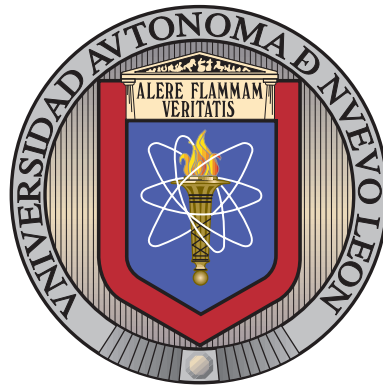


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CLASIFICACIÓN MULTICRITERIO APLICADA A LA
CARACTERIZACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA EN
NIÑOS Y ADOLESCENTES CON OCLUSIÓN
NORMAL Y EDADES ENTRE 9 Y 16 AÑOS

POR

LUIS MIGUEL PRADO LLANES

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

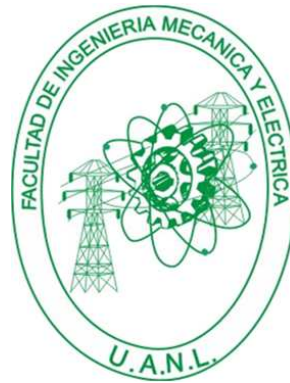
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

FEBRERO 2009

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CLASIFICACIÓN MULTICRITERIO APLICADA A LA
CARACTERIZACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA EN
NIÑOS Y ADOLESCENTES CON OCLUSIÓN
NORMAL Y EDADES ENTRE 9 Y 16 AÑOS

POR

LUIS MIGUEL PRADO LLANES

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

FEBRERO 2009

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Clasificación Multicriterio Aplicada a la Caracterización de la Maduración Ósea en Niños y Adolescentes con Oclusión Normal y Edades entre 9 y 16 Años», realizada por el alumno Luis Miguel Prado Llanes, con número de matrícula 1076053, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Fernando López Irarragorri

Asesor

Dra. Satu Elisa Schaeffer

Revisor

Dr. Óscar L. Chacón Mondragón

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, febrero 2009

Síntesis

El presente trabajo de investigación está enfocado en la caracterización de la maduración ósea en niños y adolescentes, ya que conociendo la etapa en la que se encuentra el paciente entonces se aplica el tratamiento de ortodoncia adecuado, con el fin de obtener un mayor porcentaje de éxito en dicho tratamiento.

La estimación del estado de maduración ósea es referente a medidas tomadas en las vértebras cervicales (segunda, tercera y cuarta). Cabe mencionar que estas mediciones son tomadas de niños y adolescentes con oclusión normal con edades entre 9 y 16 años originarios de Matanzas, Cuba. La muestra comprende 80 niños y 80 niñas que cursaron el año escolar 2006-2007.

Para lograr la caracterización de la maduración ósea se emplean las técnicas de clasificación más importantes: análisis discriminante, árboles de decisión y la teoría de rough sets (conjuntos aproximados).

Dr. Fernando López Irarragorri

Asesor

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Estructura de la tesis	1
1.2. Definición del problema	2
1.3. Antecedentes	4
1.4. Objetivo	6
1.5. Justificación	6
1.6. Hipótesis	7
1.7. Metodología propuesta	7
1.8. Contribución esperada	8
1.9. Conclusiones	8
2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	9
2.1. Introducción	9
2.2. Etapas de la maduración ósea según la mano-muñeca	10

2.3. Etapas de maduración ósea según las vértebras cervicales	12
2.4. Métodos para determinar la maduración ósea, según la zona anatómica . .	14
2.5. Modelos matemáticos para el estudio del crecimiento craneofacial	17
2.6. Métodos para determinar la maduración ósea, según la metodología . . .	18
2.7. Conclusiones	20
3. MARCO TEÓRICO	22
3.1. Introducción	22
3.2. Conceptos básicos de la teoría de la decisión	23
3.3. El problema de clasificación	26
3.3.1. Técnicas de clasificación	29
3.4. El problema de agrupamiento	40
3.4.1. Análisis de agrupamiento de K medias	44
3.4.2. Análisis de agrupamiento jerárquico	44
3.4.3. Análisis de agrupamiento confuso robusto	48
3.5. Conclusiones	51
4. ESTADO DEL ARTE DE LOS MÉTODOS DE CLASIFICACIÓN Y AGRU- PAMIENTO MULTICRITERIO	52
4.1. Introducción	52
4.2. Metodologías de MCDA	53
4.3. Clasificación MCDA	55
4.3.1. ELECTRE TRI	56
4.3.2. Conjuntos aproximados	60
4.4. Agrupamiento MCDA	63
4.4.1. Extensión del algoritmo de K medias	63

4.5. Conclusiones	64
5. METODOLOGÍA PROPUESTA	65
5.1. Introducción	65
5.2. Metodología	65
5.3. Agrupamiento	66
5.4. Clase de problema de decisión	67
5.5. Problema de clasificación	67
5.5.1. Alternativas	67
5.5.2. Criterios	68
5.5.3. Categorías	70
5.6. Clasificación	71
5.7. Conclusiones	73
6. CASO DE ESTUDIO	74
6.1. Introducción	74
6.2. Método de clasificación	75
6.2.1. Análisis discriminante	76
6.2.2. Árboles de decisión	79
6.2.3. Conjuntos aproximados	82
6.3. Análisis de resultados	86
6.4. Conclusiones	87
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	89
7.1. Conclusiones	89
7.2. Recomendaciones	90

Apéndice A. Agrupamiento	92
A.1. Primer experimento	94
A.2. Segundo experimento	107
A.2.1. Análisis de casos	110
Apéndice B. Clasificación del sexo	123
B.1. Análisis discriminante	124
B.2. Árboles de decisión	131
Apéndice C. Reglas de decisión	136
Apéndice D. Conjuntos aproximados	146
Apéndice E. Análisis de las mediciones tomadas por Calvo	149
E.1. Análisis discriminante	149
E.2. Árboles de decisión	151
E.3. Conjuntos aproximados	152
Apéndice F. Discretizaciones	155
Apéndice G. Etapas de maduración ósea	158
Glosario	161
Lista de figuras	172
Lista de cuadros	174

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Estructura de la tesis

La presente tesis está conformada de la siguiente manera: introducción, descripción del problema, marco teórico, estado del arte de los métodos de clasificación y agrupamiento multicriterio, metodología propuesta, caso de estudio, conclusiones y recomendaciones, además de apéndices y referencias.

En el primer capítulo, se describe el diseño de la investigación que consta de definición del problema, antecedentes de solución, objetivo, justificación, hipótesis, resumen de la metodología propuesta y contribución esperada. En el segundo capítulo, se presenta el problema como un problema científico y se discute el estado del arte en la solución del mismo. En el capítulo llamado marco teórico, se discuten brevemente las bases teóricas que sustentan la investigación y se analizan los diferentes métodos de clasificación desde la óptica de su aplicación al problema que se estudia. En el cuarto capítulo se hace una revisión del estado de arte de los métodos de clasificación y agrupamiento multicri-

terio. En el siguiente capítulo se desarrolla la metodología de solución propuesta. En el capítulo de caso de estudio, se aplica la metodología propuesta a un caso real. En el último capítulo, se elaboran conclusiones sobre los resultados obtenidos, su magnitud y su contexto de aplicación, finalmente se presentan recomendaciones que establecen pautas para dar seguimiento a la investigación realizada y seguir profundizando en el estudio del problema analizado.

1.2. Definición del problema

Según Guerrero [16], la **maduración ósea** hace referencia al grado de **desarrollo (o crecimiento) de los huesos**. Conocer este grado de desarrollo óseo, comparándolo con la edad cronológica, puede ser fundamental en algunos niños para saber cuánto les queda por crecer.

En lo que respecta a la edad cronológica, se pueden mencionar las etapas de pubertad (cuando el crecimiento de la persona está en pleno desarrollo) y finalización (cuando ya no crece y en algunos casos empieza a decrecer). Las etapas antes mencionadas se presentan en edades diferentes para los hombres y para las mujeres. En las mujeres, el aumento de la velocidad de crecimiento (estirón puberal) empieza en los 10 años y termina en los 17.5 años. En los hombres empieza a los 12 años y termina en los 19.2 años [54].

Determinar la maduración ósea no es una tarea trivial ya que ésta no necesariamente coincide con la edad cronológica, por ejemplo: un niño con baja estatura de 16 años es llevado al pediatra para saber si puede crecer, existen dos posibilidades las cuales son que la edad cronológica coincida o que no coincida con la maduración ósea. Si coinciden, significa que el desarrollo óseo casi se ha completado y que va hacer un hombre de baja estatura. Si la maduración ósea es de un niño de 12 años por decir un ejemplo, todavía sería posible el crecimiento de los huesos, es decir, tiene edad retrasada con respecto a la edad cronológica. Es por ello que la maduración ósea es un proceso independiente de la edad cronológica. Si bien los cambios de crecimiento y desarrollo son muy similares para

cada sexo tienen una gran variación y ocurren en diferentes edades cronológicas.

La ortodoncia es una especialidad de la **odontología**, es la ciencia que se encarga del estudio del conjunto de los dientes, así como sus procesos óseos. Los tratamientos de ortodoncia inciden en el tamaño, la forma, la localización o la dirección de crecimiento de la estructura craneofacial. Durante el tratamiento de ortodoncia, es muy importante la evaluación de la maduración ósea, ya que la mayoría de los pacientes que requieren tratamiento de **maloclusiones** se encuentran en un período de crecimiento activo. Por medio del tratamiento de ortodoncia se puede modificar el crecimiento facial, bien sea frenándolo, acelerándolo o redirigiéndolo hacia un vector normal [28].

Típicamente la maduración ósea se estima empleando diferentes estrategias, entre estas se pueden mencionar; aquellas que se basan en realizar un análisis integral de una serie de factores asociados al crecimiento de la persona (como maduración sexual, edad cronológica, etc.), las que se basan en análisis de radiografías de la cabeza (craneofacial), y aquellas que se basan en radiografías de otras partes del cuerpo.

Las mayores dificultades para la estimación de la maduración ósea según Ruiz [45] son:

1. Cuando se emplea la radiografía como parte del estudio, son importantes la calidad de la misma y la posición inmóvil de la zona anatómica (en este caso, la cabeza) para lograr una buena estimación de la etapa de maduración ósea.
2. En ciertas etapas de la vida el crecimiento óseo es muy pequeño, prácticamente imperceptible y difícil de medir a escala milimétrica, por lo que las variaciones en el tamaño de los huesos también lo son, lo que dificulta realizar una buena estimación de la maduración ósea.
3. La mayoría de los métodos de identificación de la maduración ósea hasta el momento han utilizado a niños sanos. Sería conveniente que los estudios acerca de la medición de la maduración ósea estuvieran conformados por niños no tan sanos, niños enfermos y niños sanos, todo esto para abarcar un espacio muestral más próximo a la realidad.

Otra cuestión que hay que tomar en cuenta es la zona geográfica de la cual es obteni-

da la muestra para hacer algún estudio, ya que es diferente la maduración ósea de una niña mexicana con la de una niña rusa a una edad cronológica determinada, por decir un ejemplo [32].

La investigación del trabajo de tesis consiste en hacer una caracterización de la maduración ósea según el sexo y la edad de niños y adolescentes con **oclusión** normal (no presentan malformaciones en la dentición) entre 9 y 16 años. Se emplearan métodos de clasificación multicriterio para realizar la caracterización a partir de mediciones tomadas en radiografías de la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical; es parte de la investigación determinar que métodos resultan los más adecuados para resolver este problema en específico.

1.3. Antecedentes

Estimar la maduración ósea de una persona es una tarea compleja debido a que numerosos investigadores han evaluado muchas técnicas diferentes como zonas del cuerpo, originando así muchos caminos para llegar a la estandarización de la estimación de la maduración ósea. Según Padrós [34] todavía no existe un método para estudiar el crecimiento craneofacial que extraiga la totalidad de información para analizar el crecimiento; en su artículo Padrós analizó los métodos siguientes: cefalometría convencional, el análisis de las contrapartes de Enlow, análisis mediante aplicaciones estadísticas, análisis morfométricos, el método de los elementos finitos, la técnica de Hasund y el polígono de Voorhies y Adams. Otros métodos introducidos recientemente son aquellos basados en radiografías de otras partes del cuerpo, dentro de estos han tenido más aceptación los basados en la mano-muñeca [2], ya que poseen una gran cantidad de huesos en proceso y por lo que resulta posible el seguimiento de los cambios a través de los años a medida que el individuo crece, así como también las radiografías en las vértebras cervicales. En un estudio realizado por Bernal [2] se corrobora la efectividad de las vértebras cervicales como indicador de maduración. Un inconveniente que tiene la estimación de la maduración ósea a partir de las radiografías de la mano-muñeca es que necesita mas de una radiografía para

llegar a tal estimación, aunque la exposición a los rayos X es mínima, lo ideal sería, una sola radiografía, lo cual es posible si se usan las vértebras cervicales [38].

A continuación se describen los modelos matemáticos más empleados en la estimación de la maduración ósea:

- Funciones elípticas de Fourier. Aplica las funciones de Fourier al estudio del crecimiento craneofacial. Aunque está limitado en el sentido de que solo es aplicable en dos dimensiones. En 1982, Kuhl y Giardina usaron este método.
- Los análisis Cluster. En 1963 Ward propuso el primer método cluster (clasificación por agrupación de características similares), este se aplica mediante representaciones gráficas estadísticas denominadas dendrogramas, que son análogas a los árboles genealógicos.
- Análisis biortogonal. Fue desarrollado por Bookstein entre 1977 y 1986. Tras determinar una serie de puntos cefalométricos, se pueden construir una serie de triángulos, en los cuales a partir de ellos se puede computar el cambio morfológico. Este método no mide la forma, sino los cambios en la forma.
- Modelo alométrico centrado. Desarrollado por Skalak. El crecimiento de los cráneos es alométrico por naturaleza, es decir, crecen de forma concéntrica con respecto a un punto centroide determinado. Sin embargo este método no se utiliza con mucha frecuencia porque existe una gran variabilidad entre el centroide del crecimiento alométrico en diferentes individuos.
- Los elementos finitos. Tiene dos atributos fundamentales: la capacidad de subdividir estructuras en un número elevado de elementos, siendo cada uno de ellos un elemento finito; y analizar los cambios de tamaño y forma que ocurren en cada uno de los elementos. En el caso del cráneo es más útil utilizar una serie de puntos anatómicos, Moss realizó varios estudios con esta idea.
- Polígono de Voorhies y Adams. Este método aplicado clásicamente a los análisis cefalométricos de Downs y de Coben consisten en colocar en un gráfico los va-

lores promedio para cada medición en líneas horizontales paralelas; unir entre sí, mediante líneas continuas, los valores mínimos y máximos correspondientes a los límites de la desviación estándar aceptables para cada valor, y marcar de forma similar pero con una línea punteada los valores del paciente. Para estudiar su crecimiento se puede transportar los datos de la predicción cefalométrica a un nuevo polígono, y valorar lo lejos que están entonces los valores del valor promedio, que se consideran normal, o de los valores máximo y mínimo de la desviación estándar.

La mayoría de estos métodos estadísticos no permite representaciones gráficas de las estructuras biológicas que se estudian, es por ello que no tienen aceptación clínica generalizada [34]. Tampoco ofrecen una interpretación sencilla ya que por lo general se requieren conocimientos matemáticos para interpretar los resultados.

1.4. Objetivo

Desarrollar una metodología científicamente fundamentada para caracterizar en términos simples la maduración ósea en niños con oclusión normal entre 9 y 16 años según grupo de edad y sexo, partiendo de mediciones realizadas en la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical.

1.5. Justificación

El conocimiento preciso del crecimiento del cráneo y la cara es importante para que se pueda diagnosticar y planear el tratamiento de ortodoncia de acuerdo con los cambios que se producirán en los distintos períodos de desarrollo [5].

Es importante determinar la maduración ósea cuando se debe realizar un tratamiento quirúrgico en una edad precoz, y en todos los casos donde se quiere contar con el crecimiento del paciente como parte coadyuvante del tratamiento [5]. El tratamiento de ortodoncia puede efectuarse en cualquier momento de la vida del paciente, normalmente

se lleva a cabo durante la adolescencia. Existen muy buenas razones para esta elección ya que en este momento a la mayoría de los pacientes les queda suficiente crecimiento potencial para poder mejorar las relaciones **intermaxilares** siendo posible controlar y colocar todos los dientes permanentes. Por otra parte, algunos tratamientos se ven favorecidos si se realizan cuando el individuo se encuentra cerca del pico de crecimiento y en una etapa desarrollo determinado; en estos casos también es muy importante poder determinar de manera precisa la maduración ósea, ya que esta proporcionará datos para poder actuar de la manera más adecuada, asegurando así el éxito de los tratamientos [33]. También es importante determinar la maduración ósea cuando se necesita realizar un **tratamiento funcional u ortopédico** en una edad tardía, para realizar **disyunción palatina** en edad tardía, o cuando se quiere asegurar el momento exacto de dar el alta de la detención, especialmente en pacientes de **clase III** o **mordida abierta**.

Según Padrós [34], Gandini et al. [15] y Bernal [2] todavía no existe un método general para estudiar la maduración ósea de un paciente y que describa ésta en términos simples.

1.6. Hipótesis

El empleo de métodos de clasificación multicriterio para caracterizar la maduración ósea en niños de 9 a 16 años con oclusión normal, partiendo de mediciones realizadas sobre radiografías de la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical, permite integrar la subjetividad del tomador de decisiones en el modelo de clasificación, así como expresar los resultados en términos simples que son fácilmente interpretables para especialistas en ortodoncia.

1.7. Metodología propuesta

Primero hay que verificar si la edad cronológica coincide con un grupo uniforme según las medidas, para ello se emplearán algoritmos de agrupamiento. Justificar el problema bajo estudio, como un problema de clasificación multicriterio. Después formular el problema

de decisión (identificar los elementos principales). Determinar el método de clasificación más adecuado para el problema que se está tratando. Y finalmente analizar los resultados.

1.8. Contribución esperada

Una metodología basada en técnicas de clasificación multicriterio para la caracterización según el grupo de edad y el sexo de la maduración ósea en niños sanos entre 9 y 16 años.

1.9. Conclusiones

El fin de este trabajo es la estimación de la maduración ósea utilizando la segunda, la tercera y la cuarta vértebra cervical en niños y adolescentes con oclusión normal y edades entre 9 y 16 años. El conocimiento de la maduración ósea es de relevancia para fines satisfactorios en los tratamientos de ortodoncia. De la literatura revisada se infiere que aún no existe un método para la estimación de la maduración ósea que resulte con una sencilla interpretación de los estadios.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1. Introducción

En este capítulo se describe en detalle el problema de la determinación de las etapas de maduración ósea de un individuo, así como el estado del arte en los métodos desarrollados para la solución del mismo.

En la siguiente sección se describen las etapas de maduración desde la perspectiva del empleo de la mano-muñeca que es la zona más usada hasta el momento, mientras que en la sección 2.3 se describe el empleo de vértebras cervicales para estimar la maduración ósea. En la sección posterior (2.4) se presenta una revisión del estado del arte de los métodos empleados para realizar la estimación de la maduración ósea, según la zona anatómica empleada, además se mencionan algunos softwares más empleados por los ortodoncistas. En la sección 2.5 se presenta una revisión del estado del arte de los modelos utilizados en el crecimiento craneofacial. En la siguiente sección (2.6) se hace otra revisión el estado del arte, pero ahora de las metodologías empleadas en la maduración ósea. Finalmente en

la sección 2.7 se elaboran conclusiones sobre el capítulo.

2.2. Etapas de la maduración ósea según la mano-muñeca

La mano-muñeca está formada por 8 huesos cortos, cuyo conjunto constituye el esqueleto de la muñeca o carpo, 5 huesos largos que forman el metacarpo y por último 14 huesos llamados falanges que constituyen el esqueleto de los dedos, estos se pueden ver en la figura 2.1. Los estadios de crecimiento de los dedos se valoran según la relación **epífisis-diáfisis** que son 3 diferentes:

1. La epífisis tiene la misma anchura que la diáfisis.
2. La diáfisis rodea a la epífisis como capuchón.
3. La epífisis osifica con la diáfisis.

