de Levinson [6].

## 1.4 Alcances

Los alcances de esta investigación son evaluar y desarrollar el algoritmo de estimación fasorial por medio del diseño de filtros digitales de predicción lineal aplicando el principio de mínimos cuadrados y aprovechando las características que presenta la matriz de Toeplitz para su inversión. Al mismo tiempo, se comparará con el modelo desarrollado en [3] el cual se caracterizó por tener un comportamiento estable y una buena precisión para intervalos de dos ciclos al utilizar el modelo cuadrático, concluyendo cuál de estas metodologías es la que presenta el mejor comportamiento.

Para llevar a cabo la evaluación y comparación de los métodos mencionados anteriormente se contemplan diversos casos. Uno de ellos es someter los algoritmos ante una señal teórica la cual está constituida por los tres estados típicos de una señal (prefalla, falla y postfalla), así como ante una señal real tomada de un PMU (Unidad de Medición Fasorial) de la red mexicana.

## 1.5 Estructura de la tesis

Esta tesis está constituida por seis capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se muestra la motivación por la cual se pretende desarrollar esta investigación, así como la problemática a la que nos enfrentamos. También se describen brevemente cuáles han sido los esquemas que se han desarrollado y utilizado hasta ahora para solucionar dicha situación. Asimismo se mencionan los objetivos y alcances de esta tesis.

En el Capítulo 2 se expone el principio referente a mínimos cuadrados. Asimismo, se hace un análisis detallado de las diversas metodologías tradicionales para el diseño de filtros digitales de predicción lineal. Por último, se realiza la evaluación y comparación de los algoritmos de

predicción lineal, derivándose cuál de estos es el que mejor se adapta a los cambios abruptos que presenta el sistema desconocido.

En el Capítulo 3 se desarrolla la metodología del modelo cuadrático de estimación fasorial con la ayuda del método de Shanks de predicción lineal. También se exponen las limitaciones que presenta el modelo constante de estimación fasorial cuando se presenta una oscilación de potencia en el SEP. Finalmente se obtienen las respuesta en frecuencia de los modelos constante, lineal y cuadrático.

En Capítulo 4 se lleva a cabo el desarrollo de una metodología para estimar de manera directa la frecuencia  $\omega_0$  aprovechando las características que ofrece el algoritmo de Shanks de predicción lineal. Asimismo, se evalúa el comportamiento de los nuevos modelos contante, lineal y cuadrático ante una señal teórica.

En lo que se refiere al Capítulo 5 aquí se realiza la comparación de la metodología propuesta en [3] con los métodos expuestos en los capítulos 3 y 4, exponiendo las ventajas y desventajas de cada uno de los algoritmos, concluyendo cuál de estos modelos es el que mejor se adapta a los segmentos de corta duración cuando las señales características del SEP manifiestan las variaciones de amplitud, fase y frecuencia típicas de una oscilación en sistemas de potencia.

En el Capítulo 6 se muestran las conclusiones a las que se llegaron después de haber analizado los resultados presentados en los capítulos anteriores. Una de las conclusiones más importantes es en relación a las limitaciones que presentan los modelos de estimación fasorial tradicionales al considerar la amplitud y la fase constantes, ya que estos se ven imposibilitados de seguir la dinámica del SEP al momento de ocurrir y ser liberado un transitorio. Asimismo, en este capítulo se muestran las aportaciones más importantes de esta investigación, entre las cuales podemos mencionar la generación de un nuevo algoritmo de estimación fasorial capaz de seguir y distinguir la dinámica de las señales típicas del SEP, así como la proposición de una nueva

metodología para realizar la demodulación de una señal aplicando la técnica de fracciones parciales. Por último, se exponen algunas recomendaciones para trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Métodos de Predicción Lineal

### 2.1 Introducción

En esta tesis se propone la aplicación del principio de mínimos cuadrados para la estimación de parámetros de un sistema desconocido, en nuestro caso las señales típicas del SEP (señales de voltaje y corriente), por lo que en el presente apartado se da una breve explicación de la metodología de *mínimos cuadrados*, así como la descripción y comparación de los diferentes métodos de diseño de filtros digitales de predicción lineal basados en el principio propuesto.

### 2.2 Aproximación por Mínimos Cuadrados

En las diversas disciplinas de la ciencia resulta de gran utilidad explicar o describir fenómenos naturales por medio de funciones o modelos matemáticos, como por ejemplo en el caso del tiro parabólico, donde se puede expresar la relación entre las alturas inicial  $s_0$  y final  $s$ , la aceleración  $g$  debido a la fuerza de la gravedad, el tiempo transcurrido  $t$  y la velocidad  $v_0$  con

la que partió un objeto por medio de la siguiente función:

$$s = s_0 - v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.2.1}$$

Desafortunadamente, no es fácil obtener funciones matemáticas como en (2.2.1) que describan el comportamiento de los diversos problemas o fenómenos naturales por medio de las distintas variables que intervienen en el sistema. Por lo que en general se trabaja con una gran cantidad de datos y el objetivo consiste en aproximar una función de grado "n" a estos, con el fin que describan el comportamiento del sistema o fenómeno a analizar, tal y como se muestra en la Figura 2.1; a esto se le conoce como la *aproximación por mínimos cuadrados*.

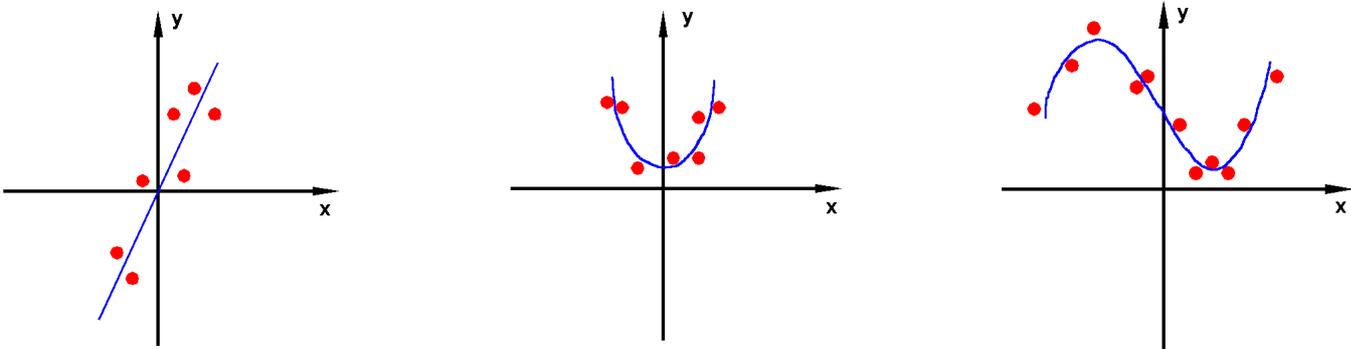


Figura 2.1: Aproximación de una Función de grado "n" a una Serie de Datos

El problema de la aproximación por mínimos cuadrados visto geoméricamente [5], consiste en encontrar dentro del subespacio generado por la secuencia de datos  $\{x(n), 0 \leq n \leq M - 1\}$  representado por la matriz "A", el vector de estimación  $\hat{y}(n)$  que mejor se adapte o aproxime a la secuencia de datos  $y(n)$ , de tal forma que el error de aproximación  $e(n)$  sea mínimo (véase Figura 2.2), todo lo anterior queda establecido en (2.2.2) y (2.2.3).

$$\hat{y}(n) = Au \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned} e(n) &= y(n) - \hat{y}(n) \\ &= y(n) - Au \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

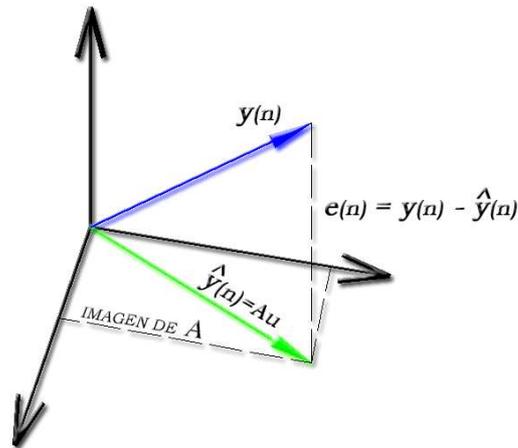


Figura 2.2: Proyección de  $y(n)$  en la Imagen de  $A$

donde el término  $Au$ , puede verse como la proyección del vector  $y$  en la imagen de  $A$  y en lo que respecta la variable  $u$  es la componente de  $y$  en el mismo plano, por lo que el problema de aproximación de mínimos cuadrados se resume a encontrar el vector  $u$  de tal forma que el error de predicción sea mínimo.

Una manera de encontrar el vector  $u$  es aplicando el principio de ortogonalidad el cual enuncia que  $A \perp e \therefore A^T e = 0$ . Si partimos de la ecuación del error de estimación (2.2.3) y aplicamos el principio de ortogonalidad a esta última, el cual consiste en premultiplicar ambos lados de la ecuación por  $A^T$ , y por último despejamos para  $u$ , se obtiene el vector que minimiza a (2.2.3), siempre y cuando  $A^T A$  sea invertible, todo esto queda establecido en el siguiente conjunto de ecuaciones denotado por (2.2.4).

$$\begin{aligned}
 A^T e &= A^T y - A^T A u \\
 0 &= A^T y - A^T A u \\
 A^T A u &= A^T y \\
 u &= \left( A^T A \right)^{-1} A^T y
 \end{aligned}
 \tag{2.2.4}$$

Una forma de evaluar la aproximación  $\hat{y}(n)$  a la secuencia de datos  $y(n)$ , es por medio de la sumatoria cuadrática del error (véase (2.2.5)), donde el error cuadrático es definido como la diferencia entre la variable observada  $y(n)$  y el valor estimado  $\hat{y}(n)$ .

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^L [y_n - \hat{y}_n]^2 \quad (2.2.5)$$

Para percibir mejor la idea anterior, realicemos el siguiente ejemplo, el cual consiste en encontrar la recta que mejor se ajusta a una serie de datos  $(1, 4), (-2, 5), (3, -1)$  y  $(4, 1)$ , aplicando el principio de mínimos cuadrados.

Escribiendo la función de una recta  $y = b + mx$  en forma matricial

$$y = Au$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$$

Aplicando (2.2.4) se genera la componente  $u$  en el plano A:

$$u = (A^T A)^{-1} A^T y = \begin{pmatrix} 3.57 \\ -0.88 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la recta que mejor se ajusta a le serie de cuatro datos se bosqueja en la Figura 2.3.

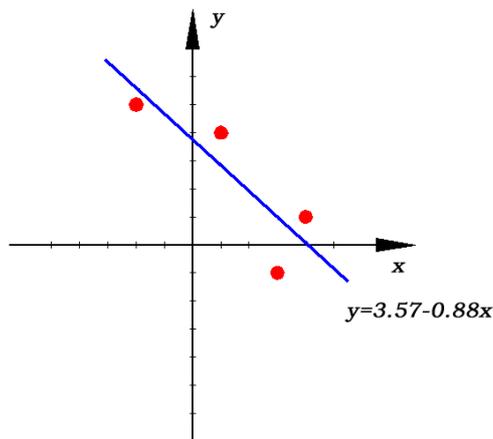


Figura 2.3: Problema de mínimos cuadrados para un ajuste de una recta

Al evaluar (2.2.5) con los datos del ejemplo propuesto obtenemos la sumatoria cuadrática del error  $\mathcal{E}$ , denotada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left[ y_1 - (b + mx_1) \right]^2 + \cdots + \left[ y_4 - (b + mx_4) \right]^2 \\ &= (4 - 2.69)^2 + (5 - 5.33)^2 + (-1 - 0.93)^2 + (1 - 0.05)^2 \\ &= 6.47\end{aligned}$$

En las próximas secciones se realizará la revisión y comparación de los diferentes algoritmos para la identificación de sistemas dinámicos desconocidos aplicando el principio de mínimos cuadrados, el cual fue expuesto en la presente sección.

## 2.3 La Función en Transferencia de un Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo

La respuesta  $y(n)$  de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) que se encuentra en reposo, para una secuencia de entrada  $x(n)$ , se puede obtener por medio de la convolución de la secuencia de entrada  $x(n)$  con la respuesta impulsional  $h(n)$  del sistema. La propiedad de la transformada "z" referente a la convolución de la respuesta impulsional del sistema con la secuencia de entrada, es denotada por (2.3.1), la cual enuncia que la convolución en el dominio "z" se puede llevar a cabo como el producto punto de la transformada "z" de la secuencia  $x(n)$  y la transformada "z" de la respuesta impulsional  $h(n)$  del sistema.

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$h(n) \xleftrightarrow{z} H(z)$$

entonces

$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{z} Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.3.1)$$

La propiedad de la convolución expuesta por (2.3.1), nos permite expresar la respuesta  $y(n)$  del sistema en el dominio de "z" como:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.3.2)$$

Queda claro que  $H(z)$  representa la caracterización del sistema en dominio "z", mientras que  $h(n)$  es la caracterización correspondiente en el dominio del tiempo. En otras palabras,  $H(z)$  y  $h(n)$  son descripciones equivalentes del sistema, cada una en un dominio. La transformada  $H(z)$  se denomina la *función de transferencia del sistema*.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.3.3)$$

La relación (2.3.3) es de especial utilidad para obtener  $H(z)$ , cuando el sistema es descrito mediante un conjunto de ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes, expuesto en (2.3.4).

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{l=0}^M b_l x(n-l) \quad (2.3.4)$$

En este caso, la función de transferencia se puede obtener directamente de (2.3.4) calculando la transformada "z" en ambos lados de la ecuación, obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y(Z) &= - \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{l=0}^M b_l X(z) z^{-l} \\ Y(z) \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) &= X(z) \left( \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \right) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Ésta es, en general, la forma de la función de transferencia de un sistema descrito por un conjunto de ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes. De esta forma general obtenemos dos clases especiales muy importantes.

### 2.3.1 Modelo de Promedio Móvil (MA)

Si  $a_k = 0$ , para  $1 \leq k \leq N$ , (2.3.5) se reduce a

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \\ &= \frac{1}{z^M} \sum_{l=0}^M b_l z^{M-l} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

En este caso,  $H(z)$  contiene  $M$  ceros, cuyos valores están determinados por los parámetros del sistema  $\{b_l\}$ , y un polo de orden  $M$  en el origen  $z = 0$ . Dado que el sistema contiene  $M$

polos triviales en  $z = 0$  y  $M$  ceros no triviales, se le denomina *modelo puros ceros o de promedio móvil*.

### 2.3.2 Modelo Autorregresivo (AR)

Por otra parte,  $b_l = 0$  para  $1 \leq k \leq M$ , la función del sistema se reduce a

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} \quad a_0 \equiv 1 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

En este caso,  $H(z)$  contiene  $N$  polos, cuyos valores quedan determinados por los parámetros del sistema  $\{a_k\}$  y un cero de orden  $N$  en el origen  $z = 0$ . Por lo general, no se hace referencia a estos ceros triviales. Por lo tanto, la función dada en (2.3.7) solamente contiene polos no triviales y el sistema correspondiente se denomina *modelo puros polos o autorregresivo*.

### 2.3.3 Modelo Autorregresivo de Promedio Móvil (ARMA)

La forma general de la función de transferencia proporcionado por (2.3.5) contiene  $N$  polos y  $M$  ceros en el plano " $z$ ", por lo que al sistema se le denomina *modelo puros polos y ceros o modelo autorregresivo de promedio móvil*.

## 2.4 Métodos de Aproximación Lineal

Existen diversos métodos de predicción lineal que aplican el principio de mínimos cuadrados, para la identificación y estimación de los sistemas desconocidos [10] y [8]; sin embargo, son los métodos de Padé, Prony y Shanks los que más se adecúan a las necesidades expuestas en esta tesis, motivo por el cual en esta sección se realizará un análisis detallado de éstos.

### 2.4.1 Método de Aproximación de Padé

Este método de identificación, a diferencia de los demás, no aplica el principio de mínimos cuadrados descrito en este capítulo, se sustenta en el hecho de relacionar la respuesta impulsional  $h_d(n)$  del sistema desconocido con cada uno de los coeficientes del modelo propuesto [10] y [8].

Supongamos que la respuesta del sistema desconocido  $h_d(n)$  se especifica para  $n \geq 0$ , esto quiere decir que se considera un sistema causal, por lo que se propone diseñar un filtro ARMA con la función de transferencia mostrada en (2.4.1).

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.4.1)$$

El modelo está compuesto por  $L = M + N + 1$  parámetros denotados por los coeficientes  $a_k$  y  $b_l$ , los cuales se seleccionan de tal manera que se elimina algún criterio de error. Supongamos que el sistema desconocido y el modelo propuesto son excitados por un impulso unitario, es decir  $x(n) = \delta(n)$ , por lo que la representación en ecuación en diferencias del modelo propuesto (véase (2.4.1)) se expresa como:

$$y(n) = h(n) = - \sum_{k=1}^N a_k h(n-k) + \sum_{l=0}^M b_l \delta(n-l), \quad n \geq 0 \quad (2.4.2)$$

Considerando que  $\delta(n-l) = 0$ , excepto para cuando  $l = n$ , podemos reescribir (2.4.2) de la siguiente manera:

$$h(n) = - \sum_{k=1}^N a_k h(n-k) + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (2.4.3)$$

Si solamente consideramos la respuesta del modelo  $h(n)$ , para  $n > M$ , (2.4.3) queda expresada como sigue:

$$h(n) = - \sum_{k=1}^N a_k h(n-k), \quad n > M \quad (2.4.4)$$

El conjunto de ecuaciones lineales (2.4.3) y (2.4.4) nos dan la pauta para encontrar los parámetros  $a_k$  y  $b_l$  del filtro propuesto, esto se lleva a cabo tal y como se explicó al principio de la sección relacionando la repuesta impulsional de sistema de desconocido  $h_d$  para  $0 \leq n \leq M + N$  con los parámetros del modelo propuesto. Para obtener lo anteriormente descrito, empezamos considerando que  $h(n) = h_d(n)$  para  $M < n \leq M + N$  y resolvemos (2.4.4) para  $a_k$ , por medio de este procedimiento generamos los coeficientes del denominador del modelo propuesto; lo siguiente es obtener los coeficientes  $b_l$ , con la ayuda de (2.4.3) haciendo nuevamente  $h(n) = h_d(n)$  pero para  $0 \leq n \leq M$ . Mediante este desarrollo se obtiene un ajuste perfecto entre  $h(n)$  y la respuesta impulsional del sistema desconocido  $h_d(n)$  para los primeros  $L$  valores.

Los niveles de aceptación de la metodología de Padé para el diseño de filtros digitales, dependen en gran medida del número de coeficientes que posee el modelo propuesto, esto quiere decir que conforme se aumente la complejidad del modelo, mejor será la aproximación a  $h_d(n)$  para  $0 \leq n \leq M + N$ . Pero al mismo tiempo este es el mayor impedimento de la técnica de aproximación de Padé, pues si se desean mejores aproximados es necesario que el filtro resultante contenga una gran cantidad de polos y ceros. Esta característica es el principal motivo por el cual el método de aproximación de Padé no ha logrado tener mucha aceptación para el diseño de filtros digitales.

## 2.4.2 Método de Prony

La metodología que se analiza en esta sección, a diferencia de la precedente, sí aplica el principio de mínimos cuadrados, expuesto en este capítulo, para obtener los coeficientes  $a_k$  del modelo puros polos (AR). A pesar de ello, esta metodología guarda cierta similitud con el desarrollo del método de Padé explicado en la sección anterior, pues los coeficientes  $b_l$  se generan por medio de la relación de la respuesta impulsional  $h_d(n)$  del sistema desconocido con cada uno de los coeficientes del modelo propuesto puros ceros (MA) [10] y [8].

Si se propone nuevamente un modelo ARMA con respuesta impulsional  $H(z)$  (véase (2.4.1)) que se aproxime a la respuesta impulsional del sistema desconocido  $H_d(z)$ , la ecuación en diferencias que describe al modelo propuesto estaría denotada por el conjunto de ecuaciones de (2.4.2) a (2.4.4). Haciendo uso de la predicción lineal podríamos usar la respuesta impulsional deseada  $h_d(n)$  para  $n > M$  para construir un estimado de esta última, de acuerdo a lo establecido en (2.4.4) (véase Figura 2.4). Es decir,

$$\hat{h}_d(n) = - \sum_{k=1}^N a_k h_d(n - k), \quad n > M \quad (2.4.5)$$

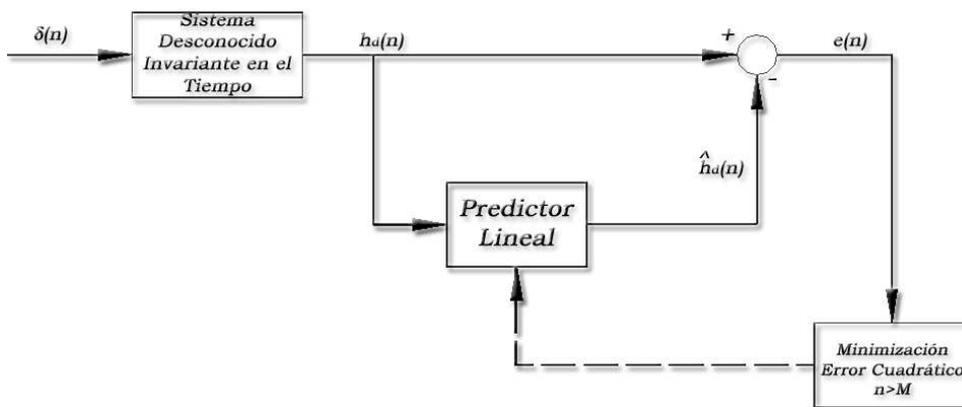


Figura 2.4: Diagrama del Método de Prony

Una vez establecida (2.4.5), lo siguiente es encontrar los coeficientes  $a_k$  que minimicen la sumatoria cuadrática del error, entre la respuesta deseada  $h_d(n)$  y el estimado  $\hat{h}_d(n)$  para  $n > M$ , todo esto queda establecido en (2.4.6).

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \sum_{n=M+1}^L [h_d(n) - \hat{h}_d(n)]^2 \\ &= \sum_{n=M+1}^L \left[ h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right]^2, \quad L \gg N\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

La forma de encontrar los coeficientes  $a_k$  que minimicen la sumatoria cuadrática del error es diferenciando (2.4.6) con respecto a los coeficientes  $a_k$  e igualándola a cero. Lo anterior queda expuesto en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{da_k} &= 0 \\ \sum_{k=1}^N \hat{a}_k r_{dd}(k, m) &= -r_{dd}(m), \quad m = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

donde  $r_{dd}(k, m)$  es la matriz de autocorrelación de la señal deseada  $h_d(n)$  y  $r_{dd}(m)$  es el vector de autocorrelación de la misma señal, ambas variables son definidas por las siguientes ecuaciones:

$$r_{dd}(k, m) = \sum_{n=M+1}^L h_d(n-k)h_d^*(n-m)\tag{2.4.8}$$

$$r_{dd}(m) = \sum_{n=M+1}^L h_d(n)h_d(n-m)\tag{2.4.9}$$

El problema de optimización de los coeficientes  $a_k$  aplicando el principio de mínimos cuadrados, puede formularse también de forma matricial, esto se logra con la ayuda del error de estimación expresado en la siguiente ecuación:

$$e(n) = h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \quad n > M\tag{2.4.10}$$

Rescribiendo (2.4.10) en forma matricial se obtiene:

$$e = h_d + Ha\tag{2.4.11}$$

donde  $e$  es definido como un vector de longitud  $L - (M + 1)$   $e = [e(M + 1), e(M + 2), \dots, e(L)]^T$ , la variable  $h_d$  también se especifica como un vector  $h_d = [h_d(M + 1), h_d(M + 2), \dots, h_d(L)]^T$  de la misma longitud, los coeficientes  $a_k$  son definidos como un vector  $a = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$  de longitud  $N$  y por último la variable  $H$  de longitud  $L - (M + 1) \times N$ , que es una matriz de datos formada por la respuesta impulsional  $h_d(n)$  del sistema desconocido (véase (2.4.12)), la cual se puede ver como el subespacio donde se desea encontrar  $\hat{h}_d(n) = Ha$  tal que el error  $e(n)$  (2.4.11) sea mínimo (véase Figura 2.2).

$$H = \begin{bmatrix} h_d(M) & h_d(M - 1) & \dots & h_d((M + 1) - N) \\ h_d(M + 1) & h_d(M) & \dots & h_d((M + 2) - N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_d(M + N - 1) & h_d(M + N - 2) & \dots & h_d(M) \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

Ya definidos cada uno de los elementos de (2.4.11), lo siguiente es generar los coeficientes  $a_k$  aplicando el principio de ortogonalidad ( $H \perp e \therefore He = 0$ ), esto consiste en premultiplicar ambos lados de la ecuación por  $H^*$  (donde "\*" representa el hermitiano de la matriz) y por último despejar para  $a$ , de esta manera se obtiene el vector que minimiza el error expuesto en (2.4.10). Lo anterior se describe por medio del siguiente conjunto de ecuaciones denotadas por (2.4.13).

$$\begin{aligned} H^*e &= H^*h_d + H^*H\hat{a} \\ 0 &= H^*h_d + H^*H\hat{a} \\ H^*H\hat{a} &= -H^*h_d \\ \hat{a} &= -[H^*H]^{-1}H^*h_d \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

donde  $\hat{a}$  corresponde al vector de coeficientes  $a_k$  que minimizan el error de estimación descrito por (2.4.10).

Al estudiar (2.4.13), notamos que el elemento  $H^*H$  corresponde a la matriz de autocorrelación formada por la secuencia de datos  $h_d$  denotada anteriormente por (2.4.8) y el elemento  $H^*h_d$  representa el vector de autocorrelación de la respuesta  $h_d$  mostrada por (2.4.9). De esta manera, la matriz de autocorrelación se puede definir como  $R_{dd} = H^*H$  y el vector de autocorrelación como  $r_{dd} = H^*h_d$ . Rescribiendo (2.4.13) y tomando en cuenta las definiciones anteriores, se produce la siguiente ecuación:

$$\hat{a} = -R_{dd}^{-1}r_{dd} \quad (2.4.14)$$

Al haber realizado el análisis de la solución de mínimos cuadrados empleando los principios tanto de ortogonalidad así como el de mínimo valor relativo, concluimos que la solución expuesta en (2.4.7) para obtener los coeficientes  $\hat{a}_k$ , también puede representarse por medio de (2.4.14), puesto que ambas describen lo mismo.

Hasta este momento, sabemos que del conjunto de ecuaciones lineales (2.4.7), (2.4.8) y (2.4.9) se generan los coeficientes  $a_k$  que minimizan la sumatoria del error cuadrático (2.4.6). En lo que respecta a los coeficientes  $b_l$  del modelo puros ceros (MA) se obtienen por medio de (2.4.3), considerando  $h(n) = h_d(n)$  y sustituyendo los coeficientes  $\hat{a}_k$  en la ecuación antes mencionada se genera lo siguiente:

$$b_l = h_d(n) + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k h_d(n - k) \quad (2.4.15)$$

Por lo tanto, los coeficientes  $a_k$  que determinan el modelo puros polos (AR) son determinados por medio del principio de mínimos cuadrados, mientras que los coeficientes  $b_l$  se obtienen mediante la metodología de Padé. Sin embargo, el grado que el método de Prony ofrece para la estimación de los coeficientes  $b_l$  no puede ser considerado efectivo, por el hecho de que los coeficientes del modelo puros ceros (2.4.15) no son calculados por la metodología de mínimos cuadrados.

### 2.4.3 Método de Shanks

El procedimiento que se analiza en la presente sección es un método alternativo para la generación de los elementos del modelo propuesto ARMA (2.4.1) para la identificación del sistema desconocido que, a diferencia de la sección precedente, tanto los coeficientes  $a_k$  y  $b_l$  son estimados aplicando el principio de mínimos cuadrados. El algoritmo de Shanks [10] y [8] puede verse como un sistema formado por un filtro  $H_1$  (puros polos) y otro filtro  $H_2$  (puros ceros) ambos conectados en cascada, donde la entrada al sistema es un pulso unitario ( $x(n) = \delta(n)$ ) y la salida del sistema  $\hat{h}_d(n)$  es la señal estimada del sistema desconocido. Todo lo anterior se muestra en la Figura 2.5.

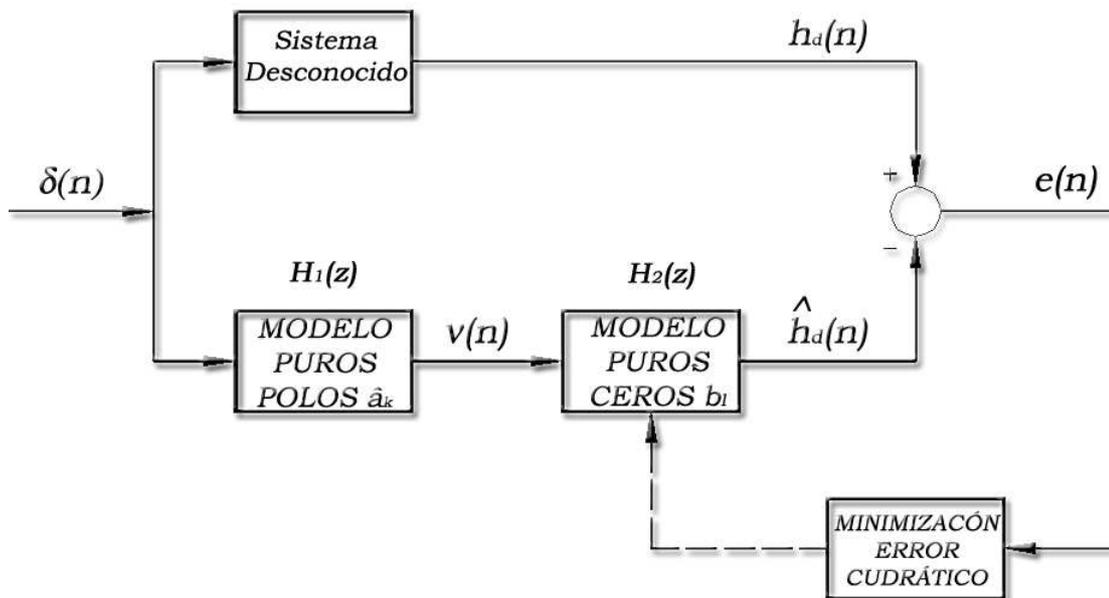


Figura 2.5: Diagrama del Método de Shanks

Para empezar a explicar este procedimiento, supongamos que los coeficientes  $\hat{a}_k$  del modelo AR ya fueron determinados con la ayuda de (4.2.6), gracias a esto podemos sintetizar el filtro puros polos descrito por (2.4.16) con ganancia unitaria.

