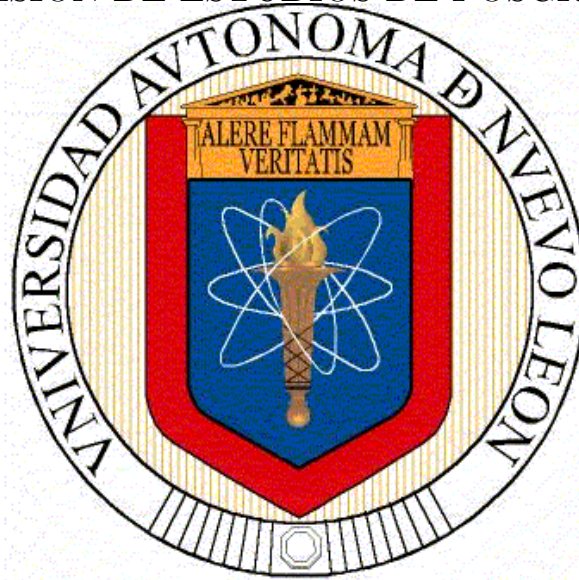


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MÉCANICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



"ANÁLISIS EN BOND GRAPH PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS Y SU APLICACIÓN A LA MÁQUINA SÍNCRONA."

POR

ING. ROSA ISELA JUÁREZ GUERRERO*

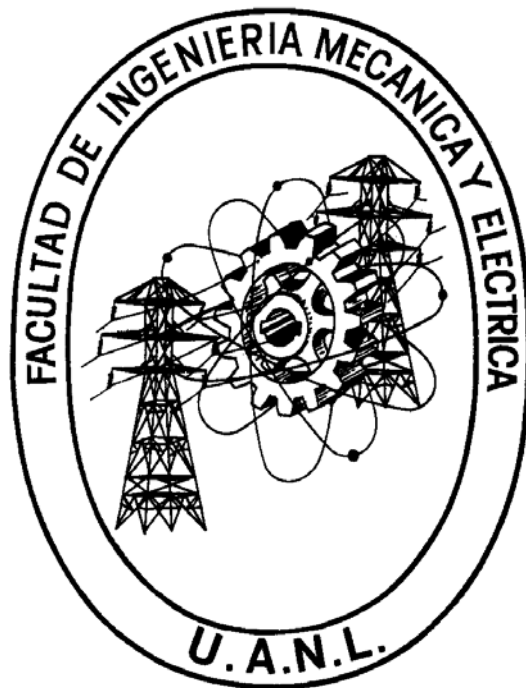
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

*Este trabajo fue realizado con el apoyo de CONACyT.

CD. UNIVERSITARIA SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L., MÉXICO JULIO 2008

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MÉCANICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



"ANÁLISIS EN BOND GRAPH PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS Y SU APLICACIÓN A LA MÁQUINA SÍNCRONA."

POR

ING. ROSA ISELA JUÁREZ GUERRERO*

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

*Este trabajo fue realizado con el apoyo de CONACyT.

CD. UNIVERSITARIA SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L., MÉXICO JULIO 2008

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MÉCANICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "**ANÁLISIS EN BOND GRAPH PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS Y SU APLICACIÓN A LA MÁQUINA SÍNCRONA.**", desarrollada por la alumna **Ing. Rosa Isela Juárez Guerrero**, matrícula número 1017551 sea aceptada como defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control

Comité de Tesis

Asesor

Dr. Rene Galindo Orozco

Revisor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

Revisor

Dr. Gilberto González Avalos

Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez

División de Estudios de Posgrado

Contenido

1	Introducción	9
1.1	Objetivo	9
1.2	Justificación	10
1.3	Organización de la Tesis	11
2	Antecedentes	13
2.1	Introducción	13
2.2	Modelado en Bond Graph	13
2.2.1	Componentes Básicos de Bond Graph	14
2.2.2	Interconexión de elementos	17
2.2.3	Causalidad	22
2.2.4	Bond Activo	25
2.2.5	Estructura de Unión	25
2.3	Enfoques de Control Robusto	28
2.3.1	Transformaciones Lineales Fraccionales (LFTs)	30
2.3.2	Control de Modelo Interno (IMC)	31
3	Estructuras de Unión para las LFTs	35
3.1	Introducción	35
3.2	Transformaciones Lineales Fraccionales	36
3.3	Estructuras de unión para LFT Superior e Inferior	36
3.3.1	LFT inferior (Lower LFT) y LFT superior (Upper LFT)	39
3.3.2	Casos especiales	46
3.4	Ejemplo: Motor de Corriente Directa	48
3.4.1	Conclusiones	51

4 Estructuras de Union del Controlador IMC	53
4.1 Introducción	53
4.2 Estructuras de unión para las funciones de sensibilidad en función del parámetro- $Q(s)$	55
4.3 Estructura de unión para el controlador en función de el parámetro- $Q(s)$	58
4.4 Criterios basados en las propiedades de las estructuras de unión	61
4.5 EJEMPLO	64
4.6 Conclusiones	67
5 Aplicación a la Máquina Síncrona	69
5.1 Introducción	69
5.2 Análisis del Modelo de la Máquina Síncrona	69
5.3 Modelo de la Máquina Síncrona en Bond Graph	72
5.3.1 Aplicación del Teorema	74
5.4 Conclusiones	79
6 Trabajos Futuros y conclusiones	81
7 APENDICE A	85

Lista de Figuras

2.1	Representación de un bond, componente fundamental de un bond graph	14
2.2	Ensamble de subsistemas	15
2.3	Representación multipuerto del motor de C. D.	17
2.4	Elementos tipo puerto-1 activos (<i>Fuentes</i>)	18
2.5	Elemento <i>puerto-1 resistivo</i>	19
2.6	Elemento <i>puerto-1 capacitivo</i>	19
2.7	Elemento <i>puerto-1 inercial</i>	19
2.8	Elementos tipo <i>puerto-2</i>	20
2.9	<i>Unión 0 (de esfuerzo común)</i>	21
2.10	<i>Unión 1 (de flujo común)</i>	21
2.11	Reglas para reducción de bonds	22
2.12	Bond con causalidad asignada	23
2.13	Bond Activo (<i>active bond</i>)	25
2.14	Bond Graph con causalidad integral.	26
2.15	Representación de la LFT inferior	30
2.16	Representación de la LFT superior	30
2.17	Diagrama a bloques de un sistema retroalimentado	32
2.18	Estructura del Modelo de Control Interno (IMC)	33
3.1	Representación estándar de la planta con incertidumbre bajo retroalimentación de control.	36
3.2	Conexión de una unión suma	37
3.3	Conexión paralelo	37
3.4	Conexión general para los elementos dentro de la matriz $M(s)$ representadas por estructuras de unión.	40
3.5	Conexión general para los elementos dentro de la matriz $N(s)$ representadas por estructuras de unión.	40
3.6	<i>Diagrama de Bloques con Incertidumbre Aditiva.</i>	47

3.7	Bond Graph del Motor de CD.	49
3.8	Diagrama del Motor de CD.	49
3.9	$I : L_a$ bond correspondiente a inductancia de armadura (incertidumbre).	50
4.1	Diagrama de bloques de un sistema retroalimentado	54
4.2	Estructura del Modelo de Control Interno (IMC)	54
4.3	Diagrama de bloques para obtener S_o y T_o	55
4.4	Diagrama a bloques para obtener el control $K(s)$	58
4.5	Sistema Mecánico	63
4.6	Bond graph para el sistema mecánico.	63
4.7	Valores Singulares de $\begin{bmatrix} 2T_o(s) & S_o(s) \end{bmatrix}^T$, para $\lambda = 0.4$, $\lambda = 0.5$, y $\lambda = 0.6$	65
4.8	Valores singulares de $\begin{bmatrix} 2T_o(s) & S_o(s) \end{bmatrix}^T$, para $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.001$, y $\epsilon = 0.0001$	66
5.1	Diagrama esquemático de la máquina síncrona.	70
5.2	Diagrama en Bond Graph de la Máquina Síncrona.	72
5.3	Diagrama en Bond Graph de la Máquina Síncrona simplificado.	72
5.4	Valores singulares para $[0.1T; S]^T$ para $\lambda = 0.00001$, $\lambda = 0.00002$ y $\lambda = 0.00003$	76
5.5	Valores singulares para $P(s)Q(s)$ y $P_\Delta(s)Q(s)$	77
5.6	Respuesta en el tiempo de $P(s)Q(s)$ a una entrada escalon de magnitud 1.	78
7.1	<i>Representación de LFT Inferior</i>	85
7.2	<i>Representación de LFT Superior</i>	86
7.3	Conexión general para los elementos dentro de la matriz $M(s)$ representadas por estructuras de unión.	88
7.4	Conexión general para los elementos dentro de la matriz $N(s)$ representadas por estructuras de unión.	88
7.5	Representación de la <i>LFT superior</i>	89
7.6	<i>Diagrama de Bloques con Incertidumbre Aditiva</i>	90

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo de Tesis contiene procedimientos que proponen hacer uso de las herramientas de bond graph para realizar un análisis dentro del marco de referencia de técnicas de control robusto que se encuentran bien establecidas. La mezcla de estas dos vertientes hace parecer sencillo el análisis de los modelos de las plantas o sistemas ya que es fácil apreciar dentro de un diagrama todas las dinámicas de dichos sistemas.

Hacer uso de las técnicas de bond graph en conjunción con las técnicas empleadas dentro de control robusto para el diseño de controladores nos lleva, gracias a una de las principales características del bond graph, a obtener un controlador que sea físicamente implementable, debido a que el bond graph basa sus principios en las leyes de conservación de la energía.

1.1 Objetivo

El objetivo principal del presente trabajo de Tesis, es utilizar las técnicas de Bond Graph, para analizar modelos de plantas considerando incertidumbres no estructuradas, para obtener la representación LFT de incertidumbres no estructuradas y para el análisis y diseño de un controlador robusto.

Se establecen objetivos particulares para visualizar de una mejor manera el objetivo general:

- Obtener un modelo lineal.
- Obtener una representación LFT para incertidumbres no estructuradas en bond graph.
- Analizar las funciones de sensibilidad en bond graph.
- Diseñar un controlador robusto.
- Analizar la estabilidad y el desempeño del sistema en lazo cerrado.

- Integrar el sistema y validar con simulaciones el controlador robusto diseñado.
- Reportar y difundir los resultados teóricos obtenidos.

1.2 Justificación

- ¿Por qué hacemos uso de las herramientas mencionadas?, Teoría de control robusto \mathcal{H}_∞ y bond graph.

Debido a que el sistema en el cual realizamos nuestro estudio posee entradas y salidas múltiples; es decir, es un sistema no lineal MIMO (Múltiples Entradas Múltiples Salidas), y que se utilizan modelos reducidos del motor síncrono; entonces el diseño de un controlador “eficiente” para este tipo de sistemas implica el hacer uso de herramientas y consideraciones que tomen en cuenta las diferencias entre la planta nominal de diseño y el sistema real.

El control robusto por si sólo considera sistemas en los cuales se tiene la certeza o el conocimiento de errores y/o simplificaciones que ocurrieron al formular el modelo de la planta G_p (Planta Perturbada e Incierta), obteniendo un conjunto de posibles plantas que cubran la Planta Perturbada e Incierta.

El estudio de un sistema con control robusto \mathcal{H}_∞ enfatiza en la minimización de funciones, conocidas como funciones de sensibilidad; minimizando una norma \mathcal{H}_∞ , finalmente las funciones de sensibilidad están relacionadas con el desempeño robusto del sistema y este a su vez se ve afectado por las perturbaciones e incertidumbres del mismo.

El estudio del modelo en Bond Graph se basa en las interacciones de energía entre los subsistemas que componen el sistema en general.

Además: “ Los sistemas que tienen partes eléctricas y mecánicas presentan una conexión muy importante, a veces espectacular, entre dos disciplinas que normalmente se encuentran aisladas en la mente de los estudiantes de ingeniería”,... “El lazo de unión común entre los sistemas mecánicos y eléctricos o constituye el hecho de que ambos sistemas transportan cantidades de energía” [19].

El analizar el modelo de la máquina síncrona en bond graph da una perspectiva más amplia y precisa de la dinámica del sistema, esto es de gran ayuda ya que se puede visualizar la máquina síncrona sin perder el sentido físico, lo cual sucede generalmente con matemáticos; la comprensión del comportamiento de este sistema en particular es importante ya que tiene aplicaciones que son de mucho interés, tales como en el tratamiento y conversión de la energía eléctrica.

Mientras que representar el modelo LFT para incertidumbres no estructuradas y de las funciones de sensibilidad en bond graph, son parte de las aportaciones realizadas, ya que sólo existe la representación LFT para incertidumbres paramétricas [1].

1.3 Organización de la Tesis

- El contenido de este trabajo se distribuye de la siguiente manera:

En el primer capítulo de este trabajo se da un breve repaso de los principales conceptos, tanto de la técnica de modelado en bond graph, como de los principales fundamentos usados para realizar análisis de sistemas en el enfoque de LFTs (*Transformaciones Lineales Fraccionales*) y el diseño de controladores robustos con ayuda del IMC (*Control de Modelo Interno*). Se muestra la nomenclatura empleada en cada metodología y se renombran algunas variables para evitar confusión entre conceptos de una técnica y de otra.

El Capítulo 2, Estructuras de Unión para las LFTs, muestra la propuesta para obtener la estructura de unión equivalente entrada-salida para la LFT Superior y la LFT Inferior, visualizando estructuras de unión como subsistemas relacionados por operaciones de suma y resta dentro de un diagrama a bloques equivalente a las LFTs. Se agrega además el procedimiento para obtener la estructura de unión equivalente entrada/salida de la LFT superior considerando una incertidumbre aditiva, mostrando un breve ejemplo aplicado al modelo de un Motor de CD.

En el capítulo “Estructuras de Unión del Controlador IMC”, se propone, basados en la metodología empleada para la obtención de las estructuras de unión para las LFTs; obtener la estructura de unión equivalente entrada-salida para las Funciones de Sensibilidad S_o y de Sensibilidad complementaria T_o . Se propone la estructura de unión equivalente entrada salida del controlador de modelo interno para plantas estables. Ambos resultados se muestran resultados en función del parámetro $Q(s)$ de la familia de controladores estabilizantes. Se incluyen criterios basados en estructuras de unión para garantizar el cumplimiento de propiedades estructurales de observabilidad y de controlabilidad de las estructuras de unión de la función Sensibilidad complementaria y del controlador. Se tienen resultados para obtener elementos de la estructura de unión del parámetro $Q(s)$ —estabilizante para plantas *SISO*. Al final del capítulo se aplican algunos de los resultados en un ejemplo con un sistema de amortiguamiento.

Finalmente, se tiene el capítulo de Aplicación a la Máquina Síncrona donde se toma un modelo simplificado de la misma para realizar el análisis aplicando los resultados del Capítulo 3.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Introducción

Es importante realizar un análisis de las características de cada uno de los tópicos manejados dentro de este trabajo, más aun, considerando el hecho de la “liga” que se logra establecer, en el Capítulo 1, entre el *control robusto* (*robust control*) y la técnica de modelado *enlace gráfico* (*bond graph*). Dentro de este capítulo se presentan conceptos y técnicas importantes dentro de ambas disciplinas, que son la base para el desarrollo del trabajo de investigación realizado; es decir, presentamos antecedentes de los conceptos y técnicas empleadas para obtener las *estructuras de unión* [5] (*junction structures*) equivalentes entrada-salida a los marcos de referencia de las *Transformaciones Lineales Fraccionales* (*LFT, Linear Fractional Transformations*), del *Modelo de Control Interno* [14] (*IMC, Internal Model Control*), y criterios de enlace gráfico para *propiedades estructurales* (*structural properties*).

Los conceptos y técnicas utilizadas son mostrados de manera independiente dentro de dos secciones, en la primera parte se dan algunos fundamentos de bond graph y la segunda parte corresponde a los enfoques empleados dentro de control robusto.

La siguiente sección, contiene conceptos dentro del modelado en bond graph, tales como, *puertos*, *variables generalizadas*, y *bond activo*, entre otros.

2.2 Modelado en Bond Graph

Uno de los objetivos principales al realizar un estudio de las dinámicas de los sistemas reales es encontrar un *modelo* del sistema. Los modelos son una representación o construcción, en ocasiones abstracta, empleada para describir el comportamiento del sistema y de los elementos que lo componen. Ya que el modelo debe de ser una representación de la realidad, la elaboración de los modelos es considerada un arte [5]. Existen modelos complejos o muy detallados, estos modelos contienen parámetros que en algunos casos son imposibles de estimar y/o analizar [5]. Debido a esto,



Figura 2.1: Representación de un bond, componente fundamental de un bond graph

la persona que desarrolla los modelos debe conocer un procedimiento para construir una gran variedad de modelos de sistemas de distintos niveles de complejidad, de manera que sea sencillo encontrar el modelo más adecuado al estudio que se realiza.

Por lo general los modelos se encuentran representados matemáticamente, descritos por ecuaciones diferenciales, en este caso se requiere amplio conocimiento del funcionamiento del sistema que representa el modelo para la correcta interpretación del mismo. Las técnicas y metodologías de bond graph brindan la facilidad de construir el modelo del sistema empleando una notación uniforme para todos los tipos de sistemas, debido a que la base de esta herramienta de modelado es el flujo de potencia [5].

En 1961, Payter establece las bases de bond graph y la idea fue desarrollada posteriormente por Dean Karnopp, Ronald Rosenberg y Wellstead como una poderosa herramienta de modelado.

2.2.1 Componentes Básicos de Bond Graph

En esta sección se resumen los componentes básicos de *Bond Graph*. De acuerdo a [5], un modelo en Bond Graph es un modelo de un sistema dinámico, donde un conjunto de componentes interactúan unos con otros a través de *puertos* de energía. Según [5], el modelado en bond graph consiste en dividir el sistema en partes que pueden ser modeladas para estudiarlas y después ensamblarlas al modelo del sistema. Las partes principales del sistema son conocidas como *subsistemas*, mientras que las partes más simples, además de ser no reducibles, son denominadas *componentes*. Sin embargo, no se puede decir que los componentes, subsistemas y sistemas sigan este orden jerárquico ya que la parte más primitiva de un sistema puede ser modelada con tal detalle que será un complejo subsistema.

Los llamados *puertos*, son lugares donde la energía puede fluir y en ellos se realizan las interconexiones de los subsistemas. En sistemas que están compuestos por partes que se encuentran separadas, se considera naturalmente la forma en que son ensambladas las partes, ya sea por líneas hidráulicas, cables o por otros subsistemas. La unión de puertos se representa por una línea sencilla o *bond* (Figura 2.1) entre los multipuertos.

Los puertos son indicados por líneas que salen del símbolo que representa el dispositivo que se modela. En la Figura 2.2 inciso (a) se muestran subsistemas con un puerto. Además, un subsistema puede tener más de un “sitio” donde exista flujo de energía (más de un puerto), los subsistemas con esta característica son llamados *multipuertos*, como muestra la Figura 2.2 en su inciso (b).

Los puertos son elementos básicos del modelo, y éstos a su vez, pueden ser clasificados de acuerdo al tipo de

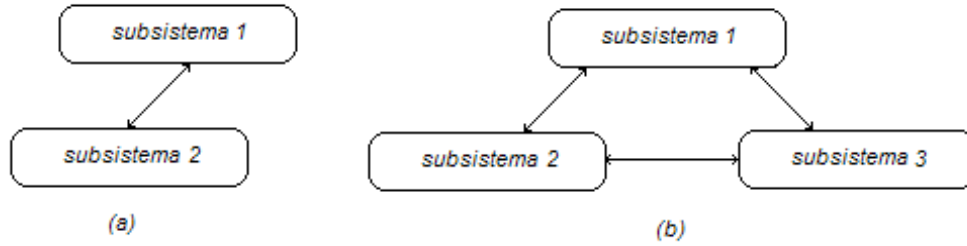


Figura 2.2: Ensamble de subsistemas

puerto como se muestra, en la *Tabla 2.1 Clasificación de Puertos en bond graph.*

TIPO	CLASIFICACIÓN
PUERTO 1	ACTIVOS Fuentes de esfuerzo (MS_e) Fuentes de flujo (MS_f)
	PASIVOS Almacenadores de esfuerzo (I) Almacenadores de flujo (C) Elementos Disipativos (R)
	Transformadores (TF) Giradores (GY)
PUERTO 2	Unión 0 Unión 1

(Tabla 2.1 Clasificación de Puertos en bond graph.)

En secciones posteriores se describe de una manera más detallada las características principales de los elementos con distinto tipo de puerto.

Dentro de los conceptos básicos del modelado en bond graph tenemos las denominadas *variables generalizadas*, el porque de su nombre y las definiciones que de ellas se desprenden se exponen en la siguiente sección.

Variables Generalizadas

Las *variables de potencia*, cuya función es describir las uniones realizadas entre multipuertos, son llamadas *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$. Estas variables son conocidas como *variables de bond generalizadas* ya que pueden ser usadas en todos los dominios de energía. Se definen como variables de potencia debido a que el producto de las variables, que se consideran funciones del tiempo, es la potencia instantánea que fluye a través de los multipuertos.

$$P(t) \triangleq e(t)f(t) \tag{2.1}$$

Existen además, las denominadas *variables de energía, esfuerzo acumulado* o *momento generalizado* $p(t)$ y *flujo acumulado* o *carga generalizada* $q(t)$, las cuales son integrales en el tiempo de las variables de potencia, respectivamente.

$$\begin{aligned} p(t) &\triangleq \int^t e(\tau) d\tau \\ q(t) &\triangleq \int^t f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

Estas variables son llamadas de energía ya que la energía, ésto es, la integral de la potencia,

$$E(t) = \int^t P(\tau) d\tau = \int^t e(\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

es una función del momento generalizado ó del desplazamiento generalizado en los elementos almacenadores de esfuerzo ó de flujo, respectivamente.

Se da la clasificación de las variables de potencia en un esquema general en la *Tabla 2.2 Clasificación de variables de potencia*, debido a que las interacciones de potencia están siempre presentes en las conexiones de los multipuertos.

Dominio	Esfuerzo, $e(t)$	Flujo, $f(t)$
Mécanica traslacional	Fuerza	Velocidad
Mécanica rotacional	Torque	Velocidad angular
Hidráulico	Presión	Tasa del flujo volumétrico ó caudal
Eléctrico	Voltaje	Corriente
Térmico	Temperatura	Calor
Magnético	Fuerza magneto motriz	Flujo magnético
Químico	Volumen químico	

(Tabla 2.2 Clasificación de variables de potencia)

Las variables de potencia son escritas enseguida de las líneas que representan los puertos, ésta es una ubicación, que consideramos estándar, para las variables esfuerzo y flujo. Los esfuerzos son colocados ya sea arriba o a la izquierda de la línea del puerto, los flujos se ubican bien abajo o a la derecha de la línea del puerto.

La *media felcha* (*half arrow*) en la Figura 2.1, indica una convención de signo, y la dirección del flujo de potencia en cualquier instante de tiempo, en el cual sucede que las variables de potencia son ambas positivas.

Entonces cuando dos multipuertos se conectan la potencia fluye a través de ellos y se llega a la expresión del producto de una cantidad de esfuerzo y de flujo (2.1) para la potencia; en bond graph se desarrolló una forma universal

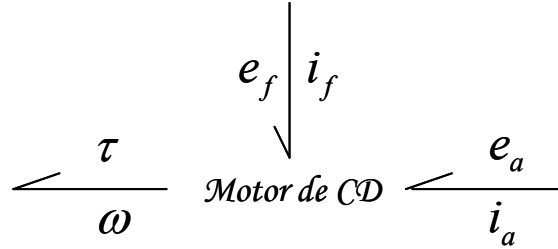


Figura 2.3: Representación multipuerto del motor de C. D.

de representar multipuertos y sistemas formados por multipuertos interconectados, considerando la clasificación de las variables generalizadas.

Enseguida se da una breve descripción de como se realiza la interconexión de elementos en un bond graph.

2.2.2 Interconexión de elementos

Los ensambles dentro de bond graph se realizan a nivel de subsistemas, un sistema completo está compuesto por cierto número de subsistemas, que tienen puertos sencillos o multipuertos. Las uniones realizadas entre subsistemas están descritas por las variables de potencia, como se mencionó en la Sección 1.2.1. Cuando se realiza la conexión de dos multipuertos las variables de potencia son forzadas a cumplir con (2.1).