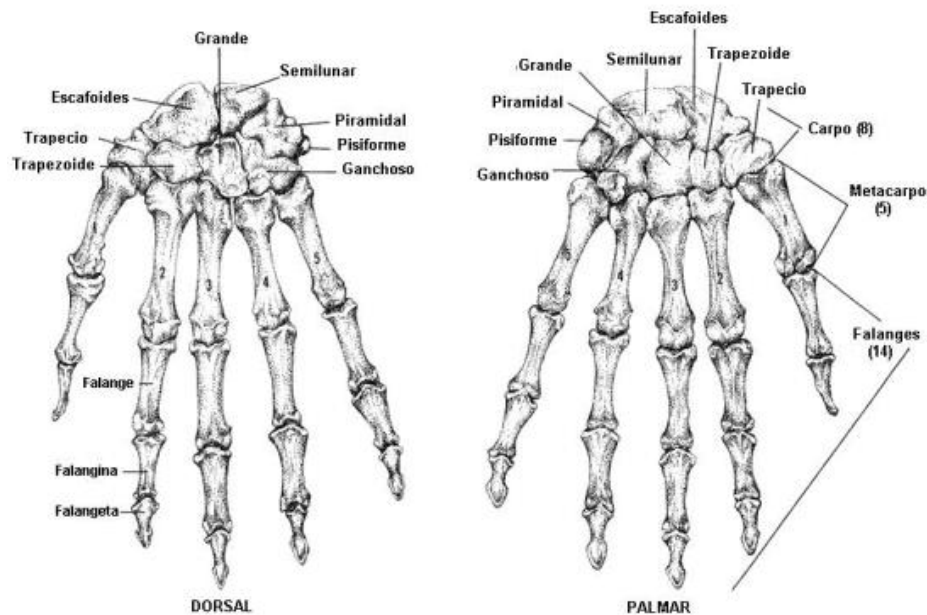


Figura 2.1: Anatomía de la mano-muñeca [25].

Según el análisis de la radiografía de mano de Bjork, Grave y Brown, se pudieron identificar los siguientes estadios de maduración [8]:

1. Primer estadio de maduración: La diáfisis de la falange proximal del dedo índice (PP2) muestra la misma anchura que la epífisis.
2. Segundo estadio de maduración: La diáfisis de la segunda falange del dedo medio (MP3) muestra la misma anchura que la epífisis.
3. Tercer estadio de maduración:
 - (Pisi): osificación visible del hueso pisiforme.
 - (H1): osificación de la **apófisis** uniforme del ganchoso.
 - (R): anchura equivalente de la diáfisis y epífisis del radio.
4. Cuarto estadio de maduración:
 - (S): inicio de la mineralización del **sesamoideo**.
 - (H2): osificación avanzada de la apófisis uncinada del ganchoso.
5. Quinto estadio de maduración:
 - (MP3 cap.): la diáfisis rodea a modo de capuchón a la epífisis, a nivel de la segunda falange del dedo medio.
 - (P1 cap.): en la falange proximal del pulgar.
 - (R cap.): en el radio.
6. Sexto estadio de maduración: (DP3u.): Fusión visible de la diáfisis y epífisis de la falange distal del dedo medio. Al alcanzarse este estadio evolutivo, termina el brote de crecimiento puberal.
7. Séptimo estadio de maduración: (PP3u.): Fusión visible de la diáfisis y epífisis de la falange proximal del dedo medio.
8. Octavo estadio de maduración: (MP3u.): Fusión visible de la diáfisis y epífisis de la segunda falange del dedo medio.

9. Noveno estadio de maduración: (Ru.): Osificación completa de la diáfisis y epífisis del radio. Al llegar a este estadio, termina la osificación de todos los huesos de la mano y, al mismo tiempo, el crecimiento óseo.

El método estándar para evaluar la madurez esquelética ha sido el uso de radiografías de mano-muñeca, ya que la mano y la muñeca poseen un gran número de huesos y epífisis en desarrollo y por lo que resulta posible el seguimiento de los cambios a través de los años a medida que el individuo crece.

En la mayoría de las investigaciones realizadas a esta zona anatómica, se hace referencia a una muestra de individuos de una localidad en particular causando que el estudio hecho sea para un grupo étnico y que no sea del todo aplicable a cualquier muestra.

2.3. Etapas de maduración ósea según las vértebras cervicales

En 1972, Lamparsky concluyó que las vértebras cervicales, vistas en el **cefalograma** lateral de rutina, eran estadística y clínicamente tan confiables para valorar la maduración ósea como la técnica de la radiografía de mano-muñeca. El encontró que los indicadores de las vértebras cervicales eran los mismos para varones y mujeres, pero que las mujeres desarrollaban los cambios más tempranamente. Otros investigadores como Hassel y Farman han continuado con este estudio y han confirmado la validez del método de Lamparsky para la evaluación de la maduración esquelética en los pacientes, logrando así la identificación de seis estados de maduración ósea por medio de las vértebras cervicales, apreciados en la figura 2.2:

1. Iniciación: Los bordes inferiores de la C2, C3 y C4 están planas. Las alturas de los bordes posteriores en la C3, C4, C5 y C6 son más altas que en los bordes anteriores.
2. Aceleración: Se empieza a desarrollar una concavidad en el borde inferior de la C2. Los bordes anteriores de la C3, C4, C5 y C6 empiezan ligeramente a crecer.

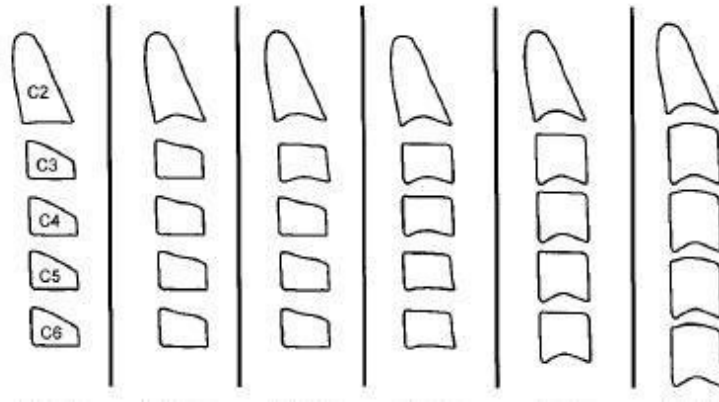


Figura 2.2: Etapas de maduración ósea (C_x = número de vértebra cervical, $x = 2,3,4,5,6$) [1].

3. Transición: Se ven notables concavidades en los bordes inferiores de C2 y C3. La C3 empieza a tomar forma rectangular.
4. Desaceleración: Se ven concavidades muy claras en los bordes inferiores de C2, C3 y C4. Los cuerpos vertebrales de C3 y C4 son casi cuadrados.
5. Maduración: Se observan concavidades acentuadas en los bordes inferiores de C2, C3, C4, C5 y C6. Los cuerpos vertebrales de C3 y C4 son casi de forma cilíndrica.
6. Completación: Se ven concavidades profundas en los bordes inferiores de C2 a C6. Los cuerpos vertebrales son mayores verticalmente que horizontalmente. El crecimiento puberal ha terminado.

Lamparski utilizó las siguientes mediciones en las segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta vértebra cervical para llevar a cabo su investigación:

- Alturas posteriores, anteriores y medias de las vértebras cervicales.
- Anchos inferiores, medios y superiores de las vértebras cervicales.
- Diferencias entre las alturas posteriores y anteriores de la tercera a la sexta vértebra cervical.
- Diferencias entre los anchos de la tercera a la sexta vértebra cervical.

Además de observar en las últimas etapas incrementos en los espacios entre las vértebras.

La ventaja que tiene el elegir esta zona contra la de la mano-muñeca es que esta última necesita más de una radiografía para llevar a cabo tal estudio y la de las vértebras cervicales es suficiente con una, aunque la exposición a rayos X es mínima lo ideal sería tener el menor contacto posible, además de que el cefalograma es un registro básico en el diagnóstico del tratamiento de ortodoncia y en éste se observan la segunda, la tercera y la cuarta vértebra cervical.

Las vértebras son una de las principales estructuras cuyo crecimiento y posición se reflejan en la estatura, considerándose el aumento de la estatura una consecuencia del crecimiento longitudinal del esqueleto [5].

En esta investigación se toma en cuenta el ángulo de maduración cervical que en investigaciones realizadas por Díaz y Martínez fue utilizado por primera ocasión, ya que esta medida es de gran ayuda en la diferenciación de las etapas de maduración ósea.

2.4. Métodos para determinar la maduración ósea, según la zona anatómica

Los métodos más importantes en la determinación de la maduración ósea son los que se pueden apreciar en el cuadro 2.1

El método de Tanner y Whitehouse es el más exacto. Cada hueso de la mano y de la muñeca se clasifica en 8 estadios a los que se asigna una puntuación. El total de la puntuación representa una cifra precisa. Tiene el inconveniente de haber sido creado para una población inglesa y escocesa de clase media en los años 60 y 70.

Hoy en día los softwares para apoyar los tratamientos de ortodoncia se han hecho más populares, entre los más reconocidos y aceptados se encuentran: Dental office, Quick Ceph Image, Dolphin Image System, Radiocef, entre otros.

Zona anatómica	Autor	Año
Mano	Pryor, Rotch y Crampton	1909
	Hellman	1928
	Todd	1937
	Greulich-Pyle	1959
	Sinclair et al.	1960
	Tanner-Whitehouse	1962, 1975, 1983
	Roche et al. (Método Fels)	1988
	Tanner-Gibbons (Método CASAS)	1994
	Sempé	1994
	Bernal et al.	2005
Codo	Sauvegrain et al.	1962
Rodilla	Pyle-Hoerr	1955
	Schunk et al.	1987
Tobillo y pie	Hoerr-Pyle	1962
	Erasmie-Ringertz	1980
	Argemi-Badia	1997
Cadera	Método de Risser	
Vértabras cervicales	Todd y Pyle	1928
	Lanier	1939
	Lamparski	1972
	Hassel y Farman	1995
	Lamparski y Nanda	2002

Cuadro 2.1: Métodos de evaluación de la maduración ósea.

- Dental office es un software que realiza una gran cantidad de análisis de cefalometría digital. Además determina la maduración ósea según la mano, este software sería más completo si su predicción de maduración ósea la realizará con otra zona

anatómica, no solo con la estándar [31].

- Quick Ceph Image también aplica la cefalometría digital para su predicción del crecimiento craneofacial, más adelante se presentan las limitaciones que tiene el uso de la cefalometría [47].
- Dolphin Image System actualmente existe la versión 2008 es un software muy potente, ofrece la posibilidad de digitalizar la imagen extra o intraoral del paciente directamente sobre la toma fotográfica captada por una cámara de vídeo, y a partir de aquí realizar predicciones de crecimiento [19].
- Radiocef es otro que aplica la cefalometría digital y utiliza el método de Eklof para la maduración ósea [29].

La cefalometría convencional, a pesar de su utilidad evidente para quien lleva años utilizándola, tiene las siguientes limitaciones:

- Los puntos anatómicos que se estudian suelen estar demasiado espaciados para realizar mediciones fiables sobre los cambios debidos al crecimiento.
- Con la cefalometría solo se puede analizar el movimiento de los puntos seleccionados y registrados, pero no se puede saber nada sobre el crecimiento de los puntos existentes entre ellos.
- En realidad puede que algunos de los puntos que intervienen no estén en crecimiento activo si se sitúan cerca de una región de tejido óseo, mientras que otros puntos, como los próximos a tejido cartilaginoso, pueden verse influenciados por los procesos de **condrogénesis** intersticial. La cefalometría no es capaz de distinguir entre estos procesos biológicos dinámicos y, sin embargo, son procesos lo suficientemente importantes como para tenerlos en cuenta al analizar el crecimiento y desarrollo craneofacial [34].
- El análisis cefalométrico consiste básicamente en la localización de los puntos cefalométricos. Algunos puntos presentan mayor dificultad que otros al momento de localizarlos [37].

- Solo podemos observar y comparar en dos dimensiones, el comportamiento de crecimiento de todos los puntos o segmentos estudiados.

2.5. Modelos matemáticos para el estudio del crecimiento craneofacial

A continuación se presentan los modelos matemáticos con mayor aceptación y aplicación, reportados en la literatura para el estudio del crecimiento craneofacial:

- Funciones elípticas de Fourier: Algunos trabajos referentes al estudio craneofacial aplican este modelo como Lu en su investigación que trata de un análisis de la cara humana, utilizó estas ecuaciones para representar las vistas frontales y laterales de la cara [27]. Lestrel también aplicó este modelo para su estudio acerca del complejo craneofacial [24]. Simon et al. usaron las funciones para describir los cambios en la forma de la mandíbula [9]. Sholts et al. también aplicó este método para la identificación de cuerpos humanos, los coeficientes de las ecuaciones resultantes se utilizaron para desarrollar funciones de discriminante para la clasificación de los individuos en función de su población ancestral [43].
- Los análisis cluster: Bacetti y Tollaro aplicaron este modelo para realizar una comparación en los tratamientos referentes a la oclusión [1]. Carreño et al. se enfocaron en concretar con mayor precisión las características de maloclusión para así llegar a posibles protocolos de tratamientos que nos faciliten su aplicación en el tratamiento [6].
- Modelo alométrico centrado: Fue uno de los primeros intentos realizados para obviar los inconvenientes de los métodos cefalométricos convencionales. Desafortunadamente, el estudio demostró que es inadecuado para su posterior utilización en el modelado de crecimiento esquelético craneofacial [30].
- Los elementos finitos: Satoshi et al. [48] dividieron el complejo craneofacial en

siete elementos o zonas para llevar a cabo el estudio, logrando como resultados que los cambios en el tamaño y la forma en el complejo maxilar son los más notorios, seguidos de los que ocurren en la mandíbula. Sasaki [40] estudió las diferencias en la naturaleza del crecimiento craneofacial entre sujetos con oclusión normal y unilateral de los pacientes con labio leporino y fisura palatina en términos de tamaño, la forma y la dirección principal de crecimiento del esqueleto craneofacial. Guang-Quan [46] realizaron el análisis de estrés de los dientes restaurados después de un tratamiento en tres dimensiones.

Estos modelos tienen el inconveniente de que su interpretación no es directa, ya que se necesita tener conocimiento matemático para poder llegar a interpretar los resultados obtenidos, lo cual quizá explique el porque no son ampliamente utilizados por los especialistas en la práctica diaria.

2.6. Métodos para determinar la maduración ósea, según la metodología

La clasificación en cuanto a la metodología empleada para estimar la maduración ósea, es la siguiente [45]:

1. Métodos planimétricos: Utilizan el tamaño o superficie de determinados huesos, pero son indicativos de crecimiento y no de maduración. Existe un trabajo realizado por Schunk et al. en 1987 utilizando **ecografías** en recién nacidos [41].
2. Atlas: Se basan en la comparación de una radiografía problema con una serie de radiografías estándares, tomadas de una muestra de la población general y se le adscribe la maduración ósea que corresponda al estándar más parecido o a una edad intermedia entre dos estándares sucesivos. La problemática que presenta este método es que no estamos valorando la maduración ósea, sino comparando con la maduración que presenta la media de la población a esa determinada edad cronológica.

3. Método numéricos: Describen una serie de indicadores de maduración para cada núcleo de osificación y se les asigna una puntuación a cada uno de los estadios evolutivos según el sexo. La suma de las puntuaciones nos dará la maduración ósea. La problemática que presenta este método es que el peso diferente de los núcleos de osificación, siendo el de algunos de ellos tan grande que la asignación de un estadio de diferencia, por ejemplo del radio (por la visualización o no de alguna carilla articular), nos puede dar una diferencia en algunas edades de hasta un año.

Estrada y Cabello [4] realizaron una evaluación de la maduración ósea mediante mediciones métricas automatizadas, el cual consistió primero en obtener las radiografías de la mano y muñeca izquierda después se empleó la técnica de Tanner para la evaluación de la maduración ósea. Para la valoración automatizada de la maduración ósea en las imágenes radiográficas se recurrió al programa denominado IMAGO-2 de la Universidad de Córdoba. Este software, diseñado para el análisis automatizado de imágenes, permite la obtención de diversas mediciones y relaciones planimétricas. Una parte del programa ha permitido determinar diferentes características geométricas de las figuras en estudio, entre ellas el área, el perímetro y las coordenadas del centro de gravedad. Partiendo del conocimiento del centro de gravedad se han calculado varios parámetros métricos que informan sobre el tamaño (crecimiento) del hueso, como el radio medio, radio máximo y mínimo y el diámetro. Se procedió a realizar un análisis de regresión múltiple para valorar la relación entre la variación de los datos auxológicos (peso, talla, maduración ósea, etc.) y la de los parámetros informatizados de maduración ósea. Se concluye que es difícil catalogar categóricamente a una medida como indicador exclusivo de maduración o de crecimiento. Los parámetros estudiados se correlacionan mejor con la maduración ósea que con otros datos auxológicos (peso o talla), lo que podría indicar su utilidad para la valoración de la maduración ósea.

Tristán et al. [52] estudiaron el grado de concordancia que muestran entre sí los métodos más usados en la medición de la maduración ósea (Sempé, Tanner-Whitehouse y Greulich y Pyle) y determinaron el grado de concordancia de la maduración ósea obtenida mediante dichos métodos con la edad cronológica en los niños. Es importante mencionar que el

método de Greulich-Pyle está basado en niños americanos, el de Tanner-Whitehouse en niños anglosajones y el de Sempé en niños franceses. Para el análisis estadístico se utilizó el paquete estadístico SPSS para Windows, versión 11.0. Se concluye que los métodos de Sempé y el Atlas de Greulich y Pyle son los más concordantes entre si y en la comparación con la edad cronológica.

Hassel y Farman [18] desarrollaron un índice de maduración ósea por medio de las vértebras cervicales usando una radiografía cefalométrica. El sistema desarrollado por Fishman fue requerido para obtener la maduración ósea por medio de la mano y muñeca izquierda. Teniendo los estadios de maduración ósea procedieron a buscar la mayor correlación posible con los estadios de las vértebras que iban encontrando, hasta llegar a la clasificación de las etapas de maduración ósea: iniciación, aceleración, transición, desaceleración, maduración y completación. Además, lograron detectar que la tercera vértebra cervical es la que más ayuda en la diferenciación de estas categorías.

San Román et al. [38] en su investigación realizaron una comparación de la maduración ósea de la mano-muñeca y las vértebras cervicales. Para la mano-muñeca usaron la técnica de Grave-Brown y para las vértebras cervicales usaron las etapas de Lamparsky y Hassel-Farman. Desarrollaron además un nuevo método para la estimación de la maduración ósea el cual está basado en los cambios morfológicos que sufren las vértebras cervicales, siendo estos cambios: la concavidad del borde inferior, la altura y cambios en la forma de las vértebras cervicales, formando una ecuación de regresión múltiple en función de estos cambios morfológicos para estimar la maduración ósea según la mano-muñeca, obteniéndose las siguientes conclusiones: este método es tan exacto como el de Hassel y Farman y es superior a la clasificación de Lamparski, además la concavidad en el borde inferior es el mejor parámetro del estudio.

2.7. Conclusiones

Se revisaron los estudios más sobresalientes con respecto a la maduración ósea y se llegó a concluir que la estimación de las etapas de maduración ósea es compleja debido

a los errores que ocurren, ya sea en las mediciones empleadas o a los de apreciación o a que intervienen muchos factores o a que es un proceso continuo, por decir algunos. Como se vió en este capítulo, diferentes investigadores emplearon diferentes partes anatómicas, lo cual nos lleva a que no existe una estandarización en las etapas de maduración ósea; además estas investigaciones están basadas con muestras de distintos países.

Algunos de los trabajos consultados a lo largo de este capítulo muestran el empleo de ecuaciones de regresión para poder estimar las etapas de maduración ósea. En el trabajo de Román et al. se mezclaron dos partes anatómicas resultando que se obtuvieran más de una radiografía y en el estudio efectuado por Estrada y Cabello concluyeron que es difícil catalogar categóricamente a una medida como indicador exclusivo de maduración o de crecimiento. Se revisaron también algunos modelos matemáticos que resultaron ser inadecuados o no intuitivos para establecer una caracterización robusta y eficiente de la maduración ósea.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la base teórica de la tesis y se revisan las bases de las herramientas empleadas para este trabajo de investigación. La organización de este capítulo es la siguiente: primero se muestran los conceptos básicos de la teoría de decisión (sección 3.2); en la siguiente sección se define el problema de clasificación (sección 3.3), así como las técnicas de clasificación más reconocidas, por ejemplo: análisis discriminante, árboles de decisión y fuzzy set theory (teoría de conjuntos difusos). En la sección 3.4 se detalla el concepto de agrupamiento y algunos métodos de los más empleados: K medias, jerárquico y robust fuzzy clustering (agrupamiento difuso robusto).

3.2. Conceptos básicos de la teoría de la decisión

Se puede pensar en una decisión como una elección entre varias alternativas que produzcan futuros inciertos, para los que tenemos preferencias [13].

Una decisión es definida como la selección de una alternativa de un conjunto; es todo un proceso que incluye:

- Determinar el problema.
- Coleccionar y verificar la información.
- Identificar alternativas.
- Anticipar consecuencias de las decisiones.
- Tomar la opción usando un juicio lógico basado en la información disponible.
- Informar a los otros de la decisión y hacer un razonamiento.
- Evaluar decisiones.

Para cualquier decisión en cualquier contexto, la experiencia (conocimiento adquirido a través de la práctica) toma un valor primordial en la elección de la alternativa [20].