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}} \quad (2.4.16)$$

Al aplicar una entrada  $x(n) = \delta(n)$  al filtro AR de (2.4.16), obtenemos la respuesta del filtro denotada por la variable  $v$  tal y como se muestra en la Figura 2.5 y expuesta en la siguiente ecuación:

$$v = - \sum_{k=1}^N \hat{a}_k v(n-k) + \delta n, \quad n \leq 0 \quad (2.4.17)$$

Si la secuencia  $v$  denotada por (3.2.12) es usada para excitar un filtro puros ceros con función de transferencia  $H_2(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$\hat{h}_d(n) = \sum_{l=0}^M b_l v(n-l) \quad (2.4.18)$$

Una vez definida la variable  $\hat{h}_d$ , nos es posible definir la secuencia del error  $e(n)$  como:

$$\begin{aligned} e(n) &= h_d - \hat{h}_d(n) \\ &= h_d - \sum_{l=0}^M b_l v(n-l), \quad n = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Por lo tanto, ahora el objetivo es encontrar los mejores coeficientes  $b_l$ , tal que la secuencia del error indicada por (2.4.19) sea mínima. A diferencia de la sección anterior, en donde los coeficientes  $a_k$  se generaron aplicando el principio del mínimo valor relativo de (2.4.6), en esta sección se propone encontrar los coeficientes  $b_l$  aplicando el principio de ortogonalidad visto en la Sección 1.2.

Rescribiendo (2.4.19) en forma matricial se obtiene (2.4.20).

$$e = h_d - Vb \quad (2.4.20)$$

donde  $e$  es definido como un vector de longitud  $L$   $e = [e(1), e(2), \dots, e(L)]^T$ , la variable  $h_d$  también es definida como un vector  $h_d = [h_d(1), h_d(2), \dots, h_d(L)]^T$  de la misma longitud  $L$ , los coeficientes  $b_l$  son definidos con un vector  $b = [b_0, b_1, \dots, b_M]^T$  de longitud  $M$  y por último la variable  $V$  de longitud  $L \times (M + 1)$ , que es una matriz de datos formada por la respuesta  $v(n)$  del filtro  $H_1(z)$  (véase (2.4.21)), la cual puede verse como el plano donde se desea encontrar  $\hat{h}_d(n) = Vb$  tal que el error  $e(n)$  (2.4.20) sea mínimo (véase Figura 2.2).

$$V = \begin{bmatrix} v(1) & 0 & \cdots & 0 \\ v(2) & v(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v(M+1) & v(M) & \cdots & v(1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v(L) & v(L-1) & \cdots & v(L-M) \end{bmatrix} \quad (2.4.21)$$

Una vez definidos cada uno de los elementos de (2.4.20), lo siguiente es aplicar el principio de ortogonalidad ( $V \perp e \therefore V^*e = 0$ ), el cual consiste en premultiplicar ambos lados de la ecuación por  $V^*$  y despejando para  $\hat{b}$ , de esta forma se genera el vector que minimiza el error expresado en (2.4.19). Todo lo anterior se expone en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} V^*e &= V^*h_d - V^*V\hat{b} \\ 0 &= V^*h_d - V^*V\hat{b} \\ V^*V\hat{b} &= V^*h_d \\ \hat{b} &= [V^*V]^{-1}V^*h_d \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

donde  $\hat{b}$  corresponde al vector de coeficientes  $b_l$  que minimizan el error de estimación descrita por (2.4.19).

Al analizar (2.4.22) observamos que el elemento  $V^*V$  corresponde a la matriz de autocorrelación  $R_{vv}$  formada por la secuencia de datos  $v(n)$ , y  $V^*h_d$  representa la correlación cruzada  $r_{h_d v}$  entre los términos  $h_d$  y la secuencia de datos  $v(n)$ . Rescribiendo (2.4.22) y tomando en

cuenta las definiciones anteriores, se produce la siguiente ecuación:

$$b = R_{vv}^{-1} r_{h_d v}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{vv}(1) & r_{vv}(2) & \cdots & r_{vv}(M+1) \\ r_{vv}(2) & r_{vv}(1) & \cdots & r_{vv}(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{vv}(M+1) & r_{vv}(M) & \cdots & r_{vv}(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{h_d v}(1) \\ r_{h_d v}(2) \\ \vdots \\ r_{h_d v}(M+1) \end{bmatrix} \quad (2.4.23)$$

Observamos que la matriz  $R_{vv}$  no sólo es simétrica sino que también tiene la propiedad especial de que todos los elementos a lo largo de cualquier diagonal son iguales. Tales matrices se denominan matrices de Toeplitz y conducen a inversiones eficientes por medio del algoritmo de Levinson.

Gracias al principio de ortogonalidad nos fue posible calcular los mejores coeficientes  $\hat{b}_l$  tal que el error  $e(n)$  fuese mínimo. Dado que en esta sección se aplicó la metodología de mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros  $\hat{a}_k$  y  $\hat{b}_l$ , es de esperarse que el método de Shanks proporcione los mejores resultados de estimación de la señal e identificación del sistema desconocido en comparación con los dos métodos propuestos anteriormente, esto quedará evidenciado en la siguiente sección.

## 2.5 Evaluación y Comparación de los Métodos de Predicción Lineal

En esta sección se efectuará la evaluación y comparación de cada una de las metodologías descritas en el presente capítulo (Padé, Prony, Shanks) con la ayuda de un ejemplo. Con la finalidad de seleccionar el método de estimación e identificación que mejor se adapte a los cambios abruptos del sistema desconocido.

Por tal motivo, se propone aproximar la respuesta impulsional  $h_d(n)$  de un filtro digital de Chebyshev paso bajo de tipo II con una frecuencia de corte en la banda de paso de  $\omega_p = \frac{\pi}{6}$  y una frecuencia de corte en la banda de rechazo de  $\omega_s = \frac{\pi}{2}$  con función de transferencia  $H_d(z)$  y mostrada en (2.5.1), aplicando los tres métodos de aproximación descritos anteriormente en este capítulo.

$$H_d(z) = \frac{0.3060(1 + z^{-1})(0.2652 - 0.09z^{-1} + 0.2652z^{-2})}{(1 - 0.3880z^{-1})(1 - 1.1318z^{-1} + 0.5387z^{-2})} \quad (2.5.1)$$

La respuesta impulsional  $h_d(n)$  correspondiente a (2.5.1), se ilustra en la Figura 2.6.

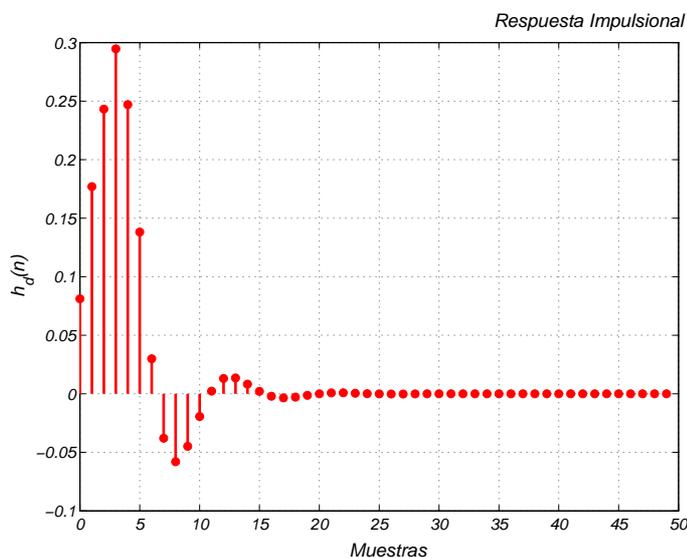


Figura 2.6: Respuesta impulsional  $h_d(n)$  del filtro digital Chebyshev de Tipo II

Al examinar el filtro deseado  $H_d(z)$  en (2.5.1), observamos que está compuesto por  $M = 3$  ceros y  $N = 3$  polos, por lo que se propone realizar la aproximación de  $H_d(z)$  aplicando los diferentes métodos descritos anteriormente, pero variando el número de coeficientes  $N$  y  $M$  del modelo propuesto ( $N = 3, M = 2$ ;  $N = 3, M = 3$ ;  $N = 4, M = 2$ ;  $N = 4, M = 3$ ).

## Método de Padé

Resulta de manera instructiva determinar los coeficientes de la aproximación de Padé con la ayuda de (2.4.3) y (2.4.4), cuando el número de ceros y polos no es idéntico al número deseado de parámetros del filtro  $H_d(z)$ . En la Figura 2.7 se representa la respuesta en frecuencia del filtro obtenido mediante el método de aproximación de Padé, considerando los cuatro casos propuestos anteriormente.

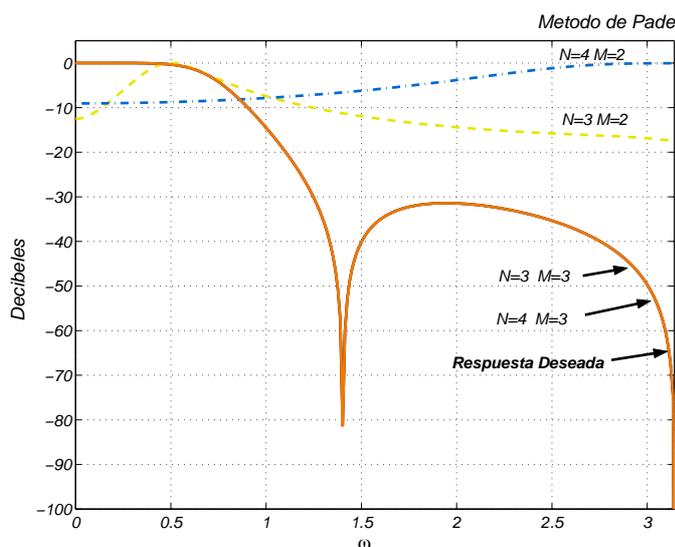


Figura 2.7: Diseño de Filtro basado en el método de Padé

Al analizar la Figura 2.7, se observa que la respuesta en frecuencia que ofrece la metodología de Padé para los casos  $M = 2$  y  $N = 3, 4$ , es una aproximación relativamente pobre a la respuesta deseada y en algunos casos hasta inestable en la respuesta impulsional. Sin embargo, al momento de incrementar el número de coeficientes en la metodología de Padé a  $M = 3$  y  $N = 3, 4$ , se genera un ajuste casi perfecto al filtro Chebyshev de Tipo II deseado, por lo que se concluye que cuando los coeficientes de la aproximación de Padé igualan o exceden al número de coeficientes de la respuesta deseada, se obtienen ajustes casi perfectos, mientras que en el caso contrario las aproximaciones carecen de exactitud.

Cuando no se conoce el orden de la respuesta en frecuencia deseada, lo que se recomienda es variar los valores de  $M$  y  $N$  hasta que las respuestas de los filtros resultantes converjan a la respuesta en frecuencia deseada, dentro de un error de aproximación aceptable. Este es el motivo por el cual esta técnica resulta tediosa.

### Método de Prony

El siguiente caso que se propone es aproximar nuevamente la respuesta en frecuencia del filtro Chebyshev de Tipo II, denotada por (2.5.1), considerando de nuevo la variación de los elementos  $N$  y  $M$  del modelo propuesto, pero ahora aplicando la metodología de Prony descrita en la Sección 1.3.2.

Con la ayuda de (4.2.6) y (2.4.15) y considerando la variación de los elementos  $M$  y  $N$  se generan los coeficientes  $\hat{a}_k$  y  $\hat{b}_l$  de los cuales se obtiene la respuesta en frecuencia mostrada en la Figura 2.8.

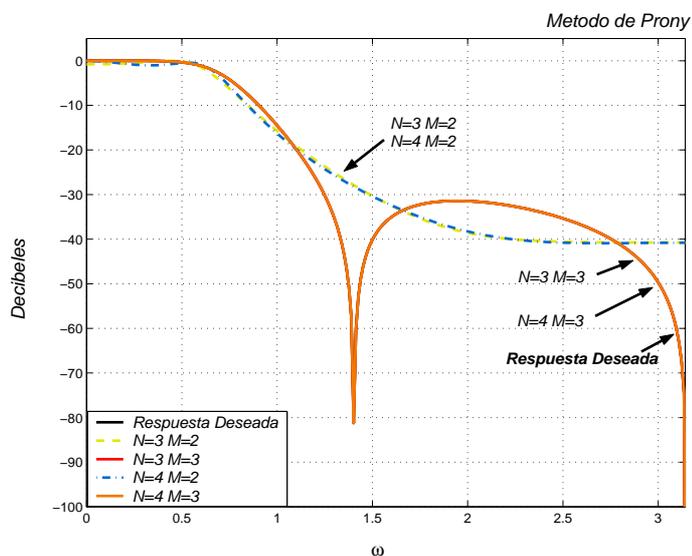


Figura 2.8: Diseño de Filtro basado en el método de Prony

Al analizar la Figura 2.8, se observa que la respuesta en frecuencia que nos proporciona

la metodología de Prony para el caso  $M = 2$  y  $N = 3$ , presenta un comportamiento y un rizado aceptable en la banda de paso. Sin embargo, un incremento en el número de polos de  $N = 3$  a  $N = 4$  parece compensar en parte la carencia de un cero; no obstante, al momento de incrementar el número de coeficientes en la metodología de Prony a  $M = 3$  y  $N = 3, 4$ , se genera un ajuste perfecto al filtro Chebyshev de Tipo II deseado. Por lo tanto, a pesar de que el método de Prony no iguala o supera la misma cantidad de elementos que el filtro deseado  $H_d(z)$ , este método se caracteriza por proporcionar buenos estimados de dicho filtro, esto se debe a la aplicación del principio de mínimos cuadrados para generar los coeficientes  $a_k$  del denominador; en caso contrario, cuando los elementos del filtro propuesto igualan o superan en número a los elementos del filtro deseado  $H_d(z)$ , se producen ajustes perfectos.

### **Método de Shanks**

El siguiente y último caso que se analizará es aproximar una vez más la respuesta en frecuencia del filtro deseado Chebyshev de Tipo II, tomando en cuenta nuevamente la variación de los elementos  $M$  y  $N$  del modelo propuesto, pero aplicando la metodología de Shanks vista en la Sección 1.3.3.

Tomando en cuenta que los coeficientes  $a_k$  del modelo puros polos ya fueron determinados mediante el método de Prony, lo siguiente es obtener la respuesta  $v$  del modelo AR y, con la ayuda de la respuesta impulsional deseada  $h_d(n)$  mostrada en la Figura 2.6, generar las secuencias de autocorrelación  $r_{dd}(k, m)$  y  $r_{dd}(m)$  (véase (4.2.7) y (4.2.8)). Enseguida, se resuelve el conjunto de ecuaciones lineales denotados por (2.4.22) para obtener los coeficientes  $b_l$  del modelo puros ceros, todo esto considerando la variación de los elementos  $M$  y  $N$  del modelo propuesto. En la Figura 2.9 se representa la respuesta en frecuencia del filtro obtenido mediante el método de Shanks, considerando las diversas variantes de  $M$  y  $N$ .

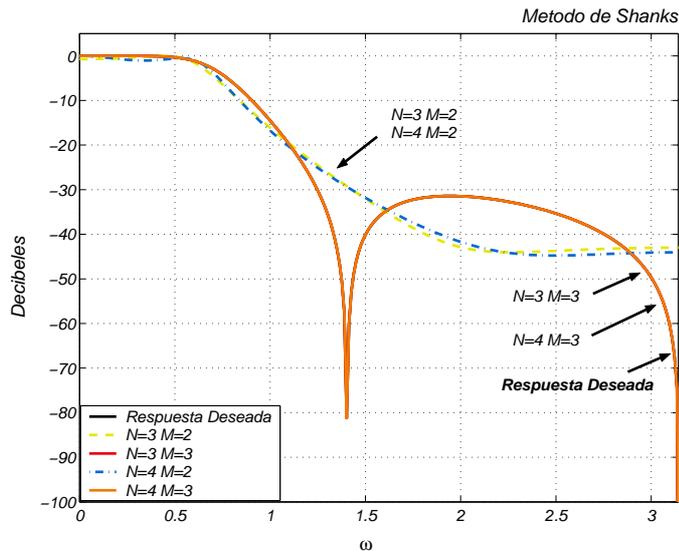


Figura 2.9: Diseño de Filtro basado en el método de Shanks

Al estudiar la Figura 2.9 y compararla con la Figura 2.8 correspondiente al método de Prony observamos que ambas poseen el mismo comportamiento y un rizado aceptable en la banda de paso para los casos de  $M = 2$  y  $N = 3, 4$ , excepto en la banda de paro, donde la Figura 2.9 se caracteriza por tener una magnitud menor a los  $-41 \text{ dB}$ . Esto es a causa de que en el método de Shanks se hace uso del principio de mínimos cuadrados para la estimación los coeficientes  $b_l$  del filtro puros ceros. Sin embargo al aumentar el número de coeficientes del filtro propuesto a  $M = 3$  y  $N = 3, 4$ , se genera un ajuste perfecto al filtro deseado Chebyshev de Tipo II. Por lo que se concluye que, a pesar de que el modelo propuesto aplicando la metodología de Shanks no iguala o supera el número de elementos del filtro deseado  $H_d(z)$ , se considera que dicha metodología proporciona una aproximación adecuada; en el caso contrario, se obtienen estimados perfectos de la respuesta en frecuencia del filtro deseado. En la Tabla 2.1 se hace una comparación de los valores de la sumatoria del error cuadrático obtenidas mediante las tres metodologías anteriormente descritas considerando la variación de los elementos  $M$  y  $N$ .

Tabla 2.1: Evaluación del Error de Estimación.

<b>Orden del filtro</b>	<b>Método de Padé</b>	<b>Método de Prony</b>	<b>Método de Shanks</b>
N=3 M=2	$2.509 \times 10^7$	0.0082139	0.0035044
N=3 M=3	$9.0268 \times 10^{-32}$	$4.1382 \times 10^{-30}$	$1.6182 \times 10^{-30}$
N=4 M=2	$2.1244 \times 10^{26}$	0.0074365	0.0031356
N=4 M=3	$1.4901 \times 10^{-31}$	$2.0633 \times 10^{-30}$	$9.1236 \times 10^{-31}$

Al analizar la Tabla 2.1 observamos que al usar el método de Padé se obtienen errores muy grandes cuando el orden del modelo propuesto es menor que el filtro deseado, esto sucede para los casos cuando  $M = 2$  y  $N = 3, 4$ ; en cambio, cuando se aplican los métodos de Prony y Shanks se producen errores de estimación tolerables a pesar de que el orden del modelo propuesto no corresponde al orden del modelo deseado  $H_d(z)$ . Si comparamos ahora sólo los errores de estimación de los métodos Prony y Shanks para los casos  $M$  y  $N$  ya mencionados, notamos que el error producido al aplicar el método de Prony es más del doble que el error generado por el método de Shanks, esto es a causa de que en este último sí se aplica el principio de mínimos cuadrados para obtener los coeficientes del filtro puro polos así como los del filtro puros ceros.

A pesar de que el método de Padé proporciona los errores de estimación más pequeños cuando el orden del filtro propuesto es igual o mayor que el filtro deseado  $H_d(z)$ , este es descartado puesto que presenta valores de error excesivamente altos cuando el orden que maneja es menor al orden de  $H_d(z)$ .

En cuanto a los métodos de Prony y Shanks, ambos presentan valores de error permisibles, sin embargo, es el método de Shanks el que proporciona la ventaja de minimizar aún más el error de estimación, motivo por el cual éste es elegido en esta investigación para llevar a cabo la estimación fasorial de las señales de oscilación de potencia.

## 2.6 Conclusiones del capítulo

Al manejar los algoritmos que hacen uso del principio de mínimos cuadrados observamos que estos presentan ciertas características que hacen atractiva su implementación, las cuales son:

- Su fácil manejo matemático.
- Su sencilla interpretación matemática vista desde un punto de algebra vectorial, donde la función de esta metodología es encontrar el mejor plano tal que el error de estimación sea mínimo.
- La existencia de algoritmos numéricamente eficientes para su solución, tal como el algoritmo de Levinson para la inversión de la matriz de Toeplitz.
- Se generan soluciones óptimas, es decir se obtienen los mejores estimados que satisfacen la sumatoria cuadrática del error (2.2.5).

Existen varias alternativas para la solución de las ecuaciones normales tanto de los elementos MA y AR, de estas soluciones se expusieron dos, donde la solución utilizando el principio de

ortogonalidad es la que mejor se facilita su interpretación.

En este capítulo se presentaron diversas metodologías para la identificación del sistema desconocido, las cuales fueron evaluadas y los resultados se muestran en la Tabla 2.1. Al analizar los resultados, concluimos que los algoritmos que hacen uso del principio mínimos cuadrados cumplen con las características que fueron mencionadas anteriormente, independientemente de que el número de elementos sea menor al del sistema desconocido, motivo por el cual, la metodología de Shanks proporciona los mejores resultados para la identificación del sistema desconocido ya que tanto los elementos de los modelos MA y AR son estimados por el principio de mínimos cuadrados.

# Capítulo 3

## Modelo Matemático de la Oscilación

### 3.1 Introducción

Debido a la creciente demanda de energía eléctrica y a la falta de medios de transmisión de energía, es común que los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP) trabajen en sus límites operativos, es decir, que se encuentren sometidos a un gran estrés, por lo tanto, el realizar conmutaciones de carga o el liberar fallas en el sistema, ocasiona que los SEP presenten oscilaciones de potencia las cuales se caracterizan por tener lentas variaciones de amplitud a frecuencias menores a la fundamental. Esto bajo ciertas circunstancias podría ser un indicio de pérdida de estabilidad y un riesgo de un colapso en los SEP.

En condiciones transitorias los modelos tradicionales de estimación fasorial consideran fase y amplitud constante, lo que implica una fuerte restricción para poder controlar y monitorear los SEP. En esta tesis se realiza un estudio del modelo tradicional usado para la estimación fasorial, así como la propuesta de un nuevo modelo de estimación, el cual asume las variaciones de amplitud y fase de los parámetros característicos del SEP (señales de voltaje y corriente) en función del tiempo, lo que implica un mejor control y monitoreo de los SEP bajo condiciones transitorias.

## 3.2 Metodología

Hoy en día, las oscilaciones de potencia se presentan cada vez con mayor frecuencia en los SEP, por lo que su medición y control bajo esas circunstancias se torna en un problema cada vez más importante. El objetivo de estas tesis es realizar un estudio del modelo tradicional (modelo constante) de medición fasorial, el cual considera amplitud y fase constante sobre todo el intervalo. La expresión que representa el modelo tradicional de estimación fasorial está dada por:

$$s(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.1)$$

El considerar fase y amplitud constante durante todo el intervalo es una fuerte restricción, pues disminuye la posibilidad de controlar y monitorear los parámetros del sistema bajo condiciones transitorias [1], por lo que se propone un nuevo modelo de estimación fasorial que considere variaciones tanto de amplitud como de fase en función del tiempo evaluado durante todo el intervalo. Es decir,

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.2)$$

Rescribiendo (3.2.2), en función de exponenciales complejas resulta en:

$$s(t) = \frac{1}{2} \left[ P(t) e^{j\omega_0 t} + P(t)^* e^{-j\omega_0 t} \right] \quad (3.2.3)$$

donde el término  $P(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$  es conocido en la literatura como la *envolvente compleja* de la señal; sin embargo, en esta tesis es llamado **fasor dinámico** [12] por el uso que se le dará más adelante.

Ahora nuestro problema reside en conocer el fasor dinámico propuesto en (3.2.3), la cual puede ser aproximada mediante la serie de Taylor de orden  $k$  (3.2.4). En este trabajo dicha serie debe ser truncada en el término de segundo orden (3.2.5) y evaluada en intervalos de  $T$  debido a que la convergencia que presenta a partir de este término se considera adecuada, lo cual será corroborado más adelante:

$$P(t) = P(0) + P'(0)\frac{t}{1!} + P''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots + P^{k-1}(0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + P^k(0)\frac{t^k}{(k)!} \quad (3.2.4)$$

$$\bar{P}^{(2)}(t) = P_0^{(2)} + P_1^{(2)}\frac{t}{1!} + P_2^{(2)}\frac{t^2}{2!} \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.5)$$

donde  $\bar{P}$  representa la serie de Taylor truncada y el superíndice (2) indica hasta que término fue truncada la serie, mientras que  $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$  representan las distintas derivadas del fasor dinámico evaluadas a la derecha del intervalo en el punto  $t_0$ :

$$P_0 = P(0), P_1 = P'(0) \text{ y } P_2 = P''(0)$$

Obtenida la serie de Taylor truncada, se reescribe (3.2.3) sustituyendo  $P(t)$  por  $\bar{P}(t)$ . Con esto se obtiene un nuevo modelo de segundo orden para la estimación fasorial el cual, expresado en función de exponenciales complejas, queda de la siguiente manera:

$$\hat{s}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)}\frac{t}{1!} + P_2^{(2)}\frac{t^2}{2!} \right] e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \left[ P_0^{(2)*} + P_1^{(2)*}\frac{t}{1!} + P_2^{(2)*}\frac{t^2}{2!} \right] e^{-j\omega t} \quad (3.2.6)$$

Enseguida, (3.2.6) es discretizada resultando en:

$$\hat{s}^{(2)}(n) = \frac{1}{2} \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)}\frac{n}{1!} + P_2^{(2)}\frac{n^2}{2!} \right] e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} \left[ P_0^{(2)*} + P_1^{(2)*}\frac{n}{1!} + P_2^{(2)*}\frac{n^2}{2!} \right] e^{-j\omega_0 n} \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.2.7)$$

Expresando (3.2.7) en función de cosenos, se genera la siguiente ecuación:

$$\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n) \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.2.8)$$

donde  $N$ , en (3.2.7) y en (3.2.8), es la cantidad de muestras por periodo de muestreo y  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ .

Disponiendo del modelo de segundo orden de estimación fasorial, lo siguiente es obtener los coeficientes correspondientes a la serie de Taylor truncada (3.2.5). Para esto se propone que el modelo dado por (3.2.8) sea considerado como un filtro de predicción lineal y que sus coeficientes se estimen en tiempo discreto. Por ello, es necesario obtener la función de transferencia del modelo, por lo que se sugiere realizar la transformada "z" de (3.2.7), resultando en lo siguiente:

$$\frac{\bar{S}^{(2)}(z)}{z} = \frac{P_0^{(2)}}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{P_1^{(2)} e^{j\omega_0}}{(z - e^{j\omega_0})^2} + \frac{1}{2!} \frac{P_2^{(2)} e^{j\omega_0} z}{(z - e^{j\omega_0})^3} + \frac{P_0^{(2)*}}{z - e^{-j\omega_0}} + \frac{P_1^{(2)*} e^{-j\omega_0}}{(z - e^{-j\omega_0})^2} + \frac{1}{2!} \frac{P_2^{(2)*} e^{-j\omega_0} z}{(z - e^{-j\omega_0})^3} \quad (3.2.9)$$

Al obtenerse un común denominador de (3.2.9) y al reagrupar los términos semejantes del numerador, se genera un modelo ARMA de sexto orden correspondiente al modelo de señal propuesto en (3.2.8), el cual se muestra enseguida:

$$\bar{S}^{(2)}(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q=5} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{p=6} a_k z^{-k}} \quad (3.2.10)$$

Analizando (3.2.10) notamos que los coeficientes  $a_k$ , correspondientes al denominador, constituyen tres pares de polos complejos conjugados ubicados sobre la circunferencia unidad en el plano "z", los cuales aportan información de la frecuencia  $\omega_0$ , siendo esta última la frecuencia nominal del SEP.

Otra forma de ver los coeficientes  $a_k$  del modelo AR (modelo puros polos)  $\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^6 a_k z^{-k}}$ , es como un *oscilador digital sinusoidal* el cual se caracteriza por tener sus pares de polos complejos conjugados sobre la circunferencia unidad, tal y como se muestra en la Figura 4.3.

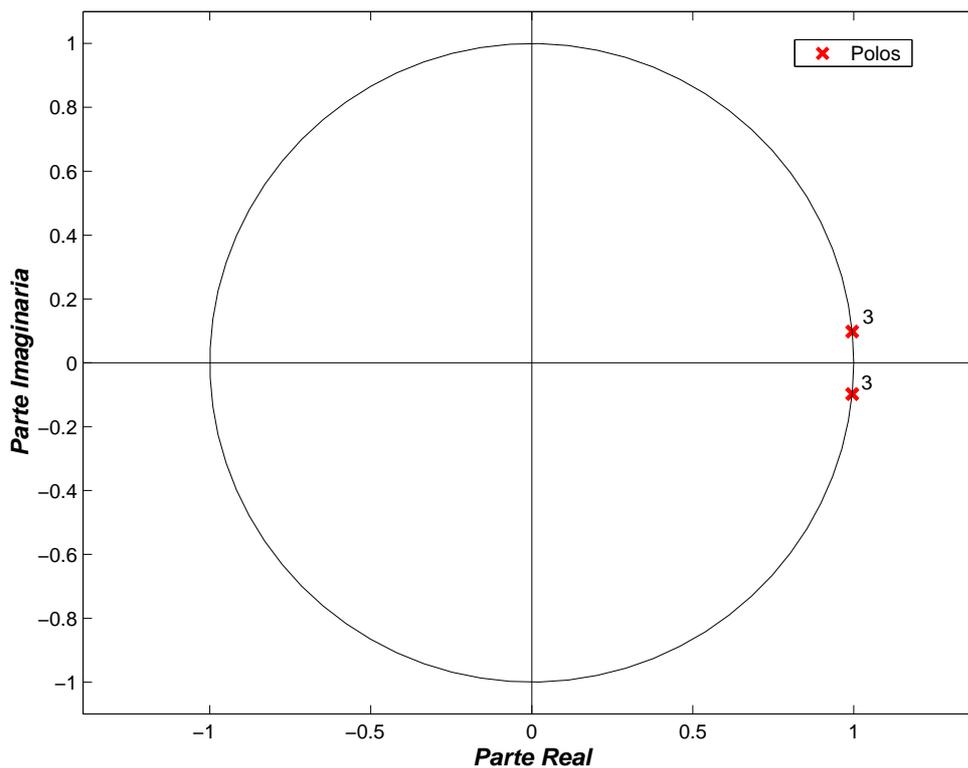


Figura 3.1: Polos en el Plano Z

Por lo que respecta a los coeficientes  $b_l$  que forman al modelo MA (modelo puros ceros)  $\sum_{l=0}^{q=5} b_l z^{-l}$ , estos aportan la información correspondiente a la amplitud y fase del modelo ARMA, es decir, la información fasorial [8].

Ya analizados los significados de los coeficientes  $a_k$  y  $b_l$ , se sugiere el método de Shanks para la estimación de los coeficientes  $b_l$ . Este método se basa en el principio de mínimos cuadrados. A continuación se muestra un diagrama del método propuesto.