Cuando se acoplan dos multipuertos se dice que los multipuertos tienen un *lazo* (bond), similar a los lazos entre las partes que componen las moléculas. Los bonds contienen ambas variables de potencia, pero sólo una de las señales puede ser la entrada al elemento y en consecuencia la otra señal es la salida.

Como es de esperarse un sistema puede ser modelado internamente de forma detallada con los bonds ya mencionados, mientras que los dispositivos o elementos que componen el modelo se representan por letras o números, dependiendo de la función que estos realicen dentro del sistema (fuentes, almacenadores, elementos disipativos o elementos de unión).

Considerando la clasificación de variables de potencia y de energía, nos indica que sólo unos pocos elementos multipuerto son requeridos para representar los modelos dentro de una gran variedad de dominios de energía.

Basados en las secciones anteriores se puede observar un bond graph representativo del motor de C.D. en la Figura 2.3.

Para obtener modelos en bond graph de sistemas más complejos es necesario revisar a fondo el concepto de elemento basados en el número de puertos que lo conforman, lo anterior dentro de la clasificación mostrada en la *Tabla 2.1 Clasificación de Puertos en bond graph*. Presentamos una revisión individual de cada uno de los elementos mencionados dentro de los componentes básicos de un bond graph.

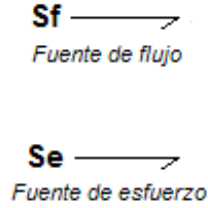


Figura 2.4: Elementos tipo puerto-1 activos (*Fuentes*)

Elementos tipo Puerto-1

Estos elementos se etiquetan a través de un puerto de potencia sencillo, y en el puerto existen un par de variables de esfuerzo $e(t)$ y de flujo $f(t)$. Existen dos de estos elementos; los *activos*, los cuales introducen energía al sistema y los *pasivos* que representan elementos de disipación; y dos formas de almacenamiento de energía, además de ser considerados elementos ideales.

Los elementos tipo *puerto-1 activos* son llamados comúnmente *fuentes*, y existen dos tipos de ellas, fuentes de esfuerzo S_e y fuentes de flujo S_f . La Figura 2.4 muestra el correspondiente símbolo en bond graph para cada una de ellas. En cada una de las dos fuentes; una de las dos variables, esfuerzo o flujo, se mantiene sensiblemente constante e independiente del suministro de potencia, absorbido por la fuente o está restringida a ser una función particular del tiempo.

Los elementos pasivos relacionan el esfuerzo y el flujo, y esta relación se puede interpretar de dos formas; el esfuerzo puede ser obtenido si el flujo está dado, o viceversa, el flujo puede ser encontrado si el esfuerzo está dado. La obtención de una u otra de las variables de potencia depende de la *causalidad* que le fue asignada al elemento.

Abordaremos el concepto de causalidad de forma más detallada en la siguiente sección.

Las relaciones que caracterizan a los elementos pasivos son llamadas *relaciones constitutivas*, se encuentran definidas por las leyes físicas que rigen los elementos los cuales disipan potencia, almacenan energía o suministran potencia. Las relaciones constitutivas están en función de las variables generalizadas y cumplen con el principio de conservación de energía.

La relación para las variables de potencia en el elemento *puerto-1 resistivo* (elemento disipativo) está dada por una función estática entre las variables de potencia, que describe ya sea una línea curva o recta, siendo la resistencia un elemento no lineal o lineal, respectivamente. Dicha relación se muestra en las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} e &= \Phi_R(f) \\ f &= \Phi_R^{-1}(e) \end{aligned} \tag{2.4}$$

El bond graph que representa el elemento puerto-1 se muestra en la Figura 2.5.

El elemento *puerto-1 capacitivo* (elemento almacenador de flujo), describe una relación constitutiva estática entre

Figura 2.5: Elemento *puerto-1 resistivo*Figura 2.6: Elemento *puerto-1 capacitivo*

el esfuerzo $e(t)$ y el desplazamiento $q(t)$,

$$\begin{aligned} q &= \Phi_C(e) \\ e &= \Phi_C^{-1}(q) \end{aligned} \quad (2.5)$$

El símbolo representativo del puerto-1 capacitivo es el bond graph de la Figura 2.6.

Un segundo almacenador de energía, llamado elemento *puerto-1 inercial* (elemento almacenador de esfuerzo), se genera si el momento $p(t)$ está relacionado por una ley constitutiva estática al flujo $f(t)$. Este elemento se usa para modelar efectos de inductancia, masa o inercia según sea el caso.

$$\begin{aligned} p &= \Phi_I(f) \\ f &= \Phi_I^{-1}(p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La Figura 2.7 representa el bond graph para el elemento puerto-1 inercial.

Los siguientes elementos son Elementos Tipo Puerto-2.

Elementos tipo Puerto-2

Los elementos tipo Puerto-2, son considerados elementos ideales en el sentido de conservación de la potencia dada en (2.1), ésto significa que,

$$e_1(t)f_1(t) = e_2(t)f_2(t) \quad (2.7)$$

donde el subíndice indica el puerto correspondiente.

Se presentan dos elementos que mantienen la relación de potencias de (2.7) trabajando bajo una relación entre las variables de esfuerzo y flujo; dicha relación puede ser lineal o no lineal.

El elemento *puerto-2 transformador lineal o no lineal* cumple con la condición ideal de (2.7), tomando como

Figura 2.7: Elemento *puerto-1 inercial*

Figura 2.8: Elementos tipo *puerto-2*

principio las siguientes leyes constitutivas,

$$\begin{aligned} e_1(t) = m e_2(t) & \quad e_1(t) = \varphi_1(e_2(t)) \\ m f_1(t) = f_2(t) & \quad f_1(t) = \varphi_2(f_2(t)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

respectivamente, donde m , representa el módulo del transformador.

El segundo elemento, llamado elemento *puerto-2 girador* lineal o no lineal, para cumplir con el balance de potencia en (2.7) emplea,

$$\begin{aligned} e_1(t) = r f_2(t) & \quad e_1(t) = \varphi_1(f_2(t)) \\ r f_1(t) = e_2(t) & \quad f_1(t) = \varphi_2(e_2(t)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

respectivamente, donde r , es el módulo del girador.

Las relaciones establecidas por (2.8) y (2.9) para cada uno de los elementos tipo puerto-2, son llamadas relaciones del transformador y del girador, respectivamente. Es importante observar que en las leyes constitutivas dadas en (2.8), el efecto de transformación genera una relación esfuerzo-esfuerzo y flujo-flujo. Mientras que el efecto del girador representado en (2.9), muestra relaciones de esfuerzo-flujo. Además, los módulos del transformador o del girador pueden estar modulados por otra variable.

El bond graph representativo de estos elementos está dado en la figura 2.8.

Finalmente presentamos los elementos tipo Puerto-3,

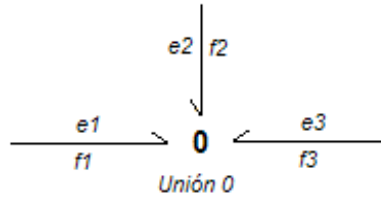
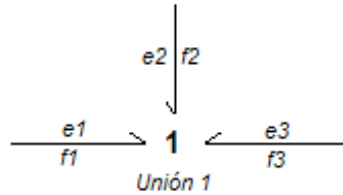
Elementos tipo Puerto-3

También conocidos como uniones, los elementos tipo puerto-3 interconectan tres o más puertos de energía dentro de un subsistema. Se clasifican en *unión 0* y *unión 1*.

La unión 0, *unión de flujo* o *unión de esfuerzo común*, se rige por las relaciones de interconexión,

$$\begin{aligned} e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

las cuales se desprenden de la representación mostrada en la Figura 2.9, en este diagrama se observa la unión de tres

Figura 2.9: *Unión 0 (de esfuerzo común)*Figura 2.10: *Unión 1 (de flujo común)*

bonds.

Mientras que la unión 1, llamada *unión de esfuerzo* o *unión de flujo común*, se rige bajo las relaciones,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f_2(t) = f_3(t) \\ e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

y la unión se representa en la Figura 2.10.

Los esfuerzos en los bonds de la unión-0 son idénticos y la suma algebraica de los flujos es igual a cero. Lo anterior implica que la suma de las potencias de cada uno de los bonds dentro de la unión es cero.

$$e_1(t)f_1(t) + e_2(t)f_2(t) + e_3(t)f_3(t) = 0 \quad (2.12)$$

Al igual que en la unión 0, las relaciones constitutivas de la unión 1 al combinarse generan la conservación de potencia en la forma que se muestra en (2.12).

Este tipo de puertos-3 representa una de las ideas fundamentales dentro del formalismo de bond graph. La idea principal de estas uniones es representar en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones las cuales son llamadas conexiones *serie* y *paralelo*, hablando en un marco de referencia eléctrico.

Cada conexión se presenta dentro de todos los tipos de sistemas, no son conexiones propias del enfoque eléctrico.

Se puede esperar que la existencia de las uniones 0 y 1, o de elementos tipo puerto-1 ó puerto-2, no sean obvias al realizar el modelado con las técnicas de bond graph, sin embargo, conforme se avance en la lectura de este trabajo se observará como es posible hacer uso de los elementos mostrados en las secciones anteriores dentro de una metodología

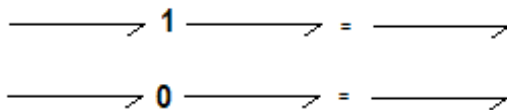


Figura 2.11: Reglas para reducción de bonds

formal para la obtención de un modelo.

Después de haber observado cuáles son las características principales de cada elemento, sus respectivas leyes o relaciones constitutivas y la representación correspondiente en bond graph, proporcionamos un método estándar [15] para obtener el modelo equivalente de un sistema en un modelo en bond graph.

- Dibujar una unión-0 para cada punto ó nodo en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
- Dibujar una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de bond graph en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond graph indica la dirección del flujo de potencia.
- Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección del flujo de potencia.
- Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.
- Simplificar el modelo de acuerdo a lo mostrado en la Figura 2.11.

El procedimiento mostrado, si se sigue según lo indicado, es una forma sencilla y segura de obtener una representación de un modelo en bond graph.

En secciones anteriores se hizo uso del concepto de causalidad de una forma general, en la siguiente sección haremos mención de usos más específicos de dicho concepto.

2.2.3 Causalidad

La manera de identificar cuáles de las variables de potencia son entradas y cuáles salidas es especificada por un *trazo causal* (*causal stroke*) [5]. Un trazo causal es una pequeña línea perpendicular a los bonds, y se coloca en uno de los extremos de éstos, como lo muestra la Figura 2.12. El trazo causal indica la dirección a la cual se dirige la señal de esfuerzo. Se mencionó, dentro de la interconexión de elementos dada en la Sección 2.2, que un bond contiene las dos variables de potencia; pero solamente una de las señales puede ser la entrada al elemento, por lo tanto la señal con la variable de potencia restante es la salida del elemento.

El concepto de causalidad se estableció sabiendo que uno de los principios básicos dentro de las técnicas de modelado en bond graph se basa en la representación de las relaciones causa-efecto entre los distintos componentes y

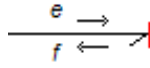


Figura 2.12: Bond con causalidad asignada

subsistemas del modelo, se observa que el trazo causal nos indica cual de las variables de potencia es la causa y por consiguiente cual es el efecto.

La causalidad asignada a un elemento de almacenamiento, establecida por el trazo causal, puede ser *causalidad integral* o *causalidad derivativa*; esto se debe a que la relación entre las variables que intervienen dentro de las leyes constitutivas de los distintos elementos puede ser expresada por una integral o una derivada, respectivamente; es decir la salida del elemento puede ser expresada como la integral o derivada de la entrada al mismo. Sin embargo, la causalidad derivativa muestra mucho más, este tipo de causalidad se presenta cuando elementos almacenadores de energía que forman parte de un sistema no son dinámicamente independientes, dentro de una asignación de causalidad integral predefinida [15].

La causalidad predefinida, es la causalidad que es requerida preferentemente para los elementos almacenadores de energía. En un modelo en Bond Graph con causalidad integral predefinida; el número de elementos almacenadores de energía con causalidad integral representa el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes del modelo.

Mostraremos la causalidad que admiten los multipuertos básicos (Tabla 2.3 Causalidad en multipuertos.), algunos se encuentran fuertemente restringidos con respecto a la posible causalidad que admiten, otros son completamente indiferentes a la asignación de ésta y algunos más muestran sus leyes constitutivas en distinta forma dependiendo de

la causalidad asignada.

Causalidad Necesaria	Se ———	Sf ————	
Causalidad Restrictiva	———— TF ———	———— TF ————	
	———— GY ————	———— GY ———	
	———— 0 ———	———— 0 ———	———— 0 ————
	———— 1 ————	———— 1 ————	———— 1 ———
Causalidad Integral	———— I	———— C	
Causalidad Derivativa	———— I	———— C	
Causalidad Arbitraria	———— R	———— R	

(Tabla 2.3 Causalidad en multipuertos.)

Considerando las condiciones de causalidad dadas en la *Tabla 2.3 Causalidad en multipuertos.*, un procedimiento para asignación de causalidad en un multipuerto es [15].

- 1.- Considerar cualquier S_e o S_f y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, empleando las restricciones de 0, 1, *TF*, y *GY* *Tabla 2.3 Causalidad en multipuertos.*.
- 2.- Asignar causalidad integral (causalidad integral predefinida) o causalidad derivativa (causalidad derivativa predefinida) a los elementos *C* e *I* respetando las restricciones de la *Tabla 2.3 Causalidad en multipuertos.*.
- 3.- Escoger cualquier *R* que no esté asignado y dar una causalidad arbitraria a *R*. Extender las implicaciones usando 0, 1, *TF*, y *GY* de la *Tabla 2.3 Causalidad en multipuertos.*.

Un bond graph es *Causalmente Correcto*, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

Figura 2.13: Bond Activo (*active bond*)

Es necesario hacer notar que la convención de signo de la media flecha para flujo de potencia y el trazo causal son completamente independientes.

Otro de los aspectos importantes, dentro de las técnicas de modelado en bond graph, es el considerar que las uniones entre los multipuertos no tienen efecto de carga uno sobre otro, cuando se hace esta consideración el bond únicamente considera una de las señales debida a las variables de potencia esfuerzo o flujo, a este tipo de bond se le define como *bond activo* [5].

2.2.4 Bond Activo

Los instrumentos de medición se encuentran diseñados para extraer información acerca de la variable de un sistema sin perturbar de manera crítica al sistema al cual el instrumento de medición es conectado. Cuando algún instrumento de medición lee una variable de esfuerzo o flujo, y no presenta lectura alguna de potencia, esto indica que la conexión entre los subsistemas no presenta el efecto de carga asociado a la interacción de potencia. Si el sistema se encuentra bajo el dominio de la interacción de señales debido a la presencia de instrumentos, entonces ya sea una señal de esfuerzo o una de flujo puede ser eliminada en muchos de los puntos de interconexión. En este caso, un bond se degrada a una señal simple y puede representarse por medio de un *bond activo* [5] (*active bond*), éste se representa por una *flecha completa* (*full arrowhead*), que indica que una influencia del medio ambiente del sistema sucede esencialmente cuando no existe flujo de potencia, es decir, representa una señal de flujo a muy baja potencia (ver [3], [5], [15]).

Es importante notar que al hacer uso de bond graph, uno considerará siempre que los multipuertos están acoplados con los dos efectos *excitación* y *carga* a menos que se tome la decisión específica de eliminar el efecto de carga.

Para finalizar con la breve recopilación de los conceptos que consideramos importantes para realizar una interpretación de los modelos obtenidos con las técnicas de bond graph, presentamos la *estructura de unión* [5], empleada cuando se realizan interconexiones entre multipuertos.

2.2.5 Estructura de Unión

Las *estructuras de unión* [5] S , son conjuntos de uniones 1 y uniones 0, transformadores TF , y giradores GY . Las estructuras de unión habilitan o deshabilitan el intercambio de energía, haciendo cumplir las restricciones entre las partes dinámicas del sistema. El diagrama que se muestra en la Figura 2.14 presenta casualidad integral predefinida, ningún elemento permanece en causalidad derivativa, y el bond graph se encuentra en forma estándar [5]. Todos los bonds se clasifican dentro de este diagrama como *bonds externos*, conectando los elementos almacenadores C , I , en

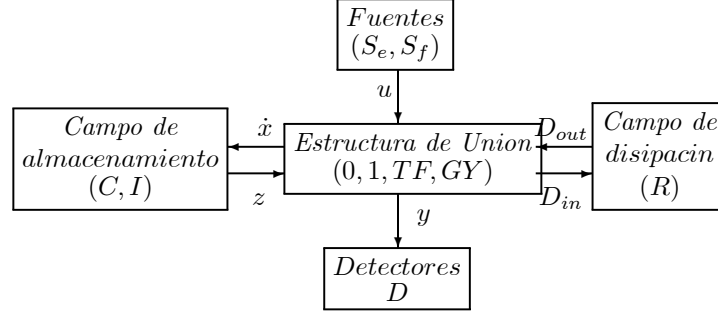


Figura 2.14: Bond Graph con causalidad integral.

causalidad integral; los elementos disipativos R , y las fuentes de esfuerzo S_e y de flujo S_f , con la conexión interna de elementos de la estructura de unión $(0, 1, TF, GY)$.

De acuerdo con la Figura 2.14, $x(t)$ es el vector de estado asociado con los elementos I y C en causalidad integral, $z(t)$ es el vector de co-energía compuesto de variables de esfuerzo y de flujo tal que F es una matriz diagonal compuesta de elementos $1/I$ y $1/C$.

$$\begin{aligned} z(t) &= Fx(t) \quad \text{ó} \quad z(t) = \varphi_1(x(t)) \\ D_{out}(t) &= LD_{in}(t) \quad \text{ó} \quad D_{out}(t) = \varphi_1(D_{in}(t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ son vectores que asocian esfuerzos y flujos entre el *campo* disipativo R y la estructura de unión preservando su relación, L es una matriz diagonal compuesta por elementos $1/R$ y/o R . La entrada y salida de la planta, se denotan por $u(t)$ e $y(t)$, respectivamente, donde, $u(t)$ contiene los esfuerzos y los flujos impuestos por los elementos fuente en la estructura de unión. En la Figura 2.14 $x(t)$ está compuesto de variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en los elementos I y carga generalizada $q(t)$ en los elementos C , para causalidad integral predefinida; $z(t)$ al igual que la derivada en el tiempo de $x(t)$, $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$, son generalmente una mezcla de esfuerzos y flujos.

Los *campos* [5] son generalizaciones multipuerto de los elementos C , I y R . Los campos están representados con la letra que representa al elemento con el número de bonds correspondientes al número de puertos que se encuentran interconectados con el elemento correspondiente.

Los vectores que representan las entradas y salidas de la estructura de unión S , son llamados *vectores clave* [5].

Las relaciones para la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

y las relaciones de los campos de almacenamiento y disipativo son (3.3), Las estructuras de unión son tipos especiales de campos R que nunca disipan potencia [5]; sus propiedades [5] son:

P1 . S_{11} y S_{22} , deben ser antisimétricas,

P2 . $S_{12} = -S_{21}^T$.

Además de las propiedades $P1$ y $P2$ de los elementos que componen la estructura de unión, existen *propiedades estructurales* para la estabilidad, controlabilidad y observabilidad [3][9][10]. Éstas propiedades no dependen de los parámetros del sistema, si no sólomente de su estructura. En [9] condiciones suficientes de no existencia de estabilidad asintótica y condiciones necesarias y suficientes de controlabilidad y observabilidad para sistemas lineales invariantes en el tiempo considerando únicamente la matriz de la estructura de unión (3.2), están dadas, y resumidas en los siguientes teoremas:

PS1 . Una condición suficiente de no existencia de estabilidad asintótica es que exista una combinación lineal entre los renglones de $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \end{bmatrix}$.

PS2 . Un sistema modelado por bond graph es *estructuralmente controlable* si las siguientes dos condiciones son satisfechas:

* existe al menos un elemento no cero en $\begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}$,

* los renglones de $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

PS3 . Un sistema modelado por bond graph es *estructuralmente observable* si las siguientes dos condiciones son satisfechas:

* existe al menos un elemento no cero en $\begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$,

* las columnas de $\begin{bmatrix} S_{11}^T & S_{21}^T & S_{31}^T \end{bmatrix}^T$ son linealmente independientes.

Estas propiedades son de gran ayuda ya que se puede evaluar de manera directa estabilidad, controlabilidad u observabilidad estructural, a partir de la estructura de unión. Las propiedades estructurales de observabilidad y controlabilidad han sido útiles para determinar el número y localización de sensores y actuadores.

Para Sistemas Lineales invariantes y variantes en el tiempo, a partir de la estructura de unión también es sencillo obtener el espacio de estados del sistema, el cual está en función de los elementos de la estructura de unión (3.2),

$$\begin{aligned}
 A(t) &= [S_{11} + S_{12}M(t)S_{21}] F; \\
 B(t) &= S_{13} + S_{12}M(t)S_{23}; \\
 C(t) &= [S_{31} + S_{32}M(t)S_{21}] F; \\
 D(t) &= S_{33} + S_{32}M(t)S_{23};
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

donde,

$$M(t) = (I_d - LS_{22})^{-1} L \tag{2.17}$$

y $F(t)$ y $L(t)$ son las matrices de los campos de almacenamiento y disipativo, respectivamente, en (3.3).

De forma general, las principales ventajas de bond graph [5] son:

- * Incluye la estructura de unión S .
- * Con un número mínimo de símbolos, puede representar diferentes manifestaciones de energía.
- * Permite el acoplamiento de sub-sistemas.
- * Las variables de estado tienen significado físico.
- * Indica las relaciones causa-efecto de cada elemento o sub-sistema.

Es importante considerar que muchos de los resultados obtenidos al modelar con bond graph pueden ser aplicados a sistemas no lineales dado que la estructura de la conexión permanece invariante y la parte no lineal se incluye en las relaciones constitutivas de los elementos.

En lo que respecta a las técnicas de modelado en bond graph lo dicho en las secciones anteriores consideramos que es suficiente para comprender la obtención de las principales aportaciones dentro de este trabajo. En las secciones siguientes se muestran definiciones y principios dentro de los enfoques de Control Robusto, otra de las principales líneas que se tratan en este trabajo.

2.3 Enfoques de Control Robusto

La necesidad de los sistemas dinámicos de mantener estabilidad ante perturbaciones externas, tales como errores de medición o perturbaciones del sistema, ya sea de alta o baja frecuencia, e incertidumbres como dinámicas no modeladas, nos lleva a diseñar de la mejor manera posible los controladores para mantener dicha estabilidad.

La *estabilidad* [14] vista como una propiedad o característica de los sistemas dinámicos se puede definir como la capacidad de un sistema de mantener sus niveles de energía dentro de lo permisible o deseable, para el correcto

funcionamiento de todo el proceso del que forma parte el sistema. Para resolver los problemas implicados con la obtención de estabilidad se hace uso de herramientas que van desde las que son prácticas pero bajo métodos clásicos hasta las que generan la más sofisticada teoría moderna.

El objetivo principal de un sistema de control es lograr que la salida $y(t)$ de un sistema se comporte de cierto modo mediante la manipulación de la entrada $u(t)$ del sistema, existen distintos problemas para llegar al objetivo anteriormente planteado. El *problema de regulación* [14] es manipular $u(t)$ para contrarrestar el efecto de una perturbación $d(t)$ presente en el sistema. El *servo problema* [14] es manejar la entrada $u(t)$ para mantener la salida cercana a una referencia $r(t)$ dada; en ambos casos se pretende que el *error de control* $e(t) = y(t) - r(t)$ sea pequeño. El algoritmo para ajustar $u(t)$ en base a la información de la cual se dispone es el *controlador* $K(t)$ [14]. En muchos casos las entradas y salidas del sistema se pueden expresar haciendo uso de las llamadas funciones de peso $W(s)$.

Las *funciones de peso* [14] $W(s)$, se emplean dentro del diseño de controladores como una herramienta de escalamiento y para especificar bandas de frecuencia, facilitando tanto el análisis del modelo del sistema como el diseño de los controladores. Uno de los enfoques más empleados dentro del escalamiento es el de hacer las variables menores a uno en magnitud; ésto se logra mediante la división de cada variable por su máximo cambio esperado permitido.