Bohanec [3] clasifica la toma de decisión en dos tipos: mecanismos y humana. Esto porque hoy en día en el área de inteligencia artificial existen un gran número de mecanismos que toman decisiones por ejemplo: circuitos, programas de computadora, sistemas expertos, agentes, robots, etc. Cabe mencionar que el concepto de apoyo a la decisión concierne en la toma de decisión humana.

Las ciencias de la decisión cubren tres posibles aspectos en común de la toma de decisión humana [3]:

1. Normativo: Incluye aproximaciones teóricas tales como teoría de la decisión, teoría de la utilidad multiatributo, teoría de juegos, teoría de selección, entre otras.

2. Descriptivo: Está relacionada con la psicología cognitiva, ciencias sociales y conductuales.
3. Apoyo a la decisión: Conjunto de disciplinas relacionadas para ayudar a las personas a tomar decisiones [7]. Algunas de estas disciplinas son: filosofía, psicología, economía, estadística, ciencias computacionales, entre otras.

De acuerdo con Simon [9] el proceso de la toma de decisión está conformado por las siguientes etapas: inteligencia, diseño y elección. La etapa de implementación fue agregada después. En la figura 3.1 se presentan algunas de las acciones realizadas en cada una de las etapas del proceso de la toma de decisión.

La fase de inteligencia es más que nada identificar el problema con ayuda de los síntomas que se presentan y determinar la magnitud del mismo. La fase de diseño consiste en formular el modelo y generar las entradas. En la etapa de elección se lleva a cabo la decisión. La fase de implementación es poner en marcha el modelo diseñado para obtener la alternativa más preferida.

Los problemas de decisión se clasifican en discretos y continuos, en la figura 3.2 se pueden apreciar los dos tipos.

- Problemas discretos: El conjunto de alternativas es finito y no muy grande.
- Problemas continuos: El conjunto de alternativas es infinito o contiene un número muy grande de alternativas.

El problema de decisión también puede clasificarse, según el propósito [12].

1. Identificar la mejor alternativa o seleccionar un conjunto limitado de las mejores alternativas (choice).
2. Construir un rango de alternativas de las mejores a los peores preferidas (ranking).
3. Clasificar u ordenar las alternativas en grupos homogéneos predefinidos (classification/sorting). Los grupos son nominales u ordinales. El problema principal de esta investigación se modelará como un problema de clasificación.

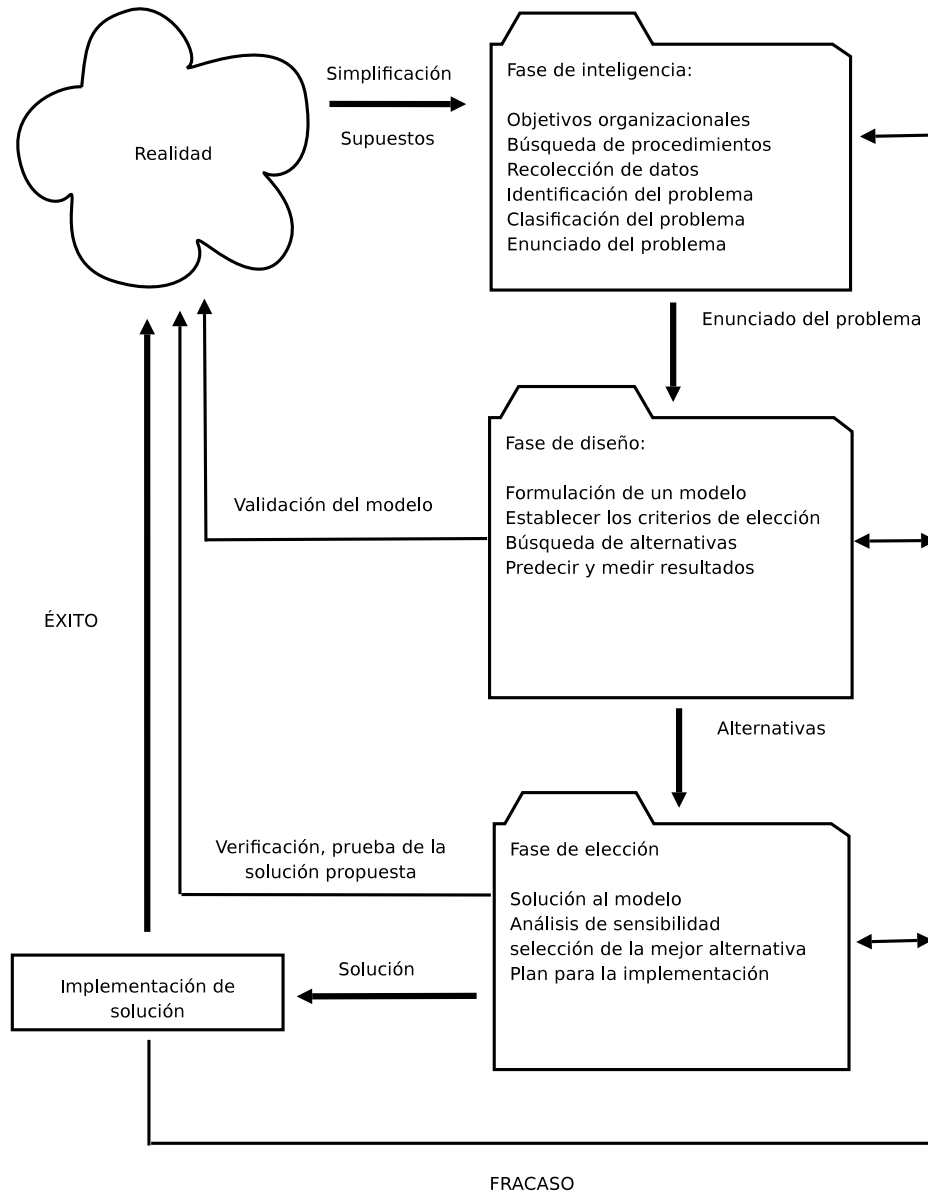


Figura 3.1: El proceso de toma de decisión [7].

- Identificar las mejores características distintivas de las alternativas y realizar una descripción basado en estas características (description).

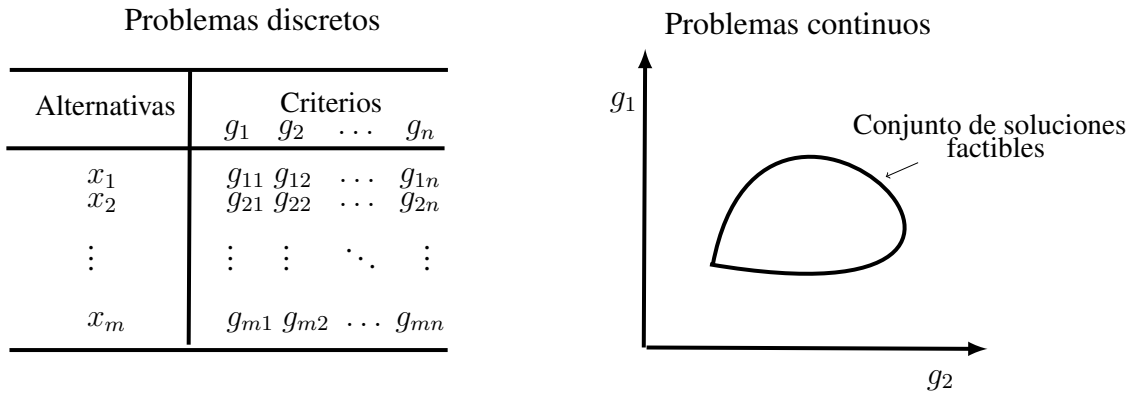


Figura 3.2: Clasificación de los problemas de toma de decisión [12].

3.3. El problema de clasificación

Clasificación se refiere a la asignación de un conjunto finito de alternativas a un grupo predefinido, las alternativas se describen mediante un conjunto de atributos. Existen otros términos como discriminación y sorting para referirse a esta forma de toma de decisión. Los conceptos de discriminación y clasificación se refieren a problemas donde los grupos son definidos de manera nominal, cada grupo provee una descripción de sus miembros y no incorpora información adicional. Sorting se refiere a problemas donde los grupos son definidos de forma ordinal, por lo tanto, incorpora información preferencial [12].

Hasta hace poco la mayoría de los métodos propuestos para el desarrollo de modelos de clasificación operaban en base a la filosofía de regresión; un esquema de desarrollo de modelos de clasificación basado en esta filosofía es presentado en la figura 3.3.

En la regresión estadística tradicional el objetivo es identificar la función de relación de una variable dependiente Y y un vector de variables independientes X . La diferencia entre la regresión y el problema de clasificación, es que en este último la variable dependiente no es una variable real, pero es discreta. La variable dependiente que determina la clasificación de las alternativas va a ser denotada por C , mientras que los grupos van a ser denotados por C_1, C_2, \dots, C_q , donde q es el número de grupos. Similarmente, g va a denotar el vector de variables independientes (g_1, g_2, \dots, g_n) . Las variables independientes van a referirse a los criterios o atributos. Los atributos definen una descripción nominal de

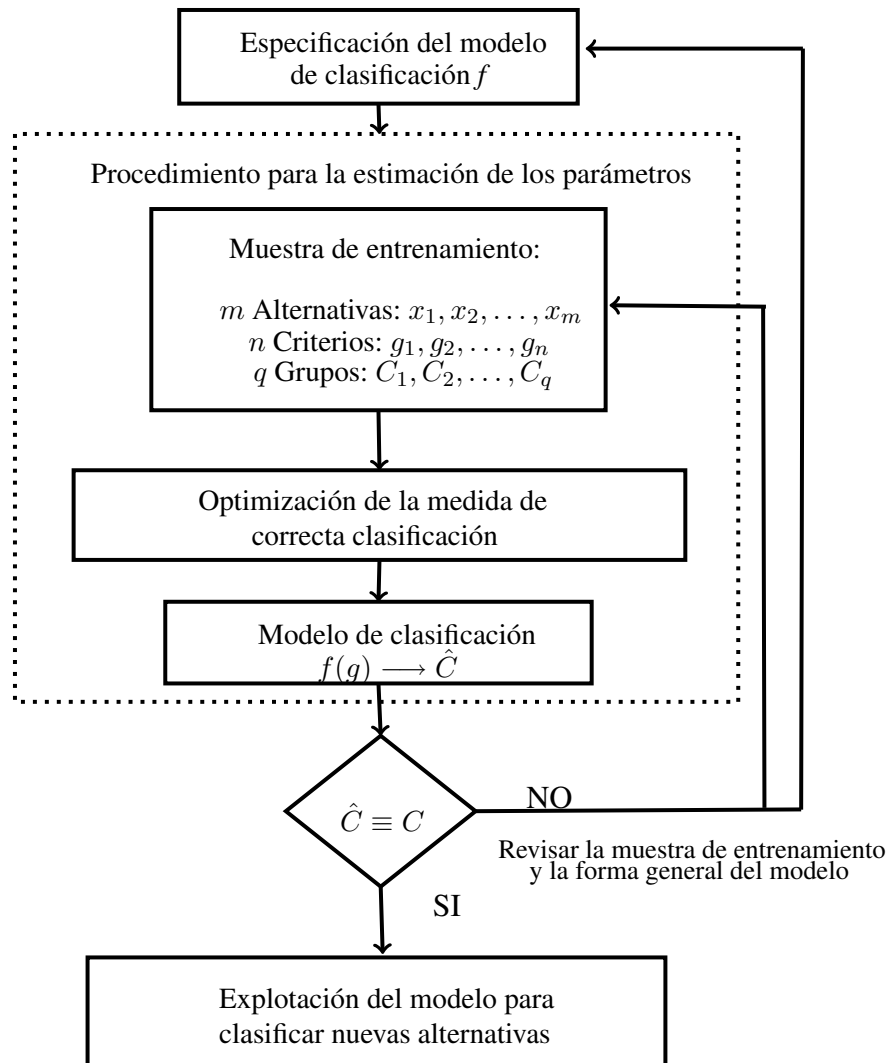


Figura 3.3: Esquema general de un modelo para problemas de clasificación [12].

las alternativas, mientras que un criterio define una descripción ordinal.

El conjunto de observaciones usadas para el desarrollo del modelo de clasificación puede referirse a la muestra de entrenamiento o un conjunto de referencia. Cada alternativa X_j es considerada como un vector de atributos, por ejemplo: $X_j = (g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jn})$.

En base a esta notación, el problema de clasificación implica el desarrollo del modelo de la forma $f(g) \rightarrow \hat{C}$, el cual puede ser usado para determinar la clasificación de las alternativas por medio de características descritas usando un vector de criterios g . Se desea minimizar la diferencia de la clasificación estimada \hat{C} y la clasificación a priori C , optimizando la medida de exactitud de clasificación para la muestra de entrenamiento. Si

la clasificación estimada \hat{C} es muy parecida a la clasificación a priori C , entonces se puede explotar el modelo para clasificar nuevas alternativas.

En la figura 3.4 se pueden distinguir las metodologías de los modelos de clasificación: por una parte están los métodos cuantitativos (cuyo algoritmo general se ha mostrado mas arriba en la figura 3.3) y por la otra los métodos basados en reglas o cualitativos (cuya forma general se describió en el párrafo anterior). Estas dos formas de representación de los modelos de clasificación tienen como objetivo el desarrollo de una relación de los criterios y de la clasificación, también se desea optimizar la medida de exactitud de la clasificación. Las técnicas más importantes que emplean estos tipos de formas de modelos de clasificación se explicarán con detalle más adelante.

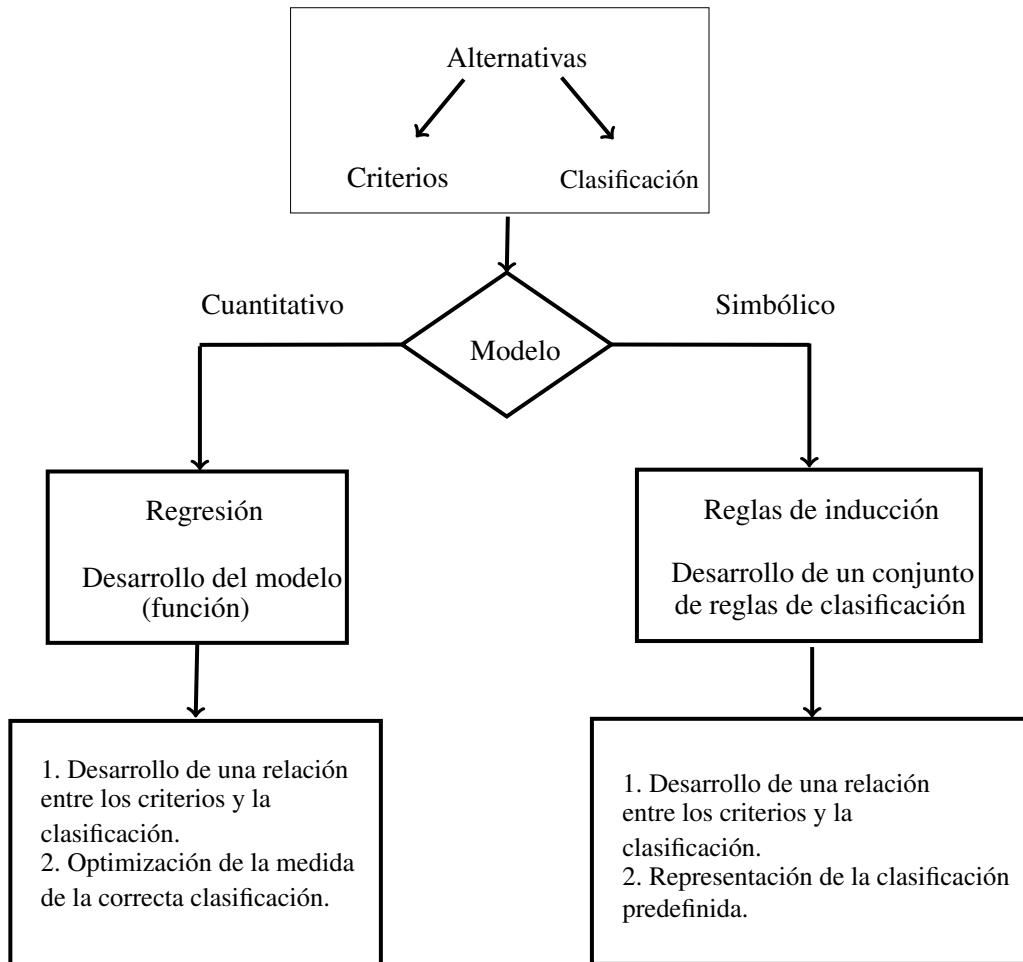


Figura 3.4: Metodologías de modelos de clasificación [12].

3.3.1. Técnicas de clasificación

En la literatura se encontró que los métodos mas destacados en la clasificación son: el análisis discriminante, los árboles de decisión y la teoría de conjuntos difusos.

Análisis discriminante

El análisis discriminante ayuda a identificar las características que diferencian a dos o más clases y a crear una función que maximice la distancia de separación entre las clases y al mismo tiempo compacte las distancias de los elementos de una misma clase. Además de clasificar nuevos individuos en alguna de las clases, en función de los valores que toman ciertas variables para esos individuos [12].

Para llegar a conocer en qué se diferencian los grupos necesitamos disponer de la información (cuantificada en una serie de variables). Debemos de saber la variable que clasifica a los individuos, ésta se utiliza como variable dependiente. Las variables en las que suponemos que se diferencian los grupos se utilizan como variables independientes (también llamadas variables discriminantes). Obteniendo una combinación lineal de las variables independientes que permita discriminar a los grupos.

Es importante mencionar los supuestos de este análisis: que los datos se distribuyan normalmente y la matriz de varianza-covarianza para todos los grupos sea la misma.

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p, \quad (3.1)$$

donde p es el número de variables discriminantes y los coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_p\}$ se eligen de tal forma que se consiga la máxima separación entre el número de grupos existentes estadísticamente este criterio equivale a maximizar la varianza entre grupos frente a la varianza dentro de grupos. Por tanto, los coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_p\}$ se elegirán de tal forma que se consiga maximizar el valor del cociente:

$$\lambda = \frac{\text{varianza entre grupos}}{\text{varianza dentro de grupos}}. \quad (3.2)$$

En primer lugar, hay que señalar que el número de funciones que pueden obtenerse es el mínimo entre el número de variables discriminantes y el número de grupos menos uno.

Para determinar cuantas funciones discriminantes son significativas existen varios criterios, entre los cuales, los más utilizados son los siguientes:

- Pcentaje relativo: Este criterio compara entre sí las funciones discriminantes cuantificando, en términos relativos, el poder discriminatorio de cada una de ellas con respecto al total, es decir, calculando el porcentaje del poder discriminante correspondiente a cada una de ellas sobre el total acumulado por todas las funciones.
- Coeficiente de correlacion canonica (η): Este coeficiente mide, para cada función discriminante Y , el grado en que difieren las medias de dicha funcion en los distintos grupos.
- Estadístico λ de Wilks : Es también una medida de las diferencias entre los grupos debidas a las funciones discriminantes, que se utiliza, no tanto para contrastar la significación de una función concreta, sino para medir de forma secuencial el poder discriminatorio de cada una de las funciones que se van construyendo, empezando siempre por la primera, que es la de mayor capacidad discriminatoria.

Una vez obtenidas las funciones discriminantes, nuestro objetivo es establecer la contribución relativa de las distintas variables a la discriminación, o lo que es lo mismo, determinar cuáles son las variables que más contribuyen a discriminar entre un grupo y otro. Entre los criterios más utilizados a este respecto cabría destacar los siguientes:

- Posición de los centroides de grupo: El centroide de un grupo representa el valor medio que alcanzan las funciones discriminantes en dicho grupo y, por tanto, se calcula como la media de las puntuaciones discriminantes para los individuos pertenecientes al grupo.
- Coeficientes estandarizados: Ayuda mucho cuando las variables discriminantes suelen medir magnitudes muy diferentes o venir expresadas en unidades distintas, lo cual dificulta su comparación.

- Coeficientes de correlación o de estructura: Para cada una de las variables discriminantes, es posible calcular el coeficiente de correlación lineal entre dicha variable y cada una de las funciones discriminantes.

Las variables se irán incluyendo en el modelo una a una, según sea su capacidad discriminatoria. De esta forma, es muy probable que, finalmente, no todas las variables originales se utilicen para construir las funciones discriminantes: únicamente se incluirán aquellas que más contribuyan a separar los grupos, con respecto a un cierto criterio, y se desestimarán aquellas cuya contribución sea escasa, bien porque no son relevantes o porque la información que aportan ya esté recogida por alguna (o varias) de las variables ya incluidas en el modelo y resultan redundantes.

Entre los criterios para decidir qué variables entran o no en la definición de la función discriminante, cabría citar, entre otros, los siguientes: el estadístico λ de Wilks, la distancia de Mahalanobis y el estadístico V de Rao. Estos últimos 2 criterios se detallan brevemente al final de esta sección.

