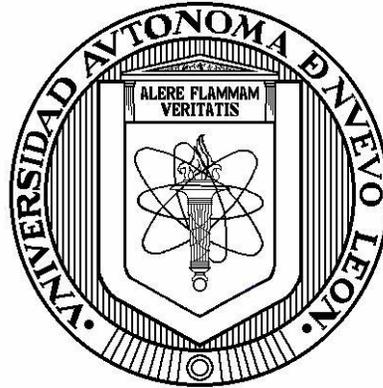


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS
EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS**

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

PRESENTA:

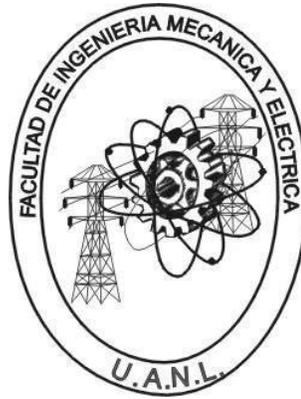
REYNALDO IRACHETA CORTEZ

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L. AGOSTO DEL 2007

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS
EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS**

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

PRESENTA:
REYNALDO IRACHETA CORTEZ

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L. AGOSTO DEL 2007

**Universidad Autónoma de Nuevo León Facultad de Ingeniería
Mecánica y Eléctrica Subdirección de Estudios de Postgrado**

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS**, realizada por el alumno Reynaldo Iracheta Cortez, matrícula 0975421, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Potencia.

El Comité de Tesis

Asesor

Dr. Miguel F. Escalante Gutiérrez

Coasesor

Dr. José Antonio De la O Serna

Coasesor

Dr. Felipe Alejandro Uribe Campos

Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza N. L., Agosto del 2007

Resumen

Publicación No _____

Reynaldo Iracheta Cortez, M.C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Profesor Asesor: Dr. Miguel F. Escalante Gutierrez / Dr. Felipe A. Uribe Campos.

En esta tesis se desarrolla una metodología altamente precisa para el cálculo de transitorios electromagnéticos producidos por maniobras de apertura y cierre de interruptores en sistemas de cables concéntricos subterráneos. Esta metodología es altamente precisa porque se desarrolla en el dominio de la frecuencia en el cual directamente se considera una distribución natural de las pérdidas a lo largo del sistema de cables incluyendo la dependencia frecuencial de los materiales conductores (núcleo, pantalla y armadura) y dieléctricos (etileno propileno y polietileno de cadena cruzada) presentes en cada cable del sistema.

La dependencia frecuencial en cables subterráneos se modela tomando en cuenta el Efecto Piel tanto en conductores metálicos como en el suelo, mientras que en los materiales aislantes por medio de los Efectos de Relajación.

En el capítulo 2 se plantean las formulaciones exactas de Schelkunoff y Pollaczek para el cálculo de impedancias en conductores cilíndricos tubulares e impedancias de tierra, estas últimas debidas a la presencia del suelo, el cual es un conductor natural adicional en el sistema.

Debido a la dificultad que hasta la fecha representa resolver la integral de Pollaczek para evaluar el retorno por tierra de cables subterráneos, se propone en el capítulo 3 de esta tesis un algoritmo híbrido basado en la implementación de la solución en series propuesta por

Wedepohl en 1973 para modelar los efectos del suelo. En este algoritmo híbrido se combinan una versión extendida de dichas series para el rango de baja frecuencia y el método adaptivo de cuadratura de Kronrod y Gauss-Lobatto para el rango de alta frecuencia.

Las funciones matriciales de propagación del sistema de cables, \mathbf{H} , y admitancia característica, \mathbf{Y}_c , modelan eficientemente el sistema de transmisión ya que contienen en su totalidad los modos de propagación con diferentes retardos (metálicos y de tierra) con sus múltiples resonancias. Por esta razón, los programas profesionales para simulación de transitorios electromagnéticos formulados en el dominio del tiempo (tipo EMTP/SPICE), deben de realizar ajustes racionales de éstas funciones para poder representar la dependencia frecuencial de manera precisa.

En el Capítulo 4 se aplica una metodología para realizar el ajuste racional o síntesis de bajo orden en el dominio de la frecuencia de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{Y}_c . En éste, se aplican la técnica Vector Fitting (VECFIT) en conjunto con el Método de Brent. La técnica VECFIT permite reducir el número de polos del modelo de cables de forma precisa, eficiente y confiable mientras que el Método Brent calcula los retardos en tiempo óptimo asociados con la matriz de propagación \mathbf{H} y con la distancia física del sistema. La importancia de conocer el retardo en tiempo radica en que se facilita el ajuste racional en frecuencia utilizando VECFIT.

En el Capítulo 5 se aplica la técnica de la transformada numérica de Laplace para sintetizar la respuesta al escalón unitario de voltaje en el extremo receptor de un sistema de transmisión de cables subterráneos. Esta técnica resulta precisa porque incorpora directamente la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos del sistema permitiendo a su vez el control del error numérico asociado por efectos de ventaneo y “*aliasing*” en la señal de respuesta de voltaje del sistema. Posteriormente, se valida la eficiencia y precisión de la técnica de Laplace mediante los resultados obtenidos con el programa de simulación profesional EMTDC, basado en el dominio del tiempo, el cual emplea el modelo universal de fase o el modelo modal. Adicionalmente, se realizaron

mediciones experimentales, en un cable prototipo, de la respuesta transitoria de voltaje en forma escalada en el laboratorio.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de lo que el autor considera como metas y objetivos alcanzados en esta tesis y que resultan en una metodología más precisa para modelar sistemas de transmisión de energía eléctrica por cables subterráneos. Estos se resumen como: 1) desarrollo de un modelo más preciso para análisis de cables subterráneos, 2) solución de las series de Wedepohl para calculo de impedancia de tierra, 3) implementación de un algoritmo híbrido para evaluar impedancia de tierra, 4) aplicación de la técnica de VECTFIT y el método de Brent para realizar eficientemente ajustes racionales de bajo orden con identificación del tiempo optimo de viaje de la onda de voltaje, 5) síntesis de la respuesta transitoria de voltaje en el dominio de la frecuencia de un sistema de cables a través de la transformada numérica de Laplace, 6) validación por simulación con un programa de simulación profesional basado en el dominio del tiempo y por mediciones de la respuesta al escalón de voltaje en un experimento escalado en el laboratorio con un conductor prototipo.



AGRADECIMIENTOS

A DIOS por haberme permitido dar un paso más en mi vida.

A mis padres Reynaldo Iracheta Garza y Yolanda Cortez Garza por brindarme su apoyo incondicional en todo momento de mi vida y sus valiosos consejos.

A mi asesor el Dr. Alejandro Uribe por sus valiosos consejos, aportaciones y apoyo incondicional que me sirvieron para terminar esta tesis.

A mis coasesores el Dr. Escalante Gutierrez y el Dr. Juan Antonio de la O por sus valiosas aportaciones para mejorar este trabajo.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado en estos 2 años.

A la Universidad de Guadalajara por el apoyo brindado en mi estancia de investigación.

A la Dirección General de ECOES por el apoyo económico brindado para hacer posible la estancia de investigación en la UDG.



DEDICATORIA

A mis padres, Yolanda Cortez Garza y Reynaldo Iracheta Garza.

A mis abuelos, Bernandino Cortez González y Orovea Garza Aguirre.

A mis hermanos, Miguel Angel, Gabriela Elizabeth y Samantha Briseidi.

A todos mis tíos, especialmente a mis tías Irma, Luz María, Martha y Enedina.

A todos mis primos.

A mis compañeros de clase: Alejandro y Fernando y a todo el posgrado en general.

LISTA DE TABLAS

	Página
CAPÍTULO 1	
I Clasificación de los sistemas de cables subterráneos mediante el rango de voltajes	4
CAPÍTULO 2	
CAPÍTULO 3	
I Variables físicas, resistividad del suelo y rango de frecuencias para el sistema de la Fig. 2.1a.	35
II Rango de variables físicas	37
III Parámetros adimensionales	37
IV Tiempos computacionales obtenidos en amplio rango	45
V Puntos frontera en función de las variables adimensionales ξ Y η	46
VI Precisión, estabilidad y esfuerzo computacional de la solución en series del caso I	47
VII Precisión, estabilidad y esfuerzo computacional para el método integración numérica del caso II	48
CAPÍTULO 4	
I Retardos en tiempo (τ) en μ segs. para cada modo de propagación	75
CAPÍTULO 5	
I Definiendo ecuaciones de ventanas de datos	85
CAPÍTULO 6	

LISTA DE FIGURAS

	Página
CAPÍTULO 1	
1.1 Cable tipo auto-contenido de líquido.	5
1.2 Cable tipo tubo lleno de aceite a alta presión.	5
CAPÍTULO 2	
2.1 Sistema de transmisión por cables subterráneos reportado por Wedepohl y Wilcox.	13
2.2 Relaciones de voltajes y corrientes de lazo y conductor en un cable subterráneo de tres conductores.	16
CAPÍTULO 3	
3.1 Sistema subterráneo de dos cables.	30
3.2 Error relativo porcentual de la solución en series de Wedepohl (3.6) con respecto a la integración numérica de I_w (3.7).	35
3.3 Tablas de la solución de la integral de Pollaczek en amplio rango. a) Componente real y b) Componente imaginaria.	42
3.4 Tablas de soluciones de Z_T . a) Componente real y b) Componente imaginaria.	43
3.5 Error <i>rms</i> en el cálculo de Z_T mediante el algoritmo híbrido y el algoritmo de Gauss-Lobatto para diferentes tolerancias. a) Componente real y b) Componente imaginaria.	45
3.6 Sección transversal de un sistema de cables subterráneos.	50
3.7 Z_T propia para el sistema de cables de la Fig. 2.1, calculada con el algoritmo híbrido, Gauss/Lobatto y fórmulas aproximadas con errores relativos. a) Resistencia y b) Inductancia.	51
3.8 Z_T mutua para el sistema de cables de la Fig. 2.1, calculada con el algoritmo híbrido, Gauss/Lobatto y fórmulas aproximadas con errores relativos. a) Resistencia y b) Inductancia.	52

3.9 Acoplamiento EM entre un sistema de transmisión subterráneo y un ducto de suministro de gas o petróleo. 54

3.10 Z_T mutua para el sistema de cables de la Fig. 3.9, calculada con el algoritmo híbrido, Gauss-Lobatto y fórmulas aproximadas con errores relativos. a) Resistencia y b) Inductancia. 54

CAPÍTULO 4

4.1 Modelo de onda viajera de un sistema subterráneo con n conductores. 59

4.2 a) Matriz de correlación S cuando no hay switcheo de modos, b) Matriz de correlación S cuando se presenta el switcheo de modos. 64

4.3 Atenuaciones modales del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b. 66

4.4 Velocidades modales del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b. 66

4.5 Ángulos modales del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b. 67

4.6 Tiempos de retardo (τ) los modos de propagación del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b para una longitud de 10 millas. 68

4.7 Relación entre el *error-rms* con el tiempo de retraso τ . 72

4.8 Ajuste de la matriz de admitancia característica modal Y_c^M con una aproximación de 6to. orden. El inciso a) Muestra el valor absoluto de Y_c^{IM} y b) El ángulo de fase. 73

4.9 Ajuste de la matriz de propagación modal H^M con una aproximación de 6to. orden. El inciso a) Muestra el valor absoluto de H y b) El ángulo de fase. 74

CAPÍTULO 5

5.1 Truncamiento, discretización y muestreo. a) Para $f(t)$, b) Para $F(j\omega)$ 80

5.2 Convolución de $f(t)$ con $h(t)$ 84

5.3 Ventanas de datos. 84

5.4 Superposición de $f(t)$ y sus desplazamientos $f(t+T)$, $f(t+2T)$ 86

5.5 Representación nodal de dos puertos para un sistema de cables 88

	subterráneos conectado con Y_S y Y_R en sus extremos.	
5.6	Respuesta transitoria de voltaje (v_1) para el núcleo energizado en el extremo receptor del sistema	90
5.7	Respuestas transitorias de voltaje (v_1) de los núcleos 2 y 3 no energizados en el extremo receptor del sistema de cables.	91
5.8	Respuestas transitorias de voltaje (v_1) de todas las pantallas en el extremo receptor del sistema de cables.	91
5.9	Diagrama esquemático de prueba en el laboratorio. a) Conexiones, b) Osciloscopio.	93
5.10	Mediciones en el laboratorio de un experimento escalado. a) Voltaje de energización y su respuesta transitoria en el extremo emisor del cable. b) Superposición entre el escalón de voltaje medido en el extremo emisor del cable y la respuesta transitoria calculada con la NLT.	94

CAPÍTULO 6

SIMBOLOS Y ACRÓNIMOS

ω	Frecuencial angular (rad/seg),
μ_0	Permeabilidad magnética del espacio vacío y aire ($4\pi \times 10^{-7}$ H/m),
μ	Permeabilidad del medio (H/m),
μ_r	Permeabilidad relativa,
ϵ	Permitividad del medio (F/m),
ϵ_0	Permitividad absoluta o constante dieléctrica del espacio libre (F/m),
ϵ_r	Permitividad relativa o constante dieléctrica del material aislante,
ϵ	Permitividad compleja del medio,
ϵ_r^*	Permitividad compleja relativa del medio,
ϵ_r'	Es la parte real de la permitividad compleja (ϵ_r^*)
ϵ_r''	Es la parte real de la permitividad compleja (ϵ_r^*),
σ	Conductividad eléctrica efectiva o real (S/m),
σ_s	Conductividad eléctrica estática,
f	Frecuencia en Hz,
$\tan(\gamma)$	Factor de pérdidas,
β	Número de onda,
ρ	Resistividad del conductor o el suelo (Ω -m)
γ_i	Modo de propagación ó raíz cuadrada de $\Lambda_{i,i}$,
α_i	Atenuación del modo de propagación i en p.u. de longitud,
β_i	Angulo de fase en radianes del modo de propagación i en p.u. de longitud,
v_i	Velocidad de propagación del modo i
Λ	Matriz diagonal de eigenvalores,
T	Matriz de eigenvectores,
S	Matriz de correlación,
ξ	Parámetros adimensional,
χ	Parámetros adimensional,
η	Parámetro adimensional,
% ϵ_{rel}	Error relativo porcentual,
γ	Constante de Euler,
θ	Ángulo en radianes,
τ	Retardo en tiempo,
Z	Matriz de impedancia serie,
Y	Matriz de admitancia paralelo,
V	Vector de voltajes,
I	Vector de corrientes,
Y_C	Matriz de admitancia característica,

Z_C	Matriz de impedancia característica,
H	Matriz de propagación,
ZY	Se refiere a la matriz Z y Y ,
R	Matriz de resistencia,
L	Matriz de inductancia,
G	Matriz de conductancia,
C	Matriz de capacitancia,
A	Matriz de función de propagación,
B	Matriz de función de propagación,
EM	Abreviación de la palabra electromagnético o electromagnéticos
p	Profundidad de penetración compleja (Efecto Piel),
Z_T	Impedancia de retorno por tierra,
J_P	Integral de Pollaczek para el cálculo de Z_T propia,
J_m	Integral de Pollaczek para el cálculo de Z_T mutúa,
R	Radio externo del cable,
h	Profundidad del cable,
x	Distancia horizontal entre cables,
d	Distancia entre conductores,
D	Es la distancia entre un cable real y la imagen del otro,
r_N	Radio del núcleo,
r_{Ext}	Radio exterior del aislamiento,
r_{Int}	Radio interior del aislamiento,
I_0	Función modificada de Bessel de primer tipo y orden cero,
I_1	Función modificada de Bessel de primer tipo y orden uno,
K_0	Función modificada de Bessel de segundo tipo y orden cero,
K_1	Función modificada de Bessel de segundo tipo y orden uno,
I_w	Integral de Wedepohl,
S_w	Serie de Wedepohl,
DFT	Transformada Discreta de Fourier,
MTF	Transformada Modificada de Fourier,
NLT	Transformada Numérica de Laplace,
rms	Criterio del error cuadrático medio,
Δt	Paso de tiempo,
Ω	Frecuencia máxima,
T	Tiempo de observación total,
$\Delta\omega$	Paso de frecuencia,
M	Total de muestras en tiempo,
N	Total de muestras en frecuencia,
FFT	Transformada rápida de Fourier,
s	Variable de Laplace igual a $c + j\omega$,
c	Factor de amortiguamiento,
$\sigma(\omega)$	Ventana de datos en frecuencia,

$G(\omega)$		Función de impulso de Dirac en frecuencia,
$g(\omega)$		Función de impulso de Dirac en tiempo,
ε		Rango o nivel de error,
c_i		Residuos calculados con la técnica de <i>Vector Fitting</i> ,
a_i		Polos calculados con la técnica de <i>Vector Fitting</i> ,
d		Término constante opcional de <i>Vector Fitting</i> ,

CONTENIDO

	Pagina
RESUMEN	<i>i</i>
AGRADECIMIENTOS	<i>iv</i>
DEDICATORIA	<i>v</i>
LISTA DE TABLAS	<i>vi</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>vii</i>
SIMBOLOS Y ACRÓNIMOS	<i>x</i>
CONTENIDO	<i>xiii</i>
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes históricos de transmisión por cables.	3
1.3 Características de tipos de cables.	4
1.3.1 Cables tipo auto-contenido.	4
1.3.2 Cables tipo tubo.	5
1.4 Planteamiento del problema.	6
1.5 Objetivos de la tesis.	7
1.6 Metodología.	8
CAPÍTULO 2 CÁLCULO DE PARÁMETROS ELECTROMAGNÉTICOS (EM) EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS	
2.1 Introducción.	10
2.2 Modelado electromagnético en sistemas de transmisión por cables subterráneos.	12
2.3 Cálculo de parámetros ZY .	14
2.3.1 Impedancia serie.	15
2.3.2 Transformación de cantidades de lazo a cantidades de conductor.	21
2.3.3 Admitancia paralelo.	22
2.3.4 Sistema polifásico de cables subterráneos.	24
2.4 Conclusiones.	26

CAPÍTULO 3	ALGORITMO HÍBRIDO PARA EL CÁLCULO DE LA IMPEDANCIA DE RETORNO POR TIERRA	
	3.1 Introducción.	27
	3.2 Impedancia de retorno por tierra (Z_T).	29
	3.3 Cálculo de Z_T por Wedepohl.	30
	3.4 Planteamiento de las series de Wedepohl.	31
	3.5 Implementación del algoritmo híbrido para el cálculo de Z_T .	34
	3.6 Implementación del algoritmo híbrido en amplio rango.	37
	3.7 Validación del algoritmo híbrido en amplio rango.	41
	3.7.1 Estabilidad, precisión y convergencia del Algoritmo Híbrido.	46
	3.8 Fórmulas cerradas de aproximación.	49
	3.9 Casos de estudio.	50
	3.9.1 Sistema de transmisión de cables subterráneos.	50
	3.9.2 Inducción de sobrevoltaje en un sistema de suministro de gas o petróleo.	53
	3.10 Conclusiones.	55
CAPÍTULO 4	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS	
	4.1 Introducción.	57
	4.2 Descomposición modal de H y Y_c .	59
	4.3 Switcheo de modos.	62
	4.4 Parámetros modales.	65
	4.5 Ajuste racional en frecuencia de H y Y_c .	68
	4.5.1 Método Brent.	70
	4.5.2 Aplicación de VECFIT y el Método Brent.	72
	4.6 Conclusiones.	75
CAPÍTULO 5	TRANSITORIOS <i>EM</i> EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS	
	5.1 Introducción.	76
	5.2 Resumen histórico.	77
	5.3 Transformada Numérica de Laplace.	78
	5.3.1 Tratamiento Numérico de la Transformada de Fourier.	79
	5.3.2 Errores por truncamiento.	82
	5.3.3 Errores por discretización.	85
	5.4 Cálculo de transitorios <i>EM</i> en el dominio de la frecuencia.	87
	5.5 Medición de voltajes transitorios: Experimento escalado en el laboratorio.	93
	5.6 Conclusiones.	95

CAPITULO 6	CONCLUSIONES	
	6.1 Conclusiones generales.	97
	6.2 Principales aportaciones.	98
	6.2 Recomendaciones y trabajos futuros.	99
Referencias		100
Apéndice I	Permitividades relativas y factores de pérdidas para distintos materiales dieléctricos.	105
Apéndice II	Integración numérica de una función con límites definidos por el método de la regla rectangular.	106
Apéndice III	Algoritmo híbrido.	109
Apéndice IV	Algoritmo para evitar la conmutación de modos.	110
Apéndice V	Algoritmo para el cálculo del ángulo de H_{min}	111
Apéndice VI	Algoritmo para relacionar el <i>error-rms</i> de VECFIT con el retardo en tiempo (τ).	112

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

La transmisión de energía eléctrica y de información por cables subterráneos actualmente representa una alternativa más atractiva que las tradicionales líneas aéreas. Esto se debe en parte a su seguridad, confiabilidad e invisibilidad. Por estas características las instalaciones de cables subterráneos en zonas residenciales, comerciales, hospitales, fábricas, escuelas, centros recreativos, etc. son preferidas sobre las líneas aéreas. Esto a su vez, ha permitido abatir costos en los materiales aislantes poliméricos (EP¹ y XLP²) extruídos directamente en los conductores para la construcción de los cables. Con esto, el costo inicial de instalación (que es de por vida) es altamente redituable por su confiabilidad y servicio, además de que son instalaciones que se encuentran prácticamente libres de mantenimiento y de posibles fallas posteriores a sus pruebas de puesta en servicio.

Debido en parte al crecimiento vertiginoso en la construcción de este tipo de instalaciones, diversas compañías eléctricas en el mundo así como centros de investigación han orientado sus esfuerzos en apoyo a investigadores en el área de ingeniería de potencia para desarrollar herramientas de análisis de cables ante diferentes

¹ Etileno Propileno

² Propileno de cadena cruzada.

perturbaciones y fenómenos eléctricos. Caso especial es el estudio de la propagación de transitorios electromagnéticos producidos tanto por maniobras de cierre o apertura de interruptores como por descargas atmosféricas incidentes o inducidas. El problema aquí es que para realizar estudios en un sistema de cables se requiere el cálculo previo de sus parámetros eléctricos: impedancia serie y admitancia paralelo. Debido a la combinación de las diferentes capas materiales conductoras y aislantes en los cables del sistema, se presentan distintos modos combinados de propagación. Estos se clasifican en modos puros metálicos, modos puros de tierra y modos combinados o diferenciales. Ya que los parámetros de los cables son altamente dependientes de la frecuencia, las correspondientes componentes modales contienen múltiples resonancias complicando severamente su representación matemática e implementación en simulaciones digitales.

La formulación exacta para el modelado del retorno por tierra de la corriente en sistemas de cables subterráneos dispuestos en suelo homogéneo fue planteada por primera vez en 1926 por F. Pollaczek [9]. El problema con dicha formulación es que quedó planteada a través de integrales infinitas altamente oscilatorias que no tienen solución analítica. Por otra parte, en 1934 Schelkunoff formuló la teoría de transmisión en líneas coaxiales cilíndricas [8]. En esta formulación se requiere resolver conjuntos de ecuaciones de Bessel modificadas de bajo orden de primera y segunda clase con argumentos complejos que suelen indeterminarse numéricamente de manera muy rápida.

Actualmente, existen diferentes paquetes profesionales de simulación de transitorios electromagnéticos (tipo EMTP) planteados en el dominio del tiempo que modelan los sistemas de cables subterráneos con buena precisión, sin embargo, aun no se cuenta con un método de referencia base con el cual se puedan validar dichos resultados, ya que muchas veces estos programas funcionan como una caja negra (es complicado o imposible modificar las características de la simulación).

Por otra parte, no existen programas profesionales comerciales que estén basados en el dominio de la frecuencia en los que se puedan calcular transitorios electromagnéticos incluyendo la dependencia frecuencial de sus parámetros de manera directa, evitando

así, la necesidad de resolver convoluciones recursivas que realizan las técnicas basadas en el dominio del tiempo.

A partir del artículo publicado por L. M. Wedepohl y D. J. Wilcox en 1973, el análisis de cables subterráneos en el dominio de la frecuencia comenzó a ser de un mayor interés [11]. Hasta la fecha diversos autores han enfocado sus esfuerzos en mejorar la precisión de ambas técnicas (dominio de la frecuencia y dominio del tiempo), tanto para la parte del modelado electromagnético de cables como para la solución dinámica del sistema.

1.2 ANTECEDENTES HISTORICOS DE TRANSMISIÓN POR CABLES

El uso de los primeros sistemas de transmisión por cable subterráneo data de 1880. En 1884 MacCracken's introdujo el concepto helicoidal aplicable al aislamiento de papel. En 1890 Vicent de Ferranti fabricó el primer cable subterráneo concéntrico de transmisión para 10kV, este fue instalado en Londres, Inglaterra [24]. Para este cable se utilizó por primera vez el aislamiento con papel impregnado de aceite.

Para el año de 1902 se instaló en Montreal el primer cable con tres conductores aplicable a una tensión de 25kV. Este sistema de cables operó satisfactoriamente por más de 50 años. Posteriormente, en 1917, Emanuelli diseñó cables del tipo auto-contenido con líquido, los cuales permitieron incrementar los niveles de transmisión de potencia en alto y extra-alto voltaje. A partir de entonces, los niveles de voltaje se han podido incrementar, controlando mejor los niveles térmicos del cable hasta llegar a 66kV en la fecha de 1926 en Montreal y Philadelphia, 220kV en el año de 1936 en París, y recientemente, se han alcanzado niveles de hasta 525kV en Canadá y 535kV en Estados Unidos. Cabe mencionar también que con los avances tecnológicos actuales con el uso de la electrónica de potencia se pueden llegar a niveles de transmisión de voltaje para los sistemas de cables subterráneos de hasta 1100 kV [24].

1.3 CARACTERÍSTICAS DE TIPOS DE CABLES

Actualmente, existe una innumerable gama de diseños de cables en el mercado. Sin embargo, para nuestro estudio de análisis de transitorios trataremos sistemas de cables para media y alta tensión del tipo coaxial. En la Tabla I se muestra una clasificación de sistemas de cables subterráneos conforme el rango de voltajes.

TABLA I
CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS MEDIANTE EL RANGO DE VOLTAJES [24]

RANGO DE VOLTAJES (kV)	CLASIFICACIÓN
Arriba de 345	Extra alto Voltaje
69 – 345	Alto voltaje
5 – 46	Media Tensión
1 hacia Abajo	Baja Tensión

En México se tiene el mayor nivel de tensión para sistemas de transmisión subterránea a los 115kV.

A continuación, se hace una breve descripción de los tipos de cables subterráneos más utilizados en transmisión. Dentro de los cuáles destacan los cables tipo auto-contenido y tipo tubo.

1.3.1 CABLES TIPO AUTO-CONTENIDO

Estos cables tienen un núcleo con un ducto en su interior por donde circula el aceite. Dentro de los cables tipo auto-contenido existen 2 configuraciones típicas: La primera tiene un conductor segmentado y un ducto en el núcleo (Fig. 1.1a) y la segunda tienen un conductor de cobre con núcleo de acero en espiral tipo Milliken, o ‘M’ (Fig. 1.1b).

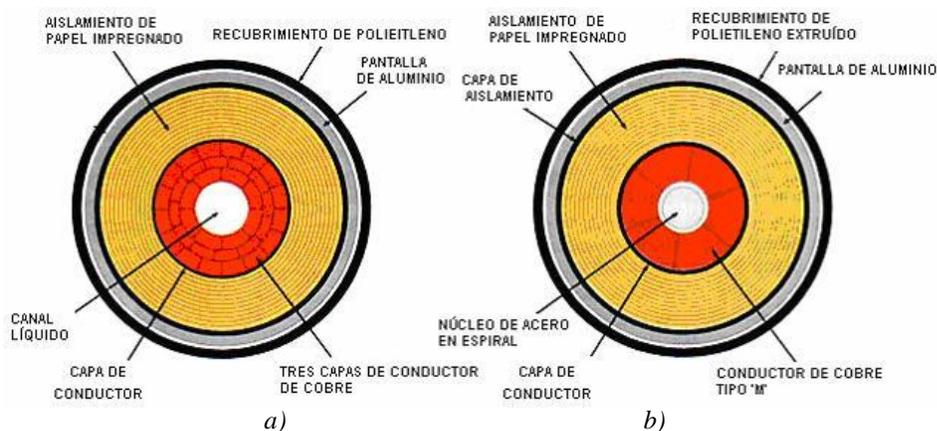


Fig. 1.1: Cable tipo auto-contenido de líquido. *a)* Se muestra un conductor segmental de cobre y *b)* Muestra un conductor Tipo M de cobre [24].

1.3.2 CABLES TIPO TUBO

Esta configuración típica presenta tres cables aislados dentro de una tubería de acero llena de aceite a presión. La presión del aceite aislante es de aproximadamente 1.5 kPa. Estos tipos de cables son usados en voltajes de 69 a 345kV. Los alambres helicoidales mostrados en la Fig. 1.2 ayudan a deslizar dichos cables durante la instalación en ductos.

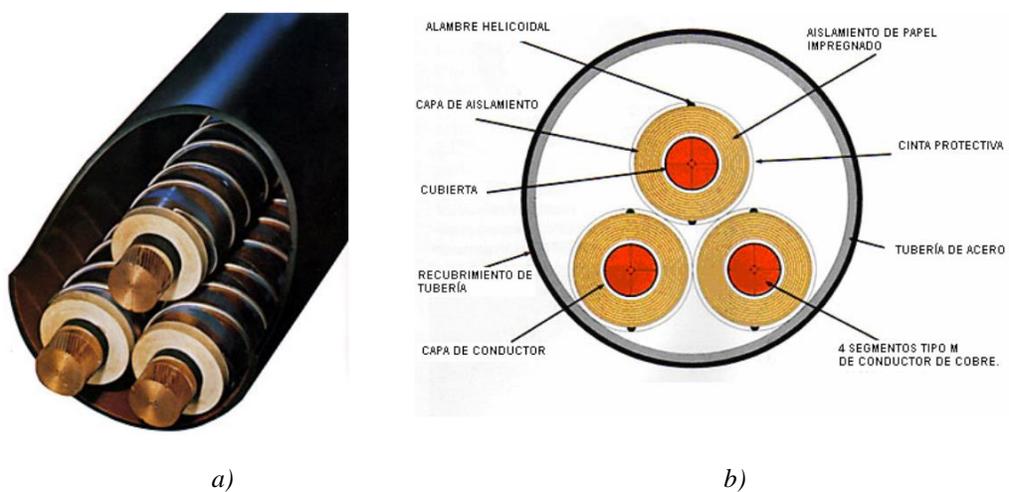


Fig. 1. 2 *a)* y *b)* Cable Tipo Tubo lleno de aceite a alta presión [24].

Cabe mencionar que el aislamiento de papel impregnado en aceite ha demostrado por muchos años tener excelentes características mecánicas-eléctricas, además de ser muy económico y confiable (ya que la mayoría de los circuitos aislados datan de la primera parte del siglo pasado y aún algunos continúan en servicio). En la actualidad este aislamiento ha sido sustituido por los materiales poliméricos como el EP etileno propileno y el XLP propileno de cadena cruzada.

1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad, los programas comerciales de análisis de transitorios electromagnéticos tipo EMTP/SPICE [2] están basados en técnicas del dominio del tiempo. A su vez, estas técnicas requieren del uso de aproximaciones para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY , principalmente, la impedancia de retorno por tierra. Adicionalmente, cuando los sistemas son altamente dependientes de la frecuencia, como es el caso de los sistemas de transmisión subterráneos, estas aproximaciones pueden no ser muy precisas. Por lo tanto, es necesario desarrollar una metodología precisa para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY , en este caso, para sistemas de cables subterráneos. Dicha metodología deberá servir de base para el cálculo de transitorios electromagnéticos y para validar otros métodos para cálculo de parámetros electromagnéticos ZY .

