

Mejorando cotas lagrangianas
para el problema de asignación generalizada

Lic. Jania Astrid Saucedo Martínez

Diciembre 2007

Índice general

Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Resumen	vii
1. Introducción	1
1.1. Estructura de la tesis	1
1.2. Problema de Asignación (AP)	2
1.2.1. Modelos con a lo más de una tarea por agente	2
1.2.2. Modelos con múltiples tareas por agente	5
1.2.3. Modelos de asignación múltiples.	7
1.3. Objetivo	8
1.4. Justificación	8
1.5. Hipótesis	8
1.6. Metodología	8
2. Revisión de la literatura	9
2.1. Relajación lagrangiana	9
2.1.1. Relajaciones de problemas de optimización	11
2.1.2. Relajación lagrangiana (<i>LR</i>)	13
2.1.3. Solución factible lagrangiana	15
2.1.4. Interpretación geométrica	15
2.1.5. Construcción de una relajación lagrangiana	19
2.1.6. Las características de la función lagrangiana	25
2.1.7. Métodos primales y duales para resolver relajación dual	27
3. Construcción y desarrollo de cotas	45
3.1. Construcciones básicas	45
3.2. Ejemplos	52
3.3. Problema de asignación generalizada (<i>GAP</i>)	55
3.3.1. Modelo matemático de la asignación varias tareas - varios agentes	55

4. Experimentación computacional	61
4.1. Implementación	61
4.1.1. Generalidades de GAMS	61
4.1.2. Generalidades de Cplex	62
4.1.3. GAMS/Cplex	64
4.2. Indicaciones numéricas	64
4.2.1. Resultados experimentales	66
4.2.2. Prueba de hipótesis de las diferencias en las medias de las cotas.	67
5. Conclusiones	71
5.1. Conclusiones	71
5.2. Trabajo futuro	72
A. Programación lineal	73
A.1. Breve historia	73
A.2. El problema general de la programación lineal	74
A.2.1. Hipótesis de la programación lineal	74
A.2.2. Manipulaciones del problema general	75
A.3. Representación matricial de un problema lineal	76
A.3.1. Formas canónica y estándar	76
B. Programación entera	78
B.1. Breve descripción	78
B.2. Clasificación y formulaciones	78
B.3. Algoritmo de ramificar y acotar	80
B.3.1. Divide y vencerás	80
B.3.2. Enumeración implícita	80
B.3.3. Algoritmo de Ramificar y Acotar (maximizar)	80
C. El problema de transporte	82
C.1. Definición del problema de transporte	82
C.2. Matrices totalmente unimodulares	83
D. Obtenición del termino lagrangiano (C.9)	85
E. Resultados	86

Índice de figuras

2.1. Interpretación geométrica de la descomposición	20
2.2. Función lagrangiana para el caso de maximización	26
2.3. Contorno de la función lagrangiana.	27
2.4. Definición de un poliedro acotado.	37
2.5. Conjunto convexo entero de soluciones que no cambia	41

Índice de cuadros

4.1. Prueba de hipótesis para medias.	68
E.1. Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 1	87
E.2. Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 2	88
E.3. Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 3	89
E.4. Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 4	90
E.5. Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 5	91
E.6. Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 1	92
E.7. Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 2	93
E.8. Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 3	94
E.9. Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 4	95
E.10. Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 5	96

Dedicatoria

A mis padres que siempre han creído en mí, me apoyan y ayudan a realizar mis sueños. Gracias a sus enseñanzas me han impulsado a lograr mis metas y sobre todo por su amor, paciencia y comprensión.

Y especialmente a mi Mamá Conchita que al igual que mis padres ha sido un sostén para mí, gracias a sus consejos y su AMOR he podido salir adelante y así culminar mis estudios tanto de licenciatura como de postgrado.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad y las fuerzas necesarias para llegar hasta aquí y espero que me las siga brindando para seguir avanzando.

Además quiero agradecer a toda mi familia por su apoyo incondicional así como a mis amigos y compañeros: Sergio, Daniel, Lupita, Rocío y Miguel (primo) que siempre me apoyaron en cualquier decisión que tomaba, por sus consejos, y principalmente por su amistad.

Al Dr. Igor Seminovich Litvinchev por todas las enseñanzas que me ha brindado, su apoyo, paciencia, confianza y consejos durante toda la maestría.

También quiero agradecer a todo el cuerpo académico del PISIS, especialmente a los doctores que algún día me impartieron clases (Dra. Ada Álvarez, Dra. Deniz Özdemir, Dr. Oscar Chacón, Dr. Fernando López, Dr. César Villarreal, Dr. Roger Z. Ríos y al Dr. Mauricio Cabrera), e hicieron que me esforzara cada vez más en todos los aspectos de mi vida no sólo en la académica sino también en la personal, además de que reforzaron o forjaron valores como: la responsabilidad, honestidad, puntualidad, esfuerzo, dedicación, entre otros. Así como ex estudiantes y estudiantes del PISIS, especialmente a los M. C.: Miguel Mata Pérez, José Fernando Reyes Saldaña e Israel Cano que siempre estuvieron ahí cuando necesite de su ayuda.

Así mismo al: Dr. Fernando López Igarragorri y al Dr. César Villarreal por el tiempo, revisiones y comentarios que le dedicaron a este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada para poder realizar mis estudios de postgrado.

Resumen

Jania Astrid Saucedo Martínez
Candidata para el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas
Universidad Autónoma de Nuevo León.
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Postgrado de Ingeniería de Sistemas
Título del estudio:

Mejorando cotas lagrangianas para el problema de asignación generalizada

Número de páginas:103

Objetivos y método de estudio:

Muchos problemas de optimización a gran escala cuentan con una estructura especial la cual puede ser explotada usándola para la construcción de técnicas de solución eficientes. Una de las estructuras más generales y comunes es en las que se pueden diferenciar las restricciones de un problema en “fáciles” y “difíciles”. En otras palabras, el problema se torna “fácil” de resolver si logramos eliminar las restricciones difíciles. Un ejemplo típico, es el problema que cuenta con una estructura tipo “escalón” en sus restricciones la cual se descompone en subproblemas independientes relajando las restricciones de acoplamiento (“difíciles”).

Una manera conocida de explotar dicha estructura es relajar de forma lagrangiana las restricciones difíciles. Esto es, cuando relajamos las restricciones difíciles se agrega un término de penalización a la función objetivo para prevenir la violación de restricciones relajadas. Usualmente, la penalización es una combinación lineal correspondiente a holguras de restricciones difíciles tomadas con los coeficientes llamados multiplicadores de Lagrange. Dado un vector de multiplicadores fijo y resolviendo el problema lagrangiano, obtendremos una cota superior (para problemas de maximización) del valor objetivo óptimo original. El problema dual lagrangiano consiste en encontrar la mejor cota, es decir, buscar los multiplicadores lagrangianos que minimizan la cota. Las cotas

lagrangianas se utilizan como base de muchas técnicas numéricas, por ejemplo en esquemas de ramificar y acotar para problemas enteros y mixtos. En técnicas de optimización convexa las cotas son útiles para medir el progreso del algoritmo principal y obtener el criterio de parada. Además, las cotas lagrangianas se utilizan para medir la calidad de las soluciones factibles, encontradas por los métodos aproximados o heurísticos.

Existen diversas maneras en las que un problema puede ser relajado de forma lagrangiana. Por ejemplo para una partición específica de variables un cierto grupo de restricciones puede ser considerada como restricciones de acoplamiento y por lo tanto candidatas a ser relajadas. Mientras tanto, las mismas restricciones pueden ser tratadas como las restricciones correspondientes a los subsistemas (bloques) para otra partición de variables. Este tipo de estructura llamada de “descomposición doble” puede ser encontrada en varios problemas de optimización de redes, en el problema de asignación generalizada, en el problema de mochila múltiple, en el problema de ubicación de plantas, por mencionar algunos.

Para utilizar esta estructura en [57] se ha propuesto una técnica de mejoramiento de las cotas lagrangianas, donde se consideran dos subproblemas. Un de éstos es parecido al problema lagrangiano donde toman en cuenta solamente las restricciones fáciles. El otro problema de optimización es encontrar un conjunto llamado “localización”, el cual cuenta con mucha flexibilidad para ser definido. Por lo que la condición más importante es que el conjunto localización debe contener la solución óptima original. En particular, el conjunto localización puede ser definido considerando nada más que las restricciones difíciles. Si el problema original tiene la estructura de descomposición doble, ambos subproblemas se reducen a solucionar problemas de menor tamaño e independientes.

Contribuciones y conclusiones:

La contribución principal es la implementación de un método empleado como herramienta computacional para el mejoramiento de las cotas existentes de una versión del problema de asignación generalizada y demostrar que dichas cotas dominan a la cota obtenida por relajación lineal y a la clásica lagrangiana.

Además presentamos como conclusión la implementación satisfactoria de un método para la obtención de cotas para una versión del problema de asignación generalizada (*GAP*), el cual está basado principalmente en relajación lagrangiana resuelta por medio del método Benders, además la cota obtenida domina las existentes (la de relajación lineal y la lagrangiana clásica), debido a la estructura que presenta el método de Benders, podemos contar con cotas superiores e inferiores conforme va transcurriendo las iteraciones (el método agrega en cada iteración al menos un corte, el cual es tomado como restricción). Además comprobamos estadísticamente que las cotas lagrangianas modificadas dominan las

clásicas y estas son mejores que las lineales, al igual que la cercanía que presenta ésta a la solución óptima exacta.

FIRMA DEL ASESOR:

Dr. Igor Litvinchev

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estructura de la tesis

La presente tesis está estructurada de forma inductiva esto para no causar dificultades al realizar la lectura de ésta, además se incluyen apéndices y referencias, éstas ayudarán a lograr una comprensión total.

Los capítulos en los que ha sido organizada son los siguientes: en el primero se describe el problema a tratar, el objetivo, justificación e hipótesis bajo las que se realizó este trabajo.

El segundo capítulo está dedicado especialmente a la literatura existente sobre el problema a tratar, mencionaremos algunas de las estrategias y metodologías de solución que se han empleado para resolverlo y cuál es su propósito. Sin olvidar la relajación lagrangiana, que es la técnica en la cual nos enfocaremos para encontrar cotas del problema de asignación generalizada.

Dentro del tercer capítulo se desarrollará la técnica empleada, es decir las construcciones básicas y el desarrollo de las cotas lagrangianas.

El capítulo dedicado a la experimentación computacional es el cuarto, posteriormente se hizo un análisis de los resultados obtenidos; por último se presentan las conclusiones obtenidas, así como sugerencias para trabajo futuro y la contribución principal en el último capítulo.

Para no causar conflictos con respecto a la numeración de ecuaciones como de ejemplos, proposiciones, teoremas, etc. vamos a explicar de manera breve como se llevó ésta a cabo. El número de restricciones o ecuaciones que son dadas (siempre y cuando vayan a ser referenciadas posteriormente), se realizará con números arábigos, tomando una misma numeración para todos los capítulos, por ejemplo si tenemos 2 restricciones en el capítulo 1 y aparece una restricción en el capítulo 2 continuará con el número 3 y así sucesivamente. Ahora con respecto a

la numeración de ejemplos, proposiciones, teoremas, corolarios, notas y suposiciones es de manera similar a las restricciones sólo que aquí se consideran todos juntos, es decir, si empieza en el capítulo 1 con un ejemplo este será nombrado 1, posteriormente hay un corolario, este tendrá el número dos, continuando con la lectura encontramos un teorema el cual llevara el nombre de teorema 3, sin importar en que capítulo se encuentre la numeración es consecutiva.

1.2. Problema de Asignación (AP)

El problema de asignación clásico también conocido como *AP* (por sus siglas en inglés) está incluido en los problemas de asignación, estos consisten en relacionar los elementos de varios conjuntos de manera óptima (también conocidos en inglés como tipo “*match*”), donde la dimensión del problema hace referencia a la cantidad y cardinalidad de dichos conjuntos. El caso más sencillo del *AP* es cuando sólo tenemos 2 conjuntos, frecuentemente nombrados: “*tareas*” quizá trabajos por hacer y “*agentes*” las personas o máquinas que las realizarán, cada tarea debe ser asignada a un agente distinto, además un agente debe ser asignado a una tarea (relacionarlos de forma biunívoca, uno a uno).

Desde la publicación de Kuhn en 1955 [52] (publicó el algoritmo del método húngaro para solucionar el *AP*), se ha diversificado la variedad de estos tipos de problema, incluyendo problemas de diferentes o múltiples objetivos, problemas de relacionar uno a varios, varios a uno o varios a varios y los multidimensionales (que cuentan con tres o más conjuntos). Debido a la gran variedad de problemas tipo *AP* se ha realizado una clasificación de estos, principalmente se dividió por la cantidad de tareas que podía hacer cada agente:

- a) a lo más una tarea por agente
- b) múltiples tareas por agente
- c) problemas de asignación múltiples.

después se clasificó por el tipo de función objetivo y restricciones con las que contaba, a continuación haremos una breve descripción de algunos problemas encontrados frecuentemente en la literatura, tomando en cuenta la clasificación mencionada.

1.2.1. Modelos con a lo más de una tarea por agente

Haremos la mención de algunos de los problemas que cuentan con más de una tarea por agente, cabe mencionar que no son todos los modelos que existen de este tipo.

Problema de asignación clásico

Este tipo de problema es el más básico de los modelos que cuentan con más de una tarea por agente. El *AP* consiste en realizar una asignación uno a uno de n tareas con n agentes, el objetivo es minimizar el total de los costos y su modelo matemático es el siguiente:

$$\text{mín} \quad \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (0)$$

$$\text{s. a:} \quad \sum_i^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_j^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad (3)$$

donde $x_{ij} = 1$ si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario y c_{ij} representa el costo de asignarle al agente i la tarea j . (0) minimiza los costos totales al realizar la asignación de las tareas a los agentes, la restricción (1) asegura que sólo una tarea es asignada a un agente y la (2) que cada agente es asignado a una sola tarea y por último (3) representa si se lleva a cabo o no la asignación.

Cabe mencionar que este problema es matemáticamente idéntico al problema de asignación ponderado bipartito (nombrado en inglés “*weighted bipartite matching*”) de teoría de grafos

Problema de asignación clásico tomando en cuenta la capacidad del agente

Continuando con la descripción de modelos que cuentan con a lo más una tarea por agente, proporcionamos la descripción de un modelo que toma en cuenta la capacidad de cada agente para llevar a cabo determinada tarea, además de que la cardinalidad de los conjuntos (en este caso tareas y agentes) no necesariamente debe ser igual. Por ejemplo una empresa cuenta con “agentes”: una secretaria, un montacarguista y un técnico y “tareas”: escribir una carta, fabricar un instrumento, verificar un pedido y mover tarimas; para poder realizar el conjunto de tareas es necesario asignarle un agente, sin olvidar las restricciones (la capacidad de cada agente: la secretaria puede escribir una carta pero no puede operar un montacargas o fabricar un instrumento); maximizando la utilidad:

$$\text{máx} \quad \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^m q_{ij} x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad (7)$$

donde $x_{ij} = 1$, si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario, $q_{ij} = 1$ si el agente i esta calificado para realizar la tarea j , 0 en caso contrario y c_{ij} es la utilidad de asignarle un trabajo j a un agente i ($c_{ij} = 0$ si $q_{ij} = 0$). (5) asegura que no más de un agente calificado es asignado a cualquier tarea y (6) que a lo más una tarea es asignada a un agente.

Problema de asignación con cardinalidad k

Este tipo de problema consta en asignar k de los m agentes a los n trabajos, con k menor que m y n . El modelo que representa este tipo de problema es el siguiente:

$$\text{mín} \quad \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (8)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} = k \quad (11)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad (12)$$

donde $x_{ij} = 1$, si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario, c_{ij} es el costo de asignarle un trabajo j a un agente i y k es el número de tareas y agentes a ser asignados. (8) minimiza los costos al asignar las k tareas a k agentes, (9) restringe que a lo más un agente puede realizar una tarea j , y (10) a lo más una tarea puede ser realizada por el agente i , (11) realiza la asignación de sólo k tareas.

1.2.2. Modelos con múltiples tareas por agente

Esta sección se encuentra dedicada a un tipo de problema que permite la asignación múltiple de tareas a un agente, el planteamiento más sencillo de éste es el problema conocido como el problema de asignación generalizada (*GAP*). De las variaciones de él se encuentran los distintos modelos con múltiples agentes para una tarea. Recordemos que en este trabajo nos enfocamos en una variación del *GAP* al cual nombramos problema de asignación generalizada múltiple (*MMAP*), descrito posteriormente de manera más detallada en esta sección. Para comenzar plantearemos la versión más “clásica” del modelo asignado un conjunto de m agentes a n tareas, donde cada agente puede realizar más de una tarea.

Problema de asignación generalizada (*GAP*)

El *GAP* es considerado como la versión más básica del *AP* cuando los agentes realizan múltiples tareas. Al igual que el modelo del *AP*, este modelo supone que cada tarea puede ser asignada a un agente, pero cabe la posibilidad de que a un agente se le asigne más de una tarea, mientras no exceda la capacidad del agente, es decir que el agente pueda realizar todas las tareas que le fueron asignadas.

$$\text{mín} \quad \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (13)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (15)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad (16)$$

donde $x_{ij} = 1$, si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario, c_{ij} es el costo de asignar un trabajo j a un agente i , a_{ij} es la cantidad de la capacidad del agente i que se utiliza para realizar la tarea j , b_i es la capacidad límite del agente i . (14) asegura que cada tarea se va a llevar a cabo, es decir que es asignada al menos a un agente para ser realizada y (15) que a la capacidad de un agente no se excede. Sin olvidar que $a_{ij} = b_i + 1$ cuando el agente i no puede realizar la tarea j .

Metaheurísticas para resolver el *GAP* La complejidad computacional del problema de asignación generalizada es considerado NP difícil [64], es decir que no existe un algoritmo que lo resuelva de forma exacta en tiempo polinomial, por

lo que se ha recurrido a varias metaheurísticas para poder obtener una solución aproximada, entre las que se encuentran (si se desea ver más información acerca de la implementación de cada una de ellas, ver las referencias):

- una combinación de un método miope (“greedy”) y una búsqueda local [61, 80]
- búsqueda tabú y simulado recocido [65]
- algoritmo genético [13]
- algoritmo de búsqueda de profundidad variable [2, 67]
- búsqueda tabú [53]
- heurísticas lagrangianas [46]
- sistema de hormiga max-min con búsqueda tabú [58]
- reconexión de caminos (“path relinking”) [1]

Problema de asignación generalizada múltiple (*MMAP*)

El problema que vamos a describir a continuación es la versión del *GAP* a la cual vamos a mejorarle las cotas superiores. Este problema es una generalización del *GAP*, consiste principalmente en una asignación de varios (agentes) a varias (tareas) reconociendo ambos límites de capacidad [61, 66] y posee la estructura de descomposición doble. Aquí cada tarea es asignada a un agente, como en el *AP* pero agregamos la posibilidad de que a un agente se le asigne más de una tarea, mientras no exceda la capacidad del mismo al realizar una tarea. El modelo se presenta a continuación:

$$\text{máx} \quad \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (17)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} \leq d_j \quad j = 1, \dots, n \quad (19)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad (20)$$

donde $x_{ij} = 1$ si el agente i es asignado a la tarea j , 0 de otro modo, c_{ij} es la ganancia (utilidad) obtenida al realizar la asignación del agente i a la tarea j , a_{ij} es la cantidad de la capacidad del agente i utilizada para realizar la tarea j y b_i es la capacidad disponible del agente i . Mientras tanto suponemos que cada tarea cuenta con una capacidad límite de tiempo, con d_{ij} representando la cantidad de la capacidad de la tarea j usada cuando es ejecutada por un agente i y d_j es la capacidad de la tarea j disponible. (18) restringe la capacidad del agente, (19) la capacidad de la tarea y (20) define si se realiza o no una asignación.

Un ejemplo de este tipo de problema es el siguiente: en un centro médico, el cual cuenta con médicos (agentes) para atender pacientes (tareas) en un período de tiempo limitado, se desea realizar la asignación de pacientes para ser atendidos por médicos respetando el horario de trabajo de los médicos y los pacientes cuentan con un tiempo límite para ser consultados.

Nota 1 *Cabe mencionar que no encontramos literatura relacionada con la solución exacta o por medio de metaheurísticas del tratamiento de este tipo de problema.*

1.2.3. Modelos de asignación múltiples.

Los modelos discutidos anteriormente cuentan con dos dimensiones, es decir que poseen dos conjuntos. Sin embargo, en algunos casos, el problema de relacionar elementos puede contar con tres o más conjuntos, los que se encuentran frecuentemente son los tridimensionales. Por ejemplo, el problema de asignar trabajos a trabajadores y a máquinas y asignar alumnos a maestros a clases y horarios. Existe una amplia literatura acerca de este último ejemplo, el cual generalmente es llamado: *el problema del horario* (“*timetabling*” en inglés) de una escuela o una universidad, si se desea ver más información acerca de él ver [19, 35, 82].

Rotaciones de médicos residentes

En [33] se discute el problema de asignación de médicos residentes a las rotaciones en un hospital de aprendizaje asociado con varias clínicas, tomando en cuenta un horizonte de planeación de 12 meses. Mientras un residente es asignado para ser rotado una sola vez cada mes, el número de meses y el tiempo de rotación, depende del residente. Otra restricción que posee este problema es que el hospital cuenta con necesidades las cual se deben de cumplir, por ejemplo tener asignados a la rotación un par de residentes al mismo tiempo. El objetivo es maximizar las preferencias expresadas de los residentes como cuando ellos son asignados a una rotación específica cuando quieren vacaciones.

1.3. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una herramienta computacional capaz de obtener una mejor cota lagrangiana a las existentes para el problema de asignación múltiple (*MMAP*).

1.4. Justificación

La implementación del algoritmo que obtendrá una cota dominante sobre las existentes será de gran ayuda en la solución de problemas que sean de asignación múltiple, debido a que varios problemas que se encuentran en la práctica se modelan como *MMAP*.

1.5. Hipótesis

Podremos encontrar una cota lagrangiana mejor (la cual llamaremos cota lagrangiana modificada) siempre y cuando la matriz de restricciones cuenten con la propiedad de descomposición doble, descrita en el resumen.

1.6. Metodología

La metodología a seguir en este trabajo consta básicamente de dos partes: primero en una teórica en la cual se realizará el desarrollo y justificación de las cotas lagrangianas para el problema de asignación múltiple; y en la segunda se llevará a cabo la implementación del algoritmo propuesto en la primera parte.

Capítulo 2

Revisión de la literatura

En este capítulo haremos una revisión acerca de la literatura existente correspondiente a la relajación lagrangiana, presentando opciones para solucionar el problema relajado, encontrar soluciones factibles, como realizar una interpretación geométrica, características de la función lagrangiana, entre otros.

2.1. Relajación lagrangiana

Para comenzar esta sección revisaremos algunos de los resultados más intrigantes y preguntas relacionadas con la relajación lagrangiana. También se reafirmarán propiedades esenciales de la relajación y función lagrangiana y describiremos varios algoritmos para resolver el problema dual lagrangiano considerando heurísticas lagrangianas, ad-hoc o genéricas, debido a la importancia de éstas en cualquier esquema de aproximación lagrangiana. Análogamente se discuten algunos esquemas que pueden mejorar potencialmente la cota de la relajación lagrangiana y se describen varias aplicaciones de ésta, las cuales demuestran la flexibilidad de la aproximación y permite el cálculo de cualquier cota fuerte de un valor óptimo de problemas *MIP* (por sus siglas en inglés de: problema entero mixto), o el uso de heurísticas lagrangianas, las cuales probablemente son seguidas por una heurística iterativa de mejoramiento. Por último analizaremos el porqué algunas veces podemos conseguir una cota fuerte solucionando problemas sencillos y porqué una relajación a priori débil, algunas veces es mejor o igual que una a priori fuerte

Algunas de las preguntas relacionadas con la relajación lagrangiana que frecuentemente realizamos y tratamos de resolver son:

- ¿Cómo podemos usar la relajación lagrangiana para problemas de programación entera?
- ¿Cómo se construye una relajación lagrangiana?

- ¿Qué herramientas tenemos para analizar la fortaleza de una relajación lagrangiana?
- ¿Existen relajaciones más poderosas que la relajación lagrangiana estándar y cuándo podemos usarlas?
- ¿Por qué algunas veces se puede resolver una relajación lagrangiana fuerte mediante la solución de subproblemas triviales?
- ¿Cómo podemos calcular la cota obtenida por relajación lagrangiana?
- ¿Podemos tomar ventajas de un problema de descomposición lagrangiana?
- ¿Cuál es la “fortaleza” obtenida en términos de cotas de un modelo?
- ¿Puede ser fortalecida una cota obtenida por relajación lagrangiana agregando cortes o dualizando restricciones?
- ¿Cómo se puede diseñar una heurística lagrangiana?
- ¿Podemos obtener mejores resultados remodelando el problema antes de hacer la relajación lagrangiana?

Empezaremos con una descripción de las relajaciones, en particular la relajación lagrangiana (para nuestra comodidad la nombraremos LR). Continuando con la interpretación geométrica de LR y mostraremos como dicha interpretación es la mejor herramienta para analizar particularmente la efectividad de un esquema de LR . También daremos un repaso a las extensiones de LR : descomposición lagrangiana y de forma más general la substitución.

Enfocaremos una sección a los métodos de solución para el problema dual, enfocando con optimización subgradiente, y prosiguiendo con métodos basados en la propiedad lagrangiana: planos cortantes (o generación de restricciones), Dantzig-Wolfe (o generación de columnas), algoritmo volumen, métodos lagrangianos de agregación y desagregación, también algunos métodos de aproximación híbrida. Continaremos dando un breve repaso de varias características de la función lagrangiana, las cuales son importantes para el diseño de métodos eficientes de optimización.

Una buena idea sería agregar antes del proceso lagrangiano los cortes violados por las soluciones lagrangianas, debido a que contienen información adicional, no capturada por el modelo lagrangiano. Estos cortes también pueden ser dualizados en esquemas de relajar y cortar, preservando la estructura de subproblemas lagrangianos, o agregando otras restricciones guardadas, pero el costo de hacer esto posible es resolver subproblemas difíciles. También revisaremos las condiciones bajo las cuales es posible mejorar las cotas en las circunstancias mencionadas anteriormente. Además dedicaremos una sección a las heurísticas lagrangianas, las cuales son un complemento de acotación lagrangiana tratando

de hacer una transformación de soluciones lagrangianas infactibles en soluciones factibles. Análogamente haremos énfasis en los pasos seguidos para remodelar el problema, o relajarlo de forma eficiente.