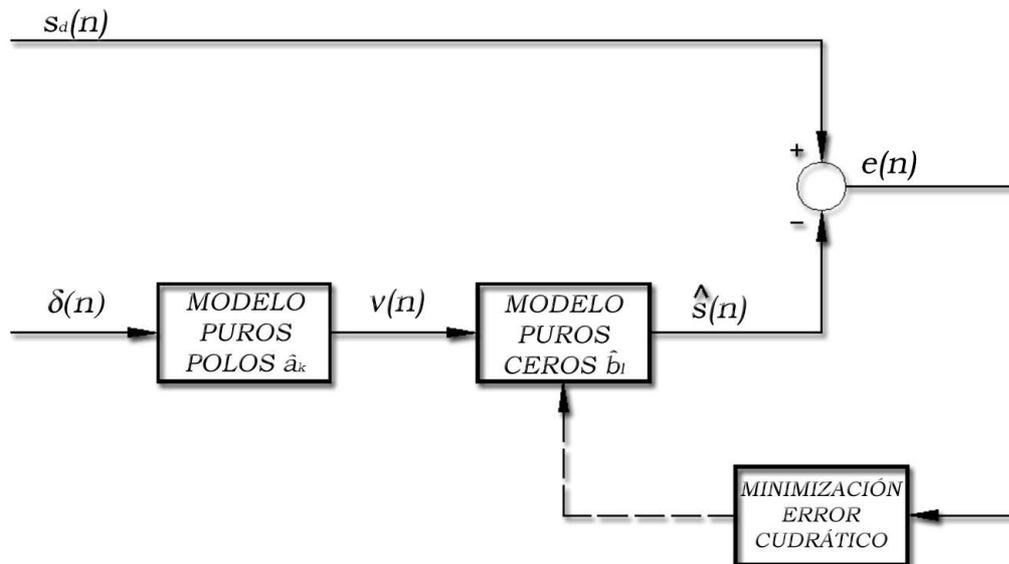


Figura 3.2: Diagrama Shanks

Al examinar la Figura 3.2, observamos que el modelo correspondiente a los coeficientes  $a_k$  ya es conocido, pues se refiere a la información de la frecuencia  $\omega_0$  del modelo de segundo orden descrito por (3.2.8), por lo tanto, solamente falta determinar los coeficientes  $b_l$  concernientes al Modelo Puros Ceros. De esta manera se produce el modelo ARMA de predicción lineal, el cual se obtiene y se excita por pulsos unitarios  $\delta(n)$  cada  $N$  muestras, de esta forma se reconstruye la señal  $\hat{s}(n)$  por pequeños intervalos de longitud  $N$ , donde el *error de estimación* (3.2.11) se produce por la diferencia entre la señal deseada  $s_d(n)$  y la señal estimada  $\hat{s}(n)$ . El error es minimizado utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados.

Lo anterior se logra con la ayuda de los coeficientes  $a_k$  y  $\hat{b}_l$ , donde en este caso los coeficientes  $a_k$  nos proporcionan el subespacio relacionado con la frecuencia nominal del sistema para  $\hat{s}(n)$ , mientras que los coeficientes  $\hat{b}_l$  ajustan su amplitud y su fase. Ya que los coeficientes  $a_k$  son conocidos, lo que se pretende es proyectar el vector correspondiente a la señal deseada  $s_d(n)$  sobre el subespacio de  $\omega_0$  y, con la ayuda de los coeficientes  $\hat{b}_l$ , ajustar la amplitud y la fase del vector  $\hat{s}(n)$ , de tal forma que el error  $e(n)$  sea el mínimo, tal y como se detalla en la Figura 3.3.

$$\begin{aligned}
 e(n) &= s_d(n) - \hat{s}(n) \\
 &= s_d(n) - \sum_{l=0}^q b_l v(n-l)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.11}$$

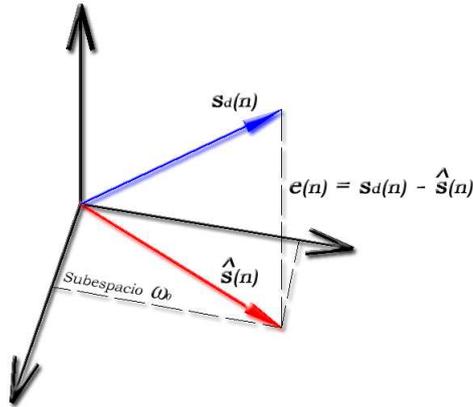


Figura 3.3: Proyección de  $s_d(n)$  sobre el subespacio formado por  $\omega_0$

Analizando el diagrama de Shanks mostrado en la Figura 3.2, observamos que la respuesta  $v(n)$  del filtro AR es:

$$v(n) = - \sum_{k=1}^q a_k v(n-k) + \delta(n) \tag{3.2.12}$$

donde  $\delta(n)$  corresponde a la señal de entrada aplicada al modelo puros polos.

Si la respuesta  $v(n)$  la aplicamos para excitar el filtro MA  $\left( \sum_{l=0}^q b_l z^{-k} \right)$ , la respuesta del filtro queda expresada de la siguiente manera:

$$\hat{s}(n) = \sum_{l=0}^q \hat{b}_l v(n-l) \tag{3.2.13}$$

Ahora, si (3.2.13) la sustituimos en (3.2.11) y la elevamos al cuadrado, se obtiene la *suma de los cuadrados de la secuencia del error* (3.2.14), por lo tanto los coeficientes  $b_l$  se seleccionan

de tal manera que se minimiza dicha sumatoria.

$$\mathcal{E}(q) = \sum_{n=0}^N \left[ s_d(n) - \sum_{l=0}^q b_l v(n-l) \right]^2 \quad (3.2.14)$$

Diferenciando (3.2.14) con respecto a los coeficientes  $b_l$  para obtener el mínimo valor relativo de la función cuadrática se obtienen las *ecuaciones normales*, las cuales están formadas por un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\sum_{l=0}^q b_l r_{vv}(l, m) = r_{s_d v}(m) \quad m = 0, 1, \dots, q \quad (3.2.15)$$

donde por definición:

$$\begin{aligned} r_{vv}(l, m) &= \sum_{n=0}^N v^*(n-l)v(n-m) \\ r_{s_d v}(l) &= \sum_{n=0}^N s_d(n)v^*(n-l) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Ya adquiridos los coeficientes  $a_k$  y  $\hat{b}_l$ , se puede construir el modelo ARMA referente a la señal estimada, el cual tiene la siguiente forma:

$$\hat{S}(z) = \frac{\sum_{l=0}^q b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}} \quad (3.2.17)$$

Los límites superiores de los sumadores  $q$  y  $p$  son de 5° y 6° orden respectivamente, los cuales se originan del modelo de estimación fasorial de segundo orden (3.2.8). La reconstrucción de la señal  $\hat{s}(n)$  se logra excitando con impulsos unitarios  $\delta(n)$  de longitud  $N$  al modelo ARMA (3.2.17) como se ha mencionado anteriormente.

Hasta este momento se ha logrado reconstruir la señal estimada  $\hat{s}(n)$ , pero aún no se ha resuelto la problemática de obtener los coeficientes  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  referentes a la serie de Taylor truncada (3.2.5), los cuales corresponden a la envolvente y a la fase de la señal estimada.

Una forma de conocer los coeficientes  $P_i$  es realizando la *demodulación* de la señal estimada, la cual se adquiere por medio de la expansión de fracciones parciales de (3.2.17).

Realizando la expansión en fracciones parciales se genera lo siguiente:

$$\frac{\hat{S}^{(2)}(z)}{z} = \frac{\hat{P}_0^{(2)}}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{\hat{P}_1^{(2)} e^{j\omega_0}}{(z - e^{j\omega_0})^2} + \frac{\hat{P}_2^{(2)} e^{j\omega_0} z}{(z - e^{j\omega_0})^3} + \frac{\hat{P}_0^{(2)*}}{z - e^{-j\omega_0}} + \frac{\hat{P}_1^{(2)*} e^{-j\omega_0}}{(z - e^{-j\omega_0})^2} + \frac{\hat{P}_2^{(2)*} e^{-j\omega_0} z}{(z - e^{-j\omega_0})^3} \quad (3.2.18)$$

Al analizar (3.2.18), se observa que los coeficientes  $\hat{P}_i$  se encuentran en el numerador de cada término de la ecuación, por lo que se opta por realizar la transformada inversa  $z^{-1}$  de (3.2.18) de manera que se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{s}^{(2)}(n) = & \hat{P}_0^{(2)} e^{j\omega_0 n} + \hat{P}_1^{(2)} n e^{j\omega_0 n} + \frac{\hat{P}_2^{(2)} n^2}{2!} e^{j\omega_0 n} \\ & \hat{P}_0^{(2)*} e^{-j\omega_0 n} + \hat{P}_1^{(2)*} n e^{-j\omega_0 n} + \frac{\hat{P}_2^{(2)*} n^2}{2!} e^{-j\omega_0 n} \end{aligned} \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.2.19)$$

La forma de reconstruir  $\hat{s}^{(2)}(n)$  por medio de (3.2.19) es simplemente evaluando  $n$  en un intervalo de 0 a  $N - 1$ .

Una vez obtenidos los términos  $\hat{P}_0^{(2)}$ ,  $\hat{P}_1^{(2)}$ ,  $\hat{P}_2^{(2)}$  del *fasor dinámico*  $\hat{P}^{(2)}$ , es importante conocer la información que cada uno de ellos proporciona. El primero de ellos,  $\hat{P}_0^{(2)}$ , tiene la función de aportar una muestra del fasor dinámico; el segundo,  $\hat{P}_1^{(2)}$ , se encarga de facilitarnos la velocidad con la que cambia dicho fasor y por último; el tercero,  $\hat{P}_2^{(2)}$ , nos brinda la información acerca de la aceleración de cambio que tiene el fasor dinámico. En caso de que el sistema (SEP) se encontrara en *estado estable*, la información que proporcionarían los fasores de primer y segundo orden ( $\hat{P}_1^{(2)}$ ,  $\hat{P}_2^{(2)}$ ) sería nula.

Como ya es sabido, el fasor dinámico  $\hat{P}_i(n)$  es un número complejo, por lo tanto, está compuesto de amplitud y fase, siendo conveniente conocer cada uno de estos elementos por separado. Esto se logra aplicando la serie de Taylor al *fasor dinámico*, tal y como se muestra

en (3.2.5). Al desarrollar cada uno de los términos de dicha ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0 &= a(0) \frac{e^{j\phi(0)}}{2} \\
\hat{P}_1 &= \frac{e^{j\phi(0)}}{2} \left[ a'(0) + j\phi' e^{j\phi(0)a(0)} \right] \\
\hat{P}_2 &= \frac{e^{j\phi(0)}}{2} \left[ a''(0) - a(0)\phi'^2(0) + j(a(0)\phi''(0) + 2a'(0)\phi''(0)) \right]
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Despejando la amplitud y la fase de cada fasor correspondiente a (3.2.20) resulta:

$$\begin{aligned}
\hat{a}(0) &= 2|\hat{P}_0 e^{-j\phi(0)}| \\
\hat{\phi}(0) &= \angle \hat{P}_0 \\
\hat{a}'(0) &= 2\text{Real}\left\{ \hat{P}_1 e^{-j\phi(0)} \right\} \\
\hat{\phi}'(0) &= \frac{2\text{Imag}\left\{ \hat{P}_1 e^{-j\phi(0)} \right\}}{a(0)} \\
\hat{a}''(0) &= a(0)\phi'^2(0) + 2\text{Real}\left\{ \hat{P}_2 e^{-j\phi(0)} \right\} \\
\hat{\phi}''(0) &= \frac{2\text{Imag}\left\{ \hat{P}_2 e^{-j\phi(0)} \right\} - 2a'(0)\phi''(0)}{a(0)}
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

De esta forma ya podemos reconstruir la amplitud y la fase de  $\hat{s}(n)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\hat{a}(n) &= \hat{a}(0) + \hat{a}'(0)n + \frac{\hat{a}''(0)n^2}{2!} \\
\hat{\phi}(n) &= \hat{\phi}(0) + \hat{\phi}'(0)n + \frac{\hat{\phi}''(0)n^2}{2!}
\end{aligned} \quad 0 \leq n \leq N \tag{3.2.22}$$

En la Figura 3.4 se muestra un diagrama de flujo que resume la metodología explicada anteriormente para la estimación fasorial.

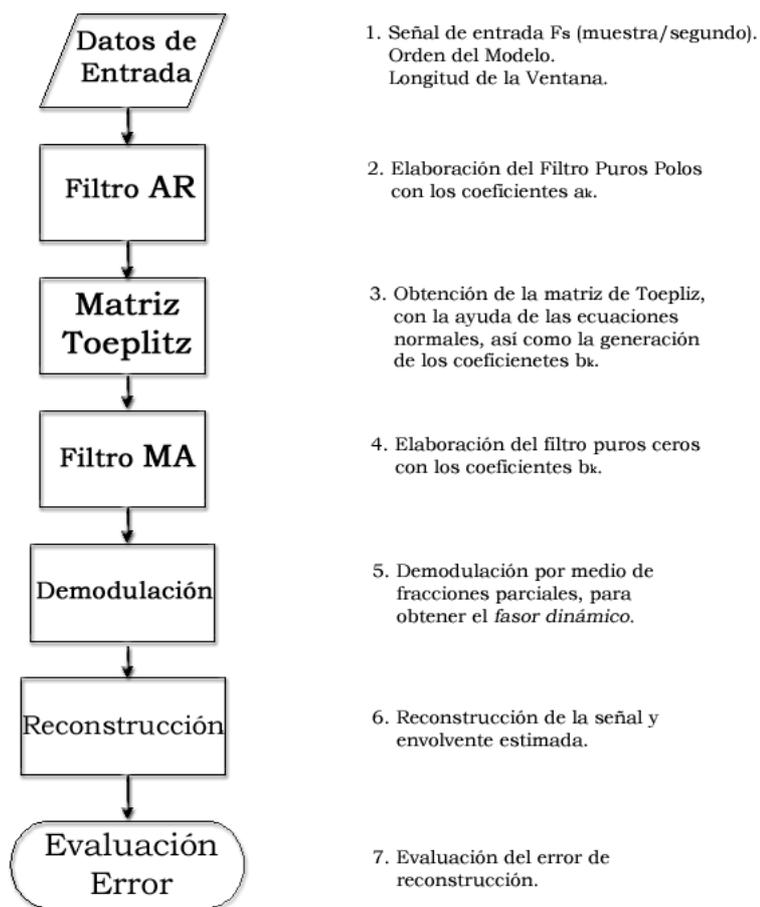


Figura 3.4: Diagrama de Flujo de Estimación Fasorial

### 3.2.1 Análisis Temporal

En la siguiente subsección se realizará el análisis, así como la evaluación de una señal teórica propuesta, aplicando los modelos constante, lineal y cuadrático, correspondientes al modelo de estimación fasorial, propuesto en la Subsección 3.2, continuando con la estimación de una señal real obtenida de un PMU (Unidad de Medición Fasorial) de la red mexicana, aplicando el modelo de estimación fasorial por interpolación así como de manera instantánea.

#### Análisis y Evaluación de una Señal Teórica Propuesta

Una vez establecido el método de estimación fasorial lo siguiente es evaluar los errores de reconstrucción, por lo que se propone una señal teórica de 60 Hz con una oscilación periódica de 6 Hz, donde la amplitud de la oscilación es de 0.5 a 1.5 con una frecuencia de muestreo de  $F_s = 64 \text{ muestras/ciclo}$  (véase Figura 3.5).

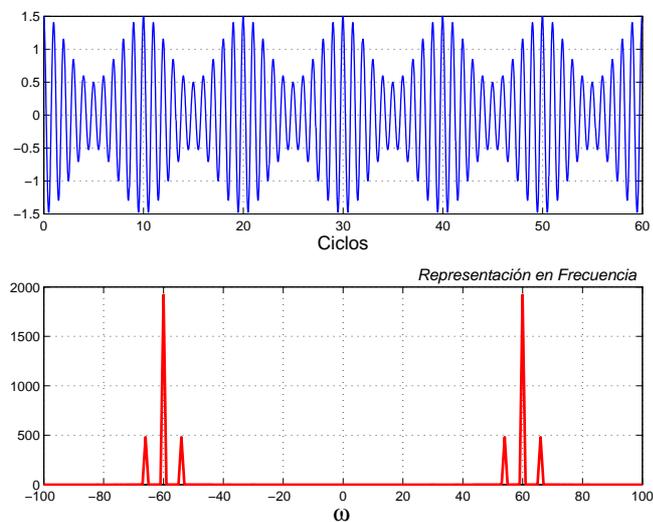


Figura 3.5: Señal Teórica  $s_d(n)$

Al aplicar el modelo constante (polinomio de Taylor de orden cero) de estimación de fasorial

por pequeñas ventanas de longitud de un ciclo a la señal teórica mostrada en la Figura 3.5, se obtiene un modelo ARMA de segundo orden de la forma dada en (3.2.17). Al aplicarle impulsos unitarios  $\delta(n)$ , de longitud de un ciclo, obtenemos la *Señal Estimada Impulsional*. Si ahora realizamos la transformada "z" inversa del modelo ARMA obtenido y lo evaluamos cada ciclo se genera la *Señal Reconstruida*  $\hat{s}(n)$  (véase (3.2.19)). Una vez obtenida  $\hat{s}(n)$ , lo siguiente es realizar la demodulación por medio de (3.2.18) para obtener el fasor dinámico  $P_i$ , de esta manera ya es posible realizar la evaluación de (3.2.22) para generar la *Amplitud Reconstruida*. El resultado de llevar a cabo lo anteriormente explicado queda reflejado en la Figura 3.6.

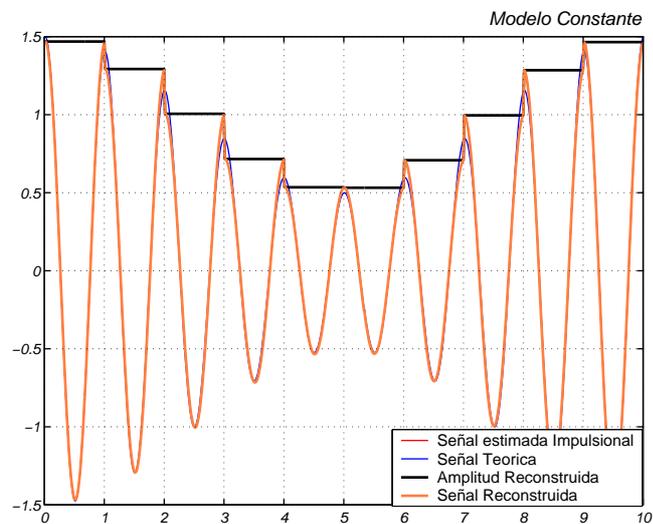


Figura 3.6: Modelo Constante

Al analizar la Figura 3.6 observamos que la *Señal Estimada Impulsional* es prácticamente igual a la *Señal Reconstruida*  $\hat{s}(n)$ , ya que esta última se genera por medio de la transformada "z" inversa del modelo ARMA estimado (véase 3.2.17). Asimismo, se percibe que  $\hat{a}(n)$  es básicamente una función escalonada, la cual está compuesta por una serie de pulsos rectangulares cuya altura es igual al promedio de los valores pico de la señal teórica durante la ventana, esto se debe a que la amplitud del modelo de orden cero está formada por el término constante de

(3.2.22). De esta manera, se observan las limitaciones que ofrece este modelo para la reconstrucción de la amplitud así como la reconstrucción de la señal misma, puesto que la *Señal Reconstruida* aun dista mucho de la *Señal Teórica*, lo cual se corrobora en la gráfica del *error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud* del modelo constante (véase Figura 3.7).

El error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud se obtiene de la siguiente manera:

$$e_a(n) = \frac{a_{teorica}(n) - \hat{a}_{reconstruida}(n)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N a_{teorica}^2(n)}} \quad (3.2.23)$$

Aplicando (3.2.23) al modelo constante se genera la Figura 3.7 correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud referente al modelo constante.

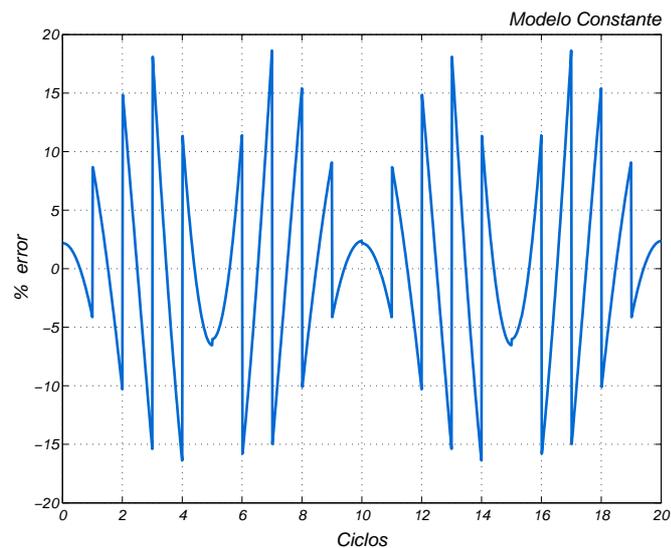


Figura 3.7: Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Constante

Al examinar la Figura 3.7 observamos que se tienen errores por arriba de un 15%, además que está formada por pendientes y parábolas. Esto hace alusión que al aumentar el orden del modelo a 1° y 2° orden, tales pendientes y parábolas desaparecerán disminuyendo el error porcentual mostrado anteriormente, lo cual se demostrará más adelante.

Si ahora se aplica el modelo lineal para estimar la señal teórica  $s_d(n)$  de la Figura 3.5 cada 64 muestras (longitud de la ventana), se obtiene un modelo ARMA de cuarto orden de la forma dada por (3.2.17), y al aplicar la misma metodología descrita para el modelo constante, la cual se resume en el diagrama de la Figura 3.4, se crea la Figura 3.8.

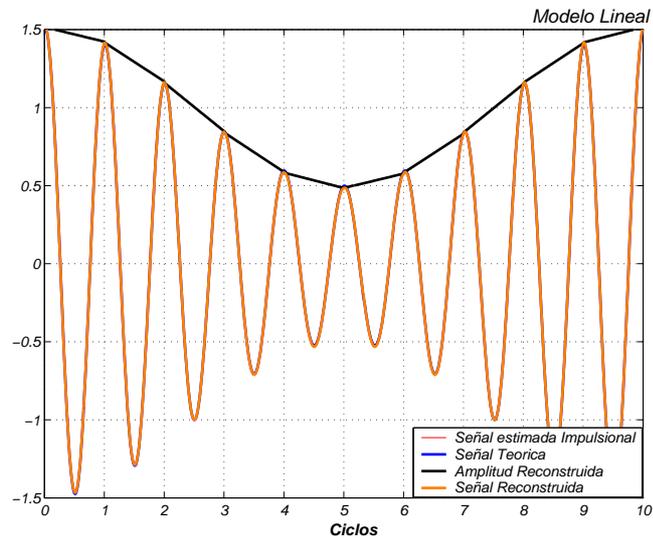


Figura 3.8: Modelo Lineal

Al estudiar detenidamente la Figura 3.8, se observa nuevamente que la señal impulsional es igual a la señal reconstruida  $\hat{s}(n)$  debido a que esta última se produce de la transformada "z" inversa del modelo ARMA estimado (véase (3.2.17)). Es importante notar que la amplitud reconstruida  $\hat{a}(n)$  es una función formada por segmentos de recta de longitud  $N$  cuya pendiente depende directamente del fasor dinámico lineal  $P_1$ , el cual se deriva de la correlación de muestras presentes y pasadas de la respuesta  $v(n)$  del modelo puros polos, así como de la señal teórica  $s_d(n)$ , tal y como se muestra en las ecuaciones normales (véase (3.2.15) y (3.2.18)).

Si se analiza una vez más la Figura 3.8 se percibe que la señal reconstruida se asemeja mejor a la señal teórica, esto resulta de incorporar un nuevo término al modelo constante, el término lineal  $P_1^{(1)}n$ , que proporciona la información del grado de cambio de la amplitud así como de la

fase, consecuencia de haber aplicado un modelo de primer orden (modelo lineal). Esto puede ser corroborado al realizar la gráfica del *error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud*.

Al emplear (3.2.23) en el modelo lineal se genera la Figura 3.9 correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud referente al modelo lineal.

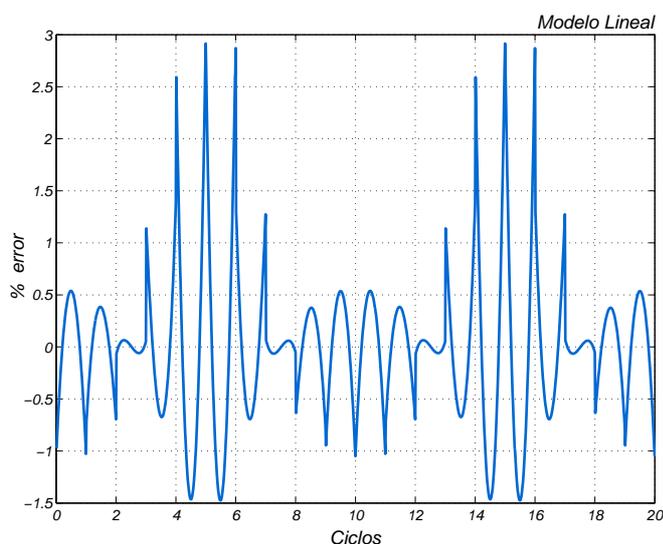


Figura 3.9: Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Lineal

Al cotejar la Figura 3.7 con la Figura 3.9 resalta magnitud del error porcentual, el cual descende de un 15% hasta un 3%, lo que representa, aproximadamente, cinco veces el valor máximo de la Figura 3.9. Al estudiar nuevamente esta última se observa que está constituida por parábolas y polinomios cúbicos, haciendo alusión a funciones de segundo y tercer orden. Por el contrario, la Figura 3.7 está formada por pendientes y parábolas indicando funciones de primer y segundo orden respectivamente, esto implica que al ir aumentando el orden del modelo las gráficas del error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud estarán formadas por funciones de orden mayor que la del modelo utilizado, mientras que el error porcentual irá decreciendo. Estos resultados se ven reflejados en la Figura 3.8 al notar que la señal teórica es muy semejante a la señal reconstruida.

Una vez empleados los modelos constante y lineal, solamente resta por aplicar el modelo cuadrático para estimar la señal  $s_d(n)$  de la Figura 3.5 por pequeñas ventanas de longitud de 64 muestras cada una, resultando en un modelo ARMA de sexto orden de la forma de (3.2.17). Al aplicar la metodología resumida en el diagrama de flujo de la Figura 3.4, se genera la Figura 3.10, correspondiente a la estimación de la señal teórica  $s_d(n)$  aplicando el modelo cuadrático de estimación fasorial.

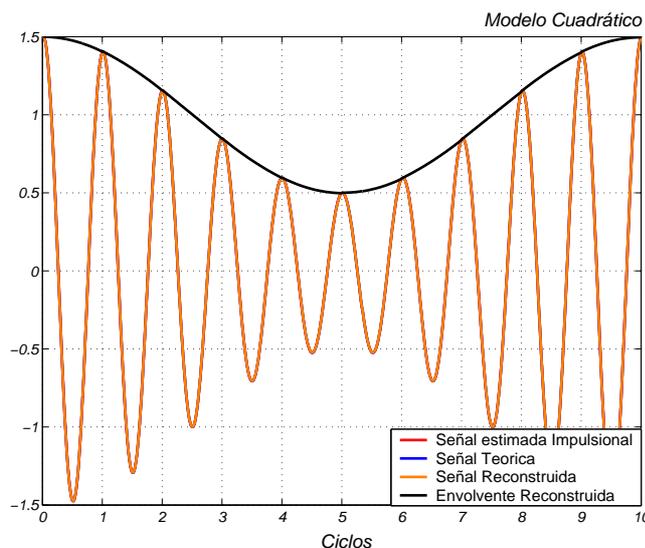


Figura 3.10: Modelo Cuadrático

Al analizar la Figura 3.10 se advierte que tanto la señal teórica, la señal impulsional, y la señal reconstruida son muy semejantes lo que significa que el error de reconstrucción ha disminuido en comparación con la Figura 3.8, lo cual quedará comprobado más adelante, esto es a causa de la inclusión de un nuevo término al modelo constante, el término cuadrático  $P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!}$ , el cual es el resultado de la segunda derivada del fasor dinámico. En cuanto a la amplitud reconstruida  $\hat{a}(n)$ , se observa que esta formada por pequeñas funciones de segundo orden derivadas del modelo cuadrático de estimación fasorial.

Al emplear (3.2.23) en el modelo cuadrático se genera la Figura 3.11 correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud referente al modelo de segundo orden.

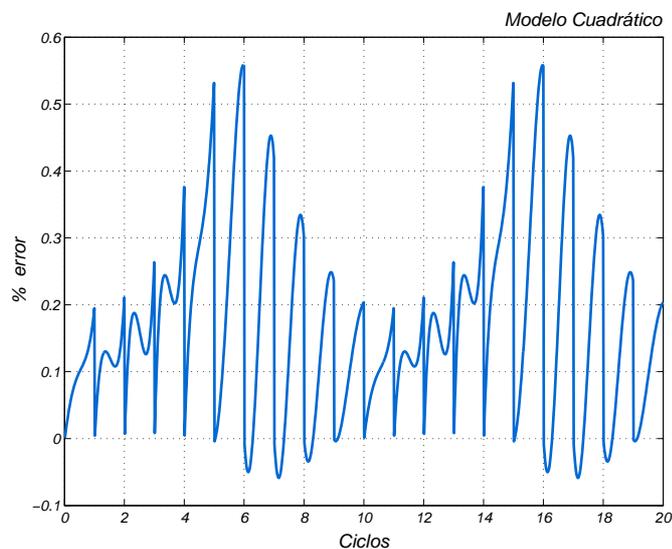


Figura 3.11: Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Cuadrático

Al confrontar la Figura 3.11 con la Figura 3.9 se confirma nuevamente que el error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud decrece conforme se aumenta el orden del modelo, de igual manera la Figura 3.11 está compuesta por paraboloides y parábolas que hacen alusión a funciones de tercer y cuarto orden respectivamente, lo cual confirma nuevamente que al ir aumentando el orden del modelo las gráficas de error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud estarán constituidas por funciones de orden mayor al modelo empleado, pero al mismo tiempo irán desapareciendo las funciones de un orden menor o igual al orden del modelo aplicado.

## Análisis y Evaluación de una Señal Real

Por último, se somete el modelo cuadrático de predicción lineal ante una señal real de 60 Hz tomada de un PMU (Unidad de Medición Fasorial) instalado en una subestación de la Red Mexicana, la cual está compuesta por un estado de prefalla, falla y postfalla, a una frecuencia de muestreo de  $F_s = 48 \frac{\text{muestras}}{\text{ciclo}}$  durante un segundo. Al analizar el espectro de frecuencia de la señal propuesta se observa que posee un quinto armónico, además que presenta oscilaciones alrededor de la frecuencia fundamental, todo esto queda establecido en la Figura 3.12.