Dentro de las vertientes del control existe una línea de investigación que combina la teoría y herramientas del control clásico y moderno, el *Control Robusto* [8], [12], [14]. En este enfoque el modelo del sistema puede considerar perturbaciones $d(t)$ e incertidumbres $\Delta(t)$ acotadas. El marco de referencia de un *sistema perturbado* implica el uso de conceptos como *estabilidad y desempeño nominal*. En el desempeño nominal el sistema satisface las especificaciones de desempeño, para el modelo sin incertidumbre.

El *desempeño* [14] dentro de la Teoría de control es lograr que la salida $y(t)$ del sistema se comporte de la forma más deseable.

El estudio de sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (*LTI, Linear Time Invariant*) con una entrada y una salida (*SISO, Single Input Single Output*) y que se modelan considerando las posibles perturbaciones e incertidumbres dentro del modelo se encuentra bien definido dentro de las técnicas de control robusto [8], [12], [14]; sin embargo, para los sistemas con varias entradas y varias salidas (*MIMO, Multiple Input Multiple Output*) es necesario hacer uso del concepto de *norma*. La cual, es la extensión del concepto de medida, en un espacio vectorial.

El principal modelo de aplicación de los procedimientos propuestos como aportaciones en este trabajo es un sistema con multi-entradas multi-salidas.

Se eligieron dos marcos de referencia dentro de los existentes en control robusto, las *Transformaciones Lineales Fraccionales* (*LFTs Linear Fractional Transformation*) y el *Control de Modelo Interno* (*IMC Internal Model Control*), en las dos siguientes secciones se muestran las principales ideas de cada uno de los enfoques mencionados.

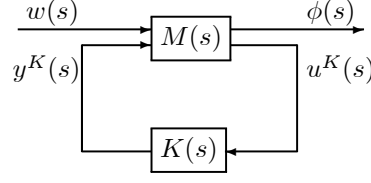


Figura 2.15: Representación de la LFT inferior

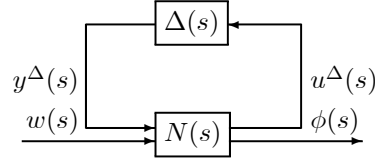


Figura 2.16: Representación de la LFT superior

2.3.1 Transformaciones Lineales Fraccionales (LFTs)

Considerando las *Transformaciones Lineales Fraccionales (LFTs)* [14] mostradas en las Figuras 2.15 y 2.16, el significado físico de una *LFT*, en la teoría de control, es una relación entrada-salida si tomamos $M(s)$ ó $N(s)$ como una matriz de transferencia propia; donde $M(s)$ y $N(s)$ son las plantas controladas incluyendo las funciones de peso; $K(s)$ es el controlador, $u^\Delta(t)$ y $y^\Delta(t)$ son la entrada y salida del modelo de incertidumbre $\Delta(s)$, respectivamente, $y^K(t)$ es la salida del controlador, $u^K(t)$ es la entrada del controlador y la señal medible, y $w(t)$ es el vector de entradas externas, $\phi(t)$ es la salida regulada de las LFTs, se adopta esta notación para evitar confundirla con el vector de co-energía $z(t)$ de las estructuras de unión. Las LFTs son matrices de funciones de transferencia de lazo cerrado de $w \mapsto \phi$, *i.e.*,

$$T_{\phi w}(s) = \mathcal{F}_l(M(s), K(s)) \quad T_{\phi w}(s) = \mathcal{F}_u(N(s), \Delta(s)) \quad (2.18)$$

donde $\mathcal{F}_l(M(s), K(s))$ denota la LFT inferior y $\mathcal{F}_u(N(s), \Delta(s))$ la LFT superior. El diagrama de la Figura 2.15 representa el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi(s) \\ u^K(s) \end{bmatrix} &= M(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ y^K(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ y^K(s) \end{bmatrix} \\ y^K(s) &= K(s)u^K(s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

mientras que el diagrama en la Figura 2.16 representa,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u^\Delta(s) \\ \phi(s) \end{bmatrix} &= N(s) \begin{bmatrix} y^\Delta(s) \\ w(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^\Delta(s) \\ w(s) \end{bmatrix} \\ y^\Delta(s) &= \Delta(s)u^\Delta(s) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Entonces, de las Figuras 2.15 y 2.16, y de (2.19) y (2.20) se tiene,

$$F_l(M(s), K(s)) = \left[M_{11}(s) + M_{12}(s)K(s) [I_d - M_{22}(s)K(s)]^{-1} M_{21}(s) \right] w(s) \quad (2.21)$$

y

$$F_u(N(s), \Delta(s)) = \left[N_{21}(s)\Delta(s) [I - N_{11}(s)\Delta(s)]^{-1} N_{12}(s) + N_{22}(s) \right] w(s) \quad (2.22)$$

La motivación para las terminologías de *inferior* y *superior* (*lower* and *upper*) *LFTs* se realiza basándose en el hecho que dentro de la LFT inferior el modelo correspondiente al controlador $K(s)$ se encuentra en la parte inferior con respecto a la ubicación de la planta controlada $M(s)$ y en el modelo de la LFT superior el modelo de incertidumbre está ubicado en la parte superior respecto a $N(s)$.

Las LFTs son frecuentemente empleadas en la literatura de control para análisis y diseño [11] y [14], y fueron introducidas por *Doyle* en 1984. Dadas las matrices para los modelos de incertidumbre $\Delta(s)$ y controlador $K(s)$ quedando definidas las LFTs por (2.18) [11].

La siguiente sección muestra las ideas más importantes dentro del llamado *Control de Modelo Interno* (*IMC*).

2.3.2 Control de Modelo Interno (IMC)

Antes de presentar las ideas dentro del marco de Control de Modelo Interno, es necesario exponer conceptos que son fundamentales para el entendimiento de los elementos que intervienen dentro de este enfoque.

Considerando la Figura 2.15, cuya configuración representa un sistema con retroalimentación; donde $M(s)$ es la planta generalizada [8], con dos conjuntos de entradas $w(s)$ que considera las entradas exógenas incluyendo perturbaciones y $u(s) = y^K(s)$ que representa las entradas de control. Además, $M(s)$ tiene dos conjuntos de salidas, las medibles $u^K(s)$ y las salidas regulables $\phi(s)$. Uno de los principales problemas de control es el establecer estabilidad y desempeño en lazo cerrado (*closed loop*); ésto es diseñar un controlador $K(s)$ tal que el sistema en lazo cerrado sea estable bajo un valor especificado para el error de la señal $\phi(s)$, es decir, que el sistema sea estable bajo una condición de desempeño.

Teniendo la descripción del sistema $G(s)$ en ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.23)$$

decimos que el par (A, B) es *estabilizable* si existe una retroalimentación de estado $u(t) = Kx(t)$ tal que el sistema es estable, *i.e.*, $A + BK$ es estable [14]. A la matriz K que logra que el sistema sea estabilizable se le llama controlador estabilizante.

Podemos agregar, además, que un sistema es *internamente estable* [11] si ninguno de sus componentes contiene

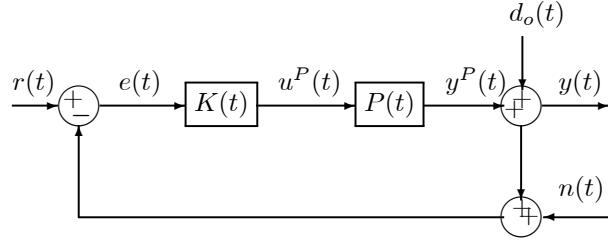


Figura 2.17: Diagrama a bloques de un sistema retroalimentado

modos escondidos inestables [11], cualquier estabilidad en los componentes del sistema debe de estar contenida dentro de su comportamiento entrada-salida; y la introducción de señales externas acotadas en cualquier lugar en el sistema dará como resultado señales de salida acotadas en cualquier lugar del sistema.

La estabilidad interna es un requerimiento básico para una práctica retroalimentación del sistema [14]. Lo anterior se debe a que todos los sistemas interconectados pueden estar inevitablemente sujetos a condiciones iniciales y errores distintos a cero, en la práctica ésto no puede ser tolerado, si el sistema no es internamente estable, ya que los errores ubicados en algunas ocasiones generarán señales no acotadas en otras locaciones del sistema en lazo cerrado.

En el esquema de control de la figura 2.17, $K(s)$ ó $K(t)$ es un controlador estabilizante $m \times p$, que garantiza estabilidad interna, donde $y^P(t)$ y $u^P(t)$, son la entrada y salida de la planta nominal $P(s)$ ó $P(t)$ de tamaño $p \times m$, $r(t)$ es la entrada de referencia, $d_o(t)$ y $n(t)$ son las perturbaciones externas, $y(t)$ es la señal regulada, y $e(t)$ es la señal de error. El análisis de las funciones de transferencia de lazo cerrado llamadas *función de sensibilidad* $S_o(s)$, y *función de sensibilidad complementaria* $T_o(s)$ [11][14], ayuda a diseñar la acción de control para obtener desempeño o estabilidad aún bajo los efectos de las perturbaciones y de las incertidumbres. La función de sensibilidad $S_o(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado de $r(t)$ o $d_o(t)$ a $e(t)$, mientras $T_o(s)$ es la función de lazo cerrado de $r(t)$ a $y(t)$, *i.e.*,

$$\begin{aligned} S_o(s) &= (I_d + L_o(s))^{-1} \\ T_o(s) &= S_o(s) L_o(s) \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $L_o(s) = P(s)K(s)$ es la función de transferencia de lazo abierto e I_d es la matriz identidad. Existe un compromiso entre ellas, dado por,

$$S(s) + T(s) = I_d(s) \quad (2.25)$$

El diagrama mostrado en la Figura 2.17 se puede representar en una configuración general equivalente a la Figura 2.15 para obtener la planta generalizada $T_{\phi w}(s)$,

$$\phi(s) = T_{\phi w}(s)w(s)$$

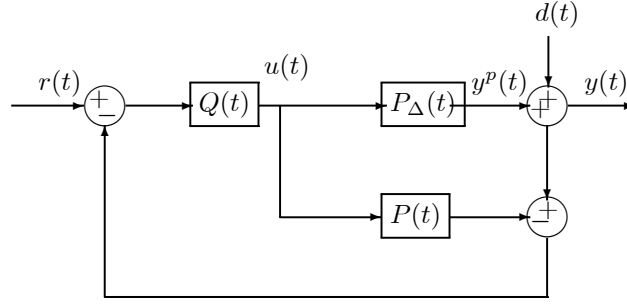


Figura 2.18: Estructura del Modelo de Control Interno (IMC)

donde las entradas y salidas son $w(s)$ y $\phi(s)$, respectivamente, ésto es,

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ u^P(t) \\ y(t) \end{bmatrix}; \quad w(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d_o(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

y

$$T_{\phi w}(s) := \begin{bmatrix} S_o(s) & -S_o(s) & -S_o(s) \\ K(s)S_o(s) & -K(s)S_o(s) & -K(s)S_o(s) \\ T_o(s) & S_o(s) & -T_o(s) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Podemos ver que las funciones de sensibilidad $S_o(s)$ ó $T_o(s)$ aparecen en todas las relaciones entrada salida dentro de $T_{\phi w}(s)$. Es importante saber que $T_{\phi w}(s)$ puede ser expresada en términos del *parámetro* $Q(s)$ [12] dentro del enfoque de Control de Modelo Interno (*IMC*), ver Figura 2.18. La parametrización, se conoce como *parametrización- $Q(s)$* o *parametrización YBK* [13] [12] de todos los controladores estabilizantes para una planta estable. Para una planta estable $P(s)$, el esquema con retroalimentación negativa de las Figuras 2.17 ó 2.18 es internamente estable [11] sí y sólo sí, el parámetro $Q(s)$ [12],

$$Q(s) := K(s)S_o(s) \quad (2.28)$$

es cualquier *matriz de función de transferencia estable*. Resolviendo (2.28) con respecto al controlador $K(s)$, la parametrización de *todos los controladores estabilizantes para la planta estable $P(s)$* está dada por,

$$\begin{aligned} K(s) &= [I_d - Q(s)P(s)]^{-1}Q(s) \\ &= Q(s)[I_d - P(s)Q(s)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

De (2.28), la función de transferencia $S_o(s)$ dada en (2.24) [12] es,

$$S_o(s) = I_d - P(s)Q(s) \quad (2.30)$$

donde

$$\det [I_d - P(s)Q(s)] \neq 0, Q(s) \text{ estable} \quad (2.31)$$

y mientras que de (2.25) y (2.30),

$$T_o(s) = P(s)Q(s) \quad (2.32)$$

De lo anterior, es posible apreciar que si, $P(s)$ y $Q(s)$ son estables, entonces $S_o(s)$ y $T_o(s)$ son estables y por consecuencia $T_{\phi w}(s)$ es estable, seleccionando $K(s)$ estable.

El esquema de Control de Modelo Interno (IMC), es un procedimiento de diseño, establecido por *Morari y Zafriou* en 1989 [11]; el cual ha sido probado exitosamente en diversas aplicaciones. Este enfoque es útil ya que esencialmente produce un controlador desacoplado. La idea principal detrás de la estructura del IMC es que el “controlador” $Q(s)$ puede ser diseñado en modo de lazo abierto dado que la señal de retro-alimentación sólo contiene información acerca de la diferencia entre la salida actual y la salida predicha por el modelo [11].

Los conceptos que se han repasado en las secciones anteriores son de gran importancia para justificar y entender como se obtuvieron las principales aportaciones de este trabajo; cuya finalidad principal es establecer un vínculo entre las técnicas de control robusto y las empleadas para la obtención de modelos en bond graph. Más que lo dicho anteriormente, es resaltar el gran potencial del que se puede hacer uso en las técnicas propias de bond graph no únicamente en la obtención de modelos a los cuales es necesario aplicar una acción de control sino también en el propio diseño de los controladores, encargados de realizar la acción de control; ésto nos dará un modelo donde el sentido físico del mismo siempre esta presente, lo que hace más sencillo su uso en la práctica.

Los siguientes dos capítulos muestran las principales propuestas de este trabajo.

Capítulo 3

Estructuras de Unión para las LFTs

3.1 Introducción

La existencia de las técnicas de bond graph como una fuerte herramienta de modelado; hace pensar en la posibilidad de hacer uso de ella para el diseño de controladores o para establecer ciertos criterios de control, que ya se encuentran bien establecidos dentro de las técnicas de control estándar, dentro de un entorno gráfico como lo es el modelado en bond graph.

Debido a que el modelado en bond graph nos permite tener una visión completa de los componentes o elementos que conforman los modelos; además de mostrar de forma clara la conexión entre ellos y su ubicación dentro del modelo, consideramos que la liga entre las técnicas de control estándar o encontrar la equivalencia de las mismas en bond graph, es de gran ayuda para las técnicas de control por las facilidades brindadas por las técnicas de bond graph dentro del entorno físico de los modelos. En este capítulo se propone una relación entre control robusto y las técnicas de bond graph a través de las Transformaciones Lineales Fraccionales y la Estructura de unión.

En el caso del control robusto donde se consideran sistemas con elementos inciertos; ya sea por incertidumbre de parámetros o consideraciones hechas durante la elaboración de los modelos (dinámicas no modeladas), es de gran ayuda emplear bond graph, tanto como herramienta de diseño como de análisis.

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en el marco de referencia de las Transformaciones Lineales Fraccionales (LFT, Linear Fractional Transformation) [14], se muestran las estructuras de unión equivalentes entrada/salida a las LFTs. En la primera parte de este trabajo se realiza un breve recordatorio de las ideas principales dentro del enfoque de LFTs. Por lo tanto, tomaremos en consideración lo dicho anteriormente en referencia al marco de las LFTs.

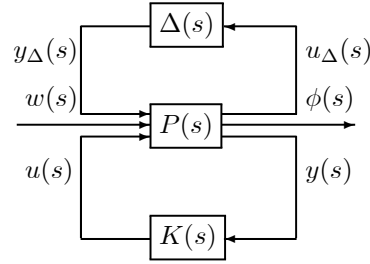


Figura 3.1: Representación estándar de la planta con incertidumbre bajo retroalimentación de control.

3.2 Transformaciones Lineales Fraccionales

El significado físico de una LFT [14] en la ciencia del control, como se dijo anteriormente en el Capítulo 2, subsección 2.3.1, es una relación entrada/salida; entre entradas externas al sistema $w(s)$ y la señal regulada $\phi(s)$, vector compuesto por todas las señales que se requieren para caracterizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

La función de transferencia de $w(s)$ a $\phi(s)$ puede considerarse como una representación “no exacta” de la planta conocida bajo una retroalimentación de control, ya que el diagrama completo de la denominada LFT incluye un modelo de las incertidumbres presentes en el sistema, como lo muestra la Figura 3.1.

Muchos problemas de control pueden ser formulados dentro del marco de referencia de las LFTs; este enfoque nos da la oportunidad de realizar un estudio de la planta considerando únicamente su conexión con el modelo de la incertidumbre, de igual forma al considerar solamente las conexiones con el controlador podemos hacer un diseño del mismo. Existen diagramas específicos para los casos mencionados anteriormente, en los cuales se considera sólo el modelo de la incertidumbre o el modelo del controlador, el primero es la llamada LFT superior y el diagrama que considera únicamente al controlador y la planta conocida es la LFT inferior; las Figuras 2.15 y 2.16 del capítulo anterior muestran las configuraciones correspondientes a cada una de las LFTs mencionadas.

Las funciones de transferencia de las LFTs superior e inferior están dadas por las ecuaciones (2.18) a (2.20), del capítulo de antecedentes.

Considerando las descripciones de entradas y salidas de los diagramas para las LFTs, hechas en el capítulo anterior, todas las conexiones existentes dentro de las LFTs pueden relacionarse al dominio físico a través de la estructura de unión S [5], bajo las consideraciones que se dan en la sección de Estructuras de unión para LFT Superior e Inferior

La siguiente sección presenta un procedimiento en el cual se llega a la obtención de estructuras de unión equivalentes entrada/salida a las LFT superior e inferior.

3.3 Estructuras de unión para LFT Superior e Inferior

Se considera que cada uno de los bloques dentro del diagrama de las LFTs posee una representación equivalente entrada/salida a una estructura de unión, y que cada estructura de unión acepta causalidad integral predefinida sin

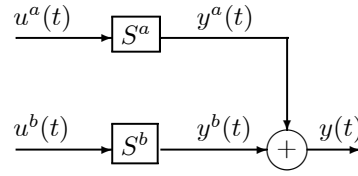


Figura 3.2: Conexión de una unión suma

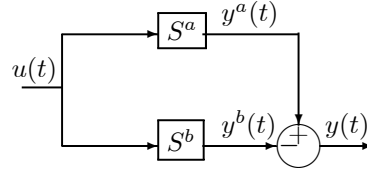


Figura 3.3: Conexión paralelo

elementos que permanezcan en causalidad derivativa. Con un modelo en bond graph en forma estándar [5], los bond graphs pueden ser clasificados como se muestra en la figura 2.14 del capítulo anterior, donde cada uno de los campos fuera de la estructura de unión, que como sabemos está compuesta principalmente de uniones 0 y 1, y los módulos n y r , de transformadores TF y giradores GY , respectivamente; fueron descritos en las subsecciones 2.2.1 y 2.2.2 del Capítulo de Antecedentes.

Las relaciones para la estructura de unión S [5] están dadas por, las ecuaciones (2.13) a (2.15) del Capítulo anterior, repetidas aquí por facilidad de lectura,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde S se encuentra particionada de la siguiente manera, de acuerdo con las dimensiones de los vectores de entrada y salida, respectivamente,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

con sus relaciones para los campos de almacenamiento y disipativos dadas por,

$$\begin{aligned} z(t) &= Fx(t) \\ D_{out}(t) &= LD_{in}(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Las Figuras 3.2 y 3.3, muestran las conexiones de una unión suma y paralelo [18] que se realizan con bonds activos [3], [5] y [15].

Presentamos las estructuras de unión equivalentes entrada/salida para estas dos configuraciones ya que estas nos ayudan a obtener las estructuras de unión que representan a las LFTs.

Bajo la suposición de que todas S^a y S^b en las Figuras 3.2 y 3.3 tienen la partición de bloques dada por (3.2), satisfacen las propiedades P1 y P2 para la estructura de unión y que cada una de las estructuras no tiene efecto de carga una sobre la otra. Entonces una estructura de unión equivalente S^Y para las conexiones mostradas en las Figuras 3.2 y 3.3 es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^Y(t) \\ D_{in}^Y(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S^Y \begin{bmatrix} z^Y(t) \\ D_{out}^Y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Considerando el hecho de que no existen efectos de carga entre las estructuras de unión equivalentes, la estructura de unión equivalente (3.4), conserva la partición en bloques de (3.2), y las propiedades P1 y P2 de la estructura de unión. La estructura de unión obtenida se puede considerar como un sistema aumentado, y los vectores de estado equivalentes para las dos conexiones se componen de los vectores de estado de cada una de las estructuras de unión S^a y S^b .

Para la conexión mostrada en la Figura 3.2, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}^Y(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^a(t) \\ \dot{x}^b(t) \end{bmatrix}, & D_{in}^Y(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^a(t) \\ D_{in}^b(t) \end{bmatrix}, & y(t) &= y^a(t) + y^b(t) \\ z^Y(t) &= \begin{bmatrix} z^a(t) \\ z^b(t) \end{bmatrix}, & D_{out}^Y(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^a(t) \\ D_{out}^b(t) \end{bmatrix}, & u(t) &= \begin{bmatrix} u^a(t) \\ u^b(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

y los elementos que componen la estructura de unión equivalente son:

$$\begin{aligned} S_{11}^Y &= \text{diag}\{S_{11}^a, S_{11}^b\}; & S_{12}^Y &= \text{diag}\{S_{12}^a, S_{12}^b\}; & S_{13}^Y &= \text{diag}\{S_{13}^a, S_{13}^b\} \\ S_{21}^Y &= \text{diag}\{S_{21}^a, S_{21}^b\}; & S_{22}^Y &= \text{diag}\{S_{22}^a, S_{22}^b\}; & S_{23}^Y &= \text{diag}\{S_{23}^a, S_{23}^b\} \\ S_{31}^Y &= [S_{31}^a \quad S_{31}^b]; & S_{32}^Y &= [S_{32}^a \quad S_{32}^b]; & S_{33}^Y &= [S_{33}^a \quad S_{33}^b] \end{aligned} \quad (3.6)$$

De igual modo, para la conexión en la Figura 3.3, tenemos, que los vectores de las relaciones de almacenamiento y disipación son iguales a (3.5), exceptuando los vectores de entrada y salida de la estructura de unión equivalente,

$$\begin{aligned} y(t) &= y^a(t) - y^b(t) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} u^a(t) \\ u^b(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

y,

$$\begin{aligned}
S_{11}^Y &= \text{diag}\{S_{11}^a, S_{11}^b\}; & S_{12}^Y &= \text{diag}\{S_{12}^a, S_{12}^b\}; & S_{13}^Y &= \begin{bmatrix} S_{13}^a \\ S_{13}^b \end{bmatrix} \\
S_{21}^Y &= \text{diag}\{S_{21}^a, S_{21}^b\}; & S_{22}^Y &= \text{diag}\{S_{22}^a, S_{22}^b\}; & S_{23}^Y &= \begin{bmatrix} S_{23}^a \\ S_{23}^b \end{bmatrix} \\
S_{31}^Y &= [S_{31}^a & -S_{31}^b]; & S_{32}^Y &= [S_{32}^a & -S_{32}^b]; & S_{33}^Y &= S_{33}^a - S_{33}^b
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Es importante hacer notar que la diferencia de los elementos para las estructuras de unión equivalentes a las operaciones de suma y resta presentadas en las Figuras 3.2 y 3.3, a las cuales llamaremos S^A y S^S , respectivamente; radica en la forma en que se encuentran conectadas las estructuras S^a y S^b , lo que hace distintos los elementos de las estructuras de unión equivalentes S^A y S^S .

Despues de revisar el planteamiento anterior, tomamos en consideración que las incertidumbres manejadas dentro del modelo de las LFTs, cuyas estructuras de unión equivalentes entrada/salida obtendremos, son incertidumbres no estructuradas; como dinámicas no modeladas, las cuales están asociadas con todos los modelos.

Con el propósito de obtener la LFT superior e inferior, recordamos que estas estructuras de unión son relaciones entrada/salida, es decir, tienen una función de transferencia. Primero, se consideran las operaciones algebraicas involucradas dentro de las ecuaciones (2.19) que describen la LFT inferior y dentro de las ecuaciones (2.20) que representan la LFT superior.