La inclusión de la dependencia frecuencial de los parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos requiere resolver los planteamientos de Schelkunoff y Pollaczek para el cálculo de la impedancia de conductores cilíndricos y la impedancia de retorno por tierra, respectivamente. Sin embargo, hasta la fecha no existe un método práctico para resolver de manera precisa y eficiente las integrales de Pollaczek, necesarias para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra, en un amplio rango de frecuencia. Por lo tanto, se propone un algoritmo híbrido para resolver de manera precisa y eficiente la impedancia de retorno por tierra.

El cálculo de transitorios electromagnéticos a través de técnicas basadas en el dominio del tiempo requiere el uso de convoluciones recursivas, las cuales demandan de mucho esfuerzo computacional cuando los parámetros electromagnéticos ZY son altamente dependientes de la frecuencia. Por lo tanto, para obtener una solución eficiente de las respuestas transitorias de voltaje y corriente es necesario hacer una síntesis en frecuencia de las funciones matriciales (H y Y_c) que caracterizan al sistema de transmisión. Sin embargo, al mejorar la eficiencia de los métodos del dominio del tiempo se integran los errores como resultado de la aproximación. De ahí la importancia de desarrollar una metodología más precisa para validar la aplicación de estos programas.

Finalmente, no existe un programa de uso general y de libre acceso que se encuentre basado en técnicas del dominio de la frecuencia, con el cual, se pudiera representar directamente la dependencia frecuencial de los parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos. A su vez, dado que se evita el uso de convoluciones recursivas, la eficiencia computacional se incrementa considerablemente. Por lo que, este programa puede servir de base confiable para validación de los programas comerciales de análisis de transitorios basados en técnicas del dominio del tiempo.

1.5 OBJETIVOS DE LA TESIS

Desarrollar una metodología para el cálculo preciso de parámetros electromagnéticos longitudinales de un sistema de cables subterráneos. Para ello, se deberán evaluar numéricamente las formulaciones exactas de Schelkunoff para el cálculo de impedancias interna, externa y mutua de conductores cilíndricos-tubulares y resolver las integrales de Pollaczek para evaluar la impedancia de retorno por tierra de la corriente eléctrica [8].

Plantear una metodología algorítmica precisa, eficiente y confiable para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra.

Realizar el ajuste racional o síntesis en frecuencia de la matriz de función de propagación y de la matriz de admitancia característica del sistema de cables. Para esto se aplicará la técnica de Vector Fitting y el Método Brent [13, 14]. La aplicación de Vector Fitting permite reducir el orden en el modelo, mientras que el Método de Brent permite calcular los retardos en tiempo óptimo asociado a la función de propagación del sistema.

Explorar la técnica de la transformada numérica de Laplace para sintetizar la respuesta transitoria de voltaje en el extremo receptor de un sistema de cables subterráneos [12].

Los resultados obtenidos con la técnica de la transformada numérica de Laplace serán comparados con simulaciones en el programa PSCAD-EMTDC y un experimento escalado en el laboratorio.

1.6 METODOLOGÍA

En esta tesis se integra una metodología altamente precisa basada en técnicas del dominio de la frecuencia para análisis de transitorios electromagnéticos en sistemas cables subterráneos.

- 1) Primeramente, se resuelven las formulaciones exactas de Schelkunoff, Pollaczek, Wedepohl y Wilcox [2, 8, 9]. para análisis de cables subterráneos mediante programas computacionales desarrollados por el autor.
- 2) En seguida, se implementa la solución en series infinitas propuesta por Wedepohl desde 1973 para cálculo de la impedancia de retorno por tierra de sistemas de cables subterráneos [11]. Con esta base, se desarrolla un algoritmo denominado híbrido altamente eficiente aplicable en un amplio rango de frecuencias. En este algoritmo híbrido, se implementa una versión extendida de la solución en series de Wedepohl para el rango de baja frecuencia mientras que para el rango de alta frecuencia se aplica el método de integración numérica adaptiva de Gauss-Lobato [11, 23].

Con la aplicación de las técnicas desarrolladas en los 2 pasos anteriores, es posible contar con un método preciso para el cálculo parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos que sirva de base para los análisis de transitorios tanto en el dominio del tiempo como dominio de la frecuencia.

- 3) Posteriormente, se presenta un método basado en la técnica propuesta por Wedepohl para organizar de forma regular las matrices de eigenvectores y eigenvalores del sistema de cables para evitar la conmutación de modos [21].
- 4) Luego, se determinan parámetros modales (velocidad, atenuación, retardo en tiempo y ángulo de fase).
- 5) Se implementa la técnica de Vector Fitting y el método de Brent para efectuar el ajuste óptimo de la función de propagación y admitancia característica en cables utilizando un mínimo número de polos [14].

Los métodos desarrollados en 3) y 4) son la base para análisis de transitorios mediante técnicas del dominio del tiempo. La aplicación de 3) y 4) permite una reducción bastante considerable del uso de convoluciones recursivas. De tal manera, se pueden obtener respuestas transitorias de voltajes y corrientes de forma mucho más eficiente.

- 6) Después, se realiza el cálculo de transitorios electromagnéticos mediante la implementación de la transformada numérica de Laplace [11, 12, 25]. En esta técnica se sintetiza la respuesta transitoria de voltaje en el extremo receptor de sistemas de cables subterráneos con control numérico de error y alta precisión.
- 7) Finalmente, se comparan las respuestas de voltajes calculados mediante la transformada numérica de Laplace con simulaciones realizadas en el programa profesional PSCAD-EMTDC basado en técnicas del dominio en el tiempo y con mediciones obtenidas de un experimento a escala con un cable prototipo en el laboratorio.

Capítulo 2

CÁLCULO DE PARÁMETROS ELECTROMAGNÉTICOS EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS

RESUMEN

En este capítulo se presentan las formulaciones de las ecuaciones del telegrafista como base del modelo electromagnético para el análisis de sistemas de cables subterráneos.

Se presenta una metodología para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY de sistemas eléctricos de cables subterráneos. En esta metodología se resuelven las formulaciones exactas de Schelkunoff para cálculo de impedancias interna, externa y mutua de conductores cilíndricos, así como las formulaciones de Pollaczek para evaluar la impedancia de retorno por tierra.

Finalmente, se plantean las relaciones de voltajes y corrientes en cantidades de lazo y conductor para un modelo de cable subterráneo mediante transformaciones matriciales elementales.

2.1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas de cables subterráneos y submarinos para transmisión de energía eléctrica se componen alternadamente por capas de materiales conductores y dieléctricos. La combinación de estos elementos hace que los parámetros

electromagnéticos del cable sean altamente dependientes de la frecuencia. Esto se debe básicamente a 1) la presencia del Efecto Piel tanto en conductores metálicos como en el suelo (el cual representa un conductor adicional al sistema) y a 2) los Efectos de Relajación en los aislantes. Por lo tanto, es necesario contar con modelos precisos para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos que puedan servir de base para los análisis de transitorios *EM*.

Para resolver este problema, se resuelven de forma numérica las formulaciones exactas planteadas por Schelkunoff y Pollaczek [8, 9] para el cálculo de impedancias serie en conductores metálicos tubulares y para evaluar la contribución en las pérdidas por la presencia del suelo.

A pesar de que las formulaciones clásicas de Schelkunoff y Pollaczek fueron planteadas desde hace muchos años, la dificultad en su implementación numérica hasta hace poco tiempo resultaba impracticable. Por un lado la formulación de Schelkunoff requiere evaluar arreglos de funciones de Bessel de primera y segunda clase los cuales se pueden indeterminar numéricamente muy rápido, mientras que en la formulación de Pollaczek se requiere resolver integrales con integrandos altamente oscilatorios e irregulares y límites infinitos que requieren mucho tiempo de procesamiento [8-9].

Aunque actualmente las características de los equipos de cómputo y los programas de cálculo como el Matlab son muy extensas, persisten casos de aplicación en los que resulta impreciso evaluar dichas formulaciones.

Por ejemplo, el problema particular que se tiene con la integral de Pollaczek es que no tiene solución analítica cerrada y su integrando es altamente oscilatorio e irregular al intentar su solución numérica. Por esta razón los métodos genéricos de integración numérica directa presentan errores de convergencia y además requieren de procesar una carga computacional bastante considerable [2, 11].

2.1 MODELADO ELECTROMAGNÉTICO DE SISTEMAS DE TRANSMISIÓN POR CABLES SUBTERRÁNEOS

La propagación de las ondas de voltaje y corriente en un sistema de transmisión por cables subterráneos se describe por las Ecuaciones del Telegrafista (planteadas por Oliver Heaviside) [2]:

$$-\frac{d}{dz}V = Z(\omega)I \quad (2.1)$$

y

$$-\frac{d}{dz}I = Y(\omega)V \quad (2.2)$$

donde Z y Y son las matrices de impedancia serie y admitancia paralelo ambas en p. u. de longitud. V e I son los vectores de voltaje y corriente, z es la distancia longitudinal y ω es la frecuencia angular en rad/s. La solución de (2.1) y (2.2) es [2]:

$$V(z) = H_{+1}(\omega)C_1 + H_{-1}(\omega)C_2 \quad (2.3)$$

y

$$I(z) = Y_c(\omega) \cdot H_{+1}(\omega) \cdot C_1 - Y_c(\omega) \cdot H_{-1}(\omega)C_2 \quad (2.4)$$

donde

$$H_{\pm}(\omega) = \exp(\pm\sqrt{ZY} \cdot l) \quad (2.5)$$

$$Y_c(\omega) = Z_c^{-1} \cdot \sqrt{ZY} \quad (2.6)$$

$$Z_c(\omega) = Y_c^{-1} \quad (2.7)$$

C_1 y C_2 son las constantes de integración determinadas por las condiciones límite del sistema de cables (inicial y final), H_{\pm} es la matriz de propagación de las ondas de voltajes y corrientes, Y_c y Z_c son las matrices de admitancia e impedancia característica.

Considere el sistema de cables concéntricos subterráneos con longitud “ $l=10mi$ ” que se muestra en la Fig. 2.1a. Este sistema corresponde al caso clásico de análisis de transitorios en cables reportado por Wedepohl y Wilcox en 1973 [11]. Por esta razón se toma en esta tesis como caso base de referencia para validación de los algoritmos aquí desarrollados.

El sistema de la Fig. 2.1a puede ser representado por un arreglo vectorial de dos puertos. En la forma nodal se relacionan las respuestas de voltajes y corrientes del nodo en el extremo emisor ($z = 0$) con el nodo en el extremo receptor ($z = l$) [1]:

$$\begin{bmatrix} I_0(s) \\ V_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l(s) \\ V_l(s) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

donde $V_0(s)$ e $I_0(s)$ son los vectores de voltajes y corrientes en $z = 0$. $V_l(s)$ e $I_l(s)$ son los vectores de voltajes y corrientes en $z = l$ y $s = c + j\omega$.

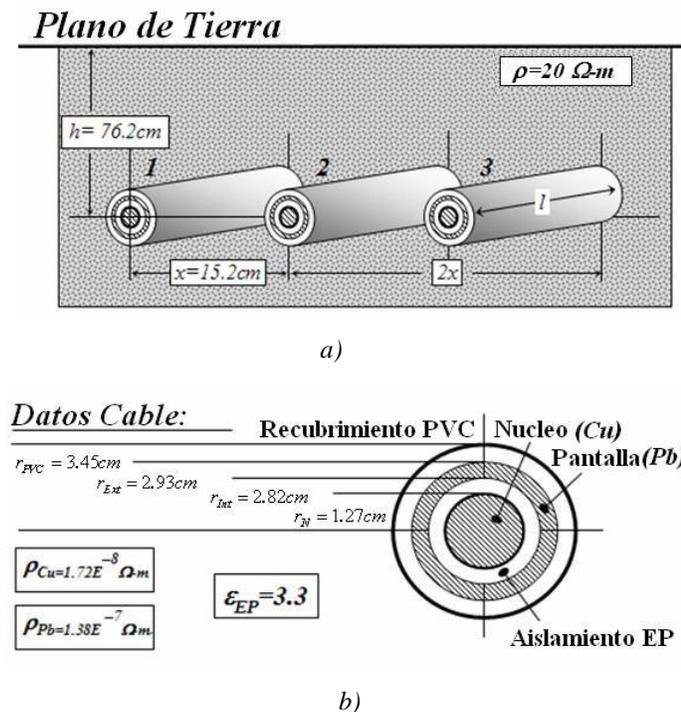


Fig. 2.1: Sistema de transmisión por cables subterráneos reportado por Wedepohl y Wilcox [11].

a) Sistema en configuración horizontal compuesto por tres cables. b) Dimensiones y propiedades materiales de un cable coaxial.

A y B son las matrices altamente dependientes de la frecuencia que caracterizan al sistema de transmisión por cables, las cuales están definidas por:

$$A = Y_C \coth(\sqrt{ZY}) \quad (2.9)$$

$$B = -Y_C \operatorname{csch}(\sqrt{ZY}) \quad (2.10)$$

En esta tesis las funciones de matrices se resuelven aplicando la teoría natural de modos de propagación de Wedepohl [10]. La implementación práctica de las funciones trigonométricas hiperbólicas (2.9) y (2.10) para evitar indeterminaciones numéricas causadas por cantidades que tienden rápidamente a cero en el denominador es [2]:

$$\coth(\sqrt{ZY}) = \frac{1 + e^{-2(\sqrt{ZY})}}{1 - e^{-2(\sqrt{ZY})}} \quad (2.11)$$

$$\operatorname{csch}(\sqrt{ZY}) = \frac{2e^{-(\sqrt{ZY})}}{1 - e^{-2(\sqrt{ZY})}} \quad (2.12)$$

2.2 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS ZY

Las relaciones de campo **EM** en un cable subterráneo ó submarino se basan en el cálculo de los parámetros **ZY**. Para un modelado preciso se requiere considerar la dependencia frecuencial. Ésta es tomada en cuenta mediante el cálculo del Efecto Piel en los conductores y en el suelo, mientras que en los aislantes se toma en cuenta el Efecto de Relajación.

Asumiendo que el modo de propagación es *Quasi-TEM_z*, los parámetros se calculan mediante:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jL(\omega) \quad (2.13)$$

$$Y(\omega) = G(\omega) + jC(\omega) \quad (2.14)$$

donde

R y **L** son la resistencia e inductancia serie.

G y **C** son la conductancia y capacitancia paralelo.

Las expresiones (2.13) y (2.14) representan matrices simétricas dependientes de la frecuencia (en p.u. de longitud) de dimensión (n x n), donde n es el número de

conductores metálicos presentes en el sistema de cables descrito en Fig. 2.1a y en detalle en la Fig. 2.1b.

2.2.1 IMPEDANCIA SERIE

La Fig. 2.2a muestra un corte transversal de un cable concéntrico de 3 conductores, mientras que en la Fig. 2.2b se muestra su circuito equivalente.

El modelado electromagnético en cantidades de voltajes y corrientes de lazo para el cable de la Fig. 2.2a es:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_{NP} \\ V_{PA} \\ V_{AT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{11} & z'_{12} & 0 \\ z'_{21} & z'_{22} & z'_{23} \\ 0 & z'_{32} & z'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En el arreglo (2.15) los vectores de voltajes y corrientes para cada cable del sistema en la Fig. 2.2 refieren las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} V_{NP} &= V_N - V_P & I_1 &= I_N \\ V_{PA} &= V_P - V_N & I_2 &= I_N + I_P \\ V_{AT} &= V_A - V_T & I_3 &= I_N + I_P + I_A \end{aligned} \quad (2.16)$$

La definición de cada término en la matriz de impedancia serie (Z) del sistema, considerando cantidades de lazo, es entonces de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{II} + \mathbf{Z}_N + \mathbf{Z}_{Dielectrico\ N/P} + \mathbf{Z}_{P-Int} \quad (2.17)$$

donde,

\mathbf{Z}_N = Impedancia de núcleo sólido.

$\mathbf{Z}_{Dielectrico\ N/P}$ = Impedancia del dieléctrico entre núcleo y pantalla.

\mathbf{Z}_{P-Int} = Impedancia interna de la pantalla.

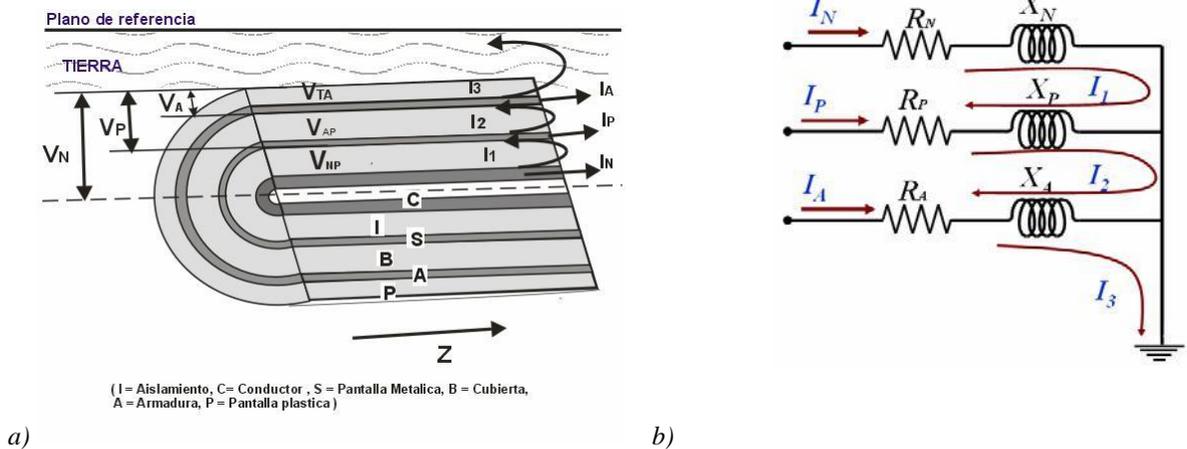


Fig. 2.2: Relaciones de voltajes y corrientes de lazo y conductor en un cable subterráneo de tres conductores. a) Sección transversal del cable coaxial. b) Circuito equivalente.

De forma correspondiente los términos Z'_{22} y Z'_{33} se definen en forma análoga como sigue:

$$\mathbf{Z}'_{22} = \mathbf{Z}_{P-Ext} + \mathbf{Z}_{Dielectrico\ P/A} + \mathbf{Z}_{A-Int} \quad (2.18)$$

donde,

\mathbf{Z}_{P-Ext} = Impedancia externa de la pantalla.

$\mathbf{Z}_{Dielectrico\ P/A}$ = Impedancia del dieléctrico entre pantalla y armadura.

\mathbf{Z}_{A-Int} = Impedancia interna de la armadura.

$$\mathbf{Z}'_{33} = \mathbf{Z}_{A-Ext} + \mathbf{Z}_{Dielectrico\ A/T} + \mathbf{Z}_T \quad (2.19)$$

donde,

\mathbf{Z}_{A-Ext} = Impedancia externa del Armadura.

$\mathbf{Z}_{Dielectrico\ A/T}$ = Impedancia del dieléctrico entre armadura y tierra.

\mathbf{Z}_T = Impedancia propia de tierra.

Las impedancias de acoplamiento $\mathbf{Z}'_{12} = \mathbf{Z}'_{21}$ y $\mathbf{Z}'_{13} = \mathbf{Z}'_{31}$ son negativas por la oposición de la dirección de las corrientes de lazo como se muestra en la Fig. 2.2a (La dirección de \mathbf{I}_P es opuesta a la corriente en lazo 1 (\mathbf{I}_1), igualmente que \mathbf{I}_A es opuesta a la corriente de lazo 2 (\mathbf{I}_2)), entonces,

$$\mathbf{Z}'_{12} = \mathbf{Z}'_{21} = -\mathbf{Z}_{P-M} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{Z}'_{23} = \mathbf{Z}'_{32} = -\mathbf{Z}_{A-M} \quad (2.21)$$

donde,

Z_{P-M} = Impedancia de la pantalla entre el interior del lazo 1 y el exterior del lazo 2.

Z_{A-M} = Impedancia mutua de la armadura entre el interior del lazo 2 y el exterior del lazo 3.

Finalmente, $Z'_{I3} = Z'_{3I} = 0$, porque no hay acoplamiento entre los lazos 1 y 3.

A continuación se presenta de manera ordenada cada una de las formulaciones para el cálculo de la impedancia serie (Z), la cual representa las relaciones de acoplamiento EM entre los conductores metálicos internos de cada cable en la Fig.2.1 y así como también el acoplamiento EM cada uno de los cables a través del suelo:

IMPEDANCIA INTERNA DE NÚCLEO SÓLIDO

En el modelado de la impedancia del núcleo de cobre (ρ_{cu}), el acoplamiento interno del cable en la Fig. 2.1b, se representa como sigue [3]:

$$Z_N = \frac{\rho_{cu}}{2\pi r_n p} \frac{I_0(r_N/p)}{I_1(r_N/p)} \quad (2.22)$$

donde,

ρ_{cu} = Resistividad del Cobre.

r_N = Radio del núcleo,

I_0 = Función modificada de Bessel de primer tipo y orden cero.

I_1 = Función modificada de Bessel de primer tipo y orden uno.

El parámetro p es la profundidad de penetración compleja y esta definido como:

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j\omega\mu_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}} (1 - j) \quad (2.23)$$

donde,

ρ = Resistividad del material conductor o del suelo (Ω -m).

μ_0 = Permeabilidad del espacio libre ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m),

IMPEDANCIA DEL DIELECTRICO

Las impedancias internas de los dieléctricos entre cada uno de los conductores del cable (núcleo/pantalla y pantalla/tierra) que se muestran en la Fig. 2.1b están dadas por [2]:

$$Z_{\text{Dielectrico}} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_{\text{Ext}}}{r_{\text{Int}}} \quad (2.24)$$

donde,

r_{Ext} = Radio exterior del aislamiento,

r_{Int} = Radio interior del aislamiento.

IMPEDANCIA DE CONDUCTORES CILÍNDRICOS

La impedancia interna, externa y mutua debida a los lazos de acoplamiento **EM** interno de un conductor tubular (como es el caso de la pantalla conductora de plomo (ρ_{Pb}) en la Fig. 2.1b), están dadas de manera exacta por las fórmulas de Schelkunoff [8]:

$$Z_{\text{Int}} = \frac{\rho_{\text{pb}}}{2\pi r_{\text{Int}} p} \frac{I_0(\zeta_{\text{Int}})K_1(\zeta_{\text{Ext}}) + K_0(\zeta_{\text{Int}})I_1(\zeta_{\text{Ext}})}{W} \quad (2.25)$$

$$Z_{\text{Ext}} = \frac{\rho_{\text{pb}}}{2\pi r_{\text{Ext}} p} \frac{I_0(\zeta_{\text{Ext}})K_1(\zeta_{\text{Int}}) + K_0(\zeta_{\text{Ext}})I_1(\zeta_{\text{Int}})}{W} \quad (2.26)$$

$$Z_M = \frac{\rho_{\text{pb}}}{2\pi p r_{\text{Int}} r_{\text{Ext}}} \frac{1}{W} \quad (2.27)$$

donde,

$$\zeta_{\text{Int}} = \frac{r_{\text{Int}}}{p}, \quad \zeta_{\text{Ext}} = \frac{r_{\text{Ext}}}{p} \quad \text{y el wronskiano} \quad (2.28)$$

$$W = I_1(\zeta_{\text{Ext}})K_1(\zeta_{\text{Int}}) - I_1(\zeta_{\text{Int}})K_1(\zeta_{\text{Ext}})$$

K_0 = Función modificada de Bessel de segundo tipo y orden cero.

K_1 = Función modificada de Bessel de segundo tipo y orden uno.

IMPEDANCIA DE RETORNO POR TIERRA

Para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra (Z_T) propia y mutua de cables subterráneos se requiere la solución de las expresiones exactas planteadas por Pollaczek. Dichas expresiones fueron derivadas en base a un modelo de tierra semi-infinita, en el cual, se evalúa la propagación de campos eléctrico y magnético debidos a una fuente de corriente filamental dispuesta directamente en el suelo [8,9].

Considere la Fig 2.1a en la cual se muestra un sistema de cables subterráneos y su disposición geométrica en el suelo. El modelo propuesto por Pollaczek para evaluar el acoplamiento EM entre el conductor metálico externo del cable y la tierra en la Fig. 2.1b se representa por medio de la impedancia de retorno por tierra propia para cada uno de los cables mostrados en la Fig. 2.1a, está dada por [1-2,9]:

$$Z_{T-propia} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[K_0(R/p) - K_0(2h/p) + J_p \right] \quad (2.29)$$

donde

K_0 = Es la función modificada de Bessel de segundo tipo y orden cero.

h = Es la profundidad del cable.

R = Radio del conductor.

y el término J_p es la integral de Pollaczek:

$$J_p(\beta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2h\sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}}}{|\beta| + \sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}} e^{j\beta R} d\beta \quad (2.30)$$

donde $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}$ es el número de onda y es considerado aquí como una variable muda de integración.

El modelo de Pollaczek para evaluar los acoplamientos *EM* Fig. entre cables de la 2.1a representa la impedancia mutua de tierra, dada por [1-2,9]:

$$\mathbf{Z}_{T\text{-mutua}} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[K_0(d/p) - K_0(D/p) + J_m \right] \quad (2.31)$$

donde,

d = Es la distancia entre cables $(\sqrt{x^2 + (h_i - h_j)^2})$.

D = Es la distancia entre un cable real y la imagen del otro $(\sqrt{x^2 + (h_i + h_j)^2})$.

$h_{i,j}$ = Es la profundidad del cable i y j .

y el término J_m es:

$$J_m(\beta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(h_i + h_j)\beta} \sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}}{|\beta| + \sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}} e^{j\beta x} d\beta \quad (2.32)$$

x = Es la distancia horizontal entre cables.

Nota: Se asume en estas ecuaciones que la permeabilidad del aire $\mu_0 = \mu_{\text{suelo}}$.

La dificultad para evaluar las integrales J_p y J_m radica en que no tienen solución analítica cerrada, además el comportamiento de su integrando es altamente oscilatorio e irregular. Por lo que su integración numérica directa con rutinas genéricas de cuadratura presenta errores de convergencia con una carga computacional bastante considerable [2].

En el siguiente capítulo se propone un algoritmo híbrido para resolver de manera precisa, eficiente y confiable a las integrales de Pollaczek. A su vez, en dicho algoritmo se implementan las series de Wedepohl para baja frecuencia e integración numérica adaptiva en alta frecuencia [1,4].

2.2.2 TRANSFORMACIÓN DE CANTIDADES DE LAZO A CANTIDADES DE CONDUCTOR

En la práctica para análisis de cables se requiere contar con cantidades nominales de voltajes y corrientes respecto a una referencia común, que en este caso es la tierra. En la figura 2.2a se muestra un corte transversal en donde se ilustran dichos voltajes (V_N , V_P y V_A) y corrientes (I_N , I_P y I_A) nominales.

Por lo que las relaciones entre cantidades de conductor y de lazo se pueden resumir como:

$$\begin{aligned} V_N &= V_{NP} + V_{PA} + V_{AT} & \mathbf{I} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_{PA} + \mathbf{V}_{AT} & \mathbf{I} & \mathbf{I}_P \\ \mathbf{V}_{AT} &= \mathbf{V}_{AT} & \mathbf{I} & \mathbf{I}_A \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para transformar los vectores de voltaje y corriente de cantidades de lazo a cantidades de conductor, se aplican las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_N &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{I} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_P &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{I} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.34)$$

El modelado electromagnético del cable mostrado en la Fig. 2.2a considerando cantidades de conductor para la impedancia serie es derivado a partir de la ecuación del telegrafista (2.1). Donde:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_N \\ V_P \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_N & z_{NP} & z_{NA} \\ z_P & z_{PA} & z_P \\ z_A & z_A & z_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Simétrica

La matriz de impedancia serie en (2.35) esta compuesta de los siguientes términos.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_N &= \mathbf{Z}'_{11} + 2\mathbf{Z}'_{12} + \mathbf{Z}'_{22} + 2\mathbf{Z}'_{23} + \mathbf{Z}'_{33} \\
 \mathbf{Z}_{NP} &= \mathbf{Z}'_{12} + \mathbf{Z}'_{22} + 2\mathbf{Z}'_{23} + \mathbf{Z}'_{33} \\
 \mathbf{Z}_{NA} &= \mathbf{Z}'_{23} + \mathbf{Z}'_{33} \\
 \mathbf{Z}_P &= \mathbf{Z}'_{22} + 2\mathbf{Z}'_{23} + \mathbf{Z}'_{33} \\
 \mathbf{Z}_{PA} &= \mathbf{Z}'_{23} + \mathbf{Z}'_{33} \\
 \mathbf{Z}_A &= \mathbf{Z}'_{33}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Las formulaciones de cada uno de los elementos en el lado izquierdo (2.36) se han desarrollado en la sección (2.3.1)

2.3.3 ADMITANCIA PARALELO

El cálculo de los parámetros de admitancia paralelo (\mathbf{Y}) se deriva de la ecuación (2.2), la cual representa el modelo de las relaciones entre voltajes y corrientes para un sistema de cables subterráneos en por unidad de longitud.

El modelado EM para un cable de 3 conductores mostrado en la Fig. 2.2a considerando cantidades de conductor \mathbf{Y} es:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_P \\ \mathbf{I}_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_1 & -\mathbf{Y}'_1 & 0 \\ -\mathbf{Y}'_1 & \mathbf{Y}'_1 + \mathbf{Y}'_2 & -\mathbf{Y}'_2 \\ 0 & -\mathbf{Y}'_2 & \mathbf{Y}'_2 + \mathbf{Y}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N \\ \mathbf{V}_P \\ \mathbf{V}_A \end{bmatrix} \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

donde,

\mathbf{N} , \mathbf{P} y \mathbf{A} se refieren al núcleo, pantalla y armadura, respectivamente.

\mathbf{Y}'_i (con $i = 1, 2, 3$) representa la admitancia paralelo de cada conductor dentro del cable coaxial. A su vez estos términos están dados por:

$$\mathbf{Y}'_i = \mathbf{G}'_i + j\omega \mathbf{C}'_i \quad (\text{para } i = 1, 2, 3) \tag{2.38}$$

G'_i y C'_i son la conductancia y la capacitancia paralelo por unidad de longitud en cada capa del dieléctrico. La capacitancia de una sección de aislante tubular con radio exterior (r_{Ext}) y radio interior (r_{Int}) está dada por:

$$C'_i = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(r_{Ext}/r_{Int})} \quad (2.39)$$

$$\epsilon' = \epsilon_0 \epsilon'_r \quad (2.40)$$

con

ϵ_0 = Permitividad absoluta o la constante dieléctrica en el espacio libre

(F/m), ϵ'_r = Permitividad relativa o constante dieléctrica del material aislante.

El Apéndice I muestra valores típicos para ϵ'_r de distintos materiales dieléctricos utilizados en la industria para aislamientos extruídos entre conductores internos de cables subterráneos y submarinos.

La conductancia paralelo (G'_i) generalmente es un valor muy pequeño que en la práctica suele ser despreciado. Sin embargo, para las aplicaciones de precisión en el cálculo de la dependencia frecuencial se considera como [2,7]:

$$G'_i = (\omega C') \tan(\gamma) \quad (2.41)$$

donde $\tan(\gamma)$ es el factor de pérdidas dado por la siguiente expresión:

$$\tan(\gamma) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} = \frac{\epsilon''_r}{\epsilon'_r} \quad (2.42)$$

donde,

σ = Es la conductividad del material aislante (S/m).

ϵ''_r = Es la parte imaginaria de la permitividad compleja (ϵ^*_r).

ϵ'_r = Es la parte real de la permitividad compleja (ϵ^*_r).