Una vez establecido el criterio para decidir qué variable entra en el modelo en cada etapa, existen varias opciones sobre cómo realizar la selección en las distintas etapas. El método que se utiliza en este trabajo, conocido como selección paso a paso (Stepwise) procede de la siguiente forma.

En un principio se selecciona la variable que proporciona la máxima discriminación entre los grupos con el criterio elegido. Esta selección se hace contrastando, para cada variable, la hipótesis de igualdad de medias en todos los grupos, para lo cual se utiliza una prueba de la F que, en este caso, es una función del estadístico λ de Wilks de la forma:

$$F = \frac{(n - g)}{(g - 1)} \left(\frac{1 - \Lambda}{\Lambda} \right), \quad (3.3)$$

donde n es el número de individuos y g es el número de grupos. La primera variable seleccionada será la que minimice el λ de Wilks, o equivalentemente, la que proporcione un valor del estadístico F mayor y significativo.

En el segundo paso, la variable seleccionada se empareja con cada una de las $p - 1$ variables restantes, y se elige aquella pareja que produce la mayor discriminación (el mayor

valor estadísticamente significativo del correspondiente estadístico F). En este caso, en que una variable se añade a un modelo que ya contiene otra(s) variable(s), el valor de F tiene la siguiente expresión:

$$F = \frac{(n - g - s)}{(g - 1)} \left(\frac{1 - \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_s}}{\frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_s}} \right), \quad (3.4)$$

donde s es el número de variables previamente incluidas y Λ_s y Λ_{s+1} son los valores de la λ de Wilks antes y después de añadir la nueva variable, respectivamente. El estadístico F en 3.4, que se distribuye según una F con $(g - 1, n - s - g + 1)$ grados de libertad, representa el incremento producido en la discriminación tras la incorporación de la nueva variable con respecto al total alcanzado con la(s) variable(s) ya incluida(s) previamente. Por tanto, la variable elegida será la que tenga un mayor valor de F , es decir, la que más incrementa la capacidad discriminante.

La tercera y posteriores variables se seleccionarían de forma similar, pero comprobando, tras cada etapa, si las variables seleccionadas previamente siguen siendo significativas o si, por el contrario, alguna de ellas puede excluirse. En ciertos casos, una variable puede ser muy útil al principio del proceso de selección pero, después de haber incluido otras tantas variables, puede perder capacidad discriminadora y dejar de ser significativa porque, por ejemplo, la información que contiene resulta redundante. Esta variable sería entonces eliminada del modelo antes de proseguir con la selección de la siguiente variable. Para decidir si una variable se elimina, se utiliza nuevamente la prueba de la F de la forma 3.4 que, en este caso, representaría el descenso que se produce en la discriminación debido a la supresión de la variable que sale.

Con este método de selección paso a paso, en cada etapa puede entrar, y también salir, una variable, dependiendo del valor del correspondiente estadístico F asociado al estadístico λ de Wilks en esa etapa o, en general, al estadístico que se utilice como criterio de selección. El proceso de entrada/salida de variables termina cuando ninguna de las que están fuera del modelo cumple el criterio de entrada o cuando la variable seleccionada para entrar es una de las que se acaban de eliminar o, finalmente, cuando ninguna de las variables del modelo cumple el criterio de salida.

A continuación se describen brevemente los criterios de la distancia de Mahalanobis y

el estadístico V de Rao, para decidir qué variables entran en la función discriminante [12].

En la distancia de Mahalanobis, se incorpora en cada paso la variable que maximiza esta distancia entre los dos grupos más próximos. La distancia multivariante entre los grupos a y b se define como:

$$H_{ab}^2 = (n - g) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_{ij}^* \left(\bar{X}_i^{(a)} - \bar{X}_i^{(b)} \right) \left(\bar{X}_j^{(a)} - \bar{X}_j^{(b)} \right), \quad (3.5)$$

donde n es el número de casos válidos, g es el número de grupos, $\bar{X}_i^{(a)}$ es la media del grupo a en la i -ésima variable independiente, $\bar{X}_i^{(b)}$ es la media del grupo b en la i -ésima variable independiente, y w_{ij}^* es un elemento de la inversa de la matriz de varianzas-covarianzas intra-grupos.

El estadístico V de Rao es una transformación de la traza de Lawley-Hoteling, que es directamente proporcional a la distancia entre los grupos. Al utilizar este criterio, la variable que se incorpora al modelo es aquella que produce un mayor incremento en el valor de V :

$$V = (n_k - g) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_{ij}^* \sum_{k=1}^g \left(\bar{X}_i^{(k)} - \bar{X}_i \right) \left(\bar{X}_j^{(k)} - \bar{X}_j \right), \quad (3.6)$$

donde p es el número de variables en el modelo, g es el número de grupos, n_k es el número de casos válidos del grupo k , $\bar{X}_i^{(k)}$ es la media del grupo k en la i -ésima variable, \bar{X}_i es la media de todos los grupos en la i -ésima variable, y w_{ij}^* es un elemento de la inversa de la matriz de varianzas-covarianzas intra-grupos.

Análisis discriminante lineal

El propósito del análisis discriminante lineal es clasificar objetos. Aplicando el criterio de minimización del error total de clasificación (total error of classification, TEC), tenderemos a hacer que la proporción de objetos clasificados incorrectamente sea lo mas pequeña posible. La regla de clasificación es asignar un objeto a un grupo con la mayor probabilidad condicionada. Esta es llamada la regla de Bayes, esta minimiza el TEC. Si hay g grupos, la regla de Bayes asigna el objeto al grupo i , donde

$$P(i|x) > P(j|x), \forall j \neq i, \quad (3.7)$$

es de interés conocer la probabilidad $P(i|x)$, de que el objeto pertenece al grupo i , dado un conjunto de medidas x . Sin embargo, en práctica esta probabilidad es difícil de obtener. Se puede obtener $P(x|i)$ esta es la probabilidad de conseguir un conjunto particular de medidas x , dado que el objeto proviene del grupo i .

Afortunadamente hay una relación entre estas dos probabilidades condicionadas, que es el teorema de Bayes.

$$P(i|x) = \frac{P(x|i)P(i)}{\sum_{\forall j} P(x|j)P(j)}. \quad (3.8)$$

La probabilidad a priori $P(i)$ es la probabilidad acerca del grupo i sin tomar en cuenta alguna medida. En la práctica, se puede suponer que esta probabilidad es igual para todos los grupos. Sin embargo, en la práctica la regla de Bayes es impráctica porque la $P(x|i)$ necesita de muchos datos para obtener las frecuencias relativas de cada grupo para cada medida. Si asumimos que cada grupo tiene distribución normal multivariada y todos los grupos tienen la misma matriz de covarianza, tenemos lo que se denomina la fórmula de análisis discriminante lineal [50]:

$$f_i = \mu_i C^{-1} x_k^T - \frac{1}{2} \mu_i C^{-1} \mu_i^T + \ln(p_i). \quad (3.9)$$

El segundo término ($\mu_i C^{-1} \mu_i^T$) es la distancia de Mahalanobis, la cual es la medida de disimilaridad entre los grupos [50].

Árboles de decisión/clasificación

Los árboles de decisión se definen como una colección de reglas de condición “si-entonces” para asignar etiquetas de clases a instancias de un conjunto de datos [53]. Los árboles de decisión están compuestos de nodos que especifican un atributo de los datos, también están constituidos de aristas que representan la condición del valor de cada atributo y por último están los nodos hojas que corresponden a la decisión de la asignación de la clase para alguna instancia, en la figura 3.5 se puede apreciar un ejemplo de un árbol de decisión. En este ejemplo, si los valores de los atributos de una alternativa “x” son $g_1 = 1$ y $g_2 = 0.3$ entonces pertenece a la clase C_2 .

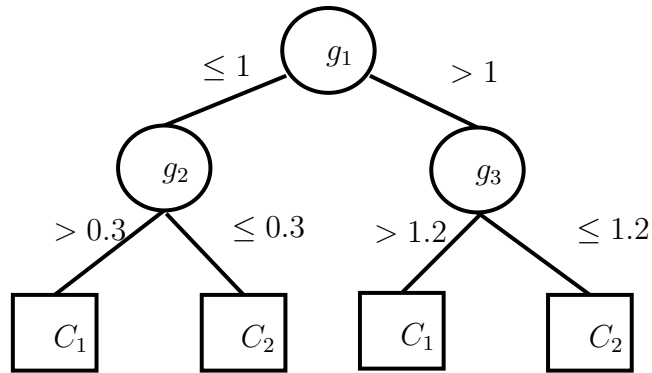


Figura 3.5: Árbol de decisión/clasificación [12].

A continuación se presenta el algoritmo básico de inducción de árboles de decisión, TDIDT (Top Down Induction of Decision Trees) [22].

1. **Entrada:** D conjunto de N patrones etiquetados, cada uno de los cuales está caracterizado por n variables predictoras X_1, \dots, X_n y la variable clase C
2. **Salida:** Árbol de clasificación
3. **Inicia TDIDT**
4. **Si** todos los patrones de D pertenecen a la misma clase c
5. **Entonces**
6. Resultado de la inducción es un nodo simple (nodo hoja) etiquetado como c
7. **Si no**
 - a) Seleccionar la variable más informativa X_r con valores $x_r^1, \dots, x_r^{n_r}$
 - b) Particionar D de acorde con los n_r valores de X_r en D_1, \dots, D_{n_r}
 - c) Construir n_r subárboles T_1, \dots, T_{n_r} para D_1, \dots, D_{n_r}
 - d) Unir X_r y los n_r subárboles T_1, \dots, T_{n_r} con los valores $x_r^1, \dots, x_r^{n_r}$
8. **Fin**
9. **Fin de Si**

10. Fin de TDIDT

La idea principal de este algoritmo consiste en encontrar en primer lugar la variable más discriminadora para así formar las clases, después encontrar las otras variables discriminadoras y así formar un árbol de clasificación.

Algunas técnicas más utilizadas para la clasificación son los algoritmos ID3, C4.5 y See5, estos algoritmos fueron desarrollados por Quinlan [22].

El algoritmo See5 constituye una extensión de los algoritmos ID3 y C4.5 la misión del algoritmo es la elaboración de un árbol de decisión bajo las siguientes premisas [10]:

1. Cada nodo corresponde a un atributo y cada rama al valor posible de ese atributo. Una hoja del árbol especifica el valor esperado de la decisión de acuerdo con los ejemplos dados. La explicación de una determinada decisión viene dada por la trayectoria desde la raíz a la hoja representativa de esa decisión.
2. A cada nodo se le asocia aquel atributo más informativo que aún no haya sido considerado en la trayectoria desde la raíz.
3. Para medir el nivel informativo de un atributo se emplea el concepto de **entropía**. Cuanto menor sea el valor de la entropía, menor será la incertidumbre y más útil será el atributo para la clasificación.

Las versiones iniciales de este algoritmo usaba un criterio denominado ganancia para elegir el atributo (variable) en base al cual hacer cada partición de las que forman el árbol [10]. Muy brevemente, la idea es la siguiente: la información que contiene un mensaje depende de su probabilidad y puede ser medida en bits como menos el logaritmo en base 2 de esa probabilidad.

Se selecciona al azar un caso de un conjunto T de casos, teniendo conocimiento de que es miembro de una clase C_j . La probabilidad de este mensaje es $\frac{\text{freq}(C_j, T)}{|T|}$, y la información que contiene es $-\log_2\left(\frac{\text{freq}(C_j, T)}{|T|}\right)$ bits, donde $\text{freq}(C_j, T)$ representa el número de casos en el conjunto T que pertenecen a la clase C_j y $|T|$ denota el número de observaciones que contiene el conjunto T . Entonces, la cantidad media de información necesaria

para identificar la clase de entre k clases posibles a la que pertenece un caso en el conjunto T (o entropía del conjunto T) viene dada por la expresión:

$$\text{info}(T) = - \sum_{j=1}^k \frac{\text{freq}(C_j, T)}{|T|} \times \left(\frac{\text{freq}(C_j, T)}{|T|} \right) \text{ bits.} \quad (3.10)$$

Se divide este conjunto de acuerdo con los valores que tome un atributo X , entonces para clasificar cada caso se necesita una cantidad de información menor que la anterior. Esta cantidad vendrá dada por:

$$\text{info}_X(T) = \sum_{i=1}^n \frac{|T_i|}{|T|} \times \text{info}(T_i), \quad (3.11)$$

donde T_i es cada una de las particiones hechas considerando el atributo X y $|T_i|$ el número de observaciones que contiene cada una de dichas particiones. La magnitud

$$\text{gain}(X) = \text{info}(T) - \text{info}_X(T) \quad (3.12)$$

mide la cantidad de información que se gana dividiendo el conjunto de datos T de acuerdo con el atributo X . Entonces, el criterio de ganancia selecciona para hacer la partición aquel atributo para el cual se maximiza la ganancia de información.

Posteriormente, Quinlan observó que este criterio favorecía a aquellos atributos con un número mayor de valores posibles. Para evitar este sesgo que favorece a los atributos con muchos valores posibles tomó la magnitud:

$$\text{split info}(X) = - \sum_{i=1}^n \frac{|T_i|}{|T|} \times \log_2 \left(\frac{|T_i|}{|T|} \right), \quad (3.13)$$

que representa la entropía del conjunto T cuando es dividido de acuerdo con los valores que toma el atributo X . Esta entropía será tanto mayor cuanto más elevado sea el número de dichos valores. De este modo, puede ser utilizado como divisor de $\text{gain}(X)$ para corregir los elevados valores que esta magnitud tomará para aquellos atributos que adopten un mayor número de valores posibles. Entonces, el atributo elegido para la partición será aquel para el cual el ratio de ganancia sea mayor, definiéndose esta medida como:

$$\text{gain ratio}(X) = \frac{\text{gain}(X)}{\text{split info}(X)}. \quad (3.14)$$

El árbol construido por aplicación reiterada de este criterio consta del mínimo número de atributos (variables) que se requieren para la clasificación correcta de los ejemplos dados, con lo que es claro el gran poder explicativo de esta técnica. También se pueden elaborar, a partir del árbol, una serie de reglas de clasificación más simples y fácilmente interpretables que definen las características que más diferencian a las distintas categorías establecidas inicialmente [10].

Teoría de conjuntos difusos

Teoría de conjuntos difusos o borrosos, desarrollado por Zadeh en 1965, provee herramientas necesarias para la representación de situaciones complejas del mundo real. La teoría de los conjuntos difusos extiende el concepto de pertenencia de un conjunto, incorporando una función de pertenencia de conjunto. La función de pertenencia toma valor 0 si el elemento evaluado no pertenece al conjunto, valor 1 si el elemento evaluado pertenece al conjunto, y toma un valor entre 0 y 1 si el elemento evaluado pertenece parcialmente al conjunto [51]. Ejemplos de conjuntos difusos son las clases de objetos caracterizadas como largo, corto, simple, aproximado, etc.

Actualmente, el número de investigadores que se enfrenta a los problemas de información borrosa y antecedentes confusos es muy grande, éste es un punto crítico para la creación de sistemas de ayuda a la decisión. El triángulo de números borrosos es usado con frecuencia para computar los pesos de importancia de los criterios de decisión.

Un número borroso M en los $\mathbb{R} \in (-\infty, +\infty)$ es definido como un triángulo de números borrosos si la función de pertenencia $\mu_m : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es igual a:

$$\mu_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m-l}x - \frac{l}{m-l}, & \text{si } x \in [l, m] \\ \frac{1}{m-u}x - \frac{u}{m-u}, & \text{si } x \in [m, u] \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Donde $l \leq m \leq u$, l y u son las cotas para el número borroso M , y m es el valor modal. El triángulo de números borrosos es expresado por la ecuación 3.15 y es denotado como (l, m, u) .

Las operaciones básicas de los triángulos de números borrosos las cuales fueron desarrolladas por Laarhoven y Pedrycs son las siguientes:

1. $\tilde{n}_1 \oplus \tilde{n}_2 = (n_{1l} + n_{2l}, n_{1m} + n_{2m}, n_{1u} + n_{2u})$ para la suma.
2. $\tilde{n}_1 \otimes \tilde{n}_2 = (n_{1l} \times n_{2l}, n_{1m} \times n_{2m}, n_{1u} \times n_{2u})$ para la multiplicación.
3. $\ominus \tilde{n}_1 = (-n_{1u}, -n_{1m}, -n_{1l})$ para la negación.
4. $\frac{1}{\tilde{n}_1} \cong (\frac{1}{n_{1u}}, \frac{1}{n_{1m}}, \frac{1}{n_{1l}})$ para la división.
5. $\ln(\tilde{n}_1) \cong (\ln(n_{1u}), \ln(n_{1m}), \ln(n_{1l}))$ para el logaritmo natural.
6. $\exp(\tilde{n}_1) \cong (\exp(n_{1u}), \exp(n_{1m}), \exp(n_{1l}))$ para el exponencial.

Donde $\tilde{n}_1 = (n_{1l}, n_{1m}, n_{1u})$ y $\tilde{n}_2 = (n_{2l}, n_{2m}, n_{2u})$ representan los triángulos de números borrosos.

Los triángulos de números borrosos son empleados para resolver el problema de hacer un rango de preferencia. Denotamos $\mu_i(x)$ como la función de pertenencia para el número borroso \tilde{n}_i . Después definimos:

$$e_{ij} = \max_{x \geq y} \{ \min(\mu_i(x), \mu_j(y)) \}, \quad (3.16)$$

para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$,

donde m es el número de alternativas y \tilde{n}_i domina a \tilde{n}_j , escrito como $\tilde{n}_i \geq \tilde{n}_j$, si y solo si $e_{ij} = 1$ y $e_{ji} < Q$, donde Q es alguna fracción positiva menor a 1 (0.70, 0.80, 0.90).

Por ejemplo para la preferencia de dos alternativas A_1 y A_2 que son representadas por dos triángulos de números borrosos $\tilde{n}_1 = (0.20, 0.40, 0.60)$ y $(0.40, 0.70, 0.90)$. En la figura 3.6 se puede observar que $e_{21} = 1$ y $e_{12} = 0.40 < Q = 0.90$. Así $A_1 > A_2$, entonces A_1 es mejor alternativa que A_2 .

En el caso de problemas de clasificación, cada grupo puede ser considerado como un conjunto borroso. Los modelos de clasificación que implementan la teoría de conjuntos

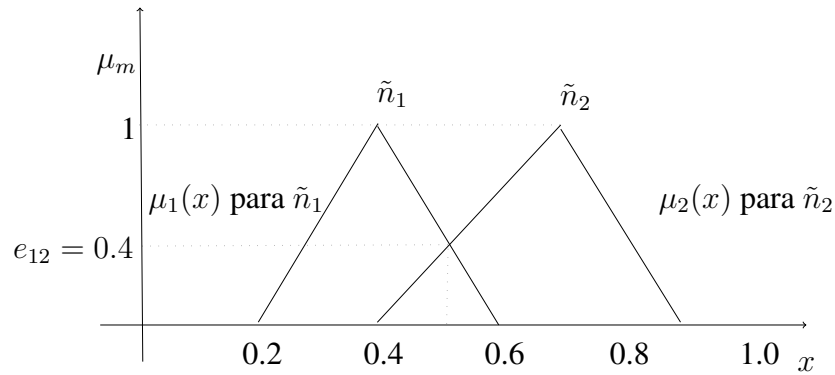


Figura 3.6: Funciones de pertenencia para dos alternativas [51].

borrosos tienen la forma de reglas de decisión. La forma general de estas reglas usadas para la clasificación son de la forma siguiente [12]:

Si $(g_{j1}$ es A_{1a}) And $(g_{j2}$ es A_{2b}) And ... And $(g_{jn}$ es A_{nc}) entonces $x_j \in C_k$,

donde cada $A_{i(\cdot)}$ corresponde al conjunto borroso definido en la escala del atributo g_i . La fuerza de cada condición individual es definida por el grado de pertenencia correspondiente a la proposición “de acuerdo al atributo g_i la alternativa x_j pertenece al conjunto $A_{i(\cdot)}$ ”.

3.4. El problema de agrupamiento

El problema de agrupamiento es muy parecido al problema de clasificación, en los problemas de agrupamiento no están predefinidas las clases, en los de clasificación sí. El objetivo de este tipo de problema es la formación de los grupos que van a estar conformados por las alternativas que tengan características similares. En la figura 3.7 se presenta la diferencia existente entre estos dos tipos de problemas.

La medida más obvia de similitud entre dos muestras es la distancia entre ellos. Suponemos que tenemos un conjunto $D = \{x_1, \dots, x_n\}$ de n muestras que queremos particionar en c subconjuntos disjuntos D_1, \dots, D_c . Cada subconjunto representará un grupo. La calidad del agrupamiento se puede encontrar minimizando la función de suma de erro-



Figura 3.7: Los problemas de clasificación comparados con los problemas de agrupamiento [12].

res cuadrados J_e , que tiene como objetivo encontrar la partición óptima del conjunto.

$$J_e = \sum_{i=1}^c \sum_{x \in D_i} \|x - m_i\|^2, \quad (3.17)$$

donde,

$$m_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in D_i} x. \quad (3.18)$$

Denotamos n_i como el número de muestras en D_i y m_i como la media de esta muestra. La interpretación de esta función es que deseamos que para cada agrupamiento, queremos que la distancia de la media a todos los elementos del agrupamiento sea la mínima posible, cumpliéndose esto para todos los grupos.