Considerando que las estructuras de unión para cada elemento de las matrices $M(s)$ y $N(s)$, están disponibles, y que estas poseen las relaciones dadas por (3.1) y la partición de (3.2); además de cumplir con las propiedades P1 y P2 de la estructura de unión, empleamos las operaciones de Suma y Paralelo [18] mostradas en (3.5) a (3.8) para obtener S^A y S^S , respectivamente, y así encontrar las estructuras de unión equivalentes entrada/salida de la LFT superior e inferior.

En base a las consideraciones previas la siguiente sección muestra el procedimiento mediante el cual se obtuvo las estructuras de unión para las LFTs.

3.3.1 LFT inferior (Lower LFT) y LFT superior (Upper LFT)

La Figura 3.4 muestra las conexiones existentes entre las estructuras de unión equivalentes entrada/salida a cada uno de los elementos que componen la matriz $M(s)$ de la LFT inferior, asumiendo que las conexiones no poseen efecto de carga y por lo tanto se pueden representar con un bond activo, empleamos la operación mostrada en la conexión suma en la Figura 3.2, representada por la estructura de unión S^A , para obtener una estructura de unión que sea equivalente entrada/salida a las conexiones mostradas en la Figura 3.4. Análogamente, se obtiene la estructura de unión equivalente entrada/salida a $N(s)$ de la LFT superior, basandose en la Figura 3.5. Primero se obtienen las estructuras de unión equivalentes a la conexión entre las estructuras de unión S^{M11} y S^{M12} denominada S^{L1} , y a

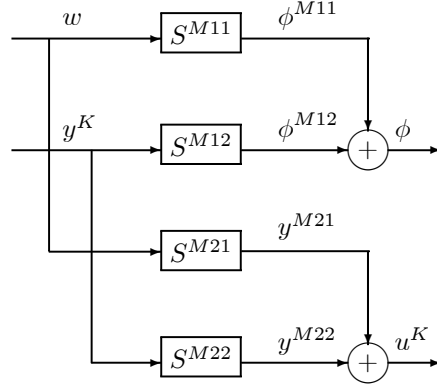


Figura 3.4: Conexión general para los elementos dentro de la matriz $M(s)$ representadas por estructuras de unión.

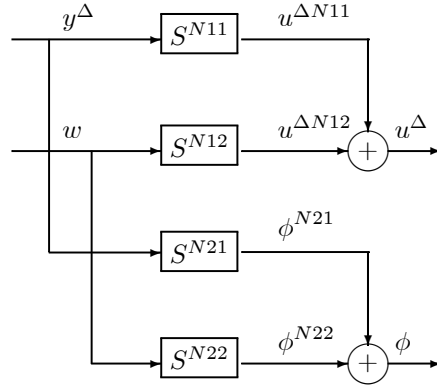


Figura 3.5: Conexión general para los elementos dentro de la matriz $N(s)$ representadas por estructuras de unión.

la conexión entre las estructuras de unión S^{M21} y S^{M22} denominada S^{L2} ; los vectores de las estructuras resultantes quedan definidos como sigue,

$$\dot{x}^{Li}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}^{Mi1}(t) \\ \dot{x}^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; \quad D_{in}^{Li}(t) = \begin{bmatrix} D_{in}^{Mi1}(t) \\ D_{in}^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} y^{L1}(t) &= y^{M11}(t) + y^{M12}(t) = \phi(t) \\ y^{L2}(t) &= y^{M21}(t) + y^{M22}(t) = u^K(t) \end{aligned} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

$$z^{Li}(t) = \begin{bmatrix} z^{Mi1}(t) \\ z^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; \quad D_{out}^{Li}(t) = \begin{bmatrix} D_{out}^{Mi1}(t) \\ D_{out}^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; \quad u^{Li}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ y^K(t) \end{bmatrix}$$

siendo los elementos dentro de las estructuras de unión:

$$\begin{aligned} S_{11}^{Li} &= \text{diag}\{S_{11}^{Mi1}, S_{11}^{Mi2}\}; & S_{12}^{Li} &= \text{diag}\{S_{12}^{Mi1}, S_{12}^{Mi2}\}; & S_{13}^{Li} &= \text{diag}\{S_{13}^{Mi1}, S_{13}^{Mi2}\} \\ S_{21}^{Li} &= \text{diag}\{S_{21}^{Mi1}, S_{21}^{Mi2}\}; & S_{22}^{Li} &= \text{diag}\{S_{22}^{Mi1}, S_{22}^{Mi2}\}; & S_{23}^{Li} &= \text{diag}\{S_{23}^{Mi1}, S_{23}^{Mi2}\} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.10) \\ S_{31}^{Li} &= \begin{bmatrix} S_{31}^{Mi1} & S_{31}^{Mi2} \end{bmatrix}; & S_{32}^{Li} &= \begin{bmatrix} S_{32}^{Mi1} & S_{32}^{Mi2} \end{bmatrix}; & S_{33}^{Li} &= \begin{bmatrix} S_{33}^{Mi1} & S_{33}^{Mi2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Reemplazando M por N y L por U en (3.9) y (3.10) se obtienen los vectores y elementos para la Figura 3.5.

Despues de obtener las estructuras de unión que representan de manera general las matrices $M(s)$ y $N(s)$, las estructuras de unión que son equivalentes entrada/salida a las funciones de transferencia (18) del capítulo anterior, para la LFT inferior (*Lower LFT*) y LFT superior (*Upper LFT*), incluyendo las conexiones dentro de los diagramas mostrados en las Figura 7.3 y 7.4, son presentadas en,

Lema 1. *Considerando el sistema de la Figura 7.3 y 7.4, los superíndices $M11$, $M12$, $M21$ y $M22$, y $N11$, $N12$, $N21$ y $N22$ indican los elementos correspondientes para las matrices $M(s)$, (2.19), y $N(s)$, (2.20). Suponiendo que las estructuras de unión $S^{Li}, i = 1,2$; están disponibles, que las estructuras de unión están definidas por (3.1), siguen la partición de bloques de (3.2), satisfacen las propiedades P1 y P2 de la estructura de unión, y que cada elemento no tiene efecto de carga sobre los otros elementos. Dadas las representaciones en bond graph del controlador y de la incertidumbre, y teniendo las estructuras de unión,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^K(t) \\ D_{in}^K(t) \\ y^K(t) \end{bmatrix} = S^K \begin{bmatrix} z^K(t) \\ D_{out}^K(t) \\ u^K(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^\Delta(t) \\ D_{in}^\Delta(t) \\ y^\Delta(t) \end{bmatrix} = S^\Delta \begin{bmatrix} z^\Delta(t) \\ D_{out}^\Delta(t) \\ u^\Delta(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

respectivamente, con sus respectivas relaciones para los campos de almacenamiento y disipativo dadas por (3.3).

Entonces, una estructura de unión equivalente entrada/salida para la LFT inferior es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^L(t) \\ D_{in}^L(t) \\ y^L(t) \end{bmatrix} = S^L \begin{bmatrix} z^L(t) \\ D_{out}^L(t) \\ u^L(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

y S^L conserva la partición de (3.2), siendo,

$$\dot{x}^L(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}^{L1}(t) \\ \dot{x}^{L2}(t) \\ \dot{x}^K(t) \end{bmatrix}, \quad D_{in}^L(t) = \begin{bmatrix} D_{in}^{L1}(t) \\ D_{in}^{L2}(t) \\ D_{in}^K(t) \end{bmatrix}, \quad y^L(t) = \phi(t) \quad (3.14)$$

$$z^L(t) = \begin{bmatrix} z^{L1}(t) \\ z^{L2}(t) \\ z^K(t) \end{bmatrix}, \quad D_{out}^L(t) = \begin{bmatrix} D_{out}^{L1}(t) \\ D_{out}^{L2}(t) \\ D_{out}^K(t) \end{bmatrix}, \quad u^L(t) = w(t)$$

donde los vectores están definidos por (3.9), siendo los elementos dentro de las estructuras de unión dados por (3.10).

Los elementos para la estructura de unión S^L en (3.13) son,

$$\begin{aligned}
 S_{1j}^L &= \begin{bmatrix} S_{1j}^{L1} & \begin{bmatrix} 0 \\ J_{11}^M S_{3j}^{L2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ S_{13}^{M12} M^L S_{3j}^K \end{bmatrix} \\ 0 & S_{1j}^{L2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_{12}^M S_{3j}^{L2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_{13}^{M22} M^L S_{3j}^K \end{bmatrix} \\ 0 & S_{13}^K M S_{3j}^{L2} & S_{1j}^K + S_{13}^K M S_{33}^{M22} S_{3j}^K \end{bmatrix}; j = 1, 2. \\
 S_{2j}^L &= \begin{bmatrix} S_{2j}^{L1} & \begin{bmatrix} 0 \\ J_{21}^M S_{3j}^{L2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ S_{23}^{M12} M^L S_{3j}^K \end{bmatrix} \\ 0 & S_{2j}^{L2} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_{22}^M S_{3j}^{L2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ S_{23}^{M22} M^L S_{3j}^K \end{bmatrix} \\ 0 & S_{23}^K M S_{3j}^{L2} & S_{2j}^K + S_{23}^K M S_{33}^{M22} S_{3j}^K \end{bmatrix}; j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$S_{3j}^L = [S_{3j}^{L1} \quad J_{31}^M S_{3j}^{L2} \quad S_{33}^{M12} M^L S_{3j}^K]; j = 1, 2.$$

$$S_{i3}^L = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{i3}^{M11} \\ J_{i1}^M S_{33}^{M21} \end{bmatrix} \\ S_{i3}^{M21} \\ \begin{bmatrix} J_{i2}^M S_{33}^{M21} \\ S_{i3}^K M S_{33}^{M21} \end{bmatrix} \end{bmatrix}; i = 1, 2.$$

$$S_{33}^L = [S_{33}^{M11} + J_{31}^M S_{33}^{M21}]$$

donde,

$$M = [I_d - S_{33}^{M22} S_{33}^K]^{-1}, \quad M^L = I_d + S_{33}^K M S_{33}^{M22}, \quad J_{il}^M = S_{i3}^{M12} S_{33}^K M, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ y } l = 1, 2 \tag{3.16}$$

También, una estructura de unión equivalente para la LFT superior es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^U(t) \\ D_{in}^U(t) \\ y^U(t) \end{bmatrix} = S^U \begin{bmatrix} z^U(t) \\ D_{out}^U(t) \\ u^U(t) \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

donde S^U tiene la partición de bloques dada por (3.2), con:

$$\begin{aligned} \dot{x}^U(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^\Delta(t) \\ \dot{x}^{U1}(t) \\ \dot{x}^{U2}(t) \end{bmatrix}, & D_{in}^U(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^\Delta(t) \\ D_{in}^{U1}(t) \\ D_{in}^{U2}(t) \end{bmatrix}, & y^U(t) &= \phi(t) \\ z^U(t) &= \begin{bmatrix} z^\Delta(t) \\ z^{U1}(t) \\ z^{U2}(t) \end{bmatrix}, & D_{out}^U(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^\Delta(t) \\ D_{out}^{U1}(t) \\ D_{out}^{U2}(t) \end{bmatrix}, & u^U(t) &= w(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde los vectores están definidos por,

$$\begin{aligned} \dot{x}^{Ui}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^{Ni1}(t) \\ \dot{x}^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & D_{in}^{Ui}(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^{Ni1}(t) \\ D_{in}^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & y^{U1}(t) &= y^{N11}(t) + y^{N12}(t) = u^\Delta(t) \\ & & & & y^{U2}(t) &= y^{N21}(t) + y^{N22}(t) = \phi(t) \\ z^{Ui}(t) &= \begin{bmatrix} z^{Ni1}(t) \\ z^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & D_{out}^{Ui}(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^{Ni1}(t) \\ D_{out}^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & u^{Ui}(t) &= \begin{bmatrix} y^\Delta(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \end{aligned}, \quad i = 1, 2 \quad (3.19)$$

Los elementos dentro de las estructuras son:

$$\begin{aligned} S_{11}^{Ui} &= \text{diag}\{S_{11}^{Ni1}, S_{11}^{Ni2}\}; & S_{12}^{Ui} &= \text{diag}\{S_{12}^{Ni1}, S_{12}^{Ni2}\}; & S_{13}^{Ui} &= \text{diag}\{S_{13}^{Ni1}, S_{13}^{Ni2}\} \\ S_{21}^{Ui} &= \text{diag}\{S_{21}^{Ni1}, S_{21}^{Ni2}\}; & S_{22}^{Ui} &= \text{diag}\{S_{22}^{Ni1}, S_{22}^{Ni2}\}; & S_{23}^{Ui} &= \text{diag}\{S_{23}^{Ni1}, S_{23}^{Ni2}\}, \quad i = 1, 2. \\ S_{31}^{Ui} &= \begin{bmatrix} S_{31}^{Ni1} & S_{31}^{Ni2} \end{bmatrix}; & S_{32}^{Ui} &= \begin{bmatrix} S_{32}^{Ni1} & S_{32}^{Ni2} \end{bmatrix}; & S_{33}^{Ui} &= \begin{bmatrix} S_{33}^{Ni1} & S_{33}^{Ni2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Los elementos para la estructura de unión S^U en (3.17) son,

$$\begin{aligned}
S_{1j}^U &= \begin{bmatrix} S_{1j}^\Delta + S_{13}^\Delta N S_{33}^{N11} S_{3j}^\Delta & S_{13}^\Delta N S_{3j}^{U1} & 0 \\ \left[\begin{array}{c} S_{13}^{N11} N^U S_{3j}^\Delta \\ 0 \end{array} \right] & S_{1j}^{U1} + \left[\begin{array}{c} J_{11}^N S_{3j}^{U1} \\ 0 \end{array} \right] & 0 \\ \left[\begin{array}{c} S_{13}^{N21} N^U S_{3j}^\Delta \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} J_{12}^N S_{3j}^{U1} \\ 0 \end{array} \right] & S_{1j}^{U2} \end{bmatrix}; j = 1, 2. \\
S_{2j}^U &= \begin{bmatrix} S_{2j}^\Delta + S_{23}^\Delta N S_{33}^{N11} S_{3j}^\Delta & S_{23}^\Delta N S_{3j}^\Delta & 0 \\ \left[\begin{array}{c} S_{23}^{N11} N^U S_{3j}^\Delta \\ 0 \end{array} \right] & S_{2j}^{U1} + \left[\begin{array}{c} J_{21}^N S_{3j}^{U1} \\ 0 \end{array} \right] & 0 \\ \left[\begin{array}{c} S_{23}^{N21} N^U S_{3j}^\Delta \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} J_{22}^N S_{3j}^{U1} \\ 0 \end{array} \right] & S_{2j}^{U2} \end{bmatrix}; j = 1, 2. \\
S_{3j}^U &= [S_{33}^{N21} N^U S_{3j}^\Delta \quad J_{32}^N S_{3j}^{U1} \quad S_{3j}^{U2}]; j = 1, 2. \\
S_{i3}^U &= \begin{bmatrix} S_{i3}^\Delta N S_{33}^{N12} \\ \left[\begin{array}{c} J_{i1}^N S_{33}^{N12} \\ S_{i3}^{N12} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} J_{i2}^N S_{33}^{N12} \\ S_{i3}^{N22} \end{array} \right] \end{bmatrix}; i = 1, 2. \\
S_{33}^U &= [S_{33}^{N22} + J_{32}^N S_{33}^{N12}]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde

$$N = [I_d - S_{33}^{N11} S_{33}^\Delta]^{-1}, \quad N^U = [I_d + S_{33}^\Delta N S_{33}^{N11}], \quad J_{ik}^N = S_{i3}^{Nk1} S_{33}^\Delta N, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ y } k = 1, 2. \tag{3.22}$$

Prueba. Considerando la estructura de unión equivalente para la LFT inferior de la Figura 3.1. El objetivo de la prueba es obtener una estructura la cual es equivalente a la relación entrada/salida para la LFT inferior, *i.e.*, la relación entre $w(t)$ y $\phi(t)$. Dado que las estructuras de unión S^{M11} , S^{M12} , S^{M21} y S^{M22} están disponibles, que cada sistema no tiene efecto de carga sobre otro sistema y sigue las conexiones mostradas en la Figura 3.2, entonces, con $u^A(t) = w(t)$, y $u^B(t) = u(t)$, tenemos de (3.4) una estructura de unión equivalente S^{L1} dada por (3.9) y (3.10) la cual incluye los dos elementos dentro del primer renglón de la matriz $M(s)$. También, tomando en cuenta que los elementos en el segundo renglón de la matriz $M(s)$ tienen la misma conexión de la Figura 3.2 aplicando los resultados de (3.4) a S^{M21} y S^{M22} , tenemos una estructura de unión equivalente S^{L2} dada por (3.9) y (3.10).

Entonces,

$$\begin{bmatrix} y^{L1}(t) \\ y^{L2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ u^K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{31}^{L1} z^{L1}(t) \\ S_{31}^{L2} z^{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{32}^{L1} D_{out}^{L1}(t) \\ S_{32}^{L2} D_{out}^{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{33}^{M11} w(t) + S_{33}^{M12} y^K(t) \\ S_{33}^{M21} w(t) + S_{33}^{M22} y^K(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$y^K(t) = S_{31}^K z^K(t) + S_{32}^K D_{out}^K(t) + S_{33}^K u^K(t)$$

Para el diagrama de la LFT inferior mostrado en la Figura 2.1, considerando que la matriz $M(s)$ tiene como entrada la salida del controlador, $y^K(t)$, y la entrada de $K(s)$ es la salida de $M(s)$, realizando operaciones algebraicas, obtenemos la siguiente relación de $u^K(t)$, como función de $w(t)$, substituyendo $y^K(t)$ dentro de esta,

$$u^K(t) = M[S_{31}^{L2} z^{L2}(t) + S_{32}^{L2} D_{out}^{L2}(t) + S_{33}^{M22} (S_{31}^K z^K(t) + S_{32}^K D_{out}^K(t)) + S_{33}^{M21} w(t)] \quad (3.24)$$

donde M está dada en (3.16), de la misma forma, substituyendo (3.24), en $y^K(t)$, de (3.16) y (3.23), tenemos una relación para $y^K(t)$ como función de $w(t)$,

$$y^K(t) = S_{33}^K M S_{31}^{L2} z^{L2}(t) + M^L S_{31}^K z^K(t) + S_{33}^K M S_{32}^{L2} D_{out}^{L2}(t) + M^L S_{32}^K D_{out}^K(t) + S_{33}^K M S_{33}^{M21} w(t) \quad (3.25)$$

entonces, substituyendo (3.25) dentro del primer renglón de (3.23), tenemos el resultado para $\phi(t)$, el cual corresponde a los elementos dentro del tercer renglón de (3.15).

Se realiza un procedimiento análogo para obtener las relaciones de $\dot{x}^L(t)$ en (3.13), de (3.9) y (3.10), esto es, para $\dot{x}^{L1}(t)$,

$$\dot{x}^{L1}(t) = S_{11}^{L1} z^{L1}(t) + S_{12}^{L1} D_{out}^{L1}(t) + \begin{bmatrix} S_{13}^{M11} w(t) \\ S_{13}^{M12} y^K(t) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

y usando (3.25), de (3.26), tenemos una relación para $\dot{x}^{L1}(t)$ como función de $w(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}^{L1}(t) = & S_{11}^{L1} z^{L1}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_{11}^M S_{31}^{L2} \end{bmatrix} z^{L2}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_{13}^{M12} M^L S_{31}^K \end{bmatrix} z^K(t) + \\ & + S_{12}^{L1} D_{out}^{L1} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_{11}^M S_{32}^{L2} \end{bmatrix} D_{out}^{L2}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_{13}^{M12} M^L S_{32}^K \end{bmatrix} D_{out}^K(t) + \begin{bmatrix} S_{13}^{M11} \\ J_{11}^M S_{33}^{M21} \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si siguiendo el procedimiento previo, obtenemos las relaciones para $\dot{x}^{L2}(t)$ y $D_{in}^L(t)$, en (3.13), substituyendo (3.25) y $\dot{x}^K(t)$ y $D_{in}^K(t)$ en (3.11), substituyendo en (3.24).

La estructura de unión para la LFT superior (3.17), fue obtenida análogamente a la estructura de unión para la

LFT inferior, ésto es, considerando que el vector de salida en S^U para (3.17), es,

$$\begin{bmatrix} y^{U1}(t) \\ y^{U2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^\Delta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{31}^{U1} z^{U1}(t) \\ S_{31}^{U2} z^{U2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{32}^{U1} D_{out}^{U1}(t) \\ S_{32}^{U2} D_{out}^{U2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{33}^{N11} y^\Delta(t) + S_{33}^{N12} w(t) \\ S_{33}^{N21} y^\Delta(t) + S_{33}^{N22} w(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$y^\Delta(t) = S_{31}^\Delta z^\Delta(t) + S_{32}^\Delta D_{out}^\Delta(t) + S_{33}^\Delta u^\Delta(t)$$

y sustituyendo $y^\Delta(t)$ dentro de $u^\Delta(t)$, para obtener una relación para $u^\Delta(t)$ como función de $w(t)$, tenemos,

$$u^\Delta(t) = N[S_{31}^{U1} z^{U1}(t) + S_{32}^{U1} D_{out}^{U1}(t) + S_{33}^{N11} (S_{31}^\Delta z^\Delta(t) + S_{32}^\Delta D_{out}^\Delta(t)) + S_{33}^{N12} w(t)] \quad (3.29)$$

donde N está definida en (3.22).

De (3.29) y (3.22), obtenemos una relación para $y^\Delta(t)$ como función de $w(t)$; para realizar las operaciones análogas para obtener los vectores correspondientes de la estructura de unión para la LFT superior (3.17), del Lema 1, ésto es,

$$y^\Delta(t) = N^U S_{31}^\Delta z^\Delta(t) + S_{33}^\Delta N S_{31}^{U1} z^{U1}(t) + N^U S_{32}^\Delta D_{out}^\Delta(t) + S_{33}^\Delta N S_{32}^{U1} D_{out}^{U1} + S_{33}^\Delta N S_{33}^{N12} w(t) \quad (3.30)$$

y N^U dado por (3.22). ■

Es importante notar que las propiedades P1 y P2 de la estructura de unión se pierden en las estructuras de unión propuestas en el Lema 1, debido a la conexión de retroalimentación y al uso de bonds activos. Además, algunos estados y/o elementos dentro de los vectores de las estructuras de unión equivalentes pueden ser cero, ésto dependiendo de la conexión de la incertidumbre [11]. Entonces, las estructuras de unión de las LFT inferior y superior pueden tener una forma reducida.

Un procedimiento intermedio para obtener las estructuras de unión equivalentes para la LFT inferior y superior arroja las estructuras de unión para las matrices $M(s)$ y $N(s)$ (2.19) y(2.20); presentamos dichas estructuras de unión dentro del *Apendice A*.

En la siguiente sección presentamos una forma reducida de la estructura de unión para la LFT Superior obtenida en el Lema 1, analizando una de las configuraciones que se pueden presentar en la conexión del modelo de incertidumbre, la incertidumbre aditiva; y mostramos la estructura de unión equivalente.

3.3.2 Casos especiales

Las incertidumbres no estructuradas se emplean frecuentemente para representar de una manera sencilla el modelo de la incertidumbre. Resultados experimentales muestran que la magnitud de la incertidumbre crece con la frecuencia y puede tomar cualquier fase, éste modelo de círculo es no estructurado. Se ha definido la incertidumbre como una matriz completa Δ , generalmente de las mismas dimensiones que la planta [11]. Sin embargo, las incertidumbres se representan de distintas formas en cuanto a la forma en que afectan a la planta; pueden ser *Incertidumbres*

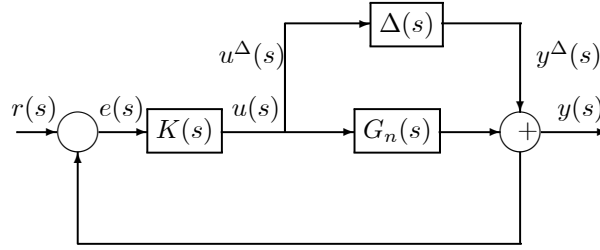


Figura 3.6: Diagrama de Bloques con Incertidumbre Aditiva.

aditivas (additive uncertainty) [11], incertidumbres multiplicativas a la entrada (multiplicative input uncertainty) [11] o incertidumbres multiplicativas a la salida (multiplicative output uncertainty) [11] de la planta que son las formas más comunes de estas incertidumbres.