La literatura de la relajación lagrangiana, sus extensiones y aplicaciones es enorme. Por lo tanto no es posible citar a todos los artículos que se refieren a relajación lagrangiana. Por lo que si se desea ver una visión más amplia acerca del gran campo sobre este tema vea: [6, 27, 28, 29, 36, 47, 48, 56, 75, 76].

Si (P) es un problema de optimización, se usa la siguiente notación:

- $FS(P)$: el conjunto de soluciones factibles del problema (P)
- $OS(P)$: el conjunto de soluciones óptimas del problema (P)
- $v(P)$: el valor óptimo del problema (P)
- u^k, s^k , etc.: el valor de u y s , etc., usado en la iteración k
- x^T : transpuesta de x
- x^k : el k -ésimo punto extremo de algún poliedro
- $x^{(k)}$: una solución encontrada en la iteración k
- $covx(X)$: envolvente convexo del conjunto X .

2.1.1. Relajaciones de problemas de optimización

En 1974 Geoffrion [36] define formalmente la relajación de un problema de optimización como sigue:

Definición 2 *El problema $(RP_{\min}) : \min\{g(x) \mid x \in W\}$ es una **relajación** del problema $(P_{\min}) : \min\{f(x) \mid x \in V\}$, con la misma variable de decisión x , si y sólo si:*

- i) *el conjunto factible de (RP_{\min}) contiene a (P_{\min}) , esto es $W \supseteq V$ y*
- ii) *sobre el conjunto factible de (P_{\min}) , la función objetivo de (RP_{\min}) domina (es mejor que) a (P_{\min}) , esto es, $\forall x \in V, g(x) \leq f(x)$.*

Se ve claramente que $v(RP_{\min}) \leq v(P_{\min})$, en otras palabras (RP_{\min}) es una versión *optimista* de (P_{\min}) : tiene más soluciones factibles que (P_{\min}) , y para las soluciones factibles de (P_{\min}) , la función objetivo es mejor que (más pequeña que) (P_{\min}) ; así que tiene valor mínimo.

Por supuesto, si el problema original es un problema de maximización, decimos que $(P_{\max}) : \max\{f(x) \mid x \in V\}$, una relajación de (P_{\max}) es un problema (RP_{\max}) con la misma variable de decisión x de la forma $(RP_{\max}) : \max\{g(x) \mid x \in W\}$, tal que:

- i) el conjunto factible de (RP_{\max}) contiene a (P_{\max}) , esto es $W \supseteq V$ y
- ii) sobre el conjunto factible de (P_{\max}) , la función objetivo de (RP_{\max}) domina (es mejor que) a (P_{\max}) , esto es, $\forall x \in V, g(x) \geq f(x)$.

A esto le sigue que $v(RP_{\max}) \geq v(P_{\max})$, y similarmente al caso de minimización, (RP_{\max}) es una versión *optimista* de (P_{\max}) . Por lo tanto podemos considerar de forma indiferente un problema de maximización o minimización. Debido a que puede ser transformado fácilmente de un formato a otro, recordando que: $\max\{f(x) \mid x \in V\} = \min\{-f(x) \mid x \in V\}$.

La relajación tiene un rol ambiguo: dar cotas y soluciones (factibles) del valor óptimo de un problema difícil de optimización y usa las soluciones de un problema infactible original como puntos de inicio (guía) para heurísticas especializadas.

También nos concentraremos en *problemas lineales de programación entera*, los cuales poseen un conjunto de restricciones V el cual está definido por un *poliedro de restricciones racionales*, agregando las condiciones de integralidad, esté último es un subconjunto de los componentes de x , esto es, $V = \Pi \cap \Gamma$, donde Π es un poliedro racional (Π también puede contener restricciones de signo para x) y Γ es $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{Z}^{p-q} \times \{0, 1\}^q$, $n \geq p \geq 1$, $p \geq q \geq 0$, con p y q enteros. Podemos llamar “problema de programación entera” a cualquier problema, i.e., no haremos distinción entre problemas generales puros (i.e., con $p = n$) y mixtos (i.e., con $1 \leq p < n$) enteros. En el caso especial de programación 0–1 usaremos $\Gamma = \mathbb{R}^{n-p} \times \{0, 1\}^q$, $q \geq 1$

La relajación ampliamente usada para problemas de programación como $(P) : \min(\text{ ó } \max)\{f(x) \mid x \in V\}$ es la relajación continua (*CR*) (conocida comunmente como relajación lineal) i.e., el problema (P) con las restricciones de integralidad sobre x ignoradas.

2.1.2. Relajación lagrangiana (LR)

Ahora introducimos la definición de LR dada por Held y Karp,[47, 48], tomando en cuenta la definición de relajación de Geoffrion [36]. Sin pérdida de generalidad, suponemos que (P) es de la forma:

$$(P) = \text{mín} \{fx \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$$

donde X contiene restricciones de signo y de integralidad para x , esto es $X = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{Z}^p$, ó $X = \mathbb{R}_+^{n-p} \times \mathbb{R}_+^p$ ó $X = \mathbb{R}_+^{n-p} \times \{0, 1\}^p$ ó $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{Z}^{p-q} \times \{0, 1\}^q$. Sea $I(X)$ el conjunto de p índices de x que están restringidos a ser enteros (o binarios). Se supone que las restricciones de la forma $Ax \leq b$ son *difíciles*, en el sentido de que el problema (P) sin estas sería mucho más simple de resolver. Las restricciones tipo $Cx \leq d$ (posiblemente vacío) podrían ser guardadas, junto con X , para formar la *relajación lagrangiana* como sigue:

Sea λ un vector de pesos no negativo, llamado *multiplicadores de Lagrange*.

Definición 3 La *relajación lagrangiana* de (P) relacionada a las restricciones difíciles $Ax \leq b$, con multiplicadores lagrangianos λ no negativos, es el problema:

$$(LR_\lambda) = \text{mín} \{fx + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\}$$

En (LR_λ) , la holgura de las restricciones difíciles $Ax \leq b$ han sido agregadas a la función objetivo con pesos λ y las restricciones $Ax \leq b$ eliminadas. Decimos que las restricciones $Ax \leq b$, han sido *dualizadas*. (LR_λ) es una relajación de (P) entonces:

- i. $FS(LR_\lambda)$ contiene $FS(P)$,
- ii. para cualquier x de (P) , y
- iii. cualquier $\lambda \geq 0$, $fx + \lambda(Ax - b)$ es menor o igual que fx (i.e. *mejor*, cuando estemos minimizando). Ahora podemos decir que $v(LR_\lambda) \leq v(P)$, $\forall \lambda \geq 0$, esto es, que el valor óptimo $v(LR_\lambda)$, el cuál depende de λ , es una cota mínima del valor óptimo de (P) .

Definición 4 El problema de encontrar la mejor cota lagrangiana de $v(P)$ es:

$$\max_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda)$$

este es llamado **dual lagrangiano** de (P) relacionado a las restricciones difíciles.

(LR) es un problema en el espacio *dual* de los multiplicadores lagrangianos, mientras que (LR_λ) es sobre x .

A partir de ahora, cuando hablemos acerca de la *cota por relajación lagrangiana*, o simplemente *la cota lagrangiana*, siempre podremos referirnos a $v(LR)$, y no a $v(LR_\lambda)$ para cualquier λ arbitrario.

Nota 5 Supongamos que el problema bajo consideración tiene restricciones de igualdad en lugar de restricciones de desigualdad. Podemos referirnos a tal problema como (Q) a continuación:

$$(Q) = \min_x \{fx \mid Ax = b, Cx \leq d, x \in X\}$$

Podemos dualizar las restricciones $Ax = b$ siendo remplazadas por un par de restricciones de desigualdad: $Ax \leq b$ y $-Ax \leq -b$. Entonces sea $\mu \geq 0$ y $\nu \geq 0$ los multiplicadores lagrangianos de dimensiones apropiadas. La relajación lagrangiana para $\mu \geq 0$ y $\nu \geq 0$ dados es:

$$(LR_{\mu,\nu}) = \min_x \{fx + \mu(Ax - b) + \nu(-Ax + b) \mid Cx \leq d, x \in X\}$$

el cuál es equivalente a:

$$(LR_\lambda) = \min_x \{fx + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\}$$

con $\lambda = \mu - \nu$. Nótese que en el caso de igualdad λ , no debe de tener valores no negativos para (LR_λ) es una relajación de (Q) .

2.1.3. Solución factible lagrangiana

Sea $x(\lambda)$ la solución óptima de (LR_λ) para algún $\lambda \geq 0$, entonces $x(\lambda)$ es llamada una *solución lagrangiana*. Podríamos pensar que la solución lagrangiana $x(\lambda)$ es factible (hecho que por lo general no sucede) para un problema entero (esto es, que satisface las restricciones dualizadas).

Lo que sabemos acerca del valor óptimo $v(P)$ de (P) , es que se encuentra entre $fx(\lambda) + \lambda[Ax(\lambda) - b]$ y $fx(\lambda)$, entonces $fx(\lambda)$ es el valor de una solución factible de (P) , el cual es una cota superior de $v(P)$ y $fx(\lambda) + [Ax(\lambda) - b]$ es el valor óptimo del problema lagrangiano (LR_λ) , y es una cota inferior de $v(P)$. Sin embargo, si cumple las condiciones de *holgura complementaria*, esto es, si, $\lambda[Ax(\lambda) - b]$ es 0, entonces $fx(\lambda) + \lambda[Ax(\lambda) - b] = v(P) = fx(\lambda)$ y $x(\lambda)$ es una solución óptima para (P) .

Teorema 6 1. Si $x(\lambda)$ es una solución óptima de (LR_λ) para algún $\lambda \geq 0$, entonces $fx(\lambda) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P)$.

2. Además si $x(\lambda)$ es una solución factible para el problema (P) , entonces $fx(\lambda) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P) \leq fx(\lambda)$.

3. Y si además $\lambda[Ax(\lambda) - b] = 0$, entonces $x(\lambda)$ es la solución óptima de (P) y $v(P) = fx(\lambda)$.

Nota 7 Primero haremos notar que la condición 3 del teorema 6 es una condición suficiente de optimalidad, pero no necesaria. Esto es, que es posible para una $x(\lambda)$ factible a ser óptima para (P) , aún cuando esta no satisfaga las condiciones de holgura complementaria.

Si las restricciones son dualizadas como restricciones de *igualdad* y si $x(\lambda)$ es una solución factible para (Q) , las condiciones de holgura complementaria se cumplen automáticamente, por lo tanto $x(\lambda)$ es una solución óptima de (Q) , con $v(P) = fx(\lambda)$.

2.1.4. Interpretación geométrica

El siguiente teorema, es de donde probablemente Geoffrion [36] desprende la idea de la relajación lagrangiana. El cual da una interpretación geométrica del problema dual lagrangiano en el espacio de x , esto es, en el espacio primal (el espacio dual es donde están los multiplicadores lagrangianos λ) y esto nos permite estudiar los esquemas de la relajación lagrangiana.

Teorema 8 El dual lagrangiano (LR) es equivalente a la relajación primal

$$(PR) = \min_x \{fx \mid Ax \leq b, x \in \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}\}$$

en el sentido que $v(LR) = v(PR)$.

Este resultado está basado en la dualidad de LP y las propiedades de las soluciones óptimas de programas lineales. Este resultado podría no ser verdadero si la matriz de restricciones es no racional, o mejor dicho para un poliedro no racional que no es igual al envolvente convexo de sus puntos extremos. Aunque en la práctica los números en las computadoras son almacenados como números racionales y por lo tanto todas las matrices son racionales, pero ocasionalmente esto modifica la verdadera estructura del poliedro asociado.

La siguiente definición es importante y los resultados son obtenidos de la interpretación geométrica.

Definición 9 Decimos que el problema dual lagrangiano (LR) tiene la **propiedad de integralidad** si $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$.

Si (LR) tiene la propiedad de integralidad (la cual de aquí en adelante será representada por IP), entonces los puntos extremos de $\{x \mid Cx \leq d\}$ están en X . Desafortunadamente la consecuencia es tal que un esquema (LR) no puede producir una cota mejor a la de LP , esto es lo que se indica en los siguientes corolarios. Sin embargo, algunas veces, esto se puede usar de todas formas porque la relajación LP no puede ser calculada fácilmente. Esto puede ocurrir para algunos ejemplos de algún problema que tenga un número exponencial de restricciones, las cuales pueden ser relajadas de cualquier forma para resolver fácilmente los subproblemas. Un ejemplo de los problemas que tiene un número exponencial de restricciones es el del agente viajero,

Recordemos que cualquier cota de relajación lagrangiana siempre es menor que la mejor cota obtenida por LP , nunca peor.

Corolario 10 Si el conjunto $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(LP) = v(PR) = v(LR) \leq v(P)$.

En este caso, la cota de relajación lagrangiana es igual (no puede ser mejor que) a la cota de LP .

Corolario 11 Si el conjunto $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} \subset \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(LP) \leq v(PR) = v(LR) \leq v(R)$ y puede ocurrir que la cota de relajación lagrangiana es estrictamente mejor que la cota LP .

Lo que dicen estos dos corolarios es que a menos que (LR) no tenga la propiedad de integralidad, podría mejorar la cota obtenida por la relajación LP . Es importante saber esto si todos los vértices del poliedro racional $\{x \mid Cx \leq d\}$ están en X . El siguiente análisis puede demostrar la importancia de este concepto.

Ejemplo 12 *El problema de asignación generalizada GAP consiste en asignar un conjunto de trabajos ($j \in J$) a uno de máquinas ($i \in I$) con el menor costo total de asignación posible (o posiblemente con el mayor valor de ganancia). El costo (o ganancia) de asignar j a i es c_{ij} , entonces el problema puede ser un problema de minimización o maximización, usando la notación “mín (ó máx)”. Cada trabajo debe ser realizado por una máquina (así que las restricciones de múltiples elecciones (MC)). Cada máquina i es válida por b_i unidades de tiempo y asignando el trabajo j a la máquina i usada por a_{ij} unidades de tiempo (como las restricciones de la mochila (KP)). Entonces el modelo es:*

$$\text{mín (ó máx)} \quad \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (GAP)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (KP)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (MC)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J$$

- Si dualizamos la restricción tipo (MC) con multiplicadores sin signo λ_j , el problema de relajación lagrangina se descompone en subproblemas para cada máquina i :

$$\text{mín (ó máx)} \quad \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} + \sum_j^n \lambda_j (1 - \sum_i^m x_{ij}) \quad (LR_\lambda)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (KP)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$= \text{mín (ó máx)} \left\{ \sum_i^m \sum_j^n (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} + \sum_j^n \lambda_j \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i, j \right\}$$

$$= \sum_j^n \lambda_j + \sum_i^m \min \text{ (ó máx) } \left\{ \sum_j^n (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall j \right\}$$

Así que el i -ésimo subproblema lagrangiano es un problema de la mochila para la i -ésima máquina. Este problema no tiene la propiedad de integralidad entonces la relajación LP de un problema de mochila 0 – 1 no siempre tiene una solución entera óptima. Entonces este esquema LR puede (y usualmente lo hace) dar un cota más fuerte que la cota de LP y en particular esto fue usado en [31, 44].

- Si dualizamos la restricción tipo (KP) , el problema de relajación lagrangiana se descompone en subproblemas por trabajos j (con λ no positivos o no negativos, dependiendo si el problema es de mín ó máx):

$$\min \text{ (ó máx) } \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} + \sum_i^m \lambda_i (b_i - \sum_j^n a_{ij} x_{ij}) \quad (LR'_\lambda)$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (MC)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$= \min_x \text{ (ó máx) } \left\{ \sum_i^m \sum_j^n (c_{ij} - \lambda_i a_{ij}) x_{ij} + \sum_i^m \lambda_i b_i \right\}$$

$$\text{s. a: } \sum_i^m x_{ij} = 1, \forall j \in J, i \in I, x_{ij} \in \{0, 1\}$$

$$= \sum_i^m \lambda_i b_i + \sum_j^n \left\{ \min_x \text{ (ó máx) } \sum_i^m (c_{ij} - \lambda_i a_{ij}) x_{ij} : \sum_i^m x_{ij} = 1, \forall i, x_{ij} \in \{0, 1\} \right\}$$

El j -ésimo subproblema lagrangiano es un problema de elección múltiple para el j -ésimo trabajo. La relajación LP para cada problema siempre encuentra una solución entera óptima (escoge la mejor asignación para cada j), así que los subproblemas lagrangianos tienen la Propiedad de Integralidad y la cota de LR es igual a la cota de LP . Se espera que la cota de LP no pueda ser mejorada. Sin embargo cabe mencionar que es peor resolver la relajación LP del GAP que la relajación lagrangiana ya que LR debido a las ventajas que esta presenta al solucionarla. Primero, el dual lagrangiano puede ser más fácil de resolver que el dual LP para problemas de tamaño grande. Después, agregando la cota de LP , LR encuentra soluciones lagrangianas, las cuales son factibles para múltiples restricciones elegidas pero pueden violar una o más restricciones del tipo (KP) . La solución lagrangiana obtenida puede ser usada como puntos para empezar en una heurística lagrangiana. Esta relajación es definida en [71].

2.1.5. Construcción de una relajación lagrangiana

Existen varias formas en las cuales puede relajarse un problema dado una forma lagrangiana. Aquí listaremos pocas, la mayoría de algunas relajaciones pueden ayudar a una reformulación a priori de la relajación, y para algunos modelos complejos, la intuición e interpretación de las interacciones entre restricciones puede sugerir esquemas de relajación eficientes.

1. **Se puede aislar un subproblema interesante y dualizar otras restricciones.**

Esta es la aproximación comúnmente más usada. Tiene la ventaja de que los subproblemas lagrangianos “interesantes” (en el sentido de que usualmente tienen una estructura especial que puede ser explotada) pueden ser resueltos por algoritmos existentes especializados para resolverlos de forma eficiente.

2. **Si hay dos (o más) subproblemas interesantes con variables en común, primero podemos partir estas variables, después dualizar las restricciones copiadas.**

Este proceso es llamado *descomposición lagrangiana (LD)* [78], *partición de variables* [63] o *layering variables*, [?, 69, 77] son de los primeros que introdujeron artículos acerca de esta aproximación. Primero se debe reformular el problema usando partición de variables, en otras palabras, debemos renombrar las variables en parte de las restricciones como si fueran variables independientes. El problema $(P) : \min_x \{fx \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$ es claramente equivalente al problema $(P') : \min_{x,y} \{fx \mid Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in Y, x = y\}$, en el sentido que tiene valores óptimos iguales (pero ellos tienen diferentes espacios para las variables). Además si x^* es la solución óptima de (P) , entonces la solución $(x, y) \equiv (x^*, x^*)$ es un óptimo para (P') y si (x^*, y^*) es una solución óptima de (P') , entonces $x^* = y^*$ y x^* es un óptimo para (P) . Dualizando la copia de las restricciones $x = y$ en (P') con multiplicadores λ , lo cual separa al problema en uno para x y otro para y :

$$\begin{aligned} (LD_\lambda) &= \min_{x,y} \{fx + \lambda(y - x) \mid Ax \leq b, Cy \leq d, x \in X, y \in X\} \\ &= \min_x \{(f - \lambda)x \mid Ax \leq b, x \in X\} + \min_y \{\lambda y \mid Cy \leq d, y \in X\} \end{aligned}$$

Este proceso crea un caso de estructura de escalera y por los tanto el modelo puede ser decompuesto. Nótese que λ no requiere ser no negativo. Recordemos también que cuando dualicemos una restricción de igualdad, automáticamente una solución factible lagrangiana es óptima para el problema de programación

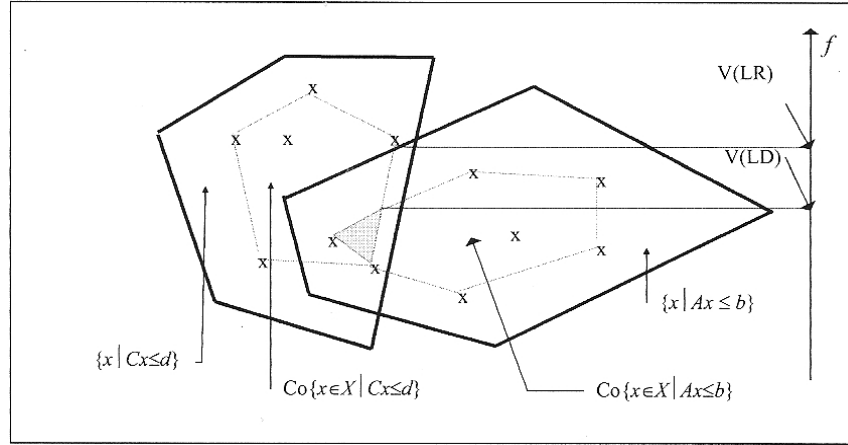


Figura 2.1: Interpretación geométrica de la descomposición

entero original. Las restricciones copiadas son restricciones de igualdad, si ambos subproblemas lagrangianos tienen la misma solución óptima, la solución también es óptima para el problema *IP*.

En [39] se muestra que la cota *LD* puede dominar estrictamente las cotas *LR* obtenidas de la dualización de un conjunto de restricciones:

Teorema 13 *Si se cumple que*

$$v(LD) = \max_{\lambda} \left\{ \min_x \{ (f - \lambda)x \mid Ax \leq b, x \in X \} \right\} + \min_y \{ \lambda y \mid Cy \leq d, y \in X \}$$

entonces

$$v(LD) = \min \{ fx \mid x \in \text{conv}\{x \in X \mid Ax \leq b\} \cap \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} \}.$$

Esta interpretación geométrica es mostrada en la Figura 2.1.

Corolario 14 ■ *Si uno de los subproblemas tiene la propiedad de integralidad, entonces $v(LD)$ es igual que el mejor que las dos cotas *LR* correspondientes a dualizar $Ax \leq b$ o $Cx \leq d$.*

■ *Si ambos subproblemas tienen la propiedad de integralidad, entonces $v(LD) = v(LP)$.*

Si uno aplica *LD* a *GAP* haciendo una partición de restricciones en dos subconjuntos no intersecados, es decir en las restricciones tipo (*KP*) y (*MC*), entonces se obtiene la misma cota como cuando dualizamos las restricciones de múltiple elección.

Entonces puede parecer poco interesante partir las variables, debido a que esto requiere un número de multiplicadores igual al número de tiempo máquina y de trabajos, comparando sólo el número de trabajos con la relajación fuerte lagrangiana. Es posible pensar que las soluciones lagrangianas pueden explotar las dos soluciones lagrangianas obtenidas, además de que puede ser peor el trabajo extra de resolver la descomposición dual lagrangiana, [50].

Ocasionalmente la partición de las variables puede corresponder a la partición física de una variable de decisión del problema.

3. Podemos dualizar restricciones de acoplamiento.

Algunas veces, después de alguna reformulación, frecuentemente los problemas pueden contener estructuras independientes ligadas por varias restricciones: $\min_{x,y} \{fx + gy \mid Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in Y, Ex + Fy \leq h\}$. Dualizando las restricciones de enlace $Ex + Fy \leq h$ dividen el problema en uno sobre x y otro sobre y . Algunas veces el problema original sólo contiene x y varias reformulaciones introducen una nueva variable y , mientras la relación entre x y y es capturada por una nueva restricción $Ex + Fy \leq h$.

Ejemplo 15 *Un problema de producción múltiple sobre fábricas contiene restricciones relacionadas a fábricas individuales y todas las restricciones de demanda están relacionadas a la producción de las plantas. Si se dualizan las restricciones de demanda, el problema lagrangiano se descompone en un problema de producción para cada fábrica, el cuál normalmente es mucho más fácil de resolver que los demás problemas. Si el último de estos subproblemas no tiene la propiedad de integralidad, este LR puede reducir el intervalo de diferencia entre la cota inferior y superior las cuales son menores que la cota LP.*

Ejemplo 16 *Considere un modelo multi-período en el cual las fábricas construidas en un período pueden ser usadas en ese o un período después. Podemos usar las variables (se dice que la variable binaria x_{it} , es igual a uno si la fábrica i es construida en el período t) de acción (construcción) en parte del “diseño” del modelo y variables (se dice que la variable binaria y_{it} , es 1 si la fábrica i existe en el período t) de “estado” (existencia) en el resto del modelo. Así que $y_{it} \geq y_{i,t-1} \forall i, t$. La relación entre los dos conjuntos de variables es almacenada por las siguientes restricciones:*

$$x_{it} \geq y_{it} - y_{i,t-1} \quad \text{y} \quad y_{it} \geq x_{i\tau}, \quad \text{y} \quad \forall i, t, \quad \tau \leq t.$$

Ambos tipos de restricciones son necesarias para que se cumpla que x_{it} es 1 sólo en el período de construcción, esto es, cuando y_{it} es 1 y $y_{i,t-1}$ es 0 y $y_{i\tau}$ permanece en 0 hasta el período más pequeño $\tau = t$ para el cual x_{it} es 1.

Dualizando estas relaciones de acoplamiento entre “construcción en el período t ” y “construido por el período t ” el modelo se partirá en un problema de construcción de fábricas y el problema del uso de fábricas. Si también tiene la propiedad de integralidad, la cota de relajación lagrangiana puede ser más fuerte que la cota de LP. Ver casos prueba en [9].

Actualmente este es un caso especial de *substitución lagrangiana (LS)*, donde $Ex + Fy \leq h$ es la copia de la restricción introducida en la reformulación.

4. Algunas veces es mejor dualizar un conjunto de copias individuales de variables.

En lugar de crear una copia y de la variable x e introducir y en el modelo (P) para reescribir la restricción $Cx \leq d$ como $Cy \leq d$, dando el modelo equivalente (P'): $\min_{x,y} \{fx \mid Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in X, x = y\}$, también se puede crear el problema (P'') equivalente al problema (P) introduciendo una nueva variable y y forzando la restricción $Dy = Cx$. Esta restricción en general es más débil que la restricción $x = y$. El modelo (P'') es $\min_{x,y} \{fx \mid Ax \leq b, x \in X, Dy \leq d, y \in X, Dx = Cy\}$. Aquí el LR introducido dualiza una copia de la restricción agregada $Dx = Cy$.

Nuevamente aquí la restricción copiada es una restricción de igualdad, por lo tanto si el problema lagrangiano tiene soluciones óptimas x y y que satisfacen la copia de la restricción agregada, esto es, si $Dx = Cy$, entonces la solución x es óptima para el problema IP.