El modelo de permitividad compleja (ϵ^*_r) se define como [7]:

$$\epsilon^* = \epsilon_0 (\epsilon'_r - j\epsilon''_r) \quad (2.43)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (2.41) y (2.42) se obtiene la siguiente expresión para evaluar la conductancia (p.u. de longitud):

$$G'_i = C_i \frac{\sigma}{\epsilon^i} \quad (2.44)$$

2.3.4 SISTEMA POLIFÁSICO DE CABLES SUBTERRÁNEOS

Los sistemas de cables subterráneos y submarinos suelen tener arreglos de dos o más conductores concéntricos o excéntricos. En el caso de un cable con tres conductores concéntricos el núcleo se encarga de transmitir la mayor parte de la corriente eléctrica, la pantalla confina los campos electromagnéticos en su interior y la armadura proporciona rigidez mecánica al cable. Para realizar el modelado electromagnético de un arreglo de tres cables con tres conductores cada uno, se plantea la ecuación del telegrafista (2.1) como:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

donde cada término Z_{ij} (con $i, j = 1, 2, 3$) es una submatriz simétrica de 3x3.

La submatriz Z_{ii} esta dada por:

$$Z_{ii} = \begin{bmatrix} z_N^i & z_{NP}^i & z_{NA}^i \\ z_P^i & z_{PA}^i & z^i \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

simétrica

La evaluación de los elementos $Z_{N}^i, Z_{NP}^i, Z_{NA}^i, Z_{P}^i, Z_{PA}^i, Z_{A}^i$ en la submatriz (2.46) se contempla en (2.36). Los elementos fuera de la diagonal Z_{ij} con $i \neq j$ tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{L}_{ii = L_{Mij}} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{matrix} \quad (2.47)$$

donde Z_{Mij} representa el lazo de acoplamiento de la impedancia mutua de tierra entre armaduras de los cables “i” y “j”. Esto se debe al acoplamiento mutuo de las corrientes circulantes de retorno por tierra entre capas conductoras externas del sistema de cables. Este término involucra la solución de la integral de Pollaczek.

En la ecuación (2.45) V_1, V_2 y V_3 representan subvectores de voltaje de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}_i = \begin{matrix} \mathbf{v}_{N,i} \\ \mathbf{v}_{P,i} \\ \mathbf{v}_{A,i} \end{matrix} \quad (2.48)$$

Los subíndices $i = 1, 2, 3$ denotan los cable 1, 2, 3, y los subíndices N, P y A refieren al núcleo, pantalla y armadura del cable correspondiente. De la misma manera, I_1, I_2 y I_3 son sub-vectores de corriente de la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_i = \begin{matrix} \mathbf{I}_{N,i} \\ \mathbf{I}_{P,i} \\ \mathbf{I}_{A,i} \end{matrix} \quad (2.49)$$

Aplicando la ecuación 2.2 para obtener la variación de la corriente a lo largo de un conductor, se tiene la siguiente expresión:

$$-\frac{d}{dx} \begin{matrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{33} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{matrix} \quad (2.50)$$

Cada término Y_{ij} (con $i \neq j$) es una submatriz de ceros, que en este caso sería simétrica de (3 x 3). Los términos de la diagonal $i=1,2,3$ (conductores) tienen la principal Y_{ii} (con siguiente forma:

$$Y_{ii} = \begin{matrix} Y'_1 & -Y'_1 & 0 \\ -Y'_1 & Y'_1 + Y'_2 & -Y'_2 \\ 0 & -Y'_2 & Y'_2 + Y'_3 \end{matrix} \quad (2.51)$$

Los detalles para el cálculo de cada uno de los elementos de la submatriz (2.51) están en (2.3.3).

2.4 CONCLUSIONES

Se cuenta con un modelo completo para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos, el cual servirá de base para estudios posteriores de análisis de transitorios EM basados en técnicas tanto del dominio del tiempo como del dominio de la frecuencia. El modelo incorpora la totalidad de la dependencia frecuencial mediante los planteamientos de Schelkunoff y Pollaczek referentes al cálculo de la impedancia de conductores cilíndricos y la impedancia de retorno por tierra, respectivamente.

Capítulo 3

ALGORITMO HÍBRIDO PARA EL CÁLCULO DE LA IMPEDANCIA DE RETORNO POR TIERRA

RESUMEN

En este capítulo se propone un algoritmo híbrido para calcular de manera eficiente, precisa y confiable la impedancia de retorno por tierra en sistemas de cables subterráneos. Posteriormente, se establecen criterios de estabilidad, precisión y convergencia en la solución de dicho algoritmo. Adicionalmente, se compara la solución en amplio rango del algoritmo con el método de integración numérica adaptiva de Gauss-Lobatto y con las fórmulas clásicas de Ametani, Saad-Gaba-Giroux, Wedepohl y Semlyen

Finalmente, se plantean dos casos de estudio donde se requiere calcular las impedancias de retorno por tierra de un sistema de distribución de energía eléctrica y otro que tiene ubicado a la distancia un conducto de gas o petróleo.

3.1 INTRODUCCIÓN

Para realizar el análisis en estado estable o transitorio en sistemas de cables subterráneos de transmisión de energía eléctrica se requiere calcular las impedancias

propias y mutuas de retorno por tierra (Z_T). Para calcular Z_T de manera precisa se requiere resolver la integral de Pollaczek [9]. Además, para un análisis de un sistema de transmisión por cables se tienen que realizar muchas operaciones para resolver esta integral. Como ejemplo, para realizar un estudio de transitorios por maniobra en la red eléctrica, que oscilan en un rango de frecuencias entre $1\text{Hz} \leq f \leq 1\text{MHz}$, se pueden requerir 1024 muestras de tiempo para obtener una buena resolución de la forma de onda sintetizada [25]. Para cada una de estas muestras, de misma forma, se requiere evaluar los productos de matrices de parámetros ZY . En un sistema de n cables subterráneos y m conductores por cada cable, la matriz de impedancia serie (Z) contiene $(1-1/n+1/nm^2)$ partes de Z_T propias y mutuas. Con lo que para un sistema de cables subterráneos como el que se muestra en la Fig. 2.1a se requiere evaluar al menos $1024 \times 2/3 \times (mn)^2$ veces la integral de Pollaczek [9]. Tomando en cuenta que esta integral no tiene solución analítica cerrada y que al intentar su solución numérica se vuelve altamente oscilatoria, esta tarea, prácticamente se vuelve imposible de realizar en una PC convencional.

Una opción para evitar resolver dicha integral es utilizar fórmulas aproximadas para el cálculo de Z_T [2]. El problema con estas fórmulas es que la mayoría solo son válidas dentro de ciertos rangos de aplicación (limitadas en frecuencia), es decir los rangos de error no están bien establecidos en un amplio rango.

En 1969, Wilcox [4] y en 1973, Wedepohl y Wilcox [11] propusieron una solución basada en series para el cálculo de Z_T . Sin embargo, hasta la fecha esta solución no ha podido ser implementada (programas tipo EMTP) [2]. Probablemente debido en parte a la complejidad en la obtención del patrón de repetición de las series y a los errores de sintaxis y concordancia en las referencias de dichos autores [4, 11]. Un problema adicional es que el límite de aplicación de dicha solución en series es muy limitado, ya que solo es aplicable a sistemas de cables subterráneos con disposición horizontal [4, 11].

Debido a la problemática que representa resolver la integral de Pollaczek por los métodos ya mencionados y por la importancia que representa este parámetro dentro de la matriz de impedancia serie Z , es necesario desarrollar una metodología precisa, eficiente

y confiable para el cálculo de Z_T . En éste capítulo se propone un algoritmo híbrido en el cual se implementa la solución en series para baja frecuencia y la integración numérica directa para alta frecuencia. La solución propuesta es altamente eficiente.

3.2 IMPEDANCIAS DE RETORNO POR TIERRA

Considere el sistema de transmisión de cables subterráneos que se muestra en la Fig. 3.1. En esta figura se asume que el suelo es un conductor imperfecto y homogéneo, que su permeabilidad magnética es igual a la del vacío ($\mu_r = \mu_0$) y que la frecuencia de la fuente no puede ser tan alta que las corrientes de desplazamiento puedan ser despreciadas ($\sigma \gg \omega \epsilon_r \epsilon_0$). La impedancia propia y mutua para el modo *Quasi-Temz* están dadas por [9]:

$$Z_T = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [K_0(d/p) - K_0(D/p) + J] \quad (3.1)$$

donde J es la integral de Pollaczek, planteada en 1926 como [9]:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(-2h)\sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}}}{|\beta| + \sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}} e^{j\beta x} d\beta \quad (3.2)$$

Las expresiones (3.1) y (3.2) dependen de las variables físicas o geométricas del sistema y de las cantidades **EM** del medio (Ver Fig. 3.1). La integral (3.2) no tiene solución analítica cerrada y es altamente oscilatoria, con lo cual, su solución numérica mediante rutinas genéricas de integración directa suele fallar cuando se aplica para un amplio rango de frecuencias [18].

Las variables físicas para las impedancias de tierra propia y mutua están dadas por:

ω	=	Frecuencia angular en (<i>rad/seg</i>).
μ_0	=	Permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m).
p	=	Profundidad de penetración compleja.
d	=	Distancia entre cables o el radio para la impedancia propia.
D	=	Distancia entre un cable real y la imagen del otro cable o para la impedancia propia es dos veces la profundidad del cable.
h	=	Profundidad del cable o el promedio de las profundidades para la impedancia mutua ($(h_i + h_j)/2$).
x	=	Distancia horizontal entre cables o el radio para la impedancia propia.

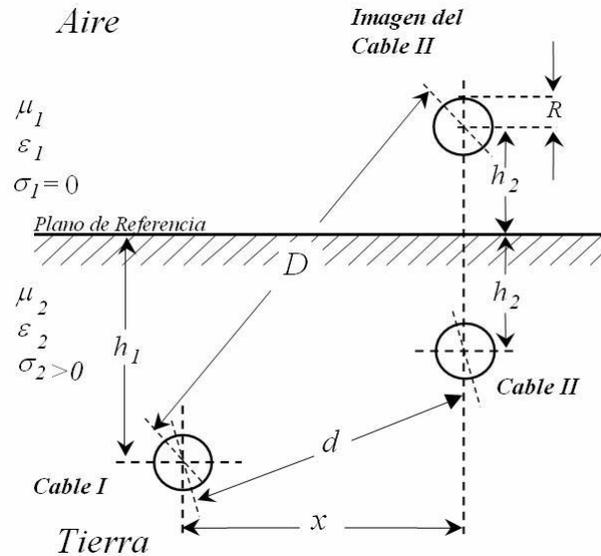


Fig. 3.1: Sistema subterráneo por dos cables.

3.3 CÁLCULO DE Z_T POR WEDEPOHL

La impedancia de retorno por tierra en (3.1) es aproximada tanto en la Tesis Doctoral de Wilcox en 1969 [4] como en el artículo propuesto por Wedepohl y Wilcox en 1973 [12] por los siguientes términos:

$$K_0(d/p) - K_0(D/p) + \frac{4h^2}{D^2} K_0(D/p)$$

$$Z_T = \frac{j\omega\mu}{2\pi} + \left(\frac{4h^2 - 2x^2}{D^3} \right) \frac{(p)}{D} K_1(D/p) \quad (3.3)$$

$$- \left(\frac{4h^2 - 2x^2}{D^4} \right) \frac{(p^2 + 2hp)}{D} \exp(-2h/p) - I_w$$

En donde, la integral de Pollaczek en (3.2) ha sido sustituida por los siguientes términos:

$$J(h, D, x, p) = \frac{4h^2}{D^2} K_0(D/p) + \frac{(4h^2 - 2x^2)(p)}{D^3} K_1(D/p) - \frac{(4h^2 - 2x^2)(p^2 + 2hp)}{D^4} \exp(-2h/p) - I_w \quad (3.4)$$

en donde,

$$I_w = - \frac{2h|x|}{D^2} \int_{2h/D}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2(1-t) - \sqrt{1-t^2}} \exp(-Dt/p) dt \quad (3.5)$$

con $t = 2h/D$.

Se puede demostrar que I_w es la integral de Wedepohl que sustituye, junto con los términos complementarios en (3.4), a la integral de Pollaczek para cálculo de Z_T . El problema con I_w es que no tiene solución analítica cerrada, razón por la cual probablemente Wedepohl y Wilcox optaron por desarrollar una solución a través de una expansión en series [4, 11]. El inconveniente con dicha expansión (en series) para la integral (3.5), es que no presenta un claro factor de repetitividad e inclusive tiene errores de sintaxis y de concordancia entre ambas referencias presentadas por dichos autores [4, 11]. Probablemente ésta sea la causa principal de que diversos investigadores en el área no se han motivado a continuar con el trabajo planteado por muchos años con un gran esfuerzo por Wedepohl y Wilcox.

3.4 PLANTEAMIENTO DE LAS SERIES DE WEDEPOHL

Por medio de un análisis exhaustivo de los argumentos de cada uno de los subtérminos que conforman dicha expansión en series, se logró identificar un factor de comportamiento dinámico de las series de Wedepohl. Con esto se logra salvar algunos de los problemas presentados en la sección anterior. Partiendo de éste análisis, se propone que la solución en series se represente en los siguientes cuatro arreglos de subtérminos:

$$S_w(D, p, x, h) = g_1 - g_2 - g_3 + g_4 \quad (3.6)$$

En la expansión en series de (3.6) Wilcox propuso en su Tesis Doctoral [4] un rango de aplicación válido de $d/p < 0.4$, mientras que Wedepohl y Wilcox en [11] proponen un rango de aplicación de $d/p < 0.25$. Esto quiere decir que la solución en series está limitada solamente para bajas frecuencias, mas aún, con estas discrepancias entre rangos de aplicación se dificulta establecer límites para su implementación numérica con resultados precisos y confiables en cualquier caso práctico de aplicación. La nueva

expansión en series, que se propone, para cada uno de los cuatro subtérminos de la serie se describe a continuación:

$$\begin{aligned}
 g_1(D, p, x, h) = & \\
 & \left[\theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right. \\
 & + \frac{1}{2(2!)} \frac{D^2}{p} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^4} \cdot \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right) \\
 & + \frac{1}{3(4!)} \frac{D^4}{p} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^6} + \frac{1}{4} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^4} + \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right) \\
 & + \frac{1}{4(6!)} \frac{D^6}{p} \frac{(2h)^5|x|^5}{D^8} + \frac{5}{6} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^6} + \frac{3}{4} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^4} + \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right) + \dots]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(D, p, x, h) = & \\
 & \left[-\frac{2}{3(1!)} \frac{D}{p} \frac{x^3}{D^3} \right. \\
 & - \frac{2}{5(3!)} \frac{D^3}{p} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^5} + \frac{2}{3} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^3} \\
 & - \frac{2}{7(5!)} \frac{D^5}{p} \frac{(2h)^4|x|^4}{D^7} + \frac{4}{5} \frac{(2h)^2|x|^2}{D^5} + \frac{2}{3} \frac{|x|^3}{D^3} \\
 & - \frac{2}{9(7!)} \frac{D^7}{p} \frac{(2h)^6|x|^6}{D^9} + \frac{6}{7} \frac{(2h)^4|x|^4}{D^7} + \frac{4}{5} \frac{(2h)^2|x|^2}{D^5} + \frac{2}{3} \frac{|x|^3}{D^3} + \dots]
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 g_3(D, p, x, h) = & \left\{ \right. \\
 & -\theta \\
 & - \frac{1}{2(2!)} \frac{D^2}{p} \frac{(2h)|x|}{D^2} + \theta \\
 & - \frac{1}{4(4!)} \frac{D^4}{p} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^4} + \frac{3}{2} \frac{(2h)x}{D^2} + \theta \\
 & - \frac{1}{6(6!)} \frac{D^6}{p} \frac{(2h)^5|x|^5}{D^6} + \frac{5}{3} \frac{(2h)^3|x|^3}{D^4} + \frac{3}{2} \frac{(2h)|x|}{D^2} + \dots] \\
 & + \theta +
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
g_4(D, p, x, h) = & \\
& \frac{1}{1!} \frac{D}{p} \frac{|x|}{D} \\
& + \frac{1}{3(3!)} \frac{D^3}{p} \frac{(2h)^2 |x|}{D^3} + \frac{2}{1} \frac{|x|}{D} \\
& + \frac{1}{5(5!)} \frac{D^5}{p} \frac{(2h)^4 |x|}{D^5} + \frac{4(2h)^2 |x|}{3 D^3} + \frac{2}{1 D} \frac{|x|}{D} \\
& + \frac{1}{7(7!)} \frac{D^7}{p} \frac{(2h)^6 |x|}{D^7} + \frac{6(2h)^4 |x|}{5 D^5} + \frac{4(2h)^2 |x|}{3 D^3} + \frac{2}{1} \frac{|x|}{D} + \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

De las relaciones geométricas para θ en la Fig. 3.1 se tiene entonces la siguiente expresión angular:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(2h/D) \tag{3.11}$$

Adicionalmente, Wedepohl y Wilcox propusieron que la expansión en series infinitas de (3.6) puede ser simplificada mediante la siguiente fórmula [4,11]:

$$Z_T = -\frac{j\omega\mu_0}{2\pi} - \ln \frac{\gamma D}{2p} + \frac{1}{2} - \frac{4h}{3p} \tag{3.12}$$

donde γ = Constante de Euler.

La desventaja de esta fórmula aproximada es su baja precisión en amplio rango. De aquí que se limite su aplicación únicamente al caso de baja frecuencia.

En ambas referencias [4, 11] no se aplica la solución en series para casos prácticos de aplicación en alta frecuencia. Sin embargo, Wedepohl y Wilcox mencionan que debido a los problemas de convergencia que presentaban dichas series en alta frecuencia, se recomienda resolver numéricamente la Integral de Pollaczek (3.2) en el caso de altas frecuencias.

3.5 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO HÍBRIDO PARA EL CÁLCULO DE Z_T

En esta sección se propone un algoritmo híbrido para calcular la impedancia de retorno por tierra (Z_T) de manera eficiente, precisa y confiable aplicable en cualquier caso práctico de análisis de cables subterráneos (es decir en el amplio rango). Este algoritmo se denomina híbrido porque plantea una solución vectorial basada en una expansión en series de (3.6) para baja frecuencia y la integración numérica de (3.5) mediante el método adaptivo de cuadratura de extensión de Kronrod para Gauss Lobatto en alta frecuencia.

Este algoritmo se describe a continuación:

a) *Límite práctico para la aplicación de la solución en series e integración numérica*

En la sección anterior se mencionaron las discrepancias en las referencias [4,11] para el establecimiento del rango de aplicación de la solución en series. Mas aún, estos rangos de aplicación están muy acotados y en algunos casos la solución suele no ser muy precisa. Sin embargo, en esta tesis se encontró, después de un análisis comparativo basado en el criterio del error relativo porcentual, un criterio práctico aceptable y confiable para establecer un límite para la aplicación de la solución en series e integración numérica del algoritmo híbrido en el amplio rango.

Por un lado, se observa que tanto la integral de Wedepohl (3.5) como la solución en series de Wedepohl (3.6) son función de las variables físicas D , p , x y h . A su vez, el término D es función de las variables físicas x y h , como se muestra a continuación:

$$D = \sqrt{x^2 + (2h)^2} \quad (3.13)$$

Con base en lo anterior, se propone utilizar el factor $|D/p|$ para establecer un límite práctico de aplicación de la solución en series e integración numérica, dado que en cierta manera la variable D sustituye a través de (3.13) las variables físicas x y h . Para encontrar el límite práctico se considera el sistema mostrado en la Fig. 2.1a, en el cual se muestra un sistema de tres cables subterráneos con los datos indicados en la tabla I.

TABLA I
VARIABLES FÍSICAS, RESISTIVIDAD DEL SUELO Y RANGO DE FRECUENCIAS PARA EL SISTEMA DE LA FIG. 2.1a.

<i>Variables Físicas del Sistema</i>	
x	15.2 cm
$h_1 = h_2$	76 cm
<i>Parámetros EM del Suelo</i>	
ρ_{suelo}	$20 \Omega\text{-m}$
<i>Rango de Frecuencias</i>	
$1 \text{ Hz} \leq f \leq 1 \text{ MHz}$	

Usando los parámetros de la Tabla I, se hace una comparación basada en el criterio del error relativo porcentual entre la solución en series (3.6) e integración numérica de I_w (3.5), aquí considerada como la función exacta. Los errores encontrados se muestran entonces en la Fig. 3.2.

Criterio del error relativo porcentual:

$$\% \varepsilon_{rel} = 100 \left| 1 - \frac{S_w}{I_w} \right| \quad (3.14)$$

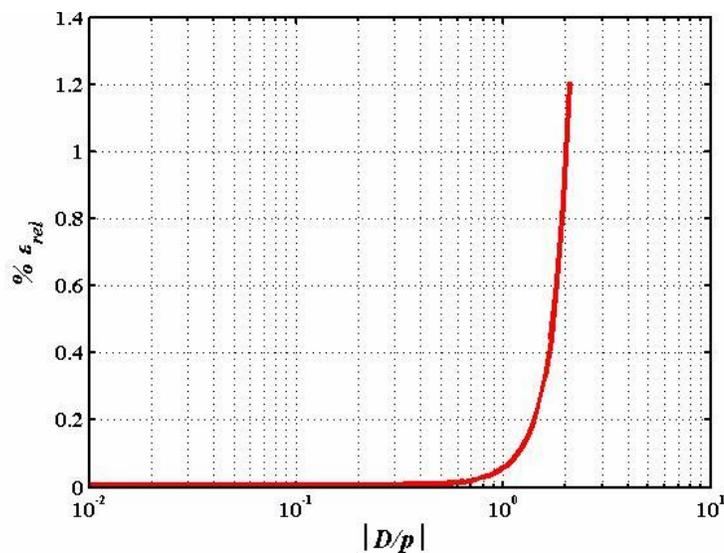
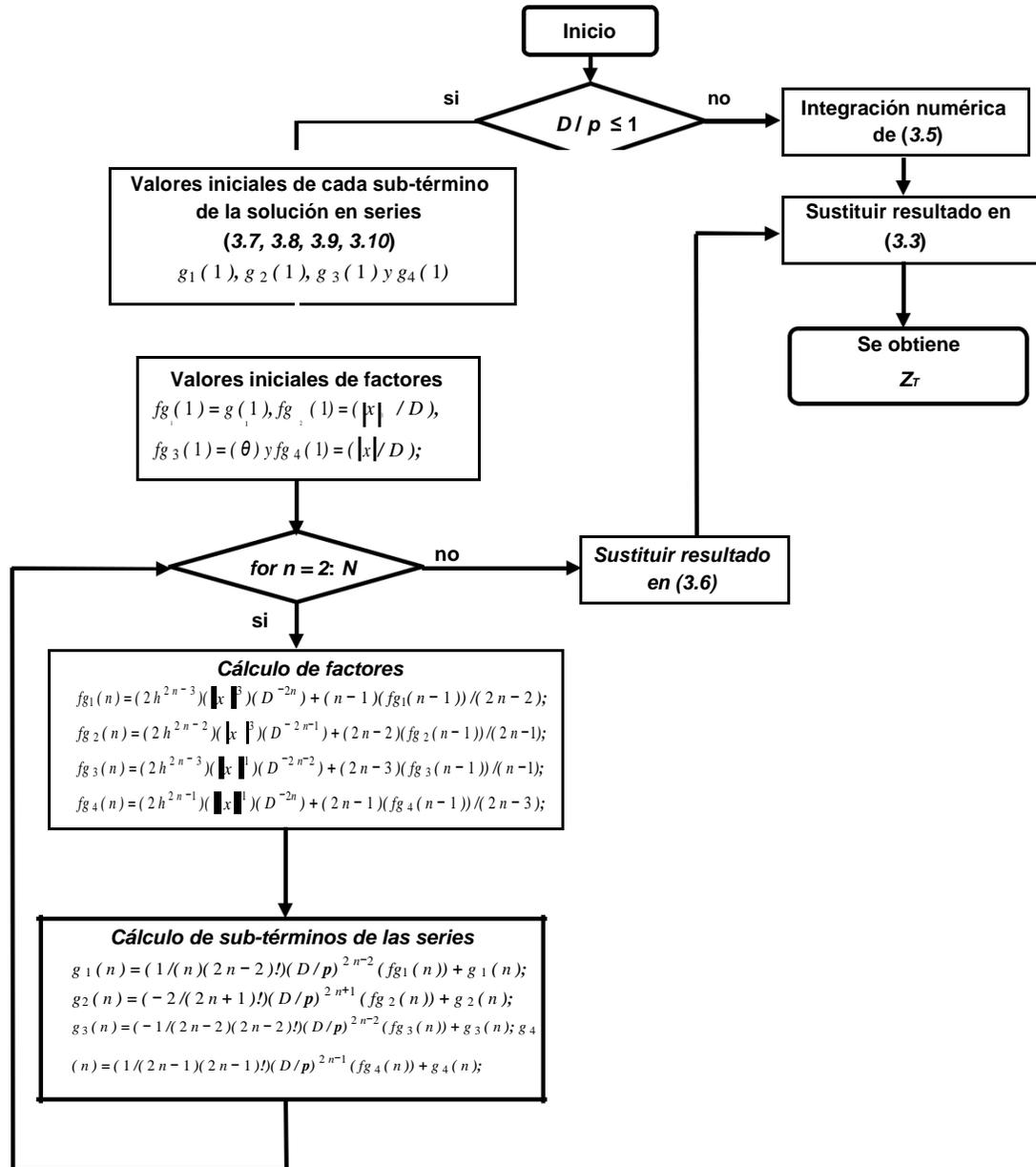


Fig. 3.2: Error relativo porcentual de la solución en series de Wedepohl (3.6) con respecto a la integración numérica de I_w (3.7).

En la Fig. 3.2 se observa que el error relativo porcentual se incrementa exponencialmente cuando se tienen valores de $|D/p| > 1$. Por lo que el límite práctico para aplicación de la solución en series (3.6) es $D/p \leq 1$ y el límite para la integración numérica de I_w (3.5) es $D/p > 1$.

b) Descripción del algoritmo híbrido (Diagrama de Flujo).



donde,

N = número de iteraciones.

3.6 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO HÍBRIDO EN MPLIO RANGO

En las secciones anteriores se ha dejado planteado que la impedancia de retorno por tierra (Z_T) propia y mutua es función de las cantidades físicas (h , x , σ y ω) y cantidades eléctricas (p) del sistema. Se pueden relacionar estas cantidades físicas y eléctricas del sistema en función de los parámetros adimensionales, como se muestra a continuación:

$$\xi = \frac{2h}{|p|}, \quad \eta = \frac{x}{2h} \quad \text{y} \quad \chi = \frac{h_i - h_j}{h_i + h_j} \quad (3.15)$$

En las Tablas II y III se proporcionan rangos prácticos de valores para las cantidades físicas y eléctricas del sistema. Posteriormente, con estos rangos se calculan los parámetros adimensionales (ξ , η y χ). Estos rangos de variación fueron extraídos de la literatura especializada y a su vez, comprenden la mayoría de los casos de interés práctico.

TABLA II

RANGOS DE VARIABLES FÍSICAS

0.1	\leq	h	\leq	10^2	[m]
2π	\leq	ω	\leq	$2\pi \times 10^6$	[rad/s]
10^{-4}	\leq	σ	\leq	1	[S/m]
10^{-2}	\leq	x	\leq	10^3	[m]

TABLA III

PARÁMETROS ADIMENSIONALES

10^{-5}	\leq	ξ	\leq	10^3
10^{-3}	\leq	η	\leq	10^3
0	\leq	χ	\leq	1

La parametrización de Z_T y J en términos de ξ , η y χ sirve para obtener mapas de amplio rango con solo variar estas cantidades dentro de los rangos mostrados en la Tabla III.

A continuación se plantean las ecuaciones de Z_T (3.1) y J (3.4) en función de los parámetros adimensionales (ξ , η y χ).

La ecuación (3.1) referente al cálculo de Z_T se escribe como:

$$Z_T(\xi, \eta, \chi) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[K_0(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{\chi^2 + \eta^2}) - K_0(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2}) \right] + J(\xi, \eta) \quad (3.16)$$

donde los argumentos de las funciones de Bessel son expresados como:

$$D/p = \sqrt{h^2/p^2 + x^2/p^2} = j\sqrt{\xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \quad (3.17)$$

$$d/p = x/p = j\sqrt{\xi} \cdot \sqrt{\chi^2 + \eta^2} \quad (3.18)$$

Esta parametrización es válida para cualquier configuración física de cables subterráneos.

La ecuación (3.4) contiene los términos de Wedepohl obtenidos de la descomposición de Pollaczek y se puede escribir en función de ξ y η como:

$$J(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{(\sqrt{j} \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^2} \right) \cdot K_0(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2}) + \left(\frac{(\xi)^2}{(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^3} + \frac{2 \cdot (\xi\eta)^2}{(\sqrt{j} \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^3} \right) \cdot K_1(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2}) - \left(\frac{(\xi)^2}{(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^4} + \frac{(\xi)^3}{(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^4} \right) \exp(-\sqrt{j} \cdot \xi) + \left(\frac{2 \cdot (\xi\eta)^2}{(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^4} + \frac{2 \cdot (\xi\eta^2)}{(\sqrt{j} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 + \eta^2})^4} \right) \exp(-\sqrt{j} \cdot \xi) - I_w(\xi, \eta) \quad (3.19)$$

donde el término I_w descrito en la ecuación (3.6) puede ser escrita en términos adimensionales de ξ y η como se muestra a continuación:

$$I_w = - \frac{\eta}{j \cdot 1 + \eta^2} \int_0^1 \left(\sqrt{1-t} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) \exp(-\sqrt{j \cdot \xi} t) dt \quad (3.20)$$

donde,

$$t = \frac{2h}{D} = \frac{1}{j \cdot 1 + \eta^2} \quad (3.21)$$

Por lo que la solución en Series de Wedepohl en función de los parámetros adimensionales de ξ y η se puede escribir como:

$$S_w(\xi, \eta) = g_1 - g_2 - g_3 + g_4 \quad (3.22)$$

en donde los términos g_1 , g_2 , g_3 y g_4 en función de ξ y η se describen a continuación:

$$g_1(\xi, \eta) = \left[\theta - \frac{\xi \cdot |\xi \cdot \eta|}{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2} + \frac{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2}{2(2!)} \frac{(\xi) |\xi \cdot \eta|_3}{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^4} + \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\xi \cdot |\xi \cdot \eta|}{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2} \right) + \frac{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^4}{3(4!)} \frac{(\xi)^3 |\xi \cdot \eta|_3}{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^6} + \frac{3}{4} \frac{(\xi) |\xi \cdot \eta|_3}{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^4} + \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\xi \cdot |\xi \cdot \eta|}{\left(\sqrt{j \cdot \xi} \cdot \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2} \right) + \dots \right] \quad (3.23)$$

$$g_2(\xi, \eta) = \frac{2 \binom{j\xi + 1 + \eta^2}{3} \frac{|\xi\eta|_3}{\sqrt{3(1!)}}}{\sqrt{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{2}^3}} \quad (3.24)$$

$$- \frac{2 \binom{j\xi + 1 + \eta^2}{5} (\xi)^2 \sqrt{|\xi\eta|_3}}{\sqrt{5(3!)}} \frac{2}{3} \frac{|\xi\eta|_3}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{3}} + \dots$$

$$- \frac{2 \binom{j\xi + 1 + \eta^2}{7} (\xi)^4 \sqrt{|\xi\eta|_3}}{\sqrt{7(5!)}} \frac{4}{5} \frac{\sqrt{(\xi)^2 |\xi\eta|_3}}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{5}} + \frac{2}{3} \frac{|\xi\eta|_3}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{3}} + \dots$$

$$g_3(\xi, \eta) = -\{\theta\} \quad (3.25)$$

$$- \frac{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{2} (\xi) |\xi\eta|}{\sqrt{2(2!)}} \frac{1}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{2}} + \theta$$

$$- \frac{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{4} (\xi)^3 \sqrt{|\xi\eta|_3}}{\sqrt{4(4!)}} \frac{3}{2} \frac{(\xi) |\xi\eta|}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{2}} + \theta + \dots$$

$$g_4(\xi, \eta) = \frac{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{1} |\xi\eta|}{\sqrt{\sqrt{j\xi + 1 + \eta^2}}} \quad (3.26)$$

$$+ \frac{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{3} \sqrt{(\xi)^2 |\xi\eta|}}{\sqrt{3(3!)}} \frac{2}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{3} + 1} \frac{|\xi\eta|}{\sqrt{j\xi + 1 + \eta^2}}$$

$$+ \left(\frac{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{5} (\xi)^4 |\xi\eta|}{\sqrt{5(5!)}} \frac{4}{3} \frac{(\xi)^2 |\xi\eta|}{\binom{j\xi + 1 + \eta^2}{3}} + \frac{2}{1} \frac{|\xi\eta|}{\sqrt{j\xi + 1 + \eta^2}} \right) + \dots$$

donde el ángulo θ descrito en (3.11) se calcula mediante:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{j} \cdot \sqrt{1+\eta^2}}\right) \quad (3.27)$$

3.7 VALIDACIÓN DEL ALGORITMO HÍBRIDO EN AMPLIO RANGO

En esta sección se procede a la validación del algoritmo híbrido aquí propuesto, que emplea la solución en series para baja frecuencia e integración numérica adaptiva en alta frecuencia, con respecto al método de Gauss-Lobatto en cuadratura (a través del comando “*quadl*” de Matlab v7) [23]. Para esta validación se evalúa primero el error *rms* (de sus siglas en inglés *root medium square*), considerando tiempos de cómputo entre cada técnica y posteriormente, en la siguiente sección, se revisan los criterios de estabilidad, precisión y convergencia numérica del algoritmo.