El siguiente corolario muestra uno de los principales resultados de esta sección, una forma reducida de la estructura de unión equivalente entrada/salida a la LFT superior S^U . Considerando el diagrama a bloques con incertidumbre aditiva, de la misma manera es fácil obtener la forma reducida para otro tipo de incertidumbre. En el Apéndice B se da la representación de la LFT superior de la planta incierta en el diagrama a bloques para la incertidumbre aditiva mostrando en la Figura 2.15 del Capítulo de Antecedentes.

Corolario 1. Considere el diagrama a bloques mostrado en la Figura 3.6. Bajo las hipótesis y definiciones del Lema 1; y sean las estructuras de unión de la Matriz $N(s)$, bajo la forma de la LFT superior S^U considerando incertidumbre aditiva, dadas por,

$$S^{N11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S^{N12} = S^{N21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S^{N22} = \begin{bmatrix} S_{11}^{N22} & S_{12}^{N22} & S_{13}^{N22} \\ S_{21}^{N22} & S_{22}^{N22} & S_{23}^{N22} \\ S_{31}^{N22} & S_{32}^{N22} & S_{33}^{N22} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Así, la estructura de unión para la LFT superior bajo incertidumbre aditiva es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{Ua}(t) \\ D_{in}^{Ua}(t) \\ y^{Ua}(t) \end{bmatrix} = S^{Ua} \begin{bmatrix} z^{Ua}(t) \\ D_{out}^{Ua}(t) \\ u^{Ua}(t) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

sus vectores correspondientes son,

$$\begin{aligned} \dot{x}^{Ua}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^\Delta(t) \\ \dot{x}^{N22}(t) \end{bmatrix}, & D_{in}^{Ua}(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^\Delta(t) \\ D_{in}^{N22}(t) \end{bmatrix}, & y^{Ua}(t) &= \phi(t) \\ z^{Ua}(t) &= \begin{bmatrix} z^\Delta(t) \\ z^{N22}(t) \end{bmatrix}, & D_{out}^{Ua}(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^\Delta(t) \\ D_{out}^{N22}(t) \end{bmatrix}, & u^{Ua}(t) &= w(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

y los elementos para la estructura, preservan la partición de (3.2), siendo,

$$\begin{aligned}
S_{11}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{11}^\Delta & 0 \\ 0 & S_{11}^{N22} \end{bmatrix}; S_{12}^{Ua} = \begin{bmatrix} S_{12}^\Delta & 0 \\ 0 & S_{12}^{N22} \end{bmatrix}; S_{13}^{Ua} = \begin{bmatrix} S_{13}^\Delta \\ S_{13}^{N22} \end{bmatrix}; \\
S_{21}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{21}^\Delta & 0 \\ 0 & S_{21}^{N22} \end{bmatrix}; S_{22}^{Ua} = \begin{bmatrix} S_{22}^\Delta & 0 \\ 0 & S_{22}^{N22} \end{bmatrix}; S_{23}^{Ua} = \begin{bmatrix} S_{23}^\Delta \\ S_{23}^{N22} \end{bmatrix}; \\
S_{31}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{31}^\Delta & S_{31}^{N22} \end{bmatrix}; S_{32}^{Ua} = \begin{bmatrix} S_{32}^\Delta & S_{32}^{N22} \end{bmatrix}; S_{33}^{Ua} = S_{33}^\Delta + S_{33}^{N22}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Prueba: La prueba surge directamente del Lema 1, considerando los elementos que son cero dentro de las estructuras de unión S^{N11} , S^{N12} y S^{N21} ; para la conexión de incertidumbre aditiva, de acuerdo a lo dicho en el *Apéndice B* para (3.22), tenemos:

$$\begin{aligned}
S^{N11} = 0 &\implies N = I_d, \quad N^U = I_d, \\
J_{11}^N = 0, \quad J_{12}^N = 0, \quad J_{21}^N = 0, \quad J_{22}^N = 0, \quad J_{32}^N = S_{33}^\Delta.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

siendo los elementos en la estructura para 3.21,

$$\begin{aligned}
S_{11}^{U1} &= 0_{2 \times 2}; & S_{12}^{U1} &= 0_{2 \times 2}; & S_{13}^{U1} &= 0_{2 \times 2} \\
S_{21}^{U1} &= 0_{2 \times 2}; & S_{22}^{U1} &= 0_{2 \times 2}; & S_{23}^{U1} &= 0_{2 \times 2} \\
S_{31}^{U1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; & S_{32}^{U1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; & S_{33}^{U1} &= \begin{bmatrix} 0 & I_d \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

y

$$\begin{aligned}
S_{11}^{U2} &= \text{diag}\{0, S_{11}^{N22}\}; & S_{12}^{U2} &= \text{diag}\{0, S_{12}^{N22}\}; & S_{13}^{U2} &= \text{diag}\{0, S_{13}^{N22}\} \\
S_{21}^{U2} &= \text{diag}\{0, S_{21}^{N22}\}; & S_{22}^{U2} &= \text{diag}\{0, S_{22}^{N22}\}; & S_{23}^{U2} &= \text{diag}\{0, S_{23}^{N22}\} \\
S_{31}^{U2} &= \begin{bmatrix} 0 & S_{31}^{N22} \end{bmatrix}; & S_{32}^{U2} &= \begin{bmatrix} 0 & S_{32}^{N22} \end{bmatrix}; & S_{33}^{U2} &= \begin{bmatrix} I_d & S_{33}^{N22} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

de manera que se pueden eliminar los renglones y columnas que son ceros dentro de la estructura de unión S^{Ua} resultando 3.34; esto significa que las entradas no afectan la dinámica del sistema para los renglones que son eliminados.

■

En la siguiente sección se realiza un ejemplo con los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

3.4 Ejemplo: Motor de Corriente Directa

Considerando el modelo en bond graph mostrado en la Figura 3.7, el cual corresponde al motor de corriente directa de la Figura 3.8, teniendo el modelo de la planta incierta y considerando que el efecto de la inductancia de armadura L_a sobre el sistema es despreciable, tenemos el modelo en bond graph de la planta nominal de la misma Figura 3.7,

$$\begin{array}{ccc}
 R : R_a & & R : b_o \\
 S_e : v \xrightarrow{1} \downarrow \frac{2'}{1} \xrightarrow{4} \downarrow \frac{7'}{1} \\
 \downarrow \frac{3'}{1} & GY \xrightarrow{5} & TF \xrightarrow{6} \\
 I : L_a & & I : J_o
 \end{array}$$

Figura 3.7: Bond Graph del Motor de CD.

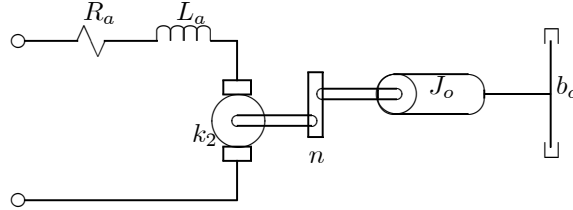


Figura 3.8: Diagrama del Motor de CD.

removiendo el bond 3 asociado a L_a (ver Figura 3.9 y considerando que la causalidad de la resistencia de armadura cambia hacia el otro extremo del bond).

En la Figura 3.8, R_a es la resistencia de armadura, n y k_2 representan los coeficientes del transformador y girador, respectivamente, J_o es el momento de inercia, y b_o es el coeficiente de fricción. Tomando el flujo en el elemento $R : b_o$ como salida, la estructura de unión de la planta nominal está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^n(t) \\ D_{in}^n(t) \\ y^n(t) \end{bmatrix} = S^n \begin{bmatrix} z^n(t) \\ D_{out}^n(t) \\ u^n(t) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^n(t) = e_8^n; \quad D_{in}^n(t) &= \begin{bmatrix} e_2^n \\ f_7^n \end{bmatrix}; \quad y^n(t) = f_7^n \\
 z^n(t) = f_8^n; \quad D_{out}^n(t) &= \begin{bmatrix} f_2^n \\ e_7^n \end{bmatrix}; \quad u^n(t) = e_1
 \end{aligned} \quad (3.39)$$

y,

$$S^n = \begin{bmatrix} 0 & k_2/n & -1 & 0 \\ -k_2/n & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

De la figura 3.5, obtenemos los elementos de la matriz $N(s)$ como en (2.20), aplicando el **Corolario 1**, recordando

Figura 3.9: $I : L_a$ bond correspondiente a inductancia de armadura (incertidumbre).

que $\phi(t) = y(t)$ y $w(t) = u(t)$

$$\begin{bmatrix} u^\Delta(s) \\ \phi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_{nom}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^\Delta(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Un caso usual es la estructura de unión equivalente a la LFT superior con incertidumbre aditiva, del **Corolario 1**, tenemos para (3.32), con $S^{N11} = 0$ y,

$$S^{N12} = S^{N21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Es importante notar que para S^{N12} , $u^{N12}(t) = u(t)$ y para S^{N21} , $u^{N21}(t) = w(t)$; finalmente, S^{N22} es equivalente a la estructura de unión S^n para la planta nominal (3.40). Así, de (3.34),

$$\begin{aligned} S_{11}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{11}^\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & S_{12}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{12}^\Delta & 0 & 0 \\ 0 & k_2/n & -1 \end{bmatrix}; & S_{13}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{13}^\Delta \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{21}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{21}^\Delta & 0 \\ 0 & -k_2/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & S_{22}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{22}^\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & S_{23}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{23}^\Delta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{31}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{31}^\Delta & 1 \end{bmatrix}; & S_{32}^{Ua} &= \begin{bmatrix} S_{32}^\Delta & 0 & 0 \end{bmatrix}; & S_{33}^{Ua} &= S_{33}^\Delta \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde se puede ver claramente que los elementos de la estructura de unión de la incertidumbre son de dimension 1×1 .

Ahora bien, proponemos que la estructura de unión de la incertidumbre sea la relación constitutiva del elemento L_a correspondiente a la inductancia de armadura,

$$e_3 = L_a f_3 \quad (3.44)$$

por lo que consideramos,

$$\begin{aligned} \dot{x}^\Delta(t) &= 0; & D_{in}^\Delta(t) &= [e_3]; & y^\Delta(t) &= f_3 \\ z^\Delta(t) &= 0; & D_{out}^\Delta(t) &= [f_3]; & u^\Delta(t) &= e_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

siendo

$$S^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Para los vectores (3.45) de la estructura de unión de la incertidumbre del ejemplo y (3.33) de la estructura de unión de la LFT superior con incertidumbre aditiva, respectivamente, tenemos las matrices de los campos de almacenamiento y disipativo, respectivamente.

$$\begin{aligned} F^\Delta &= \left[\frac{1}{L_a} \right] & L^\Delta &= [0] \\ F^{Ua} &= \text{diag} \left\{ F^\Delta, \frac{1}{J_0} \right\} & L^{Ua} &= \text{diag} \left\{ L^\Delta, \frac{1}{R_a}, b_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.4.1 Conclusiones

Los resultados muestran que las estructuras de unión propuestas para las LFTs son un puente entre el bond graph y el Control Robusto \mathcal{H}_∞ . Además, usando estas estructuras de unión el análisis es realizado con un sentido físico. Las estructuras de unión de las LFTs se simplifican significativamente para modelos de incertidumbre específicos y permiten obtener las dimensiones de la incertidumbre en el esquema de las LFTs en donde está “puesta fuera” la incertidumbre.

Capítulo 4

Estructuras de Union del Controlador

IMC

4.1 Introducción

Bajo la línea de la solución del problema de control robusto \mathcal{H}_∞ podemos analizar la estructura de unión de todos los controladores estabilizantes para una planta dada. Esto es importante por el hecho de que es fácil analizar todas las funciones de transferencia tales como las de sensibilidad $S(s)$ y sensibilidad complementaria $T(s)$, además de una forma más general la función de transferencia en lazo cerrado de las entradas externas al error (LFTs), y estas funciones de un sólo parámetro, el parámetro- $Q(s)$. Los resultados dentro de este enfoque son de gran importancia dentro de la teoría de retroalimentación, y su interés no está dedicado únicamente al diseño en control robusto \mathcal{H}_∞ .

En este capítulo presentamos otro resultado dentro del marco de referencia de control robusto; de acuerdo a lo descrito, haciendo la liga correspondiente con bond graph, visto anteriormente. Se establece la idea del diseño de controladores estabilizantes mediante criterios de estabilidad, controlabilidad y observabilidad estructural; basados en las propiedades estructurales de la estructura de unión. También, se obtienen las estructuras de unión equivalentes entrada/salida a las funciones de transferencia de las funciones de sensibilidad $S(s)$, sensibilidad complementaria $T(s)$ y del control estabilizante $K(s)$; todas en función del parámetro- $Q(s)$.

Se considera el diagrama general de control de la Figura 2.17 del capítulo 2, repetida aquí en la Figura 4.1 por facilidad de lectura, donde $K(s)$ es un controlador estabilizante $m \times p$, la planta nominal $P(s)$ de tamaño $p \times m$, $r(t)$ es la entrada de referencia, $d(t)$ y $n(t)$ son las perturbaciones externas, $y(t)$ es la señal regulada, y $e(t)$ es la señal de error. Recordemos que la función de sensibilidad $S_o(s)$; es la función de transferencia en lazo cerrado de $r(t)$ o $d(t)$ a $e(t)$, y la función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$ que es la función de lazo cerrado de $r(t)$ a $y(t)$, *i.e.*, $S_o(s) := (I_d + L_o(s))^{-1}$, $T_o(s) := S_o(s) L_o(s)$, donde $L_o(s) := P(s)K(s)$ es la función de transferencia de lazo

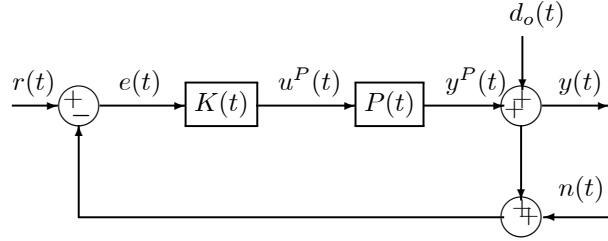


Figura 4.1: Diagrama de bloques de un sistema retroalimentado

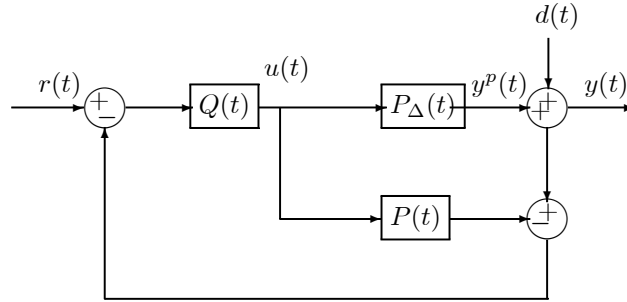


Figura 4.2: Estructura del Modelo de Control Interno (IMC)

abierto e I_d es la matriz identidad.

Ambas funciones, $S_o(s)$ y $T_o(s)$ se encuentran en las relaciones entrada/salida que componen la planta generalizada $T_{\phi w}(s)$ dada por la ecuación (25) del capítulo 2. De la parametrización YBK para plantas estables, podemos tener expresiones de la función sensibilidad y sensibilidad complementaria como función del parámetro- $Q(s)$, $S_o(s) = I_d - P(s)Q(s)$ y $T_o(s) = P(s)Q(s)$.

En las siguientes secciones se muestran los procedimientos y resultados obtenidos, es decir, las estructuras de unión equivalentes entrada/salida para las funciones sensibilidad, en el marco de referencia del Control de Modelo Interno descrito en el capítulo 2, sección 3.2, mostrado en la Figura (2.18) del capítulo 2 y repetido en la Figura 4.2 por facilidad de lectura.

El planteamiento de los procedimientos que se abordaron se basa principalmente en el concepto de bond activo, el mismo concepto empleado para la obtención de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, una de las razones principales para hacer uso de dicho concepto es la idea de explotar al máximo las propiedades brindadas por las propiedades de la estructura de unión y las propiedades estructurales de la misma.

Pensamos en las estructuras de unión equivalentes a las funciones sensibilidad ya que estas nos brindan facilidades para obtener buenos resultados en cuanto a estabilidad y desempeño robustos, manipulando la magnitud de la función de transferencia $L_o(s)$. Se pretenden explotar los criterios referentes al parámetro- $Q(s)$, que ya se encuentran bien establecidos dentro de las técnicas de control estándar.

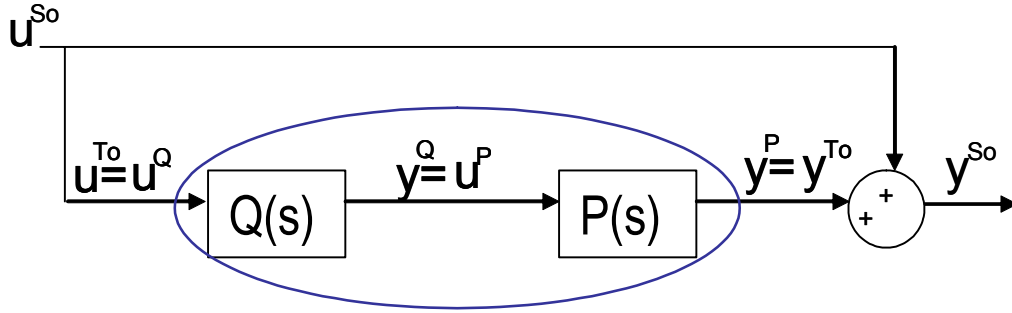


Figura 4.3: Diagrama de boques para obtener S_o y T_o .

4.2 Estructuras de unión para las funciones de sensibilidad en función del parámetro- $Q(s)$.

Despues de analizar los distintos esquemas en los cuales se pueden plantear las conexiones que representen tanto a las funciones de sensibilidad como al control estabilizante, se formularon los diagramas de bloques que muestran las operaciones existentes entre cada bloque que representa la estructura de unión equivalente entrada/salida a las funciones de transferencia de la planta $P(s)$ y al parámetro- $Q(s)$.

De la misma manera en que se realizó el procedimiento para obtener las estructuras de unión para las LFTs, proponemos emplear las estructuras de unión que resultan de la unión suma y paralelo [18].

En el diagrama de la Figura 4.3 se muestra el diagrama a bloques propuesto para representar tanto la función sensibilidad y sensibilidad complementaria, empleamos este diagrama para las dos funciones apoyados en la relación que existe entre ellas, $S(s) + T(s) = I_d(s)$.

Tomando en cuenta las implicaciones algebraicas dentro de las funciones de transferencia de las funciones de sensibilidad $S_o(s)$ y de sensibilidad complementaria $T_o(s)$, respectivamente, se proponen estructuras de unión equivalentes entrada/salida.

Lema 2. Considerando el sistema mostrado en la Figura 4.3. Suponiendo que cada elemento no tiene efecto de carga sobre los otros elementos y que las estructuras de unión para el parámetro $Q(s)$ de dimensión $m \times p$ y para la planta $P(s)$ de dimensión $p \times m$, están disponibles y son estables, sus estructuras de unión definidas por (3.1), tienen la partición a bloques de (3.2), satisfacen las propiedades P1 y P2, preservan las relaciones para los campos de almacenamiento, y disipativo en (3.3), y están dadas en(4.1) y (4.2);

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^P(t) \\ D_{in}^P(t) \\ y^P(t) \end{bmatrix} = S^P \begin{bmatrix} z^P(t) \\ D_{out}^P(t) \\ u^P(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^Q(t) \\ D_{in}^Q(t) \\ y^Q(t) \end{bmatrix} = S^Q \begin{bmatrix} z^Q(t) \\ D_{out}^Q(t) \\ u^Q(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Entonces, las estructuras de unión son equivalentes entrada/salida a $S_o(s)$ y $T_o(s)$, están definidas por S^{S_o} y S^{T_o} , y sus correspondientes vectores son:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{S_o}(t) = \dot{x}^{T_o}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^P(t) \\ \dot{x}^Q(t) \end{bmatrix}; u^{S_o}(t) = u^{T_o}(t) = u^Q(t); \\ z^{S_o}(t) = z^{T_o}(t) &= \begin{bmatrix} z^P(t) \\ z^Q(t) \end{bmatrix}; y^{S_o}(t) = u^{S_o}(t) - y^P(t); \\ D_{in}^{S_o}(t) = D_{in}^{T_o}(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^P(t) \\ D_{in}^Q(t) \end{bmatrix}; y^{T_o}(t) = y^P(t) \\ D_{out}^{S_o}(t) = D_{out}^{T_o}(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^P(t) \\ D_{out}^Q(t) \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $x^P(t) \in \mathfrak{R}^{\zeta \times 1}$, $z^P(t) \in \mathfrak{R}^{\zeta \times 1}$, $D_{in}^P(t) \in \mathfrak{R}^{\delta \times 1}$, $D_{out}^P(t) \in \mathfrak{R}^{\delta \times 1}$, $x^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\alpha \times 1}$, $z^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\alpha \times 1}$, $D_{in}^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\beta \times 1}$,

$D_{out}^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\beta \times 1}$, con sus elementos,

$$\begin{aligned}
 S_{11}^{S_o} = S_{11}^{T_o} &= \begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{13}^P S_{31}^Q \\ 0 & S_{11}^Q \end{bmatrix}; \\
 S_{12}^{S_o} = S_{12}^{T_o} &= \begin{bmatrix} S_{12}^P & S_{13}^P S_{32}^Q \\ 0 & S_{12}^Q \end{bmatrix}; \\
 S_{13}^{S_o} = S_{13}^{T_o} &= \begin{bmatrix} S_{13}^P S_{33}^Q \\ S_{13}^Q \end{bmatrix}; \\
 \\
 S_{21}^{S_o} = S_{21}^{T_o} &= \begin{bmatrix} S_{21}^P & S_{23}^P S_{31}^Q \\ 0 & S_{21}^Q \end{bmatrix}; \\
 S_{22}^{S_o} = S_{22}^{T_o} &= \begin{bmatrix} S_{22}^P & S_{23}^P S_{32}^Q \\ 0 & S_{22}^Q \end{bmatrix}; \\
 S_{23}^{S_o} = S_{23}^{T_o} &= \begin{bmatrix} S_{23}^P S_{33}^Q \\ S_{23}^Q \end{bmatrix}; \\
 \\
 S_{31}^{S_o} = -S_{31}^{T_o} &= \begin{bmatrix} -S_{31}^P & -S_{33}^P S_{31}^Q \end{bmatrix}; \\
 S_{32}^{S_o} = -S_{32}^{T_o} &= \begin{bmatrix} -S_{32}^P & -S_{33}^P S_{32}^Q \end{bmatrix}; \\
 S_{33}^{S_o} = I_d - S_{33}^P S_{33}^Q; & \quad S_{33}^{T_o} = S_{33}^P S_{33}^Q;
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Con las matrices correspondientes para los campos de almacenamiento y disipativo.

$$\begin{aligned}
 F^{S_o} = F^{T_o} &= \text{diag} \{ F^P, F^Q \}; \\
 L^{S_o} = L^{T_o} &= \text{diag} \{ L^P, L^Q \}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Prueba. Las estructuras de unión para la planta $P(s)$ y para el parametro- $Q(s)$ existen, puesto que satisfacen las propiedades P1 y P2. Cada subsistema no tiene efecto de carga en otro subsistema y están conectados como muestra la Figura 4.3, la cual es el diagrama a bloques de la función sensibilidad $S_o(s)$. A partir de la Figura 4.3,

$$\begin{aligned}
 u^{S_o}(t) &= u^{T_o}(t) = u^Q(t) \\
 y^Q(t) &= u^P(t) \\
 y^{S_o}(t) &= u^Q(t) - y^P(t) \\
 y^{T_o}(t) &= y^P(t)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

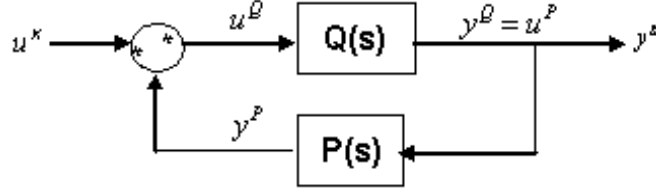


Figura 4.4: Diagrama a bloques para obtener el control $K(s)$.

con las igualdades previas (4.6), las respectivas salidas de las estructuras de unión de la planta $P(s)$ y de la función sensibilidad $S_o(s)$ en (4.1) y (4.2), son,

$$y^{T_o}(t) = S_{31}^P z^P(t) + S_{32}^P D_{out}^P(t) + S_{33}^P \left[S_{31}^Q z^Q(t) + S_{32}^Q D_{out}^Q(t) + S_{33}^Q u^{S_o}(t) \right] \quad (4.7)$$

$$y^{S_o}(t) = -S_{31}^P z^P(t) - S_{33}^P \left[S_{31}^Q z^Q(t) + S_{32}^Q D_{out}^Q(t) \right] - S_{32}^P D_{out}^P(t) + (I_d - S_{33}^P S_{33}^Q) u^{S_o}(t) \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.7) dentro de las relaciones de las estructuras de unión (4.1) y (4.2) preservando la partición de bloques de (3.1) y (3.2), se obtienen los resultados de las estructuras de unión equivalentes (4.3) y (4.4) para S^{S_o} y S^{T_o} . ■

Una idea importante que debemos tener en mente es que el análisis está basado en el concepto de bond activo y así las propiedades P1 y P2 no se preservan en las estructuras de unión $S_o(s)$ y $T_o(s)$. Sin embargo, en el enfoque de control es importante que las propiedades estructurales PS1, PS2 y PS3 sean preservadas, en una sección posterior de este capítulo proponemos criterios para la estructura de unión del parámetro- $Q(s)$ tal que las propiedades estructurales se cumplan.