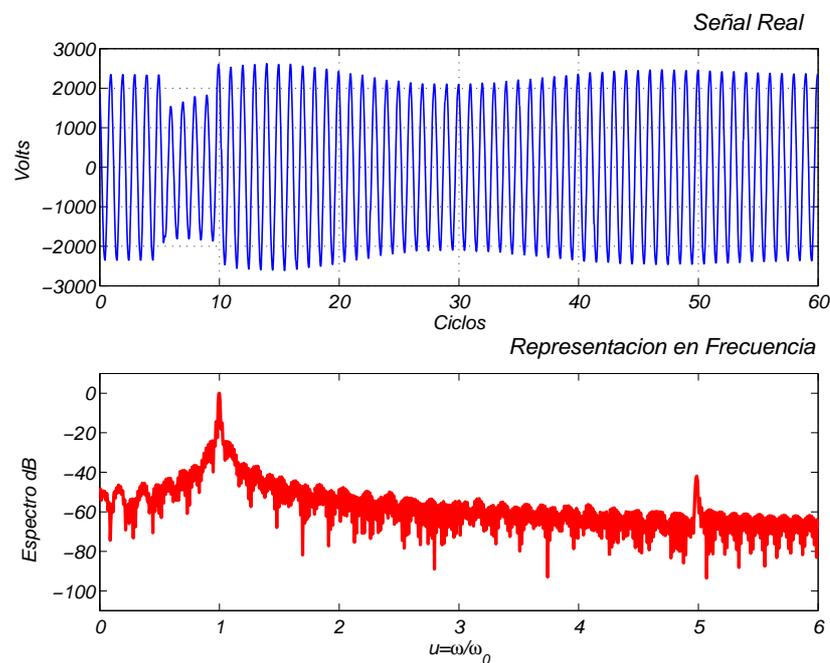


Figura 3.12: Señal Real

La estimación de la señal de la Figura 3.12 se realizará por ventanas de 2 ciclos, esto debido al comportamiento adecuado que presenta el modelo al aparecer componentes múltiplos de la fundamental, lo cual se comprobará más adelante. Al usar nuevamente la metodología de estimación fasorial sintetizada en la Figura 3.4, se obtiene la Figura 3.13 correspondiente a la estimación de la señal real haciendo uso del modelo cuadrático de estimación fasorial.

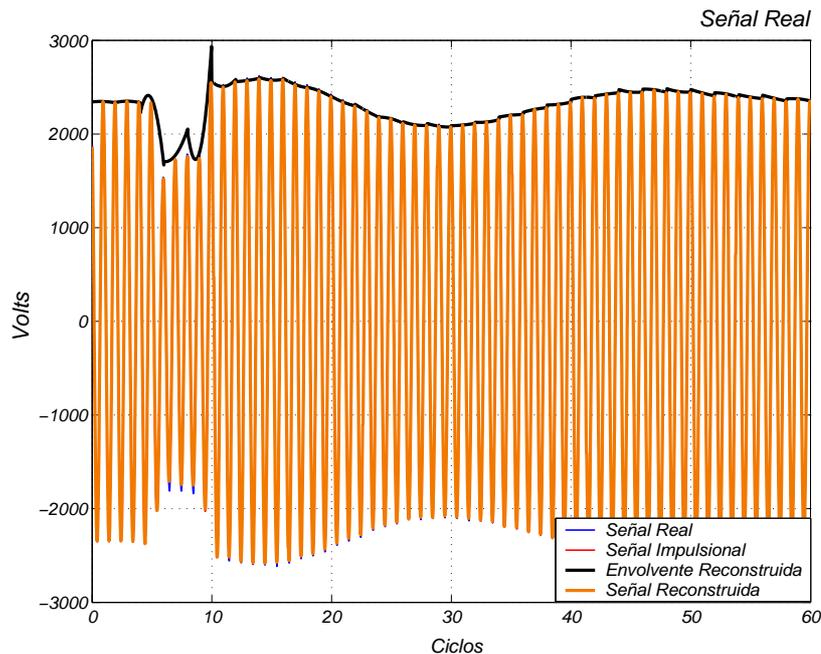


Figura 3.13: Estimación de la Señal Real

Al ver la Figura 3.13 se puede considerar que se tiene una buena estimación, ya que la señal real es casi semejante a la señal reconstruida  $\hat{s}(n)$ , por otro lado la envolvente reconstruida obtenida aplicando el método de demodulación propuesto, presenta un comportamiento adecuado en el área de prefalla; sin embargo, al originarse la falla en el sistema, la envolvente reconstruida se comporta de manera inestable cuando la señal real entra en la etapa de transición de prefalla-falla y falla-postfalla; una vez que la señal real se encuentra en el estado de postfalla, la envolvente reconstruida presenta una estimación suave y estable.

Haciendo uso de (3.2.21), nos es posible reconstruir la envolvente y la fase, la primera de estas fue mostrada en la Figura 3.13, pero a continuación se muestran las dos, de esta manera podemos realizar un análisis por separado de ambas.

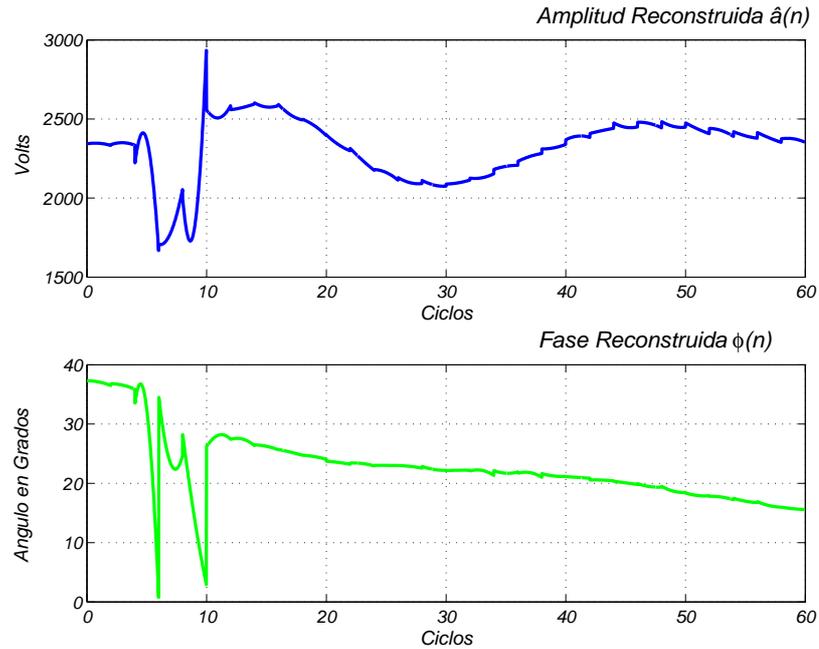


Figura 3.14: Amplitud y Fase de la Señal Reconstruida

Al examinar Figura 3.14, observamos que tanto la envolvente, así como la fase, están constituidas por pequeñas parábolas haciendo alusión al término cuadrático de la serie de Taylor (véase (3.2.5)). Al continuar analizando la Figura 3.14 nos percatamos que la envolvente así como la fase presentan un comportamiento suave y estable en las zonas de prefalla y postfalla; en lo que respecta a la zona de falla el proceder de ambas es de forma inestable, debido a la transición de un estado a otro.

Analizando una vez mas la Figura 3.14, observamos que la fase reconstruida  $\hat{\phi}(n)$  en estado estable empieza con una magnitud de  $38^\circ$  grados aproximadamente; en el momento en el que la señal  $s_{real}(n)$  entra a la zona de falla la fase experimenta una serie de cambios abruptos con respecto al tiempo  $d\hat{\phi}/dt$ , lo que nos hace pensar que existe un  $\Delta F$  relacionado con el offset de la frecuencia que sufre la señal propuesta al momento de ocurrir el disturbio; en el instante en el que la falla es liberada la señal  $s_{real}(n)$  entra en la zona de postfalla y en este preciso momento la fase se encuentra alrededor de los  $25^\circ$  grados, a partir de ese punto  $\hat{\phi}(n)$  experimenta un

comportamiento uniforme decreciente, ya que esta trata de alcanzar sus nuevas condiciones de estado estable, debido a que los parámetros en el sistema fueron modificados en el momento de ser liberada la falla.

Si se analiza con cuidado los intervalos de estimación en la zona de postfalla en la gráfica correspondiente a la fase reconstruida, se observa que no existe gran variación en grados de un intervalo al siguiente, por lo tanto las variaciones en frecuencia deben de ser mínimas y alrededor de los 60 Hz.

La forma de comprobar lo expuesto en el párrafo anterior, es examinando los elementos que constituyen a la fase reconstruida  $\hat{\phi}(n)$  denotados por el conjunto de ecuaciones (3.2.21) y (3.2.22), se observa que la primera derivada fase  $\hat{\phi}'(n)$  puede ser considerada como la velocidad de cambio de la fase con respecto al tiempo, tal y como se mencionó anteriormente en la Sección 3.2; más que la velocidad el término  $\hat{\phi}'(n)$  se puede interpretar como el elemento que proporciona la información del offset de frecuencia que sufre la señal  $s_{real}(n)$  al momento de iniciar falla, la estimación frecuencial se muestra en la Figura 4.16.

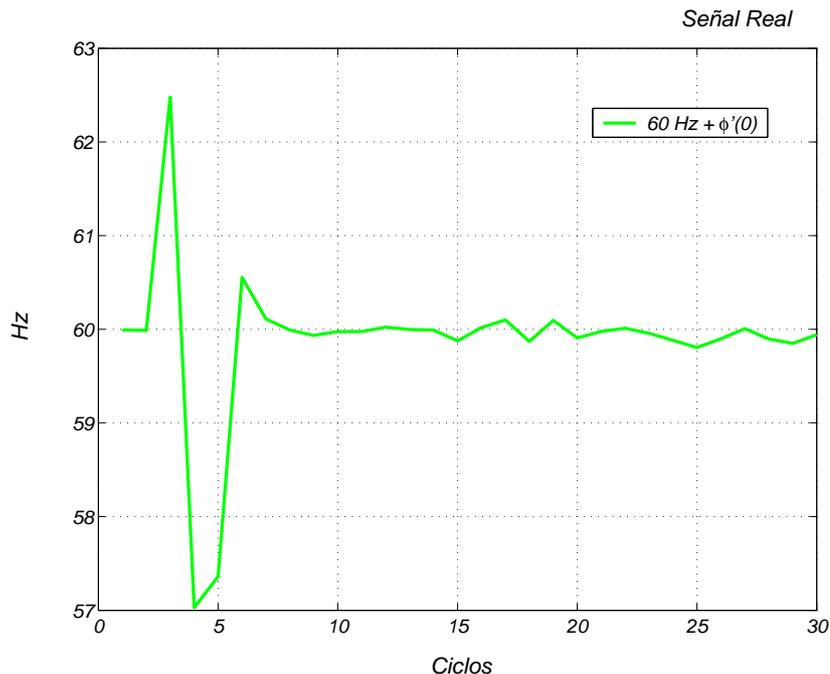


Figura 3.15: Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Cuadrático

Analizando la Figura 4.16, se observa que la frecuencia estimada se genera sumando el término correspondiente a la primera derivada de la fase  $\hat{\phi}'(n)$  mas un escalón de 60 Hz correspondiente a la frecuencia nominal fijada en los coeficientes  $a_k$  del modelo puros polos. Continuando con el análisis de la figura, se percibe un cambio abrupto de la frecuencia ( $60 \text{ Hz} + \hat{\phi}'(n)$ ) al momento de entrar a la zona de falla de la señal real, una vez liberada la falla la frecuencia estimada varia alrededor de los 60 Hz, esto se origina por la oscilación de  $\pm 11\%$  que se hace presente en la amplitud correspondiente a la señal  $s_{real}$  en la zona de postfalla.

Una forma de eliminar las discontinuidades presentadas en la Figura 3.14 correspondientes a las gráficas de amplitud y fase, sería reducir la longitud de la ventana interpolación, pero al mismo tiempo se produciría inestabilidad en el modelo (3.2.8) al momento de reconstruir la amplitud y la fase estimadas esto a causa de la presencia de un 5<sup>to</sup> armónico en la señal real, lo cual será comprobado en la Subsección 3.2.2.

Por lo que se propone realizar la estimación instantánea utilizando el modelo segundo orden (3.2.8) por ventanas de dos ciclos a la señal real expuesta en la Figura 3.12, generándose la Figura 3.16 correspondiente a la estimación fasorial de manera instantánea.

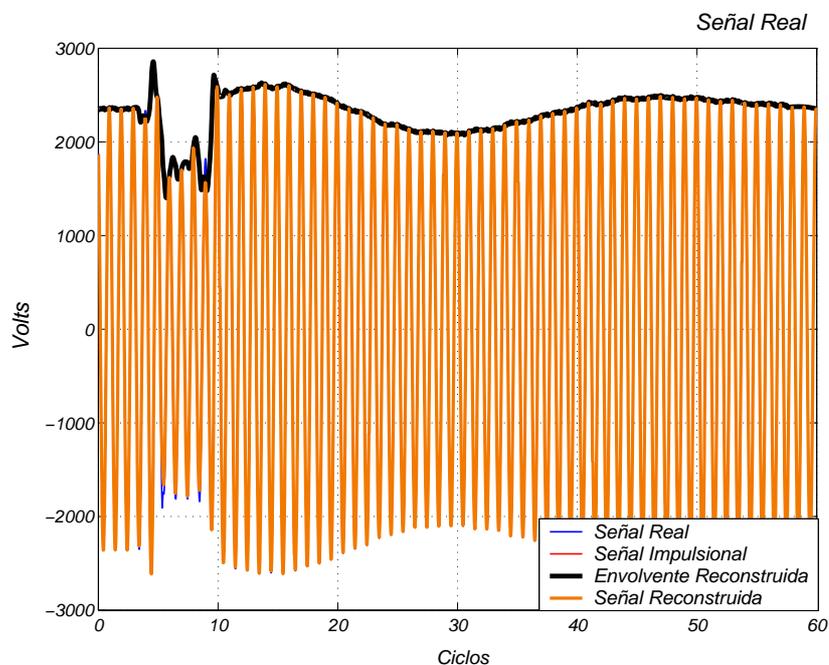


Figura 3.16: Estimación Instantánea de la Señal Real con un estimador de dos ciclos

Al estudiar con detenimiento la Figura 3.16, se percibe una buena estimación en las zonas de prefalla y postfalla, no así en la zona de falla donde el estimador instantáneo propuesto presenta limitaciones para seguir el cambio abrupto de la  $s_{real}(n)$ .

En lo que respecta a la envolvente reconstruida denota por  $\hat{a}(n)$ , sería ilustrativo analizar tanto la amplitud y la fase reconstruida por separado (véase Figura 3.17), para observar de mejor manera su comportamiento en las diferentes zonas de la señal real.

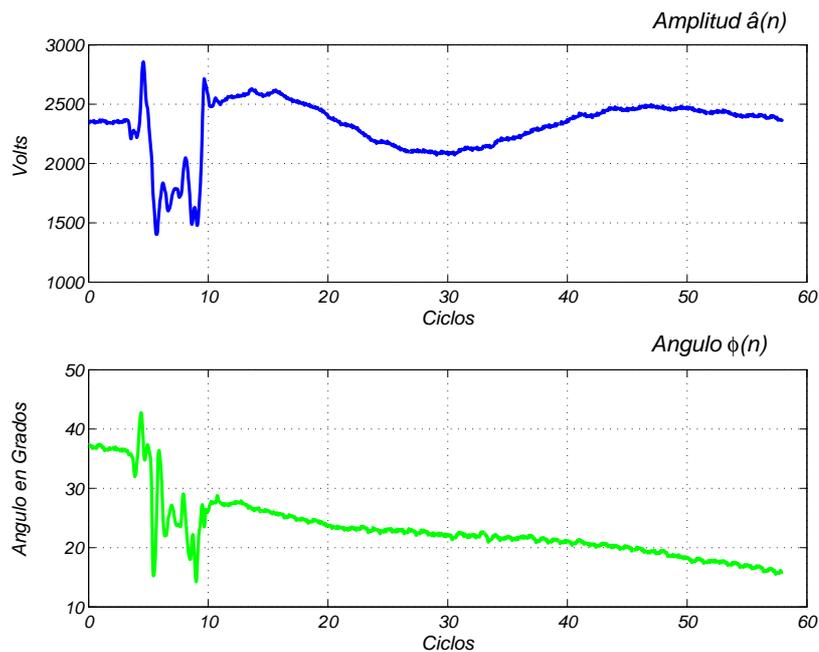


Figura 3.17: Estimados de la Amplitud y la Fase Instantánea de la Señal Reconstruida

Al examinar a detalle la Figura 3.17, se observa un espacio vacío en los últimos dos ciclos de la señal, tanto en la gráfica de amplitud así como de la fase, esto es causa de que la estimación instantánea es hacia la derecha y el último espacio en blanco de longitud de dos ciclos corresponde a la interpolación de la última ventana.

Si se realiza la comparación Figura 3.17 con la Figura 3.14 correspondiente a la estimación de la amplitud y la fase aplicando la interpolación del modelo (3.2.8), se observa que las discontinuidades al final de cada intervalo de interpolación provocadas por los cambios abruptos de la señal, desaparecen en su totalidad al hacer uso de la estimación fasorial de manera instantánea

Al continuar estudiando la Figura 3.17, se percibe un estimado con mayor uniformidad en ambas gráficas, asentándose las características de estabilidad generalmente sobre las zonas de prefalla y postafalla. No así en la zona de falla donde el algoritmo carece de estabilidad y presenta dificultad para seguir el cambio abrupto de la señal  $s_{real}(n)$ .

Si se analiza una vez más el comportamiento de la fase reconstruida  $\hat{\phi}(n)$  expuesta en la Figura 3.17, se percibe que esta experimenta una serie de cambios abruptos con respecto al tiempo  $d\hat{\phi}/dt$  al momento de dar comienzo la falla, lo que correspondería a la existencia de un  $\Delta F$  en la frecuencia nominal de la señal real. Al liberarse la falla los parámetros en el sistema se modifican, lo que explica el comportamiento descendente que sufre la fase en la zona de postfalla, ya que esta trata de alcanzar sus nuevas condiciones de estado estable.

Una vez obtenidas las estimaciones de amplitud y de fase así como la estimación de la señal misma, y con el motivo dar un seguimiento al análisis presentado en el párrafo anterior, a continuación se presenta la Figura 3.18, referente a la estimación frecuencial de la señal propuesta.

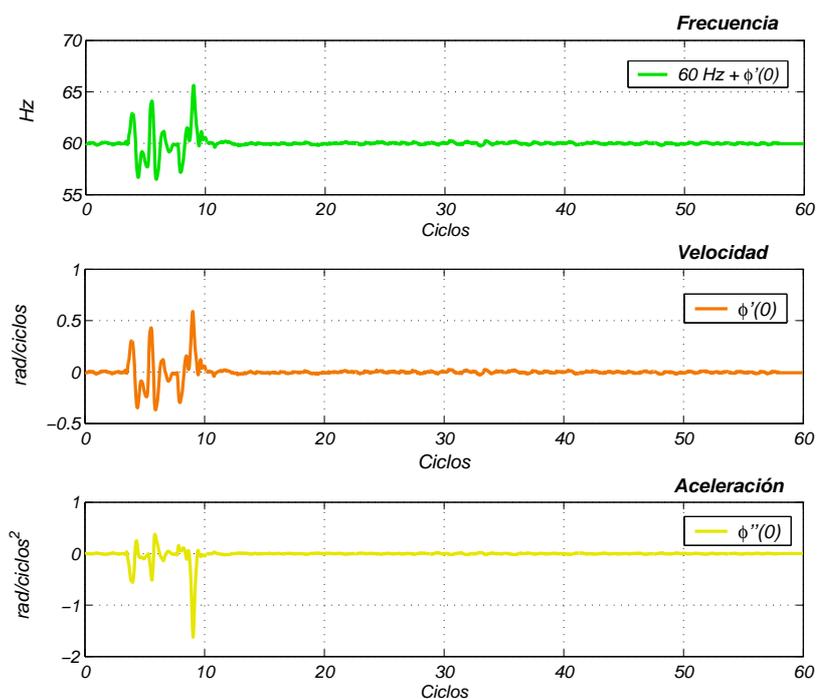


Figura 3.18: Estimación de la Frecuencia así como la primera y segunda derivada de la fase Instantáneas

En la Figura 3.18 además de la estimación de la frecuencia también se muestra la primera y la segunda derivada de la fase  $\hat{\phi}(n)$ , indicadas por  $\hat{\phi}'(n)$  y  $\hat{\phi}''(n)$  respectivamente. La frecuencia estimada se forma sumando un escalón de frecuencia de 60 Hz mas la primera derivada de la fase multiplicando esta última por un factor  $\frac{60}{2\pi}$ , tal y como se mencionó anteriormente. Continuando con el análisis de la gráfica referente a la frecuencia  $\hat{\omega}_0$  se observa que presenta un cambio abrupto de  $\pm 4$  Hz en la zona de falla en cambio en la zona de postfalla se observa una pequeña variación de  $\pm 0.2$  Hz alrededor de la frecuencia nominal de  $s_{real}(n)$ , esto a causa de la oscilación de la amplitud de esta última, al momento de ser liberada la falla.

Al estudiar nuevamente la Figura 3.18, observamos que la primera derivada  $\hat{\phi}'(0)$  tiene una participación considerable en la zona de falla, por lo que se concluye que esta puede verse como la velocidad de cambio que sufre la fase con respecto al tiempo, la cual al multiplicarla por el factor correspondiente, nos proporciona información importante acerca de la conducta de la frecuencia al presentarse los tres estados característicos de una señal.

En lo que respecta a la segunda derivada de la fase  $\hat{\phi}''(n)$  (aceleración), ésta también podría ser relacionada con la primera derivada de la frecuencia  $df/dt$ , la cual puede verse como un indicador del desequilibrio entre generación y carga, pues al ocurrir cualquier acontecimiento que produzca este fenómeno, la frecuencia experimentará un cambio abrupto. En base a ello,  $df/dt$  puede usarse como un indicador de la existencia de un disturbio en el sistema [7].

Tomando en cuenta lo anterior y analizando la Figura 3.18, observamos que la gráfica referente a la aceleración, presenta un cambio súbito en el rango de 5 a 10 ciclos aproximadamente, siendo esta la zona correspondiente al estado de falla de la señal, por lo tanto, al fijar un umbral de la variación de  $\hat{\phi}''(n)$ , se tendría un indicador de la presencia de un disturbio en el sistema.

### 3.2.2 Análisis Frecuencial

El proceso de estimación mediante mínimos cuadrados puede ser visto como un proceso de filtrado, por lo que es conveniente realizar un análisis de frecuencia de los modelos. Al estimular el modelo con una secuencia real de exponenciales complejas, la cual esta formada por la serie de Fourier  $s(n) = e^{jk\omega_0 n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , se obtiene la respuesta en frecuencia del modelo, la cual nos ayuda a explicar el comportamiento de las estimaciones ante variaciones de frecuencia o cuando otras componentes están presentes en la señal teórica.

La magnitud  $\hat{P}_0^{(0)}$  de la respuesta en frecuencia del modelo constante se muestra en la Figura 3.19 para intervalos de  $N = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ , donde se observa que prácticamente todos tienen una ganancia unitaria en la frecuencia fundamental ( $u = 1$ ) y una ganancia cero en la frecuencia fundamental negativa ( $u = -1$ ). La concavidad que presenta el modelo al aplicar ventanas de  $N = \frac{1}{2}, 1$  indica que el espectro de la oscilación de la señal teórica  $s_d$  sufre distorsión de la amplitud alrededor de la frecuencia fundamental, lo mismo ocurre con las ventanas de  $N = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  sólo que la distorsión de la amplitud del espectro de la oscilación de la señal teórica en estos dos casos no es simétrica alrededor de la frecuencia fundamental. Todo esto hace alusión a una infiltración de la componente de aceleración al modelo constante, así como una ganancia lineal que representa la infiltración de la derivada (infiltración de la velocidad) de la secuencia de frecuencia fundamental negativa. Estas dos últimas razones implican fuertes restricciones para la implementación del modelo constante cuando se desea estimar oscilaciones de potencia en el sistema.

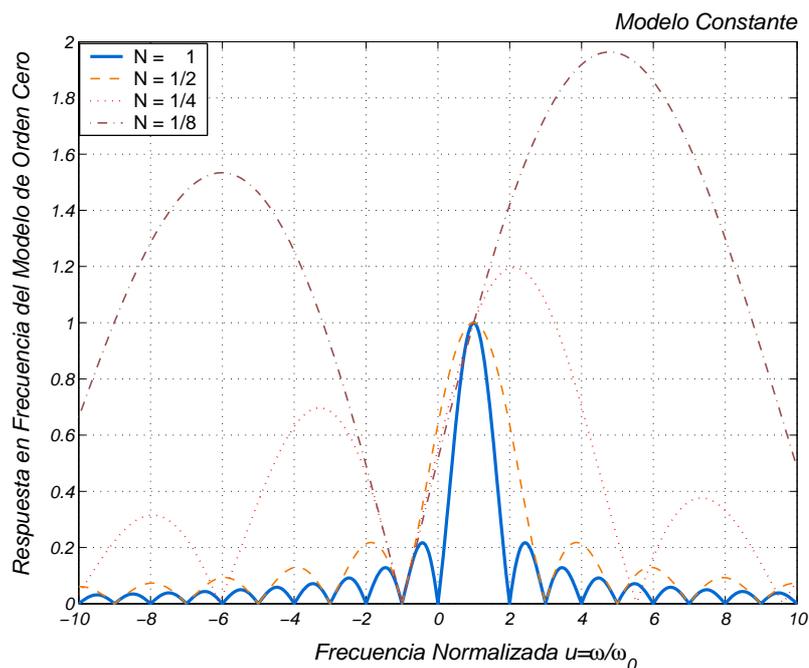


Figura 3.19: Respuesta en Frecuencia del Modelo de orden cero para ventanas de  $N=1/8, 1/4, 1/2, 1$  de ciclo

Si continuamos analizando la respuesta en frecuencia del modelo constante de la Figura 3.19 se percibe que el modelo posee una alta sensibilidad al aparecer otras componentes de frecuencia distintas a la fundamental, esto sucede al emplear el modelo constante por intervalos de  $N = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  o inferiores. En otras palabras, el modelo posee un comportamiento inestable al presentarse estas condiciones.

Cuando se incluye el término lineal a la serie Taylor truncada se genera el modelo lineal de estimación fasorial. Para obtener nuevamente la respuesta de la magnitud  $P_0^{(1)}$  del modelo lineal se le aplica la serie de exponenciales complejas descrita anteriormente a este último, generando la Figura 3.20, para intervalos de  $N = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ .

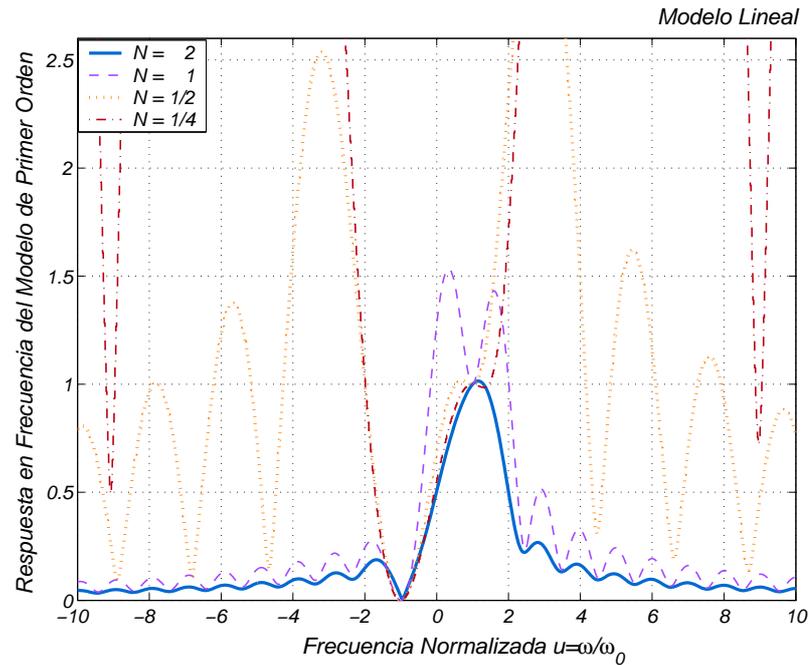


Figura 3.20: Respuesta en Frecuencia del Modelo de Primer Orden para ventanas de  $N=1/4$ ,  $1/2$ ,  $1$ ,  $2$  de ciclo

Al analizar la Figura 3.20, se observa que se tiene una ganancia unitaria para los diferentes casos de longitud de ventana  $N$  en la frecuencia fundamental  $u = 1$ , además se obtiene una ganancia nula de forma plana en la frecuencia fundamental negativa  $u = -1$ , lo que garantiza el rechazo de la componente de frecuencia fundamental negativa. Cabe agregar que el modelo lineal posee un comportamiento muy sensible al aparecer frecuencias distintas a la frecuencia fundamental cuando se utilizan ventanas de tamaño  $N = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  de ciclo. En lo que respecta a las ventanas de  $N = 1$ ,  $2$  no presentan un comportamiento tan sensible en comparación con sus predecesoras de medio y un cuarto de ciclo mencionadas anteriormente. Por otro lado, la ventana de  $N = 1$  se caracteriza por tener un comportamiento sensible a frecuencias cercanas de la frecuencia fundamental  $u = 1$ .

Al incluirse ahora el término cuadrático a la serie de Taylor truncada se obtiene el modelo cuadrático de estimación fasorial, si una vez más se desea obtener la respuesta en frecuencia de la magnitud de  $\hat{P}_0^{(2)}$ , pero ahora del modelo cuadrático, se hace uso de la serie de exponenciales complejas descritas anteriormente, de esta manera se logra la Figura 3.21.