En la Fig. 3.3 se muestran las componentes reales e imaginarias de J en (3.2), calculados en el amplio rango de las variables normalizadas en la tabla III, utilizando el algoritmo híbrido (línea sólida en color gris) y el método de integración numérica directa de Gauss-Lobatto (línea sólida en color negro) [23].

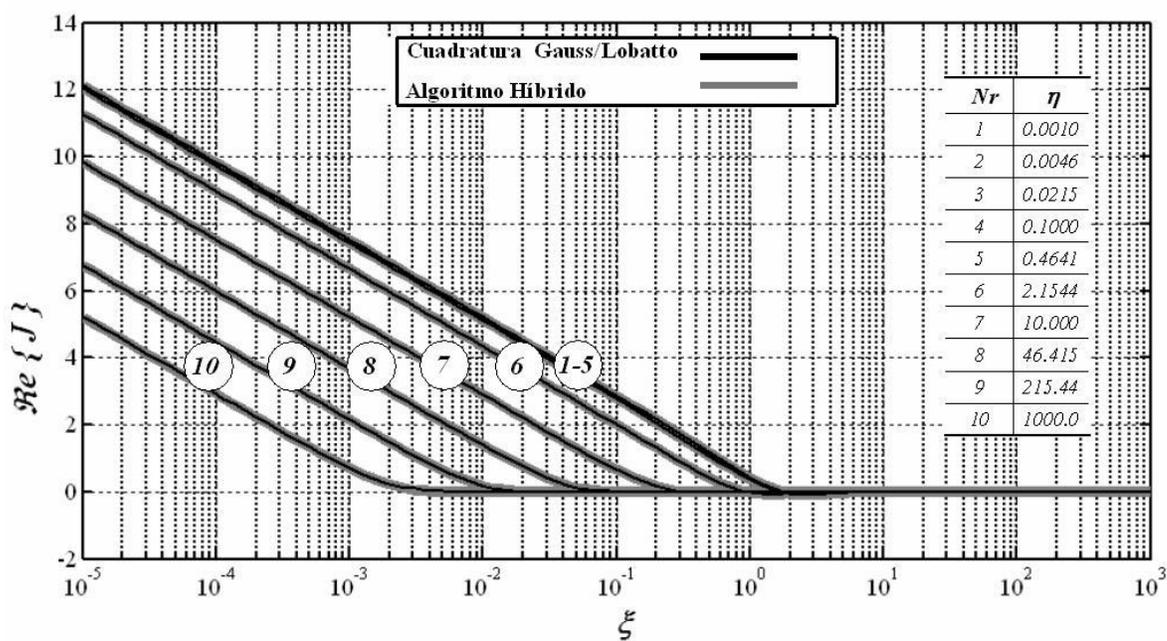
A primera vista prácticamente no se observan diferencias entre los resultados obtenidos con ambas técnicas. Por otra parte en la Fig. 3.4 se muestran las impedancias de tierra evaluadas en el amplio rango mediante dichas técnicas. De igual forma no se muestran diferencias relativas entre ambas familias de curvas de impedancia de tierra.

En la Fig. 3.5 se muestran los errores *rms* calculados entre dichas técnicas.

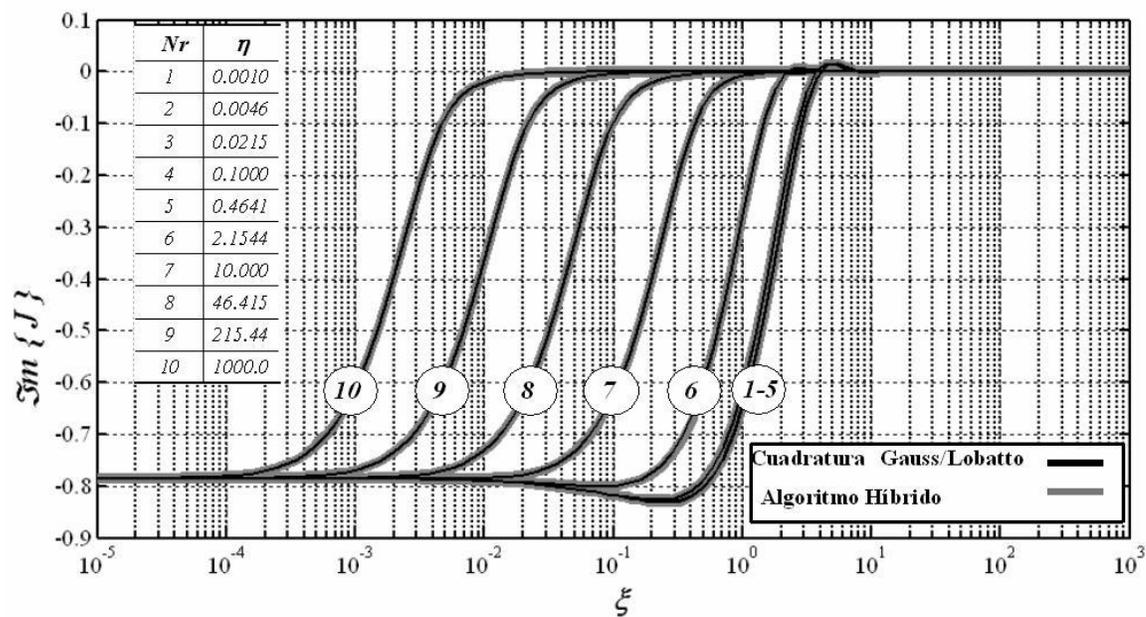
Para la obtención de los resultados mostrados en la Fig. 3.3 y Fig. 3.4, mediante el algoritmo híbrido se requirieron solo de 8 iteraciones ($N = 8$) para procesar la solución en series y se utilizó para la integración numérica en alta frecuencia una tolerancia de 10^{-6} .

Por otra parte, para obtener la solución mediante el algoritmo de Gauss-Lobatto se utiliza una tolerancia equivalente de 10^{-6} .

Para el procesamiento de estos resultados la computadora utilizada en las simulaciones es una Pentium IV, 2.20GHz y 512MB de Ram.



a)

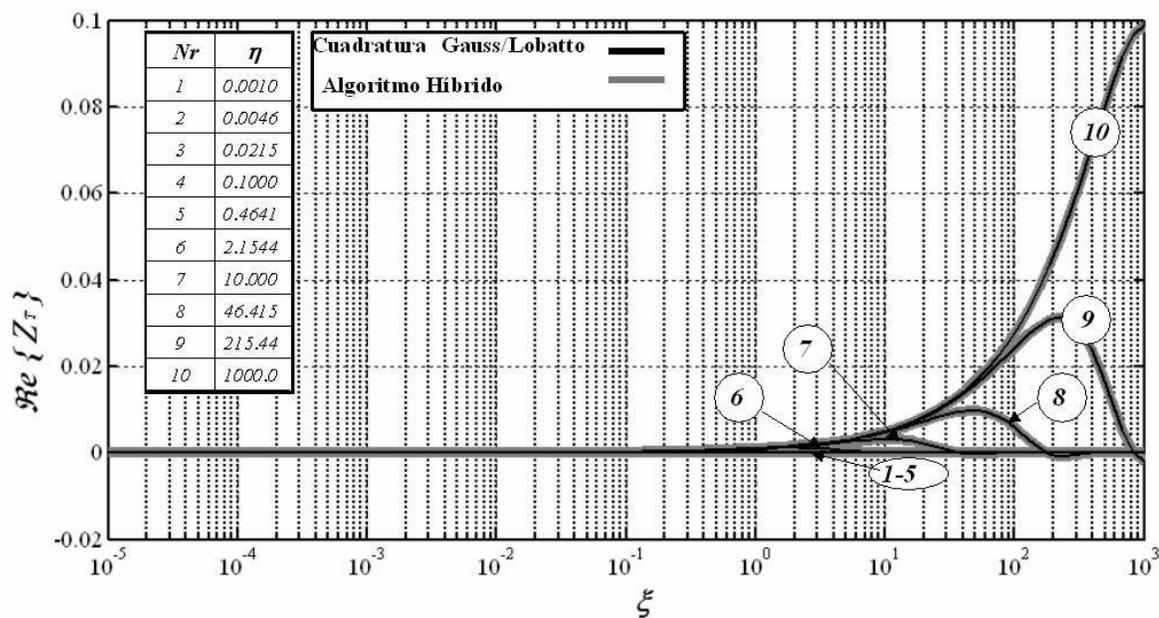


b)

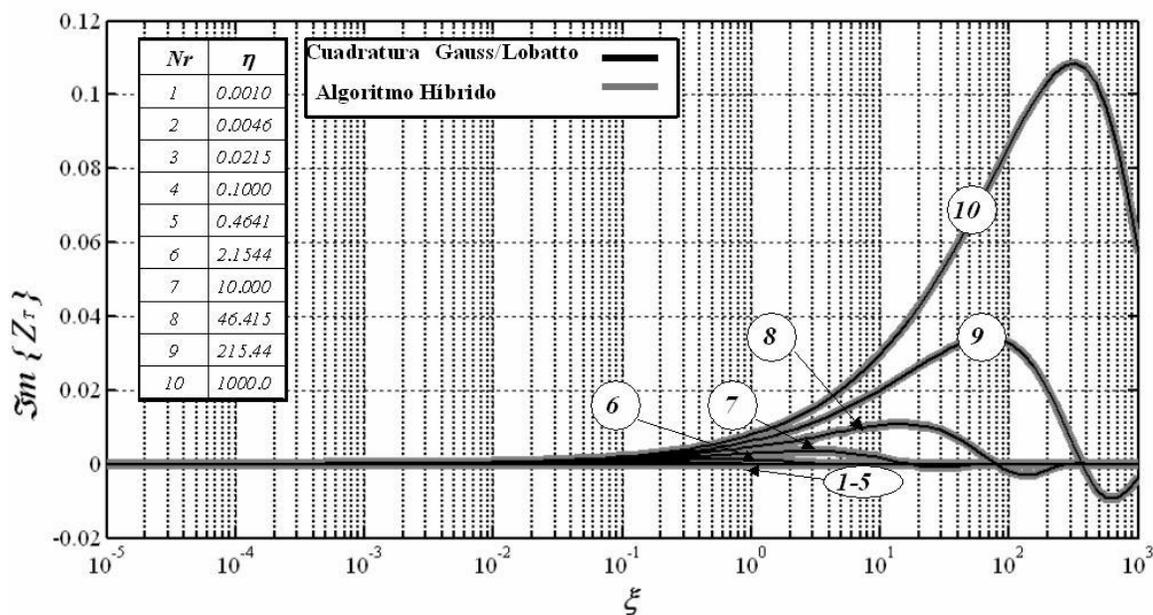
Fig. 3.3: Tablas de soluciones de la integral de Pollaczek en amplio rango.

a) Componente real. b) Componente imaginaria.

En la Fig. 3.4 se muestran las componentes real e imaginaria Z_T (3.1). Se considera que la disposición del sistema de cables es horizontal, por lo que $\chi = 0$. Al igual que la Fig. 3.3 no se observan diferencias a simple vista entre los resultados obtenidos con ambos algoritmos.



a)



b)

Fig. 3.4: Tablas de soluciones de Z_T . a) Componente real y b) Componente imaginaria.

La precisión del algoritmo híbrido depende del número de iteraciones en baja frecuencia y del valor de la tolerancia en alta frecuencia, mientras que la precisión del algoritmo de Gauss-Lobatto depende solamente del valor de la tolerancia fijada en el método. En la Fig. 3.5 se obtienen las gráficas de la parte real e imaginaria de los errores *rms* para diferentes tolerancias con respecto de la variable adimensional η . Se considera para el algoritmo híbrido un total de 8 iteraciones en baja frecuencia, mientras que la tolerancia se varía conforme: 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} , 10^{-7} y 10^{-8} para alta frecuencia. Del mismo modo que el algoritmo híbrido, en la integración numérica de Pollaczek con Gauss-Lobatto se usan las mismas tolerancias para una comparación cualitativa. En ambas gráficas se observa que el error se incrementa directamente proporcional conforme la variable adimensional η .

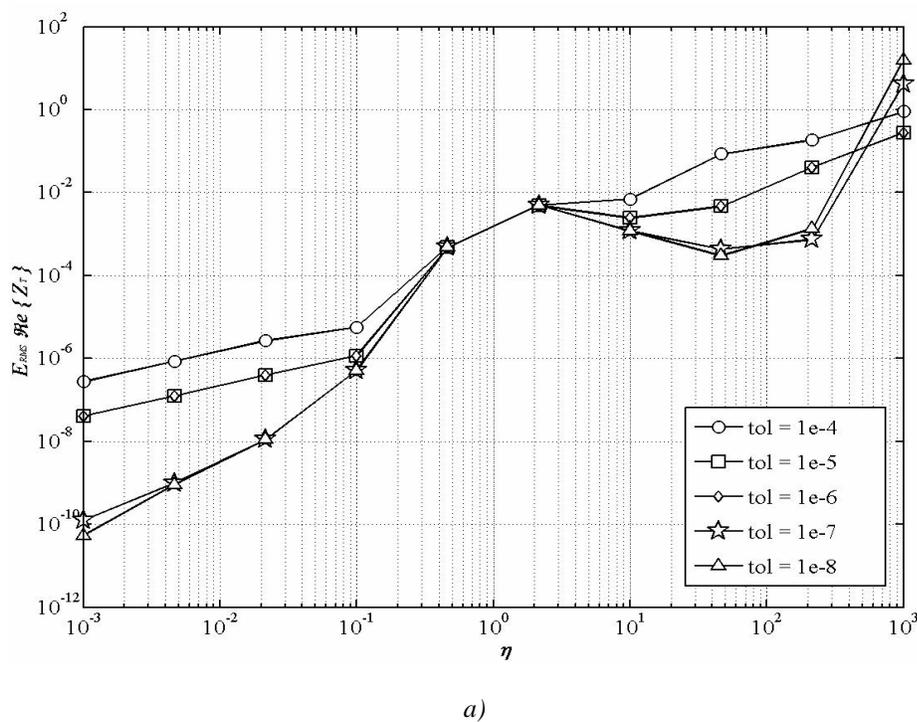
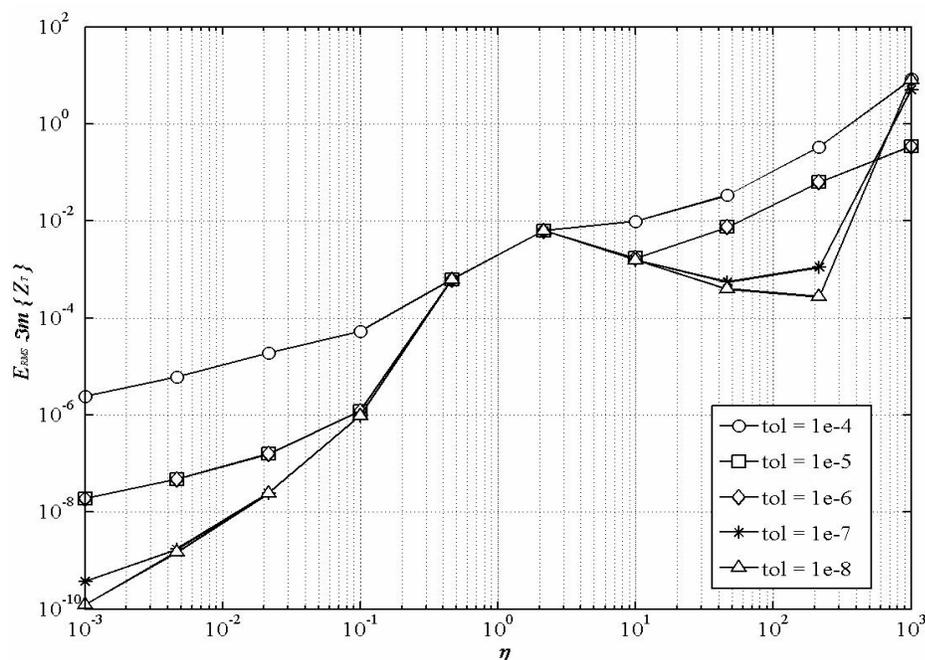


Fig. 3.5: a) Componente real.



b)

Fig. 3.5: Error *rms* en el cálculo de Z_T mediante el algoritmo híbrido y el algoritmo de Gauss-Lobatto para diferentes tolerancias. a) Componente real. b) Componente imaginaria.

La Tabla IV muestra los tiempos de procesamiento requeridos en la evaluación de amplio rango mediante el método de Gauss-Lobatto y el algoritmo híbrido.

TABLA IV

TIEMPOS COMPUTACIONALES OBTENIDOS EN AMPLIO RANGO

Tolerancia	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
Gauss-Lobatto (seg.)	25.4531	45.2656	61.8906	78.4219	95.6094
Algoritmo híbrido (seg.)	4.3594	4.0265	4.0313	4.1250	4.0938

Al comparar los resultados obtenidos de la Tabla IV y la Fig. 3.5 se observa que la mejor tolerancia en el sentido de precisión y tiempo de cómputo para el método de Gauss-Lobatto es de 10^{-6} .

Se observa que al aumentar la tolerancia del método, el tiempo de cómputo requerido por el algoritmo híbrido disminuye. Sin embargo, estos tiempos de cómputo no varían mucho entre una tolerancia y otra, lo cual refleja la aplicación de las series en la solución

total. Se demuestra también, en base a la Tabla IV que la eficiencia computacional del algoritmo híbrido es mayor que el de Gauss-Lobatto.

3.7.1 ESTABILIDAD, PRECISIÓN Y CONVERGENCIA DEL ALGORITMO HÍBRIDO

Considérese ahora para la prueba de convergencia, estabilidad y precisión del algoritmo híbrido los valores mostrados en la Tabla V para los parámetros normalizados ξ y η . Estos valores forman el punto frontera en el plano ξ - η en el cual se aplican la solución en series de (3.6) mediante el algoritmo híbrido propuesto por el autor de esta tesis y mediante la integración numérica directa de (3.5). En este punto frontera la aplicación de ambos esquemas numéricos está determinado por la relación $D/p = 1$.

TABLA V

PUNTOS FRONTERA EN FUNCIÓN DE LAS VARIABLES ADIMENSIONALES ξ Y η

<i>Caso</i>	ξ	η	<i>Técnica</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>Solución series</i>
<i>2</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>Integración numérica</i>

A continuación se muestran los resultados de valores obtenidos de la convergencia para el punto ξ y η seleccionado mediante los dos métodos de solución en series e integración numérica como parte del algoritmo híbrido.

Caso I: Solución en series

Para mostrar que la implementación en series es altamente eficiente considere, la siguiente solución de S_w como caso de referencia con 50 iteraciones.

$$S_w : 0.\underline{59301981051303}$$

En la Tabla VI se muestra la convergencia rápida y directa de las series de Wedepohl implementada por medio del algoritmo híbrido propuesto por el autor.

TABLA VI

PRECISIÓN, ESTABILIDAD Y ESFUERZO COMPUTACIONAL DE SOLUCIÓN EN SERIES DEL CASO I

No. Iter.	Solución Series	Error ($\% \epsilon_{rel}$)	Err/Iter.	Tiempo (Segs)
1	0.83579290844616	3.67654e+001	36.765384083	0.0313
2	0.62429370237996	8.57964e+000	4.289819793	0.0313
3	0.58840458254107	8.80505e-001	0.293501653	0.0469
4	0.59290434581259	4.75096e-002	0.011877411	0.0469
5	0.59302877008926	1.64246e-003	0.000328491	0.0469
6	0.59301990083027	3.95690e-005	0.000006595	0.0469
7	0.59301980664152	7.06471e-007	0.000000101	0.0469
8	0.59301981049095	9.76010e-009	0.000000001	0.0625

En esta Tabla se muestran las magnitudes de la solución en series desde 1 hasta 8 iteraciones. El criterio de error elegido es el relativo porcentual (3.14) con respecto al caso base de 50 iteraciones realizadas en 0.1406 seg. en esta sección. Adicionalmente, se muestra la relación error / número de iteraciones y así como el tiempo de computo requerido para realizar dichas tareas.

En la Tabla VI se observa que el mínimo error absoluto relativo porcentual se tiene en la octava iteración de la solución en series. En cuanto al tiempo de procesamiento se observa que esta tarea requiere de 0.0625 seg., con lo cual se observa que la solución en series converge rápidamente en forma directa. En cuanto a la relación error/ iteraciones se observa que el método es estable, ya que su cadencia numérica es monótona decreciente sin presentar puntos inestables durante todo el proceso de iteraciones.

Caso II: Integración numérica

A continuación como caso base para la integración numérica se considera a solución de la integral de Wedepohl con una tolerancia de 10^{-10} .

$$I_w : 0.55021504340276$$

TABLA VII
 PRECISIÓN, ESTABILIDAD Y ESFUERZO COMPUTACIONAL PARA EL
 MÉTODO INTEGRACIÓN NUMÉRICA DEL CASO II

Tol.	Integración Numérica	Error (% ϵ_{rel})	Número de operaciones	Err/Tol.	Tiempo (Segs)
10^{-4}	0.55029834328328	1,51e-02	198	151.3722	0.03100
10^{-5}	0.55021835918254	6,02e-04	228	60.2630	0.01600
10^{-6}	0.55021505950542	2,92e-06	288	2.92621	0.01500
10^{-7}	0.55021505594979	2,28e-06	348	22.8039	0.01600
10^{-8}	0.55021504343584	6,01e-09	498	0.60122	0.01500
10^{-9}	0.55021504340438	2.94e-10	648	0.29444	0.03100

En la tabla VII se muestran las soluciones de la integración numérica directa de I_w en valores absolutos para seis distintos valores de tolerancias. El error relativo porcentual se observa menor para la tolerancia 1×10^{-9} . El valor de este error decrece proporcionalmente conforme a la tolerancia del método de Gauss-Lobatto. Por otra parte, como es de esperarse, el tiempo de procesamiento se incrementa conforme aumenta el número de operaciones requeridas por este método. Finalmente, la relación error/ tolerancia muestra en parte la estabilidad típica correspondiente a los métodos en cuadratura adaptiva.

Cabe mencionar, que existe una discrepancia de 4×10^{-2} entre los últimos valores de la solución en series (3.6) y la integración numérica (3.5) mostrados en las tablas VII y VII, respectivamente. Dicha discrepancia se debe a que en el punto frontera $\xi = \eta = 1$ se obtiene el error relativo porcentual máximo para la solución en series.

El error relativo porcentual en el punto frontera de las series (50 iteraciones) y la integración numérica (1×10^{-10} de tolerancia) es:

$$\% \epsilon_{rel} = 100 \frac{|S_w|}{|I|} = 100 \frac{0.55021504340276}{0.59301981051303} = 7.22\%$$

Finalmente, este error absoluto relativo porcentual corresponde aproximadamente a una pequeña parte del peso total de todos los términos descritos por Wedepohl en (3.3)

para evaluar la Z_T en (3.1). De tal modo, que si se comparan directamente las ecuaciones de Z_T (3.3) y (3.1) mediante el criterio del error relativo porcentual, este error se reduce aproximadamente a 0.2067%. Lo cual indica que la precisión del algoritmo híbrido es muy buena.

3.8 FÓRMULAS CERRADAS DE APROXIMACIÓN

Después del planteamiento de Pollaczek en 1926 para el cálculo Z_T , diversos autores han propuesto fórmulas cerradas de aproximación [4-5, 22, 28]. Algunas de las más utilizadas en aplicaciones del EMTP son las propuestas por Wedepohl, Ametani y Semlyen [1-9,22].

En 1973 Wedepohl y Wilcox en [4,11] proponen la ecuación (3.12) para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra propia y mutua válida para $h \leq 1$ m, $d \leq 1$ m y $|d/p| > 0.25$. Como bien se comentó en secciones anteriores que esta fórmula se deriva de la solución en series propuesta por dichos autores.

Otra aproximación importante muy utilizada en aplicaciones del EMTP es la de Ametani. En esta, se remplace la integral de Pollaczek (3.2) por la integral de Carson asumiendo que [2]:

$$h \cdot \sqrt{\beta^2 + 1/p^2} \cong h \cdot |\beta| \quad (3.28)$$

En 1982, Wedepohl propuso una fórmula intuitiva para el cálculo de Z_T propia de un cable enterrado. La fórmula esta basada en profundidad de penetración compleja de los campos electromagnéticos en la tierra. Después, en 1985 Semlyen reportó dicha fórmula como [28]:

$$Z_T(\omega) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \cdot \log^{-1} + \frac{p}{r_{Ext}} \quad (3.29)$$

donde

r_{Ext} es el radio externo del cable.

Recientemente, Saad, Gaba y Giroux publicaron una fórmula cerrada de aproximación basada en el plano complejo de tierra y el teorema de la integral de Cauchy [22]. El proceso de derivación de esta fórmula es muy similar al método de

imágenes complejas de Gary-Dubanton en [30,31] y Deri, Tevan, Semlyen y Castanheira en [29] empleado para obtener el modelo simplificado de la integral de Carson para el cálculo de Z_T de líneas aéreas.

$$Z_T(\omega) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[K_0(d/p) + \frac{2}{4 + (x/p)} \exp(-h/p) \right] \quad (3.30)$$

3.9 CASOS DE ESTUDIO

Usando las fórmulas cerradas de aproximación de la sección 3.8 y tomando como referencia el algoritmo híbrido, se calculará la impedancia de retorno por tierra (Z_T) propia y mutua para los lazos de corriente en el sistema de cables subterráneo mostrado en la Fig. 2.1a (considerado caso base de referencia).

3.9.1 SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE CABLES SUBTERRÁNEOS.

El sistema de transmisión de cables concéntricos propuesto por Wedepohl y Wilcox se muestra en la Fig. 2.1a. En dicho sistema se considera un corte transversal con las dimensiones físicas como se ilustra en la siguiente Fig. 3.6.

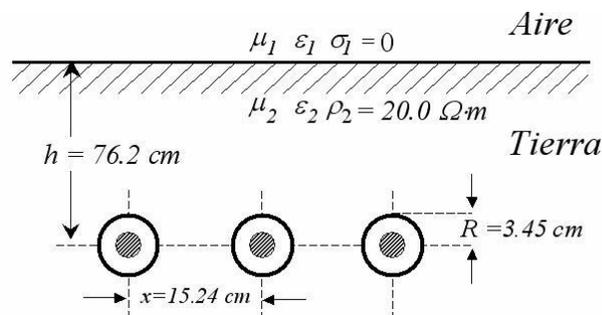
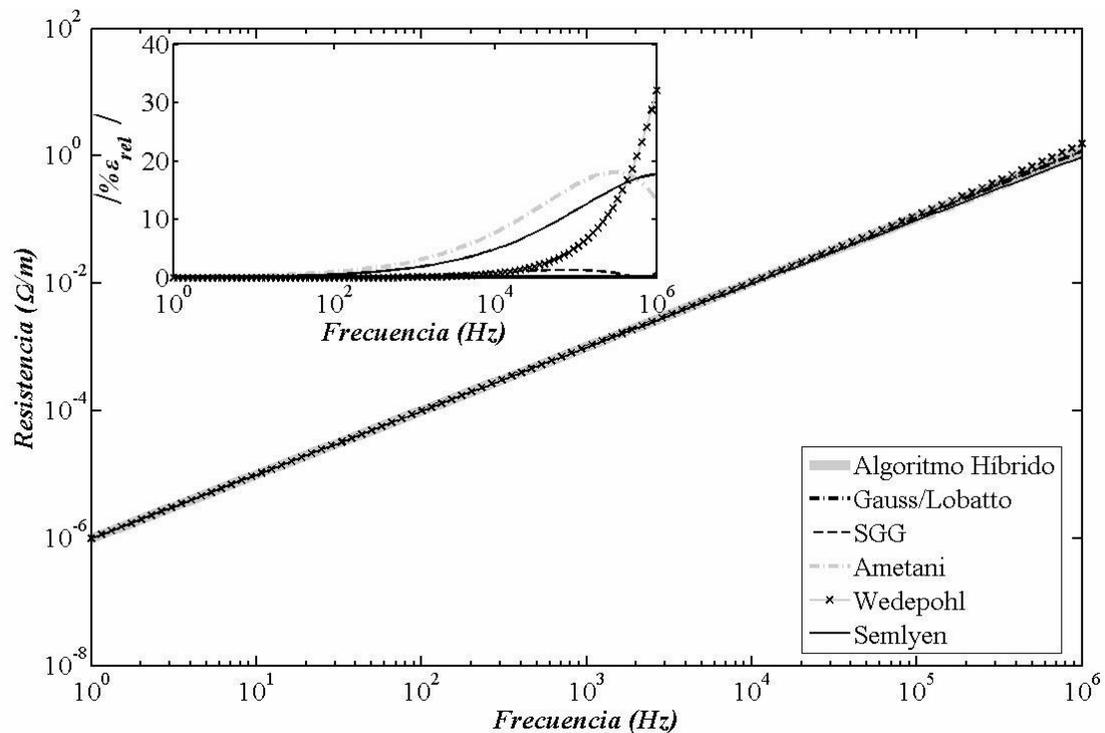
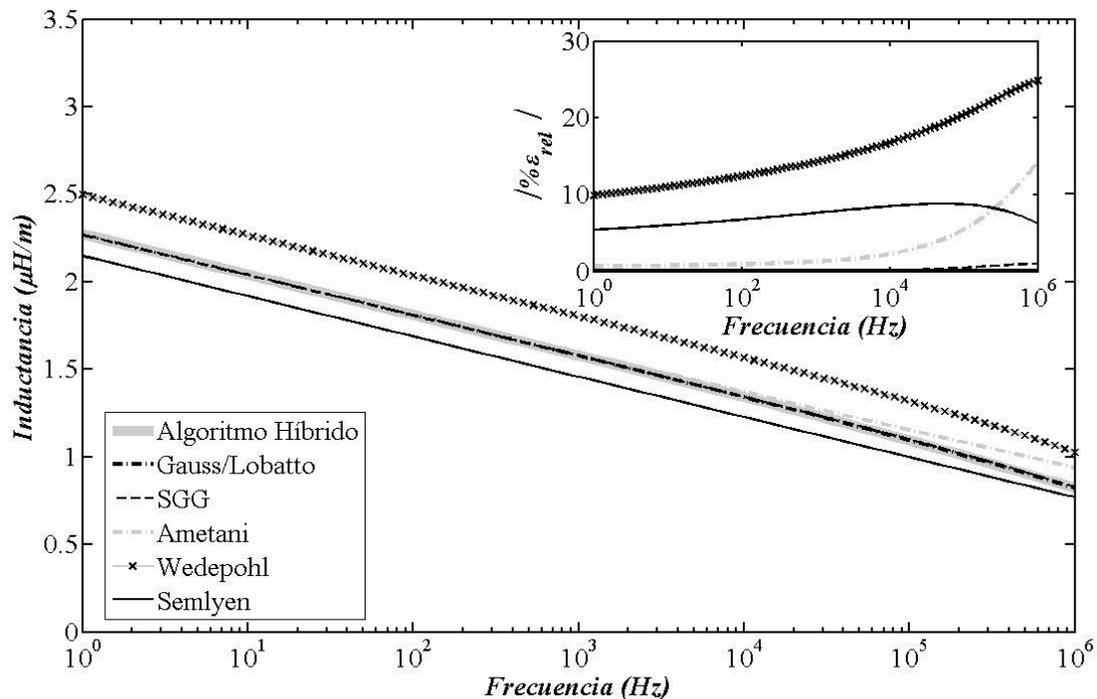


Fig. 3.6. Sección transversal de un sistema de cables subterráneos.