En la siguiente sección damos un segundo lema del cual obtenemos la estructura de unión equivalente entrada/salida para el controlador estabilizante $K(s)$.

4.3 Estructura de unión para el controlador en función de el parámetro-

$Q(s)$.

Se considera que las estructuras de unión para la planta $P(s)$ y para el parámetro- $Q(s)$ en la Figura 4.4, están disponibles. Con la finalidad de obtener todos los controladores estabilizantes $K(s)$, (2.29), consideramos las estructuras de unión como relaciones entrada/salida. Primero, las operaciones algebraicas involucradas en la ecuación (2.29) son consideradas. Una estructura de unión equivalente entrada/salida a la función de transferencia (2.29) del controlador estabilizante, incluyendo las conexiones entre los elementos dentro del diagrama propuesto en la Figura 4.4, es presentada en el Lema 3,

Lema 3. *Considere el sistema de la Figura 4.4. Suponiendo que cada subsistema no tiene efecto de carga sobre los otros subsistemas y que las estructuras de unión del parámetro-Q (s) y para la planta P (s), están disponibles, estas estructuras están definidas por (3.1), siguen la partición en bloques de (3.2), satisfacen las propiedades P1 y P2 de la estructura de unión, y tienen las estructuras de unión (4.1) y (4.2), respectivamente, con sus relaciones de campos de almacenamiento y disipativo dados en (3.3). Entonces, una estructura de unión para el controlador estabilizante K (s) de dimensión $m \times p$ dado en (2.29) es:*

$$\begin{aligned} \dot{x}^K(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^P(t) \\ \dot{x}^Q(t) \end{bmatrix}; & D_{in}^K(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^P(t) \\ D_{in}^Q(t) \end{bmatrix}; \\ z^K(t) &= \begin{bmatrix} z^P(t) \\ z^Q(t) \end{bmatrix}; & D_{out}^K(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^P(t) \\ D_{out}^Q(t) \end{bmatrix}; \\ y^K(t) &= y^Q(t) = u^P(t); & u^K(t) &= e(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $x^P(t) \in \mathfrak{R}^{c \times 1}$, $z^P(t) \in \mathfrak{R}^{c \times 1}$, $D_{in}^P(t) \in \mathfrak{R}^{\delta \times 1}$, $D_{out}^P(t) \in \mathfrak{R}^{\delta \times 1}$, $x^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\alpha \times 1}$, $z^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\alpha \times 1}$, $D_{in}^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\beta \times 1}$, $D_{out}^Q(t) \in \mathfrak{R}^{\beta \times 1}$, y sus elementos son,

$$\begin{aligned} S_{11}^K &= \begin{bmatrix} S_{11}^P + S_{13}^P \Gamma S_{33}^Q S_{31}^P & S_{13}^P \Gamma S_{31}^Q \\ S_{13}^Q [I_d + S_{33}^P \Gamma S_{33}^Q] S_{31}^P & S_{11}^Q + S_{13}^Q S_{33}^P \Gamma S_{31}^Q \end{bmatrix}; \\ S_{12}^K &= \begin{bmatrix} S_{12}^P + S_{13}^P \Gamma S_{33}^Q S_{32}^P & S_{13}^P \Gamma S_{32}^Q \\ S_{13}^Q [I_d + S_{33}^P \Gamma S_{33}^Q] S_{32}^P & S_{12}^Q + S_{13}^Q S_{33}^P \Gamma S_{32}^Q \end{bmatrix}; \\ S_{13}^K &= \begin{bmatrix} S_{13}^P \Gamma S_{33}^Q \\ S_{13}^Q [I_d + S_{33}^P \Gamma S_{33}^Q] \end{bmatrix}; \\ S_{21}^K &= \begin{bmatrix} S_{21}^P + S_{23}^P \Gamma S_{33}^Q S_{31}^P & S_{23}^P \Gamma S_{31}^Q \\ S_{23}^Q [I_d + S_{33}^P \Gamma S_{33}^Q] S_{31}^P & S_{21}^Q + S_{23}^Q S_{33}^P \Gamma S_{31}^Q \end{bmatrix}; \\ S_{22}^K &= \begin{bmatrix} S_{22}^P + S_{23}^P \Gamma S_{33}^Q S_{32}^P & S_{23}^P \Gamma S_{32}^Q \\ S_{23}^Q [I_d + S_{33}^P \Gamma S_{33}^Q] S_{32}^P & S_{22}^Q + S_{23}^Q S_{33}^P \Gamma S_{32}^Q \end{bmatrix}; \\ S_{23}^K &= \begin{bmatrix} S_{23}^P \Gamma S_{33}^Q \\ S_{23}^Q [I_d + S_{33}^P \Gamma S_{33}^Q] \end{bmatrix}; \\ S_{31}^K &= \begin{bmatrix} \Gamma S_{33}^Q S_{31}^P & \Gamma S_{31}^Q \end{bmatrix}; \\ S_{32}^K &= \begin{bmatrix} \Gamma S_{33}^Q S_{32}^P & \Gamma S_{32}^Q \end{bmatrix}; \\ S_{33}^K &= \Gamma S_{33}^Q; \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde

$$\Gamma = (I_d - S_{33}^Q S_{33}^P)^{-1} \quad (4.11)$$

Y las relaciones de los campos de almacenamiento y disipativo de acuerdo con (3.2) y (3.3) son,

$$\begin{aligned} z^K(t) &= \text{diag} \{F^P, F^Q\} x^K(t); \\ D_{out}^K(t) &= \text{diag} \{L^P, L^Q\} D_{in}^K(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Considerando que además se satisfacen las propiedades estructurales PS2 para controlabilidad, con sus respectivas relaciones de los campos de almacenamiento y disipativo. Entonces, una condicion necesaria y suficiente para obtener controlabilidad estructural en lazo cerrado es que:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P & S_{13}^P S_{33}^Q \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

es de rango completo por renglones.

Prueba. Puesto que $P(s)$ es estable, la función de transferencia para todos los controladores estabilizantes $K(s)$ esta dada por (2.29), y su diagrama a bloques es mostrado en la Figura 4.4. También, las estructuras de unión existen para $Q(s)$, $P(s)$ y $K(s)$, dado que ellas satisfacen las propiedades P1 y P2. De la Figura 4.4,

$$\begin{aligned} u^P(t) &= y^Q(t) = y^K(t) \\ u^Q(t) &= u^K(t) + y^P(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dado que cada sistema no tiene efecto de carga sobre otro sistema y tienen la conexión mostrada en la Figura 4.4, entonces, de las igualdades de (4.14) y las respectivas salidas de las estructuras de unión para la planta $P(s)$ y el parámetro- $Q(s)$ en (4.1) y (4.2), respectivamente, tenemos,

$$\begin{aligned} y^K(t) &= \Gamma \left[S_{33}^Q (S_{31}^P z^P(t) + S_{32}^P D_{out}^P(t)) + S_{31}^Q z^Q(t) + \right. \\ &\quad \left. + S_{32}^Q D_{out}^Q(t) + S_{33}^Q u^K(t) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

y realizando la sustitución de (4.15) dentro de las respectivas relaciones de las estructuras de unión (4.1) y (4.2) preservando la partición de bloques de (3.1) y (3.2), se obtiene la estructura de unión S^K dada en, (4.9) y (4.10). La condición necesaria de estabilidad estructural del compensador se obtiene directamente de la propiedad PS1. ■

Las estructura de unión equivalentes obtenidas en esta sección pueden ser analizadas desde el punto de vista de control robusto empleando criterios de propiedades estructurales en bond graph, lo que hace sencillo el análisis de estabilidad en lazo cerrado, como se muestra en la siguiente sección.

4.4 Criterios basados en las propiedades de las estructuras de unión

La estabilidad de la función de transferencia de lazo cerrado está garantizada por el controlador estabilizante. Así, las filas de $\begin{bmatrix} S_{11}^{S_o} & S_{12}^{S_o} \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} S_{11}^{T_o} & S_{12}^{T_o} \end{bmatrix}$ son linealmente independientes, y la propiedad PS1 es preservada en lazo cerrado. Esto es de esperarse puesto que $P(s)$ y $Q(s)$ son estables, lo cual implica que,

$$\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{11}^Q & S_{12}^Q \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

sea de rango completo por filas en (4.4). Condiciones necesarias y suficientes para preservar las propiedades SP2 y SP3 en lazo cerrado, basados en una estructura de unión para el parámetro- $Q(s)$, son propuestas en,

Teorema 1. *Considere el sistema de la Figura 4.3. Suponiendo que el $m \times p$ parámetro- $Q(s)$ y para la $p \times m$ planta $P(s)$, están disponibles y son estables, sus estructuras de unión (4.2) y (4.1) están definidas por (3.1), siguen la partición de bloques de (3.2), satisfacen las propiedades P1 y P2 de la estructura de unión y las propiedades estructurales para controlabilidad y estabilidad PS2 y PS3, y que cada subsistema no tiene efecto de carga sobre los otros subsistemas. Entonces, una condición necesaria y suficiente para controlabilidad estructural en lazo cerrado es que:*

$$\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P & S_{13}^P S_{33}^Q \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

sea de rango completo por filas. Para observabilidad estructural en lazo cerrado es que:

1. Exista al menos un término diferente de cero en,

$$\begin{bmatrix} -S_{31}^P & -S_{32}^P & I_d - S_{33}^P S_{33}^Q \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

para S^{S_o} , y para S^{T_o} , en,

$$\begin{bmatrix} S_{31}^P & S_{32}^P & S_{33}^P S_{33}^Q \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

2. La matriz,

$$\begin{bmatrix} S_{11}^Q \\ S_{21}^Q \\ S_{33}^P S_{31}^Q \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

es de rango pleno por columnas. ■

Prueba. Considerando que S^P y S^Q satisfacen PS2, $\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P & S_{13}^P \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} S_{11}^Q & S_{12}^Q & S_{13}^Q \end{bmatrix}$ son de rango pleno por filas. También, por hipótesis si el rango de (4.17) es ς , entonces, su rango por columnas es ς ; lo cual implica que el rango de columna y fila de $\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P & S_{13}^P S_{33}^Q & M \end{bmatrix}$ es ς . Por tanto, la primera y segunda condición para controlabilidad

estructural en lazo cerrado se sigue aplicando PS2 a S^{T_o} del **Lema 2**. Entonces, $\left[\begin{array}{ccc} (S_{11}^{T_o})^T & (S_{21}^{T_o})^T & (S_{31}^{T_o})^T \end{array} \right]^T$ es de rango pleno por columnas dado que $P(s)$ y $Q(s)$ satisfacen PS3, ésto es, $\left[\begin{array}{ccc} (S_{11}^P)^T & (S_{21}^P)^T & (S_{31}^P)^T \end{array} \right]^T$ y $\left[\begin{array}{ccc} (S_{11}^Q)^T & (S_{21}^Q)^T & (S_{31}^Q)^T \end{array} \right]^T$ son de rango pleno por columnas.

Entonces, el resultado para observabilidad estructural en lazo cerrado se sigue análogamente de (4.4) aplicando PS3 a S^{T_o} y S^{S_o} . ■

Tenemos estabilidad en lazo cerrado, porque $P(s)$ y $Q(s)$ son estables. Además, note que $\left[\begin{array}{ccc} S_{11}^P & S_{12}^P & S_{13}^P \end{array} \right]$ y $\left[\begin{array}{ccc} S_{11}^Q & S_{12}^Q & S_{13}^Q \end{array} \right]$ son de rango pleno por renglones, lo cual es útil para verificar la estabilidad estructural del controlador. Así, estabilidad fuerte está garantizada si PS1 se cumple para $\left[\begin{array}{cc} S_{11}^K & S_{12}^K \end{array} \right]$ en la estructura de unión del controlador estabilizante.

Note que las condiciones del **Teorema 1** se simplifican si $S_{33}^Q = 0$. También, las condiciones del **Teorema 1** son satisfechas si proponemos una estructura de unión para S^Q ,

$$S^Q = \begin{bmatrix} S_{11}^Q & S_{12}^Q & 0 \\ S_{21}^Q & S_{22}^Q & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}^Q \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

en la cual no hay relación (no hay trayectoria causal [5]) de su entrada al vector de estado, de su entrada al campo disipativo, y la salida es sólo una función sólo de la entrada. Así, $Q(s) = S_{33}^Q$. Entonces, las dinámicas de $P(s)$ no son modificadas y aparecen dentro de $T_o(s)$ (ver). Además, un criterio para el parámetro Q es,

Proposición 1. *Al menos uno de los elementos $S_{13}^Q, S_{23}^Q, S_{31}^Q$, o S_{32}^Q es un elemento no cero.* ■

Para sistemas SISO, la estructura de unión del parámetro libre $Q(s)$, dada su realización en espacio de estados, se propone en,

Proposición 2. *Para plantas SISO de fase mínima estables, seleccionar,*

$$Q(s) := P^R(s) q(s) \quad (4.22)$$

donde $P^R(s)$ es la inversa a la derecha de $P(s)$, i.e., $P(s)P^R(s) = I$, y $q(s)$ tiene la siguiente dinámica en lazo cerrado,

$$q(s) := \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.23)$$

siendo n tal que $Q(s)$ es estrictamente propio. Dando el espacio de estados de la forma canónica $Q(s)$, con realización (A^Q, B^Q, C^Q, D^Q) , siendo $D^Q = 0$, y B^Q con elementos 1, -1 ó 0. Dado,

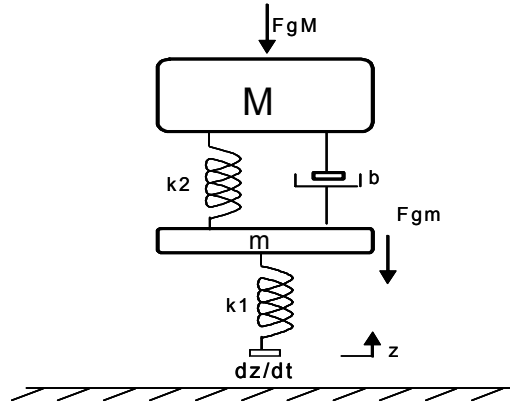


Figura 4.5: Sistema Mecánico

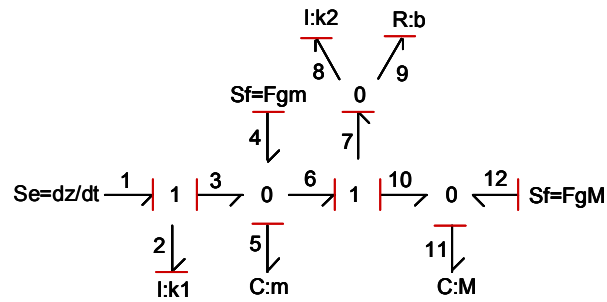


Figura 4.6: Bond graph para el sistema mecánico.

$$\begin{aligned}
 S_{11}^Q &= S_{22}^Q = S_{23}^Q = S_{32}^Q = S_{33}^Q = 0 \\
 S_{12}^Q &= -\left(S_{21}^Q\right)^T = I, \\
 S_{13}^Q &= B^Q; \quad S_{31}^Q = C^Q (F^Q)^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

y sus matrices para los campos de almacenamiento y disipativo son,

$$L^Q = -A^Q (F^Q)^{-1}; \quad F^Q = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\psi_1}, \dots, \frac{1}{\psi_n} \right\}
 \tag{4.25}$$

donde $\psi_i, i = 1, \dots, n$, son tal que los elementos de S_{31}^Q son 1, -1 ó 0. ■

4.5 EJEMPLO

Considere el bond graph del sistema de amortiguamiento mostrado en la figura 4.6. De la figura 4.5, obtenemos la estructura de unión para la planta $P(s)$, la cual está dada por (4.1), donde:

$$\begin{aligned} \dot{x}^P(t) &= \begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \\ e_8 \\ f_{11} \end{bmatrix}; & D_{in}^P(t) &= e_9; & y^P(t) &= f_9; \\ z^P(t) &= \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \end{bmatrix}; & D_{out}^P(t) &= f_9; & u^P(t) &= \begin{bmatrix} f_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

y los elementos correspondientes son,

$$\begin{aligned} S_{11}^P &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; & S_{12}^P &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \\ & & S_{13}^P &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \\ S_{21}^P &= -(S_{12}^P)^T; & S_{22}^P &= 0; & S_{23}^P &= 0; \\ S_{31}^P &= 0; & S_{32}^P &= 1; & S_{33}^P &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

y de acuerdo con (3.3),

$$F^P = \text{diag} \left\{ k_1, \frac{1}{m}, k_2, \frac{1}{M} \right\}; \quad L^P = b \quad (4.28)$$

Note que la no existencia de una combinación lineal entre renglones de $\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P \end{bmatrix}$, entonces, de la Propiedad SP1, $P(s)$ puede ser estable. Dado que las matrices del espacio de estados de una estructura de unión [5] son,

$$\begin{aligned} A &= (S_{11} + S_{12}MS_{21})F; \\ B &= S_{13} + S_{12}MS_{23}; \\ C &= (S_{31} + S_{32}MS_{21})F; \\ D &= S_{33} + S_{32}MS_{23}; \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $M = (I_d - LS_{22})^{-1}L$; y F y L son las matrices para los campos de almacenamiento y disipativo, el polinomio

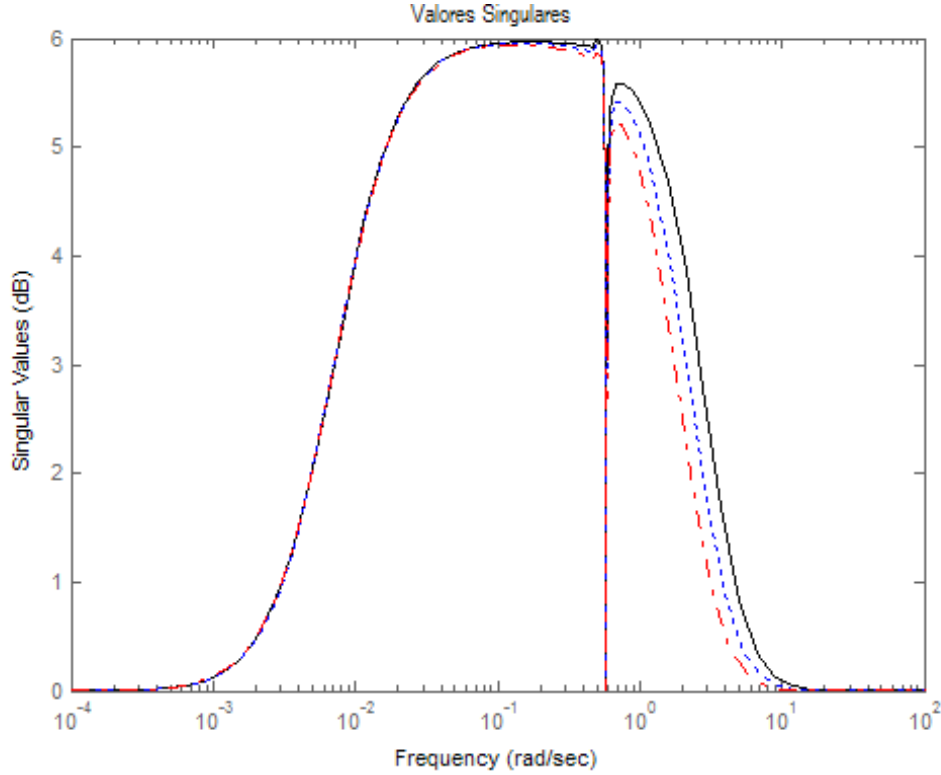


Figura 4.7: Valores Singulares de $\begin{bmatrix} 2T_o(s) & S_o(s) \end{bmatrix}^T$, para $\lambda = 0.4$, $\lambda = 0.5$, y $\lambda = 0.6$.

característico de $P(s)$ es:

$$k_1 k_2 b m M s^4 + k_1 k_2 \hat{m} s^3 + b(k_1 \hat{m} + k_2 M) s^2 + k_2 s + b = 0 \quad (4.30)$$

el cual del criterio Routh-Hurwitz es Hurwitz para todos los valores posibles de los parámetros, siendo $\hat{m} := m + M$.

Ahora bien, dado $k_1 = k_2 = M = b = 1$ y $m = 3$.

$$P(s) = \frac{-(s^2 + 1)s}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + s + 1} \quad (4.31)$$

Para seguir el procedimientos dados en [23], los ceros de $P(s)$ son perturbados a $-(s - \epsilon)^2 + 1)(s - \epsilon)$ donde ϵ es un pequeño parámetro de control. Y, $P(s)$ es factorizada como $P(s) = P_A(s) P_{MP}(s)$ donde $P_A(s)$ es una función "all pass" que incluye los ceros inestables de $P(s)$, y la planta de fase mínima $P_{MP}(s)$ es,

$$P(s) = \frac{-[(s + \epsilon)^2 + 1](s + \epsilon)}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + s + 1} \quad (4.32)$$

Entonces, para entradas escalón, la \mathcal{H}_2 $Q(s)$ óptima que minimize $\|S_0(s)\|_2$ es [23], $Q_{opt}(s) = P_{MP}^{-1}(s)$, la cual es

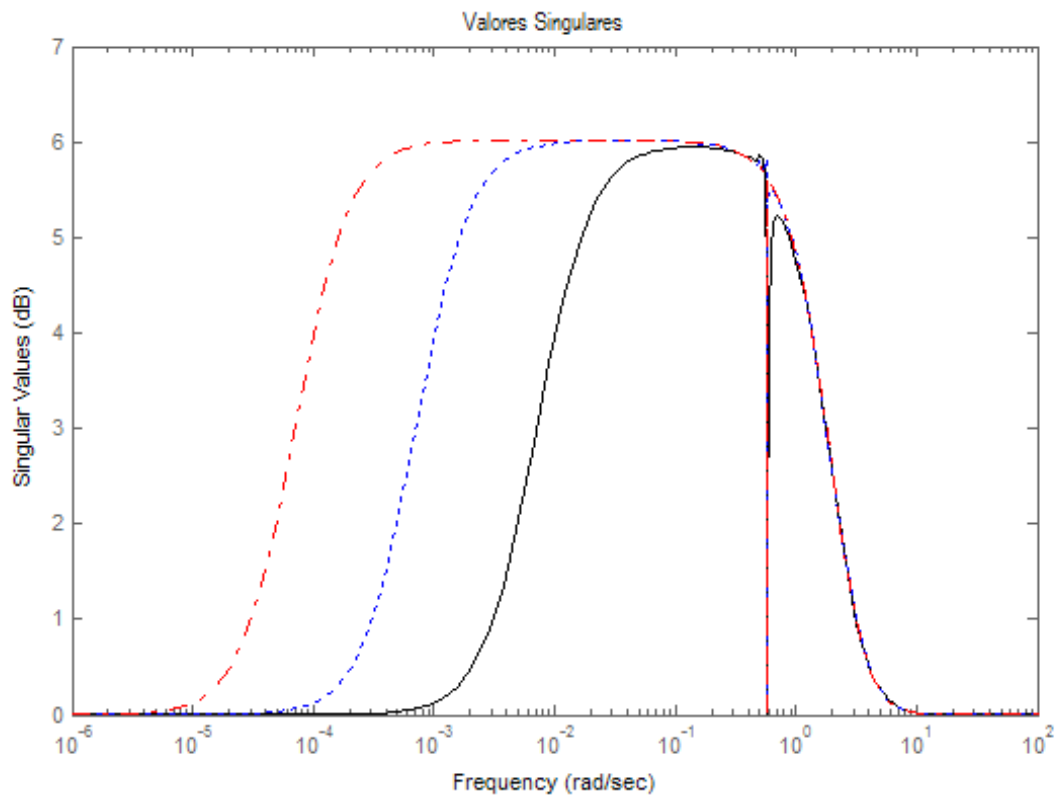


Figura 4.8: Valores singulares de $[2T_o(s) \ S_o(s)]^T$, para $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.001$, y $\epsilon = 0.0001$.

propia agragando un filtro pasa bajo, que es,

$$Q(s) = P_{MP}^{-1}(s) \frac{1}{(\lambda s + 1)^3} \quad (4.33)$$

donde λ es el sintonizador minimizando el criterio de sensibilidad mezclada \mathcal{H}_∞ , $\sigma \left(\begin{matrix} \rho T_o(s) & S_o(s) \\ \rho T_o(s) & S_o(s) \end{matrix}^T \right)$, siendo ρ un parámetro de peso tal que las incertidumbres $\|\Delta(s)\|_\infty \leq \rho$. Para $\rho = 2$, y para un ϵ fijo, como λ incrementa, el criterio de sensibilidad mezclada decrece sobre un ancho de banda de frecuencia, y para un λ fijo, el desempeño es mejorada en bajas frecuencias decreciendo ϵ , ver 4.8 y 4.7, Dado $\epsilon = 0.001$, y $\lambda = 0.6$, una estructura de unión para $Q(s)$ esta dada por la Proposición 2, donde,

$$\begin{aligned} F^Q &= \text{diag} \left[1, -4.62, 16.99, -52.52, 143.02, -355.5 \right]; \\ S_{13}^Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \\ S_{31}^Q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

La implementación de $Q(s)$ es realizada en la configuración del IMC de 4.2.