Algunas clases de algoritmos de problemas de agrupamiento son las siguientes: [55]

- Jerárquico

- Problemas de agrupamiento de error cuadrado.
- Agrupamiento de la teoría de grafos.
- Técnicas de búsqueda combinatorial.
- Agrupamiento confuso (fuzzy clustering).

El tipo de problemas de agrupamiento jerárquico organiza los datos en una estructura jerárquica de acuerdo a una matriz de distancias. Los resultados son presentados de manera gráfica en los llamados dendrogramas. Esta representación provee mucha información visual para la identificación de los grupos. Este tipo de algoritmo se clasifica en dos métodos: aglomerar y dividir. El tipo de problema de agrupamiento de aglomerar empieza con n grupos, uno para cada objeto y de lo que trata este método es de ir juntando los objetos mas similares hasta llegar a un solo grupo. El tipo de problema de agrupamiento de dividir es el método contrario al anterior. La crítica más común para este tipo de algoritmos es que carece de solidez y es sensible al ruido y a los elementos raros.

El tipo de problema de agrupamiento de error cuadrado, trata de particionar el conjunto de datos en K grupos de una manera no jerárquica. La partición óptima se puede encontrar enumerando todas las posibles soluciones, pero este método es infactible en práctica y además de ser muy costoso computacionalmente. Uno de los factores mas importantes en la partición de grupos es la función de criterio. Suponemos que tenemos un conjunto de objetos $x_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \dots, N$ y queremos organizarlos en K subconjuntos $C = \{C_1, \dots, C_K\}$. El criterio de error cuadrado está definido como:

$$J(\Gamma, M) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \|x_j - m_i\|^2, \quad (3.19)$$

donde Γ es una matriz de partición;

$$\gamma_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in \text{grupo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.20)$$

con

$$\sum_{i=1}^k \gamma_{ij} = 1 \forall j;$$

M son los centroides (medias); $[m_1, \dots, m_k]$ m_i es la media para el agrupamiento i .

El algoritmo de K medias es el más conocido de esta clase de métodos. A continuación se resumen algunas de las desventajas de este método:

1. No hay un método eficiente para identificar las particiones iniciales y el número de grupos.
2. El procedimiento de actualizar las medias no garantiza un óptimo global.
3. Es sensible al ruido y a los elementos raros.

Los conceptos y propiedades de teoría de grafos son de gran ayuda para los problemas de agrupamiento. En un grafo $G = (V, E)$ los nodos de V corresponden a los datos y las aristas reflejan las distancias entre cada par de datos. Si la matriz de disimilitud es definida como:

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } D(x_i, x_j) < d_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.21)$$

donde d_0 es un valor pequeño. El grafo se simplifica a un grafo no ponderado. Los métodos de agrupamiento jerárquico pueden ser descritos con la teoría de grafos. Chameleon desarrolló un nuevo algoritmo jerárquico aglomerativo basado en el grafo de k-nearest-neighbor. Otro algoritmo, llamado CLICK (Clustering Identification Via Connectivity Kernels) está basado en el cálculo del corte de peso mínimo para formar grupos.

En lo que concierne a las técnicas de búsqueda combinatorial, dado un conjunto de puntos $x_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \dots, N$, los algoritmos de agrupamiento ayudan a organizar a los datos en K subconjuntos $\{C_1, \dots, C_K\}$. La posible partición de los N puntos en K grupos esta dada por la fórmula:

$$P(N, K) = \frac{1}{K!} \sum_{m=1}^K (-1)^{K-m} C_K^m m^N, \quad (3.22)$$

para pequeños valores de N y K la complejidad computacional es muy costosa. Algunos algoritmos empleados para encontrar la partición óptima son: hill-climbing, algoritmos evolutivos, tabu search, deterministic annealing, algoritmos genéticos [26], entre otros.

A continuación se hace una descripción de los análisis de agrupamiento de K medias, agrupamiento jerárquico y agrupamiento confuso robusto.

3.4.1. Análisis de agrupamiento de K medias

El análisis de K medias es un método de agrupación de casos que se basa en las distancias existentes entre ellos. Se empieza seleccionando las K medias, esto puede ser de varias maneras, puede ser escogiendo los primeros casos o escogiendo los casos más distantes. A continuación se inicia el proceso de lectura de todos los casos asignando cada caso a la media más cercana e ir actualizando dicha media [17].

El análisis de K medias es útil cuando se cuenta con un número muy grande de casos. Es utilizada como técnica de clasificación, agrupando casos a partir de las medias proporcionadas por el usuario.

Este análisis utiliza la distancia euclidiana: la longitud de la recta que une ambos casos. La distancia euclidiana se calcula de la siguiente manera:

$$d_{ii'} = \sqrt{\sum_j (X_{ij} - X_{i'j})^2}, \quad (3.23)$$

donde X se refiere a las puntuaciones obtenidas por el caso i y el caso i' ($i \neq i'$) en cada una de las $j = 1, 2, \dots, p$ variables incluidas en el análisis (el sumatorio de la expresión incluirá p términos)

3.4.2. Análisis de agrupamiento jerárquico

El análisis de agrupamiento jerárquico inicia con el cálculo de la matriz de distancias entre los elementos de la muestra. A continuación se buscan los dos elementos más próximos y se agrupan en un conglomerado. De esta manera, se van agrupando los elementos en conglomerados cada vez más grandes hasta llegar hasta el último paso, en el que todos los elementos muestrales quedan agrupados en un único conglomerado global [49].

La versatilidad de este análisis radica en la posibilidad de utilizar diferentes tipos de medidas para estimar la distancia, como diferentes métodos de aglomeración. Pero no

existe ninguna combinación de estas posibilidades que optimice la solución obtenida. En general, será conveniente valorar distintas soluciones para elegir la más consistente [49].

El dendrograma es la representación gráfica de los grupos, en la figura 3.8 se puede apreciar un ejemplo. En el dendrograma de ejemplo hay 20 casos, las distancias no están representadas en su escala original sino en una escala estandarizada de 25 puntos. Las líneas horizontales representan los conglomerados y las etapas de fusión están representadas mediante trazos verticales. Y la posición de las líneas verticales indica la distancia existente entre los elementos fundidos.

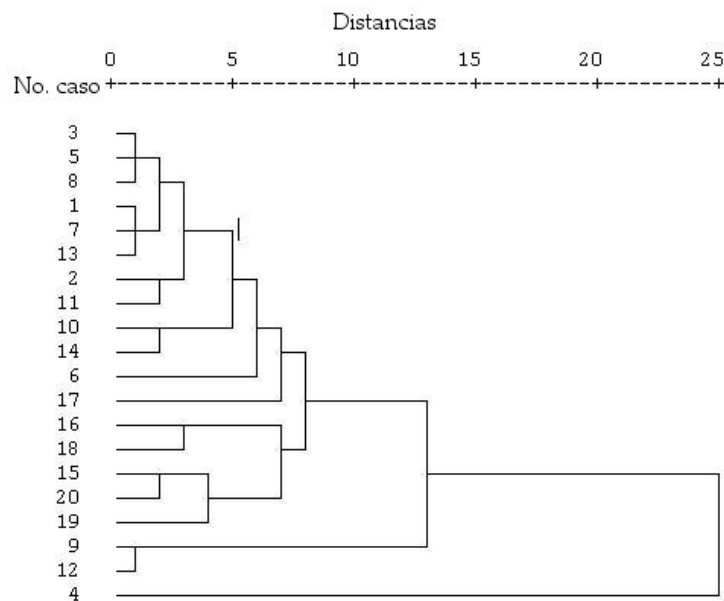


Figura 3.8: Dendrograma.

Métodos para el agrupamiento

El análisis de conglomerados jerárquico siempre evoluciona paso a paso, uniendo en cada paso los dos elementos de la matriz de distancias que se encuentran más próximos entre sí. En cada paso se funden dos elementos o grupos de elementos.

- **Método de vinculación por el vecino más próximo.** Comienza seleccionando y fundiendo los dos elementos de la matriz de distancias que se encuentran más próxi-

mos. Así la distancia d_{AB} entre los conglomerados A y B se calcula mediante:

$$d_{AB} = \text{mín}(d_{ij}) \quad (3.24)$$

donde d_{ij} es la distancia entre los elementos i y j , el primero perteneciente al conglomerado A y el segundo al conglomerado B .

- **Método de vinculación por el vecino más lejano.** Este se comporta de manera opuesta al método anterior. La distancia entre dos conglomerados A y B se calcula como:

$$d_{AB} = \text{máx}(d_{ij}) \quad (3.25)$$

- **Método de vinculación inter-grupos.** Presenta la ventaja sobre los dos métodos anteriores de aprovechar la información de todos los miembros de los dos conglomerados que se comparan. La distancia entre dos conglomerados se calcula como la distancia promedio existente entre todos los pares de elementos de ambos conglomerados.

$$d_{AB} = \frac{1}{n_A n_B} \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} d_{ij} \quad (3.26)$$

- **Método de agrupación de centroides.** Calcula la distancia entre dos conglomerados como la distancia entre sus vectores de medias. Con este método, la matriz de distancias original sólo se utiliza en la primera etapa. En las etapas sucesivas se utiliza la matriz de distancias actualizada en la etapa previa. En cada etapa, el algoritmo utiliza la información de los dos conglomerados fundidos en la etapa previa y el conglomerado que se intentará fundir en esa etapa. La distancia entre el conglomerado AB y el elemento C se calcula como:

$$d_{(AB)C} = \frac{n_A}{n_A + n_B} d_{AC} + \frac{n_B}{n_A + n_B} d_{BC} - \frac{n_A n_B}{(n_A + n_B)^2} d_{AB} \quad (3.27)$$

- **Método de agrupación de medianas.** Los dos conglomerados que se combinan reciben idéntica ponderación en el cálculo del nuevo centroide combinado, independientemente del tamaño de cada uno de los conglomerados. Esto permite que, a la hora de caracterizar a los conglomerados resultantes, los conglomerados pequeños

tengan la misma importancia que los conglomerados grandes. Dado un conglomerado AB y un elemento C , la nueva distancia del conglomerado al elemento se calcula como:

$$d_{(AB)C} = \frac{d_{AC} + d_{BC}}{2} - \frac{d_{AB}}{4} \quad (3.28)$$

Medidas de distancias

Uno de los aspectos clave del análisis de conglomerados es la elección de la medida que se desea utilizar para cuantificar la distancia entre los elementos. Esta opción incluye medidas de similaridad y disimilaridad para datos cuantitativos obtenidos con una escala de medida de intervalo o razón.

- **Distancia euclidiana.** Medida de disimilaridad utilizada por defecto para datos de intervalo. Raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de las variables.

$$\text{EUCLID}(X, Y) = \sqrt{\sum_i (X_i - Y_i)^2} \quad (3.29)$$

- **Distancia euclidiana al cuadrado.** Medida de disimilaridad. Suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de las variables.

$$\text{SEUCLID}(X, Y) = \sum_i (X_i - Y_i)^2 \quad (3.30)$$

- **Coseno.** Medida de similaridad. Medida estrechamente relacionada con el coeficiente de correlación de Pearson. Es el coseno del ángulo formado por dos vectores de puntuaciones. Tiene un máximo de 1 y un mínimo de -1.

$$\text{COSINE}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sqrt{(\sum_i X_i^2)(\sum_i Y_i^2)}} \quad (3.31)$$

- **Correlación de Pearson.** Medida de similaridad angular con las variables en escala tipificada. Se trata de una medida típica de relación lineal entre variables. Toma valores entre -1 y 1.

$$\text{CORRELATION}(X, Y) = \frac{\sum_i z_{x_i} z_{y_i}}{n - 1} \quad (3.32)$$

donde n es el tamaño de la muestra y z_x y z_y son las puntuaciones tipificadas del sujeto i en las variables X e Y , que son las variables entre las que se calcula la distancia.

- **Chebychev.** Medida de disimilaridad. Diferencia más grande en valor absoluto entre los valores de dos variables.

$$\text{CHEBYCHEV}(X, Y) = \max_i |X_i - Y_i| \quad (3.33)$$

- **Bloques.** Medida de disimilaridad. También llamada distancia absoluta, distancia de ciudad, de Manhattan y del taxista. Es la suma de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de dos variables.

$$\text{BLOCK}(X, Y) = \sum_i |X_i - Y_i| \quad (3.34)$$

- **Minkowski.** Medida de disimilaridad basada en la distancia euclidiana. Raíz de orden p de la suma de las potencias de orden p de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de dos variables.

$$\text{MINKOWSKI}(X, Y) = \left(\sum_i |X_i - Y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.35)$$

donde p es cualquier número entero positivo.

- **Personalizada.** Medida de disimilaridad basada en la distancia euclidiana. Raíz de orden r de la suma de las potencias de orden p de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de dos variables.

$$\text{POWER}(X, Y) = \left(\sum_i |X_i - Y_i|^p \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.36)$$

3.4.3. Análisis de agrupamiento confuso robusto

Generalmente los métodos de agrupamiento asumen que cada elemento pertenece a una sola clase. Sin embargo en la práctica los grupos se solapan y algunos elementos pertenecen parcialmente a varios grupos. La teoría de conjuntos confusos se encarga de

describir esta situación. En este caso un grado de pertenencia del elemento x_k al i -ésimo grupo (u_{ik}) es un valor entre $[0,1]$.

El algoritmo de c medias confuso (fuzzy c -means, FCM) consiste en el conjunto de todas las posibles particiones confusas de N , vectores p -dimensionales en c grupos está definido por:

$$\mathfrak{S}_{fc} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathfrak{R}_{cN} \left| \begin{array}{l} \forall \\ 1 \leq i \leq c \\ 1 \leq k \leq N \end{array} u_{ik} \in [0, 1], \sum_{i=1}^c u_{ik} = 1, 0 < \sum_{k=1}^N u_{ik} < N \right. \right\}, \quad (3.37)$$

\mathfrak{R}_{cN} denota el espacio de todas las matrices de dimension $(c \times N)$. La función objetivo del método c medias confuso tiene la forma:

$$J_m(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (u_{ik})^m d_{ik}^2, \quad (3.38)$$

donde $\mathbf{U} \in \mathfrak{S}_{fc}$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_c] \in \mathfrak{R}_{pc}$ es una matriz prototipo y m es el exponente de peso en $[1, \infty)$. d_{ik} es la norma:

$$d_{ik}^2 = \|x_k - \mathbf{v}_i\|_A^2 = (x_k - \mathbf{v}_i)^T \mathbf{A} (x_k - \mathbf{v}_i), \quad (3.39)$$

donde \mathbf{A} es una matriz finita positiva.

Si m y c son parámetros fijos, y I_k, \tilde{I}_k son conjuntos definidos como:

$$1 \leq k \leq N \left\{ \begin{array}{l} I_k = \{i \mid 1 \leq i \leq c; d_{ik} = 0\}, \\ \tilde{I}_k = \{1, 2, \dots, c\} \setminus I_k, \end{array} \right. \quad (3.40)$$

entonces $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \in (\mathfrak{S}_{fc} \times \mathfrak{R}_{pc})$ puede ser totalmente mínima para $J_m(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ solo si:

$$\forall_{\substack{1 \leq i \leq c \\ 1 \leq k \leq N}} u_{ik} = \begin{cases} (d_{ik})^{2/(1-m)} / \left[\sum_{j=1}^c (d_{jk})^{2/(1-m)} \right], & I_k = \emptyset, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad i \in \tilde{I}_k \\ \sum_{i \in I_k} u_{ik} = 1, \quad i \in I_k \end{array} \right\}, & I_k \neq \emptyset, \end{cases} \quad (3.41)$$

y

$$\forall_{1 \leq i \leq c} \mathbf{v}_i = \left[\sum_{k=1}^N (u_{ik})^m x_k \right] / \left[\sum_{k=1}^N (u_{ik})^m \right]. \quad (3.42)$$

El algoritmo de c medias confuso es aplicado exitosamente en una gran cantidad de problemas sin embargo una de las grandes desventajas de este algoritmo es la sensibilidad

al ruido en los datos y a los elementos raros. Es por ello que en la literatura revisada se encontró el siguiente método llamado α FCM [23].

$$J_{m\alpha}(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{E}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (u_{ik})^m |x_k - \mathbf{v}_i|_{\epsilon_i} + \alpha \sum_{i=1}^c \|\epsilon_i\|_1, \quad (3.43)$$

y

$$|x_k - \mathbf{v}_i|_{\epsilon_i} = \sum_{l=1}^p |x_{kl} - v_{il}|_{\epsilon_{il}}. \quad (3.44)$$

$\epsilon_i = [\epsilon_{i1}\epsilon_{i2}\cdots\epsilon_{ip}]^T$ es un vector sensible para el i -ésimo grupo, donde ϵ_{ij} es un parámetro insensible en la j th dirección (componente del dato) y el i -ésimo grupo. Los parámetros ϵ_{ij} forman la matriz $\mathbf{E} = [\epsilon_{i1}\epsilon_{i2}\cdots\epsilon_{ip}] \in \mathfrak{R}_{pc}^+$. El $\|\cdot\|_1$ denota la norma L_1 .

Si m, c y α son parámetros fijos, y I_k, \tilde{I}_k son conjuntos definidos como:

$$\forall \quad \begin{cases} I_k = \{i \mid 1 \leq i \leq c; |x_k - \mathbf{v}_i|_{\epsilon_i} = 0\}, \\ \tilde{I}_k = \{1, 2, \dots, c\} \setminus I_k, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.45)$$

entonces $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{E}) \in (\mathfrak{S}_{fc} \times \mathfrak{R}_{pc} \times \mathfrak{R}_{pc}^+)$ puede ser totalmente mínima para $J_{m\alpha}(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{E})$ solo si:

$$\forall \quad \begin{cases} \begin{matrix} 1 \leq i \leq c \\ 1 \leq k \leq N \end{matrix} u_{ik} = \begin{cases} (|x_k - \mathbf{v}_i|_{\epsilon_i})^{1/(1-m)} / \left[\sum_{j=1}^c (|x_k - \mathbf{v}_j|_{\epsilon_j})^{1/(1-m)} \right], & I_k = \emptyset, \\ \begin{cases} 0, & i \in \tilde{I}_k \\ \sum_{i \in I_k} u_{ik} = 1, & i \in I_k \end{cases}, & I_k \neq \emptyset, \end{cases} \end{cases} \quad (3.46)$$

y

$$\forall \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq c \\ 1 \leq l \leq p \end{matrix} \quad \forall \quad \begin{cases} v_{il} = \frac{(x_{kl} + x_{nl})}{2} \\ \epsilon_{il} = \frac{(x_{nl} - x_{kl})}{2} \quad \forall \{k \mid \lambda_k^+ \in \Lambda_i^+\} \quad \forall \{n \mid \lambda_n^- \in \Lambda_i^-\}, \end{cases} \quad (3.47)$$

donde

$$\Lambda_i^{(\pm)} = \left\{ \lambda_k^{(\pm)} \in (0, (u_{ik})^m/N) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \min_{\{\lambda_k^+, \lambda_k^-\}} \sum_{k=1}^N (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) x_{kl}, \\ \sum_{k=1}^N \lambda_k^+ = \sum_{k=1}^N \lambda_k^-, \\ \sum_{k=1}^N (\lambda_k^+ + \lambda_k^-) \leq \alpha, \\ \lambda_k^+, \lambda_k^- \in [0, (u_{ik})^m/N] \end{array} \right. \right\}. \quad (3.48)$$

3.5. Conclusiones

En este capítulo se presentan las bases de la teoría de la decisión, para así iniciar con la solución de nuestro problema partiendo desde el punto de vista de la toma de decisión. Se define de manera detallada el problema de clasificación. Se hace mención de las técnicas de clasificación más importantes, así como una breve descripción de las mismas. Se muestra gráficamente la diferencia existente entre el problema de agrupamiento y clasificación. Por último se hace un análisis de los diferentes algoritmos de problemas de agrupamiento y se describen los más importantes.

ESTADO DEL ARTE DE LOS MÉTODOS DE CLASIFICACIÓN Y AGRUPAMIENTO MULTICRITERIO

4.1. Introducción

Ayuda a la decisión multicriterio (MCDA - MultiCriteria Decision Aid) es un campo de investigación de operaciones que evolucionó muy rápido en las últimas tres décadas en niveles prácticos y de investigación. El desarrollo de MCDA fue motivado por la necesidad de resolver problemas complejos de decisión del mundo real que no pueden ser formulados en un enfoque unidimensional. En el desarrollo de modelos, MCDA está relacionado al modelado y representación de las preferencias de los tomadores de decisiones.