Ejemplo 17 Considere el problema bi-mochila

$$(BKP) = \max_x \left\{ \sum_i c_i x_i \mid \sum_i b_i x_i \leq m, \sum_i d_i x_i \leq n, x_i \in \{0, 1\}, \forall i \right\}$$

Se puede introducir una nueva variable y , se escribe $\sum_i d_i x_i = \sum_i d_i y_i$. El problema equivalente es:

$$(BK'P) = \max_x \left\{ \sum_i c_i x_i \mid \sum_i b_i x_i \leq m, \sum_i d_i x_i \leq n, \sum_i b_i x_i = \sum_i b_i y_i, y_i \in \{0, 1\}, \forall i \right\}$$

y el problema LR es:

$$\begin{aligned} (LR\lambda) &= \max_{x,y} \sum_i c_i x_i - \lambda \left(\sum_i b_i x_i - \sum_i b_i y_i \right) \\ \text{s.a:} & \quad \sum_i b_i x_i \leq m \\ & \quad \sum_i d_i x_i \leq n \\ & \quad x_i, y_i \in \{0, 1\}, \forall i \\ &= \max_x \left\{ \sum_i (c_i - \lambda b_i) x_i \mid \sum_i d_i x_i \leq n, x_i \in \{0, 1\}, \forall i \right\} \\ &+ \max_y \left\{ \lambda \sum_i b_i y_i \mid \sum_i b_i y_i \leq m, y_i \in \{0, 1\}, \forall i \right\} \end{aligned}$$

Aquí λ es un multiplicador real simple de signo arbitrario. La cota lagrangiana producida por este esquema esta en medio de la cota de LP y la cota de descomposición lagrangiana obtenida de dualizar $x_i = y_i \forall i$. Este procedimiento es similar al usado para la restricción copiada en [68].

Parece natural que una reducción en el número de multiplicadores debe implicar una reducción en la calidad de la cota obtenida por LR . Sin embargo, no es siempre el caso, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 18 En [11] se considera una relajación lagrangiana agregada al problema de localización de fábricas capacitado. El modelo usa variables continuas x_{ij} que representan el porcentaje de demanda d_j del cliente j suministrado por la fábrica i y las variables binarias y_i , igual a 1 si la fábrica i con capacidad a_i está operando. La restricción $\sum_j d_j x_{ij} \leq a_i y_i$ impone una restricción de capacidad condicional en el total de beneficio que puede ser embarcado de una fábrica potencial i .

$$\begin{aligned}
\text{mín}_{x,y} \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i && (CPLP) \\
\text{s.a:} \quad & \sum_i x_{ij} = 1 && \forall j \\
& x_{ij} \leq y_{ij} && \forall i, j \\
& \sum_i a_{ij} y_i \geq \sum_j d_j && \forall j \\
& \sum_j d_{ij} x_{ij} \leq a_i y_i && \forall i \\
& x_{ij} \geq 0, y_i = 0 \text{ ó } 1 && \forall i, j
\end{aligned}$$

donde (D) se encarga de cumplir el 100% de la demanda del cliente, (B) permite embarcar nada si la planta está cerrada, (T) se encarga de tener las suficientes plantas para satisfacer la demanda total y (C) prohíbe embarcar más de la capacidad de la planta. Cabe mencionar que la restricción (T) es redundante, pero puede ayudar a obtener una cota por relajación lagrangiana más delgada.

Los tres mejores esquemas lagrangianos son:

(LR) [37, 73].

Dualizar (D) , después usar la propiedad de linealización entera. Los subproblemas a resolver son: un problema de la mochila continuo por planta y un problema 0 – 1 de la mochila para todas las plantas. La cota de la relajación lagrangiana es estrecha y es obtenida con un costo computacional pequeño.

(LD) [39].

Duplicar (T) . Hacer copias de $x_{ij} = x'_{ij}$ y $y_{ij} = y'_{ij}$, usar x'_{ij} y y'_{ij} en (C) y una en (T) . Se obtiene la partición $\{(D), (B), (T) \rightarrow APLP\}$ (ver [73] para métodos de solución para $APLP$)

$\{(B), (T), (C) \rightarrow \text{esto como en } (LR)\}$

Esta cota LD es más estrecha que la cota obtenida por (LR) , pero más cara en calcular, en particular por el gran número de multiplicadores.

(LS) [11].

Copiar $\sum_j d_j x_{ij} = \sum_j d_j x'_{ij}$ y $y_i = y'_i$ en (C) . El beneficio es el mismo que el de la partición de (LD) , la misma cota, como se muestra en [11]. Sorprendentemente, es más fácil de resolver (LS) que (LD) , en particular porque (LS) tiene un poco menos de multiplicadores.

En el ejemplo 18, se crea una nueva copia de variables x'_{ij} y y'_{ij} , se puede crear un LS dualizando una copia de las restricciones agregadas (relacionadas)

$\sum_j d_j x_{ij} = \sum_j d_j x'_{ij}$ y $a_i y_i = a_i y'_i$. Puede pasar que la cota LS para este problema es más fuerte que la cota LD obtenida por la dualización individual de copias $x_{ij} = x'_{ij}$ y $y_{ij} = y'_{ij}$. Esto sugiere que agregar variables antes puede ser una alternativa atractiva para la descomposición lagrangiana, al menos para algunos problemas estructurados. Una estructura más general que $CPLP$ está descrito en [11].

2.1.6. Las características de la función lagrangiana

La función lagrangiana $z(\lambda) = v(LR_\lambda)$ es una función implícita de λ . Suponga que el conjunto $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ es un politopo, esto es, un poliedro acotado, entonces existe una familia finita $\{x^1, x^2, \dots, x^K\}$ de vértices de $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$, esto es, los puntos de $\{x \in X \mid Cx \leq d\}$, como $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \text{conv}\{x^1, x^2, \dots, x^K\}$. De aquí sigue que:

$$\min_x \{fx + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq b, x \in X\} = \min_{k=1, \dots, K} \{fx^k + \lambda(Ax^k - b)\}$$

y $z(\lambda)$ es la *cubierta menor* de la familia de funciones lineales de λ , $fx^k + \lambda(Ax^k - b)$, $k = 1, \dots, K$ y es una función *cóncava* de λ , con saltos no diferenciable, donde la solución óptima de (LR_λ) no es única. La Figura 2.2 muestra una función lagrangiana para el caso donde (P) es un problema de maximización, (LR) es un problema de minimización y $z(\lambda)$ es una función convexa de (λ) .

Una función cóncava $f(x)$ es continua sobre el dominio interior relacionado y es diferenciable casi en todos lados, esto es, excepto sobre un conjunto de medida 0. Estos puntos donde no es diferenciable, la función no tiene gradiente, pero siempre tiene subgradiente.

Definición 19 Un vector $y \in (\mathbb{R}^n)^*$ es un **subgradiente** de una función cóncava $f(x)$ con el punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ si $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(x^0) \leq y \cdot (x - x^0).$$

Definición 20 El conjunto de todos los subgradientes de una función cóncava $f(x)$ en el punto x^0 es llamado **subdiferenciable** de f en x^0 y es denotado $\partial f(x^0)$.

Teorema 21 El subdiferenciable $\partial f(x^0)$ de una función cóncava $f(x)$ en el punto x^0 siempre es no vacío, cerrado, convexo y acotado.

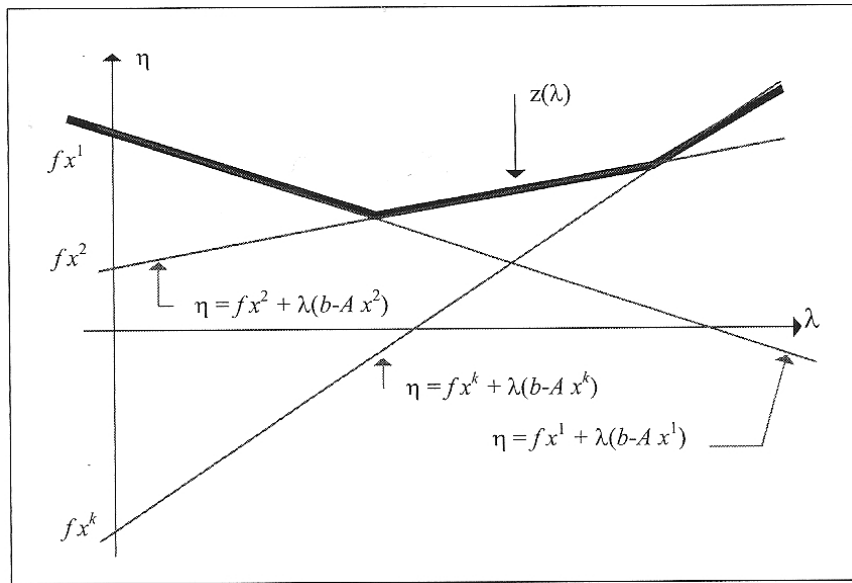


Figura 2.2: Función lagrangiana para el caso de maximización

Si el subdiferencial de f en x^0 consiste de un solo elemento, ese elemento es el subgradiente de f en x^0 , denotado por $\nabla f(x^0)$.

El problema dual (LR) es

$$\begin{aligned}
 \max_{\lambda \geq 0} (LR_\lambda) &= \max_{\lambda \geq 0} z(\lambda) && (LR) \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} \min_{k=1, \dots, K} \{fx^k + \lambda(Ax^k - b)\} \\
 &= \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{ \eta \mid \eta \leq fx^k + \lambda(Ax^k - b), k = 1, \dots, K \}
 \end{aligned}$$

Sea λ^* un minimizador de $z(\lambda)$, $\eta^* = z(\lambda^*)$. Sea λ^k un valor “actual” de λ^* , sea $\eta_k = z(\lambda^k)$ y sea $H_k = \{ \lambda \mid fx^k + \lambda(Ax^k - b) = \eta^k \}$ es un nivel del hiperplano que pasa por λ^k .

- Si $z(\lambda)$ es diferenciable en λ^k , esto es, si (LR_λ) tiene una única solución óptima x^k , tiene un gradiente $\nabla z(\lambda^k)$ en λ^k :

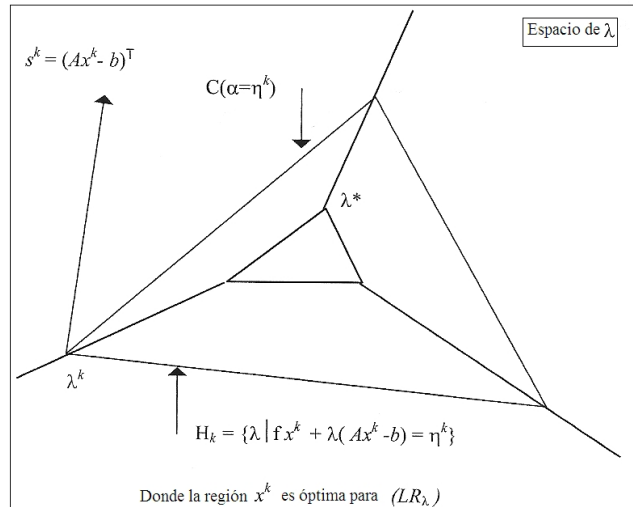


Figura 2.3: Contorno de la función lagrangiana.

$$\nabla^T z(\lambda^k) = (Ax^k - b) \perp H_k.$$

- Si $z(\lambda)$ es no diferenciable en λ^k , esto es, si (LR_λ^k) tiene soluciones óptimas múltiples, se puede mostrar que el vector $s^k = (Ax^k - b)^T$ es un subgradiente de $z(\lambda)$ en λ^k . El vector s^k es ortogonal a H^k .

Se considera el contorno $C(\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^m \mid z(\lambda) \geq \alpha\}$, donde α es un escalar, estos contornos son conjuntos de poliedros convexos. Ver la Figura 2.3.

Un subgradiente no es necesariamente una dirección de incremento para la función, localmente igual, como se muestra en la Figura 2.3.

2.1.7. Métodos primales y duales para resolver relajación dual

Una cantidad de métodos han sido propuesto para resolver duales lagrangianos. Cualquier de ellos es adecuado, como métodos duales ascendentes, o para resolver un problema de optimización convexo no lineal genérico. Esta sección revisa las aproximaciones más importantes.

Método del subgradiente

El método del subgradiente fue propuesto en [48] y posteriormente fue validado en [49]. Este es un método iterativo en el cual en la iteración k , da un vector multiplicador actual λ^k y la longitud del paso es tomado con subgradiente $z(\lambda^k)$, entonces, si es necesario, el punto resultante es proyectado en un ortogonal no negativo.

Sea $x^{(k)}$ una solución óptima de (LR_{λ^k}) . Entonces $s^k = (Ax^{(k)} - b)^T$ es un subgradiente de $z(\lambda)$ en λ^k . Si λ^* es una solución óptima (no conocida) de (LR) , con $\eta^* = z(\lambda^*)$, sea λ^{k+1} es una proyección de λ^k en un hiperplano H^* paralelo a H_k definido por

$$H^* = \{\lambda \mid fx^k + \lambda(Ax^{(k)} - b) = \eta^*\}.$$

El vector s^k es perpendicular a H_k y H^* , por lo tanto $\lambda^{k+1} - \lambda^k$ es un multiplicador no negativo de s^k :

$$\lambda^{k+1} - \lambda^k = \mu s^k, \mu \geq 0.$$

También, λ^{k+1} pertenece a H^* :

$$fx^{(k)} + \lambda^{k+1}(Ax^{(k)} - b) = \eta^*$$

por lo tanto

$$fx^k + \lambda^k(Ax^k - b) + \mu s^k(Ax^{(k)} - b) = \eta^* + \mu s^k \cdot s^k = \eta^*$$

y

$$\mu = \frac{\eta^* - \eta^k}{\|s^k\|^2}$$

por eso

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \left[\frac{s^k(\eta^* - \eta^k)}{\|s^k\|^2} \right]$$

Finalmente definimos $\lambda^{k+1} = [\lambda^{k+1}]^+$, esto es, define la siguiente iteración λ^{k+1} como la proyección de λ^{k+1} en un ortogonal no negativo, como λ debería ser no negativo. Dadas las proyecciones geométricas descritas, es claro que λ^{k+1} está más cerca de λ^* que de λ^k , así que la secuencia $\|\lambda^k - \lambda^*\|^2$ es monótonamente no creciente.

Nota 22 Esta formula desafortunadamente usa el valor óptimo desconocido de η^* de (LR). Se puede tratar de usar un estimado para ese valor, pero entonces también podría ser usado un múltiplo más pequeño o más grande de s^k . Si se ve que los valores de la función objetivo no mejoran en muchas iteraciones, se debe sospechar que η^* ha sido sobreestimado (para un problema de maximización) y se está “pasando”, así se debería tratar de reducir la diferencia entre $\eta^* - \eta^k$. Esto puede ser obtenido introduciendo desde el comienzo un factor positivo $\epsilon_k \in (0, 2)$, en la formula del subgradiente:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \left[\frac{s^k \cdot \epsilon_k (\eta^* - \eta^k)}{\|s^k\|^2} \right]$$

por lo que ϵ_k reduce el escalar cuando este no es mejorado por mucho.

Prácticamente la convergencia del método de subgradiente es impredecible. Para algunos problemas, la convergencia es rápida y altamente confiable, mientras otros problemas tienden a producir multiplicadores en secuencia, o el valor lagrangiano, o ambos, de forma equivocada. En un caso “bueno”, usualmente se podría observar un patrón sawtooth en el valor lagrangiano para las primera iteraciones, seguido por un mejoramiento rigurosamente monótono y convergencia asintótica para un valor optimista del óptimo de la cota lagrangiana. En un caso “malo”, el patrón sawtooth continúa, ó empeora y el valor lagrangiano siempre se está deteriorando. Algunos autores han estudiado este problema y han propuesto remedios. Para mejorar el comportamiento del algoritmo mediante el mejoramiento del tamaño del paso para calcular el subgradiente vease [8].

Métodos duales ascendentes

Este tipo de aproximación, toma la ventaja de la estructura del dual lagrangiano para crear una secuencia de multiplicadores que garantiza un valor monótono creciente en la función lagrangiana. Una aproximación para resolver la aproximación de la relajación LP del problema de localización de fábricas no capacitado (UFLP) ha sido propuesta en [7]. Independientemente en [26] se desarrolló un método dual ascendente para resolver la relajación lagrangiana para el mismo problema de localización no capacitado. Realmente esta cota lagrangiana es igual a la de LP de [7] debido a la propiedad de integridad. El tamaño de LP para el problema UFLP es muy grande para instancias de tamaño moderado y ambas aproximaciones fueron exitosas para la producción de valores óptimos de LP en gran parte de los casos tratados. Además las soluciones primas encontradas por el método propuesto en [26] frecuentemente fueron óptimas para UFLP con un alto porcentaje de soluciones de LP incluso enteras.

Aunque en general no se puede esperar que la mayoría de las soluciones de LP siempre pudieran ser enteras debido a que los métodos duales ascendentes normales se concentran en optimizar problemas duales lagrangianos. Éstas

aproximaciones son de estructura independiente por lo que son problemas específicos. Algunos ejemplos de diseño dual lagrangiano ascendente exitoso se encuentran en [30, 31, 32, 44]. Si se desea desarrollar un método dual lagrangiano ascendente exitoso vease [40] para ver los principios generales.

Método generación de restricciones (también llamado método de planos cortantes, o CP)

En este método [12] y [51], usaron el hecho de que $z(\lambda)$ es la cubierta mínima de una familia de funciones lineales:

$$\begin{aligned}
 \max_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda) &= \max_{\lambda \geq 0} z(\lambda) && (LR) \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} \min_{k=1, \dots, K} \{fx^k + \lambda(Ax^k - b)\} \\
 &= \max_{\lambda \geq 0, \eta} \eta \\
 \text{s.a: } &\eta \leq fx^k + \lambda(Ax^k - b) \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

Cada iteración k , genera uno o más cortes de la forma:

$$\eta \leq fx^k + \lambda(Ax^{(k)} - b),$$

para resolver el subproblema lagrangiano (LR_λ^k) con solución $x^{(k)}$. Estos cortes son agregados a los generados en iteraciones previas para formar el problema maestro actual LP :

$$(MP^k) = \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{\eta \mid \eta \leq fx^{(h)} + \lambda(Ax^{(h)} - b), h = 1, \dots, k\}$$

cuya solución es la próxima iteración λ^{k+1} . El proceso termina cuando $v(MP^k) = z(\lambda^{k+1})$. Este valor es el óptimo de (LR) .

Generación de columnas (CG)

(CG) ha sido utilizado exhaustivamente, en particular para resolver problemas de secuenciamiento muy grande (aerolíneas, autobuses, ...). Este consiste en reformular un problema como uno de *LP* (o uno *IP*) cuyas actividades (o columnas) corresponde a soluciones factibles de un subconjunto de problemas restringidos, sujetos a las restricciones restantes. Las variables son sujetas a pesos para estas soluciones.

Existen dos aspectos para generar columnas: primero, el proceso es dual para la relajación lagrangiana y para *CP*. Posteriormente, puede ser visto como una aplicación del algoritmo de descomposición de [17, 18]. Sea $x^k \in \{x \in X \mid Cx^k \leq d\}$, $k \in K$, a ser elegidas tales que $\text{conv}\{x^k\} = \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$. Una elección posible para las x^k 's son todos los puntos de $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ pero una opción más barata son todos los vértices de $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$.

El problema (*P*) : $\min_x \{fx \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$ beneficia al problema dual lagrangiano (esto es, en el espacio λ)

$$(LR) = \max_{\lambda \geq 0} \left\{ \min_z \{fx + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\} \right\}$$

el cual es equivalente al problema primal (esto es, en el espacio x)

$$(PR) = \min_x \{fx \mid Ax \leq b, x \in \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}\}$$

y se reescribe como

$$\min_x \quad f \sum_{k \in K} \mu_k x^k \quad (PR)$$

$$\text{s. a:} \quad A \left(\sum_{k \in K} \mu_k x^k \right) x \leq b$$

$$\sum_{k \in K} \mu_k = 1$$

$$\mu_k \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&= \min_x \quad f \sum_{k \in K} \mu_k \cdot f(x^k) \\
&\quad A \left(\sum_{k \in K} \mu_k \cdot Ax^k \right) \leq b \\
&\quad \sum_{k \in K} \mu_k = 1 \\
&\quad \mu_k \geq 0
\end{aligned}$$

dado que uno puede escribir $x \in \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ como $x = \sum_{k \in K} \mu_k x^k$, con $\sum_{k \in K} \mu_k = 1$ y $\mu_k \geq 0$.

La separación de un problema en un subproblema y un maestro es equivalente a la separación de las restricciones que fueron guardadas y las restricciones dualizadas. Las columnas generadas son soluciones de subproblemas enteros que tienen las mismas restricciones que los subproblemas lagrangianos. La generación de las columnas fue usado para instancias en [74] para la relajación lagrangiana más fuerte del *GAP*. Las cotas obtenidas usualmente fueron muy delgadas, esto es, más cerradas del verdadero valor de *IP* que la cota *LP*.

El valor de la relajación lagrangiana del problema maestro es igual a la cota de la relajación lagrangiana. La fuerza del esquema de una *CG* o *LR* podría haberse basado en el hecho de que los subproblemas no tienen la propiedad de integralidad. Sin embargo puede pasar que tal esquema puede ser exitoso para resolver problemas con la propiedad de integralidad porque esto permite el cálculo indirecto de $v(LP)$ cuando este valor no puede ser calculado directamente, por ejemplo, a causa de un número exponencial de restricciones, [47, 48].

Una ventaja substancial de (*CP*) o (*CG*) sobre los algoritmos subgradientes es la existencia de un criterio de terminación $v(MP^k) = z(\lambda^{k+1})$.

Aunque para ciertas familias de problemas, por ejemplo problemas de lote capacitados multi producto con o sin tiempos de ensamble, [41], (*CG*) puede converger rápidamente (en no más de 15 a 20 iteraciones en la aplicación de tamaño de lote), frecuentemente en la práctica el proceso es generado con suficientes restricciones o columnas (en *CP* o *CG* respectivamente) para conseguir la convergencia la cual toma un tiempo largo para obtenerla. Primero el paso inicial solo se consideran un poco de columnas/restricciones las cuales son conocidas y la aproximación de la función lagrangiana puede ser totalmente pobre. Puede tomar tiempo hasta que la familia de restricciones/columnas generadas permitan una localización relativa exacta del vector multiplicador óptimo. Posteriormente hacia el final del proceso, algunos de los problemas que son altamente degenerados por muchas iteraciones no muestran un verdadero mejoramiento en

cualquier multiplicador o valor lagrangiano. Se han realizado muchos intentos para corregir este comportamiento. En [23, 24, 81] se describen algunas aproximaciones de este método.

Método de empaquetamiento (“bundle”)

En [55] y [83] se introdujo una extensión del método subgradiente, llamado *método de empaquetamiento*, en el cual la información anterior es coleccionada para dar una mejor aproximación de la función lagrangiana. El algoritmo estándar de *CP* usa el empaquetamiento de un subgradiente ya que son generados y construidos por una función lagrangiana de aproximación lineal por partes. Este método usualmente es lento e inestable; solo se han propuesto 3 aproximaciones estables distintas. En cualquier momento, se tiene un modelo que representa la función lagrangiana y es llamado *centro estabilizador*, el cual debería ser una aproximación razonable de la verdadera solución óptima. Se genera la *siguiente iteración* la cual tiene un compromiso: generar la función objetivo y cuidar la cercanía del centro estabilizador. La siguiente iteración viene del nuevo centro estabilizador (*un paso serio*) sólo si la función objetivo mejorada es “lo suficientemente buena”. De otro modo, se tiene un *paso nulo*, sin embargo, se mejora la función de aproximación. Además, esta “nueva iteración” no debe estar cerca del “centro estabilizador”. Las 3 aproximaciones estabilizadoras proponen distintas formas de controlar la cantidad de movimientos que son permitidos. Cualquiera de las siguientes iteraciones donde permanece *la región llamada verdadera*, o agrega un término de *penalización* para la aproximación de la función que incrementa la distancia del centro de estabilización, o permanece dentro de la región donde la aproximación de la función está encima de un cierto *nivel* (para un problema de maximización). Esta medida de proximidad es un parámetro que se puede ajustar en una implementación práctica. Posiblemente existe una relación entre la protección dada por este pequeño concepto movido y un pequeño mejoramiento de esta cota.

El algoritmo volumen (VA)

El algoritmo volumen [4], es una extensión del algoritmo de subgradiente, puede ser visto como una forma rápida para aproximar la descomposición Dantzig-Wolfe, con un mejor criterio de parada lo que produce la estimación por debajo de las caras que son activas en una solución óptima dual de los vectores primales al igual que los duales. Este algoritmo ha sido usado con éxito para resolver problemas *LP*’s de gran escala que vienen dentro de optimización combinatoria, tales como un conjunto de particiones o problemas de localización. De manera similar para los pasos serios/nulos la filosofía de métodos de empaquetamiento, define pasos verdes, amarillos o rojos para *VA* e introduce una medida precisa para mejorar las necesidades declarando un paso verde (o serios).

Además esto beneficia a una formulación revisada (*RVA*) que esta en algún lugar entre *VA* y un método específico bundle. Ambos autores aplican *VA* y las modificaciones de sus algoritmos para problemas Rectilíneos de Steiner.

Métodos de funciones Lagrangianas modificadas.

Los métodos de agregación lagrangiana han sido usados principalmente en programación continua no lineal y en optimización estocástica. Sin embargo también pueden ser usados en programación entera no lineal (*NLIP*) – y como consecuencia también en programación lineal entera – resolviendo directamente problemas de relajación primal, a diferencia de resolver problemas en el espacio dual. Tal aproximación para un caso lineal puede ser encontrado en [22].

En [38] se incluye una relajación primal para *NLIP*. La cual es equivalente a la relajación lagrangiana en un caso lineal (ver el teorema 8), pero usualmente no lo es para un caso no lineal.