Las condiciones del *Teorema* 1, 4.18 y 4.19, son $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, respectivamente, las cuales claramente tienen un elemento no cero, y la condición 4.17 se cumple desde,

$$\text{rango} \begin{bmatrix} S_{11}^Q \\ S_{21}^Q \\ S_{33}^P S_{31}^Q \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 \\ -I_d \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \quad (4.35)$$

El sistema es estructuralmente controlable y observable en lazo cerrado. Más aún, desde $S_{33}^P = 0$, entonces $\Gamma = I_d$ de $m \times m$. Y, del *Lemma* 2,

$$\text{rango} \begin{bmatrix} S_{11}^K & S_{12}^K \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{13}^P S_{31}^Q & S_{12}^P & 0 \\ 0 & 0 & S_{13}^Q & I_d \end{bmatrix} = 10 \quad (4.36)$$

y, la condición necesaria para la estabilidad estructural del compensador está cumplida.

4.6 Conclusiones

Los resultados muestran que las estructuras de unión propuestas para el controlador estabilizante, la función sensibilidad y sensibilidad complementaria son un puente entre el bond graph y el control robusto \mathcal{H}_∞ . Usando estas estructuras de unión el análisis es realizado con un sentido físico. Los elementos de las estructuras de unión propues-

tas dan información acerca de las propiedades estructurales, haciendo sencillo revisar las condiciones suficientes de inestabilidad, y las condiciones necesaria y suficiente de controlabilidad y observabilidad en lazo cerrado. Los criterios de diseño para el compensador están dados y su implementación está realizada en la configuración del Control de Modelo Interno.

Capítulo 5

Aplicación a la Máquina Síncrona

5.1 Introducción

La máquina síncrona juega un papel de gran importancia dentro del manejo de la energía eléctrica en general, ya que puede tener una aplicación de motor o generador; el término síncrono indica que la máquina gira a la velocidad de sincronismo [19], es decir, no existe deslizamiento entre el campo magnético giratorio y la velocidad del rotor. Ambas aplicaciones se construyen generalmente con un estator polifásico sin salientes, un rotor con salientes y una sola fase excitada por medio de corriente continua [19]. Las fases o devanados del estator tienen como finalidad principal producir un campo magnético giratorio en el entrehierro, mientras que en el rotor se establece un campo constante sobre la estructura del rotor, debido a la fuente de corriente continua. El polo norte del rotor es atraído por el polo sur del estator y de manera similar, el polo sur del rotor por el polo norte del estator; se puede decir que los campos del rotor y estator se encuentran entonces “ligados” magnéticamente, provocando que el rotor gire sincrónicamente con el campo del estator, es decir, si el estator gira a velocidad constante arrastra al rotor obligándolo a girar a la misma velocidad [19].

El análisis de los modelos de la máquina síncrona se ha desarrollado desde hace varias décadas y debido a esto se tiene una gran variedad de modelos y análisis de este sistema electromecánico. En este capítulo tomamos un modelo de la máquina síncrona en bond graph [15] para aplicar los resultados del capítulo anterior y realizar un estudio dentro del marco de referencia del Control de Modelo Interno.

5.2 Análisis del Modelo de la Máquina Síncrona

El modelo de la máquina síncrona en [15], considera según [20] y [21], que dentro del desarrollo de las ecuaciones de la máquina síncrona es necesario satisfacer las siguientes suposiciones:

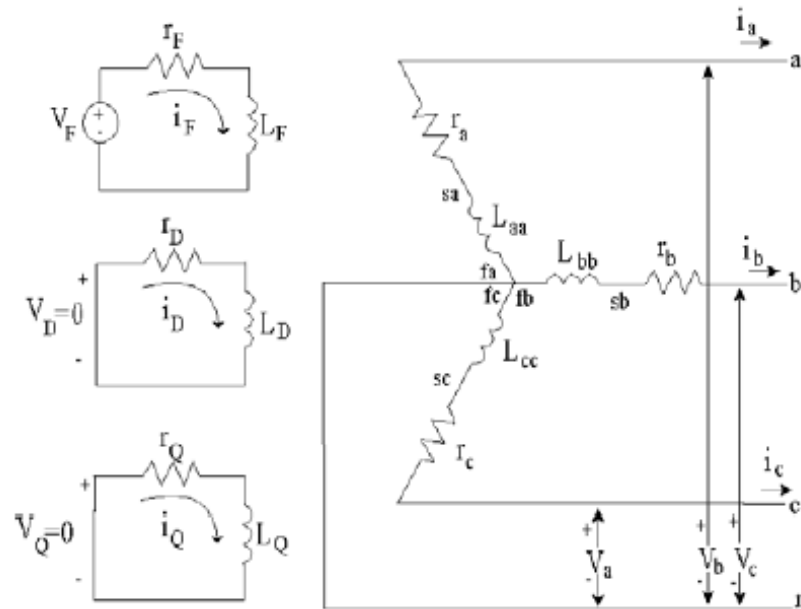


Figura 5.1: Diagrama esquemático de la máquina síncrona.

- S1.- Los devanados del estator están sinusoidalmente distribuidos.
- S2.- Las ranuras del estator no causan variación apreciable de las inductancias del rotor con la posición del rotor.
- S3.- La máquina es de polos salientes en el rotor.
- S4.- El análisis es de una máquina de dos polos.
- S5.- La histéresis magnética es despreciable.
- S6.- Los efectos de saturación magnética son despreciables.

El diagrama mostrado en la Figura 5.1 corresponde a los circuitos del estator y del rotor de la máquina síncrona.

Donde los subíndices,

- a, b, c : indican los devanados de fase del estator.
- F : denota el devanado de campo.
- D : denota el circuito de amortiguamiento en el eje- d .
- Q : denota el circuito de amortiguamiento en el eje- q .

Así

- i , v , r y L denotan corrientes, voltajes, resistencias e inductancias propias, respectivamente, que pueden ser de fase del estator (a, b, c), devanado de campo (F) o de los circuitos de amortiguamiento (D, Q) dependiendo del subíndice empleado.
- $\omega_r(t)$ y $\omega(t)$ denotan las velocidades angulares del rotor y del campo magnético en rotación, respectivamente, en rad/seg.

El modelo completo de la máquina síncrona dado en [15], para el circuito de la Figura 5.1, con las cantidades base para voltaje, corriente y tiempo en el sistema por unidad (pu) es:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \\ T_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & 0 & \omega(t)M_{qQ} & \omega(t)L_q & 0 & 0 \\ 0 & r_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_Q & 0 & 0 & 0 \\ -\omega(t)L_d & \omega(t)M_{dF} & \omega(t)M_{dD} & 0 & r_q & 0 & 0 \\ L_d i_q & M_{Dd} i_q & M_{dF} i_q & -M_{qQ} i_d & -L_q i_d & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$+ \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & M_{qQ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{qQ} & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde T_m es el par mecánico de entrada. $T_j = 2H\omega_B$, siendo H la constante de inercia en pu , $M_{dDF} = \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F \end{bmatrix}$ son los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje- d , y $M_{Qq} = \begin{bmatrix} L_Q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & L_q \end{bmatrix}$ son los acoplamientos propios y mutuos de los devandos del eje q .

La ecuación matricial 5.1, esta en la forma $x(t) = f(x(t), u(t), t)$ se puede ver que es no lineal por el producto de las variables de estado.

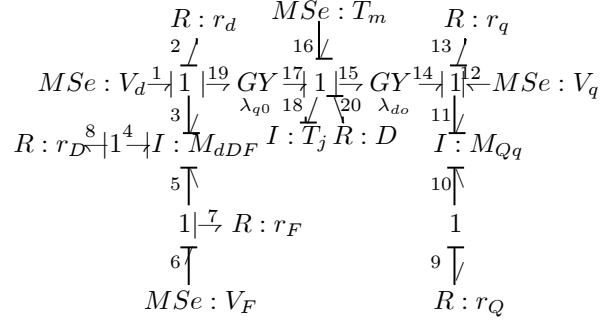


Figura 5.2: Diagrama en Bond Graph de la Máquina Síncrona.

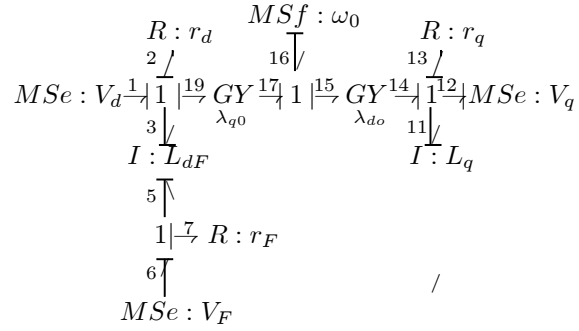


Figura 5.3: Diagrama en Bond Graph de la Máquina Síncrona simplificado.

5.3 Modelo de la Máquina Síncrona en Bond Graph

La Figura 5.2 corresponde al Bond Graph de la máquina síncrona presentado en [15] el cual parte del análisis del modelo en [22] con algunas variantes, este modelo presenta de forma general la dinámica de la máquina síncrona ya que considera los devandos de amortiguamiento y la parte mecánica de la máquina.

El modelo en [15] es un modelo no lineal variante en el tiempo, dado que el alcance de este trabajo de tesis es para sistemas LTI, hacemos la linealización de la ecuación de salida (5.3),

$$T_e(t) = i_d(t)\lambda_d(t) - i_q(t)\lambda_q(t) \quad (5.3)$$

alrededor de $(i_{do} = 0, \lambda_{do}, i_{qo}, \lambda_{qo})$ obteniendo,

$$T_e(t) \cong i_d(t)\lambda_{do} - i_q(t)\lambda_{qo} \quad (5.4)$$

representado en el modelo en bond graph de la Figura 5.2.

Realizamos el análisis del modelo considerando la velocidad angular $\omega_r(t)$ constante, así el modelo de la Figura 5.2 se simplifica, agregando una fuente de flujo mecánica $S_f : \omega_0$, eliminando los bonds 18 y 20 [15]. Ahora bien, al considerar como parte de la incertidumbre los devandos de amortiguamiento, se eliminan además los bonds 4, 8, 9

y 10 [15]. La figura 5.3 corresponde entonces al modelo para $\omega_r(t) = cte$ y en el cuál se desprecian los devandos de amortiguamiento, cuyos vectores clave están dados por,

$$\begin{aligned} x^P &= \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \end{bmatrix}; \dot{x}^P = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \end{bmatrix}; D_{out}^P = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \end{bmatrix}; y^P = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_{12} \end{bmatrix} \\ z^P &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \end{bmatrix}; D_{in}^P = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \end{bmatrix}; u^P = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ f_{16} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

siendo los elementos de la estructura de unión [15],

$$\begin{aligned} S_{11}^P &= 0_{3 \times 3}; \quad S_{12}^P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{13}^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_{q0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_{d0} \end{bmatrix}; \\ S_{21}^P &= -(S_{12}^P)^T; \quad S_{22}^P = 0_{3 \times 3}; \quad S_{23}^P = 0_{3 \times 4}; \quad S_{31}^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{32}^P = 0_{2 \times 3}; \quad S_{33} = 0_{2 \times 4} \end{aligned} \quad (5.6)$$

con las relaciones constitutivas para el modelo dadas en:

$$\begin{aligned} F^P &= \text{diag} \{L_{dF}^{-1}, L_q\} \\ L^P &= \text{diag} \{r_d, r_F, r_q\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando

$$\begin{aligned} A &= (S_{11}^P + S_{12}^P M S_{21}^P) F^P; \\ B &= S_{13}^P + S_{12}^P M S_{23}^P; \\ C &= (S_{31}^P + S_{32}^P M S_{21}^P) F^P; \\ D &= S_{33}^P + S_{32}^P M S_{23}^P; \end{aligned} \quad (5.8)$$

dadas en [5], tenemos la realización en espacio de estados para el modelo de la máquina síncrona, donde $M = (I - L^P S_{22}^P)^{-1} L^P$.

De (5.6) , tenemos $M = L^P$, si $L_{dF}^{-1} = \begin{bmatrix} L'_d & M'_{dF} \\ M'_{dF} & L'_F \end{bmatrix}$, entonces,

$$A = \begin{bmatrix} -r_d & 0 & 0 \\ 0 & -r_F & 0 \\ 0 & 0 & -r_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{dF}^{-1} & 0 \\ 0 & L'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L'_d r_d & -r_d M'_{dF} & 0 \\ -r_F M'_{dF} & -L'_F r_F & 0 \\ 0 & 0 & -L'_q r_q \end{bmatrix}; \quad (5.9)$$

$$B = S_{13}^P; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{dF}^{-1} & 0 \\ 0 & L'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_d & M'_{dF} & 0 \\ 0 & 0 & L'_q \end{bmatrix}; \quad D = 0_{2 \times 4}.$$

Así, dado que $P(s) = C(I s - A)^{-1} B + D$,

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{sL'_d + (L'_F L'_d - (M'_{dF})^2) r_F}{\vartheta} & \frac{sM'_{dF}}{\vartheta} & 0 & \frac{s[(\lambda_{q0} + \lambda_{q0} L'_F r_F) - M'_{dF} \lambda_{d0}] - r_F (M'_{dF})^2}{\vartheta} \\ 0 & 0 & \frac{L'_q}{s + L'_q r_q} & \lambda_{d0} \frac{L'_q}{s + L'_q r_q} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\text{donde } : \quad \vartheta = s^2 + (L'_F r_F + L'_d r_d) s + r_F r_d [L'_F L'_d - (M'_{dF})^2] \quad (5.11)$$

Al considerar valores para $L'_F = 1$, $L'_d = 1$, $L'_q = 1$, $M'_{dF} = 1/M_{dF} = 0.6231$, $\lambda_{q0} = 1.7041$, $\lambda_{d0} = 1.6853$, $r_d = 60$, $r_F = 1$, $r_q = 37.36$. Tenemos:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0.6117}{s^2+61s+36.7020} & \frac{0.6231s}{s^2+61s+36.7020} & 0 & \frac{2.3581s-0.3883}{s^2+61s+36.7020} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+37.36} & \frac{1.6853}{s+37.36} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

5.3.1 Aplicación del Teorema

Dada la función de transferencia $P(s)$, se emplean matrices unimodulares para llevarla a la forma Smith-McMillan y analizar si dicha $P(s)$ es de fase mínima, y aplicar la la Proposición 2 del Capítulo 2,

$$\text{Entonces, para (5.10) se proponen la matrices unimodulares } U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(s^2+61s+36.7020)}{(s+0.6117)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(s^2+61s+36.7020)}{(2.3581s-0.3883)} \end{bmatrix}, \quad U_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s + 37.36 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(s+37.36)(2.3581s-0.3883)}{(1.6853)(s^2+61s+36.702)} \end{bmatrix} \text{ y } U_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(s^2+61s+36.702)}{(s+0.6117)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(s^2+61s+36.702)}{0.6231s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tales que:}$$

$$P(s)U_1 = \begin{bmatrix} \frac{s+0.6117}{s^2+61s+36.702} & \frac{0.6231s}{s^2+61s+36.702} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+37.36} & -\frac{(1.6853)(s^2+61s+36.702)}{(s+37.36)(2.3581s-0.3883)} \end{bmatrix}$$

$$P(s)U_1U_2 = \begin{bmatrix} \frac{s+0.6117}{s^2+61s+36.702} & \frac{0.6231s}{(s^2+61s+36.702)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+37.36} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\text{y}$$

$$M(s) := P(s)U_1U_2U_3 = \begin{bmatrix} \frac{s+0.6117}{s^2+61s+36.702} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+37.36} & 0 \end{bmatrix}$$

siendo la última expresión en (5.13), la forma Smith-McMillan de $P(s)$, observándose que no tiene ceros inestables, así (5.10) es de fase mínima, es decir $P(s) = P_{MP}(s)$. Dado que $P(s)$ es de fase mínima [23], el parámetro libre óptimo de la parametrización de controladores estabilizantes para plantas estables está dado por,

$$Q(s) := P^R(s)q(s) \quad (5.14)$$

donde $P^R(s) = P_{MP}^R(s)$ es la inversa a la derecha de $P_{MP}(s)$. Note que,

$$M^R(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s^2+61s+36.702)}{(s+0.6117)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & s + 37.36 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, dado que $M(s)M^R(s) = P(s)P^R(s) = I_d(s)$, entonces:

$$P(s) [U_1(s)U_2(s)U_3(s)M^R(s)] = P(s)P^R(s) = I_d(s) \implies P^R(s) = U_1(s)U_2(s)U_3(s)M^R(s)$$

$$\text{siendo } P^R(s) = P_{MP}^R(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s^2+61s+36.702)}{s+0.6117} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & s + 37.36 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

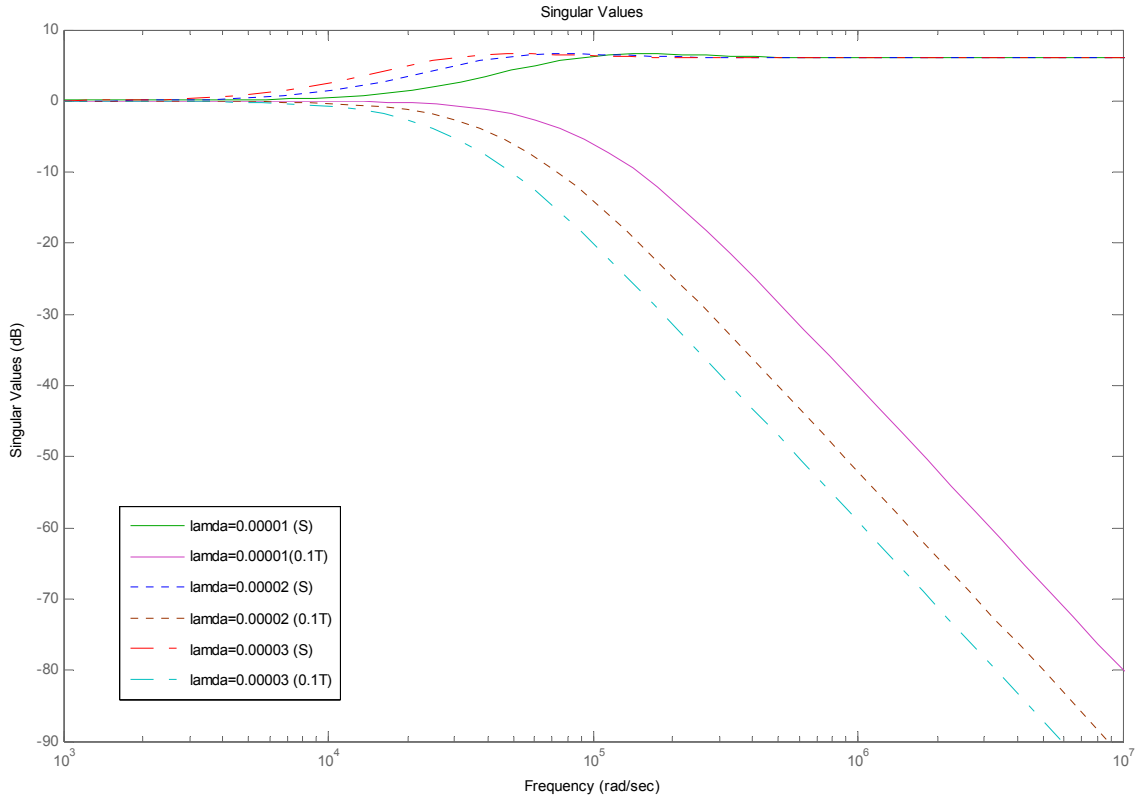


Figura 5.4: Valores singulares para $[0.1T; S]^T$ para $\lambda = 0.00001$, $\lambda = 0.00002$ y $\lambda = 0.00003$.

proponemos:

$$q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

para (5.14) donde λ es parámetro para minimizar el criterio \mathcal{H}_∞ de sensibilidad mezclada, dado por $\sigma \begin{pmatrix} \rho T_o(s) & S_o(s) \end{pmatrix}^T$, siendo ρ un parámetro de peso tal que las incertidumbres $\|\Delta(s)\|_\infty \leq \rho$. Para $\rho = 0.1$, al incrementar λ , el criterio de sensibilidad mezclada decrece sobre un ancho de banda de frecuencia, ver Figura 5.4.

Donde la Figura 5.4 representa los valores singulares de $[0.1T_o(s); S]^T$, se puede ver como $\sigma(S(s))$ decrecen en bajas frecuencias y $\sigma(0.1T(s))$ decrece para altas frecuencias.

Considerando que el valor más apropiado para el desempeño de Q será el de $\lambda = 0.00001$ los valores singulares para $P(s)Q(s)$ y $P_\Delta(s)Q(s)$ se muestran en la Figura 5.5. La $P_\Delta(s)$ corresponde al bond graph de la Figura 5.2, dentro de la estructura del modelo de control interno (IMC) mostrado en la Figura 4.2.

Se puede observar como el modelo de $P_\Delta(s)Q(s)$ por la dinámicas no modeladas, tiene una pequeña magnitud de error en cuanto a los valores singulares del modelo con la planta nominal.

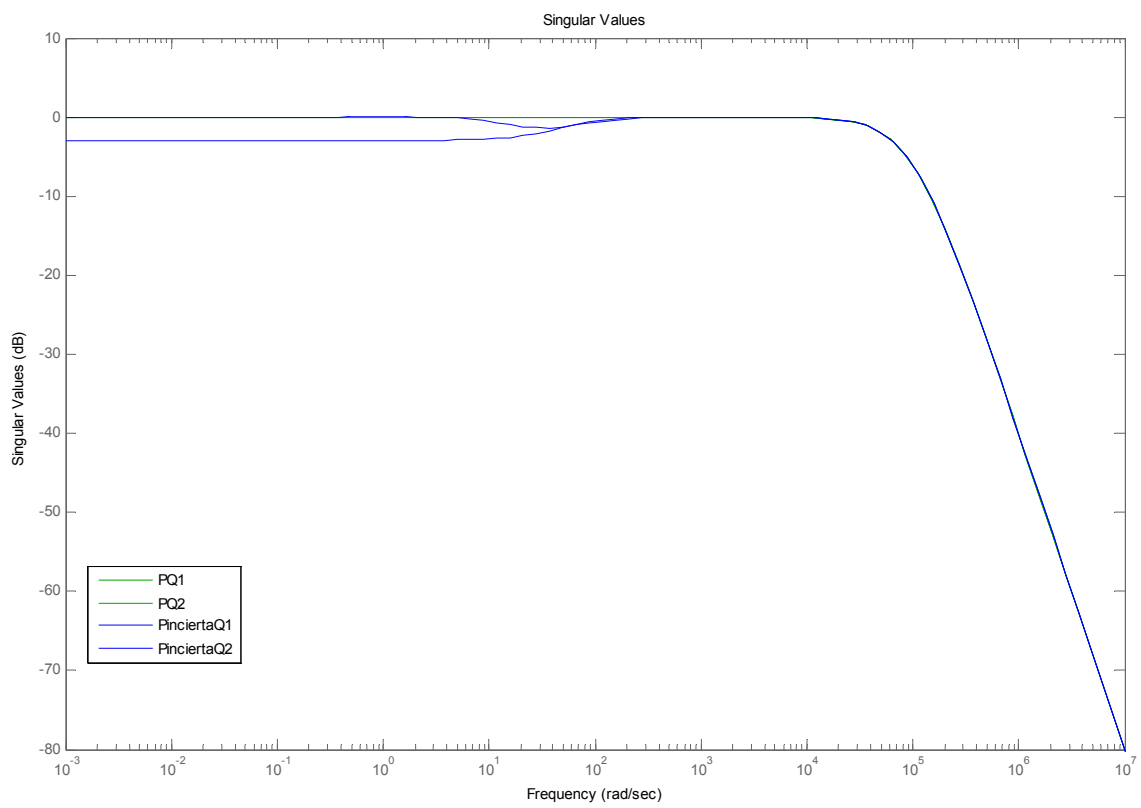


Figura 5.5: Valores singulares para $P(s)Q(s)$ y $P_{\Delta}(s)Q(s)$.