En la Fig. 3.7 y Fig. 3.8 se muestran ambas componentes de resistencia (Ω/m) e inductancia ($\mu H/m$) para Z_T propia y mutua, respectivamente. Las comparaciones efectuadas entre cada una de éstas gráficas se establecen mediante el criterio del error relativo porcentual.



a)



b)

Fig. 3.7: Z_T propia para el sistema de cables de la Fig. 2.1, calculada con el algoritmo híbrido, Gauss-Lobatto y fórmulas aproximadas con errores relativos. a) Resistencia, b) Inductancia.

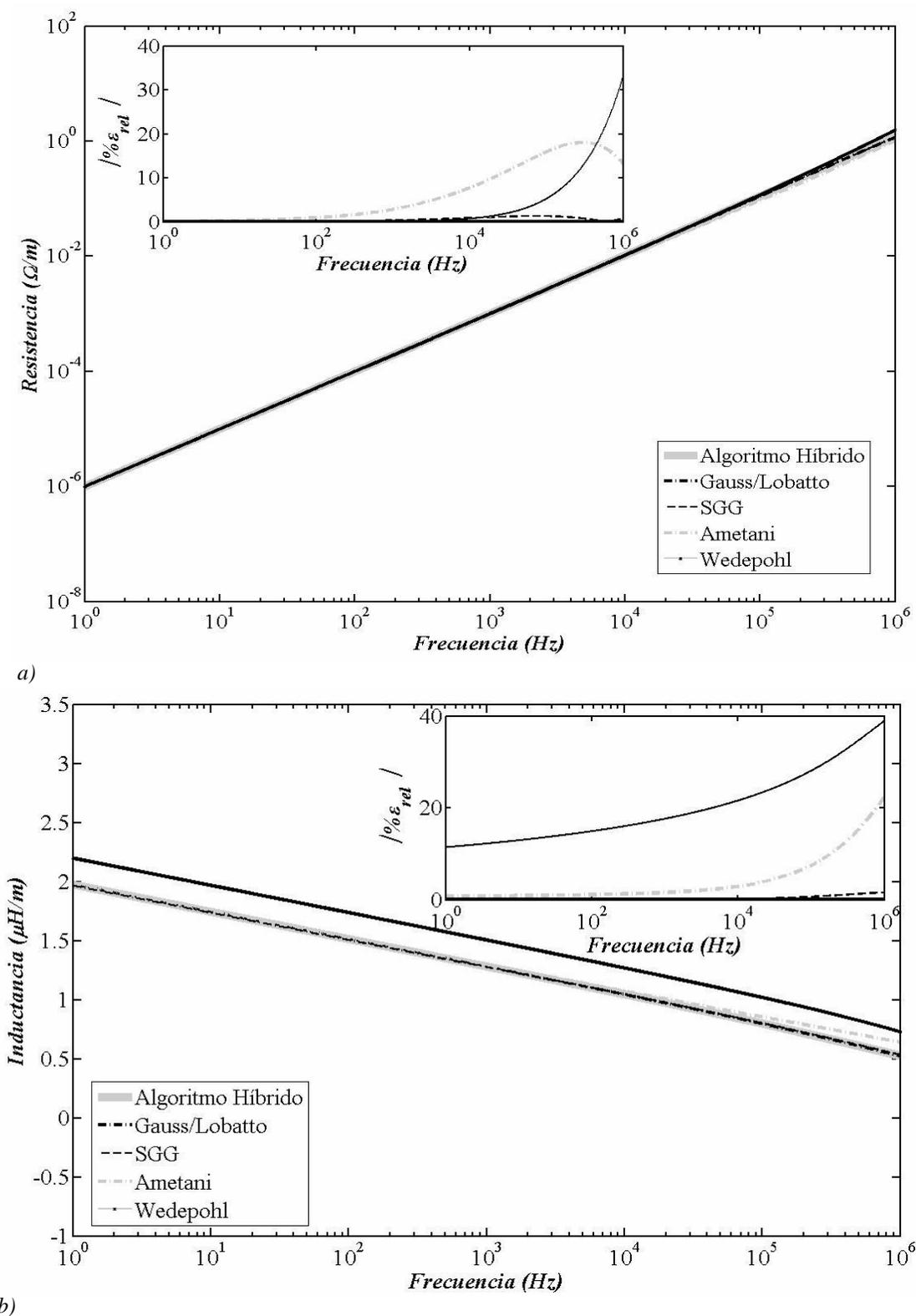


Fig. 3.8. Z_T mutua para el sistema de cables de la Fig. 2.1, calculada con el algoritmo híbrido, Gauss-Lobatto y fórmulas aproximadas con errores relativos. a) Resistencia, b) Inductancia.

Los resultados mostrados en las Fig. 3.6 y Fig. 3.7 muestran errores menores al 5% para Gauss-Lobatto y Saad-Gaba-Giroux (SGG), mientras que la aproximación cerrada de Wedepohl llega a alcanzar errores de hasta 35% en alta frecuencia para la componente resistiva y 25% de error en alta frecuencia en la componente inductiva. Por lo tanto, el algoritmo híbrido puede servir como excelente herramienta de validación de fórmulas de aproximación.

3.9.2 INDUCCIÓN DE SOBREVOLTAJE EN UN SISTEMA DE TRANSPORTE DE SUMINISTRO DE GAS Y PETRÓLEO.

Existen situaciones en la práctica en las que un sistema de transporte o suministro de agua, gas, petróleo ó comunicaciones comparte el mismo derecho de vía o se encuentra ubicado a cierta distancia de un sistema de transmisión de energía eléctrica por cables subterráneos de baja o alta tensión. Durante condiciones normales de operación, tanto en estado estable como en transitorio, los cables subterráneos inducen voltajes y corrientes entre si y en cualquier otro sistema metálico presente en el entorno.

Más aún, cuando en el sistema de cables subterráneos ocurre una falla franca a tierra, se produce un sobrevoltaje inducido en cualquier sistema vecino, representando así, un peligro inminente. En estas condiciones la precisión en las técnicas de análisis disponibles para el ingeniero analista resultan muy valiosas.

Considere el sistema de transmisión por cables subterráneos de la Fig. 3.9, el cual se encuentra acoplado electromagnéticamente a cierta distancia con una tubería de gas o petróleo y donde la resistividad del terreno es muy baja ($1 \Omega\text{-m}$). Para el cálculo de los lazos de acoplamiento **EM** mutuos entre conductores 3 y 4 se considera una distancia horizontal de 30m y una profundidad de 76.2cm en ambos conductores.

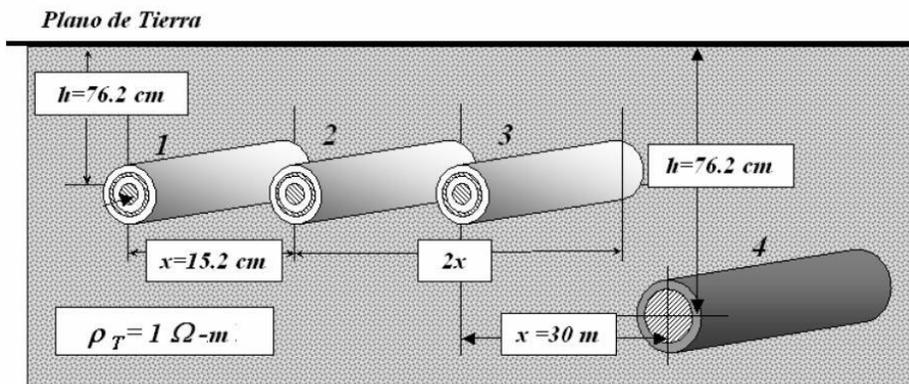
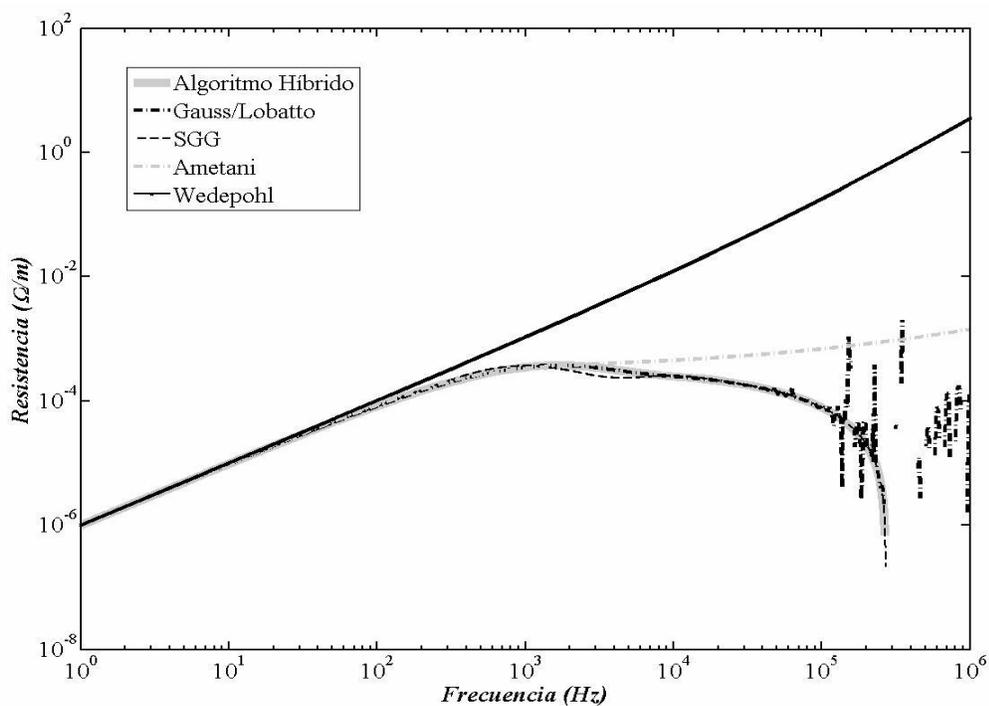


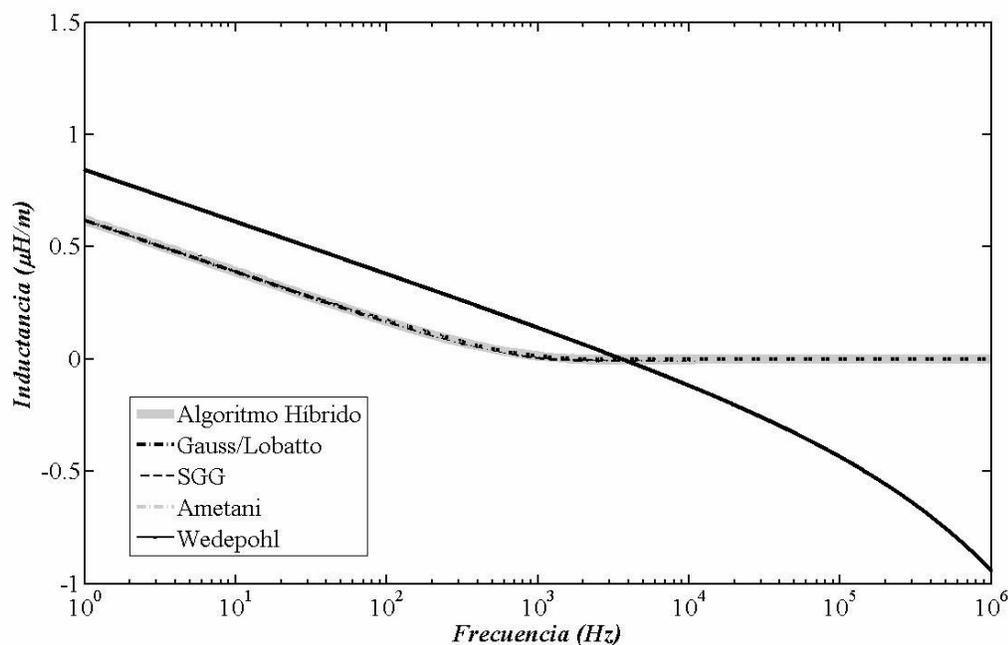
Fig. 3.9. Acoplamiento *EM* entre un sistema de transmisión subterráneo y un ducto de suministro de gas o petróleo

En la Fig. 3.10 a) y b) se muestran las componentes resistivas (Ω/m) e inductivas ($\mu H/m$), respectivamente. A su vez, cada una de las componentes han sido calculadas mediante el algoritmo híbrido, la integración numérica de Gauss-Lobatto y las fórmulas cerradas de aproximación de Saad-Gaba-Giroux, Ametani, Wedepohl y Semlyen [2, 4, 22, 11, 28].



a)

Fig. 3.10: a) Resistencia



b)

Fig. 3.10: Z_T mutua para el sistema de cables de la Fig. 3.9 calculada con el algoritmo híbrido, Gauss-Lobatto y fórmulas aproximadas. a) Resistencia, b) Inductancia.

De los resultados mostrados en la Fig. 3.10 a) y b) se observa que todas las comparaciones del algoritmo híbrido con Gauss-Lobatto y las fórmulas cerradas de aproximación tienen errores muy considerables en alta frecuencia. Adicionalmente, se observa que Gauss-Lobatto oscila en alta frecuencia (Ver Fig. 3.10a), probablemente debido a que se requiere mayor tiempo de procesamiento disminuyendo la tolerancia. Al igual que en el caso de estudio a) presentado en esta misma sección, Gauss-Lobatto es la metodología que presenta mayor precisión en el rango de baja frecuencia, mientras que la fórmula cerrada de Wedepohl es la que presenta menor precisión durante todo el rango de frecuencias.

3.10 CONCLUSIONES

Mediante la combinación de la versión aquí implementada de las series de Wedepohl y el método adaptivo de integración numérica de Gauss-Lobatto se desarrolló un algoritmo híbrido capaz de calcular de manera precisa, eficiente y confiable la

impedancia de retorno por tierra en sistemas de cables subterráneos. Este algoritmo resulta muy preciso porque los errores máximos que se tienen en los puntos frontera para un amplio rango son de aproximadamente 0.21 %. A su vez, el algoritmo es eficiente porque siempre se requiere de menor tiempo de cómputo cuando se compara con Gauss-Lobatto (segundo método más preciso) en amplio rango. La eficiencia del algoritmo se debe en parte a la combinación de la solución vectorizada en series para el rango de baja frecuencia y la integración numérica adaptiva de Gauss-Lobatto para el rango de alta frecuencia. Además, el algoritmo es confiable porque se han obtenido resultados satisfactorios para el rango más amplio de aplicaciones reportado en la literatura especializada para modelos de suelos homogéneos.

A partir de las soluciones de amplio rango, fue posible tomar al algoritmo híbrido como una base confiable para evaluar la precisión de otros métodos y fórmulas aproximadas para calcular impedancias de tierra en sistemas de cables subterráneos cables subterráneos.

Finalmente, el algoritmo híbrido es incorporado como parte fundamental del modelo preciso de cálculo de parámetros ZY , el cual será empleado en esta tesis para el análisis de transitorios electromagnéticos en sistemas de cables subterráneos. Sin embargo, este algoritmo también puede ser utilizado para estudios de flujos de potencia, corto circuito y estabilidad transitoria.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS

RESUMEN

En este capítulo se presenta una metodología para sintetizar la respuesta en frecuencia de las funciones matriciales \mathbf{H} y \mathbf{Y}_c , que caracterizan a un sistema de transmisión por cables subterráneos. Para evaluar \mathbf{H} y \mathbf{Y}_c en forma precisa, se requiere aplicar el modelo de cálculo de parámetros electromagnéticos \mathbf{ZY} desarrollado en los capítulos 2 y 3. Así mismo, se desarrolla una metodología de descomposición modal para \mathbf{H} y \mathbf{Y}_c , en la cual se implementa la técnica de Wedepohl para evitar el fenómeno de conmutación de modos. Con base a esta metodología se estudia el cálculo de parámetros modales en forma analítica y gráfica.

4.1 INTRODUCCIÓN

Un sistema de transmisión de cables subterráneos está caracterizado por dos funciones de transferencia: La primera es la matriz de admitancia característica (\mathbf{Y}_c) y la segunda es la matriz de propagación (\mathbf{H}). Con base al modelo de onda viajera se pueden establecer relaciones en el dominio de la frecuencia entre ondas de voltajes (\mathbf{V}) y

corrientes (\mathbf{I}) con las matrices \mathbf{Y}_c y \mathbf{H} [3, 33]. De modo que, para la obtención de una solución eficiente de las respuestas \mathbf{V} e \mathbf{I} en el dominio del tiempo es necesario reducir el orden del modelo de \mathbf{Y}_c y \mathbf{H} .

Actualmente existe una técnica de ajuste racional en frecuencia denominada Vector Fitting (VECFIT) desarrollada por B. Gustavsen [13-19]. Esta técnica suele ser muy precisa cuando se tienen respuestas en frecuencia con comportamiento muy regular, como lo es la matriz de admitancia característica (\mathbf{Y}_c). Sin embargo, este comportamiento no es el mismo para la matriz de propagación (\mathbf{H}), debido a que ésta es afectada por un retardo en tiempo (τ) que traducido al dominio de la frecuencia equivale a una innumerable cantidad de oscilaciones o resonancias [14]. Cada oscilación equivale a un polo, con lo cual resulta prácticamente imposible efectuar el ajuste de \mathbf{H} con un orden bajo en el modelo.

Sin embargo, con el desarrollo de las herramientas de optimización y los recursos computacionales es posible aplicar metodologías para encontrar el tiempo de retardo óptimo ($\tau_{\text{óptimo}}$) de una manera eficiente, precisa y confiable. Asimismo, si se conoce el retardo en tiempo óptimo ($\tau_{\text{óptimo}}$) las oscilaciones o resonancias en frecuencia pueden ser eliminadas con una simple operación algebraica. Por lo que en este capítulo se aplica el método Brent para encontrar los retardos en tiempo óptimo ($\tau_{\text{óptimo}}$) [14]. La aplicación de este método requiere establecer un intervalo de tiempo en base al cálculo de parámetros modales. Anteriormente, en el cálculo de parámetros modales se presentaba un fenómeno conocido como conmutación de modos, el cual era ocasionado por cambio de los elementos de la matriz de eigenvalores de un punto de frecuencia a otro. Sin embargo, se aplica en este capítulo una solución algorítmica basada en una correlación entre elementos de la matriz de eigenvectores para eliminar dicho fenómeno de conmutación de modos.

Finalmente con la aplicación conjunta de los métodos y técnicas desarrolladas en este capítulo es posible tener una solución eficiente de las respuestas de voltaje (\mathbf{V}) y corriente (\mathbf{I}) en el dominio del tiempo.

4.2 DESCOMPOSICIÓN MODAL DE H y Y_c

A partir de la solución de las ecuaciones del telegrafista que se describen en la sección 2.2 del capítulo 2 se derivaron las expresiones matriciales H en (2.5) y Y_c en (2.6) referentes a la matriz de propagación y admitancia característica, respectivamente. Para definir las matrices H y Y_c se considera el modelo de onda viajera de un sistema con n conductores. Dicho sistema se muestra en la Fig. 4.1 [3,33].

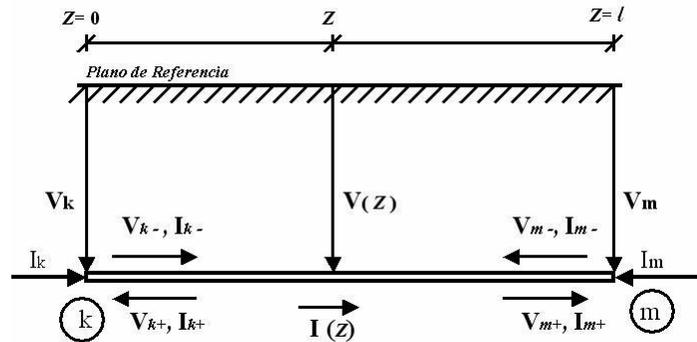


Fig. 4.1: Modelo de onda viajera de un sistema subterráneo con n conductores

Al analizar la Fig. 4.1 se tiene que:

Los voltajes y corrientes en cada nodo se definen como [2,33]:

$$V = V_+ + V_- \quad (4.1)$$

y

$$I = I_+ - I_- \quad (4.2)$$

donde

- V_- = Voltaje de la onda viajera reflejada.
- V_+ = Voltaje de la onda viajera incidente.
- V = Voltaje entre nodo y tierra.
- I_- = Corriente de la onda viajera reflejada.
- I_+ = Corriente de la onda viajera incidente.
- I = Corriente inyectada.

La matriz de propagación \mathbf{H} descrita en (2.5) define las magnitudes de las ondas de voltaje y corriente a lo largo de la distancia longitudinal (z) del cable o sistema de cables como se muestra a continuación:

$$\mathbf{V}_+(z+) = \mathbf{H} \mathbf{V}_+(z) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{I}_+(z+) = \mathbf{H}^T \mathbf{I}_+(z) \quad (4.4)$$

La matriz de admitancia característica \mathbf{Y}_c descrita en (2.6) relaciona las ondas de voltaje y corriente de la siguiente manera:

$$\mathbf{I}_+(z+) = \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_+(z) \quad (4.5)$$

y

$$\mathbf{I}_-(z+) = \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_-(z) \quad (4.6)$$

Si se multiplica la ecuación (4.1) por \mathbf{Y}_c y luego restamos la ecuación (4.2), se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{V} - \mathbf{I} = 2 \mathbf{I}^- \quad (4.7)$$

Sustituyendo,

$$\mathbf{I}_{k+} = \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{m-} \quad (4.8)$$

y

$$\mathbf{I}_{m+} = \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{k-} \quad (4.9)$$

Se tiene el siguiente par de ecuaciones,

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{V}_k - \mathbf{I}_k = 2 \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{m-} \quad (4.10)$$

y

$$\mathbf{Y}_c \mathbf{V}_m - \mathbf{I}_m = 2 \mathbf{H}^T \mathbf{I}_{k-} \quad (4.11)$$

Las cuales representan la solución en el dominio de la frecuencia de la ecuación de onda viajera en cada uno de los extremos de la línea de transmisión. Las matrices \mathbf{H} en (2.5) y la matriz \mathbf{Y}_c en (2.6) se calculan con las matrices de impedancia serie \mathbf{Z} y admitancia paralelo \mathbf{Y} . Para un sistema de n conductores, estas matrices son de longitud $n \times n$. En adición, las ecuaciones (4.10) y (4.11) representan n ecuaciones escalares acopladas, pero que pueden ser reemplazadas por n ecuaciones desacopladas introduciendo las siguientes cantidades modales [2, 16]:

$$\mathbf{I} = \mathbf{T} \mathbf{I}^M \quad (4.12)$$

y

$$\mathbf{V} = \mathbf{T} \mathbf{V}^M \quad (4.13)$$

donde \mathbf{T}_I y \mathbf{T}_V son las matrices de eigenvectores de los productos matriciales \mathbf{ZY} y \mathbf{YZ} , respectivamente. El superíndice M denota que las cantidades son modales.

La descomposición modal de \mathbf{ZY} y \mathbf{YZ} es [2,10]:

$$\mathbf{ZY} = \mathbf{T} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{T}^{-1} \quad (4.14)$$

y

$$\mathbf{YZ} = \mathbf{T} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{T}^{-1} \quad (4.15)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la matriz diagonal de eigenvalores y \mathbf{T} es la matriz de eigenvectores.

Sustituyendo las cantidades modales (4.12) y (4.13) en las ecuaciones (4.10) y (4.11), se tienen las siguientes ecuaciones desacopladas de onda viajera en el dominio de la frecuencia para cada extremo de la línea [2, 32, 33]:

$$\mathbf{Y}_c^M \mathbf{V}_k^M - \mathbf{I}_k^M = 2 \mathbf{H}_m^M \mathbf{I}_m^M \quad (4.16)$$

y

$$\mathbf{Y}_c^M \mathbf{V}_m^M - \mathbf{I}_m^M = 2 \mathbf{H}_k^M \mathbf{I}_k^M \quad (4.17)$$

donde

- I^M = Vector de corrientes modales.
 V^M = Vector de voltajes modales.
 Y_c^M = Matriz diagonal de admitancia característica modal.
 H^M = Matriz diagonal de propagación modal.

En donde la matriz diagonal H^M se relaciona con H de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 H &= T_I H^M T_I^{-1} \\
 H &= e^{-\sqrt{ZY}} = T_I e^{-\lambda l} T_I^{-1} = T e^{-Y} T^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

donde e^{-Y} es la matriz diagonal de eigenvalores (λ) con elementos diagonales $e^{-\lambda_{i,i} l}$ y es la longitud del cable.

Del mismo modo la matriz de admitancia característica se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 Y_c &= T_I Y_c^M T_I^{-1} \\
 Y_c &= Z^{-1} \sqrt{ZY} = Z^{-1} \cdot T_I \sqrt{\lambda} T_I^{-1} = Z^{-1} \cdot T \cdot Y \cdot T^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Las ecuaciones de onda viajera presentadas en esta sección representan la solución para las ondas de voltaje y corriente en el dominio de la frecuencia de cada uno de los extremos del sistema de transmisión por cables. Por lo que, dichas ecuaciones se utilizarán para obtener las respuestas transitorias de voltaje y corriente en el dominio del tiempo, ya sea por medio del uso de convoluciones recursivas o por la aplicación de la técnica de la transformada inversa de Laplace.

4.3 CONMUTACIÓN DE MODOS

En el análisis de sistemas de transmisión por cables subterráneos surge un problema conocido como conmutación de modos cuando se intenta calcular las matrices de eigenvectores y eigenvalores con rutinas convencionales en un amplio rango de

frecuencias 1Hz–1MHz. Dicho problema surge cuando se producen cambios de posición en la matriz de eigenvalores a ciertas frecuencias, las cuáles a su vez crean una innumerable cantidad de brincos en los elementos de las matrices de eigenvectores de un punto de frecuencia a otro. Consecuentemente, estos brincos ocasionan errores en el cálculo de parámetros modales y posteriormente, estos errores son arrastrados hasta el ajuste racional en frecuencia (Vector Fitting) y por último a las simulaciones de transitorios en el dominio del tiempo o dominio de la frecuencia.

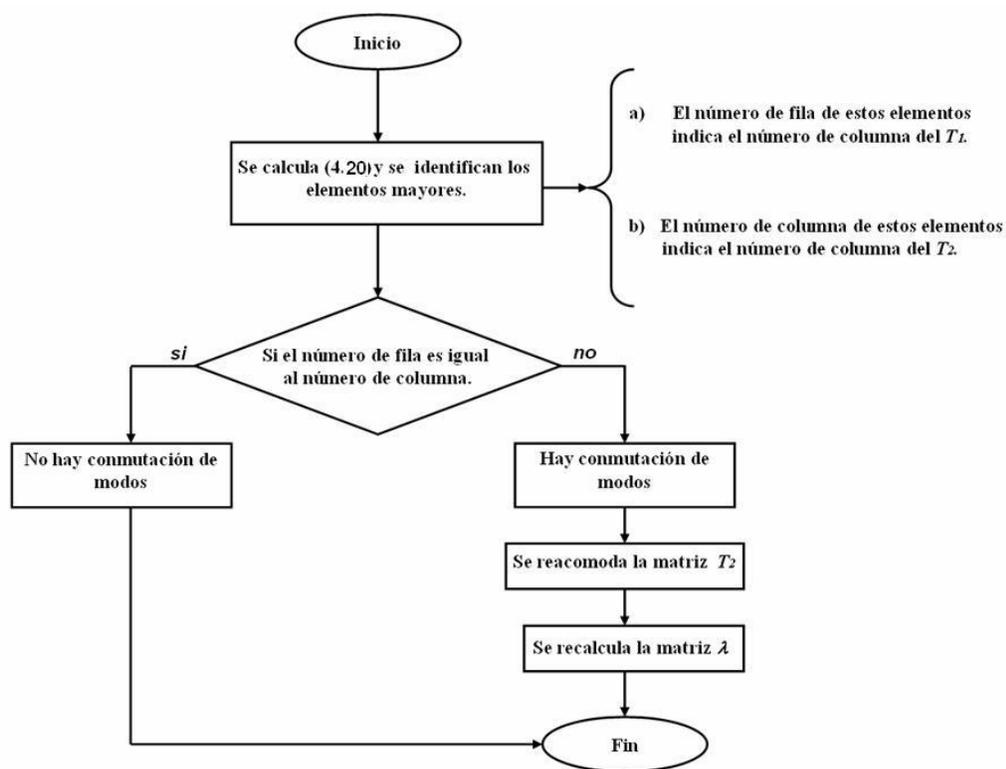
La solución al problema de conmutación de modos se logra cuando se tienen matrices de eigenvectores puramente regulares [2, 21]. En esta tesis se propone utilizar la rutina convencional que obtiene las matrices de eigenvalores y eigenvectores junto con una técnica de correlación que mantiene en el lugar correcto a los elementos de la matriz de eigenvectores dentro de todo el rango de frecuencias. Esta técnica de correlación está basada en el hecho de que los elementos de la matriz de eigenvectores que tienen la misma posición que los elementos de la matriz de eigenvalores son casi ortogonales entre el punto de frecuencia actual y el anterior. Esto significa que si un elemento de la matriz de eigenvectores de la frecuencia actual es correlacionado con la matriz de eigenvectores de la frecuencia anterior, se encuentra que existe un fuerte factor de correlación asociado con los dos elementos de la matriz de eigenvectores (de la frecuencia actual y anterior) que pertenecen a la misma posición de los elementos de la matriz de eigenvalores.

El procedimiento de correlación de los eigenvectores es como sigue:

- a) Se obtiene la matriz de eigenvectores T_2 para la frecuencia actual.
- b) Se transpone la matriz T_2 y se obtiene la hermitiana de T_2 (T_2^H).
- c) Se obtiene la matriz de correlación S multiplicando la matriz T_2^H con la matriz de eigenvectores T_1 para la frecuencia anterior.

$$S = T_2^H \cdot T_1 \quad (4.20)$$

- d) Mediante el siguiente diagrama de flujo se determina si hay o no hay conmutación de modos. Este procedimiento se realiza para cada punto de frecuencia.



Por ejemplo, en el caso de una matriz de 3×3 , si la conmutación de eigenvalores no ha ocurrido, la matriz de correlación S (4.20) tendrá los elementos mayores en la diagonal principal como se indica en la Fig. 4.2a, pero si los eigenvalores de los elementos 1 y 3 han sido conmutados, consecuentemente habrá conmutación en los eigenvectores de las columnas 1 y 3, por lo que la matriz de correlación S tendrá los elementos mayores en las ubicaciones que se indican en la Fig. 4.2b [14].

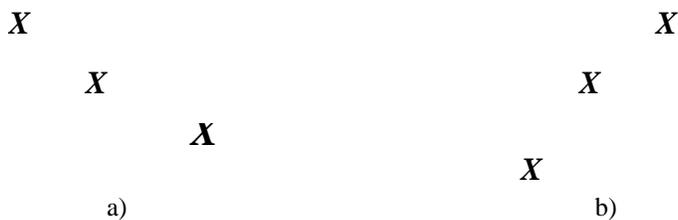


Fig. 4.2: a) Matriz de correlación S cuando no hay conmutación de modos, b) Matriz de correlación S cuando se presenta la conmutación de modos.