La *Relajación de un Problema Primal* de un problema de programación entera no lineal es:

$$(IP) = \min_x \{f(x) \mid g(x) = 0, x \in P \cap X\}$$

relacionado a las restricciones de igualdad $g(x) = 0$, con un poliedro racional P y X un conjunto de restricciones de integralidad sobre las variables, es el problema continuo no lineal

$$(PR) = \inf_x \{f(x) \mid g(x) = 0, x \in \text{conv}\{P \cap X\}\}$$

Si la función $f(x)$ es convexa y $g(x)$ lineal, (PR) es equivalente al problema dual lagrangiano como lo hace [70]

$$(LR^*) = \max_{\lambda} \left\{ \inf_x f(x) + \lambda g(x) \mid x \in \text{conv}\{P \cap X\} \right\}$$

Por otro lado, (PR) es equivalente al problema *Proximal para el Lagrangiano Modificado*

$$\inf_x \left\{ f(x) + \left(\frac{\alpha}{2\rho}\right) |x - x^*|^2 + u^* \cdot g(x) + \frac{1}{2}\rho |g(x)|^2 \right\} \quad (PLM)$$

$$\text{s. a: } x \in \text{conv}\{P \cap X\}$$

para cualquier $\rho > 0$, suficientemente grande y cualquier α positivo, donde x^* es una solución óptima del problema original (PR) y u^* el multiplicador óptimo asociado a las restricciones dualizadas $g(x) = 0$. Como se muestra en [14], (PLM) puede ser resuelto por una adaptación del método proximal de multiplicadores, el cual toma en cuenta las restricciones implicadas $x \in \text{conv}\{P \cap X\}$. La función proximal para el lagrangiano modificado, $L(x, w, u, \alpha, \rho) = f(x) + (\frac{\alpha}{2\rho})|x - w|^2 + u \cdot g(x) + (\frac{1}{2})\rho|g(x)|^2$ depende de la aproximación de u a u^* , la aproximación de w a x^* , el parámetro proximal α y el parámetro penalizador ρ .

Existen varias ventajas de usar un *agregado lagrangiano* a un *método de penalización*. Primero, existe un valor finito $\bar{\rho}$ del coeficiente de penalización ρ tal que para cualquier $\rho \geq \bar{\rho}$, el problema (PLM) es equivalente al problema (PR). Después, los multiplicadores son actualizados por medio de una formacerrada, fijando el paso en la formula del subgradiente $u_i(k+1) = u_i(k) + \rho(A_i x(k) - b_i)$, que garantice la *convergencia* al multiplicador óptimo de Kuhn-Tucker u_i^* , *sin necesidad de ajustar o estimar un parámetro*, como debe ser en el caso de métodos de subgradiente. Finalmente, en el caso lineal, la convergencia es conseguida en un *número finito de iteraciones*.

La ventaja de incluir un *término proximal* $(\frac{\alpha}{2\rho})|x - x^*|^2$, $\alpha > 0$, es tal que si $f(x)$ y $g(x)$ son convexos, $L(x, w, u, \alpha, \rho)$ es *estrictamente* convexa en x y tiene un *único* mínimo sobre x dados w, u, α, ρ . (PAL) puede ser resuelto por un método de *linealización* tal como el método de Frank y Wolfe, o, por descomposición simple, conocido por propiedades de convergencia mejorada.

La ventaja de usar $\text{conv}\{P \cap X\}$ en lugar de $P \cap X$ es que el problema (PLM) puede ser resuelto eficientemente por métodos de linealización tales como descomposición simple porque este conjunto de restricciones es un poliedro, mientras generalmente el problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) + (\frac{\alpha}{2\rho})|x - x^*|^2 + u^* \cdot (Ax - b) + (\frac{1}{2})\rho|Ax - b|^2 \\ \text{s. a:} \quad & x \in (P \cap X) \end{aligned}$$

no lo es.

En [15, 16] se describe una implementación exitosa del proximal para el lagrangiano agregado para resolver problemas de localización de fábricas capacitado con función objetivo no lineal.

Métodos híbridos de dos fases

En [42] se presentó un método que combina el método del subgradiente en una primera fase y generación de restricciones en la segunda. Los multiplicadores primero son ajustados de acuerdo a la formula del subgradiente y al mismo tiempo, las restricciones correspondientes a todas las soluciones conocidas de los subproblemas conocidos son agregados a la LP del problema maestro. El valor del LP del problema maestro es tomado como una estimación actual del dual lagrangiano óptimo. La exactitud de esta estimación va en aumento conforme vayan pasando las iteraciones, por eso no hay necesidad que para cualquier ajuste del tamaño del paso: cuidar que $\epsilon_k = 1, \forall k$. Dado un intervalo en el óptimo dual de la cota de relajación lagrangiana y el valor del problema maestro se ve beneficiada la convergencia del método, como un método de generación de restricciones puro.

Debe estar seguro que el proceso no es cíclico. Si se obtienen restricciones repetidas, el problema maestro no puede ser mejorado. Después de que el mismo corte ha sido generado un número de veces (digamos, 5 veces), se puede cambiar a una fase de generación de restricciones pura.

Un método híbrido similar ha sido abogado recientemente en [45], combinando (CG) con el método subgradiente. Sabemos que es difícil de generar un buen conjunto de columnas que comiencen el algoritmo. El artículo sugiere usar una fase inicial que genere las “paredes de afuera” del domo de la función lagrangiana, usando una explicación gráfica del procedimiento. Si se ve la función lagrangiana (cóncava) como un domo en \mathbb{R} , donde \mathbb{R}^m corresponde a los multiplicadores lagrangianos λ y \mathbb{R} a la función lagrangiana, entonces en la fase inicial, se tratará de generar fases además definir un poliedro acotado que contienen el domo lagrangiano. En la Figura 2.4, las 3 fases definidas por las líneas firmes (son las “paredes de afuera”, aunque no todas) definen un poliedro acotado. Las líneas punteadas definen las fases del domo que puede ser descubiertas durante el transcurso del algoritmo. La fase inicial usa un método sugradiente con un paso grande, el propósito es “pasarse” para descubrir las paredes de afuera. Una vez que el problema maestro de generación de columnas es factible (o equivalentemente una vez que el plano cortante LP es factible), o posiblemente algunas iteraciones después si uno piensa existe algunas ventajas en generar un poco más de fases, se cambia cualquier restricción o columna de generación. Además sabemos que las columnas generadas en la primera fase del método (CG) para el GAP , contienen más información adicional que aquellas generadas por el método estándar “fase 1” (esto es, se empieza con columnas artificiales con alto costo), como evidenciando el factor de que pocas nuevas columnas necesitan ser generadas para converger.

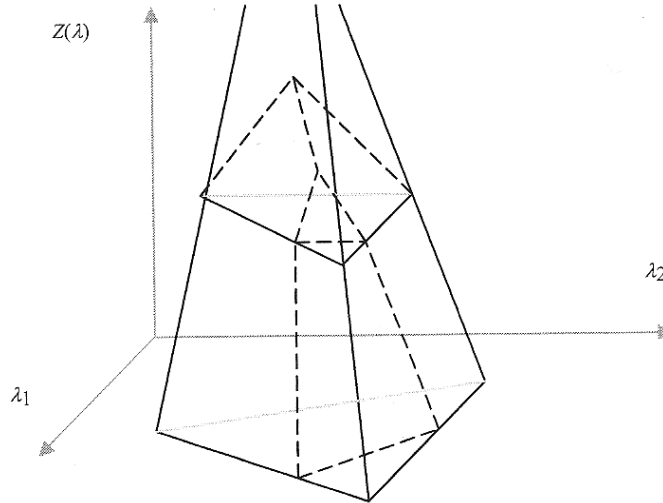


Figura 2.4: Definición de un poliedro acotado.

Descomposición de subproblemas

En algunos casos, el subproblema lagrangiano se descompone en problemas pequeños, esto significa que la región factible es realmente el producto cartesiano de varias regiones pequeñas. Una ventaja clara es la reducción en la complejidad computacional para los subproblemas lagrangianos: generalmente es más fácil resolver 50 problemas con 100 variables binarias cada uno, que, un problema con 5,000 (esto es, 50×100) variables binarias.

También significa que en generación de columnas, las columnas (esto es, los vectores que son soluciones factibles de las restricciones guardadas) se descomponen en pequeñas subcolumnas y cada subcolumna es una combinación convexa de vértices de una pequeña región. Por asignación de conjuntos de pesos diferentes a estas combinaciones convexas, sigue “mezclar y relacionar” las soluciones, en otras palabras, se trata de combinar una subcolumna para el primer subproblema que fue generado en la iteración 10, con una subcolumna para el segundo subproblema generado en la iteración 7, etc., para formar una columna de tamaño completo. Si no se tiene la descomposición del problema antes del tiempo, podríamos esperar un largo tiempo para generar completamente la columna.

Por dualidad, esto significa que en un ambiente de *plano cortante*, también pueden ser generados “sub cortes” para cada subproblema, esta cantidad para el primer reemplazo η por $z + \lambda b$ en

$$\max_{\lambda \geq 0, \eta} \quad \eta \quad (MP^k)$$

$$\text{s. a:} \quad \eta \leq f x^{(h)} + \lambda(Ax^{(h)} - b) \quad h = 1, \dots, k$$

$$\max_{\lambda \geq 0, z} \quad z + \lambda b$$

$$\text{s. a:} \quad z \leq (f + \lambda A)x^{(h)} \quad h = 1, \dots, k$$

y entonces z por una suma de escalares z_l , con $z_l \leq (f^l + \lambda A_l)x_l^{(h)}$, donde l es el índice del subproblema lagrangiano, f^l , A_l y $x_l^{(h)}$ son la l -ésima porción de la submatriz y vectores correspondientes y $x_l^{(h)}$ es una solución lagrangiana del l -ésimo subproblema encontrado en la iteración h , beneficiado la desagregación del problema maestro

$$\max_{\lambda \geq 0, z_l} \quad \sum_l z_l + \lambda b \quad (MPD^k)$$

$$\text{s. a:} \quad z_l \leq (f + \lambda A)^l x_l^{(h)} \quad h = 1, \dots, k$$

Ejemplo 23 Considere de nuevo el GAP para el caso de minimización (aunque esto trabajaría en exactamente la misma forma con maximización). Hemos visto que la relajación lagrangiana fuerte es:

$$\text{mín} \quad \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_j \lambda_j (1 - \sum_i x_{ij}) \quad (LR_\lambda)$$

$$\text{s. a} \quad \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I \quad (KP)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$= \text{mín} \quad \sum_{i,j} (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} + \sum_j \lambda_j$$

$$\text{s. a:} \quad \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \forall i$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j$$

$$= \sum_j \lambda_j + \sum_j \text{mín} \left\{ \sum_j (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} \mid \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \forall i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \right\}$$

y (LR) es el máximo con respecto a λ de $v(LR_\lambda)$.

Sea $EP(KP) = \{x^k \mid k \in K\}$ es el conjunto de todas las soluciones factibles de las restricciones (KP) , sea $EP(KP_i) = \{x_i^k \mid k \in K_i\}$ es el conjunto de todas las soluciones enteras factibles de la i -ésima mochila, con $K = \Pi_i K_i$.

Entonces la solución factible de (LR_λ) puede ser descrito por:

$$x_{ij} = \sum_{k \in K_i} \mu_k^i x_{ij}^k, \forall i, j.$$

El dual lagrangiano es equivalente a agregar el problema maestro AMP :

$$\begin{aligned} (AMP) &= \max_{\lambda, \zeta} \left\{ \zeta \mid \zeta \leq \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}^k + \sum_j \lambda_j \left(1 - \sum_i x_{ij}^k \right), k \in K \right\} \\ &= \max_{\lambda, z} \left\{ z + \sum_j \lambda_j \mid z \leq \sum_{i,j} (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij}^k, \forall k \in K \right\} \end{aligned}$$

con sustitución $\zeta = z + \sum_j \lambda_j$.

Si primero tenemos que escribir la formulación de la generación de columnas para el dual lagrangiano, naturalmente podemos tener las soluciones de ambos subproblemas de la mochila independientes, usando los conjuntos K_i independientes a diferencia de K , la generación de columnas del problema maestro podría ser desagregado:

$$(DMP) = \max_{\lambda, z} \left\{ \sum_i z_i + \sum_j \lambda_j \mid z_i \leq \sum_j (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij}^k, \forall i, k \in K_i \right\}$$

y el dual es:

$$\begin{aligned} \min_{\mu} & \sum_{k \in K} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}^k \mu_k^{(i)} \\ \text{s. a:} & \sum_{k \in K_i} \sum_j x_{ij}^k \mu_k^{(i)} \quad \forall j \\ & \sum_{k \in K_i} \mu_k^{(i)} = 1 \quad \forall i \\ & \mu_k^i \geq 0 \end{aligned}$$

está claro que la descomposición Dantzig-Wolfe del primal equivalente (PR) es:

$$(PR) = \min_x \left\{ \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \mid \sum_i x_{ij} = 1, x_{ij} \geq 0 \right\}$$

de (LR).

Relajar y cortar (“Relax & cut”)

Una pregunta que frecuentemente vemos en el contexto de relajación lagrangiana es: ¿cuál es la fortaleza de la cota obtenida por la relajación lagrangiana?. Una posible respuesta es la adición de cortes que son violados actualmente por la solución lagrangiana. Sin embargo, está claro que agregar estos al problema lagrangiano podría cambiar esta estructura y lo haría mucho más difícil de resolver. Una salida es dualizar estos cortes. ¡Recordemos que dualizando no significa descartar!. Los cortes pueden ser agregados al conjunto de “restricciones complicadas” e intuitivamente pueden ser usados solo si la intersección $N1$ (para “una nueva intersección”) de un poliedro nuevo relajado y del envolvente convexo de las soluciones enteras de restricciones guardadas es “más pequeño” que la intersección OI (para “una intersección antigua”) del poliedro antiguo relajado y el envolvente convexo de las soluciones enteras de restricciones guardadas. Solo es posible en este turno si el poliedro relajado nuevo es más pequeño que el antiguo, entonces las restricciones guardadas son las mismas en ambos casos. Esto tiene las siguientes implicaciones. Considere un corte que es violado por la solución lagrangiana actual:

1. si el corte es igual a una combinación convexa de las restricciones dualizadas actuales o guardadas, no es posible reducir la intersección desde cada punto de intersecciones “antiguas”; además no ayuda *sustituir restricciones de las dualizadas*. Ver Figura 2.5.
2. si el corte es una desigualdad válida para el problema lagrangiano, entonces cada punto en el envolvente convexo de puntos enteros de las restricciones guardadas se satisface por cada solución entera factible del suproblema lagrangiano;
3. por lo que es necesario usar para el corte la información “entera” y dualizar y guardar ambas restricciones y remover *parte de la intersección*. (La solución lagrangiana es un punto entero requerido para satisfacer solo las restricciones guardadas).

Un esquema de relajar y cortar puede proceder como sigue:

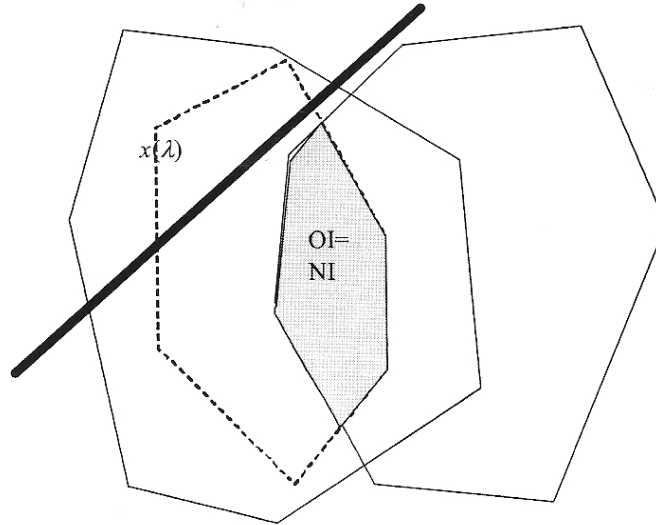


Figura 2.5: Conjunto convexo entero de soluciones que no cambia

1. inicializar el multiplicador lagrangiano λ .
2. resolver el problema lagrangiano actual, sea $x(\lambda)$ la solución lagrangiana. Si el dual lagrangiano no ha sido resuelto aún, actualizar λ . Si no terminar.
3. Identificar el corte que fue violado por $x(\lambda)$ y dualizarlo. Ir a (2).

El termino “dualizar y cortar” fue usado por primera vez en [25]. Este artículo, usó una descripción parcial de restricciones y las cuales fueron identificadas como restricciones violadas (no cortes), agregadas al modelo e inmediatamente dualizadas. La idea, sino el nombre, ha sido usado tempranamente. En [3].se generó un subtour de eliminación de restricciones e inmediatamente se dualizó, esto fue aplicado a instancias del problema *TSP*. Lucena usó una idea similar en [59]. La utilidad de las restricciones es obvia, contraria a la de estos cortes. Obviamente una restricción perdida puede cambiar la solución del problema.

Ahora daremos ejemplo de *cortes* que si fue posible dualizarlos pero no pueden ser cotas de relajación lagrangianas delgadas.

Cortes dualizados no mejorados: ejemplo para el *GAP*. Ya hemos introducido el *GAP* y este es el modelo:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} && (GAP) \\
\text{s. a} \quad & \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I && (KP) \\
& \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J && (MC) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

Si se dualiza (MC), el problema de relajación lagrangiana se descompone en un subproblema por j :

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_j \lambda_j (1 - \sum_i x_{ij}) && (LR_\lambda) \\
\text{s. a} \quad & \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I && (KP) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

$$= \text{mín} \left\{ \sum_{i,j} (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} + \sum_j \lambda_j \mid \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \forall i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \right\}$$

$$= \text{mín} \sum_j \lambda_j + \sum_i \text{mín} \left\{ \sum_j (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} \mid \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \forall i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \right\}$$

Así el i -ésimo subproblema lagrangiano es un problema de la mochila para la i -ésima máquina. Después de resolver todos los problemas de la mochila, la solución $x(\lambda)$ puede violar algunas restricciones de opción múltiple, esto es, existe alguna j para la cual $\sum_i x_{ij} \neq 1$ y como una consecuencia la condición $\sum_i \sum_j x_{ij} = |J|$ puede ser violada. Agregando este “corte” (es decir, recortar la solución lagrangiana actual!) e inmediatamente dualizarlo, sin reducir la intersección, cada punto de la intersección antigua OI ya satisface todas las restricciones de opción múltiple (MC), esto es, las restricciones dualizadas.

¿Se pueden guardar los cortes más fuertes de la cota lagrangiana?
 ¿Pero qué pasa si guardamos los cortes en lugar de dualizarlos?. Está claro que agregar estos al problema lagrangiano puede cambiar esta estructura, pero todavía puede ser resuelta fácilmente. Los cortes pueden ser agregados al conjunto de “restricciones fáciles” e intuitivamente pueden ser usados solo si la intersección NI del poliedro relajado y del nuevo envolvente convexo de las soluciones enteras de restricciones guardadas es “más pequeño” que la intersección OI del poliedro relajado y del envolvente convexo antiguo de las soluciones enteras de las restricciones guardadas. Esto sólo es posible si el envolvente convexo del envolvente nuevo es más pequeño que el antiguo, entonces las restricciones dualizadas son las mismas en ambos casos.

Ejemplo 24 *Considere de nuevo el GAP y la relajación lagrangiana débil: en la cual las restricciones de la mochila (KP) son dualizadas. Se puede agregar las restricciones restantes de múltiple opción y sustituir una restricción de las restricciones dualizadas, por ejemplo la suma de todas las restricciones, las cuales obviamente es más débil que la restricción de la mochila original. El problema lagrangiano no se descompone en más, pero esta nueva estructura es del problema de la mochila de múltiple opción, la cual usualmente es fácil de resolver con software especializado y mucho más fácil que agregar las restricciones de la mochila sin múltiple opción.*

El fortalecimiento de la cota lagrangiana es simple y aún no es potencialmente poderosa.

Heurísticas lagrangianas y Branch-and-Price

La relajación lagrangiana da cotas, pero también genera soluciones lagrangianas. Si la solución lagrangiana satisface las restricciones de holgura complementaria (*CS*), sabemos que es una solución óptima del problema *IP*. Si este es factible pero *CP* se cumple, esto es al menos una solución factible del problema *IP* y aún se tiene que determinar, por *BB* o de otra forma, este es óptimo. Si no, la relajación genera soluciones enteras infactibles. Frecuentemente todas estas soluciones están cerca de la factible, las cuales se pueden obtener mediante penalizaciones para las restricciones más violadas. Existe un amplia gama de literatura acerca de posibles formas de modificar las soluciones lagrangianas existentes infactibles a factibles. Las heurísticas lagrangianas son esencialmente dependientes del problema y solo trataremos de obtener un poco de pistas sobre como proceder. Por ejemplo se puede tratar de obtener soluciones factibles de la siguiente forma:

1. modificando la solución correcta en infactibilidades cuidando que el deterioro de la función objetivo sea pequeño.

Ejemplo: en el secuenciamiento de la producción, si relaja las restricciones de demanda, se puede tratar de cambiar la producción (incrementar o disminuir) hasta conocer la demanda [20].

2. fijando (en 1 ó 0) algunos de las variables de decisión significativas según sus valores actuales en la solución lagrangiana y resolviendo óptimamente el problema restante. Podemos llamar a esta heurística “perezosa” [10]. Para empezar se puede fijar las variables que satisfacen las restricciones relajadas.

Parte del éxito de la relajación lagrangiana se debe al mejoramiento de manera inteligente de los métodos de solución para el dual lagrangiano, con heurísticas poderosas grabadas en cada iteración. En algunos casos, el intervalo restante de la dualidad, esto es, el porcentaje relativo entre la mejor cota lagrangiana encontrada y la mejor solución factible encontrada por la heurística es suficientemente pequeña para realizar una enumeración. Sin embargo en algunos ejemplos un óptimo o al menos una solución óptima es deseada y puede ser usado un esquema de ramificar y acotar para remplazar las cotas LP por LR . Si el dual lagrangiano es resuelto por generación de columnas, el esquema es llamado "*branch and price*", como nuevas columnas podrían necesitadas para ser "*priced-out*" como un ramificado guardado [5, 21]. En este caso, las reglas de ramificado necesitan ser diseñadas con cuidado como fue hecho en [72]. La esperanza es que estos esquemas pueden converger más rápido que LP el cual está basado en ramificar y acotar, normalmente las cotas podrían ser más delgadas y cortarse nodos más rápido. La cantidad de trabajo realizado en un nodo, puede ser sustancialmente resuelto como un LP .

- La relajación lagrangiana es una familia de herramientas poderosa para resolver de forma aproximada los problemas de programación entera. Dando
 - Cotas más fuertes que la relajación LP cuando el problema(s) no tengan la propiedad de integralidad.
 - Buenos puntos de comienzo para heurísticas de búsqueda.
- La disponibilidad de interfaces poderosas (GAMS, AMPL, ...) y la flexibilidad de paquetes IP que hacen esto posible para el usuario para varios esquemas e implementar y probarlos.
- La relajación lagrangiana es muy flexible. Frecuentemente algunas reformulaciones son necesarias para que aparezca un buen esquema.
- No es necesario tener estructuras especiales grabadas en un problema para tratar de usar esquemas lagrangianos. Probablemente es una buena idea descomponer el problema estructuralmente en componentes significativos y partirlos a través de dualización de restricciones, posiblemente después de haber introducido nuevas expresiones de variables.
- Finalmente las soluciones para uno o más subproblemas lagrangianos se puede prestar para emplear heurísticas lagrangianas, posiblemente seguidas por heurísticas intercambiables, para obtener buenas soluciones factibles.
- Emparejar las cotas de relajación lagrangiana con heurísticas lagrangianas dando el análisis con brackets alrededor del valor entero óptimo. Usualmente estos son más delgados que los brackets viniendo de cotas basadas en LP y heurísticas.

Capítulo 3

Construcción y desarrollo de cotas

Este capítulo está dedicado especialmente a la construcción y desarrollo de cotas lagrangianas para el problema que ya planteamos en el capítulo 1 y que nombramos: problema de asignación múltiple (*MMAP*), empezando desde el planteamiento del problema, definición de lo que es una cota lagrangiana y cómo se obtiene; hasta llegar a un problema equivalente al tratado pero más fácil de resolver.

3.1. Construcciones básicas

Consideremos el problema:

$$z^* = \text{máx} \{cx \mid Dx \leq d, x \in X\} \quad (P)$$

donde las restricciones “difíciles” son $Dx \leq d$ y las “fáciles” son $x \in X$. El conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ puede tener una estructura general. Denotando x^* como la solución óptima de (P) .

Definamos la relajación convexa de (P) como:

$$z_R = \text{máx} \{cx \mid Dx \leq d, x \in \text{conv}(X)\} \quad (P_R)$$

donde $\text{conv}(X)$ es el envolvente convexo del conjunto X . Si $X \subseteq \text{conv}(X)$, entonces $z^* \leq z_R$. Sea x_R la solución óptima de (P_R) y u_R los multiplicadores óptimos asociados con las restricciones difíciles.

Sea $u = \{u_i\} \geq 0$ un n -vector de los multiplicadores lagrangianos. Definimos el problema lagrangiano como:

$$z(u) = \max_{x \in X} \{cx + u(d - Dx)\}.$$

Supondremos que el problema lagrangiano tiene una solución óptima para toda $u = \{u_i\} \geq 0$. Si x^* es una solución factible para el problema lagrangiano, tenemos que para cualquier u se cumple que:

$$cx^* + u(d - Dx^*) \leq z(u) \quad \text{para cualquier } u = \{u_i\} \geq 0$$

Además si x^* es factible para (P) y z^* , tenemos cuyo resultado es la cota lagrangiana [43]:

$$z^* \leq z(u) \quad \text{para cualquier } u = \{u_i\} \geq 0 \quad (LB)$$

Al resolver el problema dual lagrangiano encontraremos la mejor cota lagrangiana y los multiplicadores lagrangianos asociados u^* :

$$z(u^*) = \min_{u \geq 0} z(u) \equiv w_D \quad (D)$$

Para problemas tipo (P) , convexos y bajo ciertas condiciones de regularidad tenemos $u^*(d - Dx^*) = 0$, aún cuando $u(d - Dx^*)$, puede ser estrictamente positivo para $u \neq u^*$. Si X es no convexo, el término de complementariedad $u(d - Dx^*)$ puede ser estrictamente positivo para $u = u^*$. Por lo tanto tratamos de fortalecer la cota lagrangiana $z(u)$ y el valor de la cota lagrangiana dual w_D estimando los términos de complementariedad los más delgados posibles.

Asumiremos la siguiente información acerca de una solución óptima de (P) , x^* :

Suposición 25 *Se conoce un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $x^* \in W$.*

Definimos a W como la *localización de x^** , o simplemente *localización*. El conjunto W puede ser definido manipulando las restricciones del problema original. Distingamos el caso de una localización a priori, cuando el conjunto W está definido antes que el problema lagrangiano sea resuelto para un $u \geq 0$ y la cota asociada $z(u)$ ha sido calculada y a posteriori, cuando el conjunto W está definido o corregido después que el problema lagrangiano ha sido resuelto.