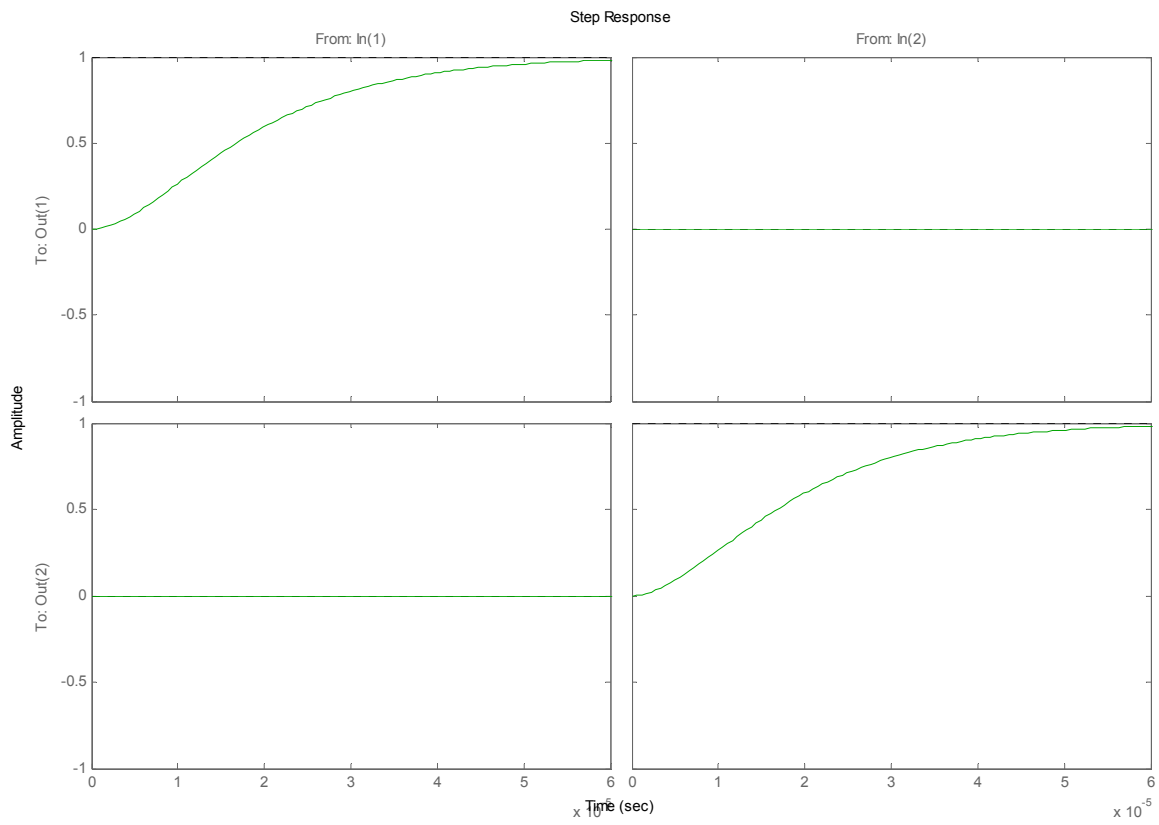


Figura 5.6: Respuesta en el tiempo de $P(s)Q(s)$ a una entrada escalon de magnitud 1.

En la Figura 5.6, se muestra la respuesta a una entrada escalón para $P(s)Q(s)$, para el diagrama de la Figura 4.2, considerando que la $P_{\Delta}(s)$ es la $P(s)$; se puede notar como los estados se encuentran desacoplados, ya que la entrada uno no afecta en la salida dos y de igual manera la entrada dos no afecta en la salida uno. El obtener una estructura de unión basados en un diagrama a bloques de esta respuesta puede ser de gran ayuda para establecer criterios para el controlador $K(s)$.

5.4 Conclusiones

El emplear el bond graph como metodología de análisis nos da la oportunidad de considerar o no dinámicas dentro del modelo de la máquina síncrona de una forma clara y sencilla, y se puede observar como, dentro del enfoque de bond graph es fácil determinar incertidumbres no estructuradas considerando como inicio un modelo completo de la máquina síncrona; de igual manera dentro de bond graph el considerar un modelo de la estructura de unión no lineal y/o variante en el tiempo es sencillo al emplear modelos de sistemas con matrices del campo de almacenamiento y del campo disipativo en causalidad derivativa y puertos 2 modulados, respectivamente, sin embargo, estos conceptos no se encuentran propiamente definidos dentro de este trabajo de tesis ya que los resultados propuestos es para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo.

Los resultados muestran que al identificar los elementos que forman parte las estructuras de unión propuestas para el controlador estabilizante, la función sensibilidad y sensibilidad complementaria, dichas estructuras se emplean de manera sencilla realizando un análisis gráfico en control robusto \mathcal{H}_{∞} .

Es importante mencionar que los resultados de este capítulo se muestran para la planta nominal $P(s)$; sin embargo, el análisis puede ser perfeccionado considerando el modelo con incertidumbres, es decir, aplicar los resultados en la planta perturbada.

Capítulo 6

Trabajos Futuros y conclusiones

El trabajo conjunto de dos herramientas como lo son el Bond Graph y Control Robusto es un area de investigación actual que ayuda a la problemática del análisis y diseño de controladores. Sin embargo, contando con las herramientas necesarias bond graph es una metodología que simplifica de manera importante el desarrollo de criterios para control.

Dentro del desarrollo de este trabajo de tesis se generaron inquietudes que a continuación se proponen como trabajos futuros:

- Establecer criterios para la obtención de la estructura de unión de la incertidumbre paramétrica y no estructurada conociendo las estructuras de unión de la planta nominal y de la planta incierta. En particular criterios para "poner fuera" la incertidumbre.
- Obtener las estructuras de unión de otras funciones de transferencia de interés como la de la referencia a la entrada de la planta o de una perturbación externa a la salida reguladas, y analizar las propiedades estructurales de dichas estructuras de unión.
- Análisis de técnicas estándares de reducción de modelos como truncamiento balanceado o perturbaciones singulares en bond graph.
- Analizar el problema de sensibilidad mezclada en bond graph.
- Análisis del modelo de la máquina síncrona considerando constantes de tiempo, o dentro del enfoque de LFTs.
- Considerar el control de modelo interno para el grupo motor de inducción/generador síncrono.

Concluisones

La obtención de las estructuras de unión de un sistema es una metodología sencilla y al proponer estructuras de unión tanto para las LFTs como para las Funciones de Sensibilidad y Sensibilidad Complementaria, es posible realizar el análisis de las propiedades de inestabilidad estructural en un sentido físico. De igual manera el tener modelos de las plantas considerando todas las dinámicas involucradas y decidir que ciertos elementos pueden ser omitidos y considerados incertidumbres se realiza de manera facil y al visualizar el modelo sin dichos elementos inciertos se mantiene la persepción de las dinámicas que conforman los modelos nominales.

El Teorema 1, propone el diseño de un controlador en función del parámetro $Q(s)$ –*estabilizante*; y con la ayuda de las Proposiciones se obtienen ciertos elementos para la estructura de unión de dicho controlador. El hacer uso de las técnicas de bondgraph garantiza que el modelo del controlador propuesto es físicamente implementable; esto es una gran ventaja considerando que dentro de disicplinas para el diseño de controladores se pueden obtener modelos de estos que consideran dinámicas con energías que los hacen practicamente imposibles de implementarse físicamente.

El proponer realizar un análisis de control robusto con la ayuda de bond graph y/o diseñar controladores robustos con esta misma herramienta del modelado brinda facilidad en la comprensión de lo que se esta analizando.

Capítulo 7

APENDICE A

Corolario 1. *La estructura de unión equivalente entrada/salida para la matriz $M(s)$ de la Figura A.1, es,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^M(t) \\ D_{in}^M(t) \\ y^M(t) \end{bmatrix} = S^M \begin{bmatrix} z^M(t) \\ D_{out}^M(t) \\ u^M(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

con los vectores para esta estructura definidos por,

$$\begin{aligned} \dot{x}^M(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^{L1}(t) \\ \dot{x}^{L2}(t) \end{bmatrix}, & D_{in}^M(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^{L1} \\ D_{in}^{L2} \end{bmatrix}, & y^M(t) &= \begin{bmatrix} y^{L1}(t) \\ y^{L2}(t) \end{bmatrix} \\ z^M(t) &= \begin{bmatrix} z^{L1}(t) \\ z^{L2}(t) \end{bmatrix}, & D_{out}^M(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^{L1} \\ D_{out}^{L2} \end{bmatrix}, & u^M(t) &= u^{L1}(t) = u^{L2}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

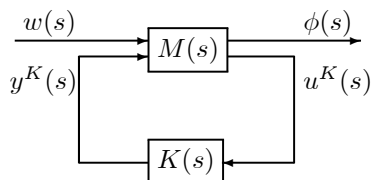


Figura 7.1: *Representación de LFT Inferior*

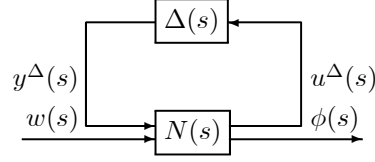


Figura 7.2: Representación de LFT Superior

y los elementos dentro de la estructura de unión equivalente para $M(s)$ son,

$$\begin{aligned}
 S_{11}^M &= \text{diag}\{S_{11}^{L1}, S_{11}^{L2}\}; & S_{12}^M &= \text{diag}\{S_{12}^{L1}, S_{12}^{L2}\}; & S_{13}^M &= \begin{bmatrix} S_{13}^{L1} \\ S_{13}^{L2} \end{bmatrix} \\
 S_{21}^M &= \text{diag}\{S_{21}^{L1}, S_{21}^{L2}\}; & S_{22}^M &= \text{diag}\{S_{22}^{L1}, S_{22}^{L2}\}; & S_{23}^M &= \begin{bmatrix} S_{23}^{L1} \\ S_{23}^{L2} \end{bmatrix} \\
 S_{31}^M &= \text{diag}\{S_{31}^{L1}, S_{31}^{L2}\}; & S_{32}^M &= \text{diag}\{S_{32}^{L1}, S_{32}^{L2}\}; & S_{33}^M &= \begin{bmatrix} S_{33}^{L1} \\ S_{33}^{L2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

siendo los vectores y elementos de las estructuras de unión S^{Li} , $i = 1, 2$ definidos en (A.4) y (A.5).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^{Li}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^{Mi1}(t) \\ \dot{x}^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; & D_{in}^{Li}(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^{Mi1}(t) \\ D_{in}^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; & y^{L1}(t) &= y^{M11}(t) + y^{M12}(t) = \phi(t) \\
 z^{Li}(t) &= \begin{bmatrix} z^{Mi1}(t) \\ z^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; & D_{out}^{Li}(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^{Mi1}(t) \\ D_{out}^{Mi2}(t) \end{bmatrix}; & y^{L2}(t) &= y^{M21}(t) + y^{M22}(t) = u^K(t) \\
 & & & & u^{Li}(t) &= \begin{bmatrix} w(t) \\ y^K(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}, \quad i = 1, 2 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11}^{Li} &= \text{diag}\{S_{11}^{Mi1}, S_{11}^{Mi2}\}; & S_{12}^{Li} &= \text{diag}\{S_{12}^{Mi1}, S_{12}^{Mi2}\}; & S_{13}^{Li} &= \text{diag}\{S_{13}^{Mi1}, S_{13}^{Mi2}\} \\
 S_{21}^{Li} &= \text{diag}\{S_{21}^{Mi1}, S_{21}^{Mi2}\}; & S_{22}^{Li} &= \text{diag}\{S_{22}^{Mi1}, S_{22}^{Mi2}\}; & S_{23}^{Li} &= \text{diag}\{S_{23}^{Mi1}, S_{23}^{Mi2}\}, \quad i = 1, 2 \\
 S_{31}^{Li} &= \begin{bmatrix} S_{31}^{Mi1} & S_{31}^{Mi2} \end{bmatrix}; & S_{32}^{Li} &= \begin{bmatrix} S_{32}^{Mi1} & S_{32}^{Mi2} \end{bmatrix}; & S_{33}^{Li} &= \begin{bmatrix} S_{33}^{Mi1} & S_{33}^{Mi2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Para la matriz $N(s)$ de la Figura 7.5, la estructura de unión equivalente es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^N(t) \\ D_{in}^N(t) \\ y^N(t) \end{bmatrix} = S^N \begin{bmatrix} z^N(t) \\ D_{out}^N(t) \\ u^N(t) \end{bmatrix} \tag{a.6}$$

donde los vectores son,

$$\begin{aligned} \dot{x}^N(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^{U1}(t) \\ \dot{x}^{U2}(t) \end{bmatrix}, & D_{in}^N(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^{U1}(t) \\ D_{in}^{U2}(t) \end{bmatrix}, & y^N(t) &= \begin{bmatrix} y^{U1}(t) \\ y^{U2}(t) \end{bmatrix} \\ z^N(t) &= \begin{bmatrix} z^{U1}(t) \\ z^{U2}(t) \end{bmatrix}, & D_{out}^N(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^{U1} \\ D_{out}^{U2} \end{bmatrix}, & u^N(t) &= u^{U1}(t) = u^{U2}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Los elementos dentro de la estructura de unión S^N son,

$$\begin{aligned} S_{11}^N &= \text{diag}\{S_{11}^{U1}, S_{11}^{U2}\}; & S_{12}^N &= \text{diag}\{S_{12}^{U1}, S_{12}^{U2}\}; & S_{13}^N &= \begin{bmatrix} S_{13}^{U1} \\ S_{13}^{U2} \end{bmatrix} \\ S_{21}^N &= \text{diag}\{S_{21}^{U1}, S_{21}^{U2}\}; & S_{22}^N &= \text{diag}\{S_{22}^{U1}, S_{22}^{U2}\}; & S_{23}^N &= \begin{bmatrix} S_{23}^{U1} \\ S_{23}^{U2} \end{bmatrix} \\ S_{31}^N &= \text{diag}\{S_{31}^{U1}, S_{31}^{U2}\}; & S_{32}^N &= \text{diag}\{S_{32}^{U1}, S_{32}^{U2}\}; & S_{33}^N &= \begin{bmatrix} S_{33}^{U1} \\ S_{33}^{U2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

siendo los vectores y elementos de las estructuras de unión S^{U^i} , $i = 1, 2$; definidos en (A.9) y (A.10), respectivamente,

$$\begin{aligned} \dot{x}^{U^i}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^{Ni1}(t) \\ \dot{x}^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & D_{in}^{U^i}(t) &= \begin{bmatrix} D_{in}^{Ni1}(t) \\ D_{in}^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & y^{U1}(t) &= y^{N11}(t) + y^{N12}(t) = u^\Delta(t) \\ & & & & y^{U2}(t) &= y^{N21}(t) + y^{N22}(t) = \phi(t) \\ z^{U^i}(t) &= \begin{bmatrix} z^{Ni1}(t) \\ z^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & D_{out}^{U^i}(t) &= \begin{bmatrix} D_{out}^{Ni1}(t) \\ D_{out}^{Ni2}(t) \end{bmatrix}; & u^{U^i}(t) &= \begin{bmatrix} y^\Delta(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \end{aligned}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} S_{11}^{U^i} &= \text{diag}\{S_{11}^{Ni1}, S_{11}^{Ni2}\}; & S_{12}^{U^i} &= \text{diag}\{S_{12}^{Ni1}, S_{12}^{Ni2}\}; & S_{13}^{U^i} &= \text{diag}\{S_{13}^{Ni1}, S_{13}^{Ni2}\} \\ S_{21}^{U^i} &= \text{diag}\{S_{21}^{Ni1}, S_{21}^{Ni2}\}; & S_{22}^{U^i} &= \text{diag}\{S_{22}^{Ni1}, S_{22}^{Ni2}\}; & S_{23}^{U^i} &= \text{diag}\{S_{23}^{Ni1}, S_{23}^{Ni2}\}, \quad i = 1, 2. \\ S_{31}^{U^i} &= \begin{bmatrix} S_{31}^{Ni1} & S_{31}^{Ni2} \end{bmatrix}; & S_{32}^{U^i} &= \begin{bmatrix} S_{32}^{Ni1} & S_{32}^{Ni2} \end{bmatrix}; & S_{33}^{U^i} &= \begin{bmatrix} S_{33}^{Ni1} & S_{33}^{Ni2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Prueba: Considerando que las cuatro estructuras de unión para los elementos de las matrices $M(s)$ y $N(s)$ siguen las conexiones de las figura 7.3 y 7.4 y con las estructuras de unión dadas por (A.3) y (A.4), obtenemos las estructuras de unión equivalentes para las matrices $M(s)$ y $N(s)$, las cuales son estructuras de unión aumentadas bajo el hecho de que S^{L1} y S^{L2} ; y que, S^{U1} y S^{U2} , tienen entradas comunes, respectivamente. ■

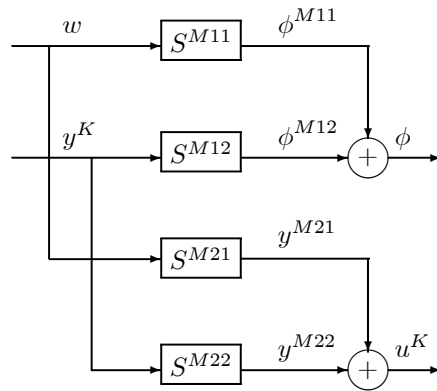


Figura 7.3: Conexión general para los elementos dentro de la matriz $M(s)$ representadas por estructuras de unión.

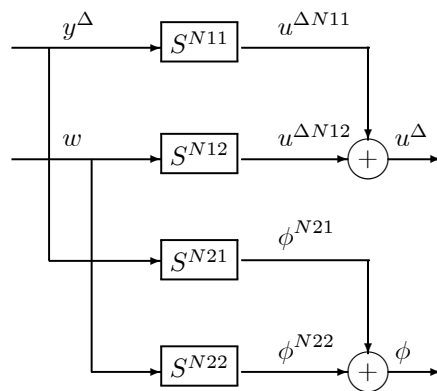


Figura 7.4: Conexión general para los elementos dentro de la matriz $N(s)$ representadas por estructuras de unión.

APENDICE B

Obtención de la representación LFT superior (ver Figura B.1) de la planta incierta en el diagrama a bloques para la incertidumbre aditiva mostrado en la Figura B.2.

En la Figura B.1,

$$\begin{bmatrix} u^\Delta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}(s) & \mathbf{N}_{12}(s) \\ \mathbf{N}_{21}(s) & \mathbf{N}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^\Delta(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Considerando;

$$w(t) = u(t), \quad \phi(t) = y(t) \quad (\text{B.2})$$

así, de la Figura B.2,

$$y(t) = y^\Delta(t) + G_n(t)w(t) \quad (\text{B.3})$$

además,

$$u(t) = u^\Delta(t) \quad (\text{B.4})$$

tenemos entonces,

$$\begin{bmatrix} u^\Delta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_d & \mathbf{G}_n(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^\Delta(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

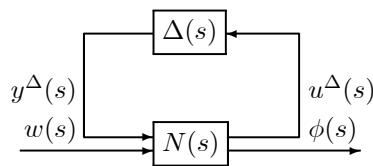


Figura 7.5: Representación de la *LFT superior*

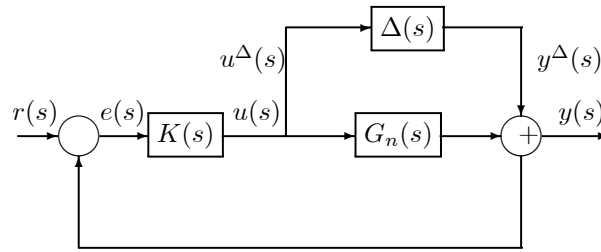


Figura 7.6: Diagrama de Bloques con Incertidumbre Aditiva.

para la LFT superior con incertidumbre aditiva, ésto es,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}(s) & \mathbf{N}_{12}(s) \\ \mathbf{N}_{21}(s) & \mathbf{N}_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_d & \mathbf{G}_n(s) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Bibliografía

- [1] Dauphin-Tanguy G., Kam C. S., Kubiak P., “Uncertainties in Multiport Elements”
- [2] Dauphin-Tanguy G., Borne P., Lebrun M., “Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method”, *J. Franklin Inst.*, vol 319, No. 1/2, 1985, pp. 157-171.
- [3] Dauphin-Tanguy G., “Modelling of physical dynamical systems by Bond Graph”, *Linear Systems, Editions Masson, Paris*, vol.1, Chapter 2, pp. 35-112.
- [4] Desoer C. A., Vidyasagar M.. *Feedback Systems: Input-Output Properties. Academic Press, New York, 1975.*
- [5] Karnopp D., Rosenberg R., “System Dynamics: A Unified Approach”, *John Wiley and Sons, 1975.*
- [6] Khalil H. K., “Nonlinear Systems”, *Prentice Hall, Second Edition. 1996.*
- [7] Lin C.T., “Structural controllability”, *IEEE Trans. on Automation Control (TAC)*, vol. AC-19, pp. 201-208, 1974.
- [8] Maciejowski J. M., “Multivariable Feedback Design”, *Addison-Wesley Publishing Company, 1989.*
- [9] Seur C., Dauphin-Tanguy G., “Structural controllability/observability of linear systems represented by bond-graphs”, *J. Franklin Inst.*, vol. 326, no. 6, pp. 869-883, 1989.
- [10] Seur C., Dauphin-Tanguy G., “Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems”, *J. Franklin Inst.*, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [11] Skogestad S., Postlethwaite I., “Multivariable Feedback Control, Analysis and Design”, *John Wiley and Sons, 1997.*
- [12] Youla D.C., Jabr H.A., Bongiorno J.J., “Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: part II”, *IEEE (TAC)*, vol. AC-21, pp. 319-338, 1976
- [13] Youla et al., 1976

- [14] Zhou K., Doyle J. C., Glover K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1995
- [15] González Avalos G., “Técnicas de Control basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO, aplicación a la Máquina Síncrona”.
- [16] González G., Galindo R., “Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO Linear Time Invariant Systems”, *Conference on Control Applications (CCA)*, pp. 1183-1188, 2002
- [17] González G., Dauphin-Tanguy G., Galindo R., De Leon J., “Steady State Error for a Close Loop Physical System with a Bond Graph Approach”, *Inter. Conf. on Bond Graph Modelling and Simulation (ICBGM)*, pp. 107-112, 2005
- [18] R. Galindo, R. I. Juárez, G. González, “*Structural Controllability and Observability for LTI Stable Systems*”, *CCA* pp. 2623-2628, 2006.
- [19] Meisel, Jerome, “Principios de Conversión de Energía Electromécanica”. *McGraw-Hill*, 1969.
- [20] P. Kundur, “Power System Stability and Control”, *McGraw-Hill*, 1994.
- [21] P. M. Anderson, “Power System Control and Stability”, *The IOWA State University Press*, 1977.
- [22] Dietrich Sahn, “A Two-Axis, Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine”, *Journal of the Franklin Institute*, Vol.308, No. 3, Septiembre 1979.
- [23] Morari M, Zafiriou E., *Robust Process Control*, Prentice Hall, 1989.