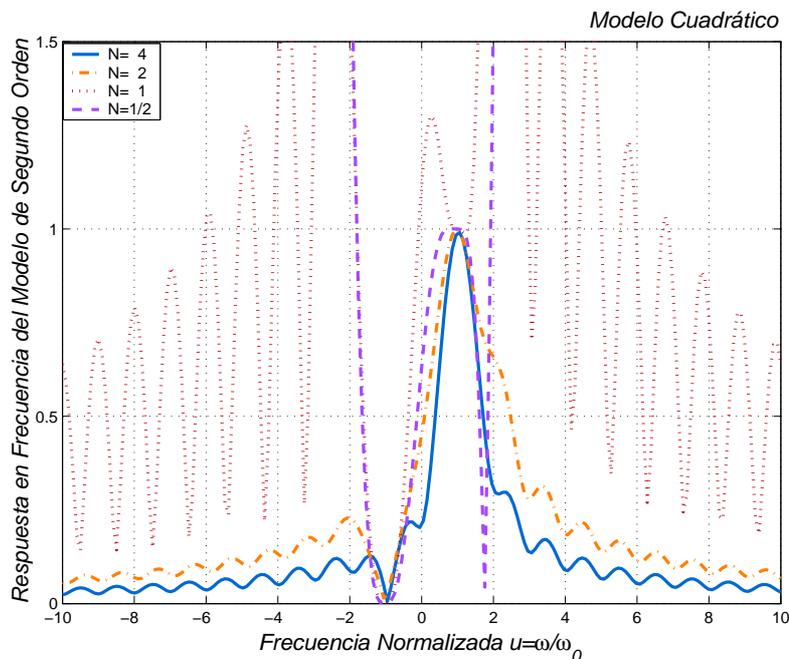


Figura 3.21: Respuesta en Frecuencia del Modelo de Segundo Orden para ventanas de  $N=1/2$ , 1, 2, 4 de ciclos

En la Figura 3.21, se observa que se alcanza una ganancia plana para las ventanas  $N = 1/2$ , 1 en  $u = 1$ , así como una ganancia nula de forma plana en  $u = -1$ , esto indica que este modelo tolera una pequeña variación de frecuencia alrededor de la frecuencia fundamental  $u = 1$ , así como el rechazo total de la frecuencia fundamental negativa en  $u = -1$ . Sin embargo, el modelo posee un comportamiento muy sensible al presentarse frecuencias diferentes a la fundamental al aplicar estos tamaños de ventanas.

Al continuar examinando el comportamiento de las ventanas de longitud  $N = 2, 4$  correspondientes a la Figura 3.21, observamos que éstas no presentan ganancias totalmente planas como sus predecesoras, pero igualmente poseen una ganancia unitaria en  $u = 1$  y una ganancia nula en  $u = -1$ ; no obstante, ambas ventanas poseen un comportamiento adecuado al presentarse frecuencias diferentes a la fundamental, en otras palabras, no son sensibles bajo frecuencias distintas a la fundamental.

### 3.3 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se realizó la estimación de las señales teórica y real, por medio de la metodología de Shanks aplicando el modelo cuadrático de estimación fasorial. Si analizamos lo anterior desde un punto de vista de algebra vectorial, lo que hace el modelo AR del algoritmo de Shanks es obtener un equivalente de los tres planos referentes al modelo constante  $e^{j\omega_0}$ , lineal  $ne^{j\omega_0}$  y cuadrático  $n^2e^{j\omega_0}$ , y sobre este equivalente proyectar la señal que se desea estimar, generándose un modelo ARMA que corresponde a la señal estimada  $\hat{s}(n)$ , y por medio de la expansión de fracciones parciales se regresa a los tres planos originales mencionados anteriormente obteniéndose al mismo tiempo las componentes de  $s_d(n)$  sobre cada uno de los planos representadas por  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$ .

Una de las aportaciones más importantes en este capítulo es la forma de generar la demodulación de la señal, así como la obtención de los fasores constante, lineal y cuadrático  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$ , los cuales en este caso se obtuvieron por medio de la expansión de fracciones parciales, la cual se puede interpretar como una herramienta para sintetizar y obtener las componentes referentes a los planos mencionados anteriormente.

De los fasores  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  constante, lineal y cuadrático respectivamente, se obtiene información importante referente a la amplitud y la fase, las cuales nos ayudan a conocer el

estado del sistema.

Asimismo, en este capítulo se llevó a cabo la estimación frecuencial de manera indirecta con la ayuda de la primera derivada de  $\hat{\phi}'(n)$ , por lo que se puede llegar a la conclusión de que el modelo propuesto más que ser un estimador fasorial, también puede ser considerado como un estimador frecuencial y al mismo tiempo como un indicador de la presencia de un disturbio en el sistema, esto con la ayuda de  $\hat{\phi}''(n)$ .

En lo que se refiere a la respuesta en frecuencia del modelo cuadrático, se observa que el modelo es ligeramente sensible al presentarse señales con frecuencias diferentes a la fundamental, esto se debe a que el sistema fue diseñado para ser estrictamente causal. Sin embargo, el modelo 3.2.8 presenta estimados adecuados al usarse ventanas de longitud de dos ciclos.

# Capítulo 4

## Predicción Frecuencial

### 4.1 Introducción

La frecuencia es uno de los índices más importantes en la operación de un SEP, ya que en este parámetro se refleja la dinámica del balance de energías entre la carga y la potencia generada [13].

Las variaciones de frecuencia se deben en gran medida al cambio de las condiciones topológicas de un SEP, tales como el cierre o apertura de los interruptores debido a cambios de carga, salida de generadores, pérdida de enlaces y fallas en el sistema [4].

Por estas razones, la frecuencia posee la característica de variar dinámicamente con respecto al tiempo, afectando significativamente las técnicas de estimación fasorial convencionales, ya que éstas consideran la frecuencia constante.

En base a los argumentos anteriores, se vuelve imperativo tener un correcto monitoreo de la frecuencia para evitar posibles colapsos de voltaje o pérdidas totales del SEP, por lo que en el presente capítulo se propone un nuevo algoritmo para la estimación fasorial considerando variaciones de amplitud y fase, así como los cambios de la frecuencia en función del tiempo, lo

que implicaría un mejor control y monitoreo de los SEP bajo condiciones transitorias.

## 4.2 Metodología

Como se mencionó en capítulos anteriores, debido a la creciente demanda energética y a la dificultad de adquirir nuevos derechos de vía para la transportación y manejo de la electricidad, la gran mayoría de los sistemas eléctricos de potencia en el mundo trabajan dentro de sus límites de operación la mayor parte del tiempo, por lo que al momento de presentarse alguna perturbación en el sistema, estos entran en un periodo de oscilación de potencia antes de llegar a su estado estable original. El problema radica en que los algoritmos de estimación fasorial convencionales consideran amplitud y fase constante durante todo el intervalo de estimación, por lo que se torna verdaderamente difícil censar este comportamiento transitorio del sistema, tomando en cuenta estas consideraciones. La expresión que representa el modelo tradicional en tiempo discreto de estimación fasorial es denotada por:

$$s(n) = a_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.1)$$

Como se mencionó anteriormente, el hecho de considerar amplitud y fase constante, representa un fuerte impedimento para controlar y monitorear los parámetros del sistema bajo condiciones transitorias, razón por la cual, en este capítulo se presenta un nuevo modelo de estimación fasorial el cual propone considerar también las variaciones de frecuencia durante todo el intervalo, contrario al modelo propuesto en Capítulo 3, el cual supone asume amplitud y fase en función del tiempo. En base a ello se tiene que,

$$s(n) = a(n) \cos(\omega(n)n + \phi(n)) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.2)$$

donde  $\omega(n)$  corresponde a la variación de la frecuencia fundamental  $\omega_0$  con respecto al tiempo.

Para poder desarrollar el modelo propuesto (4.2.2), se sugiere realizarlo en dos partes la primera la estimación frecuencial y la segunda la estimación fasorial (amplitud y fase). En la primera parte se lleva a cabo la estimación frecuencial con la ayuda del modelo constante tradicional de estimación fasorial (4.2.1), realizando la estimación de  $\omega_0$  por medio de los métodos de predicción lineal explicados en el Capítulo 2. En lo que respecta a la segunda parte se utiliza la misma metodología propuesta en el Capítulo 3.

### 4.2.1 Estimación Frecuencial

Para empezar a desarrollar la primera parte del modelo (4.2.2), se propone reescribir (4.2.1) en función de exponenciales complejas, resultando en:

$$s(n) = \frac{1}{2} \left[ A e^{j\omega_0 n} + A^* e^{-j\omega_0 n} \right] \quad (4.2.3)$$

donde  $A = a_0 e^{j\phi_0}$  se le conoce como el *fasor dinámico de orden cero* correspondiente al modelo constante. Enseguida se sugiere considerar al modelo constante como un filtro de predicción lineal y estimar los coeficientes  $a_k$ , correspondientes al denominador, aplicando el principio de mínimos cuadrados. Para ello, es necesario obtener la función de transferencia de este modelo, por lo que se sugiere realizar la transformada "z" de (4.2.3), resultando:

$$\frac{S(z)}{z} = \frac{A}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{A^*}{z - e^{-j\omega_0}} \quad (4.2.4)$$

Al obtenerse el mínimo común denominador de (4.2.4) y al reagrupar términos semejantes en el numerador, se genera un modelo ARMA de segundo orden, denotado por (4.2.5).

$$S(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q=1} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{p=2} a_k z^{-k}} \quad (4.2.5)$$

Una vez obtenido el modelo ARMA (4.2.5) el problema consiste en encontrar los coeficientes  $a_k$  correspondientes al denominador, donde este último está formado por un par de

polos complejos conjugados ubicados sobre la circunferencia unidad, los cuales proporcionan la información frecuencial de  $\omega_0$ .

La forma de estimar estos parámetros es con la ayuda de la metodología de Shanks expuesta en la Subsección 2.4.3. El conjunto de ecuaciones correspondientes para generar los coeficientes  $\hat{a}_k$  se muestran a continuación:

$$\sum_{k=1}^p \hat{a}_k r_{dd}(k, m) = -r_{dd}(m), \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (4.2.6)$$

$$r_{dd}(k, m) = \sum_{n=q+1}^N s_d(n-k) s_d^*(n-m) \quad (4.2.7)$$

$$r_{dd}(m) = \sum_{n=q+1}^N s_d(n) s_d^*(n-m) \quad (4.2.8)$$

donde  $s_d(n)$  corresponde a la señal deseada proporcionada por el SEP, mientras que  $r_{dd}(k, m)$  y  $r_{dd}(m)$  corresponden a la matriz y al vector de autocorrelación de  $s_d(n)$ , respectivamente.

Al aplicar el modelo constante de predicción lineal, lo único que se busca es estimar la frecuencia de la señal deseada  $s_d(n)$ , en nuestro caso la frecuencia del SEP, que es alrededor de los 60 Hz, por lo que nuestro modelo se podría interpretar como un seguidor de frecuencia, es decir, se estimarían los polos con mayor energía correspondientes a la señal  $s_d(n)$ , lo que implicaría estimar la frecuencia de la portadora de esta última.

Todo lo anterior se comprenderá mejor analizando un ejemplo: supongamos que se pretende encontrar los polos correspondientes a la portadora de una señal teórica  $s_d(n)$  de 60 Hz con una oscilación periódica de 6 Hz, donde la amplitud de la oscilación es de 0.5 a 1.5 a una frecuencia de muestreo de  $F_s = 64 \frac{\text{muestras}}{\text{ciclo}}$  (4.1). Al analizar la representación frecuencial de la Figura 4.1 observamos que la señal  $s_d(n)$  presenta además un 5<sup>to</sup> armónico, así como la envolvente de 6 Hz montada sobre la portadora de 60 Hz.

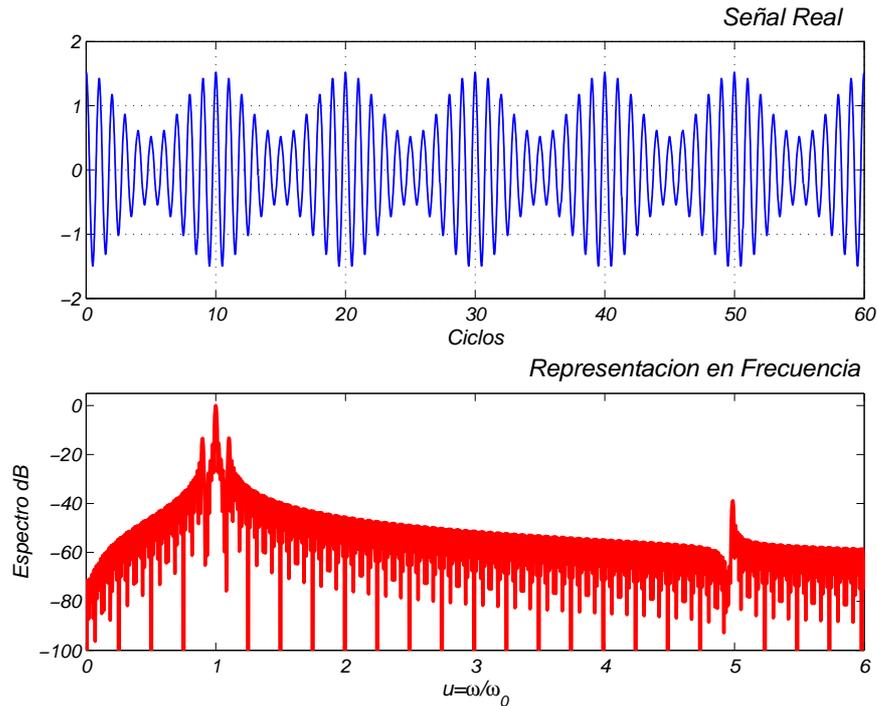


Figura 4.1: Señal Teórica de 60 Hz que incluye un 5<sup>to</sup> armónico con una oscilación periódica de 6 Hz

Al aplicar (4.2.6), correspondiente a la estimación frecuencial, por pequeñas ventanas de un ciclo a la señal teórica  $s_d(n)$ , se genera el modelo AR integrado por los coeficientes  $\hat{a}_k$ , los cuales aportan la información frecuencial de la señal teórica.

Si proyectamos los polos correspondientes a los coeficientes  $\hat{a}_k$  en el plano "z", obtendremos un par de polos complejos conjugados  $\alpha e^{\pm j\hat{\omega}_0}$ , ubicados cerca de la circunferencia unidad (véase Figura 4.2), donde el ángulo  $\hat{\omega}_0$  nos proporciona la información referente a la frecuencia de la portadora  $s_d(n)$  y  $\alpha$  es una ganancia que compensa la amplitud de la señal teórica debido a las variaciones de amplitud. Considerando el nuevo parámetro  $\alpha$  generado por dichas variaciones, el modelo tradicional de estimación fasorial (4.2.1) sería:

$$s^{(0)}(n) = a_0 \alpha^n \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi_0) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.9)$$

donde  $\alpha^n$  es una ganancia exponencial y el valor de  $\alpha$  es diferente de 1 cuando la frecuencia de la señal  $s_d(n)$  es diferente de 60 Hz o cuando existen variaciones de amplitud en el intervalo de observación, es decir, al momento de existir variaciones de frecuencia o amplitud.

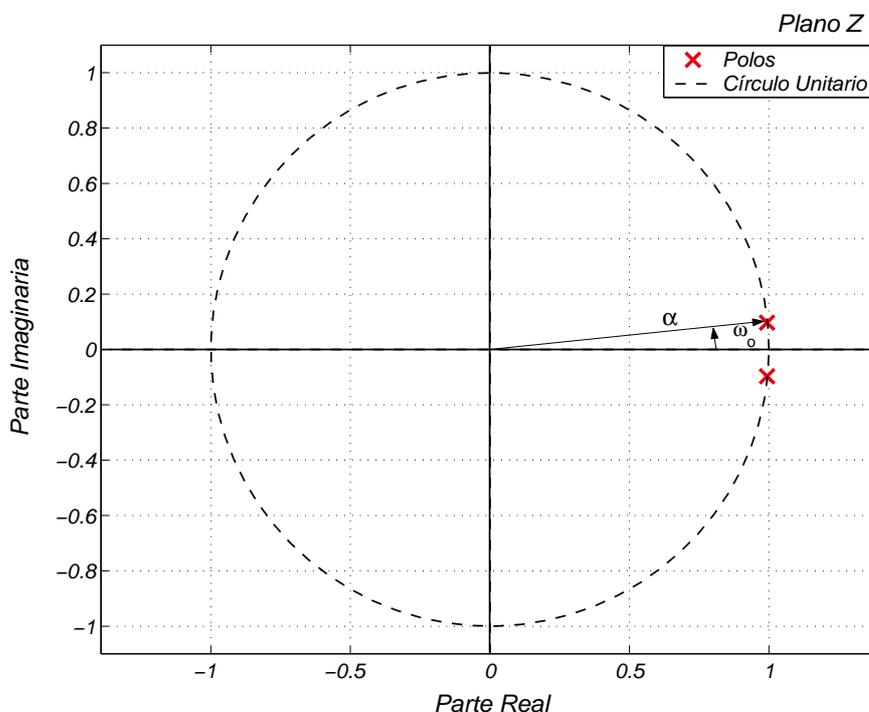


Figura 4.2: Polos del Estimador AR del Modelo Constante

Si comparamos los polos de la señal teórica propuesta  $s_d(n)$  ( $\times$  azul) con los polos del estimador AR del modelo constante ( $\times$  rojo) (véase Figura 4.3), observamos que los polos correspondientes a los coeficientes  $\hat{a}_k$  siempre tratarán de ubicarse cerca de los polos de la señal  $s_d(n)$  con mayor energía, que en este caso es la portadora de 60 Hz. Por lo tanto, a pesar de que existan armónicos o interarmónicos en la señal teórica  $s_d(n)$ , el estimador frecuencial de orden cero sólo se abocará a estimar la frecuencia de 60 Hz, correspondiente a la portadora de la señal teórica de la Figura 4.1.

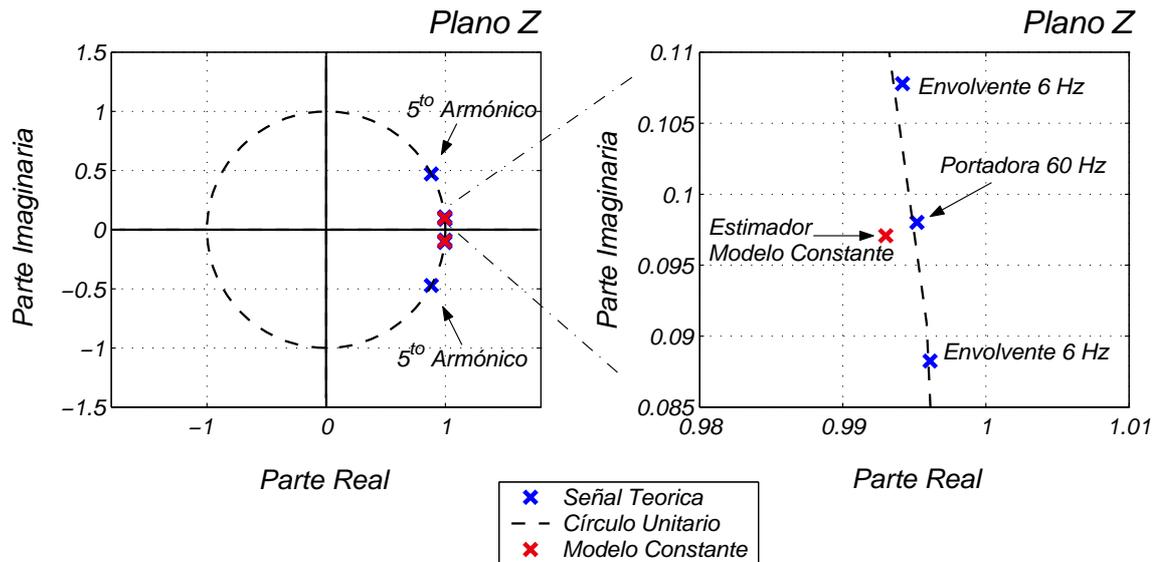


Figura 4.3: Polos en el Plano Z

Hasta ahora se ha obtenido la primera parte correspondiente a la estimación frecuencial, con la ayuda del modelo constante (4.2.9). En la siguiente subsección se enfocará a desarrollar la segunda parte del modelo (4.2.2) correspondiente a la la estimación fasorial.

## 4.2.2 Estimación Fasorial

Una vez obtenida la información referente a la estimación de la frecuencia  $\hat{\omega}_0$ , se procede a utilizar el modelo de segundo orden de estimación fasorial descrito en el Capítulo 3, tomando en cuenta la estimación frecuencial por periodos de  $N$  muestras descrito en la Subsección 4.2.1.

Partiendo del modelo constante empleado para la estimación frecuencial (4.2.9) y ahora considerando las variaciones de amplitud y fase en función del tiempo, el nuevo modelo de estimación fasorial sería el siguiente:

$$s(n) = \alpha^n a(n) \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi(n)) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.10)$$

Rescribiendo (4.2.10) en función de exponenciales complejas, resulta:

$$s(n) = \frac{1}{2} \left[ P(n) \alpha^n e^{j\hat{\omega}_0 n} + P^*(n) \alpha^n e^{-j\hat{\omega}_0 n} \right] \quad (4.2.11)$$

donde el término  $P(n) = a(n)e^{\phi(n)}$  es el *fasor dinámico*.

Para conocer el fasor dinámico  $P(n)$ , se sugiere que este se aproxime mediante la serie de Taylor y se trunque en el término de segundo orden, tal y como se desarrolló en el Capítulo 3 (ecuación (3.2.7)). Rescribiendo (4.2.11) tomando en cuenta las consideraciones previas, se tiene que:

$$\hat{s}^{(2)}(n) = \frac{1}{2} \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \alpha^n e^{j\hat{\omega}_0 n} + \frac{1}{2} \left[ P_0^{(2)*} + P_1^{(2)*} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)*} \frac{n^2}{2!} \right] \alpha^n e^{-j\hat{\omega}_0 n} \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.12)$$

Expresando (4.2.12) en función de coseno, se obtiene el nuevo modelo de segundo orden de estimación fasorial considerando las variaciones de frecuencia denotado por (4.2.13).

$$\hat{s}^{(2)}(n) = \alpha^n \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\hat{\omega}_0 n) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.13)$$

Una vez establecido el nuevo modelo estimación fasorial (4.2.13), lo siguiente es conocer cada uno de los elementos del *fasor dinámico*  $P(n)$  correspondientes a la serie de Taylor truncada. Para resolver este problema, se propone que el modelo (4.2.13) se considere como un filtro de predicción lineal y que cada uno de sus coeficientes sean estimados aplicando el principio de mínimos cuadrados. Para ello, resulta necesario obtener la función de transferencia del modelo (4.2.13), por lo que se recomienda realizar la transformada "z" de (4.2.12), resultando lo siguiente:

$$\frac{\bar{S}^{(2)}(z)}{z} = \frac{P_0^{(2)}}{z - \alpha e^{j\hat{\omega}_0}} + \frac{P_1^{(2)} \alpha e^{j\hat{\omega}_0}}{(z - \alpha e^{j\hat{\omega}_0})^2} + \frac{1}{2!} \frac{P_2^{(2)} \alpha e^{j\hat{\omega}_0} z}{(z - \alpha e^{j\hat{\omega}_0})^3} + \frac{P_0^{(2)*}}{z - \alpha e^{-j\hat{\omega}_0}} + \frac{P_1^{(2)*} \alpha e^{-j\hat{\omega}_0}}{(z - \alpha e^{-j\hat{\omega}_0})^2} + \frac{1}{2!} \frac{P_2^{(2)*} \alpha e^{-j\hat{\omega}_0} z}{(z - \alpha e^{-j\hat{\omega}_0})^3} \quad (4.2.14)$$

Si se obtiene el mínimo común denominador de (4.2.14) y se reagrupan los términos semejantes, se genera un modelo ARMA de sexto orden mostrado por (4.2.15), correspondiente al

modelo propuesto de estimación fasorial en (4.2.13).

$$\bar{S}^{(2)}(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q=5} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{p=6} \hat{a}_k z^{-k}} \quad (4.2.15)$$

Al analizar la función de transferencia denotada por (4.2.15), observamos que los coeficientes  $\hat{a}_k$ , correspondientes al denominador, constituyen tres pares de polos complejos conjugados ubicados cerca o sobre la circunferencia unidad en el plano "z", los cuales nos proporcionan la información correspondiente a la frecuencia  $\omega_0$  de la señal deseada  $s_d(n)$ . Dicha información ya es conocida, pues fue estimada por (4.2.6).

Hasta este momento ya se cuenta con la primera parte del modelo (4.2.2) referente a la estimación frecuencial, sólo falta por obtener la amplitud y la fase concerniente a la información fasorial proporcionada por los coeficientes  $b_l$  que constituyen el modelo MA (modelo puros polos), por lo que se sugiere hacer uso de la segunda parte de metodología de Shanks (véase Subsección 2.4.3) para la estimación de dichos coeficientes. La ecuación correspondiente para estimar los coeficientes  $\hat{b}_l$ , se muestran a continuación:

$$\sum_{l=0}^q \hat{b}_l r_{vv}(l, m) = r_{s_d v}(m) \quad m = 0, 1, \dots, q \quad (4.2.16)$$

donde por definición:

$$\begin{aligned} r_{vv}(l, m) &= \sum_{n=0}^N v^*(n-l)v(n-m) \\ r_{s_d v}(l) &= \sum_{n=0}^N s_d(n)v^*(n-l) \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

donde el elemento  $v$  se refiere a la respuesta del modelo AR (puros polos) al excitarse con un impulso unitarios  $\delta(n)$  por periodos de  $N$ .

Una vez adquiridos los coeficientes  $\hat{a}_k$  y  $\hat{b}_l$ , se puede formar el modelo ARMA referente a la señal estimada, tal y como se muestra en (4.2.18). La construcción de la señal  $\hat{s}(n)$  se realiza

excitando con impulsos unitarios  $\delta(n)$  de longitud  $N$  al modelo ARMA mencionado,

$$\hat{S}(z) = \frac{\sum_{l=0}^q \hat{b}_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k z^{-k}} \quad (4.2.18)$$

donde los límites de los sumadores  $q$  y  $p$  son de 5° y 6° orden respectivamente, los cuales resultan del modelo de estimación fasorial de segundo orden mostrado por (4.2.13).

Hasta este momento somos capaces de reconstruir la señal  $\hat{s}(n)$  aplicando impulsos unitarios al modelo ARMA (4.2.18), pero aún no se ha resuelto la problemática de como obtener los elementos del *fasor dinámico*  $P(n)$  (véase (4.2.13)), los cuales aportan la información concerniente a la amplitud y la fase de la señal estimada. Una forma de lograrlo es realizando la *demodulación* de la señal estimada  $\hat{s}(n)$ , lo cual se logra realizando la expansión en fracciones parciales del modelo ARMA (4.2.18).

$$\frac{\hat{S}^{(2)}(z)}{z} = \frac{\hat{P}_0^{(2)}}{z - \alpha e^{j\hat{\omega}_0}} + \frac{\hat{P}_1^{(2)} \alpha e^{j\hat{\omega}_0}}{(z - \alpha e^{j\hat{\omega}_0})^2} + \frac{1}{2!} \frac{\hat{P}_2^{(2)} \alpha e^{j\hat{\omega}_0} z}{(z - \alpha e^{j\hat{\omega}_0})^3} + \frac{\hat{P}_0^{(2)*}}{z - \alpha e^{-j\hat{\omega}_0}} + \frac{\hat{P}_1^{(2)*} \alpha e^{-j\hat{\omega}_0}}{(z - \alpha e^{-j\hat{\omega}_0})^2} + \frac{1}{2!} \frac{\hat{P}_2^{(2)*} \alpha e^{-j\hat{\omega}_0} z}{(z - \alpha e^{-j\hat{\omega}_0})^3} \quad (4.2.19)$$

Al estudiar (4.2.19) observamos que los coeficientes  $\hat{P}_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  se encuentran en el numerador de cada uno de los términos de la ecuación, por lo que se opta por realizar la transformada "z" inversa de (4.2.19) y expresarla en función de exponenciales, obteniéndose (4.2.20).

$$\hat{s}^{(2)}(n) = \hat{P}_0^{(2)} \alpha^n e^{j\hat{\omega}_0 n} + \hat{P}_1^{(2)} n \alpha^n e^{j\hat{\omega}_0 n} + \frac{\hat{P}_2^{(2)} n^2}{2!} \alpha^n e^{j\hat{\omega}_0 n} \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.20)$$

$$\hat{P}_0^{(2)*} \alpha^n e^{-j\hat{\omega}_0 n} + \hat{P}_1^{(2)*} n \alpha^n e^{-j\hat{\omega}_0 n} + \frac{\hat{P}_2^{(2)*} n^2}{2!} \alpha^n e^{-j\hat{\omega}_0 n}$$

La información e interpretación de los elementos  $\hat{P}_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  fue proporcionada anteriormente en el Capítulo 3, así como también la forma de obtener cada uno de las derivadas de la amplitud y la fase de cada fasor  $\hat{P}_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  correspondientes a la serie de Taylor, (véase ecuaciones (3.2.20) y (3.2.21)).

Finalmente la manera de reconstruir la amplitud y la fase de la señal  $\hat{s}(n)$  es mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\hat{a}(n) = \alpha^n \left[ \hat{a}(0) + \hat{a}'(0)n + \frac{\hat{a}''(0)n^2}{2!} \right] \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.21)$$

$$\hat{\phi}(n) = \hat{\phi}(0) + \hat{\phi}'(0)n + \frac{\hat{\phi}''(0)n^2}{2!} \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.2.22)$$

En (4.2.21) observamos que cada uno de los términos de la ecuación son multiplicados por la ganancia exponencial  $\alpha^n$ , donde su valor depende directamente de la variaciones de amplitud de la señal deseada  $s_d(n)$ .

En la Figura 4.4 se muestra un diagrama de flujo que resume la metodología explicada en la Sección 4.2.

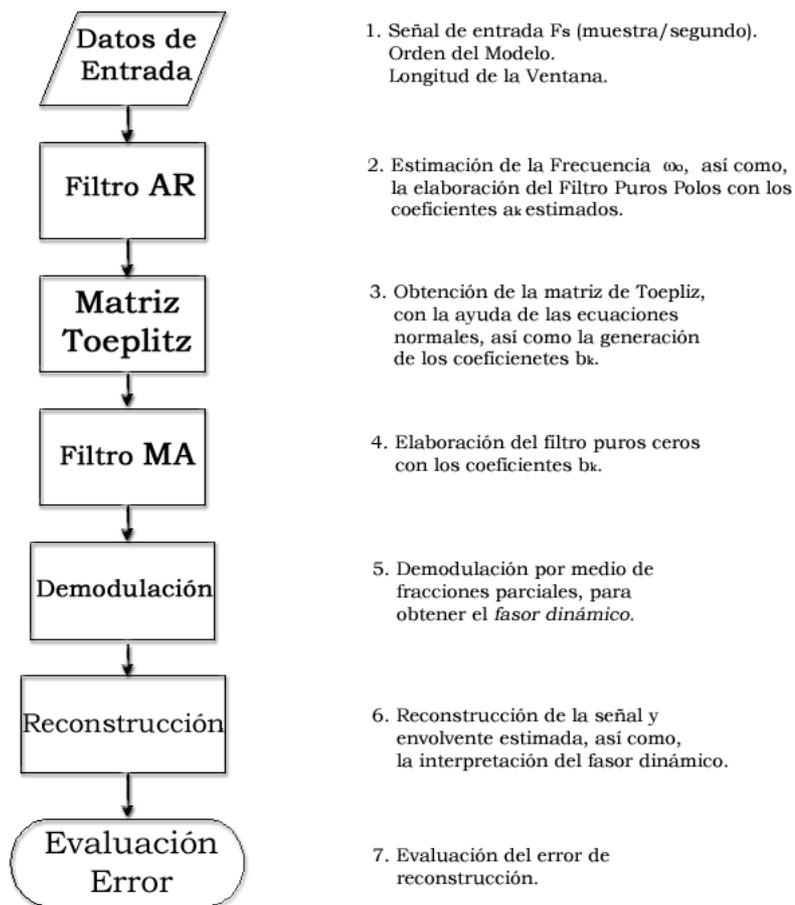


Figura 4.4: Diagrama de Flujo de Estimación Fasorial

### 4.3 Análisis Temporal

Una vez establecida la metodología del nuevo método de estimación fasorial considerando las variaciones de frecuencia (4.2.2), resulta ilustrativo evaluarlo, así como el análisis de las formas y magnitudes de los errores de reconstrucción de amplitud correspondientes a los modelos constante, lineal y cuadrático. Por lo que se propone estimar con cada uno de los modelos (constante, lineal y cuadrático) una señal teórica de 60 Hz con una oscilación periódica de 6 Hz, donde la amplitud de la oscilación es de 0.5 a 1.5 con una frecuencia de muestreo  $F_s = 64 \frac{\text{muestras}}{\text{ciclo}}$  (véase Figura 3.5).