Denotemos $\theta(u)$ como el valor óptimo del siguiente problema auxiliar usado para estimar el término de complementariedad:

$$\theta(u) = \min_{y \in W} u(d - Dy), \quad u \geq 0 \quad (AP)$$

Este problema nos ayudará a encontrar una cota superior lagrangiana mejor a la clásica debido a que usualmente el valor de $\theta(u)$ es considerado como que tiende a 0, cuando no necesariamente es así, si logramos encontrar el valor óptimo, encontraremos una cota más “delgada” que la clásica.

Proposición 26 *Sea W una localización. Entonces:*

$$z^* \leq z_M(u) \equiv z(u) - \theta(u) \quad \text{para cualquier } u \geq 0 \quad (MLD)$$

para cualquier da una cota lagrangiana modificada y la mejor cota puede obtenerse del problema lagrangiano dual modificado:

$$wMD = \min_{u \geq 0} z_M(u) \quad (MD)$$

Demostración. Por la definición de $z(u)$ y $x^* \in X$ sigue que

$$z^* \leq z(u) - u(d - Dx^*).$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} z^* &\leq \min_{u \geq 0} \{z(u) - u(d - Dx^*)\} \leq \max_{y \in W} \min_{u \geq 0} \{z(u) - u(d - Dy)\} \\ &\leq \min_{u \geq 0} \max_{y \in W} \{z(u) - u(d - Dy)\} = \min_{u \geq 0} \{z(u) - \min_{y \in W} u(d - Dy)\} \equiv w_D \\ &\leq z(u) - \min_{y \in W} u(d - Dy) \equiv z_M(u) \quad \text{para cualquier } u \geq 0 \end{aligned}$$

con lo cual se completa la demostración. La segunda desigualdad se cumple debido a que $x^* \in W$. ■

Observación 27 De la demostración de la proposición 26 sigue que el valor:

$$\widehat{w}_{MD} \equiv \max_{y \in W} \min_{u \geq 0} \{z(u) - u(d - Dy)\}$$

también da una cota superior z^* la cual es tan buena como w_{MD} . No vamos a considerar \widehat{w}_{MD} , sólo nos enfocaremos en w_{MD} .

Observación 28 En general $w_{MD} \neq z(u^*) - \theta(u^*)$ y el problema dual (D) y (MD) pueden tener distintos multiplicadores lagrangianos óptimos.

Para comprender mejor el problema dual lagrangiano modificado, por simplicidad asumiremos que los conjuntos X y W contienen un gran número de puntos pero finito $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ y $\{y_1, y_2, \dots, y_L\}$ o X y W son poliedros acotados con sus vértices

Proposición 29 $w_{MD} = \max\{cx \mid Dx \leq Dy, x \in \text{conv}(X), y \in \text{conv}(W)\}$.

Demostración. Por la definición de w_{MD} , $z_M(u)$ y $z(u)$ tenemos:

$$\begin{aligned} w_{MD} &= \min_{u \geq 0} \left\{ \max_{x \in X} \{cx + u(d - Dx)\} - \min_{y \in W} \{u(d - Dy)\} \right\} \\ &= \min_{u \geq 0} \left\{ \max_{t=1, \dots, T} \{cx_t + u(d - Dx_t)\} - \min_{l=1, \dots, L} \{u(d - Dy_l)\} \right\} \\ &\text{mín } \eta - \varepsilon \qquad \qquad \qquad (MP) \end{aligned}$$

$$\eta \geq cx_t + u(d - Dx_t), \quad t = 1, \dots, T$$

$$\varepsilon \leq u(d - Dy_l), \quad l = 1, \dots, L$$

$$u \geq 0, \eta, \varepsilon \in \mathbb{R}^1$$

donde las variables η, ε han sido introducidas para representar máx y mín respecto a $x \in X$ respectivamente. ■

El problema maestro (MP) es un problema lineal. Tomando el dual dado:

$$\begin{aligned}
wMD &= \text{máx} \sum_{t=1}^T \lambda_t(cx_t) \\
\sum_{l=1}^L \mu_l(d - Dy_l) - \sum_{t=1}^T \lambda_t(d - Dx_t) & \quad (DMP) \\
\sum_{t=1}^T \lambda_t = 1, \sum_{l=1}^L \mu_l = 1, & \quad \lambda, \mu \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora sea $x = \sum_{t=1}^T \lambda_t$, $y = \sum_{l=1}^L \mu_l$ con $\sum_{t=1}^T \lambda_t = 1$, $\sum_{l=1}^L \mu_l = 1$, $\lambda, \mu \geq 0$ obtenemos:

$$w_{MD} = \text{máx} \{cx \mid Dx \leq Dy, x \in \text{conv}(X), y \in \text{conv}(W)\}$$

Observación 30 Se conoce por [36] que el dual lagrangiano (LD) tenemos:

$$w_D = \text{máx} \{cx \mid Dx \leq d, x \in \text{conv}(X)\}$$

y si $X = \text{conv}(X)$, entonces $w_D = z_R$.

Nota 31 Para el dual modificado tendremos $w_{MD} < z_R$ para $X = \text{conv}(X)$.

La cota dual lagrangiana modificada (MD) es un problema de programación no lineal con respecto a u y puede ser resuelto por métodos como: el subgradiente o dual ascendente [56]. Análogamente podemos aplicar técnicas como el de generación de restricciones (método de Benders) para el problema maestro (MP) el cual es lineal o de columnas para el dual (DMP). Para más técnicas de solución del (MP) ver [43].

Una de las dificultades más frecuentes al resolver el dual lagrangiano modificado (MP) es la de construcción de una localización W adecuada. De la definición de $z_M(u)$ y w_{MD} tenemos que, en general, el conjunto más pequeño W es, la mejor cota superior modificada. Esto es, definiendo W como las restricciones originales, es mejor considerar tantas restricciones como sea posible. Análogamente, la localización debe ser lo suficientemente simple para garantizar que el problema auxiliar (AP) es más fácil de resolver que el problema (P). Además, para mejorar w_D , $\theta(u)$ debe ser positiva al menos para algún $u \geq 0$.

Considerando el problema original (P) con $X = \{x \mid Ax \leq b, x \in U\}$, donde U contiene las restricciones de signo para x y restricciones de integralidad para algunos o todos los componentes de x . Definamos la localización por las restricciones originales como sigue:

$$W_0 = \{y \mid Dy \leq d, y \in U\}$$

Obviamente $x^* \in W_0$, si tenemos a un $\theta(u) = \min_{y \in W_0} \{u(d - Dy) \geq 0\}$, para cualquier $u \geq 0$ y entonces por (MLD) , (MD) tenemos que $w_{MD} \leq w_M$. Por lo tanto posiblemente fortalecimos w_D debido a que consideramos el dual lagrangiano modificado (MLD) .

Si la localización se puede descomponer, esto es $W_0 = W_{01} \times \dots \times W_{0L}$, el problema (AP) se reduce a L subproblemas independientes de dimensiones pequeñas. Hay algunas clases de problemas que cuentan con la estructura de X y W_0 y resulta en la descomposición de ambos problemas lagrangianos para calcular $z(u)$ y el problema auxiliar para calcular $\theta(u)$. En otras palabras, frecuentemente este es el caso de los problemas que cuentan con variables " x_{ij} ", entre los cuales se encuentran: el de asignación generalizada, de localización de fábricas, de la mochila múltiple, problemas de cortes y empaquetamiento, entre otros.

Ahora supongamos que la localización tiene la forma $W_1 = \{y \mid y \in Y, Py \leq p\}$, donde $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, la matriz P y el vector p son correspondidos dimensionalmente. Asumimos que el conjunto Y presenta una estructura favorable (por ejemplo, descomponible) y manejaremos las restricciones $y \in Y$ explícitamente, mientras las restricciones $Py \leq p$ podrían ser dualizadas. Tenemos:

$$\theta(u) = \min_{y \in W} u(d - Dy) \geq \min_{y \in Y} \{u(d - Dy) + v(Py - p)\} \quad \text{para cualquier } v \geq 0,$$

por lo que:

$$\theta(u) \geq \max_{v \geq 0} \min_{y \in Y} \{u(d - Dy) + v(Py - p)\}.$$

Entonces sigue que:

$$\begin{aligned} w_{MD}(W_1) &= \min_{u \geq 0} \{z(u) - \theta(u)\} \leq \\ &\min_{u \geq 0} \left\{ z(u) - \max_{v \geq 0} \min_{y \in Y} \{u(d - Dy) + v(Py - p)\} \right\} \leq (MD(W_1)) \\ &\min_{u, v \geq 0} \left\{ z(u) - \min_{y \in Y} \{u(d - Dy) + v(Py - p)\} \right\} \equiv \tilde{w}_{MD}(W_1) \end{aligned}$$

con $z^* \leq \tilde{w}_{MD}(W_1)$.

Similarmente a la demostración de la Proposición 29, tenemos:

$$w_{MD}(W_1) = \text{máx} \{cx \mid Dx \leq Dy, Py \leq p, x \in \text{conv}(X), y \in \text{conv}(X)\}$$

Por la definición de $\theta(u)$ en (AP) con $x^* \in W$, tenemos $\theta(u) \leq u(d - Dx^*)$ para cualquier $u \geq 0$, por lo que:

$$uDx \leq ud - \theta(u) \quad (LFC)$$

define una familia de cortes de u conservando la solución óptima del problema original. Nos referiremos a estos como los cortes lagrangianos factibles.

Considere el problema de separación para la familia (LFC). Explícitamente, dado un punto \hat{x} , deseamos saber si satisface todos los cortes de (LFC).

Dado un \hat{x} el problema de separación dual lagrangiano se plantea como sigue:

$$w_{LDS}(\hat{x}) = \min_{u \geq 0} \{u(d - D\hat{x}) - \theta(u)\} \quad (LDS)$$

y \hat{x} es eliminado por el correspondiente (LFC) si $w_{LDS}(\hat{x}) < 0$. Por la definición de $\theta(u)$ tenemos que $\theta(u) \leq u(d - Dy)$ para $x \in W$ y $u \geq 0$, por lo que si $x \in W$ nunca será cortado por (LFC).

Nota 32 Por complementariedad $u_R(d - Dx_R) = 0$ y si $\theta(u_R) > 0$, entonces x_R es cortado por (LFC) el cual está asociado a $u = u_R$.

En el problema de separación (LDS) nos interesa principalmente el signo de $w_{LDS}(\hat{x})$. Puesto que $\theta(u)$ es homogéneo con respecto a u , es $w_{LDS}(\hat{x})$ y por lo tanto sin la pérdida de generalidad podemos normalizar u . Por ejemplo, si agregamos la restricción $eu = 1$, donde e es un vector unitario m -dimensional. Similarmente a la demostración de la proposición 2, se puede demostrar que para la normalización del problema (LDS) tenemos:

$$w_{LDS}(\hat{x}) = \text{máx} \{t \mid te \leq D(x - \hat{x}), x \in \text{conv}(W), t \in \mathbb{R}^1\}$$

Tenemos $\theta(u)$, tal que:

$$wMD = \min_{u \geq 0} \{z(u) - u\} = z\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = 2.846 < w_D.$$

Ahora supongamos que la localización W_1 está definida como las dos restricciones originales, tal que la primera restricción es usada para definir la condición $y \in Y$ y es manejada explícitamente, mientras que la segunda es dualizada en la estimación de $\theta(u)$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \min_{y \in W_1} \{u(18 - 8y_1 - 16y_2 - 3y_3 - 6y_4)\} \\ &= u \left(18 - \max_{y \in W_1} \{8y_1 + 16y_2 + 3y_3 + 6y_4\} \right). \end{aligned}$$

Usando la técnica lagrangiana estándar para estimar el máximo en la expresión siguiente, tenemos:

$$\begin{aligned} &\max_{y \in W_1} \{8y_1 + 16y_2 + 3y_3 + 6y_4\} \leq \\ &\min_{v \geq 0} \max_{y \in Y} \{8y_1 + 16y_2 + 3y_3 + 6y_4 - v(5y_1 + 10y_2 + 8y_3 + 16y_4 - 19)\} = \\ &\min_{v \geq 0} \{19v + \max\{(8 - 5v)y_1 + (16 - 10v)y_2 + (3 - 8v)y_3 + (6 - 16v)y_4\} \\ &| y \in \{0, 1\}, 8y_1 + 16y_2 + 3y_3 + 6y_4 \leq 18\}. \end{aligned}$$

Denotando el menor máximo por $\varphi(v)$ obtenemos:

$$\varphi(v) = \begin{cases} 19v, & u \geq \frac{8}{5} \\ 16 + 9v, & \frac{1}{19} \leq u < \frac{8}{5} \\ 17 - 10v, & 0 \leq u < \frac{1}{19} \end{cases}$$

con $\min_{v \geq 0} \varphi(v) = \varphi\left(\frac{1}{19}\right) = 16,47$. Respectivamente, tenemos

$$\theta(u) \geq u \left(18 - \min_{v \geq 0} \varphi(v) \right) = 1.53u$$

y

$$z^* \leq \min_{u \geq 0} \{z(u) - \theta(u)\} \leq \tilde{w}_{MD}(W_1) = \min_{u \geq 0} \{z(u) - 1.53u\} = 2.8 < w_{MD}.$$

Ejemplo 34 Considere el siguiente problema no lineal:

$$z^* = \text{máx} \{f(x) \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

con cóncava $f(x)$. Definimos $X = \{x \mid Ax = b\}$ y $W = \{y \mid \tilde{A}y = \tilde{b}, y \geq 0\}$, donde la matriz $[\tilde{A}, \tilde{b}]$ contiene un subconjunto de filas de la matriz extendida $[A, b]$.

Dualizando las restricciones de no negatividad $x \geq 0$, la cota lagrangiana calculada para un $u \geq 0$ fijo es:

$$z(u) = \text{máx} \{f(x) - ux \mid Ax = b\}$$

mientras que la cota lagrangiana modificada $z_M(u)$ está definida por:

$$z_M(u) = z(u) - \theta(u)$$

$$\theta(u) = \min \left\{ yu \mid \tilde{A}y = \tilde{b}, y \geq 0 \right\}$$

En particular, si u es estrictamente positivo y la matriz $[\tilde{A}, \tilde{b}]$ contiene al menos una fila con elementos positivos, entonces $\theta(u) > 0$ y $z_M(u) < z(u)$.

Nota 35 Los multiplicadores son estrictamente positivos y frecuentemente son usados en técnicas de punto interior, ver [79].

3.3. Problema de asignación generalizada (*GAP*)

En esta sección consideraremos una clase del problema de asignación generalizada, el cual cuenta con cierta característica: posee una estructura de descomposición doble en sus restricciones. A continuación detallaremos los pasos básicos del esquema propuesto para mejorar la cota lagrangiana enfocándonos en los aspectos algorítmicos.

El problema de asignación (*AP*) consiste en relacionar de forma óptima los elementos de dos o más conjuntos, donde la dimensión del problema se refiere a la cantidad de elementos de cada conjunto a ser relacionado. Cuando sólo contamos con dos conjuntos, nos referiremos a estos como “agentes” y “tareas”. Por ejemplo, las “tareas” quizás trabajos por realizar y los “agentes” las personas o máquinas que los harán. La versión original del *AP* consiste en la asignación de cada tarea a un agente distinto, siendo asignado a lo más una tarea por agente (asignación biunívoca). En el problema de asignación generalizado *GAP* cada tarea es asignada a un agente, al igual que en el problema clásico *AP*, pero existe la posibilidad de que un agente sea asignado a más de una tarea, reconociendo que la tarea puede usar solamente una parte disponible de la capacidad del agente para llevarse a cabo. Por lo que el *GAP* es un problema de asignación de uno - a - varios que reconoce la capacidad límite (ver [61, 66]). Consideraremos una generalización del *AP* el cual es una asignación varias - varios reconociendo las capacidades límites de tareas y agentes. Una situación real en la cual se encuentra este tipo de asignación es en los hospitales, donde los doctores ocupan el lugar de los agentes estos tienen que realizar ciertas tareas representados por los pacientes limitado en un período de tiempo, mientras los pacientes no pueden quedarse mucho tiempo en el hospital.

3.3.1. Modelo matemático de la asignación varias tareas - varios agentes

El modelo matemático que describe lo mencionado en la actual sección es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 z_{ip} &= \text{máx} && \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} && (MMAP) \\
 \text{s.a:} &&& \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} \leq d_j && j = 1, \dots, n \\
 &&& \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i && i = 1, \dots, m \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

donde $x_{ij} = 1$ si el agente i es asignado a la tarea j , 0 en caso contrario, c_{ij} representa la ganancia obtenida si la tarea j es asignada al agente i , a_{ij} es la capacidad del agente i para realizar la tarea j , b_i se considera como la capacidad disponible del agente i : También asumimos que cada tarea cuenta con una capacidad (tiempo) límite, tal que d_{ij} es la capacidad usada de la tarea j cuando es realizada por el agente i , d_j es la disponibilidad que tiene la tarea j para ser realizada.

Nota 36 (*MMAP*) tiene la estructura de descomposición doble: si se dualizan las primeras m restricciones, entonces el problema relajado se descompone en n subproblemas independientes, teniendo cada uno, una sola restricción tipo mochila $\sum_{i=1}^m d_{ij}x_{ij} \leq d_j$, mientras si se relaja el segundo tipo de restricciones tenemos m subproblemas tipo mochila. Si tomamos como restricciones difíciles el segundo grupo de desigualdades. Definimos:

$$X = \{x_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\} = \prod_{i=1}^m X_i$$

$$X_i = \{x_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} \leq b_i\}$$

$$W_1 = \{y_{ij} \in \{0, 1\} \mid y \in Y, Py \leq p\}$$

$$\{Py \leq p\} \equiv \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

$$Y = \left\{ y_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{i=1}^m d_{ij}y_{ij} \leq d_j, j = 1, 2, \dots, n \right\} = \prod_{j=1}^n Y_j.$$

$$Y_j = \left\{ y_{ij} \in \{0, 1\} \mid \sum_{i=1}^m d_{ij}y_{ij} \leq d_j \right\}$$

Las restricciones originales incluidas en X pueden ser consideradas como “fáciles”, mientras aquellas en Y son tratadas como “difíciles”. La localización W_1 puede ser usada en el dual lagrangiano modificado ($MD(W_1)$) para calcular el valor $\tilde{w}_{MD}(W_1)$. Podemos manejar las restricciones $y \in Y$ explícitamente, mientras las restricciones $Py \leq p$ pueden ser dualizadas en el problema auxiliar. Sea $u = \{u_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ y $v = \{v_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ los multiplicadores lagrangianos. Similarmente a la sección anterior obtenemos $z^* \leq w_{MD}(W_1)$ con:

$$\tilde{w}_{MD}(W_1) = \min_{u, v \geq 0} \{z(u) - \theta(u, v)\},$$

donde para el problema (*MMAP*):

$$z(u) = \sum_j u_j d_j + \max_{x \in X} \left\{ \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_j d_{ij}) x_{ij} \right\}$$

$$\theta(u, v) = \sum_j u_j d_j - \sum_i v_i b_i + \min_{y \in Y} \left\{ \sum_j \sum_i (v_i a_{ij} - u_j d_{ij}) y_{ij} \right\}.$$

El dual lagrangiano modificado ($MD(W_1)$) es un problema de programación no lineal con respecto a las variables $u, v \geq 0$ y puede ser resuelto por las técnicas del subgradiente o el dual ascendente. Aplicamos el esquema de generación de restricciones (método de Benders) transformando el ($MD(W_1)$) a un problema de programación lineal a gran escala. El principal enfoque de nuestro estudio es comparar la calidad de las cotas, por eso escogimos la técnica de Benders ya que genera la cota inferior y superior para $\tilde{w}_{MD}(W_1)$ en cada iteración por lo que produce una solución cerca de la óptima con calidad garantizada.

Sea $\{x_{ij}^t, t = 1, 2, \dots, T\}$ y $\{y_{ij}^l, l = 1, 2, \dots, L\}$ son todos los puntos factibles de X y Y . Entonces podemos calcular el problema $\tilde{w}_{MD}(W_1)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{w}_{MD}(W_1) = \min \eta - \varepsilon \quad (MP1)$$

$$\text{s. a } \eta \geq \sum_j u_j d_j + \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_j d_{ij}) x_{ij}^t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (21)$$

$$\varepsilon \leq \sum_j u_j d_j - \sum_i v_i b_i + \sum_i \sum_j (v_i a_{ij} - u_j d_{ij}) y_{ij}^l \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (22)$$

$$u, v \geq 0, \eta, \varepsilon \in \mathbb{R}^1$$

Lo anterior es un problema *LP* con $(2+m+n)$ variables y un gran número de restricciones - una por cada punto factible de X y Y . Para resolver el problema maestro (*MP1*) usamos el esquema de generación de restricciones en forma del algoritmo de Benders. Omitimos la descripción completa en esta sección del conocido método iterativo [54, 60] y nos enfocaremos solamente en el esquema de generación de restricciones.

Consideramos que la k -ésima iteración tenemos un problema tipo maestro (*RMP1k*), teniendo pocas restricciones de la forma (21) y (22) en comparación con el (*MP1*). Denotamos la solución óptima por $(u, v, \varepsilon, \eta)^k$. Para checar la factibilidad de esta solución para todas las restricciones tipo (21) necesitamos verificar si:

$$\eta^k - \sum_j u_j^k d_j \geq \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_j^k d_{ij}) x_{ij}^t, \text{ para toda } t = 1, 2, \dots, T$$

o equivalentemente:

$$\eta^k - \sum_j u_j^k d_j \geq \max_{x \in X} \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_j^k d_{ij}) x_{ij} \equiv \sum_i \max_{x \in X_i} \sum_j (c_{ij} - u_j^k d_{ij}) x_{ij} \quad (23)$$

donde la maximización sobre X es reducido a maximizaciones independientes sobre X_i para descomponer la estructura de X . Para ser verificado por (23) necesitamos resolver m subproblemas independientes cada uno teniendo una sola restricción tipo mochila y n variables binarias. Denotamos por x_{ij}^k su solución óptima.

Similarmente, para checar la factibilidad con respecto a las restricciones tipo (22) necesitamos verificar:

$$\begin{aligned} \varepsilon^k - \sum_j u_j^k d_j + \sum_i v_i^k b_i &\leq \min_{y \in Y} \sum_j \sum_i (v_i^k a_{ij} - u_j^k d_{ij}) y_{ij} \\ &\equiv \sum_j \min_{y \in Y_j} \sum_i (v_i^k a_{ij} - u_j^k d_{ij}) y_{ij}, \quad (24) \end{aligned}$$

que resulta en resolver n subproblemas independientes con una sola restricción tipo mochila y m variables binarias. Sea y_{ij}^k su solución óptima.

Si (23) y (24) son totalmente cumplidos, se detiene con $(u, v, \varepsilon, \eta)^k$ como óptima para (MP1). Si (23) falla, se agrega:

$$\eta \geq \sum_j u_j d_j \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_j d_{ij}) x_{ij}^k$$

a las restricciones del problema maestro. Si (24) falla, se agrega:

$$\varepsilon \leq \sum_j u_j^k d_j - \sum_i v_i^k b_i + \sum_j \sum_i (v_i a_{ij} - u_j d_{ij}) y_{ij}^k$$

a las restricciones del problema maestro. Por lo que en cada iteración agregaremos a lo más dos restricciones al (RMP1k) para obtener la siguiente restricción del problema maestro (RMP1k + 1).

Nota 37 La k -ésima iteración del método Benders contamos con una cota superior e inferior del valor óptimo $\tilde{w}_{MD}(W_1)$ de (MP1):

$$\eta^k - \varepsilon^k \leq \tilde{w}_{MD}(W_1) \leq \min_{s=1,2,\dots,k} \{z(u^s) - \theta(u^s, v^s)\}, \quad (25)$$

donde el mínimo es tomado sobre todas las iteraciones anteriores y para cada iteración s tenemos:

$$z(u^s) = \sum_j u_j^s d_j + \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_j^s d_{ij}) x_{ij}^s,$$

$$\theta(u^s, v^s) = \sum_j u_j^s d_j - \sum_i v_i^s b_i + \sum_j \sum_i (v_i^s a_{ij} - u_j^s d_{ij}) y_{ij}^s.$$

Por lo que nos detendremos si la diferencia entre las cotas en (25) es más pequeña como deseamos.

También hay que recalcar que si $\eta^k - \varepsilon^k > \eta^{k-1} - \varepsilon^{k-1}$, podemos eliminar esas restricciones tipo (21) y (22) las cuales no son activas en la solución $(u, v, \varepsilon, \eta)^k$ ver [54].

Asumimos que los coeficientes de la función objetivo en (MMA) son no negativos, por lo tanto $z_{ip} \geq 0$. Entonces para una solución óptima de (MP1), $(u, v, \varepsilon, \eta)^k$, tenemos:

$$0 \leq z_{ip} \leq \tilde{w}_{MD}(W_1) = \eta^k - \varepsilon^k,$$

$$\eta^* = z(u^*) \geq z_{ip} \geq 0.$$

Entonces podemos agregar al problema maestro (MP1) restricciones triviales $\eta - \varepsilon \geq 0$, $\eta \geq 0$ desde el principio para cuidar no limitar el decremento del objetivo en iteraciones tempranas del método de Benders.

Observación 38 Podemos transformar el problema dual lagrangiano ($MD(W_1)$) ligeramente a un problema maestro diferente si se nota que:

$$z(u) = \sum_j u_j d_j + \sum_i \max_{x \in X_i} \left\{ \sum_j (c_{ij} - u_j d_{ij}) x_{ij} \right\}$$

y

$$\theta(u, v) = \sum_j u_j d_j - \sum_i v_i b_i + \sum_j \min_{y \in Y_j} \left\{ \sum_i (v_i a_{ij} - u_j d_{ij}) y_{ij} \right\}$$

puede tener una estructura descomponible de X y Y . Sea $\{x_{ij}^t, t = 1, 2, \dots, T_i\}$ y $\{y_{ij}^l, l = 1, 2, \dots, L_j\}$ son todos los puntos factibles de X_i y Y_j .

Entonces $(MD(W_1))$ puede ser transformado equivalentemente al siguiente problema maestro:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{MD}(W_1) = \min \quad & \sum_i v_i b_i + \sum_i \eta_i - \sum_j \varepsilon_j \\ \text{s. a:} \quad & \eta_i \geq \sum_j (c_{ij} - u_j d_j) x_{ij}^t \quad t = 1, 2, \dots, T_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \varepsilon_j \leq \sum_i (v_i a_{ij} - u_j d_{ij}) y_{ij}^l \quad l = 1, 2, \dots, L_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & u, v \geq 0, \varepsilon_j, \eta_i \in \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

El problema anterior es un problema LP teniendo $2(m + n)$ variables y una restricción para cada punto factible de X_i y Y_j . El cual también puede ser resuelto por la técnica de Benders. No es difícil de verificar que si checamos la factibilidad de todas las restricciones del problema maestro resulta la solución de los mismos subproblemas anteriores. Sin embargo, contrastando con la forma anterior que poseía el problema maestro, aquí generaremos más restricciones en cada iteración, a lo más $m + n$.