La estructura del presente capítulo es la siguiente: primero se describen las distintas metodologías de MCDA de manera general (sección 4.2), enseguida se presenta el método más representativo del campo de clasificación MCDA, nos referimos a ELECTRE TRI (sección 4.3), además se presenta las bases de la teoría de conjuntos aproximados (rough sets) y para terminar con este capítulo se muestra una extensión del algoritmo de K me-

días, este último algoritmo pertenece a los métodos de MCDA agrupamiento (sección 4.4). En la sección 4.5 se presentan las conclusiones del capítulo.

4.2. Metodologías de MCDA

La clasificación de las metodologías de MCDA según las características del modelo desarrollado son [12]:

1. Programación matemática multiobjetivo.
2. Teoría de utilidad multiatributo.
3. Teoría de relaciones de sobreclasificación.
4. Análisis de desglose de preferencias.

Estas metodologías se pueden aplicar a los problemas de decisión continuos y discretos. La programación matemática multiobjetivo es más usada para los problemas continuos.

La programación matemática multiobjetivo es una extensión de la teoría de programación matemática en el caso donde múltiples funciones necesitan ser optimizadas. La formulación general de esta clase de problemas es la siguiente:

$$\text{máx o mín } \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \quad (4.1)$$

$$\text{s.a } x \in B,$$

donde x es un vector de variables de decisión. $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ son las funciones objetivo (lineales o no lineales) a optimizar. B es el conjunto de soluciones factibles.

La teoría de utilidad multiatributo (MAUT - MultiAttribute Utility Theory) extiende la teoría de utilidad tradicional al caso multidimensional [12]. El objetivo de MAUT es modelar y representar las preferencias del tomador de decisiones en una función de utilidad $U(g)$, donde g es un vector de criterios $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$.

$$U(g_x) > U(g_{x'}) \Leftrightarrow x \succ x',$$

donde \succ denota la relación de preferencia de alternativas, por ejemplo la ecuación anterior significa que la alternativa x es preferida a x' .

La forma de la función de utilidad es la siguiente:

$$U(g) = p_1 u_1(g_1) + p_2 u_2(g_2) + \dots + p_n u_n(g_n), \quad (4.2)$$

donde

- u_1, u_2, \dots, u_n son las funciones de utilidad marginal correspondiente a la evaluación del criterio. Cada función de utilidad marginal $u_i(g_i)$ define la utilidad de la alternativa para cada criterio g_i .
- p_1, p_2, \dots, p_n son a menudo consideradas como los pesos de los criterios. Se debe de cumplir la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

La fundación de la teoría de relaciones de sobreclasificación (ORT - Outranking Relation Theory) fue desarrollada por Roy durante 1960s por el desarrollo de la familia de métodos ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) [12]. Generalmente una relación de sobreclasificación es un mecanismo para modelar y representar las preferencias del tomador de decisiones, difiere en dos cosas con el MAUT:

- La relación de sobreclasificación no es transitiva: En MAUT las evaluaciones obtenidas por el desarrollo de la función de utilidad son transitivas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} U(g_x) > U(g_{x'}) &\Leftrightarrow x \succ x' \\ U(g_{x'}) > U(g_{x''}) &\Leftrightarrow x' \succ x'' \\ \Leftrightarrow U(g_x) > U(g_{x''}) &\Leftrightarrow x \succ x''. \end{aligned} \quad (4.3)$$

- La relación de sobreclasificación no está completa: En MAUT las relaciones consideradas son: preferencia e indiferencia. En ORT se agrega la relación de incomparabilidad.

El análisis de desglose de preferencias (PDA - Preference Disaggregation Analysis) está enfocado al analizar decisiones actuales realizadas por los tomadores de decisiones [12]. Esencialmente el PDA emplea un proceso de ayuda a la decisión opuesto a MAUT y ORT. En la figura 4.1 se muestra la comparación de estos tres métodos.

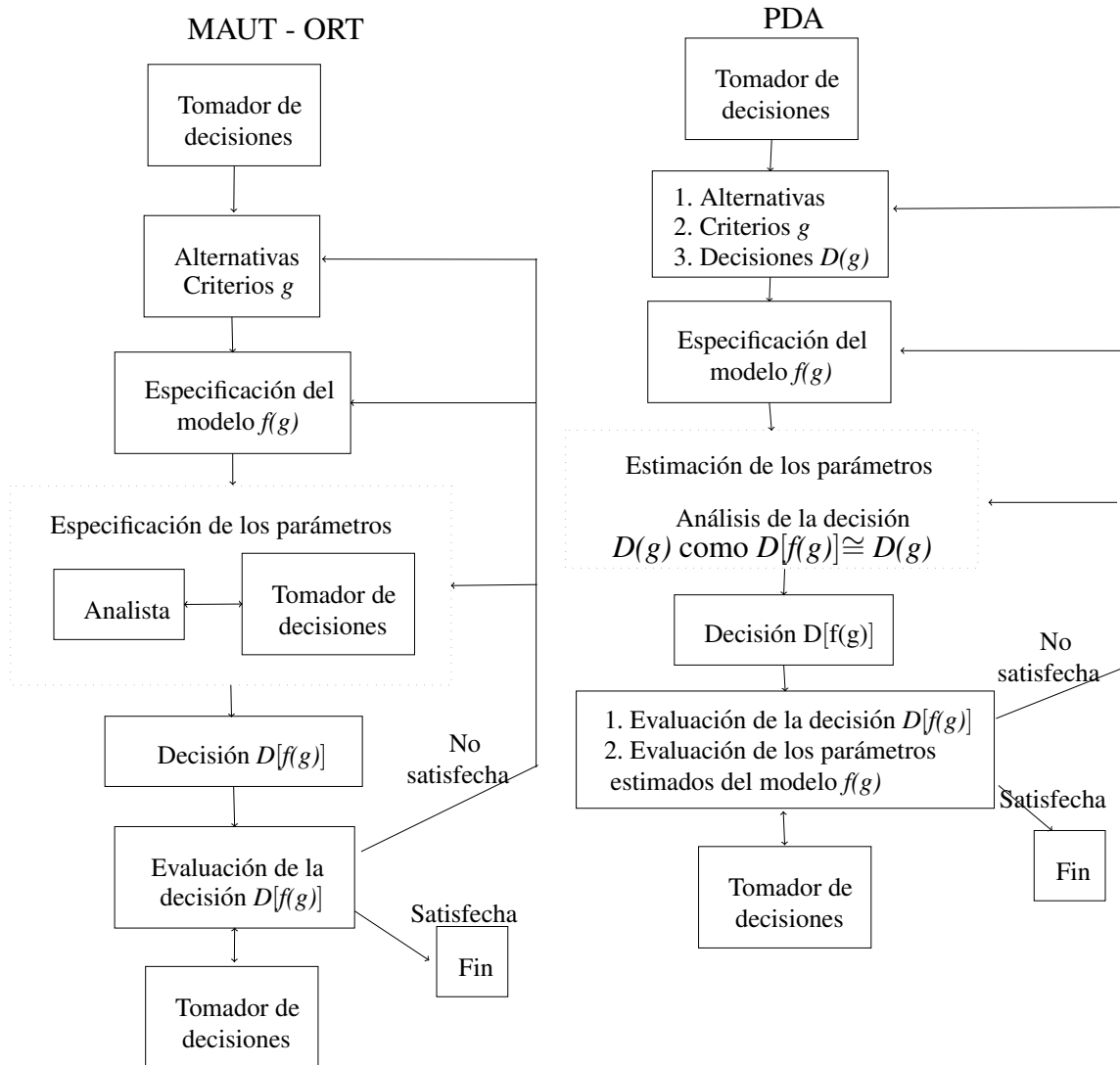


Figura 4.1: Comparación de metodologías MAUT-ORT y PDA [12].

4.3. Clasificación MCDA

En secciones anteriores se explicó la diferencia existente entre clasificación y problemas de agrupamiento. Los problemas de clasificación están relacionados con la asignación de alternativas a clases definidas con anterioridad. Estos grupos se pueden limitar por los perfiles, los perfiles son determinados valores en específico para todo el conjunto de criterios. En los problemas de clasificación existen dos clases:

Grupos	Definidos a priori
No ordenados	Clasificación
Ordenados	Sorting

Cuadro 4.1: Clasificación: grupos ordenados y no ordenados.

Ambas clases de problemas tienen ciertas aplicaciones prácticas, por ejemplo:

- Medicina: en la identificación de los pacientes de determinada enfermedad.
- Marketing: análisis de las características de los diferentes grupos de clientes.
- Recursos humanos: asignar al personal en la adecuada clase de ocupación de acuerdo a sus aptitudes.

Algunos de los métodos más reconocidos para estos tipos de problemas pueden ser: ELECTRE TRI [56], PROAFTN, PAIRCLAS [11], PROMETHEE TRI [14], etc. A continuación se describe a detalle el método más representativo, ELECTRE TRI.

4.3.1. ELECTRE TRI

La familia de métodos de ELECTRE fue introducida por Roy en 1968, que tiene sus bases en los conceptos de ORT [12]. El método de ELECTRE TRI es un miembro de esta familia está enfocado en la dirección de los problemas de clasificación. EL objetivo del método ELECTRE TRI es asignar un conjunto discreto de alternativas $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ en q grupos C_1, C_2, \dots, C_q . Cada alternativa x_j es considerada como un vector $g_j = (g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jn})$. Los grupos guardan una correspondencia de orden, el grupo C_1 incluye las alternativas más preferidas y C_q incluye las alternativas menos preferidas. Una alternativa ficticia $r_k = (r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{nk})$ es agregada como un límite entre cada par de grupos C_k y C_{k+1} como se puede apreciar en la figura 4.2. La alternativa ficticia puede referirse como un perfil. Esencialmente cada grupo C_k es delimitada por dos perfiles r_k y r_{k-1} .

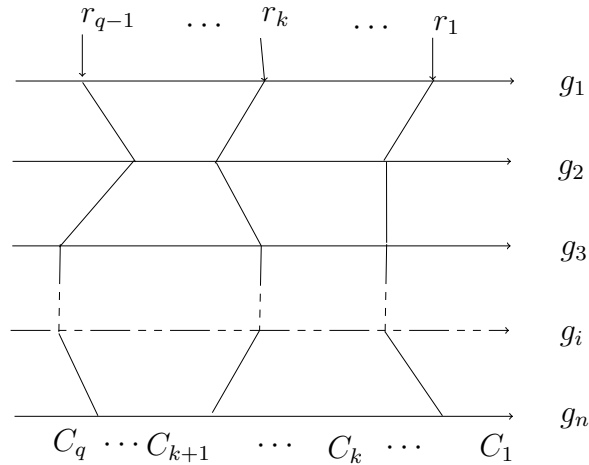


Figura 4.2: Perfiles en ELECTRE TRI [12].

La clasificación de las alternativas en los grupos ya predefinidos consiste en dos etapas. La primer etapa consiste en el desarrollo de las relaciones de sobreclasificación para decidir si una alternativa está dentro de un perfil o no. La segunda etapa envuelve la explotación de las relaciones para decidir la clasificación de las alternativas.

El desarrollo de las relaciones de sobreclasificación en la primera fase está basada en la comparación de las alternativas con los perfiles. Esta comparaciones son para todas las parejas (x_j, r_k) , $j = 1, 2, \dots, m$ y $k = 1, 2, \dots, q - 1$. Estas comparaciones de la alternativa x_j con el perfil r_k envuelve 2 pruebas que son: concordancia y discordancia. El objetivo de la prueba de concordancia es evaluar la fortaleza de la afirmación: “la alternativa x_j es por lo menos tan buena que el perfil r_k .” La medida para esta prueba es el índice de concordancia $C(x_j, r_k)$:

$$C(x_j, r_k) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i c_i(g_{ji}, r_{ik})}{\sum_{i=1}^n w_i}, \tag{4.4}$$

donde w_i denota el peso del criterio g_i y $c_i(g_{ji}, r_{ik})$ denota el índice de concordancia parcial del criterio g_i . La estimación de este índice necesita de la especificación de parámetros: el umbral de preferencia y el umbral de indiferencia. El umbral de preferencia p_{ik} para el criterio g_i representa la más grande diferencia entre $r_{ik} - g_{ji}$ compatible con la preferencia en favor de x_j en el criterio g_i . El umbral de indiferencia q_{ik} para el criterio g_i representa

la más pequeña diferencia $r_{ik} - g_{ji}$ que preserva la diferencia entre la alternativa x_j y el perfil r_k en el criterio g_i . Los valores de estos umbrales son especificados por el tomador de decisiones en cooperación con el analista de decisiones. En base a estos umbrales, el índice parcial de concordancia se puede estimar de la siguiente manera (figura 4.3) :

$$\begin{aligned} \text{Si } g_{ji} &\leq r_{ik} - p_{ik}, & \text{entonces: } c_i(g_{ji}, r_{ik}) &= 0 \\ \text{Si } r_{ik} - p_{ik} &< g_{ji} \leq r_{ik} - q_{ik}, & \text{entonces: } c_i(g_{ji}, r_{ik}) &= \frac{p_{ik} - (r_{ik} - g_{ji})}{p_{ik} - q_{ik}} \\ \text{Si } g_{ji} &> r_{ik} - q_{ik}, & \text{entonces: } c_i(g_{ji}, r_{ik}) &= 1 \end{aligned}$$

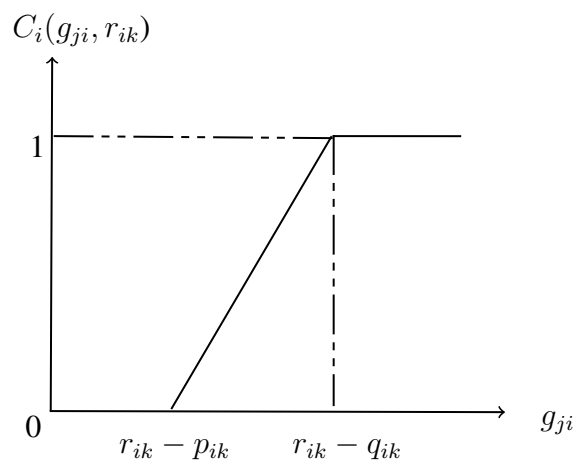


Figura 4.3: Índice parcial de concordancia [12].

El índice de discordancia $D_i(g_{ji}, r_{ik})$ mide la fortaleza de lo opuesto de la afirmación “la alternativa x_j es por lo menos tan buena como el perfil r_{ik} en base al criterio g_i .” La estimación del índice de discordancia requiere de la especificación de un parámetro adicional, el umbral de veto v_{ik} . Conceptualmente, el umbral de veto representa la menor diferencia entre $r_{ik} - g_{ji}$ entre el perfil r_{ik} y la alternativa x_j en el criterio g_i (figura 4.4).

$$\begin{aligned} \text{Si } g_{ji} &> r_{ik} - p_{ik}, & \text{entonces: } D_i(g_{ji}, r_{ik}) &= 0 \\ \text{Si } r_{ik} - v_{ik} &< g_{ji} \leq r_{ik} - p_{ik}, & \text{entonces: } D_i(g_{ji}, r_{ik}) &= \frac{r_{ik} - g_{ji} - p_{ik}}{v_{ik} - p_{ik}} \\ \text{Si } g_{ji} &\leq r_{ik} - v_{ik}, & \text{entonces: } D_i(g_{ji}, r_{ik}) &= 1 \end{aligned}$$

La siguiente etapa es combinar estos 2 índices, formando el índice de credibilidad $\sigma(x_j, r_k)$ que indica la fortaleza de la siguiente información “la alternativa x_j es por lo menos tan buena como el perfil r_k de acuerdo a todos los criterios.” Este índice se define

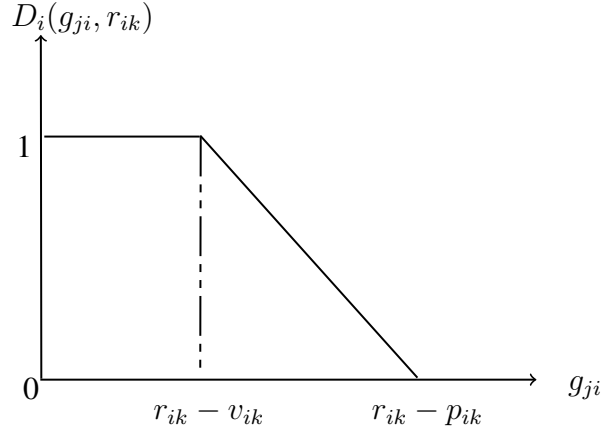


Figura 4.4: Índice parcial de discordancia [12].

de la siguiente manera:

$$\sigma(x_j, r_k) = C(x_j, r_k) \cdot \prod_{g_i \in F} \frac{1 - D_i(x_j, r_k)}{1 - C(x_j, r_k)} \in [0, 1], \quad (4.5)$$

donde F denota el conjunto de todos los criterios para los cuales el índice de discordancia es superior al índice de concordancia:

$$F = \{\forall g_i / D_i(x_j, r_k) > C(x_j, r_k)\}. \quad (4.6)$$

Obviamente, si $F = \emptyset$ entonces $\sigma(x_j, r_k) = C(x_j, r_k)$.

El índice de credibilidad decide si una alternativa x_j sobreclasifica r_k o no ($x_j \mathbf{S} r_k$). Si agrega un nuevo parámetro llamado punto límite, λ . Si

$$\sigma(x_j, r_k) > \lambda \Rightarrow (x_j \mathbf{S} r_k).$$

Las relaciones de sobreclasificación establecen tres comparaciones de las alternativas x_j con el perfil r_k .

$$\text{Indiferencia (I): } (x_j I r_k) \Leftrightarrow (x_j S r_k) \wedge (r_k S x_j)$$

$$\text{Preferencia (P): } (x_j P r_k) \Leftrightarrow (x_j S r_k) \wedge (\neg r_k S x_j)$$

$$\text{Incomparable (R): } (x_j R r_k) \Leftrightarrow (\neg x_j S r_k) \wedge (\neg r_k S x_j)$$

Estas relaciones (I, P, R) proveen la base del desarrollo de las reglas de clasificación. ELECTRE TRI emplea dos puntos de vista: el optimista y el pesimista. Ambos puntos

de vista empiezan con la comparación de la alternativa x_j con el perfil r_{q-1} . Si $x_j Pr_{q-1}$, entonces el procedimiento continua con la siguiente comparación entre x_j y el siguiente perfil r_{q-2} . El mismo procedimiento continua hasta que una de las siguientes situaciones aparecen:

- 1 $(x_j Pr_k) \wedge (r_{k-1} Px_j) \vee (x_j Ir_{k-1})$
- 2 $(x_j Pr_k) \wedge (x_j Rr_{k-1}) \wedge (x_j Rr_{k-2}) \wedge \dots \wedge (x_j Rr_{k-1}) \wedge (r_{k-l-1} Px_j)$

En el primer caso, ambos procedimientos el pesimista y el optimista asignan la alternativa x_j en el grupo C_k . En el segundo caso, desde el punto de vista pesimista asigna la alternativa en el grupo C_k , mientras que el punto de vista optimista asigna la alternativa en el grupo C_{k-1} .

4.3.2. Conjuntos aproximados

Pawlak [35], introdujo la teoría de conjuntos aproximados como una herramienta para describir los atributos entre las dependencias para evaluar su importancia y tratar con datos inconsistentes en los procesos de decisión. La teoría de conjuntos aproximados proporciona un enfoque para manejar datos imperfectos, que complementa otras teorías que se ocupan de datos con incertidumbre, tales como la teoría de la probabilidad, la teoría de pruebas, depresión, etc. En general, el enfoque de conjuntos aproximados es una herramienta muy útil en el estudio de los problemas de clasificación [42].

En los procesos de decisión es necesario un modelo de preferencia en la teoría de conjuntos aproximados dicho modelo esta formado por reglas de decisión de la forma: si x entonces y .

La teoría de conjuntos aproximados que implica particiones, divisiones o clases, es algo diferente de la teoría estadística de probabilidad y de la teoría de conjuntos difusos. Cuando un acontecimiento es aleatorio por naturaleza, la imprecisión asociada con este tipo de acontecimientos puede describirse por la teoría estadística de la probabilidad. Cuando los objetos pueden no pertenecer exclusivamente a una única categoría sino que pueden pertenecer a varias categorías aunque con diferentes grados, en este caso la imprecisión

toma forma de pertenencia difusa a un conjunto. La teoría conjuntos aproximados es útil cuando las clases en las que han de clasificarse los objetos son imprecisas, pero sin embargo pueden aproximarse mediante conjuntos precisos. De manera intuitiva, un conjunto inexacto es un conjunto de objetos que, en general, no pueden ser caracterizados de manera precisa en términos de la información disponible.