Al aplicar el modelo constante de estimación fasorial, considerando la variaciones de frecuencia, por pequeñas ventanas de longitud de 1 ciclo a la señal teórica mostrada en la Figura 3.5, se produce un modelo ARMA de segundo orden de la forma (4.2.18). Al aplicar impulsos unitarios  $\delta(n)$  de longitud de 1 ciclo al modelo ARMA, se obtiene la señal estimada impulsional. Si a continuación se realiza la transformada "z" inversa de dicho modelo ARMA y se expresa la ecuación resultante en función de cosenos se genera el modelo denotado por (4.3.1) evaluado por longitudes de  $N$ .

$$\hat{s}^{(0)}(n) = \alpha^n \hat{a}(0) \cos(\hat{\omega}_0 n + \hat{\phi}(0)) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.3.1)$$

donde  $\hat{a}(0)$  representa la amplitud o la envolvente de la señal reconstruida  $\hat{s}(n)$  y  $\hat{\phi}_0$  es la fase de esta última, ambos elementos  $\hat{a}(0)$  y  $\hat{\phi}(0)$  constituyen al fasor dinámico de orden cero  $\hat{P}_0$ ;  $\alpha^n$  se caracteriza por ser una ganancia exponencial con el fin de compensar las variaciones de amplitud que presenta la señal que se desea estimar, en nuestro caso la señal  $s_d(n)$  mostrada en la Figura 3.5. La señal  $\hat{s}(n)$  que resulta al aplicar las consideraciones anteriores se muestra en la Figura 4.5.

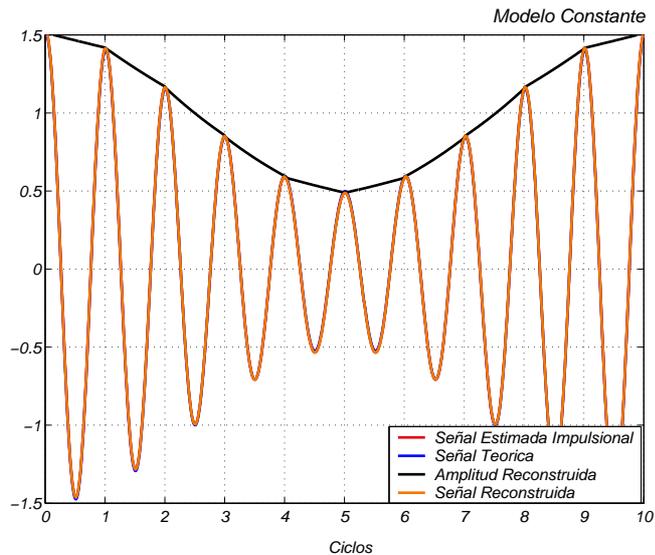


Figura 4.5: Modelo Constante considerando la estimación frecuencial

Al estudiar la Figura 4.5 se percibe a simple vista una buena estimación por parte del modelo constante (4.3.1). Esto es consecuencia de realizar la estimación frecuencial y de incluir una ganancia exponencial para compensar las variaciones de amplitud. Si se compara la Figura 4.5 con la Figura 3.8 correspondiente a la estimación del modelo lineal expuesta en la Subsección 3.2.1, se observa que ambas figuras muestran una gran afinidad, lo cual quedará corroborado en las gráficas de la forma del error de estimación de amplitud.

Si se compara la Figura 4.5 con la Figura 3.6, referente a la estimación del modelo constante vista en la Subsección 3.2.1, observamos que la reconstrucción de la amplitud  $\hat{a}(n)$  en este caso ya no está formada por una función escalonada, si no que ahora está compuesta por pequeñas funciones exponenciales crecientes y decrecientes dependiendo de las variaciones de amplitud. Al examinar nuevamente la Figura 4.5, se percibe que la amplitud reconstruida  $\hat{a}(n)$  aparenta estar formada por pequeñas pendientes, pero en realidad dicha amplitud está compuesta por funciones exponenciales, tal y como se mencionó anteriormente, por lo tanto, las formas del error de amplitud deben asemejarse en gran medida a la Figura 3.9, correspondiente al error

relativo porcentual de reconstrucción de amplitud del modelo lineal visto en la Subsección 3.2.1.

Enseguida se evalúa el modelo constante de estimación fasorial denotado por (4.3.1) de manera que se pueda respaldar las observaciones realizadas en los párrafos anteriores. Esto se logra por medio de (3.2.23) correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud.

Al aplicar (3.2.23) al modelo constante (4.3.1) se genera la Figura 4.6 correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud del modelo constante.

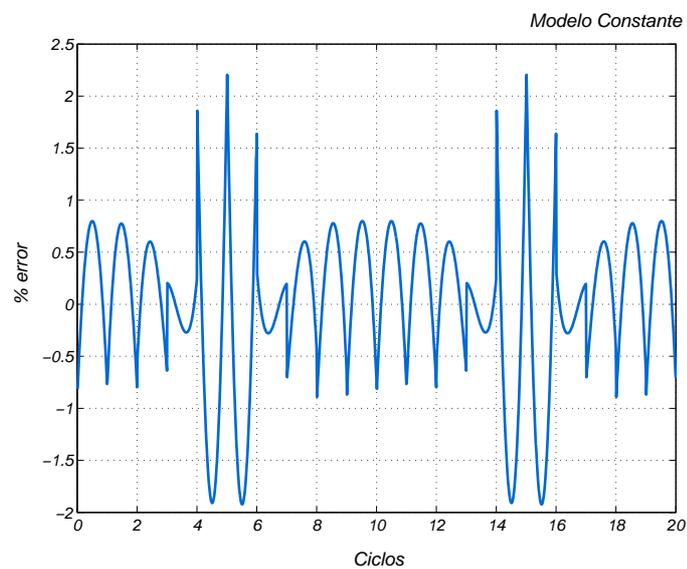


Figura 4.6: Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Constante

Al examinar la Figura 4.6 percibimos que ésta se forma por parábolas y paraboloides (elementos de segundo y tercer orden respectivamente), esto parecerá extraño si tenemos en cuenta que está utilizando un modelo de orden cero para la estimación de la señal  $s_d(n)$ . Sin embargo la explicación de esta forma de error es que se ha incluido la ganancia exponencial  $\alpha^n$ , provocando que el modelo se comporte como uno de primer orden, pues la ganancia exponencial para los intervalos de observación se comportan como una componente lineal, lo cual se ve reflejado en

las formas del error relativo porcentual.

Al estudiar una vez más la Figura 4.6, observamos que el error relativo porcentual no sobrepasa el valor de 2.5%, lo que representa, aproximadamente, una quinta parte del valor máximo de la Figura 3.7 referente al modelo constante de estimación fasorial tradicional. Si al mismo tiempo se compara la Figura 4.6 con la Figura 3.9 correspondiente al error porcentual referente al modelo lineal, se observa que existe cierta similitud en las formas del error. Estas mejoras en la estimación se deben a la inclusión de la ganancia exponencial  $\alpha^n$  en el modelo constante (4.2.1).

Una vez producida la estimación de amplitud gracias al modelo constante (4.3.1), lo siguiente es mostrar la estimación en frecuencia obtenida al usar dicho modelo (véase Figura 4.7).

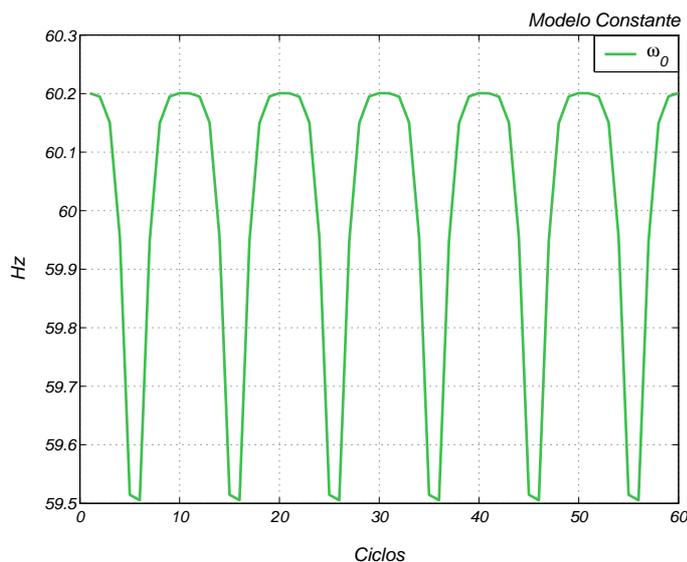


Figura 4.7: Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Constante

Al analizar la Figura 4.7, observamos que la estimación de la frecuencia presenta una variación de +0.333% a -0.833%, esto debido a que los polos que representan a  $\hat{\omega}_0$  se acomodan en el plano "z", de tal forma que tratan de estimar la frecuencia de la portadora  $s_d(n)$ ,

y al mismo tiempo compensar en cierta manera las variaciones de amplitud, que se presentan en dicha señal.

Si ahora se aplica el modelo lineal de estimación fasorial considerando las variaciones de frecuencia denotado por (4.3.2) para estimar la señal teórica  $s_d(n)$  mostrada en Figura 3.5, se produce un modelo ARMA de cuarto orden de la forma (4.2.18) y al aplicar la metodología descrita en la Figura 4.4, se produce el estimado de  $s_d(n)$ , la cual se muestra en la Figura 4.8.

$$\hat{s}^{(1)}(n) = \alpha^n \left[ P_0^{(1)} + P_1^{(1)} \frac{n}{1!} \right] \cos(\hat{\omega}_0 n) \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.3.2)$$

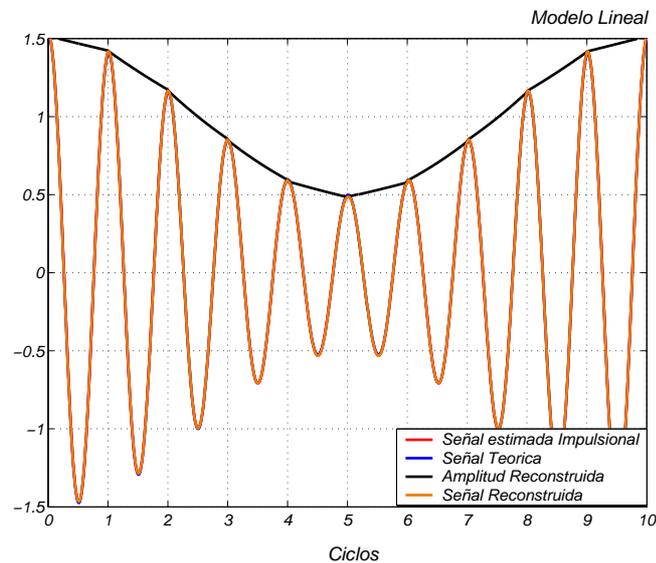


Figura 4.8: Estimación de  $s_d(n)$  por medio del Modelo Lineal, considerando las variaciones de frecuencia

Al examinar con detenimiento la Figura 4.8, se percibe una gran similitud con la Figura 4.5 correspondiente a la estimación de  $s_d(n)$  utilizando el modelo constante (4.3.1), lo cual se debe al efecto que produce la inclusión de la ganancia exponencial  $\alpha^n$ , tal y como se explicó anteriormente. A pesar de ello, en el modelo lineal (4.3.2) se ofrece una mejor estimación, esto se basa en el hecho de agregar un nuevo elemento lineal  $P_1^{(1)} \frac{n}{1!}$  al fasor constante  $P_0^{(1)}$ ,

los cuales, al ser ponderados por la ganancia exponencial  $\alpha^n$ , nos ayuda a obtener una mejor reconstrucción de la envolvente  $\hat{a}(n)$  de la señal teórica. Lo anterior quedará establecido al evaluar el error de reconstrucción.

Al hacer uso de (3.2.23) para evaluar al modelo lineal (4.3.2), se genera la Figura 4.9 correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud del modelo lineal.

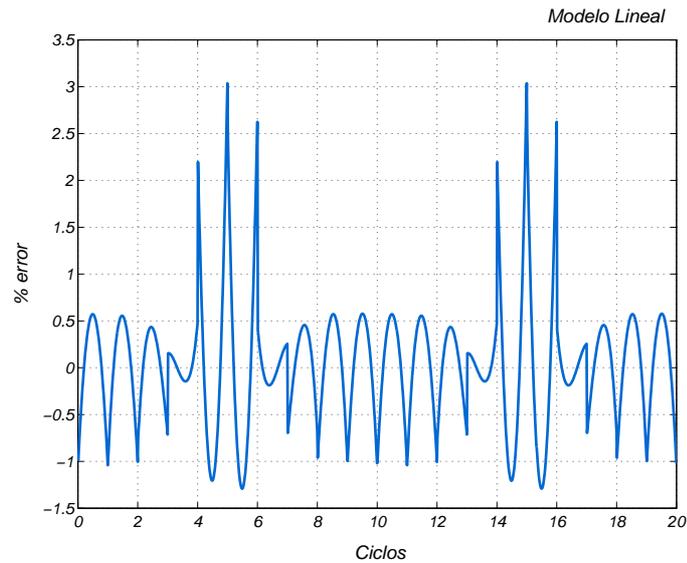


Figura 4.9: Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Lineal

A primera instancia no se percibe diferencia alguna, entre la Figura 4.6 y la Figura 4.9, pues las formas del error en ambas parecen ser semejantes, salvo en los máximos y los mínimos porcentuales, que existen pequeñas disimilitudes. Por tales motivos resulta difícil evaluar el error de reconstrucción de amplitud haciendo uso de (3.2.23), por lo que se propone hacer uso de la sumatoria cuadrática del error  $\mathcal{E}$  expuesta en el Capítulo 2. Aplicando esta última para evaluar el error de reconstrucción de amplitud se obtiene (4.3.3).

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^N [a(n) - \hat{a}(n)]^2 \quad (4.3.3)$$

Al hacer uso de (4.3.3) para la evaluación del error de reconstrucción de amplitud, se generan

los siguientes valores: 0.1399 y 0.1107 correspondientes al modelo constante (4.3.1) y modelo lineal (4.3.2), respectivamente. Al comparar estos resultados se comprueba que el modelo lineal efectivamente ofrece la mejor reconstrucción de amplitud, tal y como se había mencionado anteriormente.

El hecho de incluir el elemento  $P_1^{(1)} \frac{n}{11}$ , correspondiente al fasor lineal, nos permite una mejor estimación de la amplitud  $a(n)$  referente a la señal  $s_d(n)$ , pero al mismo tiempo nos proporciona información correspondiente a la primera derivada de la amplitud así como de la fase, tal y como se muestra en el conjunto de ecuaciones (3.2.20) y (3.2.21). Al tener conocimiento concerniente de la primera derivada de la fase, ésta se puede interpretar como información referente a la frecuencia  $\omega_0$ , de tal manera que si agregamos  $\hat{\phi}'(0)$  en  $\frac{rad}{seg}$  a la estimación frecuencial de  $\hat{\omega}_0$  se tendrá una mejor estimación de la frecuencia de la portadora de la señal  $s_d(n)$ . Obteniéndose la Figura 4.10 correspondiente a la estimación frecuencial haciendo uso del modelo lineal (4.3.2).

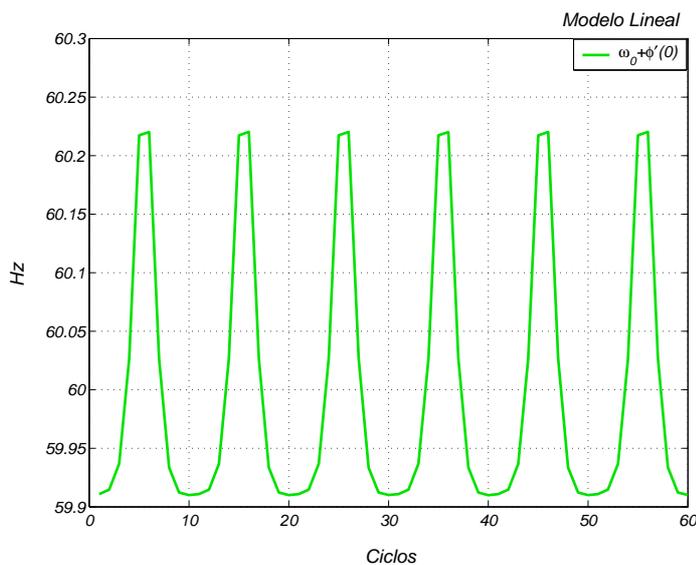


Figura 4.10: Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Lineal

Al estudiar detenidamente la Figura 4.10 observamos que ya no presenta una variación tan pronunciada como su predecesora correspondiente a la estimación de la frecuencia que hace

uso solamente del modelo constante expuesto en la Figura 4.7. Esto se debe a la inclusión del término  $\hat{\phi}'(0)$  comentado anteriormente, cuya función es compensar la localización de los polos en el plano "z" correspondientes a la frecuencia estimada  $\hat{\omega}_0$ , debido a que estos últimos tratan de estimar la frecuencia de la portadora  $s_d(n)$  y al mismo tiempo compensar en cierta manera las variaciones de amplitud, obteniendo de esta manera un mejor estimado de la frecuencia.

Una vez empleados los modelos constante (4.3.1) y lineal (4.3.2) sólo resta por aplicar el modelo cuadrático expuesto en (4.2.13) para estimar la señal  $s_d(n)$  alusivo a la Figura 3.5, resultando en un modelo ARMA de sexto orden de la forma de (4.2.18). Al aplicar la metodología descrita por la Figura 4.4, obtenemos la Figura 4.11 referente a la estimación de la señal  $s_d(n)$  haciendo uso del modelo cuadrático (4.2.13).

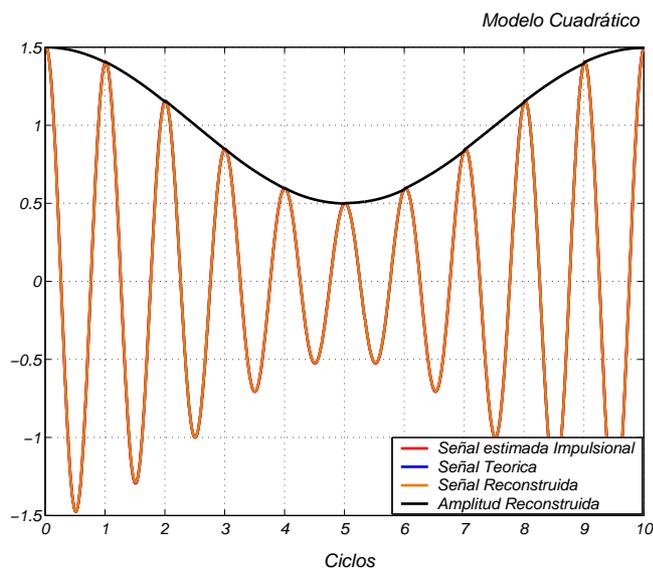


Figura 4.11: Estimación de  $s_d(n)$  por medio del Modelo Cuadrático, considerando las variaciones de frecuencia

Al examinar la Figura 4.11, observamos una buena estimación por parte del modelo cuadrático (4.2.13), esto se debe a la inclusión de un nuevo término cuadrático  $P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!}$  a los fasores constante y lineal, donde al ser estos ponderados por la ganancia  $\alpha^n$ , nos ofrece una mejor reconstrucción

de la señal  $\hat{s}(n)$ , así como de la envolvente  $\hat{a}(n)$ , observando que esta última está constituida por pequeñas parábolas que hacen alusión al fador cuadrático mencionado anteriormente.

Al aplicar (3.2.23) al modelo cuadrático (4.2.13) se genera la Figura 4.12 correspondiente al error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud del modelo de segundo orden.

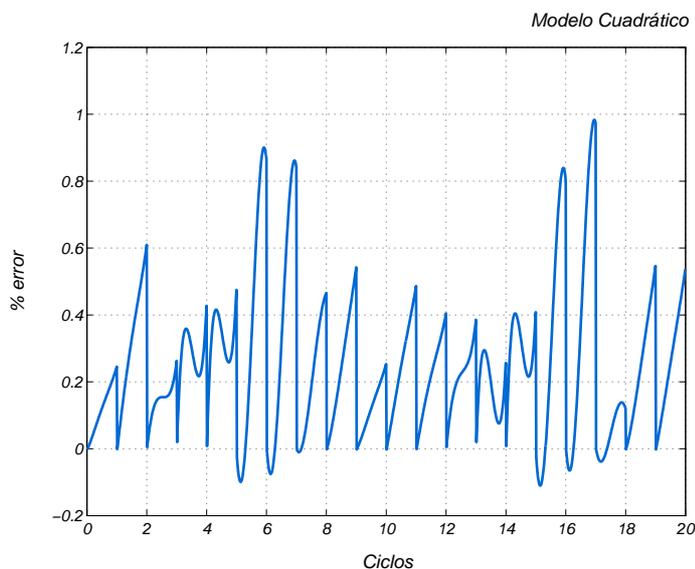


Figura 4.12: Error Relativo Porcentual de Reconstrucción de Amplitud del Modelo Cuadrático

Al confrontar nuevamente la Figura 4.9, correspondiente al modelo lineal, con la Figura 4.12, se percibe en esta última un decremento en el error porcentual originado por la incorporación del término cuadrático  $\hat{P}_2^{(2)}$  al modelo de estimación fasorial.

Siguiendo la secuencia mostrada en la presente sección a continuación se muestra la estimación de la frecuencia haciendo uso del modelo cuadrático (4.2.13), tomando en cuenta la consideración de agregar la primera derivada de la fase  $\hat{\phi}'(0)$  a la estimación frecuencial  $\hat{\omega}_0$  tal y como se realizó con el modelo lineal, produciéndose la Figura 4.13.

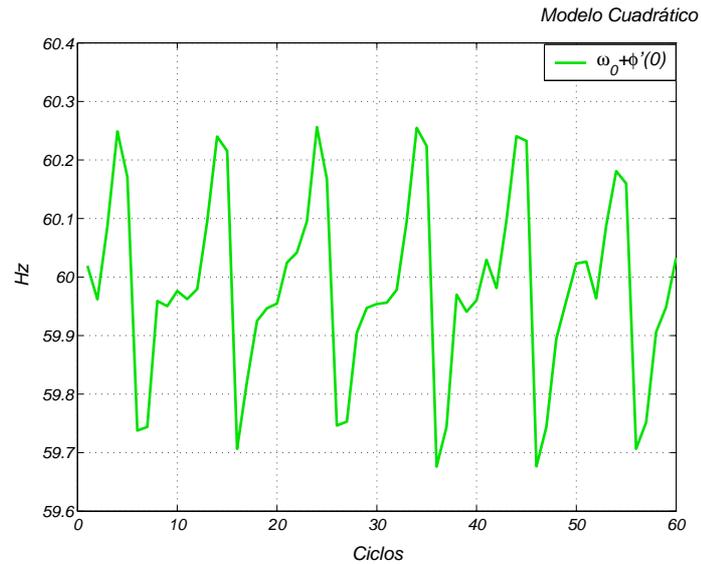


Figura 4.13: Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Cuadrático

En la Figura 4.13, se observa que la compensación del término correspondiente a la primera derivada de la fase  $\hat{\phi}'(0)$  no es suficiente para compensar las variaciones de frecuencia presentadas en la Figura 4.7, pero aún así presenta en cierto modo un comportamiento aceptable en comparación de estimación en frecuencia proporcionada por el modelo (4.3.1).

A continuación se somete el modelo cuadrático (4.2.13) ante la señal real mostrada por la Figura 3.12 vista en la Subsección 3.2.1, en la cual fueron expuestas las características de la señal misma, así como la frecuencia de muestreo de esta.

La estimación de esta señal se realizará por pequeñas ventanas de longitud de dos ciclos, esto debido a la estabilidad que presenta el modelo (4.2.13) al aparecer componentes múltiples de la fundamental, lo cual fue comprobado en la Subsección 3.2.2. Aplicando la metodología presentada por la Figura 4.4, se produce la Figura 4.14 referente a la estimación señal real haciendo uso del modelo de segundo orden.

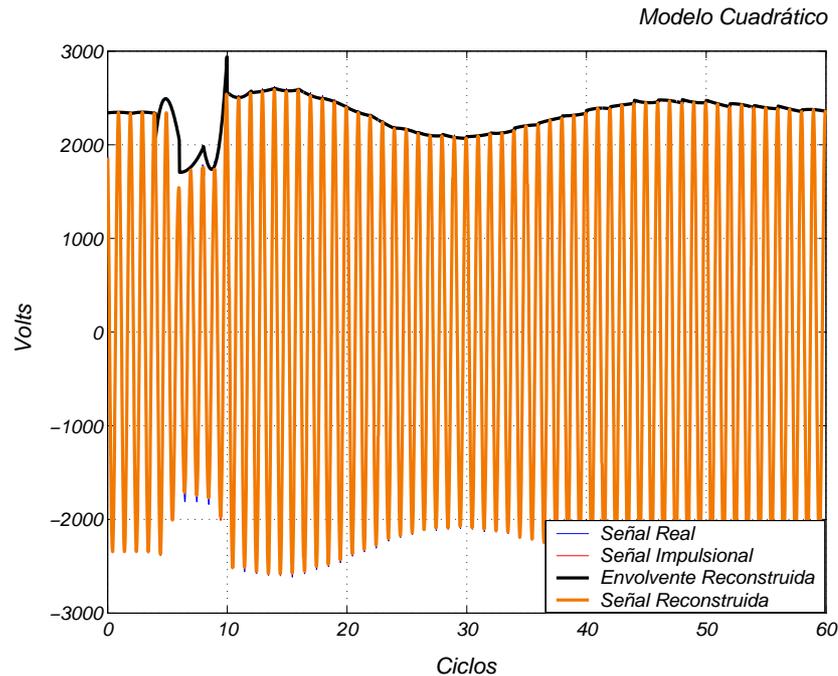


Figura 4.14: Estimación de la Señal Real

Al analizar la Figura 4.14 se percibe una buena aproximación por parte del modelo (4.2.13) con respecto a la señal real propuesta mostrada en la Figura 3.12. Por otra parte, la envolvente reconstruida  $\hat{a}(n)$  obtenida utilizando el método de demodulación propuesto, presenta un comportamiento adecuado en el área de prefalla. No obstante, al entrar en el área de falla la amplitud reconstruida presenta un comportamiento algo inestable debido al cambio súbito de la señal real; sin embargo, una vez que la envolvente reconstruida entra a la zona de postfalla se caracteriza por tener un comportamiento suave y estable al momento de estimar la oscilación de la señal real propuesta.

En la Figura 4.14 se exhibió el comportamiento de la amplitud reconstruida, pero aún queda por analizar el comportamiento de la fase reconstruida  $\hat{\phi}(n)$  con respecto a la señal real, esto se logra con la ayuda del conjunto de ecuaciones (4.2.21) y (4.2.22), por lo que a continuación, en la Figura 4.15, se muestran ambos parámetros para realizar un análisis por separado de estos.

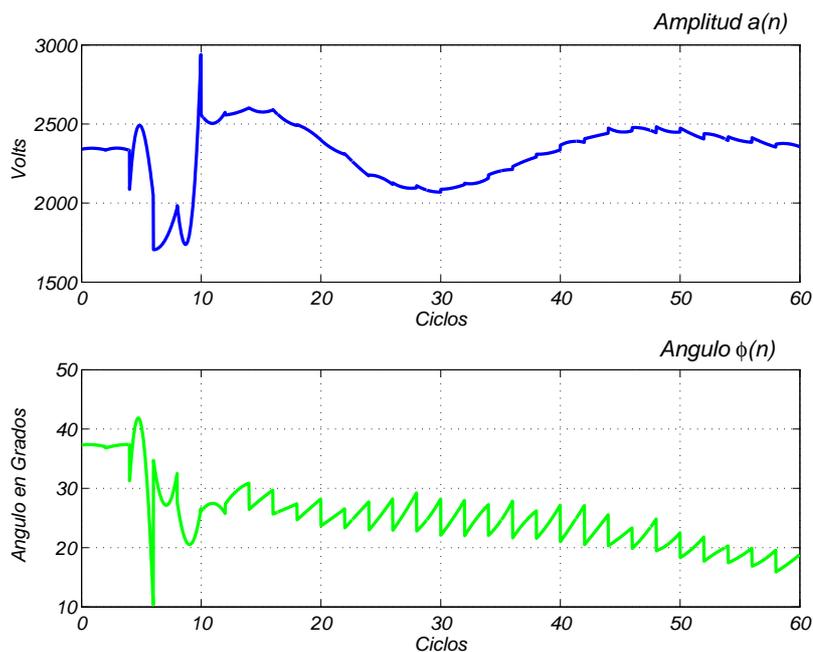


Figura 4.15: Amplitud y Fase de la Señal Reconstruida

Al estudiar la Figura 4.15 se observa que tanto la amplitud  $\hat{a}(n)$  como la fase  $\hat{\phi}(n)$  están formadas por pequeñas parábolas haciendo alusión al fador cuadrático incluido en el modelo (4.2.13). Al continuar analizando la figura percibimos que la envolvente tiene una conducta suave y estable en las zonas de prefalla y postfalla, contrario a la fase reconstruida, la cual se caracteriza por tener un comportamiento algo inestable en las dos últimas zonas de la señal real propuesta. Esta conducta un tanto anormal se debe a que la fase trata de compensar la localización de los polos en plano "z" correspondientes a la frecuencia estimada  $\hat{\omega}_0$ , ya que estos tienen la función de estimar la frecuencia, así como de contrarrestar en cierta manera la variaciones de amplitud de la señal real, provocando una estimación de la fase un tanto inestable.

Continuando con el análisis de la Figura 4.15, y observando detenidamente las gráficas correspondientes a la amplitud y la fase, se perciben pequeñas discontinuidades al final del

intervalo de interpolación del modelo. Esto podría ser evitado reduciendo la ventana de interpolación del modelo, pero nos ocasionaría mayor inestabilidad en los estimados, sobre todo en el área de falla. La solución a estos problemas será proporcionada más adelante.