En cada frecuencia, después de que se han obtenido las matrices de eigenvalores y eigenvectores mediante el proceso convencional de diagonalización, la matriz de

eigenvectores para la frecuencia actual se correlaciona con la matriz de eigenvectores obtenida en la frecuencia previa. Luego, si se detectan conmutaciones entre ambas matrices, estos son reacomodados según el orden de la matriz de eigenvectores obtenida con la frecuencia previa. Este procedimiento garantiza matrices de eigenvectores puramente regulares.

4.4 PARÁMETROS MODALES

A partir de cada uno de los elementos de la matriz diagonal de eigenvalores (Λ) descrito en (4.14) y (4.15) se calculan los modos de propagación y a su vez estos modos de propagación son expresados en función de los parámetros modales: atenuación modal (α_i), fase modal (β_i) y velocidad modal (v_i) como se describe a continuación [2,10].

$$\gamma_{i,i}(\omega) \sqrt{\lambda_{i,i}(\omega)} = \alpha_i(\omega) + j \cdot \beta_i(\omega) \quad (4.21)$$

donde

$\gamma_{i,i}$ = Modo de propagación. Es la raíz cuadrada de $\lambda_{i,i}$.

α_i = Es la atenuación del modo de propagación i en p.u. de longitud.

β_i = Es el ángulo de fase en radianes del modo de propagación i en p.u. de longitud.

La velocidad modal (v_i) para cada modo de propagación i se calcula como sigue:

$$v_i(\omega) = \frac{\omega}{\beta_i(\omega)} \quad (4.22)$$

donde ω es la velocidad angular en rad/s.

Como caso de aplicación para el cálculo de parámetros modales considérese un sistema de transmisión subterráneo de m cables y n conductores por cable como el mostrado en la Fig. 2.1a y b del capítulo 2. A continuación se muestran los resultados de parámetros modales.

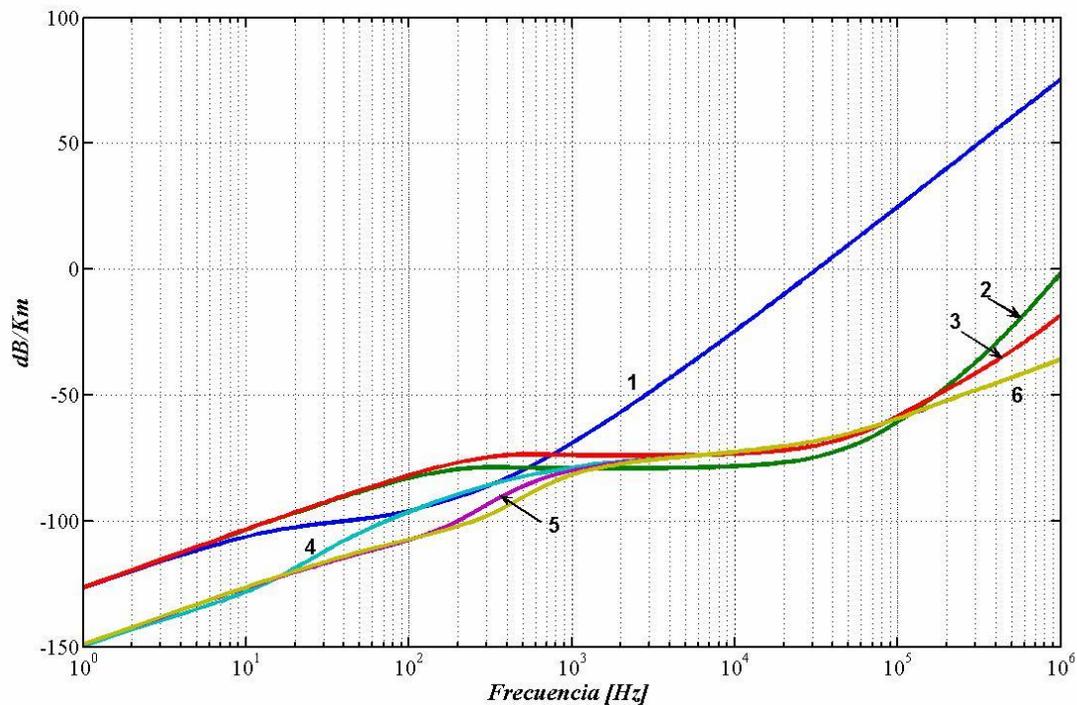


Fig. 4.3: Atenuaciones modales del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b.
Los números del 1 al 6 indican el número de modo.

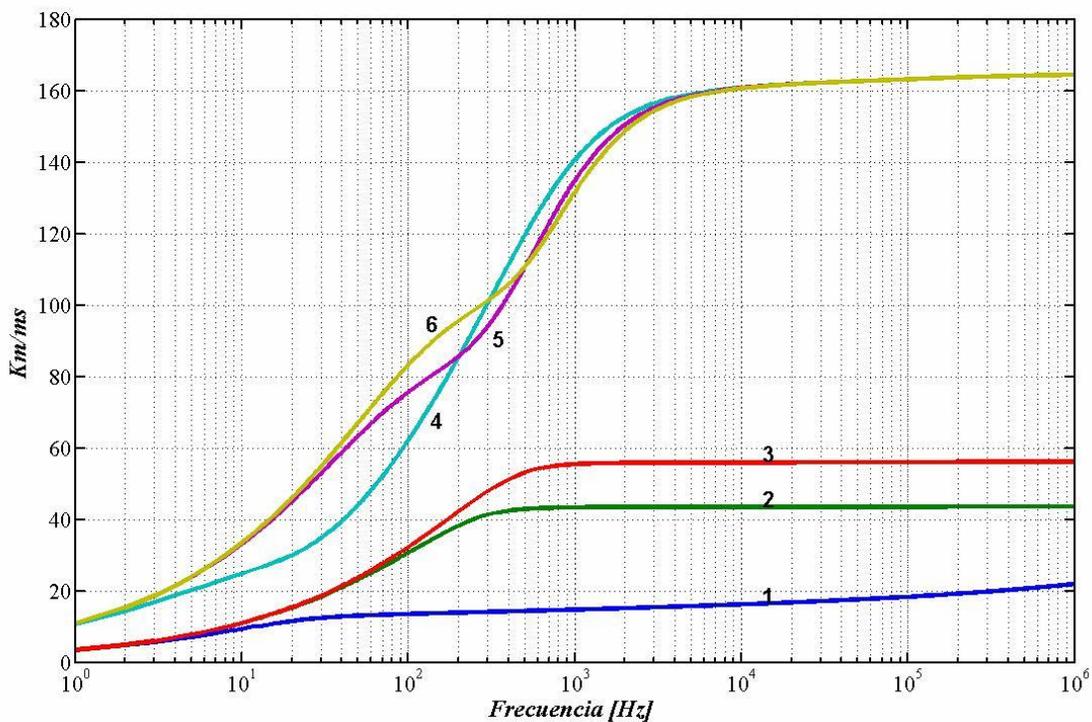


Fig. 4.4: Velocidades modales del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b.
Los números del 1 al 6 indican el número de modo.

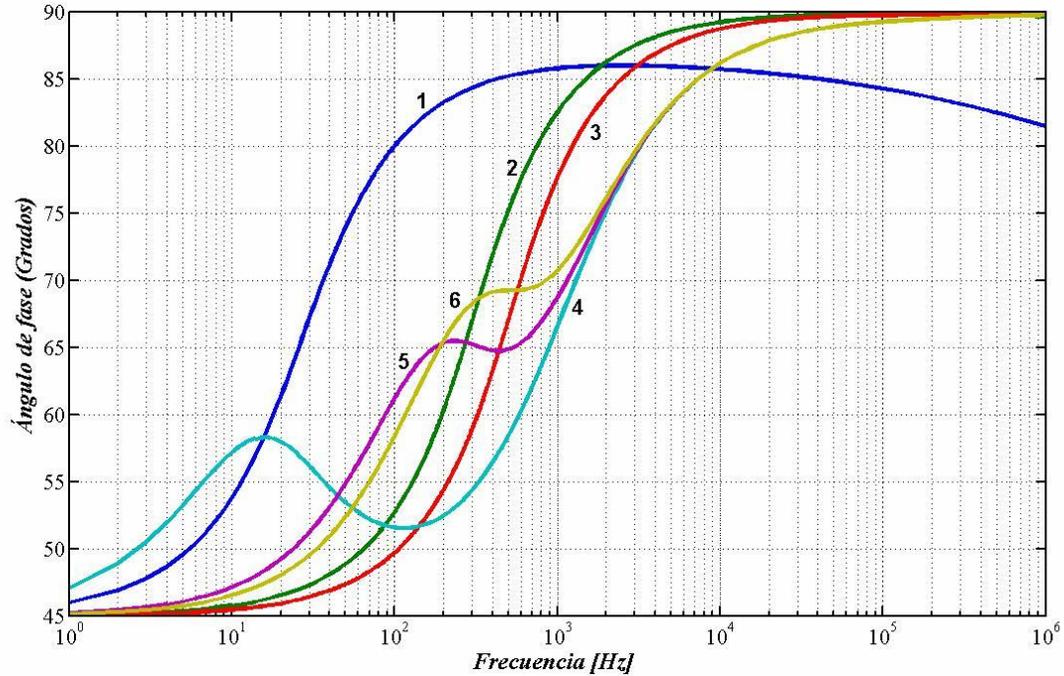


Fig. 4.5: Ángulos modales del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b.

Los números del 1 al 6 indican el número de modo.

Los retardos en tiempo de (τ) de los modos de propagación se definen como el tiempo que tarda la onda viajera en recorrer la distancia longitudinal total () del sistema en transmisión subterráneo o aéreo. La ecuación se escribe como:

$$\tau = \frac{\bar{L}}{v} \quad (4.23)$$

Para obtener la gráfica de tiempos de retardo (τ) del sistema mostrado en la Fig. 2.1a y b se considera una distancia longitudinal total del sistema es de 10 millas. En la siguiente gráfica se muestran los resultados obtenidos.

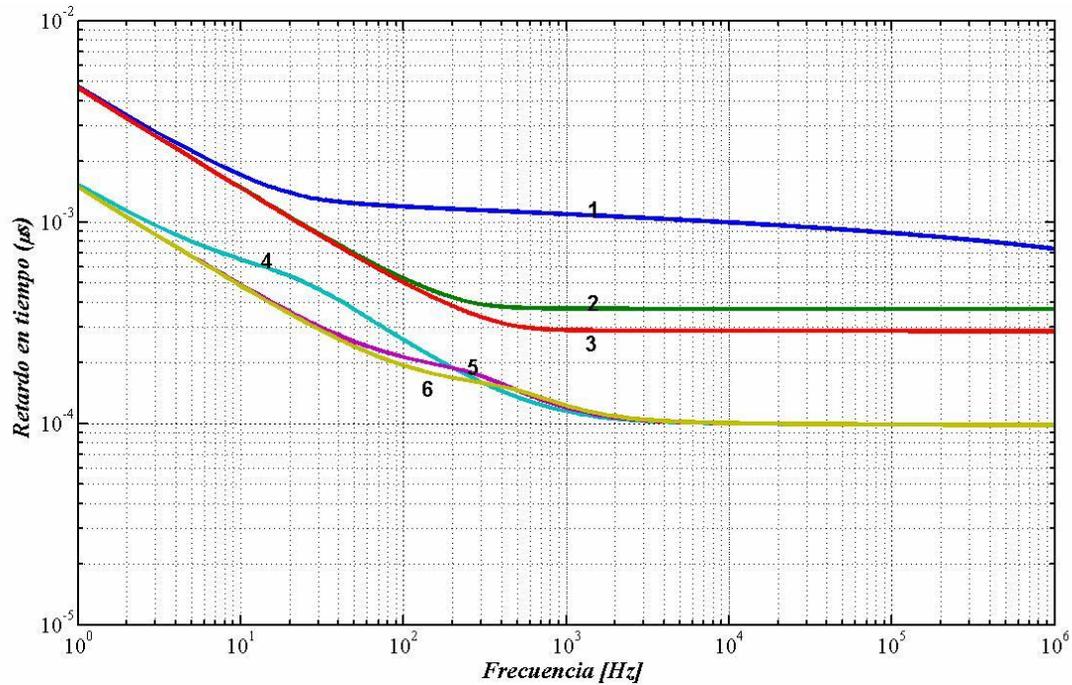


Fig. 4.6: Tiempos de retardo (τ) de los modos de propagación del sistema de transmisión subterráneo de la Fig. 2.1a y b para una longitud de 10 millas. Los números del 1 al 6 indican el número de modo.

4.5 AJUSTE RACIONAL EN FRECUENCIA DE H Y Y_c

El modelo de onda viajera presentado en las secciones anteriores ha sido formulado en los términos de la matriz de admitancia característica (Y_c) y la matriz de propagación (H). Estos términos necesitan ser aproximados mediante funciones racionales en frecuencia con el fin de incrementar la eficiencia computacional en los análisis de dominio en el tiempo para el cálculo de transitorios *EM*. El ajuste racional en frecuencia de Y_c suele ser muy simple, dado que dicho ajuste se logra con un orden bajo del modelo. El ajuste de la matriz de propagación es mucho más complicado, ya que es necesario asociar un retardo en tiempo (τ) a cada modo de propagación para mejorar la calidad del ajuste racional en frecuencia [14].

En este capítulo se emplea la técnica de ajuste racional en frecuencia mejor conocida como Vector Fitting (VECFIT) desarrollada por Gustavsen en [13-19] para hacer el ajuste racional en frecuencia de las matrices Y_c y H , dadas las características de eficiencia, precisión y estabilidad que posee. Esta técnica emplea un procedimiento de recolocación de polos basado en mínimos cuadrados y un proceso iterativo que consta de

cuando mucho 3 iteraciones con el fin de mejorar la exactitud de la aproximación [17-18]. Adicionalmente, el algoritmo de VECFIT se encuentra en el dominio público en <http://www.energy.sintef.no/Produkt/VECFIT/index.asp> de tal modo que puede ser usado libremente por cualquier persona siempre y cuando se haga referencia al autor [14].

La aproximación racional en frecuencia de la matriz Y_c aplicando VECFIT es [13-19]:

$$Y_c = \sum_{m=1}^{N_{Y_c}} \frac{c_m}{s - a_m} + d \quad (4.24)$$

mientras que la función de propagación H es ajustada con una función racional más un retardo en tiempo (τ) asociado a cada modo de propagación [14].

$$H = \left(\sum_{m=1}^{N_H} \frac{c_m}{s - a_m} \right) e^{-j\omega\tau} \quad (4.25)$$

donde

N_H = Orden de la aproximación de H .

N_{Y_c} = Orden de la aproximación de Y_c .

c_m = Ceros de las funciones Y_c y H .

a_m = Polos de las funciones Y_c y H .

d = Vector de residuos (valor opcional).

τ = Retardo en tiempo de la función de propagación.

La dificultad para calcular la aproximación racional en frecuencia a través de VECFIT de H en (4.25) radica en que el retardo en tiempo τ es desconocido, de tal modo que esto hace imposible la aplicación directa de VECFIT. Una metodología muy útil para encontrar los retardos en tiempo (τ) es a través del método Brent que se detalla a continuación [14].

4.5.1 MÉTODO BRENT

El método Brent es un programa de optimización utilizado conjuntamente con VECFIT para encontrar el retardo en tiempo óptimo.

A) IMPLEMENTACIÓN PRÁCTICA DEL MÉTODO BRENT

La implementación práctica del método Brent consiste en relacionar de manera algorítmica un retardo en tiempo (τ) con el *error-rms* obtenido a través de VECFIT como se muestra a continuación (Ver Fig. 4.7).

$$H \cdot e^{j\omega\tau} = \left(\sum_{m=1}^{N_H} \frac{c_m}{s - a_m} \right) \quad (4.26)$$

y el objetivo es encontrar aquel retardo en tiempo τ asociado con el mínimo *error-rms*.

Antes de empezar la solución algorítmica del método Brent se debe establecer el intervalo donde se encuentre el retardo en tiempo óptimo (τ).

$$[\tau_a, \tau_b]$$

El valor de la izquierda del intervalo se le conoce como el retardo en tiempo sin pérdidas (τ_a) y el valor de la derecha del intervalo se le conoce como el retardo en tiempo con pérdidas (τ_b) [14].

El retardo en tiempo sin pérdidas (τ_a) se calcula como [14]:

$$\tau_a = \frac{1}{v_{max}} + \frac{\angle H_{min}(\omega_1)}{\omega_1} \quad (4.27)$$

donde

$\angle H_{min}$ = Es el ángulo de desfase mínimo de $|H_{min}|$

ω_1 = Es la frecuencia donde se tiene $\angle H_{min}$.

v_{max} = Es la velocidad modal máxima.
 = Es la longitud del sistema de transmisión subterránea.

Mientras que el $\angle H_{min}$ se calcula con la siguiente fórmula [14,16]:

$$\angle H_{min}(\omega) = \frac{\pi}{2} \left| \frac{d(\ln(H(\omega)))}{d(\ln(\omega))} \right|_{\omega=\omega_1} + \Delta(u) \quad (4.28)$$

donde

$$\Delta(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d(\ln(H(\omega)))}{d(\ln(\omega))} \right|_{\omega=\omega_1} - \left| \frac{d(\ln(H(\omega)))}{d(\ln(\omega))} \right|_{\omega=\omega_2} \cdot \ln(\coth(\frac{|u|}{2})) du \quad (4.29)$$

y

$$u = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (4.30)$$

El retardo en tiempo con pérdidas (τ_a) es calculado en forma práctica con la siguiente fórmula:

$$\tau_b = \frac{L}{v_{max}} \quad (4.31)$$

donde,

= Es la longitud del sistema de transmisión subterráneo.

v_{max} = Es la velocidad modal máxima.

Con la implementación de este método se logra aminorar considerablemente los efectos de oscilaciones o resonancias ocasionados por un retardo en tiempo en el dominio de la frecuencia para la función de propagación H . De tal modo que el método facilita en cierta manera el ajuste racional en frecuencia de H con un bajo orden del modelo.

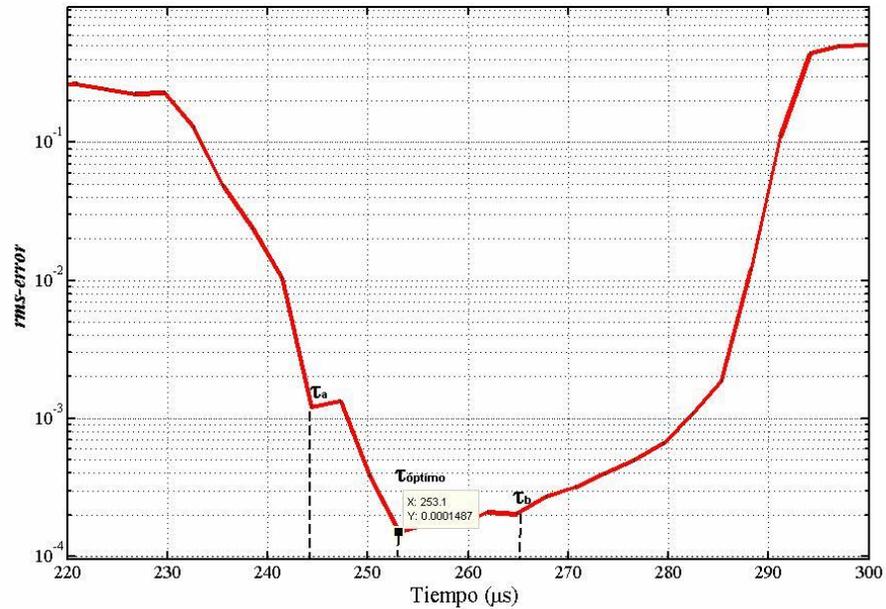


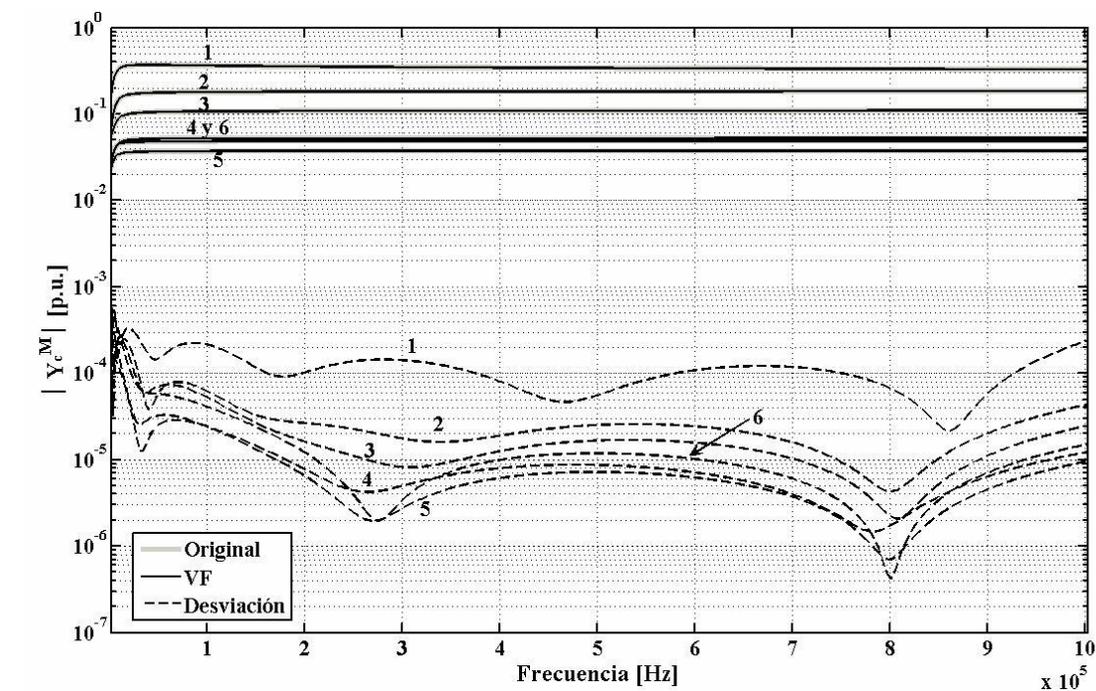
Fig. 4.7: Relación entre el *error-rms* con el tiempo de retraso τ

4.5.1 APLICACIÓN DE VECFIT Y EL MÉTODO BRENT

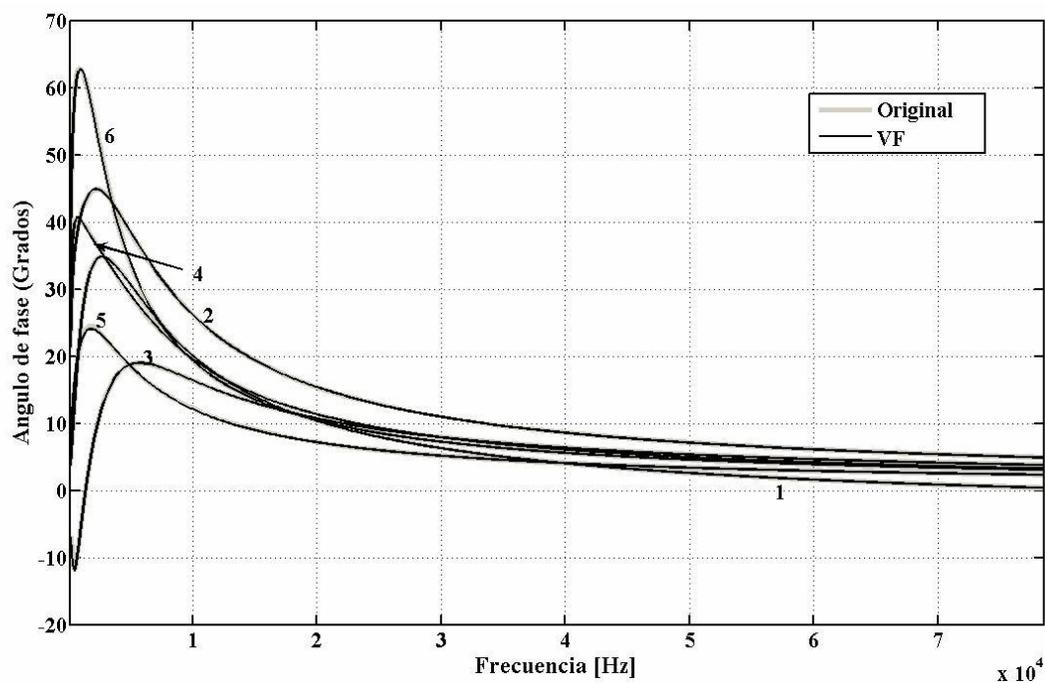
Considérese el sistema de cables subterráneos mostrado en la Fig. 2.1a y b del capítulo 2. Se considera también una distancia longitudinal total () de 40 millas. Las matrices a ajustar son Y_c^M y H^M para rango de frecuencias de 0.1Hz a 1MHz.

Para este caso de aplicación, la síntesis en frecuencia se hizo con 6 polos complejos conjugados. A continuación se muestran los resultados (gráficas) obtenidos a través de VECFIT.

La Fig. 4.8a y b muestra la precisión del ajuste tanto en magnitud como en fase de la matriz de admitancia característica modal Y_c^M .



a)



b)

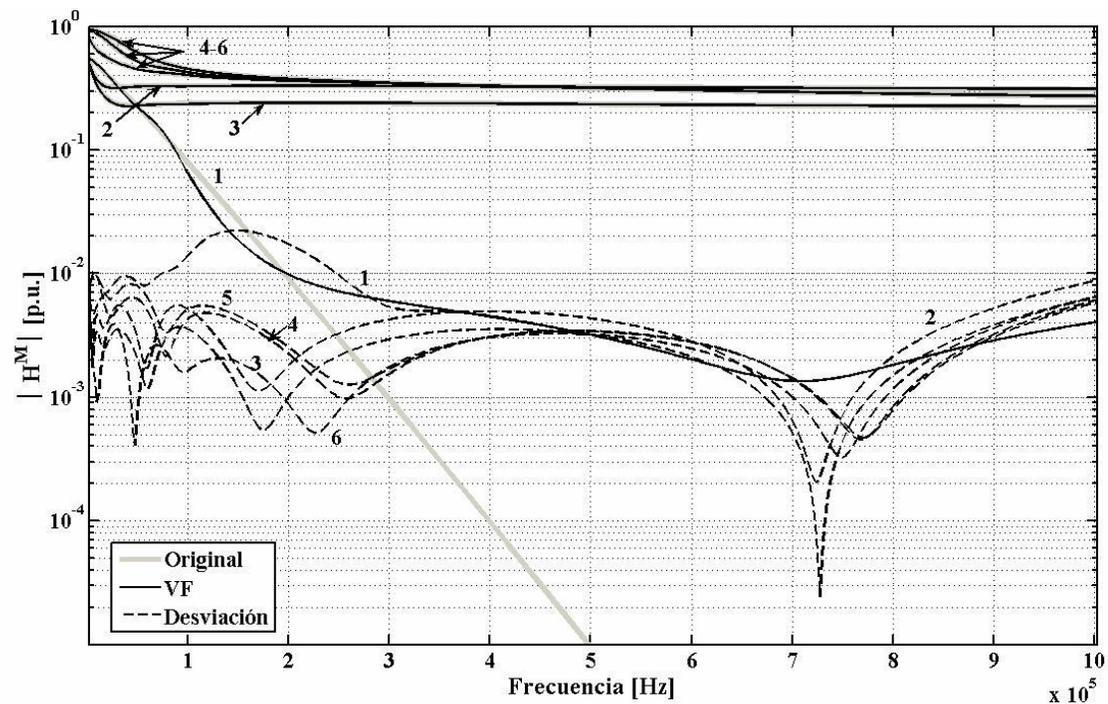
Fig. 4.8: Ajuste de la matriz de admitancia característica modal Y_c^M con una aproximación de 6to orden.

El inciso a) Muestra el valor absoluto de Y_c^M y b) El ángulo de fase.

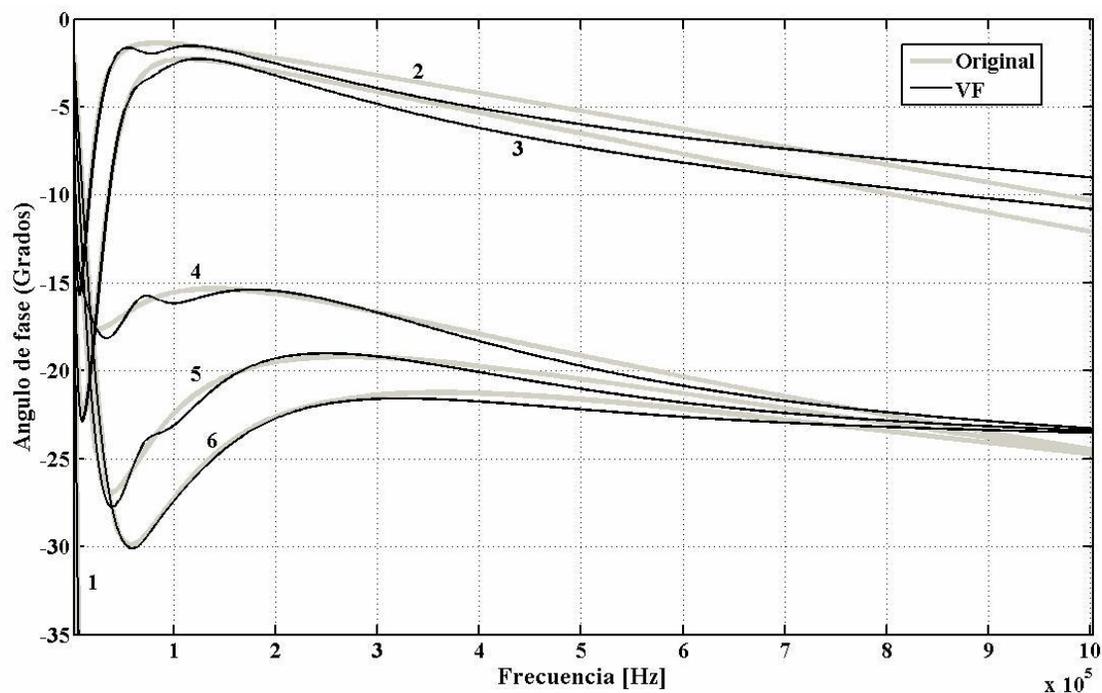
Los números del 1 al 6 indican el número de modo.

El *error-rms* de la aproximación de Y_c^M es 0.00003222.

La Fig. 4.9a y b muestra la precisión del ajuste tanto en magnitud como en fase de la matriz de propagación modal H^M .



a)



b)

Fig. 4.9: Ajuste de la matriz de propagación modal H^M con una aproximación de 6to orden. El inciso a) Muestra el valor absoluto de H y b) El ángulo de fase. Los números del 1 al 6 indican el número de modo.

El *error-rms* de la aproximación de \mathbf{H} es 0.0054, mientras que los tiempos de retardo para cada modo de propagación obtenidos con el método Brent se encuentran en la Tabla I.

TABLA I

RETARDOS EN TIEMPO (τ) EN μ SEGS. PARA CADA MODO DE PROPAGACIÓN

MODO	I	II	III	IV	V	VI
τ (μ S)	763.7	367.7	285.6	97.6	97.6	97.6

En ambas figuras se obtuvieron resultados satisfactorios del ajuste racional en frecuencia tanto de \mathbf{Y}_c^M como de \mathbf{H}^M . Estas aproximaciones se utilizan en los programas basados en técnicas del dominio del tiempo para aumentar la eficiencia en la obtención de las respuestas transitorias de voltaje y corriente.