Capítulo 4

Experimentación computacional

4.1. Implementación

4.1.1. Generalidades de GAMS

Alrededor de la década de los cincuentas ha ocurrido un fulminante desarrollo de algoritmos y códigos computacionales para la solución y análisis de problemas de programación matemática. En principios de los ochentas los sistemas de modelado tuvieron una parte importante de su desarrollo. Uno de los sistemas de modelado que se desarrollaron primeramente fue el General Algebraic Modeling System (GAMS), es un sistema de alto nivel utilizado para la modelación de problemas de programación matemática y optimización, que esta compuesto por un lenguaje compilador integrado a un grupo de solvers de alto rendimiento. Principalmente fue diseñado para:

- La optimización de problemas: lineales, no lineales, enteros y cualquier combinación de ellos, entre otros.
- Brindar un lenguaje basado primordialmente en álgebra para representar de forma compacta modelos grandes y complejos.
- Admitir de forma rápida y segura cambios en las especificaciones del modelo.
- Calcular sentencias de relaciones algebraicas omitiendo ambigüedades.
- Facilitar la verificación de que el modelo creado sea correcto, tratando de propagar la expansión de contextos, en un ambiente que este basado en subíndices, cierta expansibilidad, dar acceso al usuario de empezar con un conjunto pequeño de datos.

- Permitir la expansión de los nombres de las variables, describir la función de ecuaciones, índices, definición de datos como comentarios siendo inherentemente auto documentado. GAMS esta diseñado para que la estructura del modelo, suposiciones, y cualquier proceso de cálculo usado en el reporte escrito sea documentado como un archivo auto contenido.
- Facilitar la interfaz de interacción con otros nuevos y mejores solvers, siempre y cuando sean independientes, para que sean utilizados en la solución de cualquier problema dado.
- Incluir en la automatización del proceso de modelado lo siguiente:
 - acceso a cálculo de datos;
 - verificar la estructura correcta de las sentencias algebraicas del modelo;
 - evitar la formulación de fallos obvios;
 - interactuar con un solver;
 - salvar y presentar una base avanzada cuando se generan soluciones relacionadas;
 - tener uso de la solución para reportes escritos.
- Tener acceso a la formulación de un modelo entre sistemas de cómputo es decir que pueda ser usada en una amplia gama de ordenadores, también importar/exportar datos de otros paquetes computacionales.
- Cambiar entre opciones de un solver y otro.
- Ser utilizados por grupos de varias disciplinas.
- Contar con una librería de modelos para dar ejemplos de ayuda a los usuarios.

4.1.2. Generalidades de Cplex

Programación Lineal

La solución que realiza Cplex de problemas lineales la lleva acabo utilizando alternadamente varios algoritmos. Por ejemplo el algoritmo dual simplex más avanzado de Cplex es utilizado para resolver la mayoría de problemas lineales debido a que son resueltos mejor con este, así mismo otros ciertos tipos de problemas se resuelven mejor usando el algoritmo primal simplex, el optimizador para redes, el algoritmo de barrera, o el algoritmo de exploración. Existe la opción paralela si esta activada, resuelve diversos algoritmos en paralelo y da la respuesta del primero que termine.

A pesar de que para la memoria es muy intensivo resolver problemas de programación lineal Cplex la maneja eficientemente. La escasez de la memoria

física es un problema común al momento de resolver problemas de dimensiones grandes; en caso de ser la memoria limitada, Cplex automáticamente hará los ajustes necesarios para no impactar negativamente el funcionamiento.

El diseño de Cplex está hecho para resolver bajo varios escenarios por defecto la mayoría de los problemas lineales. Tales escenarios brindan la mejor velocidad y confiabilidad de la optimización del problema. Sin embargo, en varias ocasiones hay razones para modificar las opciones para la mejora del funcionamiento, evitar dificultades numéricas y tener el control de la duración de la optimización, o las opciones de salida.

Existen diferencias entre el tiempo de solución de los problemas resueltos con el algoritmo primal simplex o con el algoritmo dual simplex, es poco común que un problema cuente con un funcionamiento numérico pobre en ambos algoritmos. Consecuentemente es considerable contemplar el algoritmo primal simplex si existen problemas numéricos cuando se usa el dual simplex.

Cplex cuenta con un algoritmo para modelos de red muy eficiente. Las características que poseen las restricciones son las siguientes:

- los coeficientes distintos a cero son $+1$ ó -1 ;
- cada una de las columnas de las restricciones tiene exactamente 2 entradas distintas a cero, una con un coeficiente $+1$ y la otra con -1 .

Otra de las cualidades de Cplex es que puede realizar extracciones automáticamente de redes que no se adhieren a las convenciones antes mencionadas y podrían ser transformados para contar con esas características.

Una alternativa al método simplex es el algoritmo de barrera utilizado para solucionar programas lineales. Éste consiste en emplear un algoritmo de barrera primal-dual logarítmico el cual genera una sucesión de soluciones primales y duales rigurosamente positiva, usar este algoritmo resulta ventajoso para problemas grandes y dispersos.

Cplex cuenta con un algoritmo de exploración que podría ser eficaz en problemas con que cuentan con muchas más variables que ecuaciones. Lo que hace tal algoritmo es solucionar una sucesión de subproblemas lineales que a partir de los resultados obtenidos de un subproblema se seleccionan las columnas del modelo original que se incluirán en el siguiente subproblema.

Otra de las funciones que maneja GAMS/Cplex es el acceso al *Cplex Infeasibility Finder*, el cual es un buscador de infactibilidad que toma un problema lineal infactible y origina un conjunto de restricciones inconsistentes irreducibles (*IIS*), el cuál es un conjunto de restricciones y de cotas para las variables que lo hacen infactible, eliminado cualquier miembro del sistema para convertirlo

en factible. En GAMS/Cplex el reporte del IIS está dentro en términos de las ecuaciones de GAMS y de los nombres de las variables, el reporte del IIS esta incluido en una sección del registro de la solución.

Programación entera mixta

Para solucionar problemas de tipo entero-puro y mixto es necesario usar métodos que realicen más cálculos matemáticos que los empleados para problemas lineales puros que cuenten con las mismas condiciones. El tiempo de solución para resolver un problema de programación entera de dimensiones relativamente pequeño es enorme.

Un algoritmo utilizado por Cplex para problemas con variables enteras, es el de ramificar y acotar, el cual consiste en solucionar una serie de subproblemas. Un problema entero mixto es muy agotador computacionalmente por la gran cantidad de subproblemas que genera y la demasiada memoria física que requiere para solucionarse.

4.1.3. GAMS/Cplex

Un solver de GAMS que brinda acceso a los usuarios de combinar el alto nivel de modelación de GAMS y el poder de los optimizadores de Cplex es el GAMS/Cplex. El diseño con el cuentan los ordenadores de Cplex es para solucionar problemas grandes y complicados en un corto tiempo y de ser posible una mínima mediación del usuario. Para los problemas de programación lineal, cuadrática, problemas con restricciones y enteros mixtos, da acceso (con la licencia apropiada) a los algoritmos de solución de Cplex. Además GAMS/Cplex cuenta con varias opciones de solución disponibles que para la mayoría de las opciones de problemas específicos calculan y fijan automáticamente los mejores valores GAMS/Cplex cuenta con todas las opciones de Cplex.

Si se desea tener mayor información sobre GAMS, Cplex y GAMS/Cplex ver [62] y por la red en www.gams.com y www.cplex.com.

4.2. Indicaciones numéricas

El objetivo del estudio numérico es el comparar la relación entre calidad de las cotas y el valor objetivo óptimo de la solución exacta. Compararemos numéricamente las cotas lagrangianas para dos conjuntos de instancias de (*MMA*P): instancias pequeñas con tamaños $m \times n$ donde $m \in \{5, 8, 10\}$ y $n = 50$ e instancias más grandes las cuales tienes los valores de $m \in \{5, 10, 20\}$ y $n = 100$. Los datos son enteros generados aleatoriamente como sigue:

- $c_{ij} \in U[10, 50]$,
- $a_{ij} \in U[5, 25]$,
- $d_{ij} \in U[3, 20]$

donde U es una distribución uniforme dentro del intervalo de enteros mencionado, además con:

- $b_i = \alpha \left(\sum_j a_{ij} - 1 \right)$,
- $d_j = \alpha \left(\sum_i d_{ij} - 1 \right)$,

donde $0 < \alpha \leq 1$. Por lo que han sido divididos en cinco clases [61] con respecto a los valores de α :

- a ($\alpha = 0.8$),
- b ($\alpha = 0.85$),
- c ($\alpha = 0.9$),
- d ($\alpha = 0.95$) y
- e ($\alpha = 1$).

Ambas cotas lagrangianas, la clásica y la modificada, son calculadas por la técnica de Benders como fue presentado en el capítulo anterior. Note que podemos calcular la cota clásica lagrangiana si hacemos $\varepsilon = 0$, e ignoramos las restricciones tipo (22) en el problema maestro (*MP1*).

El algoritmo tiene varios criterios de parada entre los cuales están:

- la diferencia entre las cotas (25) es más pequeña que 1,
- la diferencia relativa entre la cota superior e inferior es menor que un error dado y
- la cantidad de iteraciones es excedida.

El modelo y el algoritmo fueron codificados en una herramienta computacional como Cplex 9.0 mediante la interfaz gráfica GAMS en un ordenador *Sun*TM *Ultra 10* con sistema operativo *Solaris*TM versión 7.

Los casos prueba fueron creados con las especificaciones antes mencionadas, mediante un generador creado en C++, el cual se alimentaba de la cantidad de “agentes”, “tareas”, el valor de α y generaba un archivo en GAMS.

4.2.1. Resultados experimentales

Se han diseñado varios programas con las dimensiones especificadas en la sección de indicaciones numéricas. Cada uno varía con respecto al valor de α por lo que de una dimensión hay 5 tipos distintos de problemas, además de contar con 5 repeticiones (tomando como repetición la misma dimensión del problema pero con distintos datos o mejor dicho distintas semillas de generación) y con el mismo valor de α .

Para todas las instancias fueron calculados los siguientes valores:

z_{ip}	solución óptima del problema original entero
z_{lp}	solución óptima de la relajación lineal
z_{lag}	cota clásica lagrangiana (solución del problema $w_D(W_1)$)
z_{md}	cota modificada lagrangiana (solución del problema $\tilde{w}_{MD}(W_1)$)

obteniendo tres cotas superiores de z_{ip} . En el Apéndice de Resultados se muestran las tablas con los resultados experimentales, y cantidades posteriormente descritas.

Además medimos la calidad de las cotas por dos tipos de cantidades porcentuales (una para medir la mejoría de un tipo de cota sobre otra y la segunda para medir la cercanía de cada cota a la solución exacta óptima) las cuales se describen a continuación.

$$rel_1 = \frac{z_{md} - z_{ip}}{z_{lag} - z_{ip}} 100\%$$

$$rel_2 = \frac{z_{md} - z_{ip}}{z_{lp} - z_{ip}} 100\%$$

$$rel_3 = \frac{z_{lag} - z_{ip}}{z_{lp} - z_{ip}} 100\%$$

donde rel_1 representa el mejoramiento de la cota modificada sobre la clásica, rel_2 muestra la fortaleza de la cota modificada sobre la relajación LP y rel_3 compara la calidad de la cota clásica sobre la cota LP .

Además calculamos la calidad de cada una de las cotas con respecto a la proximidad existente con la solución entera óptima y fueron calculadas así:

$$gap_1 = \frac{z_{md} - z_{ip}}{z_{ip}} 100 \%$$

$$gap_2 = \frac{z_{lag} - z_{ip}}{z_{ip}} 100 \%$$

$$gap_3 = \frac{z_{lp} - z_{ip}}{z_{ip}} 100 \%$$

donde gap_1 es la proximidad de la solución óptima entera a la cota modificada lagrangiana, gap_2 a la cota lagrangiana clásica y gap_3 a la cota de relajación lineal.

Como conclusión de la experimentación computacional podemos decir que aún siendo instancia pequeña o grande se puede observar que la cota modificada lagrangiana es mejor que la clásica lagrangiana mínimo en un 60%; esto se puede ver debido al valor de rel_1 , al igual del dominio que tiene esta última sobre la cota obtenida por relajación lineal y por último cabe mencionar la mejoría de mínimo un 80% de la cota modificada lagrangiana sobre la lineal, lo cual está representado por el valor de rel_3 .

Por parte de la calidad de las cotas obtenidas con respecto a la relación existente entre cada una estas y la solución exacta óptima de este problema, la principal nota que debemos mencionar es que los valores de gap_2 y gap_3 son más grandes que gap_1 es decir que la cota lagrangiana modificada es la más cercana al resultado exacto, seguido por la cota clásica lagrangiana y por último la lineal.

4.2.2. Prueba de hipótesis de las diferencias en las medias de las cotas.

Para comprobar estadísticamente las conclusiones realizadas en la sección anterior (resultados experimentales) realizaremos prueba de hipótesis para fortalecer dichas conclusiones.

Los datos con los cuales se realizarán dichas pruebas fueron tomados de las tablas (de la 1 a la 10) mostradas en la sección anterior, estos serán utilizados para hacer una prueba de hipótesis de media de diferencias donde contamos con una muestra de 150 casos; lo que queremos probar es:

- que la cota modificada lagrangiana domina (mejora) a la cota clásica,
- que la cota modificada lagrangiana domina a la cota lineal,
- que la cota clásica lagrangiana domina la cota lineal.

Criterio de Prueba Rechazar H_0 si:	
H_1	
$\mu_d > d$	$z > z_\alpha$
$\mu_d < d$	$z < -z_\alpha$
$\mu_d \neq d$	$ z > z_{\frac{\alpha}{2}}$
Estadístico de Prueba.	$z = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sigma_d} \sqrt{n}$

Cuadro 4.1: Prueba de hipótesis para medias.

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias entre la cota clásica lagrangiana y la modificada.

Para empezar haremos la comparación de la cota modificada lagrangiana sobre la cota clásica. Lo que queremos demostrar estadísticamente es que la media obtenida por la cota modificada lagrangiana es menor que la media obtenida por la clásica lagrangiana (con respecto a la cercanía con la que estas cuentan a la solución óptima entera).

Considerando un $\alpha = 0.001$ es decir con un intervalo de confianza del 99% y como $H_0 : \mu_d = 50\%$ la hipótesis nula donde μ_d es la media de diferencias entre la cota clásica y la modificada lagrangiana; y $H_1 : \mu_d > 50\%$ es decir queremos encontrar estadísticamente que la cota clásica es mejorada al menos en un 50% por la cota modificada.

Como se podrá notar el criterio de prueba que utilizaremos para esta comparar las medias es el $\mu_d > 50\%$ con $n = 150$. Ahora calcularemos los datos necesarios para emplear nuestro criterio, los datos son los siguientes:

- $\bar{d} = 140.9257754$
- $\mu_d = 50\% = 70.46288769$
- $\sigma_d = 117.2079793$
- $Z_0 = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sigma_d} \sqrt{n} = \frac{140.92577 - 70.46288769}{117.2079793} \sqrt{150} = \frac{98.64803739}{117.2079793} \sqrt{150} = 7.3383$
- $Z_\alpha = 3.090$

Para comprobar nuestra hipótesis tenemos que probar que $Z_0 > Z_\alpha$, sustituyendo los valores $7.3383 \geq 3.090$ rechazamos H_0 , por lo que aceptamos la H_1 esto significa que el promedio de mejoría de la cota modificada lagrangiana sobre la clásica es mayor a un 50%

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias entre la cota modificada lagrangiana y la lineal.

Continuando con la comparación entre las cotas, seguimos con la cota modificada lagrangiana y la lineal. Deseamos probar estadísticamente que la cota modificada lagrangiana es mucho mejor que la lineal (con respecto a la cercanía con la que estas cuentan a la solución óptima entera).

Si consideramos un $\alpha = 0.001$ es decir con un intervalo de confianza del 99 % y como $H_0 : \mu_d = 80\%$ la hipótesis nula donde μ_d es la media de diferencias entre la cota clásica y la modificada lagrangiana; y $H_1 : \mu_d > 60\%$ es decir queremos encontrar estadísticamente que la cota lineal es mejorada al menos en un 80 % por la cota modificada.

De la tabla 11 tomamos el criterio de prueba a utilizar para esta comparar las medias es el $\mu_d > 80\%$ con $n = 150$. Ahora calcularemos los datos necesarios para emplear nuestro criterio, los datos son los siguientes:

- $\bar{d} = 157.4591098$
- $\mu_d = 80\% = 125.9672879$
- $\sigma_d = 118.5008979$
- $Z_0 = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sigma_d} \sqrt{n} = \frac{157.4591098 - 125.9672879}{118.5008979} \sqrt{150} = \frac{31.491098}{118.5008979} \sqrt{150} = 3.254781022$
- $Z_\alpha = 3.090$

Para descartar nuestra hipótesis nula tenemos que probar que $Z_0 > Z_\alpha$, substituyendo los valores $3.254781022 \geq 3.090$ rechazamos H_0 , por lo que aceptamos la H_1 esto significa que el promedio de mejoría de la cota modificada lagrangiana sobre la lineal con respecto a la cercanía con la que estas cuentan a la solución óptima entera es mayor a un 80 %.

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias entre la cota clásica lagrangiana y la lineal.

Por último deseamos realizar la comparación entre la cota clásica y la lineal. Para probar estadísticamente esto emplearemos la prueba de hipótesis para la diferencia de medias cuyo criterio y estadístico de prueba se encuentra en la tabla 11.

Tomando un $\alpha = 0.05$ es decir con un intervalo de confianza del 95 % y como $H_0 : \mu_d = 5\%$ la hipótesis nula donde μ_d es la media de diferencias entre la cota lineal y la clásica lagrangiana; y $H_1 : \mu_d > 5\%$ es decir queremos encontrar estadísticamente que la cota lineal es mejorada al menos en un 5 % por la cota modificada.

Calculando los datos necesarios para emplear nuestro criterio de prueba, tenemos los datos son los siguientes:

- $\bar{d} = 16.53333445$
- $\mu_d = 5\% = 0.826666723$
- $\sigma_d = 114.48$
- $Z_0 = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sigma_d} \sqrt{n} = \frac{16.53333445 - 0.826666723}{114.48} \sqrt{150} = \frac{15.70666773}{114.48} \sqrt{150} = 1.680$
- $Z_\alpha = 1.645$

Por lo que descartamos nuestra hipótesis nula debido a que tenemos $Z_0 > Z_\alpha$, es decir $1.680 \geq 1.645$ rechazamos H_0 , por lo que aceptamos la H_1 esto significa que el promedio de mejoría de la cota clásica lagrangiana sobre la lineal con respecto a la crecancia con la que estas cuentan a la solución óptima entera es mayor a un 5%.

Capítulo 5

Conclusiones

La contribución principal de este trabajo consiste en la obtención de cotas lagrangianas para una variación del problema de asignación generalizada, implementando la construcción de cotas desarrollada en [57], la cual consiste en calcular el valor que corresponde a la penalización que se suma a la función objetivo del problema lagrangiano, el cuál en la cota lagrangiana clásica es tomado normalmente como 0, por lo que al encontrar el menor valor posible de este hará que la mejoremos y la nombraremos cota lagrangiana modificada.

Se mostró en el capítulo correspondiente a la experimentación computacional que la cota lagrangiana mejorada es mejor que la clásica que a su vez mejora la obtenida por medio de relajación lineal. Además de esto se comprobó que la cota obtenida es la que se encuentra más cercana a la solución del problema exacto entero.

5.1. Conclusiones

Debido a que el problema de asignación múltiple (*MMAP*) es una variación del problema de asignación generalizada (*GAP*) el cual es considerado un problema NP difícil (ver sección del *GAP* para la demostración de dicha complejidad) no existe un algoritmo que lo resuelva de forma exacta en tiempo polinomial, además en la revisión de literatura no encontramos una heurística para obtener una solución aproximada de tal problema. Por el antecedente de [57] (el cual desarrolla cotas superiores para el problema (*MMAP*)) decidimos implementar el método propuesto, este está basado principalmente en la transformación de problemas de optimización de forma que sea más fácil de resolver, dejando como contribución un problema lineal. La transformación dada del *MMAP* finaliza con un problema lineal el cuál por su estructura decidimos emplear el método de Benders para su solución. El método de Benders fue implementado obteniendo una cota superior que domina a las existentes (lineal y clásica lagrangiana) para el problema tratado.

El objetivo principal que se presentó al inicio de este trabajo se cumplió ya que se desarrolló un método que encuentra cotas para el *MMAP*, además de demostrarse que la cota desarrollada en [57] mejora las cotas existentes para el problema antes mencionado.

5.2. Trabajo futuro

Cómo trabajo futuro podemos señalar la obtención de la cota modificada que se desarrolló mejorando el tiempo o la cantidad de iteraciones en las cuales se puede obtener dicha cota, ésta puede ser mejorada mediante la adición de varios cortes por iteración, lo que hará la convergencia de manera más rápida.

También se puede tratar de resolver el problema propuesto en [57] por otros métodos de solución como el subgradiente, el método de empaquetamiento (“bundle”), ó el algoritmo volumen y observar cual de todos estos métodos converge más rápido a dicha cota siempre y cuando se obtenga la misma o una mejor cota en menor tiempo.

Apéndice A

Programación lineal

La programación lineal es una rama de la programación matemática que estudia la optimización (maximización o minimización) de una función lineal que debe satisfacer un conjunto de restricciones lineales también de desigualdad o igualdad.

A.1. Breve historia

La programación lineal fue concebida por George B. Dantzig quien la desarrolló alrededor de 1947 cuando fungía como consejero de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos de América para dar solución a un programa de entrenamiento y abastecimiento logístico durante la segunda guerra mundial. Dantzig no sólo resolvió dicho problema, sino que formuló el *problema general de programación lineal* y desarrolló el *método simplex* de solución, sin embargo su trabajo no estuvo disponible hasta 1949, año de su publicación.

El nombre de *programa* no está asociado de manera alguna con un programa de ordenador, pues de hecho para la época esto hubiera sido imposible. Dado que en la fuerza aérea los planes y proyectos a implementar son llamados programas, Dantzig solía referirse a los problemas de programación lineal como “programa en una estructura lineal”, y no fue hasta 1948 que el matemático Koopmans acuñó el término *programación lineal*.

Diversos problemas del tipo de los de programación lineal fueron formulados y resueltos antes del primer trabajo de Dantzig. Von Neumann proporcionó su modelo de equilibrio en 1937. En 1939 Kantorovich planteó y resolvió un problema de organización y planificación. En 1941 Hitchcock formuló y resolvió el problema de transporte que fue independientemente resuelto por Koopmans en 1947. En 1942 Kantorovich también formuló el problema de transporte, pero no lo resolvió. En 1944 Von Neumann y Morgenstern formularon la teoría de juegos. Stigler trabajó el problema de la dieta en 1945.

Después de la publicación del método simplex el campo de la programación lineal se ha visto ampliamente enriquecido. La programación lineal ha sido favorablemente aceptada por su inherente capacidad para modelar una gran diversidad de problemas complejos y de gran importancia en física, geometría, administración e ingeniería entre otras. Así mismo, gracias al desarrollo y cada vez mayor capacidad de los ordenadores modernos, el método simplex ha sido la herramienta de solución de los problemas de programación lineal por excelencia.

A.2. El problema general de la programación lineal

El siguiente es un problema de programación lineal en su forma general.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. a:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Aquí $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ es la *función objetivo* que debe minimizarse, los parámetros c_j son los *coeficientes de costo*, las cantidades x_j son las *variables de decisión* que deben determinarse. La desigualdad $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ es la *i-ésima restricción*, los parámetros a_{ij} se denominan *coeficientes tecnológicos*, los parámetros b_i reciben el muy general nombre de *valor del lado derecho* y representa los requerimientos que deben satisfacerse. Por último, $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ son las *restricciones de no negatividad*.

Un conjunto de valores para las variables x_1, x_2, \dots, x_n que satisfacen todas las restricciones se denomina *punto factible*. Al conjunto de todos los puntos factibles se le llama *región factible*.

A.2.1. Hipótesis de la programación lineal

Para que la representación de un problema de optimización como uno de programación lineal sea válida se requiere cumplir con al menos las siguientes cuatro hipótesis:

1. *Proporcionalidad.* El costo de una variable es proporcional al valor que tome así como la contribución en cada restricción. Esto es, dada una variable x_j , su contribución al costo total es $c_j x_j$ y a la i -ésima restricción es $a_{ij} x_j$.

2. *Aditividad.* El costo total es la suma de los costos individuales y la contribución total en cada restricción es la suma de las contribuciones de cada variable.

3. *Divisibilidad.* Las variables de decisión se pueden dividir en cualesquiera valores fraccionales, permitiendo con ello valores no enteros para las variables.

4. *Determinística.* Todos los coeficientes c_j , a_{ij} y b_i están bien determinados. Esto es, se asume que no hay componentes estocásticas o que tales componentes pueden aproximarse bien mediante tales coeficientes.

A.2.2. Manipulaciones del problema general

Como ya se ha dicho, un programa lineal es un problema de maximizar o minimizar una función lineal bajo restricciones lineales de desigualdad o igualdad. Todo problema lineal puede transformarse de una forma a otra equivalente mediante manipulaciones simples.

Desigualdades e igualdades: Una restricción de desigualdad $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ puede transformarse fácilmente en una de igualdad adicionando una *variable de holgura* $s_i \geq 0$ obteniendo $\sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i$. Similarmente, la restricción $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ se transforma en $\sum_j a_{ij} x_j - s_i = b_i$ sustrayendo la *variable de exceso* $s_i \geq 0$. Por otra parte una restricción de igualdad $\sum_j a_{ij} x_j = b_i$ siempre puede transformarse en las dos desigualdades $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ y $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$.

No negatividad en las variables: El método simplex ha sido diseñado para resolver problemas cuyas variables sean no negativas. Si una variable se requiere no positiva, i.e. $x_j \leq 0$, es posible la siguiente sustitución $x'_j = -x_j \geq 0$. Si una variable x_j no está restringida en signo, es posible reemplazarla por $x'_j - x''_j$, donde $x'_j, x''_j \geq 0$. Si alguna variable está acotada inferiormente, $x_j \geq l_j$, entonces la variable $x'_j = x_j - l_j$ es claramente no negativa. También si una variable está acotada superiormente $x_j \leq u_j$ por una cantidad no positiva, i.e. $u_j \leq 0$, entonces la sustitución $x'_j = u_j - x_j$ produce una variable no negativa.