Al examinar una vez más la Figura 4.15, se perciben cambios abruptos de la fase reconstruida con respecto al tiempo  $d\hat{\phi}/dt$  al momento de entrar a la zona de falla de la señal real. Una vez liberada la falla, la señal real entra en la zona de postfalla y la fase presenta una serie de discontinuidades formada por parábolas ascendentes en cada intervalo de interpolación y al mismo tiempo experimenta un descenso paulatino hasta alcanzar los  $16^\circ$ . Este comportamiento un tanto anormal que presenta la fase correspondería a un offset de frecuencia  $\Delta F$  en la zona de falla, mientras que las discontinuidades que presenta  $\hat{\phi}(n)$  en la zona de postfalla se refieren a la forma en que ésta trata de compensar las estimaciones de la frecuencia  $\hat{\omega}_0$  por parte del modelo puros polos, tal y como se mencionó anteriormente. En lo que respecta al comportamiento descendente que sufre la fase en esta zona, se debe a que ésta trata de alcanzar su nueva condición de estado estable originada por la modificación de los parámetros del sistema al momento de ser liberada la falla.

Una forma de corroborar lo expuesto en el párrafo anterior es por medio de la Figura 4.16, donde se presenta la estimación de la frecuencia de dicha señal incluyendo la primera derivada del ángulo mencionada anteriormente.

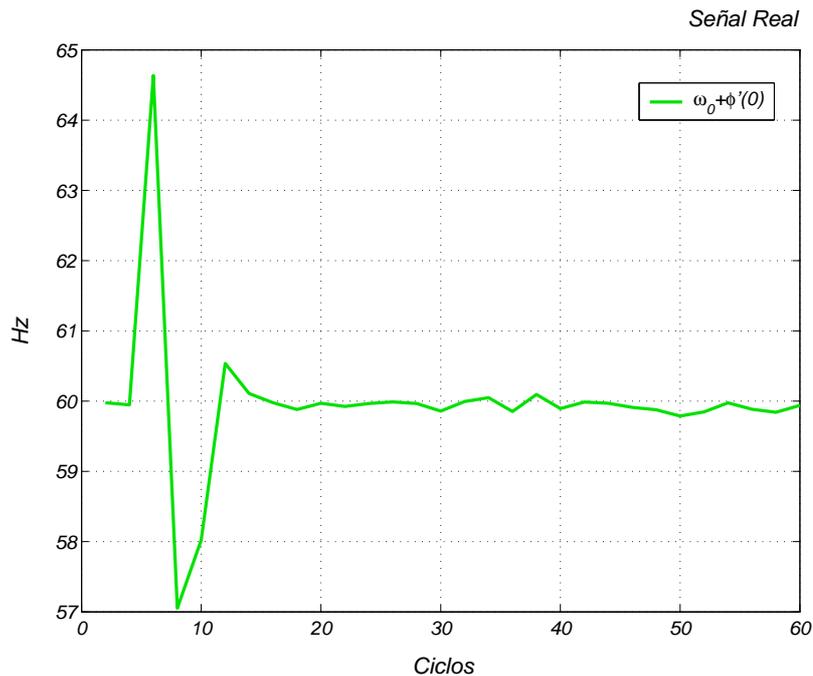


Figura 4.16: Estimación de la Frecuencia con ayuda del Modelo Cuadrático

Estudiando la Figura 4.16 se observa un cambio abrupto de la frecuencia estimada al momento de ocurrir la falla en el sistema, una vez liberada la falla, se observan pequeñas variaciones de frecuencia alrededor de los 60 Hz, esto se debe a que dicha señal en la zona de postfalla presenta una oscilación de  $\pm 11\%$ .

Una forma de eliminar las discontinuidades al final del intervalo de interpolación ocasionado por los cambios abruptos de la señal real expuesta por la Figura 3.12, es empleando la estimación instantánea usando el estimador de dos ciclos explicado al principio de la sección.

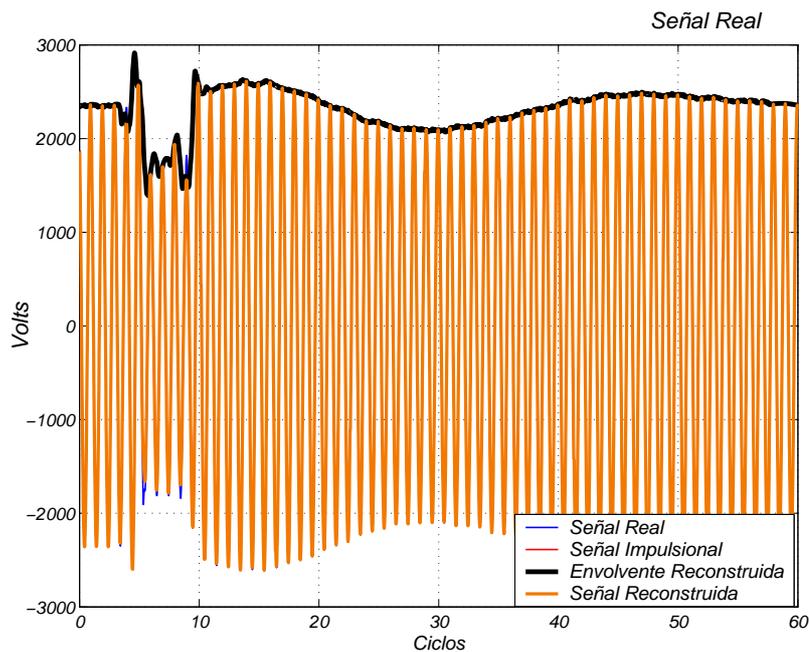


Figura 4.17: Estimación Instantánea de la Señal Real con un estimador de dos ciclos

En la Figura 4.17 se muestran los estimados tanto de la amplitud reconstruida así los de la señal real, si se analizan estas estimaciones se observa que poseen un mejor comportamiento comparados contra los estimados obtenidos en la Figura 4.14, donde se perciven pequeñas discontinuidades al final del intervalo de interpolación al momento de presentarse cambios abruptos en la señal a estimar. Continuando con el análisis de la señal reconstruida  $\hat{s}(n)$ , se observa una correcta estimación en el área de prefalla y postfalla, no así en el área de falla donde el estimador se ve en aprietos para estimar el cambio abrupto de la señal propuesta, a pesar de esto, el estimador ofrece un resultado apropiado en esta zona.

Una vez analizado el comportamiento de la señal estimada  $\hat{s}(n)$ , en la Figura 4.18 se muestran los estimados de la amplitud y la fase correspondientes a la señal propuesta.

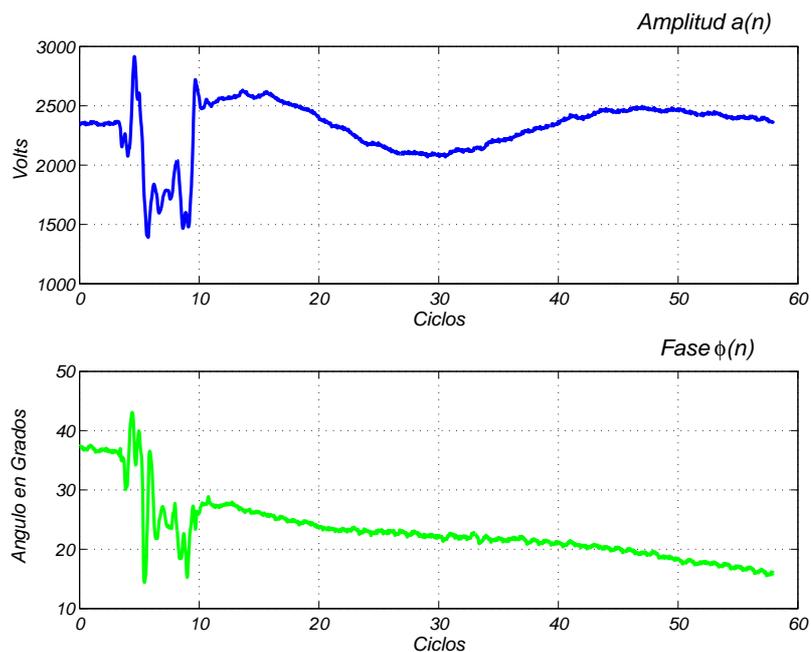


Figura 4.18: Estimados de la Amplitud y la Fase Instantánea de la Señal Reconstruida

Si reflexionamos respecto a la Figura 4.18, se nota una mayor continuidad y uniformidad en los estimados, asentándose las características de un comportamiento suave y estable a lo largo del periodo de estimación, esto se refleja generalmente en las zonas de prefalla y postfalla tanto en la amplitud  $\hat{a}(n)$  así como en la fase  $\hat{\phi}(n)$  reconstruida, esto se debe gracias a la implementación de la estimación de manera instantánea.

Otro punto importante a observar en la Figura 4.18, es el espacio vacío de longitud de dos ciclos ubicado en el rango de 58 a 60 ciclos mostrado en ambas gráficas de la figura, esto es causa de que la estimación instantánea es hacia la derecha y el último espacio en blanco corresponde a la interpolación de la última ventana.

Si examinamos nuevamente el comportamiento de la fase reconstruida  $\hat{\phi}(n)$  expuesta en la Figura 4.18, observamos que esta experimenta una serie de cambios abruptos con respecto al tiempo  $d\hat{\phi}/dt$  al momento de iniciar el disturbio, lo que correspondería a un  $\Delta F$  en la frecuencia

nominal de la señal real. En lo que se refiere al comportamiento descendente que presenta  $\hat{\phi}(n)$ , se origina por la modificación de los parámetros del sistema al momento de ser liberada la falla y por tanto la fase trata de alcanzar su nueva condición de estado estable.

Para darle continuidad al análisis presentado en el párrafo anterior a continuación se presenta la Figura 4.19, correspondiente estimación frecuencial.

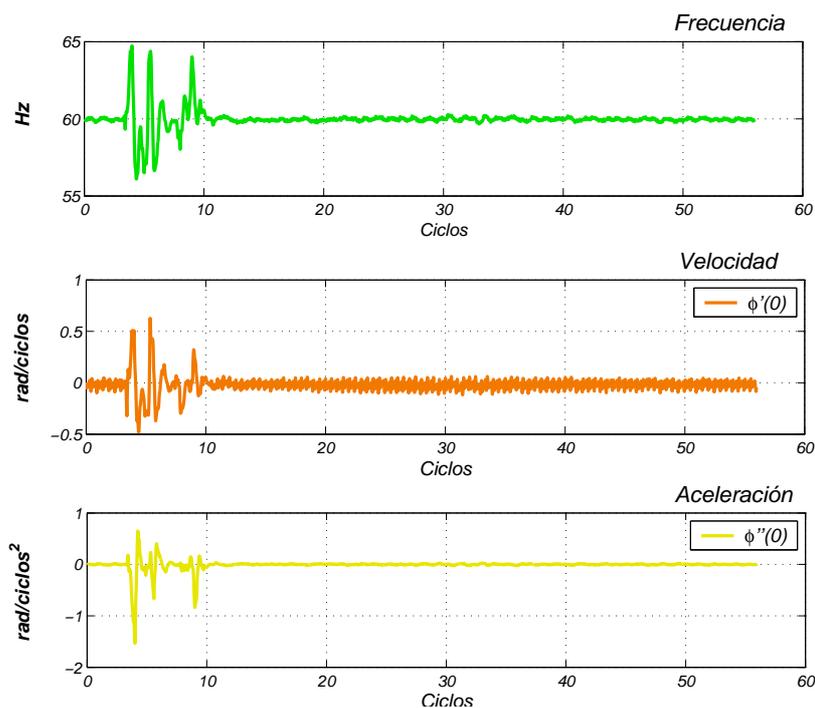


Figura 4.19: Estimación de la Frecuencia así como la primera y segunda derivada de la fase

La Figura 4.19, muestra la estimación de la frecuencia así como la primera y la segunda derivada de la fase  $\hat{\phi}(n)$  denotadas por  $\hat{\phi}'(0)$  y  $\hat{\phi}''(0)$  respectivamente. La estimación de la frecuencia mostrada en la figura se obtiene sumando la frecuencia estimada  $\hat{\omega}_0$  y el valor correspondiente a la primera derivada de la fase multiplicada esta última por un factor  $(\frac{60}{2\pi})$ , tal y como se ha mencionado anteriormente. Al continuar estudiando la estimación de la frecuencia denotada por  $\hat{\omega}_0 + \hat{\phi}'(0)$ , se percibe una variación de esta alrededor de  $\pm 4$  Hz en el rango 5 a 10 ciclos correspondientes a la zona de falla de la señal real, en lo que concierne a la zona

de postfalla la frecuencia estimada presenta un comportamiento adecuado con una pequeña variación  $\pm 0.2$  Hz alrededor de la frecuencia nominal.

Al estudiar nuevamente la Figura 4.19, observamos que la primera derivada  $\hat{\phi}'(0)$  tiene una participación considerable en la zona de falla, por lo que se podría concluir que la primera derivada de la fase  $\hat{\phi}'(0)$  (velocidad) multiplicada por el factor  $(\frac{60}{2\pi})$  se caracteriza por tener la información relacionada con el offset  $\Delta F$  que sufre la frecuencia nominal de la señal  $s_{real}$  al momento de ocurrir la falla. En lo que respecta a la zona de postfalla  $\hat{\phi}'(0)$  presenta pequeñas variaciones alrededor de cero, lo que significa que esta tiene la función compensar las variaciones de estimación de  $\hat{\omega}_0$  proporcionadas por el modelo puros polos, originadas por los cambios en la amplitud de  $s_{real}$ .

La estimación de la segunda derivada de la fase  $\hat{\phi}''(0)$  (aceleración) también puede verse como el cambio de la frecuencia con respecto al tiempo  $df/dt$ , donde ésta juega un papel muy importante en la detección o estimación del desequilibrio de generación y carga, originado generalmente por el disparo de generadores, rechazo de carga, liberación de fallas, etc, donde estos acontecimientos causan un cambio súbito en la frecuencia nominal del sistema. Es por ello que  $df/dt$  puede usarse como un indicador de anomalías en el sistema [7].

Continuando con el análisis de la Figura 4.19, se observa en la gráfica correspondiente a la  $\hat{\phi}''(0)$ , un cambio abrupto en el rango de 5 a 10 ciclos referentes a la zona de falla, lo que nos indica que existe un súbito cambio en la frecuencia nominal del sistema, lo cual es corroborado en la gráfica correspondiente a la estimación frecuencial. En lo que respecta a la zona de postfalla las variaciones son casi imperceptibles debido que la frecuencia nominal estimada se estabiliza alrededor de los 60 Hz. Por lo tanto, si se establece un umbral correspondiente a la variación de  $\hat{\phi}''(n)$ , se podría obtener un indicador de la presencia de un disturbio en el sistema.

## 4.4 Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se realizó la estimación de la señal  $s_d(n)$  por medio de la metodología de Shanks, pero a diferencia del Capítulo 3, aquí no se tomó una frecuencia base  $\omega_0$  correspondiente a los coeficientes  $a_k$  del modelo AR; lo que se decidió hacer en este capítulo fue estimar la frecuencia  $\hat{\omega}_0$  por medio del modelo constante tradicional y sobre esta frecuencia estimada  $\hat{\omega}_0$  formar nuevamente los tres planos correspondientes al modelo constante  $e^{j\hat{\omega}_0}$ , lineal  $ne^{j\hat{\omega}_0}$  y cuadrático  $n^2e^{j\hat{\omega}_0}$ . Una vez obtenidos los tres planos se hace uso del algoritmo de Shanks para formar un subespacio equivalente referente a los tres planos mencionados anteriormente, donde sobre dicho subespacio se proyecta la señal que se desea estimar y de esta forma se genera un modelo ARMA correspondiente a la señal estimada  $\hat{s}(n)$ . Finalmente, por medio del método de expansión de fracciones parciales se obtienen nuevamente las tres planos originales y al mismo tiempo se obtienen las componentes  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  de la señal deseada  $s_d(n)$  sobre cada uno de los planos.

El uso del modelo constante tradicional para la estimación de la frecuencia  $\hat{\omega}_0$ , puede verse como un modelo seguidor de la frecuencia predominante de la señal, es decir, la frecuencia con mayor energía, la cual correspondería a la frecuencia de 60 Hz en el campo de los sistemas eléctricos de potencia.

Una de los resultados que llamaron la atención en este capítulo fue el comportamiento que presentó el modelo constante (4.3.1) al incluirle la estimación frecuencial, ya que las formas del error del modelo constante así como el porcentaje de error, presentan casi el mismo comportamiento que el modelo lineal referente al Capítulo 3. Este comportamiento se explica por la inclusión de la ganancia exponencial  $\alpha^n$  en el modelo constante tradicional, pues la ganancia exponencial para segmentos de observación pequeños se comporta como una pendiente. Esto explica el porqué de la similitud de las formas del error así como el porcentaje de error con el

modelo lineal.

Nuevamente la demodulación y la obtención de las componentes se llevó a cabo por medio de la expansión de fracciones parciales, la cual se puede interpretar como una herramienta capaz de sintetizar o separar el subespacio equivalente formado por el modelo AR y regresar a los tres planos originales correspondientes a  $\hat{\omega}_0$  y al mismo tiempo obtener las componentes  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  referentes a cada plano.

Por medio de las componentes nos es posible formar la amplitud y la fase referentes a la señal a estimar, las cuales nos ayudan a conocer el estado del sistema desconocido, en nuestro caso el SEP.

En este capítulo se realizó la estimación frecuencial de manera directa con la ayuda del modelo AR aplicando nuevamente la metodología de Shanks. Por lo que se puede concluir que no es necesario realizar la estimación frecuencial estimando los coeficientes  $\hat{a}_k$ , ya que se obtienen los mismos estimados usando simplemente  $\hat{\phi}'(n)$ . Lo anterior se sustenta ya que se obtienen exactamente los mismos estimados referentes a  $\hat{\omega}_0$  en la Figura 4.19 que en la Figura 3.18.

# Capítulo 5

## Evaluación y Comparación de Metodologías de Estimación Fasorial

### 5.1 Introducción

En el presente capítulo se realizará la comparación y evaluación de los métodos de predicción lineal expuestos en los Capítulos 3 y 4 con la metodología expuesta en [3]. Dicho análisis se llevará a cabo, con la ayuda de una señal teórica, la cual contiene los tres estados típicos de una señal: prefalla, falla y postfalla. De esta manera, se analizará y comparará el desempeño de los estimados de cada una de las tres metodologías y, en base a los resultados se determinará cuál de ellas es la que ofrece los mejores estimados fasoriales.

### 5.2 Comparación y Evaluación de Resultados

La señal teórica propuesta  $s(n)$  utilizada para llevar a cabo la evaluación de los modelos, está constituida por los tres estados típicos de una señal: prefalla, falla y postfalla muestreada a  $64 \frac{\text{muestras}}{\text{ciclo}}$ . El primer estado se caracteriza por tener un comportamiento estable con ganancia

unitaria y con un un ángulo de fase de  $\phi(n) = 45^\circ$ . En la zona de falla se presenta un cambio abrupto descendente de un 40% del valor nominal, acompañado de un offset de frecuencia de 3 Hz con ruido aleatorio de un  $\pm 0.03\%$ . En lo que se respecta a la zona de postfalla, ésta se compone por una oscilación en amplitud de  $\pm 20\%$  alrededor de la nominal, compuesta por un ángulo de fase  $\phi(n)$  idéntico al mostrado en la zona de prefalla. Las características de dicha señal propuesta son mostradas en la Figura 5.1.

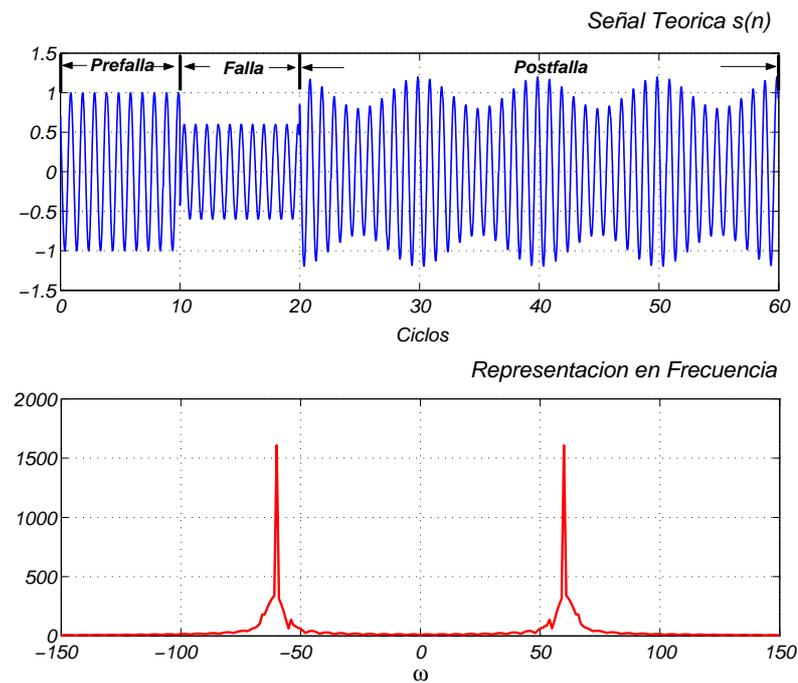


Figura 5.1: Señal Teórica Propuesta con los tres estados de típicos de una señal

Una vez expuestas las características de la señal teórica  $s(n)$ , lo siguiente es emplear los tres métodos mencionados para la estimación de  $s(n)$ , y en base a ello llevar a cabo la comparación de los mismos.

### 5.2.1 Evaluación del modelo $\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$

En esta subsección se evaluará el modelo descrito por (3.2.8), donde la amplitud así como la fase están en función del tiempo discreto evaluadas de  $0 \leq n \leq N$ . Este modelo genera los estimados de amplitud y fase expuestos en la Figura 5.2, correspondientes a la señal  $s(n)$ .

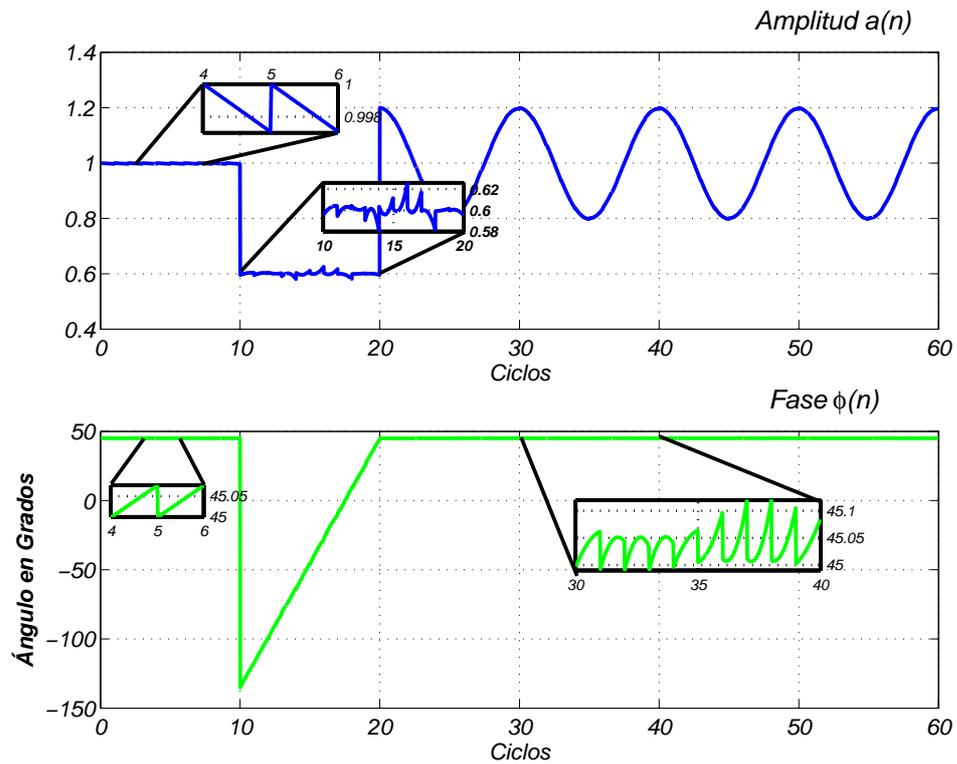


Figura 5.2: Estimación de Amplitud y Fase de la señal teórica usando el modelo (3.2.8)

Al examinar la Figura 5.2, se observa que en el estado de prefalla, tanto la gráfica de amplitud  $\hat{a}(n)$  como la correspondiente a la fase  $\hat{\phi}(n)$  son reconstruidas por pequeñas pendientes correspondientes al término lineal  $\hat{P}_1^{(2)}n$ , lo cual resulta extraño, pues es en la zona de prefalla donde se supone que la señal  $s(n)$  se encuentra en estado estable y por lo tanto es ahí donde se esperaría que ambas gráficas debieran ser reconstruidas simplemente por el término constante  $\hat{P}_0^{(2)}$ . Como no se obtiene la reconstrucción deseada, se determina que el modelo (3.2.8) ofrece

un funcionamiento inexacto. A pesar de esto, aún no se puede asegurar un comportamiento totalmente erróneo por parte del modelo, ya que la ganancia que aporta el término lineal es mínima, razón por la cual, en la Figura 5.2 se hizo uso de ventanas de acercamiento para apreciar mejor el comportamiento de las estimaciones en esta zona.

En lo que respecta a la zona de falla, la amplitud  $\hat{a}(n)$  presenta pequeñas variaciones de alrededor de  $\pm 0.022\%$ , causado por el cambio súbito que sufren los parámetros de la señal en esta zona. En lo que se refiere a la fase  $\hat{\phi}(n)$ , ésta presenta un drástico adelanto de  $180^\circ$  aproximadamente, lo cual está ligado al repentino cambio de signo que experimenta la señal  $s(n)$  al entrar a la zona de falla (véase Figura 5.1).

Continuando con el análisis de la Figura 5.2, se percibe un comportamiento adecuado por parte de la amplitud  $\hat{a}(n)$  en la zona de postfalla, siguiendo apropiadamente las oscilaciones de  $\pm 20\%$  de la señal  $s(n)$ . Mientras tanto, la fase  $\hat{\phi}(n)$ , se caracteriza por tener pequeñas variaciones de  $0.1\%$  por encima de los  $45^\circ$  aproximadamente, dichas variaciones tienen la forma de pequeñas parábolas ascendentes y descendentes, haciendo alusión al elemento cuadrático  $\hat{P}_2^{(2)} \frac{n^2}{2!}$ . Todo este comportamiento reportado en la fase, es provocado por las pequeñas oscilaciones que presenta la señal teórica al entrar a la zona de postfalla.

Ya habiendo realizado el análisis de la amplitud  $\hat{a}(n)$  y el de la fase  $\hat{\phi}(n)$  haciendo uso del modelo (3.2.8) se procede a analizar la estimación de la frecuencia así como la primera y segunda derivada de la fase. Lo anterior es mostrado en la Figura 5.3.

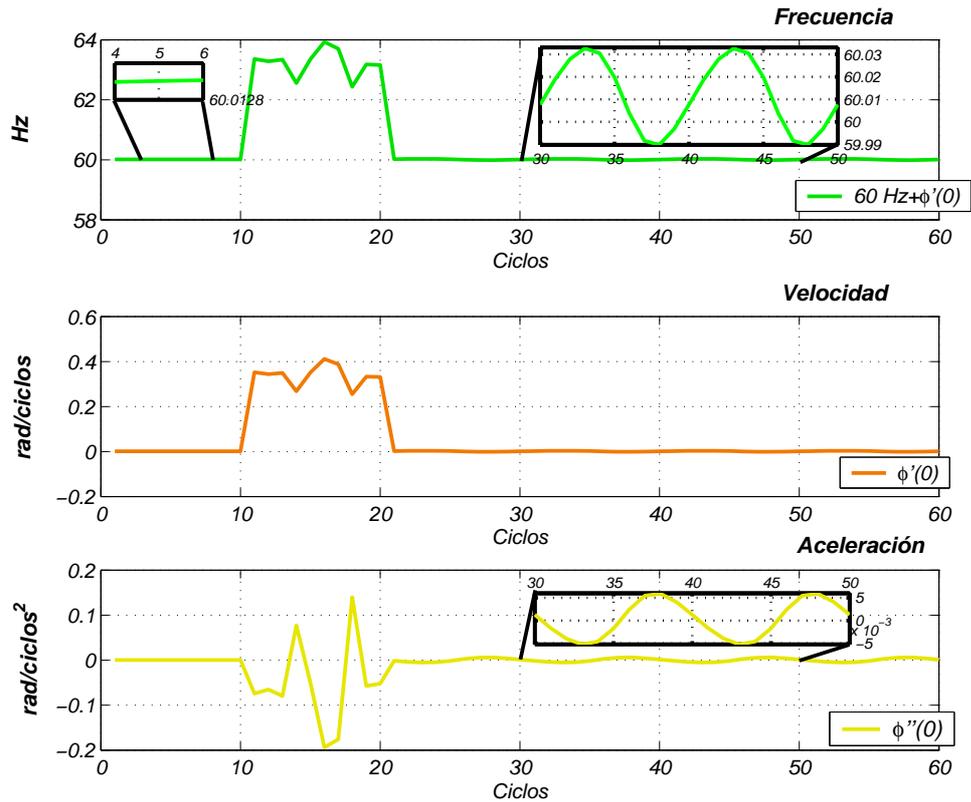


Figura 5.3: Estimación de la Frecuencia usando el modelo (3.2.8)

En la Figura 5.3, se aprecia que la gráfica correspondiente a la frecuencia presenta un pequeño offset de 60.0128 Hz en el área de prefalla, el cuál es provocado por el elemento  $\hat{\phi}'(0)$  puesto que este, nos arroja una ganancia diferente de cero en la zona de prefalla, a pesar de que en ésta la ganancia debería ser nula, ya que la señal se encuentra en condiciones de estado estable. En lo que respecta a la segunda derivada de la fase  $\hat{\phi}''(n)$  en la misma zona mencionada, genera una ganancia prácticamente nula, lo que nos indica que la señal  $s(n)$  se encuentra, como se dijo anteriormente, en estado estable.

Si se analiza una vez mas la gráfica correspondiente a la frecuencia estimada  $\hat{\omega}(n)$  en la Figura 5.3, se observa que esta última trata de seguir el offset de frecuencia propuesto por parte de la señal teórica, presentando una pequeña variación de  $\pm 0.75$  Hz alrededor de 63 Hz.

En lo que respecta a la segunda derivada del ángulo  $\hat{\phi}''(n)$ , esta posee un comportamiento anormal al entrar a la zona falla presentándose una variación máxima de  $-0.2 \text{ rad/ciclos}^2$  aproximadamente.

Mientras tanto, en la zona de postfalla se observan pequeñas variaciones  $\pm 0.02 \text{ Hz}$  alrededor de los  $60 \text{ Hz}$  por parte de la frecuencia estimada. En lo que respecta a  $\hat{\phi}''(n)$  se observa una pequeña variación  $5 \times 10^{-3}$  alrededor de cero en la misma zona ya mencionada. Por lo que se concluye que el modelo (3.2.8) proporciona estimados adecuados para la estimación de la señal teórica propuesta.