4.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se desarrolló una metodología para sintetizar o ajustar en frecuencia las funciones matriciales que caracterizan a un sistema de transmisión por cables subterráneos. Estas funciones matriciales son: la de propagación (\mathbf{H}) y la de admitancia característica (\mathbf{Y}_c). Con dicha metodología se pueden obtener eficientemente las respuestas transitorias de voltaje y corriente en cualquier punto longitudinal del sistema de cables, dado que se reduce considerablemente el número de convoluciones recursivas. Finalmente, se cuenta con una base eficiente y precisa para análisis de transitorios \mathbf{EM} basada en técnicas del dominio del tiempo.

Capítulo 5

TRANSITORIOS *EM* EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS

RESUMEN

En este capítulo se incorpora toda la metodología para el cálculo de parámetros electromagnéticos *ZY*, desarrollada en los capítulos 2 y 3, en el cálculo preciso de transitorios *EM* en sistemas de cables subterráneos a través de la Transformada Numérica de Laplace. Adicionalmente, se exponen las ventajas cualitativas con respecto a métodos convencionales basados en técnicas en el dominio del tiempo aplicadas en programas profesionales de simulación de transitorios como el EMTDC Y ATP.

Finalmente, se muestran los resultados comparativos entre las respuestas transitorias de voltajes para un sistema de cables subterráneos con la técnica de Laplace y mediante la simulación en el programa profesional PSCAD-EMTDC basado en técnicas de dominio en el tiempo. A su vez, también se incluyen las respuestas de voltaje de un experimento escalado en el laboratorio.

5.1 INTRODUCCIÓN

Los transitorios *EM* debidos principalmente a operaciones de apertura y cierre de interruptores, fallas y descargas atmosféricas, ocasionan sobrevoltajes perjudiciales al sistema de potencia. Por lo tanto, el análisis preciso de estos disturbios es muy importante para el diseño de la coordinación de aislamiento y etapas de prueba en equipo de potencia, tales como líneas de transmisión, cables subterráneos, máquinas

eléctricas, sistemas de tierra, etc. Estos análisis pueden ser realizados con cualquiera de los métodos en el dominio del tiempo y dominio de la frecuencia. Sin embargo, se prefieren los métodos de dominio de la frecuencia porque incluyen directamente la dependencia frecuencial de los parámetros *EM* (Efecto Piel en conductores y Efectos de Relajación en aislantes) y además, porque no requieren de mucho esfuerzo de cómputo.

Actualmente, en la mayoría de los programas profesionales de análisis de transitorios *EM* (como el EMTP, ATP y PSCAD-EMTDC) se contemplan los métodos basados en el dominio del tiempo. Por ejemplo, en el EMTP se aplica la regla de integración trapezoidal y el método de Bergeron conocido también como método de las características [2]. Una desventaja de los métodos de dominio en el tiempo frente a los métodos de dominio en la frecuencia es la dificultad para la inclusión de la dependencia frecuencial. Aunque, recientemente ya se han desarrollado nuevos enfoques para resolver este problema, aún en la mayoría de los modelos actuales solo consideran aproximaciones (cálculo de parámetros electromagnéticos y ajuste racional en frecuencia de H y Y_c) que están propensas a errores en la mayoría de los sistemas altamente dependientes de la frecuencia. En contraste, cuando se usan los métodos de dominio de la frecuencia, basados en las transformadas de Laplace o Fourier, los elementos dependientes de la frecuencia son incluidos de forma directa. Por lo que, éstos métodos ofrecen teóricamente una solución de transitorios *EM* más exacta.

En este capítulo se presenta una metodología basada en el dominio de la frecuencia a través de la Transformada Numérica de Laplace, dado que esta incorpora en su totalidad la dependencia frecuencial de los parámetros electromagnéticos.

5.2 RESUMEN HISTÓRICO

Las Transformadas de Fourier y de Laplace son herramientas de análisis muy poderosas para la solución analítica de ecuaciones diferenciales e integrales. Aunque existen casos en los que su aplicación a problemas prácticos suele estar muy limitada. Esto, debido principalmente a que existen funciones no analíticas o muy difíciles de transformar de un dominio a otro. Particularmente, este es el caso al tratar de obtener la

solución analítica de sistemas con dependencia frecuencial no lineal, como los sistemas de transmisión de energía eléctrica, en los cuales se vuelve prácticamente imposible. Para sobrellevar esta situación se han utilizado transformaciones numéricas en lugar de las expresiones analíticas.

La inversión numérica de la Transformada de Laplace fue introducida por primera vez en 1960 por Bellman [37], aproximando la integral de Laplace por un polinomio de Gauss-Legendre. De 1965 a 1973, un grupo encabezado por Mullineux aplicó la Transformada Discreta de Fourier para analizar transitorios **EM** en sistemas de potencia [38-41], llamando a su técnica como "Transformada Modificada de Fourier" (MTF), desde entonces el algoritmo fue adaptado para reducir el truncamiento y los errores de discretización como se describe en las secciones siguientes. En 1969, el MTF fue aplicado exitosamente por Wedepohl para el cálculo de transitorios en líneas de transmisión multi-conductoras [42].

El término "Transformada Numérica de Laplace" fue introducido por Wilcox en 1978, el cual formula el MTF en términos de la teoría de la Transformada Numérica de Laplace (NLT) [12].

En 1988, Nagaoka desarrolló de un programa de transitorios **EM** en el dominio de la frecuencia basado en el MTF, el cual incluye parámetros distribuidos, como son interruptores y elementos no lineales [42].

5.3 TRASFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE

Sea $f(t)$ una función causal en el dominio del tiempo y $F(s)$ su imagen en el dominio de la frecuencia. Las Transformadas Directa e Inversa de Laplace son [34]:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (5.2)$$

donde $s = c+j\omega$, ω es la frecuencia angular y c una constante finita con valor mayor o igual a cero. De la sustitución de s en (5.1) y (5.2) tenemos:

$$F(c + j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt \quad (5.3)$$

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.4)$$

Cuando la c es igual a cero, las ecuaciones (5.3) y (5.4) corresponden a la transformada de Fourier.

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.6)$$

El límite inferior de (5.5), normalmente $-\infty$, se considera aquí como 0 puesto que solo se consideran funciones causales.

De las ecuaciones (5.3), (5.4), (5.5) y (5.6) se deduce que Transformada de Fourier es un caso particular de la Transformada de Laplace. En la ecuación (5.4) se observa que la transformada inversa de Laplace puede obtenerse aplicando la Transformada de inversa de Fourier a $F(c+j\omega)$ y posteriormente amplificando el resultado por el exponencial $exp(ct)$.

5.3.1 TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La integración numérica requiere límites de integración finitos, por lo que el rango de t en (5.5) se trunca sustituyéndolo por el intervalo $[0, T]$. Este intervalo se discretiza de modo que $t = m\Delta t$, con $m = 0, 1, 2, \dots, M$, y

$$\Delta t = T / M \quad (5.7)$$

La función $f(t)$ puede representarse mediante una serie de puntos o muestras de la forma $f(m\Delta t)$ como se ilustra en la Fig. 5.1a.

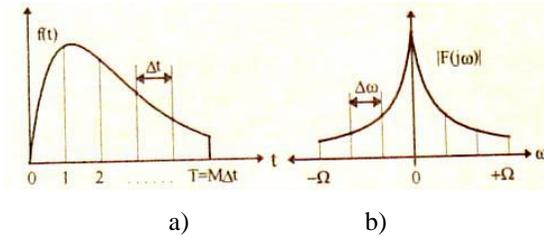


Fig. 5.1: Truncamiento, discretización y muestreo. a) Para $f(t)$, b) Para $F(j\omega)$

Del mismo modo que para t , el rango de integración de ω en (5.6) se trunca en el intervalo $[-\Omega, \Omega]$; luego, éste se discretiza de modo que $\omega = n\Delta\omega$, siendo $n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$, y

$$\Delta\omega = \Omega / N \quad (5.8)$$

La Fig. 5.1b ilustra el truncamiento y discretización del rango de ω , así como el muestreo de $F(j\omega)$.

Los rangos muestreados y discretizados de t y ω permiten evaluar a (5.5) numéricamente. De la regla rectangular de integración se obtiene (Ver Apéndice II):

$$F(jn\Delta\omega) \cong \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} f(m\Delta t) \cdot e^{-jmn \Delta t \Delta\omega} \quad (5.9)$$

Se puede demostrar por sustitución directa que el lado derecho de (5.9) es periódico en ω y que su período es:

$$P_\omega = 2\pi / \Delta t \quad (5.10)$$

De la aplicación de la regla rectangular en (5.6):

$$f(m\Delta t) \cong \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N-1} F(jn\Delta\omega) \cdot e^{jmn \Delta t \Delta\omega} \quad (5.11)$$

En forma similar a (5.9), el lado derecho de (5.11) es periódico en t y su período es:

$$P_t = \pi / \Delta\omega \quad (5.12)$$

La repetitividad de (5.9) implica que 2Ω , la longitud del rango truncado de ω , deba ser menor o igual a P_ω . Se elige la igualdad pues concuerda con el criterio de Nyquist [36]:

$$\Omega = \pi / \Delta t \quad (5.13)$$

La periodicidad de (5.11) por su parte lleva a considerar que T , el tiempo máximo de observación, deba ser menor o igual a P_t . Con el fin de que (5.4e) abarque el mayor intervalo posible de tiempo, también se escoge la igualdad:

$$T = 2\pi / \Delta\omega \quad (5.14)$$

La combinación algebraica de (5.13) y (5.14) con (5.6) y (5.7) determina las siguientes relaciones:

$$M = 2N \quad (5.15)$$

$$\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi / M \quad (5.16)$$

$$\Delta\omega / 2\pi = 1 / (M \Delta t) \quad (5.17)$$

Como consecuencia adicional de lo anterior, de los parámetros T , Ω , Δt , $\Delta\omega$ y M solo a dos de ellos (cualesquiera) se les puede asignar valores libremente, puesto que los demás quedan automáticamente determinados.

Considérese ahora las variables discretas f_m y F_n como aproximaciones correspondientes de $f(m\Delta t)$ y $F(jn\Delta\omega)$, de tal modo que (5.9) y (5.11) sean recíprocas, o sea, que la relación de igualdad sustituya a la de la aproximación " \cong ". Aplicando (5.16) en (5.9):

$$F_n = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} f_m e^{-j 2\pi mn / M} \quad (5.18)$$

Para (5.11) adicionalmente se aplican (5.15) y (5.17):

$$f_m = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{M} \sum_{n=-M/2}^{M/2-1} F_n e^{j 2\pi mn / M} \quad (5.19)$$

La sumatoria de (5.16) inmediatamente se identifica con la Transformada Discreta de Fourier (*DFT*). En cuanto a (5.20) es posible demostrar que [12]:

$$f_m = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} F_n e^{j 2\pi mn / M} \quad (5.20)$$

La ecuación (5.20) se identifica con la *DFT* inversa.

Una ventaja importante de relacionar la Transformada de Fourier con la de Laplace a través de la Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) es la posibilidad de usar el algoritmo de Cooley-Tuckey o *FFT* [36]. La aplicación de este algoritmo reduce considerablemente el tiempo de cómputo. Los errores numéricos de (5.18) y (5.20) se deben principalmente a errores de truncamiento espectral y discretización. Los efectos de estos y su control, se describen a continuación.

5.3.2 ERRORES POR TRUNCAMIENTO ESPECTRAL

Se considera en esta sección que $c = 0$, lo que equivale a la transformada de Fourier.

Para la evaluación numérica de la transformada de Fourier en (5.6), se considera el rango de frecuencia $[-\Omega, \Omega]$ de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.21)$$

Esta ecuación puede ser escrita como:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.22)$$

donde $f_1(t)$ es la aproximación de $f(t)$ por el truncamiento y $H(j\omega)$ es la ventana rectangular que lo representa:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & -\Omega < \omega < \Omega \\ 0, & \Omega < \omega < -\Omega \end{cases} \quad (5.23)$$

A partir de la ecuación (5.6) y (5.22)

$$F_1(j\omega) = F(j\omega) H(\omega) \quad (5.24)$$

y el teorema de la convolución:

$$f_1(t) = f(t) h(t) \quad (5.25)$$

donde $h(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $H(\omega)$,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega t} \quad (5.26)$$

De las ecuaciones (5.25) y (5.26), se observa que el truncamiento del espectro en frecuencia es equivalente a la convolución de $f(t)$ con un *sinc* (seno cardinal) en el dominio del tiempo. Como ejemplo, se considera que $f(t)$ es una función escalón. La forma de onda obtenida de la convolución de $f(t)$ con $h(t)$ muestra oscilaciones de alta frecuencia cerca de las discontinuidades (Ver Fig. 5.2). Este fenómeno es conocido como Gibbs, acarrea errores inaceptables para los propósitos de transitorios *EM*. La reducción de los errores por truncamiento depende en gran medida de la selección de la ventana de datos en frecuencia $\sigma(\omega)$.

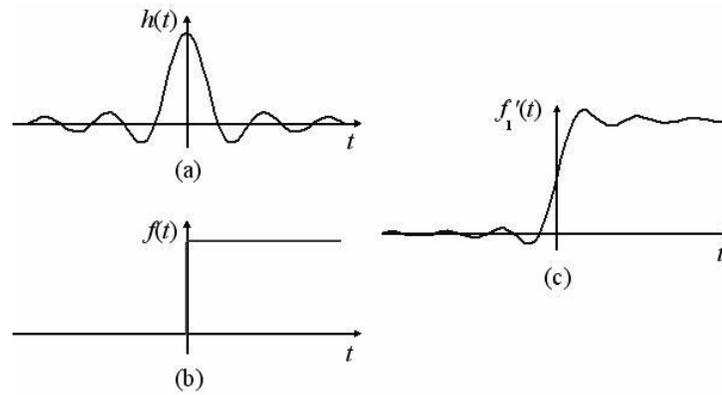


Fig. 5.2: Convolución de $f(t)$ con $h(t)$.

Actualmente existe una gran variedad de ventanas de datos en frecuencia para el procesamiento digital de señales. La Fig. 5.3 muestra las ventanas de datos más comúnmente utilizadas, mientras que la Tabla I enlista sus respectivas ecuaciones.

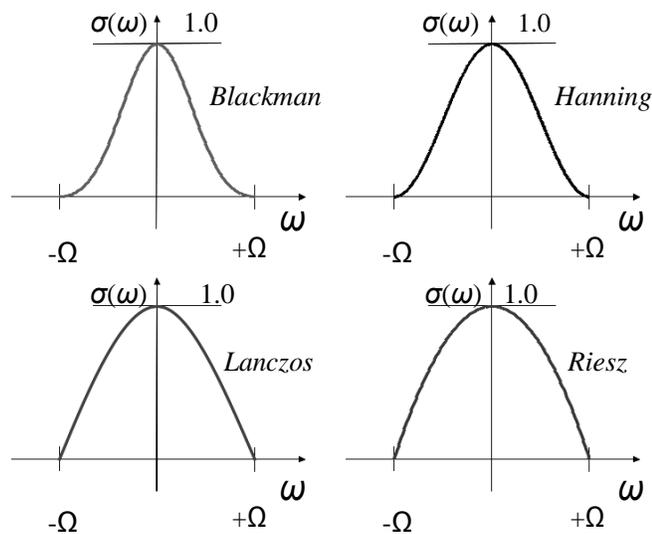


Fig. 5.3: Ventanas de datos.

TABLA I
DEFINIENDO ECUACIONES DE VENTANAS DE DATOS

Ventana	Ecuación
Blackman	$\sigma(\omega) = 0.42 + 0.5 \cos \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) + 0.08 \cos \left(2 \pi \frac{\omega}{\Omega} \right)$
Hanning	$\sigma(\omega) = \frac{1 + \cos(\pi\omega / \Omega)}{2}$
Lanczos	$\sigma(\omega) = \frac{1 + \cos(\pi\omega / \Omega)}{\pi\omega / \Omega}$
Riez	$\sigma(\omega) = 1.0 - \left \frac{\omega}{\Omega} \right ^2$

5.3.3 ERRORES POR DISCRETIZACIÓN EN FRECUENCIA

La ecuación (5.6) en su forma discreta es [34]:

$$f_2(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \quad (5.27)$$

donde $\Delta\omega$ es el paso de integración del espectro. De la propiedad de muestreo de la función de Dirac, el término de la sumatoria puede ser expresado como:

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.28)$$

donde $G(\omega)$ es la función impulso de Dirac en el dominio de la frecuencia.

$$G(\omega) = \Delta\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Delta\omega) \quad (5.29)$$

y en el dominio del tiempo,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (5.30)$$

cuyo período es $T = 2\pi/\Delta\omega$ [37]. De la ecuación (5.28) y la definición de la transformada inversa de Fourier tenemos:

$$F_2(j\omega) = F(j\omega)G(\omega) \quad (5.31)$$

Usando el teorema de la convolución, la aproximación discreta de $f_1(t)$ esta dada por la convolución original de $f(t)$ y la función del impulso de Dirac $g(t)$:

$$f_2(t) = f(t) * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) \quad (5.32)$$

Esta ecuación muestra que $f_2(t)$ es obtenida de la superposición de $f(t)$ y sus desplazamientos $f(t+T)$, $f(t+2T)$, etc., como se muestra en la Fig. 5.4. Esto causa el error de *aliasing* temporal, el cual es disminuido multiplicando $f(t)$ por un factor de amortiguamiento $\exp(-ct)$, como en (5.3), de tal manera que $f(t)$ tiende a zero para $t > T$. La función $f_1(t)$ aproximará a $f(t)$ en forma precisa en el intervalo de $0 < t < T$ si la constante de atenuación c es seleccionada adecuadamente.

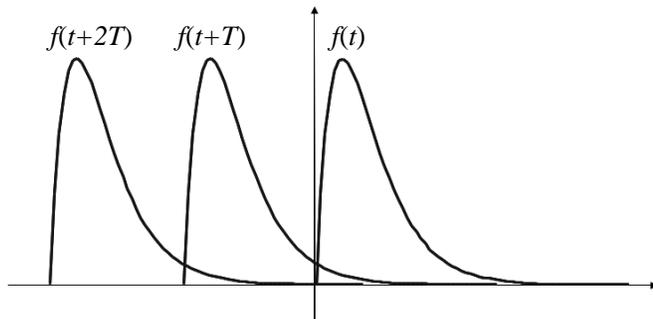


Fig. 5.4: Superposición de $f(t)$ y sus desplazamientos $f(t+T)$, $f(t+2T)$.

El factor $\exp(-ct)$ es usado para amortiguar $f(t)$, esto hace suponer que un valor alto para c es requerido. Desafortunadamente, otros errores se incrementan si c es muy alto, la expresión $\exp(ct)$ en la transformada inversa de Laplace actúa como una ventana temporal que convoluciona con el espectro, cuando multiplicamos por $f(t)$, magnificamos el error remanente relacionado al truncamiento y cuantificación. La

determinación de c esta basado en reglas empíricas. Wilcox [12] propuso el siguiente criterio:

$$c = 2\Delta\omega \quad (5.33)$$

Wedepohl [31] encontró una relación entre el número de muestras N y la constante c , dada por:

$$c = \frac{\ln(N^2)}{T} \quad (5.34)$$

ó su equivalente basado en el rango de error:

$$c = -\log(\epsilon) / T \quad (5.35)$$

donde

ϵ = Rango o nivel de error.

T = Tiempo de observación del transitorio *EM*

Aplicando en forma adecuada las ecuaciones (5.34) y (5.35) los errores de *aliasing* temporal son reducidos considerablemente.

5.4 CÁLCULO DE TRANSITORIOS *EM* EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Considérese el sistema de cables subterráneos se muestra en la Fig. 2.1a y b del Capítulo 2. Como ya se ha mencionado en capítulos anteriores dicho sistema corresponde al caso base reportado por Wedepohl y Wilcox [4]. Se asume una longitud total del sistema de = 10 millas, mientras que su representación nodal de dos puertos se muestra en la figura 5.5.

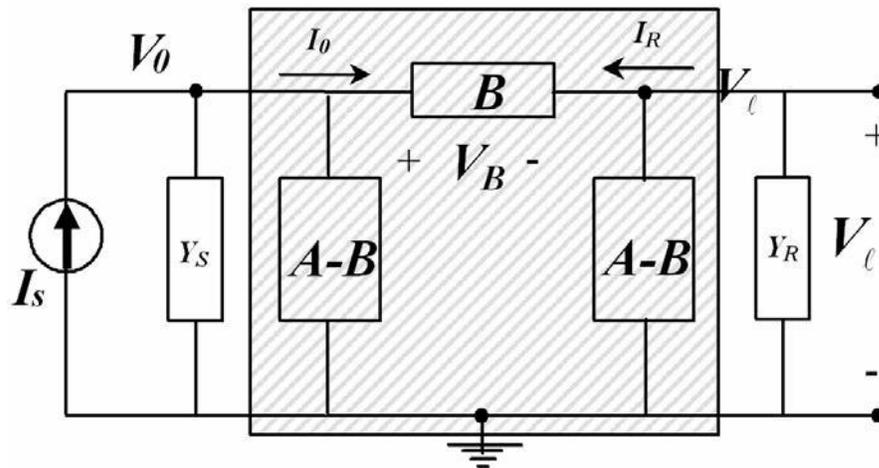


Fig. 5.5: Representación nodal de dos puertos para un sistema de cables subterráneos conectado con Y_S y Y_R en sus extremos.

A través de la representación nodal se puede relacionar la respuesta de voltaje desconocida en el extremo final $V(s)$ con el voltaje de excitación conocido $V_0(s)$ en el extremo inicial de la siguiente manera.

$$V = H(s) \cdot V_0 \quad (5.36)$$

donde, $H(s)$ es la función de transferencia del sistema mostrado en la Fig. 5.5, la cual esta dada por:

$$H(s) = \{-A^{-1} \cdot B\} \quad (5.37)$$

donde

A y B son las matrices de la función de propagación.

Del mismo modo, la relación de la respuesta de voltaje en el extremo final $V(s)$ con la corriente de alimentación $I_0(s)$ en el extremo inicial se calcula de la siguiente manera.

$$V = H(s) \cdot I_0 \quad (5.38)$$

donde $H(s)$ esta dada por:

$$H(s) = \left\{ \begin{matrix} B - (A + Y) B^{-1} (A + Y) \\ s \quad R \end{matrix} \right\}^{-1} \quad (5.39)$$

donde

Y_S y Y_R son las matrices de admitancia paralelo conectadas en ambos extremos del sistema de transmisión por cables subterráneos.

A y B son las matrices de la función de propagación.

Se toma de base la ecuación (5.36) para relacionar los voltajes transitorios en ambos extremos del sistema de cables. El vector de voltajes de excitación para los núcleos del sistema se muestra a continuación:

$$\mathbf{V}_0(s) = \begin{matrix} I/s \\ 0 \end{matrix} \quad (5.40)$$

donde el término I/s en la ecuación (5.40) indica una función escalón en el extremo inicial del núcleo energizado.

Las formas de onda en el dominio del tiempo para $V(s)$ en (5.36) son obtenidas aplicando la inversa de la Transformada Numérica de Laplace (NLT).

$$\mathbf{V}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{V}(s) e^{st} ds \quad (5.41)$$

donde, $s = c + j\omega$ es la variable de Laplace, c es el factor de amortiguamiento y ω es la frecuencia angular.

Una aproximación a la solución numérica de (5.41) se muestra a continuación:

$$\mathbf{v}_m(t) = \frac{e^{cm\Delta t}}{\Delta t} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \mathbf{v}_n e^{2j\pi mn/M} \quad (\text{para } m = 0, 1, \dots, M-1) \quad (5.42)$$

donde M es el número de muestras en frecuencia y tiempo para representar a $V(t)$ y a $V(s)$; Δt es el paso de tiempo; \mathbf{v}_m sustituye a $\mathbf{V}_m(m\Delta t)$ y \mathbf{V}_n sustituye $\mathbf{V}(n\Delta\omega)$;

$\sigma_n = \sigma(n\Delta\omega)$ es la ventana de datos usada para disminuir el fenómeno Gibbs. En este ejemplo se utiliza la ventana de datos Vonn Hann (Ver Tabla I).

Se utiliza la ecuación (5.35) propuesta por Wedepohl [35] para encontrar el valor adecuado de la constante c y así evitar los posibles errores de *aliasing* temporal.

La implementación de Matlab para obtener el voltaje de recepción es la siguiente:

$$\mathbf{v} = \exp(\mathbf{c}*\mathbf{t}).*iff(\mathbf{V}(\mathbf{c}+\mathbf{j}\omega).*\sigma)/\Delta t; \quad (5.43)$$

La expresión entre paréntesis en (5.43) es la Transformada Inversa de Fourier; \mathbf{v} es un vector que contiene $\mathbf{v}(t)$ muestras en tiempo; \mathbf{V} es el vector con $\mathbf{V}(c+j\omega)$ muestras en frecuencia; σ es el vector que contiene las muestras en frecuencia de la ventana de datos que está siendo aplicada; \mathbf{t} es el vector de tiempo; Δt es Δt y $iff()$ es la función de Matlab para el cálculo de la transformada inversa rápida de Fourier.

A continuación se comparan las respuestas transitorias de voltaje (\mathbf{v}) obtenidas con la técnica de Laplace (dominio de la frecuencia) y el programa PSCAD-EMDC (dominio del tiempo).

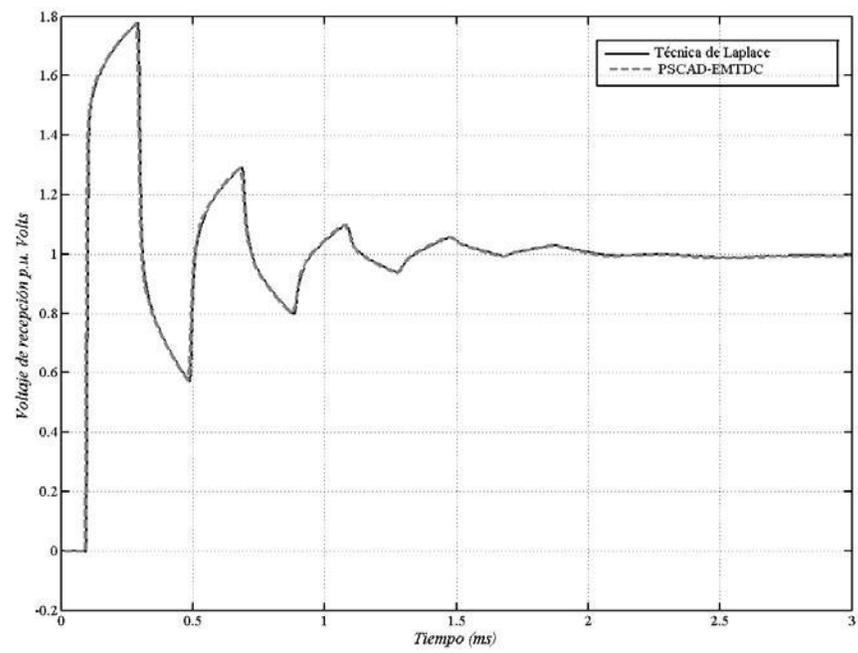


Fig. 5.6: Respuesta transitoria de voltaje (\mathbf{v}) para el núcleo energizado en el extremo receptor del sistema de la Fig. 2.1.

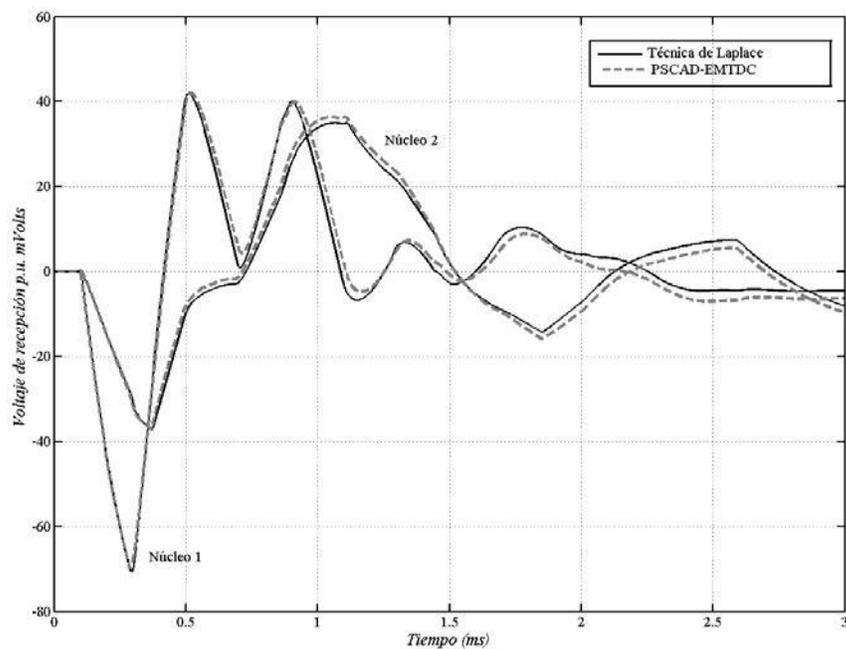


Fig. 5.7: Respuestas transitorias de voltaje (v) de los núcleos 2 y 3 no energizados en el extremo receptor del sistema de cables en la Fig. 2.1.

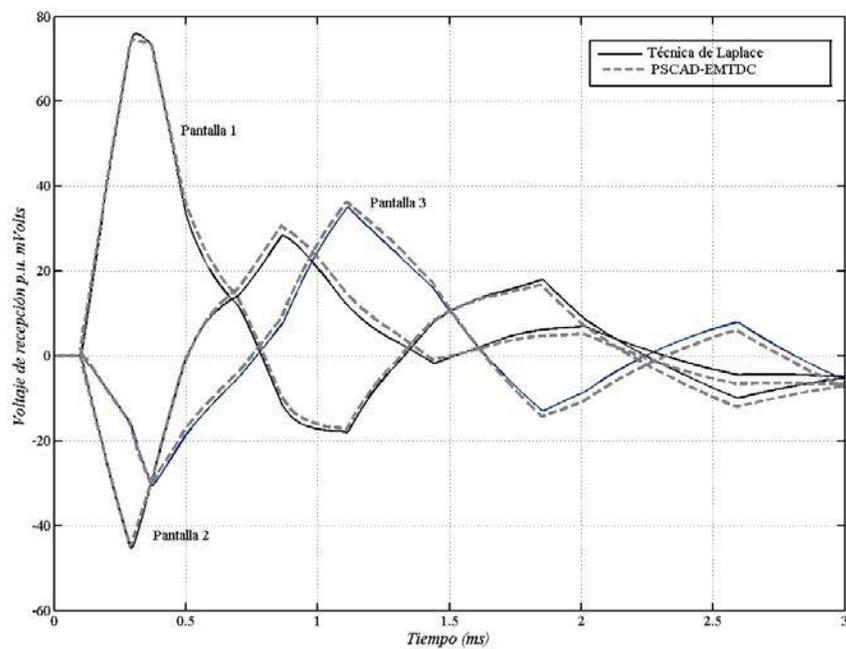


Fig. 5.8: Respuestas transitorias de voltaje (v) de todas las pantallas en el extremo receptor del sistema de cables en la Fig. 2.1.

De la comparación se observan resultados muy similares con ambos métodos. Sin embargo, para la simulación del programa PSCAD-EMTDC se requirieron un total de 60 polos para la aproximación de la función de transferencia. Esto significa una aproximación de alto orden para el modelo de la Fig. 2.1 y un incremento considerable en el tiempo de cómputo. Además, en este programa, el cálculo de parámetros electromagnéticos viene hacer una caja negra donde la precisión de los mismos no puede ser determinada. Como dato importante, se tiene que la impedancia de retorno por tierra muchas veces es aproximada mediante fórmulas cerradas de aproximación. En cambio, la metodología usada para el cálculo de transitorios *EM* a través de Laplace resulta precisa porque incorpora directamente la dependencia frecuencial de los parámetros. A su vez, el error producido por truncamiento y discretización es controlado a un grado que no represente un peso considerable en la solución total.