Maximización y minimización: Todo problema de maximización puede convertirse en uno de minimización y viceversa. A saber, es claro que

$$\text{máx } \sum_j c_j x_j = -\text{mín } \sum_j -c_j x_j.$$

Así, todo problema de maximización (minimización) puede transformarse en uno de minimización (maximización) multiplicando por -1 los coeficientes de la función objetivo. Obsérvese que al completar la optimización el valor del problema original es el simétrico aditivo.

A.3. Representación matricial de un problema lineal

Todo problema de programación lineal puede escribirse en forma matricial. Por ejemplo el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s. a:} \quad & \sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

puede escribirse matricialmente declarando las siguientes matrices

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

con lo cual el problema puede quedar expresado mediante

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s. a:} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A.3.1. Formas canónica y estándar

Como ya se ha visto, un problema de programación lineal puede expresarse en diversas maneras haciendo alguna manipulación. Existen dos formas particularmente útiles llamadas forma canónica y forma estándar.

Se dice que un problema de programación lineal se encuentra en forma estándar si todas las restricciones son de igualdad y todas las variables son no negativas, i.e. si es de la forma

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{s. a:} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Un problema está en forma canónica si todas sus variables son no negativas y todas las restricciones son de tipo $<$ para un problema de maximizar o todas son del tipo $>$ si es un problema de minimizar. Esto es, si es de cualquiera de las formas

$$\begin{array}{ll} \text{máx} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \text{mín} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a:} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & \text{s. a:} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Como antes, A es una matriz $n \times m$, \mathbf{c} y \mathbf{x} son un vector n -dimensional y \mathbf{b} es un vector no negativo m -dimensional.

Es importante mencionar que el método simplex está diseñado para resolver problemas sólo una vez que han sido expresados en su forma estándar.

Apéndice B

Programación entera

B.1. Breve descripción

La programación entera es la rama de la programación matemática que trata de la optimización de problemas cuyas variables deben ser discretas o enteras. Por ejemplo en muchos modelos las variables deben tomar un valor de 0 ó 1 y representan una decisión de *Si* o *No* que debe ser tomada.

Una gran variedad de los problemas de la práctica pueden ser formulados y resueltos mediante programación entera. Desafortunadamente los métodos actuales de solución, aunque son suficientemente eficientes, no suelen ser tan rápidos como los que existen para programación lineal.

B.2. Clasificación y formulaciones

Programación lineal entera: El siguiente es un problema de programación lineal entera. Obsérvese que todas las variables deben tomar valores enteros.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a:} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, \mathbf{c} e \mathbf{x} son vectores columna n -dimensionales, y \mathbf{b} un vector columna m -dimensional.

Programación lineal entera mixta: En ocasiones no es necesario que todas las variables tomen valores enteros, sino sólo un grupo de ellas. El siguiente es un problema entero mixto.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{f}^\top \mathbf{y} \\ \text{s. a:} \quad & \mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde A , \mathbf{c} , \mathbf{x} e \mathbf{b} son como antes; D es una matriz $m \times p$; \mathbf{f} e \mathbf{y} son vectores columna p -dimensionales.

Programación entera binaria: Si todos los valores de las variables están restringidas a tomar valores en el conjunto $\{0, 1\}$ se dice que tenemos un problema de programación entera binaria o simplemente un problema binario.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s. a:} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{B} \end{aligned}$$

donde A , \mathbf{c} , \mathbf{x} e \mathbf{b} son como ya se han definido y $\mathbb{B} = \{1, 0\}$.

Optimización combinatoria: Para finalizar, existe un tipo de problemas usualmente más complejo. Sea $N = \{1, \dots, n\}$, $c_j \in \mathbb{R}$, para cada $j \in N$, y un conjunto de subconjuntos factibles de N . Un problema de optimización combinatoria es

$$\min_{S \subseteq N} \sum_{j \in S} c_j.$$

B.3. Algoritmo de ramificar y acotar

El algoritmo de ramificar y acotar (“*branch & bound*” en inglés) es quizá el algoritmo exacto más empleado para resolver problemas enteros. En la actualidad existen diversas y muy eficientes herramientas basadas en ramificar y acotar que son implementadas computacionalmente modificando o enriqueciendo el algoritmo básico. Mayores detalles de implementaciones del algoritmo pueden encontrarse en [61].

El algoritmo de ramificar y acotar se basa en dos ideas claves.

B.3.1. Divide y vencerás

Consideremos el problema $z = \max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S\}$. Se busca dividirlo en problemas más pequeños de tal forma que resulte más fácil de resolver. Este método se basa en el siguiente resultado.

Proposición 39 *Sea $S = S_1 \cup \dots \cup S_K$ una descomposición de S en conjuntos más pequeños, sea $z^k = \max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S_k\}$ para $k = 1, \dots, K$. Entonces $z = \max_k z^k$.*

B.3.2. Enumeración implícita

Dado que la enumeración exhaustiva es prácticamente irrealizable, esta idea consiste en emplear inteligentemente algunas cotas de los valores z_k . El siguiente resultado indica cómo.

Proposición 40 *Sea $S = S_1 \cup \dots \cup S_K$ una descomposición de S en conjuntos más pequeños, sea $z^k = \max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S_k\}$ para $k = 1, \dots, K$, \bar{z}_k una cota superior de z^k y \underline{z}_k una cota inferior de z^k . Entonces $\bar{z} = \max_k \bar{z}_k$ es una cota superior de z y $\underline{z} = \max_k \underline{z}_k$ es una cota inferior de z .*

B.3.3. Algoritmo de Ramificar y Acotar (maximizar)

Paso 0: Inicialización.

Colocar el problema inicial S^0 con su formulación P^0 en la lista.

$z = -\infty$. Solución incumbente x^* vacía.

Paso 1: Si la lista está vacía, parar: Solución incumbente x^* óptima.

Paso 2: Elegir un problema S^i con su formulación P^i .

Paso 3: Resolver una relajación sobre P^i .

Cota dual $\bar{z}^i =$ Valor del objetivo en la relajación de P^i .

$\tilde{x}^i =$ Solución de la relajación de P^i .

Paso 4: Si $P^i = \emptyset$, truncar por infactibilidad e ir a 1.

Paso 5: Si $z^i \leq \underline{z}$, truncar por acotamiento e ir a 1.

Paso 6: Si \hat{x}^i es entera hacer:

Actualizar cota primal $\underline{z} = \bar{z}^i$.

Solución incumbente $x^* = \hat{x}^i$.

Truncar por optimalidad e ir a 1.

Paso 7: Elegir una variable no entera x_j para ramificar.

Hacer con la variable elegida dos ramas redondeándola al entero inmediato superior y al inmediato inferior.

Agregar dos sub problemas a la lista: S_1^i y S_2^i con formulaciones P_1^i y P_2^i respectivamente. Ir a paso 1

Apéndice C

El problema de transporte

El problema de transporte es uno de los problemas de programación lineal cuya estructura (particularmente como un problema de redes) surge en varios contextos por lo que ha merecido un basto espacio entre las publicaciones. Aunque el problema de transporte puede ser visto como un caso especial del problema general de flujo en redes, debido a su estructura especial suele ser estudiado en forma particular.

C.1. Definición del problema de transporte

Supóngase que existen m puntos de origen y n puntos destinos. Cada origen i tiene una oferta de s_i unidades de cierto producto y cada destino j tiene una demanda requerida de d_j unidades del producto. Cada enlace del origen i al destino j tiene un costo unitario c_{ij} por transporte. El problema consiste en satisfacer la demanda de los clientes creando un patrón de entrega tal que el costo total de transporte sea mínimo.

Sean x_{ij} la cantidad de unidades transportadas del origen i al destino j para satisfacer la demanda. El problema se plantea como uno de programación lineal como sigue.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{ij} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a:} \quad & \sum_j x_{ij} = s_i \quad \forall j \\ & \sum_i x_{ij} = d_i \quad \forall i \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Los valores u_{ij} constituyen una cota superior de los valores x_{ij} si acaso el envío específico de un origen a un destino dados está restringido a un cierto número de unidades. Aun en el caso de que no exista esta condición físicamente, en realidad siempre pueden elegirse tales cotas como $u_{ij} = \min\{s_i, d_j\}$.

Condición de equilibrio: Es claro que para que este problema tenga solución se requiere que satisfaga que $\sum_i s_i = \sum_j d_j$. Cuando un problema satisface esta condición se dice que está *equilibrado* o *balanceado*. De hecho es suficiente que $\sum_i s_i \leq \sum_j d_j$, pero los métodos de solución para el problema del transporte suelen asumir la igualdad. Cuando la oferta excede la demanda es posible introducir un destino ficticio $n + 1$ que absorba dicho exceso, esto es que $d_{n+1} = \sum_i s_i - \sum_j d_j$ y $c_{i,n+1} = 0, \forall i$. Cuando el problema es acotado, la factibilidad no se ve afectada si $\sum_i u_{ij} \geq d_j$ y $\sum_j u_{ij} \geq s_i$ para todos i y j .

C.2. Matrices totalmente unimodulares

La estructura del problema de transporte presenta algunas características que resultan de gran utilidad para su solución. Dichas características se resumen en el concepto de unimodularidad total.

El punto de partida más natural para resolver problemas enteros consiste en esperar que la solución de la relajación lineal del problema sea entera. Desafortunadamente esto casi nunca es así, la pregunta obligada es cuándo podemos esperar que ese *golpe de suerte* ocurra. Consideremos el siguiente problema lineal entero en su forma estándar.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a:} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De la teoría de la programación lineal sabemos que una solución básica factible \mathbf{x} puede representarse como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) = (B^{-1}\mathbf{b}, 0)$ donde B es una submatriz $m \times m$ de A no singular.

Proposición 41 *Si la base óptima B tiene $\det(B) = \pm 1$, entonces la relajación lineal resuelve el problema entero.*

La siguiente pregunta es obviamente, cuándo la base óptima tiene esa propiedad.

Definición 42 Una matriz A es totalmente unimodular si y sólo si cada submatriz cuadrada de A tiene determinante $+1$, -1 , ó 0 .

Obsérvese que la definición se sigue inmediatamente que si A es totalmente unimodular entonces cada elemento de A es $+1$, -1 , ó 0 , aunque, por supuesto, una matriz de $+1$, -1 , ó 0 no necesariamente será totalmente unimodular. Los siguientes resultados dan caracterizaciones útiles de la propiedad de unimodularidad total.

Proposición 43 Una matriz A es totalmente unimodular si y sólo si A^\top lo es.

Proposición 44 Una matriz A es totalmente unimodular si y sólo si $[A, U]$ lo es, donde U es la matriz identidad adecuada.

Por último, el siguiente resultado ofrece una condición suficiente.

Proposición 45 Una matriz A es totalmente unimodular si:

1. $\forall i, j, a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$.
2. Cada columna contiene a lo más dos elementos no cero, i.e. $\sum_i |a_{ij}| \leq 2$.
3. Existe una partición (I_1, I_2) del conjunto de renglones I tal que cada columna j contiene dos coeficientes no cero tales que $\sum_{i \in I_1} a_{ij} - \sum_{i \in I_2} a_{ij} = 0$.

Podemos adelantar a este punto que los problemas de redes satisfacen esta condición. El último resultado que presentamos justifica el estudio de las matrices totalmente unimodulares dentro de la programación lineal.

Proposición 46 El problema lineal $\max \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, x_j \in \mathbb{R}^+ \}$ tiene una solución óptima entera para cualquier vector entero \mathbf{b} (para el cual el problema tiene un valor óptimo finito) si y sólo si A es totalmente unimodular.

Es fácil verificar mediante la proposición 8 que la matriz de restricciones del problema de transporte es totalmente unimodular, y así, por la proposición anterior, si el problema es acotado para el vector \mathbf{b} , cualquiera que este sea, entonces la solución es siempre entera.

Apéndice D

Obtención del termino lagrangiano (C.9)

Multiplicaremos las restricciones de no anticipación $x^{j-1} - x^j = 0 \forall j \in \mathfrak{S}_f$ por un peso, digamos α^j y sumaremos todo, el resultado es:

$$\begin{aligned} & \alpha^1(x^n - x^1) + \alpha^2(x^1 - x^2) + \alpha^3(x^2 - x^3) + \dots + \alpha^n(x^{n-1} - x^n) \quad (\text{C.13}) \\ & = \sum_{j \in \mathfrak{S}_f} (\alpha^{j+1} - \alpha^j) x^j = 0 \end{aligned}$$

donde $n \equiv |J_f|$ y por convención, $j - 1 = n$. para $j = 1$ y $j + 1 = 1$ para $j = n$.

Note que $\sum_{j \in \mathfrak{S}_f} (\alpha^{j+1} - \alpha^j) = 0$, así que $(\alpha^{j+1} - \alpha^j)$ puede ser sustituido por $\omega^j - \frac{P}{n}$, dado $\sum_{j \in \mathfrak{S}_f} \omega^j - \frac{P}{n} = 0$, donde $P = \sum_{j \in \mathfrak{S}_f} \omega^j$. Entonces el término de agregación lagrangiano $\lambda \sum_{j \in \mathfrak{S}_f} (\alpha^{j+1} - \alpha^j) x^j$ puede ser remplazado por $\lambda \sum_{j \in \mathfrak{S}_f} (\omega^j - \frac{P}{n}) x^j$.

Apéndice E

Resultados

Las primeras 5 tablas muestran los valores correspondientes a los valores exactos, lineal, cotas clásica y modificada lagrangiana. En la primera columna se muestra el nombre del experimento (el cual esta formado por la repetición que es, posteriormente el tipo de problema que es), la segunda columna nos referimos a m , el cual representa la cantidad de máquinas con las que contamos para realizar nuestro conjunto de trabajos que se muestra en la tercera columna y es representada por n , en la cuarta el tipo de problema correspondiente al valor de α el cual fue descrito anteriormente y a partir de la quinta columna se muestran resultados, primero la solución exacta, luego la cota obtenida por relajación lineal, posteriormente la cota clásica lagrangiana y por último la cota propuesta: la modificada lagrangiana.

De la tabla 6 a la 10 muestran la calidad calculada antes descrita. En la primera columna se muestra el nombre del experimento (si se desea ver el tamaño o especificaciones de cualquiera de estos ver los cuadros anteriores), en la segunda el porcentaje obtenido para rel_1 (mejora de la modificada sobre la clásica), en la tercera rel_2 (mejora de la modificada sobre la lineal), en la cuarta rel_3 (mejora de la clásica sobre la lineal), y en las tres siguientes los valores correspondientes a gap_1 (cercanía porcentual entre la cota modificada lagrangiana y la solución exacta), gap_2 (porcentaje de relatividad entre la cota clásica lagrangiana y la solución exacta) y por último gap_3 (relatividad de cercanía entre la cota de relajación lineal y la solución exacta).

<i>Nombre</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	α	z_{ip}	z_{lp}	z_{lag}	z_{md}
1_1	5	50	a	6234	6488.699	6483.13	6383.13
1_2	5	50	b	6393	6678.061	6676.104	6574.104
1_3	5	50	c	6481	6878.234	6877.91	6767.413
1_4	5	50	d	6513	7060.414	7060.282	6909.146
1_5	5	50	e	6532	7289.569	7281.69	6992.457
1_6	8	50	a	10171	10567.968	10551.36	10421.36
1_7	8	50	b	10637	10902.642	10887.572	10789.572
1_8	8	50	c	10908	11200.571	11190.459	11090.459
1_9	8	50	d	11036	11471.313	11466.565	11413.835
1_10	8	50	e	11102	11748.552	11705.559	11562.833
1_11	10	50	a	12892	13249.882	13235.782	13100.829
1_12	10	50	b	13302	13674.306	13657.673	13567.673
1_13	10	50	c	13825	14035.152	14021.382	14008.382
1_14	10	50	d	14015	14339.983	14333.049	14314.318
1_15	10	50	e	14074	14660.313	14596.931	14496.931
1_16	5	100	a	12569	13089.488	13088.795	12988.795
1_17	5	100	b	12813	13463.1583	13462.858	13308.149
1_18	5	100	c	13030	13826.9588	13826.935	13638.903
1_19	5	100	d	13058	14164.4445	14164.405	13854.519
1_20	5	100	e	13107	14581.4462	14581.421	13981.421
1_21	10	100	a	26053	26615.9964	26608.839	26408.839
1_22	10	100	b	26803	27426.9902	27420.990	27209.990
1_23	10	100	c	27768	28152.6186	28146.061	28134.259
1_24	10	100	d	28096	28777.3557	28775.935	28675.935
1_25	10	100	e	28202	29417.7964	29392.942	29088.183
1_26	20	100	a	52985	53453.2765	53424.871	53294.871
1_27	20	100	b	54521	55008.9481	55005.948	54905.948
1_28	20	100	c	55911	56421.6926	56419.692	56319.692
1_29	20	100	d	57276	57601.8737	57575.606	57475.606
1_30	20	100	e	57554	58624.0877	58492.608	58425.151

Cuadro E.1: Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 1

<i>Nombre</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	α	z_{ip}	z_{lp}	z_{lag}	z_{md}
2_1	5	50	a	6112	6394.6264	6391.134	6385.134
2_2	5	50	b	6270	6593.8687	6590.845	6508.672
2_3	5	50	c	6379	6790.9005	6790.181	6680.146
2_4	5	50	d	6465	6972.6134	6972.083	6828.519
2_5	5	50	e	6472	7192.7811	7185.572	6900.871
2_6	8	50	a	10188	10546.2402	10529.899	10527.360
2_7	8	50	b	10582	10859.018	10844.159	10800.159
2_8	8	50	c	10903	11120.878	11109.283	11059.283
2_9	8	50	d	10961	11355.8812	11354.881	11254.881
2_10	8	50	e	10962	11605.6236	11603.623	11503.360
2_11	10	50	a	12814	13142.8346	13139.834	13050.139
2_12	10	50	b	13178	13534.3791	13534.000	13427.98
2_13	10	50	c	13706	13899.1521	13895.152	13856.342
2_14	10	50	d	13869	14205.4528	14202.238	14108.826
2_15	10	50	e	13927	14525.8057	14515.573	14455.155
2_16	5	100	a	12442	12893.8829	12887.123	12847.964
2_17	5	100	b	12645	13285.4583	13284.186	13184.186
2_18	5	100	c	12805	13664.3984	13656.003	13456.003
2_19	5	100	d	12923	14019.1108	14000.808	13905.808
2_20	5	100	e	12970	14442.2158	14441.009	13994.009
2_21	10	100	a	25710	26282.6612	26249.661	26115.192
2_22	10	100	b	26382	27072.5288	27065.89	26965.184
2_23	10	100	c	27365	27812.0374	27809.390	27699.901
2_24	10	100	d	27762	28442.5879	28437.377	28197.093
2_25	10	100	e	27887	29099.6692	29089.543	28909.159
2_26	20	100	a	52703	53104.5459	53098.098	52998.199
2_27	20	100	b	54272	54695.0153	54679.124	54579.782
2_28	20	100	c	55566	56132.6295	56125.925	55925.293
2_29	20	100	d	57034	57359.0389	57349.316	57219.076
2_30	20	100	e	57359	58436.1411	58435.421	58035.874

Cuadro E.2: Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 2

<i>Nombre</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	α	z_{ip}	z_{lp}	z_{lag}	z_{md}
3_1	5	50	a	5936	6344.5712	6341.934	6301.124
3_2	5	50	b	6225	6555.4836	6555.223	6455.123
3_3	5	50	c	6346	6755.8955	6755.645	6655.165
3_4	5	50	d	6385	6946.2913	6945.614	6845.174
3_5	5	50	e	6401	7171.0889	7163.123	6859.056
3_6	8	50	a	10261	10609.933	10597.922	10487.134
3_7	8	50	b	10657	10943.1095	10924.027	10824.107
3_8	8	50	c	10985	11241.7657	11231.655	11221.235
3_9	8	50	d	11085	11515.9792	11511.69	11411.168
3_10	8	50	e	11122	11812.2364	11768.114	11668.134
3_11	10	50	a	12854	13231.5128	13231.0528	13131.580
3_12	10	50	b	13238	13639.4427	13622.435	13522.650
3_13	10	50	c	13791	14004.5083	13988.874	13909.784
3_14	10	50	d	13991	14334.8297	14325.627	14195.167
3_15	10	50	e	14044	14678.1114	14611.913	14501.194
3_16	5	100	a	12493	13002.6755	13001.898	12981.908
3_17	5	100	b	12794	13410.0092	13409.946	13279.904
3_18	5	100	c	12930	13806.0441	13806.053	13619.523
3_19	5	100	d	13052	14163.2881	14163.288	14030.818
3_20	5	100	e	13077	14598.4856	14595.4856	14195.125
3_21	10	100	a	26016	26653.228	26650.228	26450.123
3_22	10	100	b	26793	27412.8692	27405.8692	27205.189
3_23	10	100	c	27715	28103.413	28099.413	27989.123
3_24	10	100	d	28012	28700.2427	28689.2427	28588.132
3_25	10	100	e	28104	29317.3707	29314.3707	28914.140
3_26	20	100	a	53157	53622.2847	53600.2847	53545.824
3_27	20	100	b	51809	55137.2368	55137.093	54137.103
3_28	20	100	c	55925	56500.7723	56495.7723	56395.172
3_29	20	100	d	57352	57682.6548	57675.6548	57553.548
3_30	20	100	e	57646	58725.4602	58723.4602	58623.140

Cuadro E.3: Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 3

<i>Nombre</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	α	z_{ip}	z_{lp}	z_{lag}	z_{md}
4_1	5	50	a	6434	6706.494	6702.288	6602.198
4_2	5	50	b	6553	6895.9179	6893.943	6763.142
4_3	5	50	c	6672	7082.4482	7082.236	6982.126
4_4	5	50	d	6769	7253.865	7253.824	7137.184
4_5	5	50	e	6775	7469.559	7458.887	7268.987
4_6	8	50	a	10326	10690.5632	10677.366	10600.166
4_7	8	50	b	10758	11001.8414	10989.601	10980.101
4_8	8	50	c	11013	11279.6373	11270.882	11179.802
4_9	8	50	d	11148	11531.8711	11525.497	11429.127
4_10	8	50	e	11179	11794.3253	11794.320	11584.120
4_11	10	50	a	12861	13171.7052	13165.705	13065.092
4_12	10	50	b	13280	13575.2515	13525.681	13515.801
4_13	10	50	c	13675	13933.2521	13931.252	13830.502
4_14	10	50	d	13942	14251.8477	14249.847	14140.497
4_15	10	50	e	14004	14581.449	14581.385	14329.815
4_16	5	100	a	12368	12951.8278	12949.827	12890.278
4_17	5	100	b	12686	13346.5132	13346.357	13046.713
4_18	5	100	c	12947	13732.9154	13729.915	13596.105
4_19	5	100	d	13065	14083.546	14082.346	13902.416
4_20	5	100	e	13097	14497.5066	14493.506	13993.656
4_21	10	100	a	26120	26815.9511	26814.951	26614.191
4_22	10	100	b	27006	27627.1965	27615.196	27495.906
4_23	10	100	c	27900	28327.5102	28327.02	28197.100
4_24	10	100	d	28225	28913.1884	28910.188	28710.824
4_25	10	100	e	28298	29525.2932	29524.293	29324.312
4_26	20	100	a	52983	53527.7828	53519.782	53319.808
4_27	20	100	b	54650	55098.6222	55096.622	55006.220
4_28	20	100	c	55964	56527.6694	56525.669	56325.136
4_29	20	100	d	57418	57755.7956	57755.000	57740.650
4_30	20	100	e	57800	58855.3193	58845.315	58645.124

Cuadro E.4: Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 4

<i>Nombre</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	α	z_{ip}	z_{lp}	z_{lag}	z_{md}
5_1	5	50	a	6256	6593.9304	6589.32	6489.1425
5_2	5	50	b	6471	6789.6023	6789.023	6696.563
5_3	5	50	c	6607	6988.8029	6988.399	6898.1349
5_4	5	50	d	6640	7163.3853	7163.167	7018.617
5_5	5	50	e	6647	7384.9286	7375.332	7104.805
5_6	8	50	a	10438	10861.8341	10842.379	10742.909
5_7	8	50	b	10986	11206.752	11189.759	11108.759
5_8	8	50	c	11258	11504.829	11492.912	11482.071
5_9	8	50	d	11394	11774.0016	11768.147	11719.358
5_10	8	50	e	11411	12050.547	12006.954	11888.268
5_11	10	50	a	13491	13818.3075	13798.278	13698.718
5_12	10	50	b	13876	14233.4345	14203.1145	14143.125
5_13	10	50	c	14355	14606.6611	14596.1561	14506.6213
5_14	10	50	d	14599	14934.5911	14909.5191	14809.9051
5_15	10	50	e	14654	15271.3509	15217.0359	15107.16704
5_16	5	100	a	13064	13579.551	13509.152	13419.1212
5_17	5	100	b	13351	13967.629	13867.1566	13678.956
5_18	5	100	c	13489	14362.6938	14262.3869	14172.0969
5_19	5	100	d	13604	14730.3811	14693.1349	14413.9649
5_20	5	100	e	13647	15182.5293	14982.9134	14780.8794
5_21	10	100	a	26600	27197.2996	27097.2996	26997.5496
5_22	10	100	b	27436	28039.6115	27993.1645	27893.1645
5_23	10	100	c	28386	28790.8037	28749.0387	28649.876
5_24	10	100	d	28712	29410.5297	29310.2537	29210.13427
5_25	10	100	e	28859	30039.7961	29939.1971	29809.9711
5_26	20	100	a	53881	54420.9113	54390.1913	54191.9513
5_27	20	100	b	55518	56007.2734	55997.7234	55900.5434
5_28	20	100	c	56905	57437.7586	57397.5906	57209.9806
5_29	20	100	d	58381	58687.3647	58657.3127	58557.1427
5_30	20	100	e	58716	59770.0825	59670.0825	59470.1084

Cuadro E.5: Valores de la solución óptima del problema, cota lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 5