### 5.2.2 Evaluación del modelo $\hat{s}^{(2)}(n) = \alpha^n \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\hat{\omega}_0 n)$

A continuación se llevará a cabo la evaluación de la señal  $s(n)$  pero ahora aplicando el modelo de estimación descrito en el Capítulo 4 denotado por (4.2.13). Los estimados de amplitud y fase proporcionados por este modelo se muestran en la Figura 5.4.

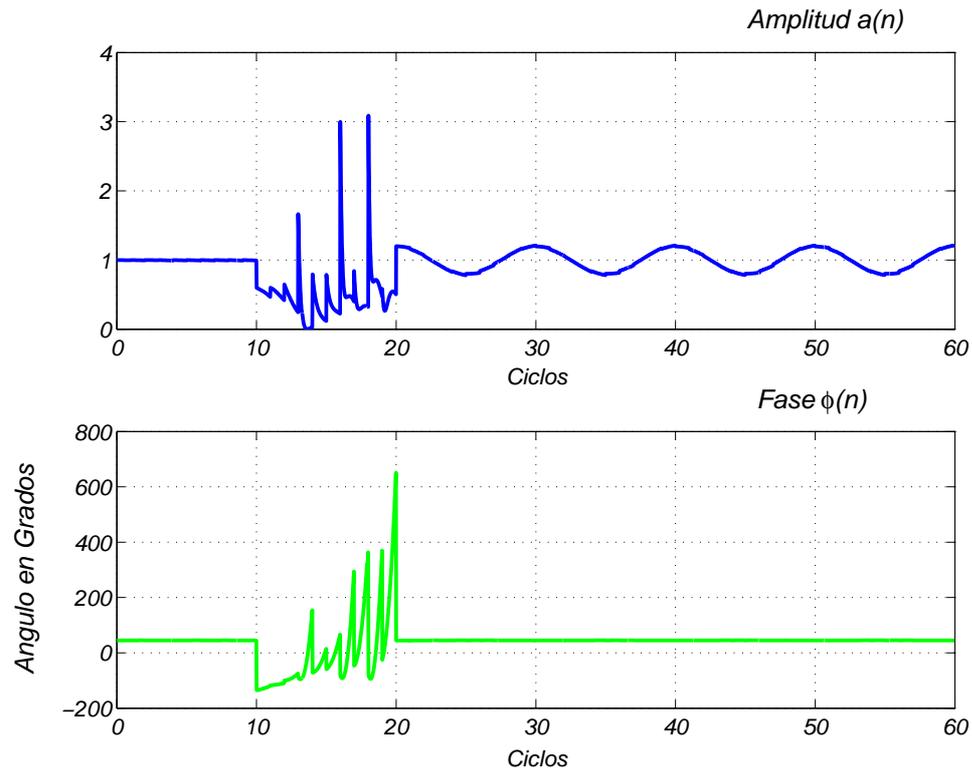


Figura 5.4: Estimación de Amplitud y Fase de la señal teórica usando el modelo (4.2.13)

Al analizar la Figura 5.4, salta a la vista el drástico comportamiento anormal que sufre la amplitud  $\hat{a}(n)$  y la fase  $\hat{\phi}(n)$  en la zona de falla, asentándose las limitaciones que presenta el modelo para estimar un cambio abrupto de la señal  $s(n)$  que incluye un ruido aleatorio de un 0.03% en la frecuencia. En lo que se refiere a las dos zonas restantes se percibe un comportamiento adecuado, lo cual quedará comprobado al evaluar los errores de reconstrucción.

Con el único fin de darle seguimiento al análisis del modelo de estimación (4.2.13), a continuación se muestran las estimaciones de la frecuencia así como las derivadas de la fase  $\hat{\phi}'(0)$  y  $\hat{\phi}''(0)$  (véase Figura 5.5).

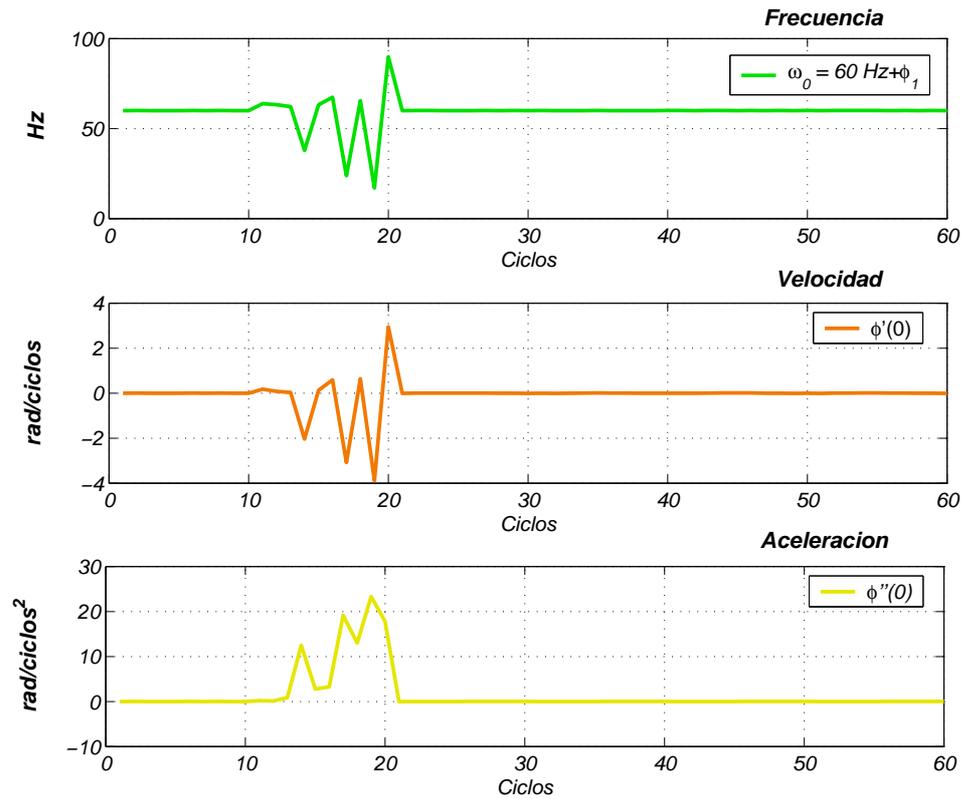


Figura 5.5: Estimación de la Frecuencia usando el modelo (4.2.13)

Al estudiar la Figura 5.5, sobresale el comportamiento inestable que posee el modelo (4.2.13) en el área de falla, el cual presenta una alta sensibilidad ante la presencia de un ruido aleatorio en el offset de la frecuencia correspondiente a la señal teórica, viéndose imposibilitado a seguir la frecuencia de 63 Hz en dicha zona. El mismo comportamiento inestable se ve reflejado en la primera y segunda derivada de la fase. En lo que respecta a las dos zonas restantes se podría decir que el modelo presenta un estimado adecuado, lo cual se verá quedará confirmado al evaluar el error de reconstrucción más adelante.

### 5.2.3 Evaluación del modelo $\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ p_0^{(2)} + p_1^{(2)} \frac{n}{1!} + p_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$

Una vez analizados los modelos (3.2.8) y (4.2.13), sólo queda por analizar el modelo propuesto por [3]. Esta metodología realiza las mismas consideraciones que (3.2.8), la única diferencia radica en la forma de tomar el intervalo de observación, ya que en éste es evaluado de  $\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$ , es decir el modelo expuesto en [3] es centrado y no como su predecesor (3.2.8), el cual es evaluado hacia la derecha del intervalo, tal y como se mencionó anteriormente.

Aplicando el modelo expuesto en [3] a la señal teórica mostrada por la Figura 5.1, se produce la Figura 5.6, donde se muestran los estimados de amplitud y de fase de la señal  $s(n)$ .

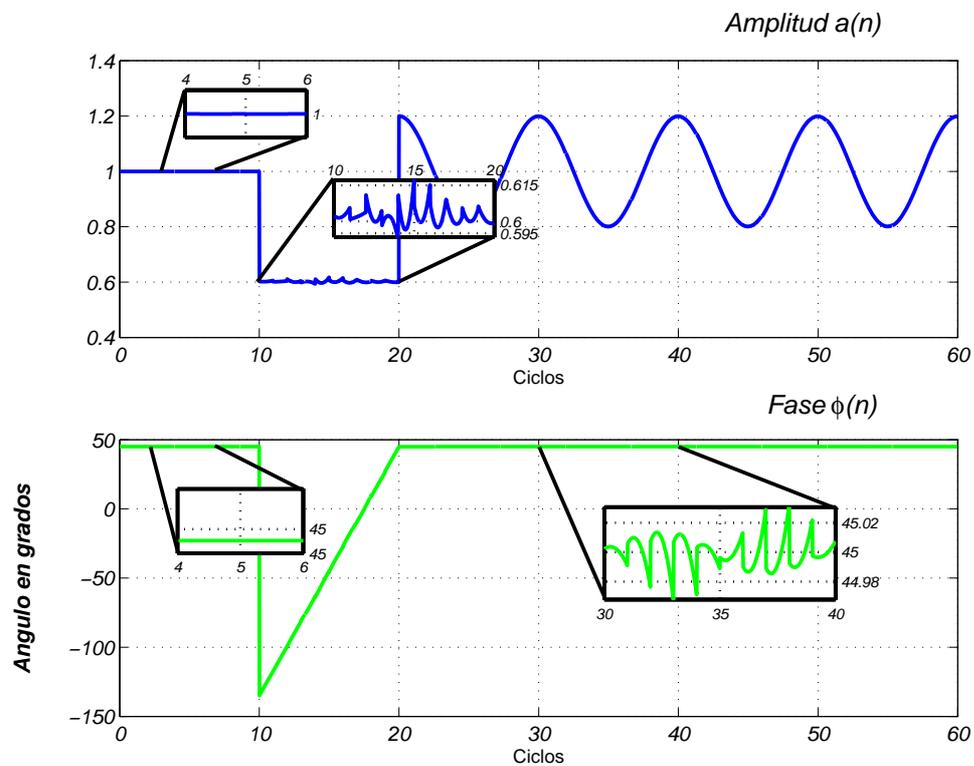


Figura 5.6: Estimación de Amplitud y Fase de la señal teórica usando el modelo propuesto en [3]

Al estudiar con detenimiento la Figura 5.6, observamos que aparentemente presenta el mismo comportamiento que el modelo (3.2.8), pero en realidad existen diferencias muy marcadas entre un modelo y otro, empezando por la zona de prefalla donde la amplitud  $\hat{a}(n)$  y la fase  $\hat{\phi}(n)$  presentan un comportamiento totalmente estable, es decir ambas son reconstruidas solamente por el término constante. En lo que respecta a la zona de falla, el modelo expuesto en [3] presenta una menor variación de amplitud alrededor de la ganancia de 0.6 de la señal teórica  $s(n)$ . Por último, en la zona de postfalla, ambos modelos presentan el mismo comportamiento con respecto a la amplitud reconstruida y en lo que se refiere a la fase, el modelo expuesto en [3] presenta la mitad de la variación del modelo (3.2.8). Dicha variación se encuentra alrededor de los  $45^\circ$  debido a que el intervalo de reconstrucción se encuentra ahora centrado.

Para darle continuidad al análisis del modelo y siguiendo la secuencia mostrada en los modelos anteriores, en la Figura 5.7 se muestra la estimación de la frecuencia, así como el comportamiento que presenta la primera y segunda derivada de la fase  $\hat{\phi}(n)$ .

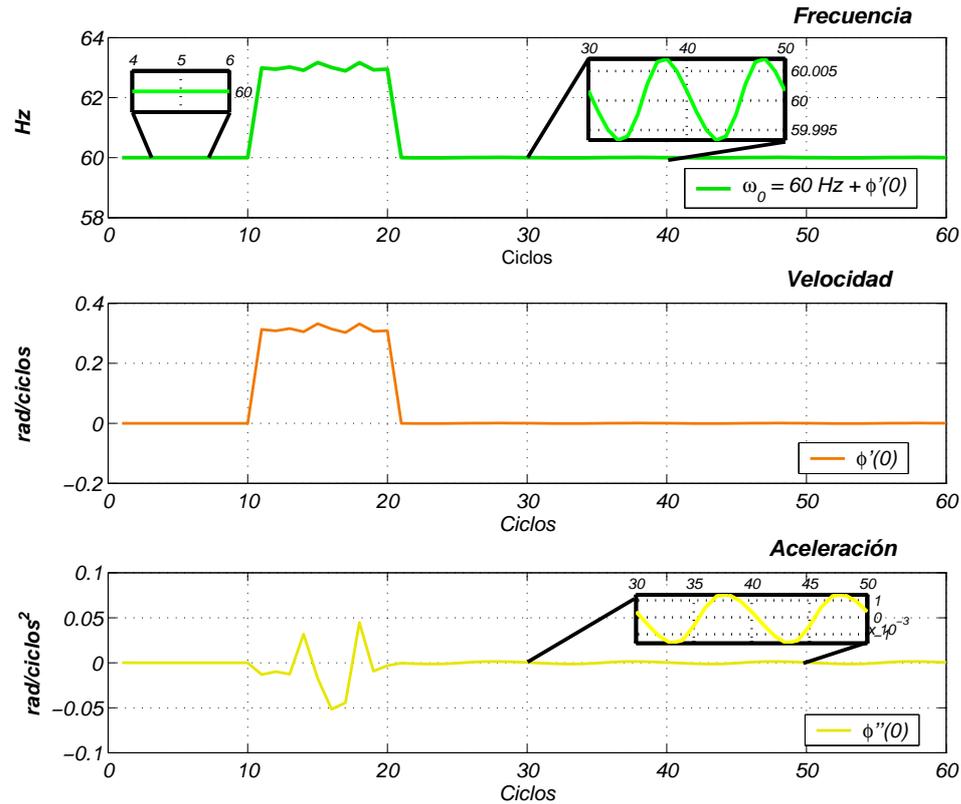


Figura 5.7: Estimación de la Frecuencia usando el modelo propuesto en [3]

A simple vista, la Figura 5.7 presenta un comportamiento semejante al de la Figura 5.3 correspondiente al modelo (3.2.8); sin embargo, existen diferencias con respecto a las estimaciones que presenta cada uno de los modelos tanto en la zona de falla como en postfalla, pues la variación de la frecuencia y de la aceleración por parte de los estimados del modelo en [3] son menores a las proporcionadas por el modelo (3.2.8). Además, a diferencia de los modelos (3.2.8) y (4.2.13), el modelo en [3] ya no presenta el offset en la zona de prefalla, es decir, se sitúa exactamente sobre los 60 Hz.

## 5.2.4 Comparación de los errores de estimación

A continuación se muestran las tablas de error correspondientes a la sumatoria del error cuadrático tanto de amplitud como de la frecuencia estimada para cada uno de los tres modelos analizados. En ellas se observa que para ambos casos, tanto de la frecuencia como de la amplitud estimada, el modelo referente a [3] arroja los valores más pequeños en las tres zonas de la señal  $s(n)$ . Dichos resultados se deben en gran medida a que el intervalo de estimación que toma este modelo está centrado, contrario a los intervalos tomados por los modelos (3.2.8) y (4.2.13).

Tabla 5.1: Evaluación del Error Cuadrático de Amplitud.

Modelo	PreFalla	Falla	PostFalla
$\hat{s}^{(2)}(n) = \alpha^n \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\hat{\omega}_0 n)$ $0 \leq n \leq N$	0.0069	85.5946	0.1085
$\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$ $0 \leq n \leq N$	0.0018	0.0182	0.0074
$\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ p_0^{(2)} + p_1^{(2)} \frac{n}{1!} + p_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$ $\frac{-N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$	$4.0019 \times 10^{-28}$	0.0089	$7.1466 \times 10^{-5}$

Tabla 5.2: Evaluación del Error Cuadrático de Frecuencia.

Modelo	PreFalla	Falla	PostFalla
$\hat{s}^{(2)}(n) = \alpha^n \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\hat{\omega}_0 n)$ $0 \leq n \leq N$	0.0110	$3.83 \times 10^3$	0.1319
$\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ P_0^{(2)} + P_1^{(2)} \frac{n}{1!} + P_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$ $0 \leq n \leq N$	0.0016	2.3862	0.0151
$\hat{s}^{(2)}(n) = \left[ p_0^{(2)} + p_1^{(2)} \frac{n}{1!} + p_2^{(2)} \frac{n^2}{2!} \right] \cos(\omega_0 n)$ $\frac{-N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$	$4.4429 \times 10^{-27}$	0.0867	$9.7993 \times 10^{-4}$

Al analizar la Tabla 5.2 se observa que, en las tres zonas, los valores de error proporcionados por los modelos (3.2.8) y (4.2.13) son mucho mayores que los proporcionados por el modelo mostrado en [3]. Esto se debe a que este último es menos sensible a señales que poseen frecuencias diferentes a la fundamental (60 Hz), lo cual se comprueba al analizar la respuesta en frecuencia del modelo correspondiente a [3], donde se observa que existe una ganancia plana unitaria sobre la frecuencia de 60 Hz y, en caso de presentarse una señal con una frecuencia diferente a la fundamental, es filtrada y se minimiza su ganancia en magnitud. Con ello se concluye que, el modelo expuesto en [3] proporciona los mejores resultados en cuanto a estimación fasorial y frecuencial gracias a la característica de simetría que presenta, resultado de ser centrado su intervalo de estimación, propiedad que no se consigue en el desarrollo de los modelos (3.2.8) y (4.2.13), debido a que ambos son diseñados para ser estrictamente causales.

En lo que respecta al modelo (3.2.8), no se podría hablar de un desempeño totalmente

deficiente, ya que los errores que presentan los estimados de amplitud no se sobrepasan el 2% del valor original en las distintas zonas de la señal, cumpliendo con uno de los objetivos planteados al principio de investigación: la estimación adecuada de la amplitud.

Al comparar directamente el modelo (3.2.8) con el modelo (4.2.13), surge una de las aportaciones más importantes en esta tesis, la cual enuncia que no es necesario realizar la estimación frecuencial de manera directa por medio del modelo *AR* (modelo puros polos), ya que tanto el modelo (3.2.8) como el modelo propuesto en [3] realizan dicha estimación de manera indirecta con la ayuda de la primera derivada de la fase  $\hat{\phi}'(n)$ .

### 5.3 Conclusiones del capítulo

Una de las conclusiones más importantes de este capítulo es acerca de la predicción frecuencial, donde se concluye que no es necesario aumentar la complejidad del algoritmo de estimación fasorial mostrado en (4.2.13), ya que tanto [3] como (3.2.8) son capaces de estimar la frecuencia  $\hat{\omega}_0$  por medio de  $\hat{\phi}'(n)$ . De lo contrario, se tendría un algoritmo muy sensible ante a la presencia de algún ruido, tal y como se mostró en las Tablas 5.1 y 5.2 referentes a la evaluación del error cuadrático de amplitud y frecuencia respectivamente.

Otro de los motivos por el cual no es recomendable realizar la estimación de la frecuencia de manera directa es por el tamaño de la ventana de estimación, ya que por lo general es de longitud muy pequeña y, al existir un cambio de signo en la señal  $s_d(n)$ , el estimador de frecuencia lo puede interpretar como un incremento en la velocidad ( $\hat{\phi}'(n)$ ), lo que significaría que el valor de la frecuencia no será el correcto.

Una de las principales limitaciones que presenta el modelo (3.2.8) ante el modelo propuesto en [3] es que está diseñado a ser estrictamente causal, lo cual se corrobora al analizar las tablas

correspondientes al error cuadrático. Otra de las limitaciones que presenta el modelo (3.2.8) al ser diseñado de manera causal es su ligera sensibilidad que presenta ante señales exógenas a la fundamental.

Por último, no se puede decir que el modelo (3.2.8) posee un comportamiento errático o deficiente ya que éste sigue el comportamiento de la señal propuesta  $s_d(n)$  en las distintas zonas de la señal de forma adecuada con un error relativamente pequeño, a pesar de que el modelo (3.2.8) se diseñó para ser estrictamente causal.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Recomendaciones

### 6.1 Introducción

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas a partir de la investigación realizada en la que se propone un nuevo algoritmo para la estimación fasorial basado en el principio de mínimos cuadrados. Asimismo, se muestran las aportaciones logradas con el desarrollo de esta tesis. Cabe mencionar que se considera interesante investigar otros aspectos relacionados con la aplicación del algoritmo de estimación fasorial, por lo que se dan recomendaciones para trabajos futuros.

### 6.2 Conclusiones

- En los SEP, al cambiar momentáneamente la topología por la apertura o cierre de los circuitos o inclusive al ser liberada una falla se presentan las oscilaciones de potencia, donde éstas son un indicio de pérdida de estabilidad, las cuales se caracterizan por tener lentas variaciones de amplitud a frecuencias menores a la fundamental, motivo por el cual

resulta imperativo realizar una medición fasorial adecuada. Sin embargo, los algoritmos de medición fasorial tradicionales asumen amplitud y fase constante durante todo el intervalo de observación, lo que implica una fuerte restricción para el control y monitoreo de los SEP.

- Los algoritmos correspondientes tanto al modelo lineal como al modelo cuadrático de los capítulos 3 y 4 así como en [3], presentaron un mejor comportamiento para la estimación de los tres estados típicos de una señal, en comparación con los modelos de estimación fasorial tradicionales (modelo constante).
- Al aplicar los filtros digitales de predicción lineal, los cuales hacen uso del principio de mínimos cuadrados, quedaron evidenciadas ciertas características por las cuales se vuelve deseable su aplicación, dichas características son:
  - Su fácil manejo matemático.
  - Su fácil explicación desde un punto de vista de algebra vectorial.
  - La existencia de numerosos algoritmos numéricamente eficientes para su solución.
  - Generación de soluciones óptimas.
- Se eligieron los modelos de predicción lineal del tipo ARMA para la estimación fasorial, ya que éstos son los que mejor se adecúan a las necesidades del nuevo modelo propuesto (3.2.2) expuesto en esta tesis.
- Se optó por utilizar el algoritmo de predicción Shanks debido a que este método presentó los mejores estimados para la identificación del sistema desconocido, en nuestro caso el SEP, ya que este algoritmo estima los coeficientes de los modelos AR y MA aplicando el principio de mínimos cuadrados.
- A lo largo de este trabajo se aplicó el modelo cuadrático de estimación fasorial como un filtro de predicción lineal, para conocer el comportamiento de los sistemas eléctricos

de potencia, donde los elementos del modelo AR representan un equivalente de los tres planos referentes al modelo constante  $e^{j\omega_0}$ , lineal  $ne^{j\omega_0}$  y cuadrático  $n^2e^{j\omega_0}$ ; en otras palabras, el modelo AR nos ayuda a crear un nuevo subespacio en el cual se contienen o abarcan a los subespacios correspondientes a los modelos constante, lineal y cuadrático. Es precisamente sobre este nuevo subespacio donde se proyecta la señal que se desea estimar, generándose un modelo ARMA que corresponde a la señal estimada  $\hat{s}(n)$ , todo esto se realiza con la ayuda del principio de mínimos cuadrados.

- A lo largo de esta investigación se utilizó la expansión en fracciones parciales para realizar la demodulación de la señal estimada  $\hat{s}(n)$ , donde esta herramienta tiene como función sintetizar el subespacio equivalente formado por el modelo AR, así como obtener las componentes o fasores  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  referentes a los modelos constante  $e^{j\omega_0}$ , lineal  $ne^{j\omega_0}$  y cuadrático  $n^2e^{j\omega_0}$  respectivamente.
- De los fasores constante, lineal y cuadrático se obtuvo información importante referente a la amplitud y la fase de la señal a estimar. Esta información es de vital importancia para conocer el estado en el que se encuentra el SEP.
- La respuesta en frecuencia que se obtiene del modelo cuadrático propuesto para la estimación fasorial (3.2.8) se mostró en la Figura 3.21, donde se observa que el modelo impide la infiltración de la frecuencia negativa. También se percibe que el modelo es ligeramente sensible a señales diferentes a la fundamental, esto a causa de que los modelos de predicción lineal vistos a lo largo de esta investigación fueron diseñados para ser estrictamente causales.
- En el Capítulo 4 se propuso realizar la estimación frecuencial de  $\omega_0$  de manera directa por medio un modelo AR constituido por dos polos referente a un modelo constante tradicional, donde la función de los polos es identificar la frecuencia predominante de la señal a estimar, es decir la frecuencia con mayor energía, en el caso de los SEP esta

frecuencia corresponde a 60 Hz, por lo que el modelo se podría interpretar con un seguidor de la frecuencia fundamental del sistema.

- Al hacer uso de la estimación frecuencial e incluirla en el modelo constante tradicional, resultó el modelo descrito (4.3.1), la cual al evaluarse se observó que su comportamiento era muy semejante al modelo lineal. Esto se comprobó al comparar las formas del error relativo porcentual de reconstrucción de amplitud de ambos modelos. Este comportamiento se explica por la inclusión de la ganancia exponencial  $\alpha^n$  en el modelo constante tradicional, pues la ganancia exponencial para segmentos de observación pequeños se comporta como una componente lineal, lo cual explica el porqué de la similitud de las formas del error.
- Una de las conclusiones más importantes a la que se llegó a lo largo de esta investigación, es referente a la estimación frecuencial, donde se concluye que no es necesario aumentar la complejidad del algoritmo de estimación fasorial mostrado en (4.2.13), ya que tanto el modelo expuesto en [3] como el modelo (3.2.8) son capaces de estimar la frecuencia  $\hat{\omega}_0$  por medio de la primera deriva de la fase  $\hat{\phi}'(n)$ , lo que implicaría tener un offset de la frecuencia fundamental al momento de ocurrir algún disturbio. De lo contrario, se tendría un algoritmo muy sensible ante a la presencia de algún ruido de alta frecuencia (inversores y rectificadores), tal y como se mostró en los resultados obtenidos en las Tablas 5.1 y 5.2 referentes a la evaluación del error cuadrático de amplitud y frecuencia respectivamente.
- Una de las conclusiones a las que se llegó al comparar el desempeño de los modelos expuestos en [3] y (3.2.8), fue acerca de las limitaciones que presenta este último al ser diseñado estrictamente causal, ya que éste se caracteriza por tener un comportamiento ligeramente sensible al momento de aparecer señales diferentes a la frecuencia fundamental, lo cual es corroborado al analizar las tablas correspondientes al error cuadrático de amplitud y frecuencia denotadas por Tablas 5.1 y 5.2 respectivamente. Sin embargo no

se puede decir que el modelo (3.2.8) posee un comportamiento totalmente errático o deficiente ya que éste sigue la dinámica de la señal propuesta  $s_d(n)$  en las distintas zonas de manera adecuada, con un error relativamente pequeño, a pesar de que el modelo (3.2.8) se diseñó para ser estrictamente causal.

- Conforme se fue avanzando en el desarrollo de esta investigación, nos dimos cuenta de que la ganancia correspondiente a las componentes  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$  no son del todo correctas al momento de realizar la descomposición del modelo ARMA (3.2.10) haciendo uso del algoritmo de expansión de fracciones parciales proporcionado por MATLAB. Esto fue comprobado al comparar los resultados expuestos en [3] referente a un modelo causal con la descomposición del modelo (3.2.10) en fracciones parciales. La magnitud del error se iba acrecentando conforme se aumentaba el orden del modelo. Todo esto se debe probablemente a la convergencia que presenta el algoritmo de MATLAB al aumentarse la cantidad de polos repetidos en el modelo.
- En un principio, los modelos en [3] y (3.2.8) se diseñaron para ser estimadores fasoriales, pero conforme se fue estudiando la información contenida en cada una de las componentes  $P_i^{(2)}$   $i = 0, 1, 2$ , se llegó a la conclusión de que ambos modelos más que ser estimadores fasoriales se podrían considerar también como estimadores de  $\omega_0$ , y al mismo tiempo proporcionar elementos que sirvan como indicadores de la existencia de algún disturbio en el sistema, esto con la ayuda  $\hat{\phi}''(n)$ .

### 6.3 Aportaciones

- Se obtuvo una nueva técnica para realizar la demodulación de una señal  $s(n)$ . Esto se logró por medio de la expansión en fracciones parciales. Esta técnica tiene como función separar la envolvente de la portadora correspondiente al modelo ARMA de la señal estimada  $\hat{s}(n)$ .

- Se propuso un modelo para la estimación fasorial y frecuencial haciendo uso de las técnicas de tradicionales de diseño de filtros digitales aplicando el principio de mínimos cuadrados.
- Se comprobó que los filtros no causales utilizados en [3] proporcionan mejores resultados, para la estimación de señales típicas de un sistema eléctrico de potencia.

## 6.4 Trabajos Futuros

- Desarrollar la metodología para elaborar un modelo no causal de estimación fasorial utilizando las técnicas tradicionales para el diseño de filtros digitales aplicando método de Shanks.
- Estudiar y mejorar el comportamiento del algoritmo de fracciones parciales proporcionado por MATLAB, ya que este presenta un error de ganancia conforme se aumenta la complejidad del modelo.
- Realizar un estudio y una evaluación respecto a la complejidad numérica que presenta el modelo cuadrático de estimación fasorial propuesto en esta investigación.
- Desarrollar y evaluar la metodología correspondiente al modelo cúbico de estimación fasorial. Asimismo, llevar a cabo un análisis de la información referente a las nuevas componentes del modelo.

# Bibliografía

- [1] José A. de la O Serna, *New theory for phasor measurement*, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (2002), no. 1.
- [2] ———, *Phasor estimation from phasorlets*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements **54** (2005), no. 1.
- [3] ———, *Dynamic phasor estimates for power system oscillations and transient detection*, IEEE Power Engineering Society 2006 General Meeting (2006).
- [4] Dr. Florencio Aboytes García, *Control de frecuencia en sistemas eléctricos de potencia*, Comisión Federal de Electricidad, 1990.
- [5] Stanley I. Grossman, *Algebra lineal*, Mc Graw Hill, 1996.
- [6] Simon Haykin, *Adaptive filter theory*, Prentice Hall, 2002.
- [7] Yilu Liu Hengxu Zhang, *Off-line event filter for the wide area frequency measurements*, IEEE Transsaction Power Engineering Society (2006).
- [8] Dimitris G. Monolakis John G. Proakis, *Tratamiento digital de señales*, Prentice Hall, 1998.
- [9] P. Kundur, *Power system stability and control*, McGraw-Hill, 1993.
- [10] John G. Proakis, *Algorithms for statistical signal processing*, Prentice Hall, 2001.
- [11] A.M. Stanković, *On model-based linear estimation of dynamic phasor*, NAPS, University of Waterloo, Canada (2000).
- [12] M. E. Van Valkenburg, *Análisis de redes*, Limusa, 1986.
- [13] Jun-Zhe Yang and Chih-Wen Liu, *A precise calculation of power system frequency*, IEEE Transactions on Power Delivery **16** (2001), no. 3, pp. 361–366.