La clasificación de los objetos se basa en la información que hay accesible sobre ellos y no en los objetos en sí mismos. Sin embargo, al hablar de la información sobre los objetos que suele ser imprecisa, esta inconsistencia en la descripción de los objetos lleva a la ambigüedad en su clasificación. Esta incertidumbre impide una clasificación precisa de los objetos y la búsqueda de dependencias entre valores de los atributos de condición (que describen los objetos) y atributos de decisión (que asignan a las clases). Por tanto, si los objetos no se pueden distinguir mediante atributos, no podemos asignarlos de manera precisa a un conjunto con lo que induciremos una aproximación de las distintas clases en las que se asignarían los objetos.

Un conjunto aproximado es una colección de objetos que, en general, no pueden ser clasificados de manera precisa en términos de los valores del conjunto de atributos, mientras que las aproximaciones por arriba y por abajo sí pueden.

Otro concepto importante es el reducto, éste se puede definir como el conjunto de criterios más discriminantes. Entonces, un conjunto aproximado tiene lo que se llama una frontera, es decir, elementos del conjunto que tienen cierta parte dentro del conjunto y, por tanto son representados por dos conjuntos precisos, llamados la aproximación por encima (aproximación superior) y por debajo (aproximación inferior); en la figura 4.5 se pueden apreciar. Dado un conjunto de cuadrados X , la aproximación por debajo son todos los cuadrados que totalmente se encuentran dentro del conjunto X y la aproximación por encima son los cuadrados que totalmente se encuentran dentro del conjunto X más los cuadrados que parcialmente se encuentran en el conjunto X . La frontera (o región de duda) se define como la diferencia entre ambas aproximaciones, es decir, es el conjunto de elementos que no pueden clasificarse con certeza utilizando los atributos del sistema de información.

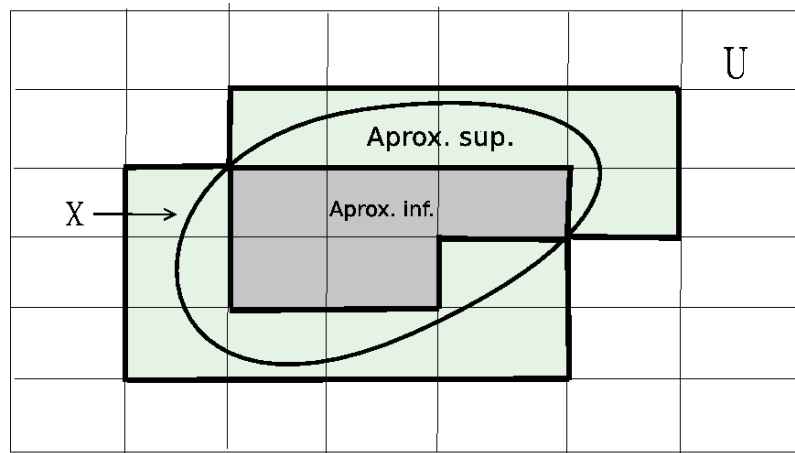


Figura 4.5: Conjuntos aproximados

Al cociente entre la aproximación por debajo y la aproximación por encima se le denomina precisión (si es igual a 1 entonces no hay inconsistencias). Si existe más de una clase, para cada una de ellas se puede calcular la aproximación por arriba y por abajo. Al cociente entre la suma de todas las aproximaciones por debajo y el número total de objetos del sistema se denomina calidad de la clasificación.

La dependencia entre atributos es importante porque podemos expresar algunos conceptos mediante otros, entonces podemos eliminar atributos redundantes. El reducto o conjunto mínimo se define como el menor conjunto de atributos que mantiene la misma calidad de clasificación que el conjunto con todos los atributos. En una tabla de información puede haber más de un reducto. La intersección de todos los reductos nos da el denominado núcleo que es la colección de los atributos más relevantes en la tabla y que no pueden ser eliminados sin que disminuya la calidad de la clasificación.

La tabla de información está formada por un conjunto de objetos descritos por un conjunto de atributos. Los atributos se dividen en dos subconjuntos: atributos de condición (C) y atributos de decisión (D). El problema, por tanto, consiste en encontrar reglas que determinen si un objeto pertenece a un subconjunto particular denominado clase. Una regla de decisión puede expresarse como una sentencia lógica que relaciona la descripción de condiciones y las clases de decisión:

si < se cumplen condiciones > *entonces* < el objeto pertenece a una clase >

Las reglas generadas pueden ser deterministas o no deterministas, las deterministas son las que entendemos por $C \rightarrow D$, es decir, describe unívocamente las decisiones que deben hacerse cuando algunas condiciones se satisfacen. Las reglas no deterministas pueden conducir a varias posibles decisiones. El conjunto de reglas para todas las clases de decisión se denomina algoritmo de decisión.

4.4. Agrupamiento MCDA

Con anterioridad se explicó detalladamente la definición de problemas de agrupamiento y algunos de los algoritmos más importantes. El algoritmo de K medias carece de todo sentido ya que este implementa la distancia euclídea. En la literatura revisada se encontró el siguiente algoritmo que está enfocado de lleno en el punto de vista multicriterio.

4.4.1. Extensión del algoritmo de K medias

El presente algoritmo fue propuesto por Smet y Montano [44], se presenta una extensión del muy conocido algoritmo K medias desde un enfoque multicriterio. Esta extensión depende de la definición de una distancia multicriterio basada en una estructura de preferencias creada por el tomador de decisiones.

En resumen, el método empieza con la asignación de los K medias al azar. Las alternativas son asignadas a la media más cercana empleando la distancia multicriterio que se presentará más adelante, además de ir actualizando la media.

El modelo de preferencias está compuesto por: preferido, indiferente e incomparable, que resultan de la comparación entre dos alternativas.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_i P a_j & \text{Si } a_i \text{ es preferida a } a_j \\ a_i I a_j & \text{Si } a_i \text{ es indiferente a } a_j \\ a_i J a_j & \text{Si } a_i \text{ es incomparable a } a_j \end{array} \right.$$

Estas relaciones $\{P, I, J\}$ forman la estructura de preferencias.

El perfil $P(a_i)$ de una alternativa $a_i \in A$ es definida para este método como una 4-uple $\langle J(a_i), P^-(a_i), I(a_i), P^+(a_i) \rangle$ donde:

$$\begin{aligned} J(a_i) &= \{a_j \in A | a_i J a_j\} = P_1(a_i) \\ P^-(a_i) &= \{a_j \in A | a_j P a_i\} = P_2(a_i) \\ I(a_i) &= \{a_j \in A | a_i I a_j\} = P_3(a_i) \\ P^+(a_i) &= \{a_j \in A | a_i P a_j\} = P_4(a_i) \end{aligned}$$

La distancia multicriterio¹ entre dos alternativas $a_i, a_j \in A$ es definida como:

$$d(a_i, a_j) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^4 |P_k(a_i) \cap P_k(a_j)|}{n}. \quad (4.7)$$

Denotamos $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_p}\}$ como las p acciones del i -ésimo grupo. El perfil del i -ésimo elemento central lo denotamos como $P(c_i)$, que es determinado por:

$$a_j \in P_k(c_i) \Leftrightarrow k = \arg \max \sum_{a_{i_l}} 1_{\{a_j \in P_k(a_{i_l})\}}. \quad (4.8)$$

Por último se denota $C_i = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_p}\}$ como una clase de p acciones y un perfil q definido como:

$$q = \arg \min \sum_{j=1}^p d(a_{i_j}, q). \quad (4.9)$$

4.5. Conclusiones

En lo que concierne a las metodologías de MCDA, se descarta emplear la programación matemática multiobjetivo para la solución del problema bajo estudio, ya que este método aplica para los problemas continuos. También se descartan las metodologías de análisis de desglose de preferencias, teoría de utilidad multiatributo y teoría de relaciones de sobreclasificación dado que implican un orden de preferencia en las alternativas, lo cual no es relevante en el problema que se está abordando.

La esencia de la teoría de conjuntos aproximados es, dada una alternativa “x” esta puede pertenecer a más de una clase y como las etapas de maduración ósea no estas muy bien definidas, esta teoría se ajusta muy bien a las necesidades del problema bajo estudio.

¹Para revisar la demostración de esta fórmula, consultar [44].

METODOLOGÍA PROPUESTA

5.1. Introducción

En este capítulo se describe la metodología que se siguió para la solución del problema en cuestión. En la siguiente sección se describe de manera breve la metodología empleada en este trabajo de investigación. En la sección 5.3 se presenta la parte que refiere a agrupamiento. En la sección 5.4 se muestra la clase a la cual pertenece el problema bajo estudio y en la sección 5.5 se definen los componentes de este tipo de problema. En la última sección, se presentan las conclusiones.

5.2. Metodología

La metodología que se propone en la presente tesis para llevar a cabo la caracterización de la maduración ósea es la siguiente:

- Realizar un análisis de agrupamiento para observar como se comporta la edad

cronológica con respecto a las mediciones en las vértebras cervicales.

- Presentar la clase de problema a la cual pertenece el problema que se está tratando.
- Describir los elementos principales del problema como problema de decisión, los cuales son: las alternativas, los criterios y las categorías definidas a priori.
- Efectuar la clasificación de la maduración ósea.

A continuación en las secciones posteriores se detalla cada etapa de la metodología propuesta.

5.3. Agrupamiento

Se realiza un análisis de agrupamiento para verificar si la edad cronológica de los niños se corresponde o no, ya que si esto ocurriera, no habría nada que hacer con respecto a encontrar la manera de describir de una manera simple cada una de las etapas de maduración ósea.

En secciones anteriores se presenta la base teórica de la tesis, la cual describe los métodos mas importantes de este clase de problema, entre los cuales se encuentran el método de K medias y el método jerárquico. Estos métodos son elegidos para llevar a cabo la tarea de agrupar la muestra de datos y así conocer si la edad cronológica coincide con cierta etapa de maduración ósea. Para llegar a tal conocimiento se emplea el software Statistical Package for the Social Sciences 16.0 (SPSS).

En el apéndice A, se muestran los resultados obtenidos al efectuar este experimento, además se observa que las etapas de maduración ósea no están en paralelo con la edad cronológica de los niños.

5.4. Clase de problema de decisión

Como se dijo con anterioridad, clasificación se refiere a la asignación de un conjunto finito de alternativas a un grupo predefinido. En la figura 5.1 se presentan las clases de los problemas de toma de decisión discretos; para el problema bajo estudio se descartan como categoría de problema: rango, selección y descripción. No se está interesado en construir un rango de alternativas para saber cuales son las más preferidas o las menos preferidas, ni tampoco seleccionar la mejor alternativa o las mejores alternativas y tampoco es de interés identificar las características distintivas de las alternativas. El proceso de decisión del odontólogo es decidir en qué etapa de maduración ósea se encuentra el paciente; una de las formas es realizar las mediciones correspondientes en las vértebras cervicales sobre la radiografía y a partir de estas, determinar el estado de maduración ósea. Dicho lo anterior, se puede afirmar que el problema que se está tratando tiene cabida en la categoría de clasificación y ordenamiento.

El problema bajo estudio puede formularse como un problema de clasificación y ordenamiento multicriterio. Las etapas de maduración ósea no tienen un orden de preferencia para cierto tratamiento de ortodoncia, solo es necesario conocer el estadio para aplicar el tratamiento adecuado, es por ello que esta necesidad se ajusta a un problema de clasificación y no al de ordenamiento.

5.5. Problema de clasificación

El problema bajo estudio está dentro de la categoría de los problemas discretos, entonces es necesario definir las alternativas, los criterios y las categorías. A continuación se detallan cada uno de los componentes que forman el problema de clasificación.

5.5.1. Alternativas

Las alternativas son los niños entre 9 y 16 años que comprenden nuestra muestra de datos; son 80 niños y 80 niñas originarios de Matanzas, Cuba. Calvo [5] realizó el proceso

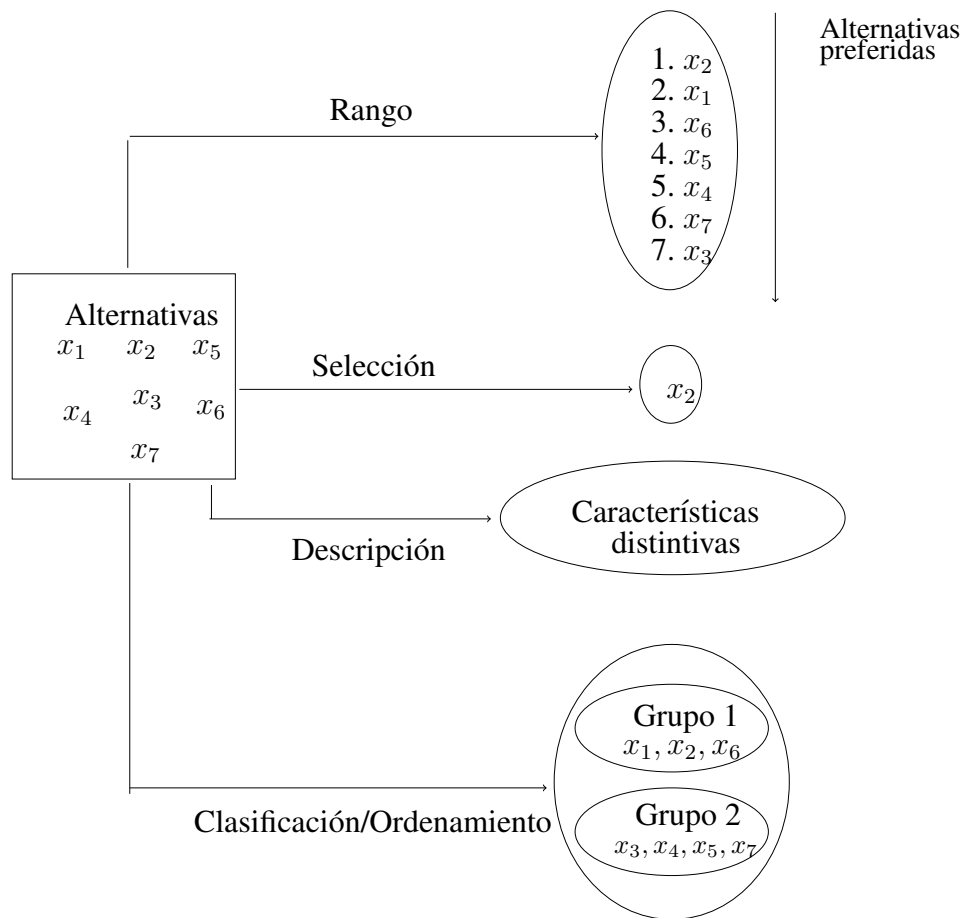


Figura 5.1: Clasificación de los problemas de decisión discretos [12].

de obtención de los datos y dicho proceso consistió en: primero llevar a cabo los exámenes clínico y facial para obtener los niños de la muestra, el fin de estos exámenes era encontrar niños con oclusión normal de los cuales se tomaría los datos para su análisis; después tomar la radiografía lateral de craneo para cada niño, colocando al paciente en posición natural de la cabeza; por último hacer los trazos cefalométricos utilizando: papel para calcos cefalométricos, lápiz con punta 0.5 y regla para mediciones cefalométricas.

5.5.2. Criterios

Los criterios son características de radiografía de una parte determinada del cuerpo, propuestas por Calvo [5]. A continuación se describe el plano de referencia empleado para obtener las mediciones en las vértebras cervicales.

Los trazos cefalométricos tendrán como planos de referencia la Vertical Verdadera a punto T (VVT) y la Horizontal Verdadera a punto T (HVT) ambas del cefalograma Castro Lara AL-UAS. Punto T: ubicado en la pared anterior de la silla turca en unión con la apófisis clinoides anterior. HVT: plano que pasa por el punto T y es interceptado por el Plano Vertical de Referencia (PVR), en un ángulo de 90° . VVT: Plano vertical que pasa por el punto T interceptando el plano de la Horizontal Verdadera en un ángulo de 90° . Plano vertical posterior es perpendicular al plano HVT y es trasladado al borde posterior de la columna cervical. Las mediciones en las vértebras cervicales son las siguientes:

- Altura del borde posterior (ABP): Distancia comprendida entre el punto BPS (borde posterior superior) y el punto BPI (borde posterior inferior) sobre el borde posterior de la vértebra cervical en cuestión.
- Altura del borde anterior (ABA): Distancia medida entre el punto BAS (borde anterior superior) y el punto BAI (borde anterior inferior) sobre la cara anterior de la vértebra cervical en cuestión.
- Altura media (AMEDIA): Comprende el segmento entre el punto BMS (borde medio superior) y el punto BMI (borde medio inferior) sobre el plano medio determinado por estos dos puntos.
- Ancho medio de las vértebras (ANCHO): Medición efectuada en sentido horizontal desde el punto Medio Posterior (MP) ubicado en el centro de la longitud del borde posterior (BPS-BPI) hasta el punto Medio Anterior de la longitud del borde anterior (BAS-BAI).
- Ángulo de Maduración Cervical (AngMC): Partiendo de la Vertical Verdadera (VVT) del cefalograma Castro Lara UAS, trasladada hasta el borde posterior del cuerpo de la vértebra cervical en cuestión. Este plano es interceptado por el plano (Bp-Bm) formado por los puntos borde posterior inferior y borde medio inferior del cuerpo de la vértebra cervical en cuestión, conformando ambos planos el ángulo de Maduración Cervical.

Las mediciones se realizan todas sobre la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical, cuyos cuerpos pueden ser observados en la radiografía, la primera vértebra no es bien apreciada en la misma, véase la figura 5.2.



Figura 5.2: Radiografía muestra.

Entonces, las medidas son las siguientes en donde el número que precede a las mediciones anteriores corresponde con el número de vértebra cervical: 2ABP, 2ANCHO, 2AngMC, 3ABP, 3ABA, 3AMEDIA, 3ANCHO, 3AngMC, 4ABP, 4ABA, 4AMEDIA, 4ANCHO y 4AngMC. Para la segunda vértebra cervical se emplean tres mediciones, para la tercera y cuarta vértebra cervical se emplean cinco mediciones, véase la figura 5.3 en donde se muestran las mediciones para la tercera vértebra cervical. Calvo utilizó éstas medidas para realizar un análisis estadístico, pero ésta investigación carece de un análisis profundo en la búsqueda de la interpretación de las etapas de maduración ósea de una manera simple.

5.5.3. Categorías

Para conocer el estadio de maduración ósea de cada niño se requirió la asesoría de un experto en la materia, Calvo nos proporcionó la descripción para identificar la etapa de maduración ósea de cada niño. En el apéndice G se presenta la descripción de cada etapa

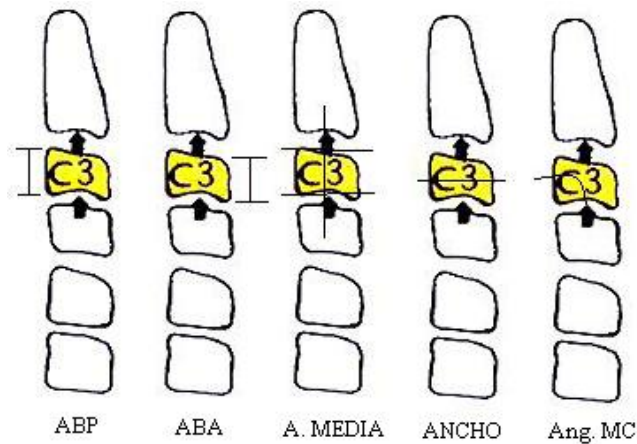


Figura 5.3: Mediciones en la tercera vértebra cervical.

de maduración ósea.

Cabe mencionar que estas bases son muy dependientes de los grupos étnicos de donde es tomada la muestra de datos; para el caso de Cuba es la primera vez que se realiza un estudio de este tipo. Las etapas no están bien definidas en una edad determinada y en muchos casos puede ser difícil diferenciar una de la otra. Además, se contrastan con otros criterios propuestos en la literatura como los de Lamparsky [21] y los de Hassel y Farman [18].

5.6. Clasificación

Con anterioridad se mencionaron las medidas tomadas por Calvo, éstas hacen referencia a las dimensiones de las vértebras cervicales, pero según los criterios para estimar los estadios de maduración ósea vistos en la sección anterior, se necesitan criterios relacionados con la forma de la vértebra, con la existencia de aumento en las dimensiones y con el tipo de concavidad en el borde inferior. Por lo anterior se decidió por definir variables para la caracterización de la maduración ósea derivadas de las mediciones efectuadas por Calvo.