<i>Nombre</i>	<i>rel₁</i>	<i>rel₂</i>	<i>rel₃</i>	<i>gap₁</i>	<i>gap₂</i>	<i>gap₃</i>
1_1	59.8603	58.5513	97.8132	2.3922	3.9963	4.0856
1_2	63.9708	63.5315	99.3132	2.8328	4.4283	4.4589
1_3	72.1606	72.1016	99.9182	4.4192	6.1242	6.1292
1_4	72.3842	72.3666	99.9757	6.0823	8.4029	8.4049
1_5	61.4196	60.7808	98.9599	7.0492	11.4771	11.597
1_6	65.8218	63.0679	95.8161	2.4615	3.7396	3.9029
1_7	60.8894	57.4350	94.3267	1.4343	2.3556	2.4973
1_8	64.5966	62.3639	96.5437	1.6727	2.5894	2.6821
1_9	87.7533	86.7960	98.9091	3.4236	3.9014	3.9444
1_10	76.3526	71.2753	93.3502	4.1509	5.4364	5.8237
1_11	60.7445	58.3512	96.0599	1.6198	2.6666	2.7760
1_12	74.6958	71.3586	95.5322	1.9972	2.6738	2.7988
1_13	93.3802	87.2615	93.4475	1.3264	1.4204	1.5200
1_14	94.1106	92.1025	97.8662	2.1356	2.2693	2.3188
1_15	80.8770	72.1339	89.1897	3.0050	3.7155	4.1659
1_16	80.7616	80.6541	99.8668	3.3399	4.1355	4.1410
1_17	76.1934	76.1582	99.9538	3.8644	5.0718	5.0742
1_18	76.4056	76.4033	99.9970	4.6730	6.1161	6.1163
1_19	71.9916	71.9890	99.9964	6.0998	8.4730	8.4733
1_20	59.3060	59.3050	99.9982	6.6714	11.249	11.249
1_21	64.0183	63.2044	98.7286	1.3658	2.1334	2.1609
1_22	65.8570	65.2238	99.0384	1.5184	2.3056	2.3280
1_23	96.8782	95.2265	98.2950	1.3189	1.3614	1.3851
1_24	85.2927	85.1148	99.7914	2.0641	2.4200	2.4250
1_25	74.4102	72.8890	93.9340	3.1422	4.2228	4.3110
1_26	70.4458	66.1726	93.9340	0.5848	0.8301	0.8837
1_27	79.3792	78.8911	99.3851	0.7060	0.8894	0.8949
1_28	80.3417	80.0271	99.6083	0.7309	0.9098	0.9134
1_29	66.6228	61.2525	91.9393	0.3484	0.5230	0.5689
1_30	92.8130	81.4093	87.7131	1.5136	1.6308	1.8592

Cuadro E.6: Calidad de las cotas: lineal, clasica y modificada lagrangiana, repetición 1

<i>Nombre</i>	<i>rel₁</i>	<i>rel₂</i>	<i>rel₃</i>	<i>gap₁</i>	<i>gap₂</i>	<i>gap₃</i>
2_1	97.8504	96.6413	98.7643	4.4688	4.5669	4.6241
2_2	74.3885	73.6940	99.0663	3.8065	5.1171	5.1653
2_3	74.2120	74.0824	99.8253	4.7836	6.4458	6.4571
2_4	71.6882	71.6133	99.8955	5.6228	7.8435	7.8517
2_5	60.1019	59.5008	98.9998	6.6265	11.025	11.1369
2_6	99.2573	94.729	95.4384	3.3309	3.3558	3.5162
2_7	83.2162	78.7526	94.6360	2.0616	2.4774	2.6178
2_8	75.7614	71.7295	94.6782	1.4333	1.8919	1.9983
2_9	74.6116	74.4226	99.7467	2.6811	3.5934	3.6026
2_10	84.3734	84.1112	99.6892	4.9385	5.8531	5.8714
2_11	72.4720	71.8108	99.0876	1.8428	2.5428	2.5662
2_12	70.2191	70.1444	99.8936	1.8969	2.7014	2.7043
2_13	79.4822	77.8362	97.9290	1.0969	1.3800	1.4092
2_14	71.9683	71.2808	99.0446	1.7292	2.4027	2.4259
2_15	89.7349	88.2015	98.2912	3.7923	4.2261	4.2996
2_16	91.2025	89.8383	98.5041	3.2628	3.5775	3.6319
2_17	84.3551	84.1876	99.8014	4.2640	5.0548	5.0649
2_18	76.4983	75.7510	99.0231	5.0839	6.6458	6.7114
2_19	91.1858	89.6632	98.3302	7.6051	8.3402	8.4818
2_20	69.6126	69.5556	99.9180	7.8952	11.3416	11.3509
2_21	75.0826	70.7559	94.2374	1.5760	2.0990	2.2273
2_22	85.2746	84.4548	99.0385	2.2105	2.5922	2.6174
2_23	75.3619	74.9157	99.4078	1.2238	1.6239	1.6336
2_24	64.4222	63.9291	99.2344	1.5672	2.4327	2.4515
2_25	84.9997	84.2900	99.1649	3.6653	4.3121	4.3485
2_26	74.7154	73.5158	98.3944	0.5601	0.7496	0.7619
2_27	75.5991	72.7592	96.2434	0.5671	0.7501	0.7794
2_28	64.1680	63.4088	98.8168	0.6466	1.0076	1.0197
2_29	58.6953	56.9398	97.0089	0.3245	0.5528	0.5699
2_30	62.8819	62.8399	99.9332	1.1800	1.87663	1.8778

Cuadro E.7: Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 2

<i>Nombre</i>	<i>rel₁</i>	<i>rel₂</i>	<i>rel₃</i>	<i>gap₁</i>	<i>gap₂</i>	<i>gap₃</i>
3_1	89.9466	89.3660	99.3545	6.1510	6.8385	6.8829
3_2	69.6871	69.6321	99.9211	3.6967	5.3047	5.3089
3_3	75.4714	75.4253	99.9388	4.8718	6.4551	6.4591
3_4	82.0839	81.9848	99.8793	7.2071	8.7801	8.7907
3_5	60.1026	59.4809	98.9655	7.1560	11.9063	12.030
3_6	67.1177	64.8074	96.5577	2.2038	3.2835	3.4005
3_7	62.5805	58.4066	93.3303	1.5680	2.5056	2.6847
3_8	95.7754	92.0041	96.0622	2.1505	2.2453	2.3374
3_9	76.4416	75.6808	99.0047	2.9424	3.8492	3.8879
3_10	84.5259	79.1227	93.6076	4.9103	5.8093	6.2060
3_11	73.6183	73.5286	99.8781	2.1594	2.9333	2.9369
3_12	74.0437	70.9067	95.7633	2.1502	2.9040	3.0325
3_13	60.0301	55.6343	92.6774	0.8613	1.4348	1.5481
3_14	61.0133	59.3802	97.3234	1.4592	2.3917	2.4575
3_15	80.5042	72.0999	89.5604	03.2554	4.0438	4.5151
3_16	96.0719	95.9253	99.8474	3.9134	4.0734	4.0796
3_17	78.8875	78.8794	99.9897	3.7979	4.8143	4.8148
3_18	78.5980	78.5945	99.9955	5.3250	6.7749	6.7752
3_19	88.0795	88.0795	100.0000	7.4993	8.5143	8.5143
3_20	73.6342	73.4890	99.8028	8.5503	11.6118	11.6348
3_21	68.4491	68.1269	99.5292	1.6686	2.43783	2.4493
3_22	67.2556	66.4961	98.8707	1.5384	2.2874	2.3135
3_23	71.3096	70.5752	98.9701	0.9890	1.3870	1.4014
3_24	85.0703	83.7106	98.4017	2.0567	2.4176	2.4569
3_25	66.9332	66.7677	99.7527	2.8826	4.3067	4.3174
3_26	87.7144	83.5670	95.2717	0.7314	0.8339	0.8753
3_27	69.9530	69.9500	99.9956	4.4936	6.4237	6.4240
3_28	82.3747	81.6593	99.1316	0.8407	1.0206	1.0295
3_29	62.2726	60.9542	97.8829	0.3514	0.5643	0.5765
3_30	90.6892	90.5211	99.8147	1.6950	1.8690	1.8725

Cuadro E.8: Calidad de las cotas: lineal, clasica y modificada lagrangiana, repetición 3

<i>Nombre</i>	<i>rel₁</i>	<i>rel₂</i>	<i>rel₃</i>	<i>gap₁</i>	<i>gap₂</i>	<i>gap₃</i>
4_1	62.693	61.7253	98.4564	2.6142	4.1698	4.2352
4_2	61.6356	61.2806	99.4240	3.2068	5.2028	5.2329
4_3	75.5969	75.5578	99.9483	4.6481	6.1486	6.1518
4_4	75.9417	75.9353	99.9915	5.4392	7.1624	7.1630
4_5	72.2322	71.1223	98.4634	7.2913	10.0942	10.2517
4_6	78.0286	75.2039	96.3799	2.6551	3.4027	3.5305
4_7	95.8981	91.0842	94.9801	2.0645	2.1528	2.2666
4_8	64.6815	62.5576	96.7164	1.5145	2.3416	2.4211
4_9	74.4713	73.2347	98.3395	2.5217	3.3862	3.4434
4_10	65.8389	65.8383	99.9991	3.6239	5.5042	5.5042
4_11	66.9801	65.6867	98.0689	1.5869	2.3692	2.4158
4_12	95.9785	79.8646	83.2109	1.7756	1.8500	2.2232
4_13	60.6832	60.2132	99.2255	1.1371	1.8738	1.8884
4_14	64.4789	64.0627	99.3545	1.4237	2.2080	2.2224
4_15	56.4294	56.4231	99.9889	2.3265	4.1230	4.1234
4_16	89.7650	89.4575	99.6574	4.2228	4.7042	4.7204
4_17	54.6239	54.6110	99.9763	2.8433	5.2054	5.2066
4_18	82.9087	82.5922	99.6182	5.0135	6.0470	6.0702
4_19	82.3137	82.2168	99.8821	6.4096	7.7868	7.7959
4_20	64.2070	64.0236	99.7143	6.8462	10.6627	10.6933
4_21	71.1116	71.0094	99.8563	1.8920	2.6606	2.6644
4_22	80.4184	78.8649	98.0682	1.8140	2.2557	2.3002
4_23	69.5752	69.4954	99.8853	1.0648	1.5305	1.5322
4_24	70.9037	70.5946	99.5640	1.7212	2.4275	2.4382
4_25	83.6922	83.6240	99.9185	3.6268	4.3334	4.3370
4_26	62.7456	61.8242	98.5315	0.6356	1.0131	1.0282
4_27	79.7586	79.4031	99.5541	0.6518	0.8172	0.8209
4_28	64.2969	64.0688	99.6451	0.6453	1.0036	1.0071
4_29	95.7418	95.5163	99.7644	0.5619	0.5869	0.5883
4_30	80.8484	80.0823	99.0524	1.4621	1.8085	1.8258

Cuadro E.9: Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 4

<i>Nombre</i>	<i>rel₁</i>	<i>rel₂</i>	<i>rel₃</i>	<i>gap₁</i>	<i>gap₂</i>	<i>gap₃</i>
5_1	69.9455	68.9912	98.6356	3.7267	5.3280	5.4017
5_2	70.9266	70.7976	99.8181	3.4857	4.9145	4.9235
5_3	76.3334	76.2526	99.8942	4.4064	5.7726	5.7787
5_4	72.3701	72.3400	99.9582	5.7020	7.8790	7.8823
5_5	62.8566	62.0392	98.6995	6.8873	10.9573	11.1016
5_6	75.4017	71.9406	95.4097	2.9211	3.8741	4.0604
5_7	60.2471	55.6094	92.3022	1.1174	1.8547	2.0093
5_8	95.3850	90.7798	95.1719	1.9903	2.0866	2.1924
5_9	86.9599	85.6201	98.4593	2.8555	3.2837	3.3351
5_10	80.0847	74.6259	93.1837	4.1825	5.2226	5.6046
5_11	67.5993	63.4626	93.8805	1.5396	2.2776	2.4261
5_12	81.6610	74.7339	91.5173	1.9250	2.3574	2.5759
5_13	62.8726	60.2482	95.8257	1.0562	1.6799	1.7531
5_14	67.9201	62.8458	92.5290	1.4446	2.1269	2.2987
5_15	80.4863	73.4050	91.2019	3.0924	3.8421	4.2128
5_16	79.7752	68.8818	86.3449	2.7183	3.4074	3.9463
5_17	63.5380	53.1853	83.7061	2.4564	3.8660	4.6185
5_18	88.3253	78.1849	88.5192	5.0641	5.7334	6.4770
5_19	74.3677	71.9086	96.6932	5.9538	8.0059	8.2797
5_20	84.8767	73.8429	87.0001	8.3086	9.7890	11.2517
5_21	79.9416	66.5578	83.2579	1.4945	1.8695	2.2454
5_22	82.0519	75.7382	92.3051	1.6662	2.0307	2.2000
5_23	72.6853	65.1861	89.6826	0.9295	1.2789	1.4260
5_24	83.2647	71.3118	85.6447	1.7349	2.0836	2.4328
5_25	88.0368	80.5364	91.4804	3.2952	3.7430	4.0916
5_26	61.0676	57.5930	94.3101	0.5771	0.9450	1.0020
5_27	79.7424	78.1860	98.0481	0.6890	0.8640	0.8812
5_28	61.9136	57.2455	92.4603	0.5359	0.8656	0.9362
5_29	63.7475	57.4944	90.1907	0.3017	0.4732	0.5247
5_30	79.0401	71.5416	90.5130	1.2843	1.6249	1.7952

Cuadro E.10: Calidad de las cotas: lineal, clásica y modificada lagrangiana, repetición 5

Bibliografía

- [1] Alfandari L., Plateau A. y Tolla P. (2003). A path relinking algorithm for the generalized assignment problem. En M. G. C. Resende and J. P. de Sousa, editores, *Metaheuristic: Computer Decision-Making*, 1-18.
- [2] Amini M. M. y Racer M. (1994). A robust heuristic for the generalized assignment problem. *Ann Operation Research*, 50, 487-503.
- [3] Balas E. y Christofides N. (1981). A restricted Lagrangean approach to the traveling salesman problem. *Mathematical Programming* 21, 19-46.
- [4] Barahona F. y Anbil R. (2000). The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient method. *Mathematical Programming* 87, 385-399.
- [5] Barnhart C., Johnson E. L., Nemhauser G. L., Savelsbergh M. W. P. y Vance P. (1998). Branch-and-price: column generation for solving huge integer programs. *Operation Research* 46, 316-329.
- [6] Beasley J. E. (1993). Lagrangean relaxation. In: Reeves C. R. (ed.), *Modern heuristic techniques for combinatorial problems*. Blackwell Scientific Publications, 243-303.
- [7] Bilde y Krarup. (1977). Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem. *Annals of Discrete Mathematics* 1, 79-97.
- [8] Camerini P. M., Fratta L. y Maffoli F. (1975). On improving relaxation methods by modified gradient techniques. *Mathematical Programming Study* 3, 26-34.
- [9] Chajakis E., Guignard M. y Ryu C. (1994). Lagrangean bounds and heuristic for integrated resource planning in forestry. *Proceedings of Symposium on System Analysis and Forest Management Problems*, Valdivia, Chile, 1993, 350-363.
- [10] Chajakis E., Guignard M., Yan H. y Zhu S. (1996). The Lazy Lagrangean Heuristic, *Optimization Days*, Montreal, 1996.

- [11] Chen B. y Guignard M. (1998). Polyhedral analysis and descompositions for capacited plant location-type problems. *Discrete Applied Mathematics* 82, 79-91.
- [12] Cheney E. W. y Goldstein A. A. (1959). Newton 's method for convex programming and Tchebicheff approximations. *Numerisch Mathematik* 1, 253-268.
- [13] Chu P. C. y Beasley J. E. (1997). A genetic algorithm for the generalized assignment problem. *Computers Oper. Res* 24, 17-23.
- [14] Contesse L. y Guignard M. (1995). A Proximal Augmented Lagrangean Relaxation for Linear and Nonlinear Integer Programming, Report 95-03-06, *Operations and Information Management Department*, University of Pennsylvania.
- [15] Contesse L. y Guignard M. (2002). An Augmented Lagrangean relaxation for integer programming with application to nonlinear capacited facility location. Part I: theory and algorithm, Research Report, *Operations and Information Management Department*, University of Pennsylvania.
- [16] Contesse L. y Guignard M. (2002). An Augmented Lagrangean relaxation for integer programming with application to nonlinear capacited facility location. Part II: Algorithm and Computational Results, Research Report, *Operations and Information Management Department*, University of Pennsylvania.
- [17] Dantzing G. B. y Wolfe P. (1960). The descomposition principle for linear programs. *Operations Research* 8, 101-111.
- [18] Dantzing G. B. y Wolfe P. (1961). The descomposition algorithm for linear programs. *Econometrica* 29, 767-778.
- [19] Daskalai S., Birbas T., Housos E. (2004). An integer programming formulation for a case study in university timetabling, *European Journal of Operational Research* 153 (1), 117-135.
- [20] de Matta R. y Guignard M. (1994). Dymanic production scheduling for a process industry. *Operations Research* 42, 492-503.
- [21] Desrosiers J., Soumins F. y Desrochers M. (1984). Routing with time windows by column generation. *Networks* 14, 545-565.
- [22] Desrosiers J., Sauvé M. y Soumins F. (1988). Lagrangian relaxations methods for solving the minimum fleet size multiple traveling salesman problem with time windows. *Management Science* 34, 1005-1022.
- [23] du Merle O., Goffin J.-L. y Vial J-Ph. (1998). On improvements to the analytic center cutting plane method. *Computational Optimization and Applications* 11, 37-52.

- [24] du Merle O., Villeneuve D., Desrosiers J. y Hansen P. (1999). Stabilized column generation. *Discrete Mathematics* 94, 229-237.
- [25] Escudero L., Guignard, M. y Malik K. (1994). A Lagrangean Relax-and-Cut approach for the sequential ordering problem with precedence relationships. *Annals of Operations Research* 50, 219-237.
- [26] Erlenkotter D. (1978). A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research* 26, 992-1009.
- [27] Everett III H. (1963). Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research* 11, 399-417.
- [28] Fisher M. L. (1981). The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science* 27, 1-18.
- [29] Fisher M. L. (1985). An applications oriented guide to Lagrangian relaxation. *Interfaces* 15, 10-21.
- [30] Fisher M. L. y Hochbaum D. S. (1980). Database location in a computer network. *Journal of the ACM* 27, 718-735.
- [31] Fisher M. L., Jaikumar R. y van Wassenhove L .N. (1986). A multiplier adjustment method for the generalized assignment problem. *Management Science* 32, 1095-1103.
- [32] Fisher M. L. y Kedia P. (1990). Optimal Solution of Set Covering/Partitioning Problems Using Dual Heuristic. *Management Science* 39, 67-88.
- [33] Franz L.S., Miller J.L. (1993). Scheduling medical residents to rotations: Solving the large-scale multiperiod staff assignment problem, *Operation Research* 41 (2), 269-279
- [34] Freville, A. and Hanafi, S. (2005). The multidimensional 0-1 knapsack problem – bounds and computational aspects, *Annals of Operations Research* 139, 195-227
- [35] Foulds Jr. L. R., Fulkerson Jhonson D. G., SlotManager (2000). A microcomputer-based decision support system for university timetabling, *Decision Support System* 27(4), 367-381.
- [36] Geoffrion A. M. (1974). Lagrangean relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study* 2, 82-114.
- [37] Geoffrion A. M. y McBride R. (1978). Lagrangean relaxation applied to capacitated facility location problems. *AIIE Transaction* 10, 40-47.

- [38] Guignard M. (1994). Primal relaxation in integer programming. VII CLAIO Meeting, Santiago, Chile, 1994, and *Operations and Information Management Department* Artículo en proceso 94-02-01, University of Pennsylvania, 1994.
- [39] Guignard M. y Kim S. (1987). Lagrangean decomposition: a model yielding stronger Lagrangean bounds. *Mathematical Programming* 39, 215-228.
- [40] Guignard M. y Rosenwein M. B. (1989). An application-oriented guide for designing Lagrangian dual ascent algorithms. *European Journal of Operational Research* 43, 197-205.
- [41] Guignard M., Ryu C., Qian H. y Dowlath L. (2002). Multi-item capacitated lot-sizing problem (MCLP). IV ALIO/EURO Workshop Applied Combinatorial Optimization, 2002, <http://www-di.inf.puc-rio.br/~celso/artigos/pucon.ps>.
- [42] Guignard M. y Zhu S. (1994). A hybrid algorithm for solving Lagrangean duals in mixed-integer programming, *Memorias del VI CLAIO*, Santiago, Chile, 1994, 339-410.
- [43] Guignard, M. (2003) Lagrangean relaxation, *TOP*, 11(2), 151-228.
- [44] Guignard M. y Rosenwein M. (1990). An application of Lagrangean Decomposition to the resource-constrained minimum weighted arborescence problem. *Networks* 20, 345-359.
- [45] Guignard M. (2003). Lagrangean Decomposition and Lagrangean Substitution for Stochastic Integer Programming, *Operations and Information Management Department*, University of Pennsylvania.
- [46] Haddadi S. y Ouzia H. (2001). An effective Lagrangian heuristic for the generalized assignment problem. *INFOR*, 39, 351-356.
- [47] Held M. y Karp R. M. (1970). The traveling salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research* 18, 1138-1162.
- [48] Held M. y Karp R. M. (1971). The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II. *Mathematical Programming* 1, 6-25.
- [49] Held M., Wolfe P. y Crowder H. (1974). Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming* 6, 62-88.
- [50] Jörnsten K. y Näsberg M. (1986). A new Lagrangian relaxation approach to the generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research* 27, 313-323.
- [51] Kelley J. E. (1960). The cutting-plane method for solving convex programs. *Journal of the SIAM* 8, 703-712.

- [52] Kuhn.H. W. (1955). The Hungarian method for the assignment problem, *Naval Research Logistics Quartely* 2 (1&2), 83-97.
- [53] Laguna M., Kelly P., González-Velarde J.L. y Glover F. (1995). Tabu search for the multilevel generalized assignment problem. *European Journal of Operation Research*, 82, 176-189.
- [54] Lasdon, L.S.(2002). Optimization Theory for Large Scale Systems. 2nd ed. Dover, Mineola, New York.
- [55] Lemaréchal C. (1974). An algorithm for minimizing convex functions, *Memorias del congreso IFIP '74*. North Holland, 552-556.
- [56] Lemaréchal, C. (2001). Lagrangean relaxation, M. Junger, D. Naddef eds. *Computational Combinatorial Optimization*. Primavera Verlag, Heidelberg, 115-160
- [57] Litvinchev I. (2007). Refinement of Lagrangian bounds in optimization problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 47(7), 1101-1108.
- [58] Lourenco H. R. y Serra D. (2002). Adaptative search heuristic for the generalized assignment problem. *Mathware and Soft Computing*, 9, 209-234.
- [59] Lucena A. (1982). Steiner problems in graphs, Lagrangean relaxation and cutting planes. *COAL Bulletin* 21, 2-8.
- [60] Martin R. K. (1999). Large Scale Linear and Integer Programming: A Unified Approach. Kluwer, Boston.
- [61] Martello S. y Toth P. (1990). Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implentation. Wiley, N. Y.
- [62] McCarl, B. A. (2004). *GAMS User Guide: 2004, Version 21.3*, Developed in cooperation with GAMS Development Corporation.
- [63] Näsberg M., Jörnsten K. O. y Smeds P. A. (1985). Variable Splitting - A new Lagrangean relaxation approach to some mathematical programming problems, Reporte LITH-MAT-R-85-04, Linkoping University, 1985.
- [64] Garey, M. Jhonson. (1979). *Computers and Intractability. A guide to the Theory of NP- Completeness*. W. H. Freeman and Company, New York, EUA:
- [65] Osman I. H. (1995). Heuristic for the generalized assignment problem: Simulated annealing and tabu search approaches. *OR Specktrum*, 17, 211-225.
- [66] Pentico D. W. (2007). Assignment problems: A golden anniversary survey, *European Journal of Operation Research*, 176, 774-793.

- [67] Racer M. y Amini M. M. (1995). A hybrid heuristic for the generalized assignment problem. *European Journal of Operation Research*, 87, 343-348.
- [68] Reinoso H. y Maculan N. (1992). Lagrangean decomposition in integer linear programming: a new scheme. *INFOR* 30, 1-5.
- [69] Ribero C. y Minoux M. (1986). Solving hard constrained shortest path problems by Lagrangean relaxation and branch-and-bound algorithms. *Mathematics of Operation Research* 53, 303-316.
- [70] Rockafellar R. T. y Wets R. J-B. (1999). Scenario and policy aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of Operations Research* 16, 119-147.
- [71] Ross G. T. y Soland R. M. (1975). A branch-and-bound algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming* 8, 91-103.
- [72] Ryan D. M. y Foster B. A. (1981). An Integer Programming Approach to Scheduling. En: Wren A. (ed.), *Computer Scheduling of Public Transport Urban Passenger Vehicle and Crew Scheduling*. North Holland, 269-280.
- [73] Ryu Ch. y Guignard M. (1992). An efficient algorithm for the capacited plant location problem. Report 92-11-02, *Department of Decision Science*, University of Pennsylvania.
- [74] Savelsbergh M. (1997). A branch-and-cut algorithm for the generalized assignment problem. *Operations Research* 45, 831-841.
- [75] Shapiro J. F. (1974). A survey of Lagrangean techniques for discrete optimization. *Annals of Discrete Mathematics* 5, 113-138.
- [76] Shapiro J. F. (1979). *Mathematical Programming: structure and algorithms*. Jhon Wiley.
- [77] Shepardson F. y Martsen R. E. (1980). A Lagrangean relaxation algorithm for the two-duty scheduling problem. *Management Science* 26, 274-281.
- [78] Soenen R. (1977). Contribution à l'étude des systèmes de conduite en temps réel en vue de la commande d'unités de fabrication, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Lille, France.
- [79] Terlaky, T. ed. (1996). *Interior Point Methods of Mathematical Programming*, Kluwer, Netherlands.
- [80] Toth P. y Martello S. (1981). An algorithm for the generalized assignment problem. En J.P. Brans, editor, *Memorias del Noveno IFORS International Conference on Operational Research*, 589-603.
- [81] Wentges P. (1997). Weighted Dantzig-Wolfe decomposition for linear mixed-integer programming. *International Transactions in Operational Research* 4, 151-162.

- [82] Werra D. de (1985). An introduction to timetabling, *European Journal of Operation Research*, 19 (2), 151-162.
- [83] Zowe J. (1985). Nondifferentiable optimization. En: Schittkowski K. (ed.), *Computational Mathematical Programming*, NATO ASI Series F: Computer and System Science, 15. Verano-Verlag, 323-356.