Por lo tanto, las pequeñas diferencias que existen entre un programa y otro se deben principalmente a:

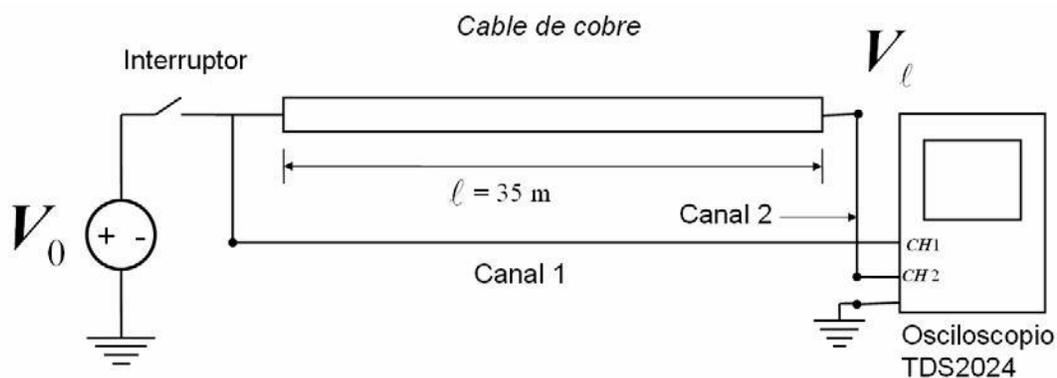
- 1) El programa en el dominio del tiempo (PSCAD) no contempla una metodología precisa para el cálculo de parámetros electromagnéticos *ZY* altamente dependientes de la frecuencia, principalmente, la impedancia de retorno por tierra. En el método de la transformada inversa de Laplace, el cálculo de estos parámetros es muy preciso.
- 2) El error debido al ajuste racional en frecuencia que se tiene en el programa del dominio del tiempo (PSCAD).

Dada su precisión y eficiencia, la técnica de Laplace podría servir como una base confiable para validar los métodos de cálculo de transitorios electromagnéticos del dominio tiempo.

5.5 MEDICIÓN DE VOLTAJES TRANSITORIOS: EXPERIMENTO ESCALADO EN EL LABORATORIO

Finalmente, se realizó un experimento escalado en el laboratorio para comparar cualitativamente los resultados de las mediciones prácticas y el método de la Transformada Numérica de Laplace (Ver Fig. 5.9). Se utiliza un cable conductor de 1.302 mm^2 (16 AWG) para 600 V con $r=1.25 \text{ mm}$, $h=0.1 \text{ m}$, $\rho_{cu}=1.72 \times 10^{-4} \Omega\text{-m}$ sobre un suelo de $\rho_{suelo}=1000 \Omega\text{-m}$ y $l = 35 \text{ m}$.

El voltaje de la fuente V_0 energiza el extremo emisor del cable como se muestra en la Fig. 5.9a. Posteriormente, se mide la respuesta del escalón de voltaje con un osciloscopio TDS2024 en el extremo receptor, como se muestra en la misma figura. En la Fig. 5.10b se comparan los voltajes medidos en ambos extremos del sistema y el voltaje calculado en el extremo receptor con la técnica de Laplace.



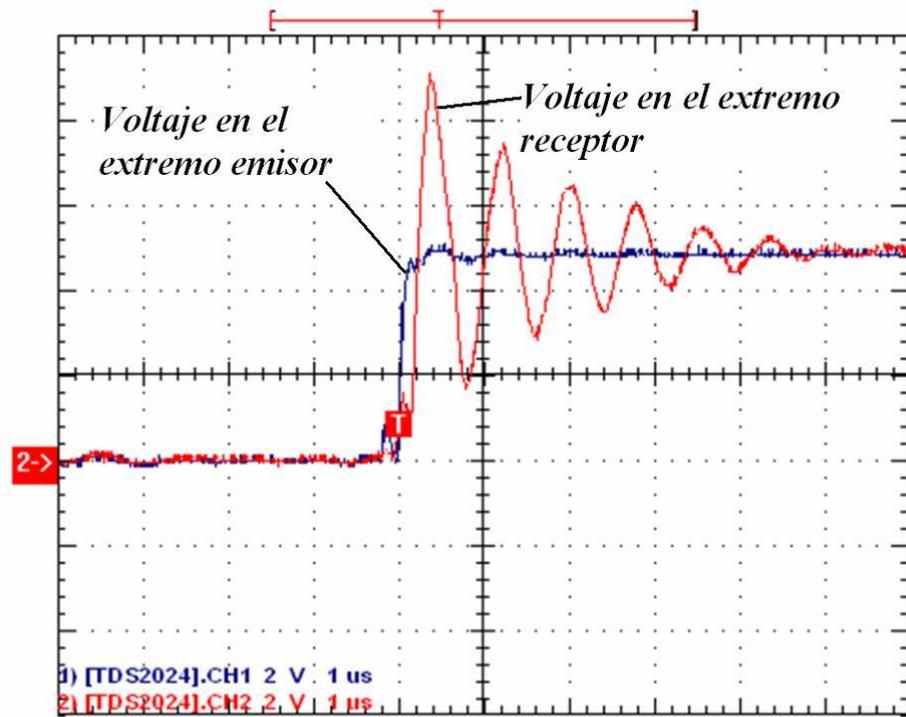
a)

Osciloscopio TDS2024

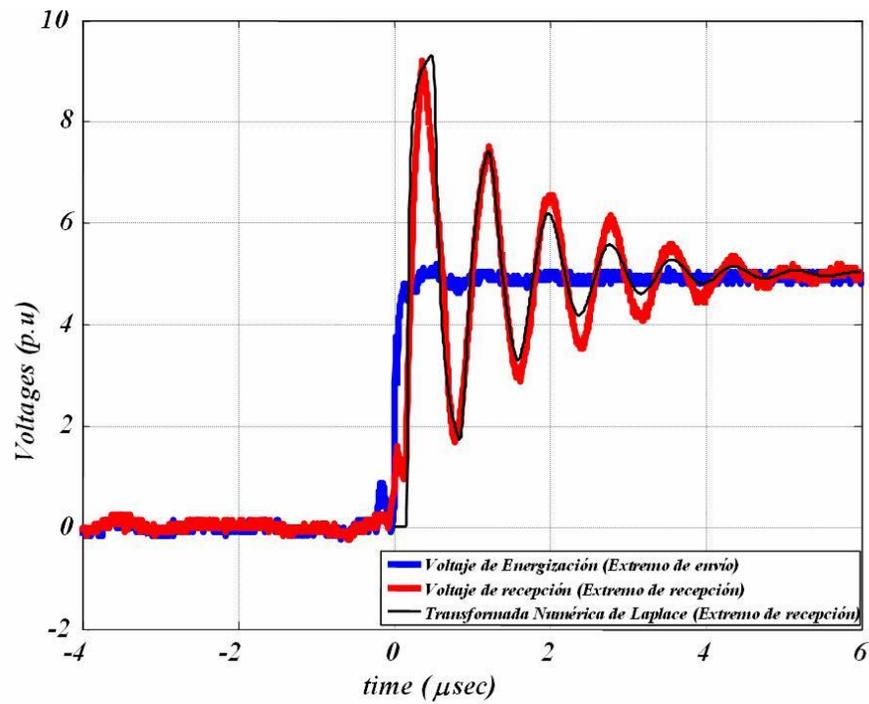


b)

Fig. 5.9: Diagrama esquemático de la prueba en el laboratorio. a) Conexiones, b) Osciloscopio utilizado.



a)



b)

Fig. 5.10: Mediciones en laboratorio de un experimento escalado. *a)* Voltaje de energización en el extremo emisor y su respuesta transitoria en el extremo receptor del cable. *b)* Superposición entre el escalón de voltaje medido en el extremo emisor del cable y la respuesta transitoria de voltaje calculada (NLT) y medida en el extremo receptor.

Las respuestas transitorias de voltaje de recepción obtenidas tanto con la Transformada Numérica de Laplace y el experimento escalado en el laboratorio son muy parecidas. Las pequeñas diferencias observadas se deben probablemente a las discrepancias entre el sistema experimental con el modelo y parámetros utilizados, tomando como base el sistema de la Fig 2.1.

Este experimento a escala demuestra la validez de los programas basados en técnicas del dominio de la frecuencia. Aunque no es muy necesario, ya que los fundamentos de las técnicas del dominio de la frecuencia han quedado demostrados desde hace muchos años por distintos autores. Sin embargo, sirve para evaluar el modelado teórico con la realidad física del sistema.

5.5 CONCLUSIONES

Se desarrolló una metodología precisa para el cálculo de transitorios *EM* en sistemas de cables subterráneos, basada en el dominio de la frecuencia, a través de la Transformada Numérica de Laplace (NLT). Esta metodología es altamente precisa porque incorpora la totalidad de la dependencia frecuencial de los parámetros electromagnéticos, de tal modo que puede servir como herramienta confiable para validación de técnicas basadas en el dominio del tiempo. A su vez, también es precisa porque los errores producidos por truncamiento y discretización no representan gran peso para la obtención de la solución total. Adicionalmente, la eficiencia requerida para el cálculo de transitorios electromagnéticos por medio de esta técnica es mucho mayor que las técnicas basadas en el dominio del tiempo.

Se compararon los resultados obtenidos con la técnica de Laplace en el dominio de la frecuencia, la simulación en el PSCAD-EMTDC y la medición realizada en un experimento escalado en el laboratorio. A partir de estas comparaciones se obtuvo que:

- 1) Los programas de uso comercial basados en técnicas del dominio del tiempo aproximan la dependencia frecuencial de los parámetros electromagnéticos, la cual puede ser fuente de errores.

- 2) A su vez, para mejorar la eficiencia, las técnicas del dominio del tiempo reducen considerablemente el orden del modelo a través de aproximaciones racionales en frecuencia. Dichas aproximaciones racionales acarrearán un error adicional al método.
- 3) Finalmente, las pequeñas diferencias observadas entre la técnica de Laplace y las mediciones hechas en el laboratorio se deben principalmente a posibles discrepancias entre el experimento escalado y el modelo utilizado, el cual está basado en un sistema como el de la Fig. 2.1. Por lo tanto, se tienen discrepancias en los parámetros usados y los reales (ρ_{suelo} , longitud, etc.).

Capítulo 6

CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIONES GENERALES

Se desarrolló una metodología precisa para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos tipo coaxial. Dicha metodología es altamente precisa porque incorpora en su totalidad la dependencia frecuencial de los parámetros electromagnéticos ZY mediante los planteamientos de Schelkunoff y Pollaczek referentes al cálculo de la impedancia de conductores cilíndricos tubulares y la impedancia de retorno por tierra.

Se desarrolló un algoritmo híbrido capaz de calcular la impedancia de retorno por tierra de manera precisa, eficiente y confiable en sistemas de cables subterráneos para el rango más amplio de aplicaciones reportado en la literatura especializada. Este algoritmo es parte fundamental del cálculo de parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos.

Esto nos permite contar con una metodología para hacer ajustes racionales o síntesis en frecuencia de cualquier función matricial H y Y_c de un sistema de transmisión por cables subterráneos. Así mismo, dicha metodología permite una reducción considerable del número de convoluciones recursivas en el dominio del tiempo y es posible obtener en forma mucho más eficiente las respuestas transitorias de voltajes o corrientes en

cualquier punto longitudinal del sistema de transmisión por cables subterráneos. Con lo anterior se reduce de manera considerable el tiempo requerido por las simulaciones.

Además, la metodología desarrollada en base a la transformada inversa de Laplace (NLT) para el cálculo de transitorios *EM* es útil, precisa y eficiente. La precisión se logra porque se incorpora la totalidad de la dependencia frecuencial de los parámetros *EM*, de tal modo que, puede servir como herramienta confiable para validación de técnicas basadas en el dominio del tiempo. Además, es altamente eficiente porque utiliza el algoritmo de la IFFT (transformada rápida de Fourier inversa).

6.2 PRINCIPALES APORTACIONES

Se presentó la metodología precisa para de cálculo de parámetros *EM* en sistemas de cables subterráneos.

Se implementó una versión vectorial modificada del planteamiento original de las series de Wedepohl, propuestas en 1969, para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra en baja frecuencia.

Se desarrolló un algoritmo híbrido basado en la implementación de las series de Wedepohl para baja frecuencia y un método de integración numérica adaptiva de I_w (integral de Wedepohl) para alta frecuencia.

Se aplicó el algoritmo híbrido para el rango más amplio de aplicaciones reportado en la literatura especializada para modelos de suelos homogéneos.

Se aplicó la metodología para hacer ajustes racionales en frecuencia a las funciones que caracterizan a un sistema de transmisión por cables (*H* y *Y_C*).

Finalmente, se aplicó la técnica de la transformada inversa de Laplace para el cálculo preciso y eficiente de transitorios *EM* en sistemas de cables subterráneos.

6.3 RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Las principales recomendaciones son:

- ¾ Hacer una medición de transitorios *EM* a mayor escala en campo y comparar los resultados con la técnica de Laplace y otros métodos de dominio en el tiempo.

Los trabajos futuros son:

- ¾ Aplicar el Método de Diferencias Finitas basado en técnicas del dominio del tiempo para el cálculo de transitorios *EM* en sistemas de cables subterráneos.
- ¾ Extender y desarrollar esta metodología de estudio para el análisis de transitorios *EM* en sistemas de cables subterráneos del tipo segmental.

REFERENCIAS

- [1] L. M. Wedepohl, "Electrical characteristics of poly-phase transmission systems with special reference to boundary-value calculations at power-line Carrier frequencies", Proceedings of the IEE, Vol. 112 , No.11, November 1965.
- [2] H. W. Dommel, Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book), Prepared for Bonneville Power Administration, P.O. Box 3621, Portland, Ore., 97208, USA, 1986.
- [3] J. R. Marti, "Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.1, pp. 147-155, 1982.
- [4] D. J. Wilcox, Transient and Harmonic Induction in Underground Cable Systems, PhD. Thesis, The Victoria University of Manchester, Institute of Science and Technology, 1969.
- [5] A. Ametani, "A general formulation of impedance and admittance of cables", *IEEE Transactions on Power Apparatus Systems*, Vol. PAS-99, No.3, pp. 902-910, May/June 1980.
- [6] L. Marti, "Simulation of transients in underground cables with frequency dependent modal transformation matrices", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol.3 (3), 1099-1110, 1988.
- [7] C. A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley and Sons, Inc., 1989, pp. 981.
- [8] S. A. Schelkunoff, "The Electromagnetic Theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields", The Bell System Technical Journal, Vol. 13, pp.532-539, 1934.
- [9] F. Pollaczek, "Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung", *Electrische Nachrichten Technik*, Vol. 3, No. 9, pp. 339-360, 1926.

- [10] L. M. Wedepohl, "Wave propagation in non-homogeneous multi-conductor systems using the concept of natural modes", Proceedings of the IEE, Vol. 113, No.4, April 1966.
- [11] L. M. Wedepohl and D.J. Wilcox, "Transient analysis of underground power transmission systems", Proceedings of the IEE, Vol. 120, No. 2, February 1973.
- [12] D.J. Wilcox, "Numerical Laplace Transformation and Inversion," International Journal on Electrical Engineering Education, vol. 15, No. 247, 1978.
- [13] The Vector Fitting web site [online] Available:
<http://www.energy.sintef.no/Produkt/VECTFIT/index.asp>.
- [14] B. Gustavsen, "Time delay identification for transmission line modeling," in Proc. 8th IEEE Workshop Signal Propagation Interconnects Heidelberg, Germany, May 9–12, 2004, pp. 103-106.
- [15] Gustavsen, B.; Semlyen, A., "Combined phase and modal domain calculation of transmission line transients based on vector fitting", *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 13, no. 2, pp. 596 - 604, April 1998.
- [16] L. Marti, "Simulation of transients in underground cables with frequency dependent modal transformation matrices", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 3, No. 3, pp. 1099-1110, 1988.
- [17] A. Semlyen and B. Gustavsen, "Vector fitting by pole relocation for the state equation approximation of nonrational transfer matrices," *Circuits Syst. Signal Process.*, vol. 19, no. 6, pp. 549-566, Nov. 2000.
- [18] B. Gustavsen, "Improving the pole relocation Properties of Vector Fitting", *IEEE Power Del.*, Vol 21, no 3, pp. 1587-1592, July 2006.
- [19] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain by Vectfit", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol 14, no. 3, pp. 1052-1061, July 1999.
- [20] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting", *IEEE Trans. Power Delivery*, Vol. 14, No. 3, pp.1052-1061, 1999.
- [21] L. M. Wedepohl, H.V. Nguyen and G.D. Irwin, "Frequency-Dependent Transformation Matrices for Untransposed Transmission Lines using Newton-Raphson Method", Proceedings of the IEEE, Vol. 11, No.3, August 1996.

- [22] O. Saad, G. Gaba, M. Giroux, "A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol.11, No.3, pp. 1536-1545, July 1996.
- [23] W. Gander and W. Gautschi, "Adaptive Quadrature – Revisited", *BIT*, vol. 40, pp. 84-101, 2000.
- [24] The web site [online] of Canadian Copper and Brass Development Association.
<http://www.ccbda.org/homepage.htm>
- [25] F. A. Uribe, "Accurate modeling of underground cable earth impedances for electromagnetic transients", in *Proc. 2006 IEEE Power engineering general meeting*, pp. 1-6.
- [26] F. A. Uribe, J. L. Naredo, P. Moreno and L. Guardado, "Electromagnetic Transients in Underground Transmission Systems Through The Numerical Laplace Transform", *Elsevier Science Ltd, Electrical Power and Energy Systems*, 24 (2002), pp. 215-221.
- [27] N. Nagaoka and A. Ametani, "A Development of a Generalized Frequency Domain Transient Program – FTP," *IEEE Trans. Power Delivery*, Vol. 3, Nr. 4, pp. 1996-2004, 1988.
- [28] A. Semlyen, discussion to "Overhead line parameters from handbook formulas and computer programs", by H. Dommel, *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-104, pp. 371, Feb 1985.
- [29] A. Deri, G. Tevan, A. Semlyen and A. Castanheira, "The complex ground return plane: A simplified model for homogeneous and multi-layer earth return", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-100, No. 8, pp. 3686-3693, August 1981.
- [30] C. Gary, "Approche complète de la propagation multifilaire en haute fréquence par utilisation des matrices complexes", *E.D.F Bulletin de la Direction des Études et Recherches*, série B, No. 3/4, pp.5-20, 1976.
- [31] C. Dubanton, "Calcul approché des paramètres primaires et secondaires d'une ligne de transport – Valeurs homopolaires", *E. D. F., Bulletin de la Direction des Études et Recherches* No. 1, sere B, 1969.

- [32] F. A. Uribe, J. L. Naredo, P. Moreno and L. Guardado, "Algorithmic evaluation of underground cable earth impedances," *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 19, No.1, pp.316-322, January 2004.
- [33] A. Morched, B. Gustavsen, A. Tartibi, "A universal line model for accurate calculation of Electromagnetic Transients on overhead lines and underground cables", *IEEE, Transactions on Power Delivery*, Vol. 14, No. 3, pp. 1032-1038, July 1999.L.
- [34] David K. Cheng, "Analysis of Linear Systems", Addison.Wesley, Series in Electrical Engineering 1966.
- [35] L. M. Wedepohl, "Power System Transients: Errors Incurred in the Numerical Inversion of the Laplace Transform", *Proc. of the 26th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 1983.
- [36] E. Oram Brigham, "The Fast Fourier Transform and its Applications", Prentice Hall, 1988.
- [37] R. E. Bellman, R. E. Kalaba, and J. Lockett, "Numerical Inversion of the Laplace Transform," *Elsevier*, New York, 1966.
- [38] S. J. Day, N. Mullineux, and J. R. Reed, "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Part I: Gibbs Phenomena and Fourier Integrals," *Int. J. Elect. Engng. Educ.*, Vol. 3, pp. 501-506, 1965.
- [39] S. J. Day, N. Mullineux, and J. R. Reed, "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Part II: Use of the Modified Fourier Transform," *Intl. J. Elect. Eng. Educ.*, Vol. 4, pp. 31-40, 1966.
- [40] S. J. Day, M. J. Battisson, N. Mullineux, and J. R. Reed, "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms. Part III: Global Response," *Intl. J. Elect. Eng. Educ.*, Vol. 6, pp. 259-265, 1968.
- [41] N. Mullineux and J. R. Reed, "Developments in Obtaining Transient Response Using Fourier Transforms: Part IV-Survey of the Theory," *Intl. J. Elect. Eng. Educ.*, Vol. 10, pp. 259-265, 1973.
- [42] L. M. Wedepohl and S. E. T. Mohamed, "Multiconductor transmission lines. Theory of Natural Modes and Fourier integral applied to transient analysis," *Proc. IEE*, Vol. 116, No. 9, pp. 1553-1563, September 1969.

- [43] A. Ametani, "The Application of the Fast Fourier Transform to Electrical Transient Phenomena," *Intl. J. Elect. Eng. Educ.*, Vol. 10, pp. 277-287, 1973.

Apéndice I

Permitividades relativas y factores de pérdidas para distintos materiales dieléctricos

MATERIAL DIELECTRICO		
Aire	1.0006	
Alcohol Etílico	25	0.1
Oxido de Aluminio	8.8	0.0006
Bakelita	4.74	0.022
Dióxido de carbono	1.001	
Germanio	16	
Vidrio	0.0000004	
Hielo	4.2	0.1
Mica	3.5	0.02
Nylon	3.5	0.02
Papel	3.0	0.008
Plexigas	3.45	0.04
Poliestireno	2.56	0.00005
Porcelana	6.0	0.014
Vidrio Pyrex	4.0	0.0006
Cuarzo	3.8	0.00075
Plástico	0.0025	0.002
Silica	3.8	0.00075
Silicón	11.8	
Nieve	3.3	0.5
Cloruro de Sodio	5.9	0.0001
Tierra (seca)	2.8	0.07
Teflón	2.1	0.0003
Dióxido de Titanio	100	0.0015
Agua destilada	80	0.04
Agua de mar	81	4.64
Madera (seca)	1.5-4	0.01
Aceite aislante	2.2 - 2.8	0.001 a 0.002
Polietileno	2.3	0.0002
Cloruro de Polivinilo	3.0 - 4.0	0.02 a 0.10

Apéndice II

Integración numérica de una función con límites definidos por el método de la regla rectangular

MÉTODO DE LA REGLA RECTANGULAR

Consistente en dividir el área que se desea encontrar en n sub-áreas en forma de rectángulos (Ver Fig. A.2).

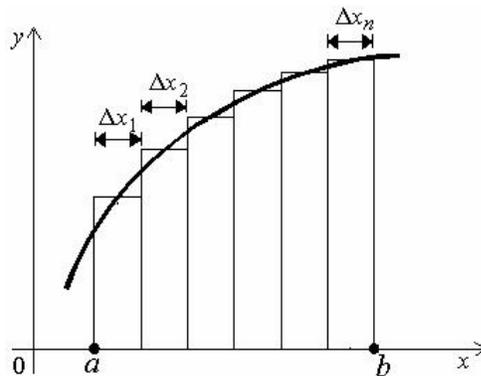


Fig. A.1: Método de la regla rectangular para integración numérica

Para el desarrollo del modelo se toman como referencia las siguientes variables:

- n = Número de sub-áreas en las cuales se divide el área a calcular
 Δx ó dx = Ancho o base de cada sub-área

L_i ó a = Límite inferior definido para el calculo del área

L_s ó b = Límite superior definido para el calculo del área.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE UNA FUNCIÓN POR EL MÉTODO DE RECTÁNGULOS

La integral definida entre los puntos a y b de una función continua y acotada $f(x)$ representa el área comprendida debajo de esa función (Ver Fig. A.2). En ocasiones es necesario calcular integrales de modo numérico, es decir, sin conocer la integral explícita de la función $f(x)$. Existen varios métodos para calcular esta área. El más sencillo consiste en sustituir el área por un conjunto de n sub-áreas donde cada sub-área semeja a un pequeño rectángulo elemental de base $dx = (b - a)/n$ y altura h . El área de cada rectángulo es $h * dx$, donde h es el valor de la función calculada en el punto medio del área, ó sea $f(a + dx/2)$ y Δx ó dx es el ancho definido para dicha sub-área.

Si se toma L_i como limite inferior definido para el cálculo de la integral entonces el punto sobre el eje x para el calculo de h será: $L_i + \Delta x / 2$. Teniendo en cuenta lo anterior el área será: $\text{área} = \Delta x * f(L_i + dx/2)$.

Si el área que se desea calcular se divide entre N sub-áreas, donde cada una de ellas representa un pequeño rectángulo, entonces el área total será la sumatoria de todas las áreas parciales como se describe a continuación:

El área del primer rectángulo es:

$$A_1 = \Delta x \cdot f(x_1) = \Delta x \cdot f(L_i + \Delta x / 2) \quad (A2.1)$$

El área del segundo rectángulo es:

$$A_2 = \Delta x \cdot f(x_2) = \Delta x \cdot f(L_i + 3 \cdot \Delta x / 2) \quad (A2.2)$$

El área del tercer rectángulo es:

$$A_3 = \Delta x \cdot f(x_3) = \Delta x \cdot f(L_i + 5 \cdot \Delta x / 2) \quad (\text{A2.3})$$

El área del i -ésimo rectángulo es:

$$A_i = \Delta x \cdot f(x_i) = \Delta x \cdot f(L_i + (2i - 1) \cdot \Delta x / 2) \quad (\text{A2.4})$$

El área total se define como:

$$A = \int_{L_i}^{L_s} f(x) dx = \Delta x \cdot f(L_i + (2i - 1) \cdot \Delta x / 2) \quad (\text{A2.5})$$

La representación gráfica de esta forma de aproximar la integral se presenta en la Fig. A.1. De tal modo que, si n es grande, el diferencial dx es muy pequeño y por consiguiente el *error* es pequeño.

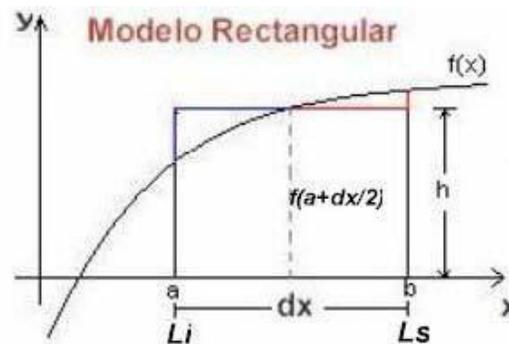


Fig. A.2: Modelo Rectangular

Apéndice III

Algoritmo híbrido

1.- Se calculan todos los valores de D/p del caso de estudio a analizar.

2.- Aplica la siguiente solución algorítmica de las Series de Wedepohl:

for $n = 2 : N$

$$fg_1(n) = (2h^{2n-3})(x^3)(D^{-2n}) + (n-1)(fg_1(n-1))/(2n-2);$$

$$fg_2(n) = (2h^{2n-2})(x^3)(D^{-2n-1}) + (2n-2)(fg_2(n-1))/(2n-1);$$

$$fg_3(n) = (2h^{2n-3})(x^1)(D^{-2n-2}) + (2n-3)(fg_3(n-1))/(n-1);$$

$$fg_4(n) = (2h^{2n-1})(x^1)(D^{-2n}) + (2n-1)(fg_4(n-1))/(2n-3);$$

% Subterminos de las Series :

$$g_1(n) = (1/(n)(2n-2)!)(D/p)^{2n-2}(fg_1(n)) + g_1(n);$$

$$g_2(n) = (-2/(2n+1)!)(D/p)^{2n+1}(fg_2(n)) + g_2(n);$$

$$g_3(n) = (-1/(2n-2)(2n-2)!)(D/p)^{2n-2}(fg_3(n)) + g_3(n);$$

$$g_4(n) = (1/(2n-1)(2n-1)!)(D/p)^{2n-1}(fg_4(n)) + g_4(n);$$

end

% Solucion Series Infinitas de Potencia S_w

$$= g_1(n) + g_2(n) + g_3(n) + g_4(n);$$

else

% Integracion Numerica (Metodo Cuadratura Gauss - Lobatto :

% @intgrnd_wedepohl = Se refiere a ecuacion (3.5)

$$S_w = \text{quadll}(\text{@intgrnd_wedepohl}, l/z, 0.99999999, 1e-6, 0, z, p);$$

end

3.- Finalmente se sustituye el resultado del proceso algorítmico del paso 3 en la ecuación (3.3) para calcular Z_T .

Apéndice IV

Algoritmo para evitar la conmutación de modos

ALGORITMO EN MATLAB PARA CORREGIR LA CONMUTACIÓN DE MODOS

if $i \geq 2$ % El algoritmo empieza a correlacionar a partir de la 2ª frecuencia.

[a b] = **max** (T(:, :, i)' * T(:, :, i-1));

% Con esta función se obtienen los elementos mayores junto con su posición en todas las filas de la matriz de correlación (**S**).

% Función lógica que establece si hay ó no hay conmutación.

tf = **issorted** (b); % Si tf = 1 hay conmutación y si tf = 0 no hay conmutación.

if tf = 1

else

 % Reacomodo de la matriz de eigenvectores.

T(:, :, i) = **T**(:, b, i);

 % Nuevo cálculo de la matriz de **T**⁻¹

T⁻¹(:, :, i) = **inv**(**T**(:, :, i));

 % Nuevo cálculo de la matriz de eigenvalores **λ**

λ(:, :, i) = **T**⁻¹(:, :, i) * **Z**(:, :, i) * **Y**(:, :, i) * **T**(:, :, i);

end

end

Apéndice V

Algoritmo para el cálculo del ángulo de H_{min}

CÓDIGO DE MATLAB PARA EL CÁLCULO DE $\angle H_{min}$.

% Primer término:

```
phase1=(pi/2)*log(abs(H(j+1)))/(abs(H(j+1))) / ( log( ω(j+1)/ω(j-1) );
```

% Segundo término:

```
phase2 =0;
```

```
for k=1:Ns-1;
```

```
    term1=log(abs(H(j+1))/abs(H(j))) / log(ω(j+1)/ω(j));
```

```
    term2=log(abs(H(j+1))/abs(H(j-1))) / log(ω(j+1)/ω(j-1));
```

```
    angulo=log( coth( abs( log(ω(j+1) + ω(j) / (2*ω(j)) ) /2 ) * log(ω(j+1)/ ω(j)) );
```

% Cálculo de la fase 2:

```
    phase2= phase2 + (abs(term1) - abs(term2))* angulo;
```

```
end
```

```
phase2 = phase2*(pi/2);
```

```
phasemin = (phase1)-(phase2);
```

% Angulo de fase en radians.

```
taumin = tiempo + phasemin./ ω(j);
```

% Segundos.

Apéndice VI

Algoritmo para relacionar el *error-rms* de VECFIT con el retardo en tiempo (τ)

El algoritmo de Matlab para relacionar el *error-rms* de VECFIT con el retardo en tiempo τ es el siguiente:

```
t = linspace( $\tau_a$ ,  $\tau_b$ , n);    % Vector de tiempo t.  
for i = 1:n                    % n es el número de puntos del vector.  
    error-rms = inline('VF(  $H,s,\tau$ , N)', ' $\tau$ ', 'N', 's', ' $H$  ');
```

% *VF* es una subrutina creada en Matlab para encontrar el *error-rms* de VECFIT a partir de un retardo en tiempo τ dado.

% *H* es la función de propagación a ajustar, *s* es vector en frecuencia, τ es el retardo en tiempo y N es el número de muestras.

```
x = t(i);                    % Tiempo  $\tau$   
% Relación del error-rms con el tiempo  
 $\tau$  error(i) = feval(error-rms,x,N,s,  $H$ );  
end
```

En este algoritmo se utilizan los comandos *inline* y *feval* de Matlab. Además, a través de la subrutina *VF* se calcula el *error-rms* para cada retardo de tiempo (τ). A partir de este procedimiento se obtuvo la gráfica mostrada en la Fig. 4.7, la cual muestra los tiempos de retardo τ_a , τ_b y $\tau_{\text{óptimo}}$. El tiempo $\tau_{\text{óptimo}}$ está estrechamente ligado al valor mínimo del *error-rms*.