Las medidas que se utilizaron directamente del trabajo realizado por Calvo son los rela-

cionados con los ángulos de maduración de la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical. Los criterios que se proponen en este trabajo de investigación, son los siguientes: aumento en la altura del borde posterior de la segunda vértebra (a_2ABP), aumento en el ancho de la segunda vértebra (a_2Ancho), forma de la tercera vértebra (3Forma), aumento en la altura del borde anterior de la tercera vértebra (a_3ABA), aumento del ancho de la tercera vértebra (a_3Ancho), aumento de la altura del borde posterior de la tercera vértebra (a_3ABP), forma de la cuarta vértebra (4Forma), aumento de la altura del borde anterior de la cuarta vértebra (a_4ABA) y aumento del ancho de la cuarta vértebra (a_4Ancho). A continuación se definen estos nuevos criterios:

- a_2ABP y a_3ABP, hacen referencia a la existencia o no de un aumento en la altura del borde posterior de la segunda y la tercera vértebra cervical relativo al valor mínimo de las mismas en el juego de datos analizado.
- a_2Ancho, a_3Ancho y a_4Ancho, hacen referencia a la existencia o no de un aumento significativo en la anchura de la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical relativo al valor mínimo de las mismas en el juego de datos analizado.
- a_3ABA y a_4ABA, representan la existencia o no de un aumento en la altura del borde anterior de la tercera y la cuarta vértebra cervical relativo al valor mínimo de las mismas en el juego de datos analizado.
- 3Forma y 4Forma, tienen que ver con la morfología de la tercera y cuarta vértebra.

Los criterios empleados en el modelo de clasificación, se discretizaron para facilitar la identificación de los estados de maduración ósea enunciados por los expertos, en este caso se consultó a la Dra. Calvo y a su equipo de trabajo. Estas discretizaciones se presentan en el apéndice F.

Para realizar un entrenamiento de la caracterización de la maduración ósea con la muestra de datos con la cual se cuenta, se desarrolló una aplicación en Microsoft Excel, la cual cuenta con los criterios antes mencionados. Esta herramienta tiene la opción de que se pueden variar todos los parámetros de los criterios que describen cada etapa de maduración ósea. Los resultados que se obtuvieron pueden cambiar dependiendo de los valores

de los parámetros y de las discretizaciones efectuadas. Luego debe comprobarse la consistencia de los resultados y finalmente realizar el análisis de sensibilidad para conocer los criterios que son más susceptibles a las variaciones en los parámetros.

5.7. Conclusiones

Se definen las mediciones tomadas de las vértebras cervicales para llegar a la descripción de la etapa de maduración ósea. Gracias a la ayuda de los expertos se obtuvieron los criterios necesarios para poder clasificar la maduración ósea. Se hace uso de imágenes para que la explicación de las mediciones tomadas sea más clara. También se mencionó que se necesitan criterios relacionados con la forma de la vértebra, con la existencia de aumento en las dimensiones y con el tipo de concavidad en el borde inferior para llegar a la descripción de la maduración ósea; estos criterios se derivan de las mediciones originales.

CAPÍTULO 6

CASO DE ESTUDIO

6.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos con la implementación de softwares de técnicas de clasificación. En la sección 6.2 se presentan los métodos de clasificación empleados para resolver el problema bajo estudio. Primero se experimentó con el análisis discriminante implementando dos herramientas computacionales las cuales son una aplicación desarrollada en Microsoft Excel y el software de Statistical Package for the Social Sciences 16.0 (SPSS). Después se experimentó con los árboles de decisión, utilizando See 5.0 desarrollada por RuleQuest Research [36] y usando una aplicación desarrollada en Microsoft Excel basado en el algoritmo C 4.5. Finalmente se agrega Rough Set Exploration System 2.2.1 (RSES 2.2) [39] para la caracterización de la maduración ósea. En la sección 6.3 se presenta un análisis de los resultados obtenidos. Por último en la sección 6.4 se muestran las conclusiones al utilizar los métodos de clasificación elegidos.

6.2. Método de clasificación

Se va a comparar tres métodos que están entre los más populares para realizar la caracterización de la maduración ósea:

- Análisis discriminante.
- Árboles de clasificación.
- Teoría de conjuntos aproximados.

Se efectuaron los análisis separando los datos por el sexo, ya que los indicadores de las etapas de maduración ósea se presentan más tempranamente en las mujeres que en los hombres. La muestra de datos con la cual se cuenta es de 80 niños y 80 niñas originarios de Matanzas, Cuba y edades comprendidas entre 9 y 16 años, estos niños fueron seleccionados del periodo escolar 2006-2007.

Las categorías son las etapas de maduración ósea definidas por Lamparski [21], Hassel y Farman [18]. Debido a que el proceso de crecimiento es continuo éstas etapas no definen propiamente aquellos casos cuyo crecimiento se encuentra en una fase de transición de una etapa a otra es por ello que en este trabajo se consideran etapas intermedias o de transición entre cada par de etapas consecutivas. A continuación se denominan todas estas etapas:

- La clase a representa los niños en la etapa de iniciación.
- La clase b representa los niños en la etapa de transición entre iniciación y aceleración.
- La clase c representa los niños en la etapa de aceleración.
- La clase d representa los niños en la etapa de transición entre aceleración y transición.
- La clase e representa los niños en la etapa de transición.
- La clase f representa los niños en la etapa de transición entre transición y desaceleración.

- La clase g representa los niños en la etapa de desaceleración.

La muestra de datos con la cual se cuenta no abarca las etapas de madurez y terminación. En el cuadro 6.1 se muestra la distribución de las etapas de maduración ósea de la base de datos con la cual se cuenta. Para llegar a tal estimación de la clasificación de la maduración ósea de la muestra de datos se requirió de la asesoría de los expertos.

Clase	Mujeres	Hombres
a	4	5
b	40	40
c	7	7
d	20	14
e	2	10
f	2	2
g	5	2
Total	80	80

Cuadro 6.1: Muestra de datos.

A continuación se presenta los resultados obtenidos con los criterios que se derivaron de las medidas tomadas por Calvo y Martínez. Cabe mencionar que también se experimentó directamente con estas medidas los resultados obtenidos se pueden apreciar en el apéndice E.

6.2.1. Análisis discriminante

Lo primero que se empleó fue el análisis discriminante lineal [50] obteniendo los siguientes resultados, véase las figuras 6.1 y 6.2. En dichas figuras, se observa que las funciones resultantes no discriminan bien a las clases existentes, es decir, no separan a las clases y tampoco compactan los miembros de una misma clase; entonces, se optó por

realizar el análisis con la herramienta Statistical Package for the Social Sciences 16.0 (SPSS).

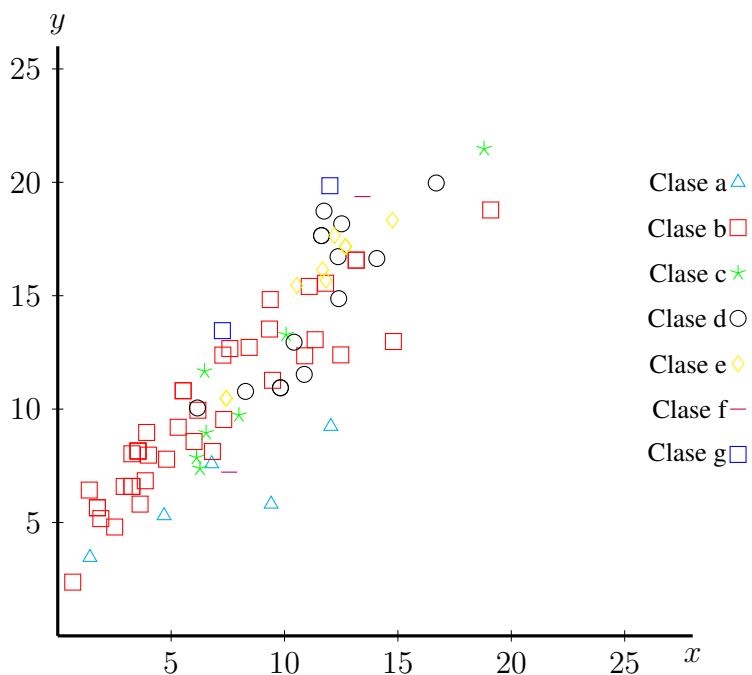


Figura 6.1: Niños (Análisis discriminante).

Como ya se dijo con anterioridad, hay alternativas para decidir qué criterios entran o no en la definición de la función discriminante, por ejemplo: minimizar el estadístico λ de Wilks, minimizar la distancia de Mahalanobis entre los centroides de cada grupo o maximizar el estadístico V de Rao. En nuestra experimentación el criterio con mayor poder clasificatorio es el de minimizar la distancia de Mahalanobis.

A continuación se presentan los resultados de la clasificación, obtenidos del criterio de minimizar la distancia de Mahalanobis. Véase los cuadros 6.2 y 6.3. En dichos cuadros, se puede apreciar que hay muchos errores en la clasificación.

La herramienta empleada para este análisis nos dice que los criterios con un poder discriminatorio mayor para los niños son los siguientes: 3AngMC, a.2ABP, 4AngMC, a.3ABP, 2AngMC, a.2Ancho, a.3ABA y 3Forma.

La herramienta empleada para este análisis nos dice que los criterios con un poder

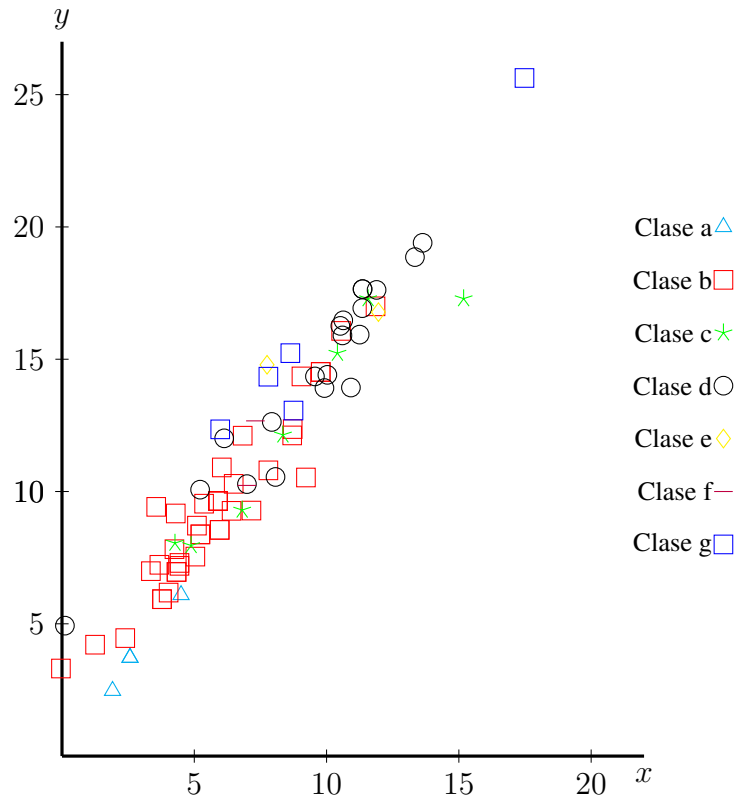


Figura 6.2: Niñas (Análisis discriminante).

Clase	a	b	c	d	e	f	g	Total
a	4	1	0	0	0	0	0	5
b	7	27	6	0	0	0	0	40
c	0	0	7	0	0	0	0	7
d	0	0	1	10	3	0	0	14
e	0	0	0	0	10	0	0	10
f	0	0	0	0	0	2	0	2
g	0	0	0	0	0	0	2	2

Cuadro 6.2: Niños (Mahalanobis, 77.5 % de correcta clasificación).

Clase	a	b	c	d	e	f	g	Total
a	4	0	0	0	0	0	0	4
b	3	30	7	0	0	0	0	40
c	0	2	4	1	0	0	0	7
d	0	0	0	14	6	0	0	20
e	0	0	0	0	2	0	0	2
f	0	0	0	0	0	2	0	2
g	0	0	0	0	0	0	5	5

Cuadro 6.3: Niñas (Mahalanobis, 76.3 % de correcta clasificación).

discriminatorio mayor para las niñas son los siguientes: 2AngMC, a_2Ancho, 4AngMC, a_4ABA, 3AngMC, a_4Ancho, a_3Ancho, 4Forma y a_2ABP.

El encontrar una función lineal que discrimine las etapas de maduración ósea es muy complicado dado el análisis discriminante lineal efectuado. El análisis discriminante desarrollado con SPSS obtuvo no tan buenos porcentajes de correcta clasificación.

6.2.2. Árboles de decisión

Para obtener las reglas de decisión se utilizaron dos herramientas, la primera es un software libre llamado See 5.0, desarrollada por RuleQuest Research [36] y la otra desarrollada en Microsoft Excel basada en el algoritmo de Quinlan C 4.5 [22]. Presentamos primero los resultados obtenidos con See 5.0. Véase los cuadros 6.4 y 6.5.

See 5.0 tiene la opción de modificar varios parámetros para un mejor resultado: reducir el número de atributos que se van a ocupar para formar las reglas de decisión, cambiar el orden de aparición de las reglas de decisión, generar varios conjuntos de reglas de decisión, tomar un porcentaje de la muestra de datos, realizar una validación cruzada, cambiar el mínimo de observaciones que forman una clase y modificar el porcentaje de la poda global. Los parámetros que generaron más cambio en los resultados son los de poda

Clase	a	b	c	d	e	f	g	Total
a	0	5	0	0	0	0	0	5
b	0	40	0	0	0	0	0	40
c	0	2	3	2	0	0	0	7
d	0	1	0	12	1	0	0	14
e	0	0	0	0	10	0	0	10
f	0	0	0	0	2	0	0	2
g	0	0	0	0	0	0	2	2

Cuadro 6.4: Niños (See 5.0, 83.7 % de correcta clasificación).

Clase	a	b	c	d	e	f	g	Total
a	4	0	0	0	0	0	0	4
b	0	37	2	1	0	0	0	40
c	0	2	4	1	0	0	0	7
d	0	0	0	20	0	0	0	20
e	0	0	0	1	0	1	0	2
f	0	0	0	0	0	2	0	2
g	0	0	0	1	0	0	4	5

Cuadro 6.5: Niñas (See 5.0, 88.7 % de correcta clasificación).

global y el mínimo de observaciones. El parámetro de poda global se varió en un rango de 10 % a 50 % y el mínimo de observaciones entre 1 y 10, dando mejores resultados en 25 % de poda global y 2 en mínimo de observaciones. Se realizaron alrededor de 20 experimentos para hombres y mujeres.

La implementación de C4.5 en Microsoft Excel proporciona 3 métricas que nos indican la calidad para cada regla de decisión. Estas medidas de calidad son: soporte, confianza

y captura. La medida de soporte indica la proporción de las observaciones a las cuales aplica la regla en cuestión, la de confianza nos hace mención a la exactitud de la regla y la de captura nos indica el porcentaje de la clase en cuestión que es capturada correctamente con esta regla. Además, tiene la opción de modificar varios criterios, entre los que destacan cambiar el tamaño mínimo de nodo, máxima pureza, profundidad máxima, condicionar la aparición de reglas de confianza y soporte. Valores grandes del tamaño mínimo de nodo generan un árbol pequeño, valores grandes de máxima pureza generan un árbol grande y valores grandes de profundidad máxima generan un árbol grande. Se condicionó la aparición de reglas con un 50 % de confianza y 25 % de soporte. El tamaño mínimo de nodo se varió entre 1 % y 15 %, máxima pureza se varió entre 80 % y 99 % y profundidad máxima se varió entre 6 y 20. Los valores de estos parámetros con los mejores resultados son: para el tamaño mínimo de nodo igual a 5 %, para máxima pureza igual a 99 % y para profundidad máxima igual a 20. Se realizaron alrededor de 40 experimentos, las salidas más interesantes se muestran en los cuadros 6.6 y 6.7.

En los cuadros 6.6 y 6.7 se observa que, con esta aplicación sólo se logra la clasificación de las categorías que contienen un número muy alto de elementos (niños).

Regla	Clase	Longitud	Soporte	Confianza	Cobertura
1	b	1	45.0 %	77.8 %	70.0 %
2	b	1	42.5 %	79.4 %	67.5 %
3	b	1	45.0 %	80.6 %	72.5 %

Cuadro 6.6: Niños (C 4.5).

Regla	Clase	Longitud	Soporte	Confianza	Cobertura
1	b	1	37.5 %	66.7 %	50.0 %
2	d	1	36.3 %	55.2 %	80.0 %
3	d	1	27.5 %	54.5 %	60.0 %
4	b	1	63.7 %	72.5 %	92.5 %
5	b	1	51.2 %	78.0 %	80.0 %

Cuadro 6.7: Niñas (C 4.5).

6.2.3. Conjuntos aproximados

Metodología de conjuntos aproximados

El primer paso es realizar cortes en los datos, ya que los datos son continuos y esta metodología exige trabajar con atributos de baja cardinalidad. Los cortes efectuados para la caracterización de la maduración ósea se muestran en el apéndice F.

El siguiente paso es generar las reglas de decisión o generar reductos y después las reglas de decisión. En la experimentación del problema bajo estudio se emplearon dos algoritmos de reductos: algoritmo exhaustivo y algoritmo genético, obteniendo para niños 609 reglas y 608 reglas respectivamente y para las niñas 485 reglas y 359 reglas respectivamente.

Entonces se optó por determinar las reglas de decisión directamente de la tabla discretizada, contando con cuatro algoritmos: algoritmo exhaustivo, algoritmo genético, algoritmo de cobertura y algoritmo LEM2. Como se puede observar en el apéndice D, el algoritmo LEM2 fue con el que se obtuvieron mejores resultados. El método LEM2 tiene la opción de variar el parámetro de cobertura, el cual varía de 0 a 1, entre más cercano a 1 se obtienen mejores resultados en general.

Se varió el parámetro de cobertura de 0.8 a 0.95 para la muestra de niños obteniendo los resultados presentados en el cuadro 6.8, se puede ver que los mejores resultados se logran

con 24 reglas de decisión, ya que se obtiene un alto grado de cobertura de los datos. En el mismo cuadro se observa que a medida que disminuye el número de reglas de decisión también disminuye la proporción de cobertura de los datos. En el cuadro 6.9 se presenta la distribución de 24 reglas.

Reglas de decisión	Correcta clasificación	Cobertura
24	1	0.950
22	1	0.925
19	1	0.862
18	1	0.812

Cuadro 6.8: Niños (RSES 2.2 - LEM2.)

Clase	Reglas
a	2
b	5
c	5
d	6
e	4
f	1
g	1

Cuadro 6.9: Distribución de las reglas de los niños (24 reglas).

Se varió el parametro de cobertura de 0.8 a 0.95 para la muestra de niñas obteniendo los resultados presentados en el cuadro 6.10. En este cuadro se puede ver que los mejores resultados se logran con 22 reglas de decisión, además tiene la misma tendencia que el cuadro anterior. En el cuadro 6.11 se presenta la distribución de 22 reglas.

Reglas de decisión	Correcta clasificación	Cobertura
22	1	0.950
20	1	0.912
19	1	0.888
17	1	0.838

Cuadro 6.10: Niñas (RSES 2.2 - LEM2.)

Clase	Reglas
a	1
b	12
c	3
d	3
e	1
f	1
g	1

Cuadro 6.11: Distribución de las reglas de las niñas (22 reglas).

Análisis de sensibilidad

En la metodología de conjuntos aproximados es importante investigar cuán sensibles son los resultados finales respecto a las normas de discretización. Este tipo de análisis permite que el tomador de decisiones identifique cuáles criterios son más sensibles y por ello tener más cuidado al realizar las discretizaciones.

Se propone en este trabajo realizar el siguiente análisis de sensibilidad, tomando los datos de los niños para dicho experimento.

Conociendo de antemano la descripción de cada etapa de maduración ósea, además

de los criterios que componen el modelo a seguir para llegar a la caracterización de la maduración ósea, se procedió a variar en un 2 % y 6 % los valores establecidos que actúan como frontera en las especificaciones dadas por Calvo las cuales tienen como función la discretización de los criterios del modelo. Dado los rangos de variación de 2 % y 6 % de cada especificación, se seleccionó de manera de aleatoria tres números entre estos intervalos de variabilidad, después se realizaron las clasificaciones correspondientes con la implementación de la herramienta desarrollada en Microsoft Excel. Estas caracterizaciones consisten en variar un criterio del modelo a la vez, teniendo como resultado tres clasificaciones alteradas por cada criterio del modelo. El paso siguiente fue obtener las reglas de decisión para cada clasificación.

Teniendo las reglas de decisión con los valores originales, los que corresponden a la descripción de cada etapa de maduración ósea brindada por los expertos y habiendo obtenido las reglas de decisión con los valores modificados, lo que siguió fue realizar una comparación de las reglas, para de esta manera identificar los criterios que son muy sensibles a perturbaciones en un 2 % y 6 %.

Esta comparación toma ciertas etiquetas: iguales, modificada sutil, modificada no significativa, modificada significativa y diferente. Las etiquetas que corresponden a las reglas modificadas están sujetas a:

- Reglas modificadas sutilmente, se refieren a que tienen los mismos criterios, solo que los valores que estos toman son valores adyacentes a los valores de las reglas de decisión originales.
- Reglas modificadas no significativamente tienen gran similitud a la antes mencionada, la diferencia radica en que estas reglas cuentan por lo menos con un valor no adyacente de los criterios que forman la regla en cuestión.
- Reglas modificadas significativamente son las que no entran en las etiquetas antes mencionadas y tampoco son iguales ni diferentes.

En los cuadros 6.12 y 6.13 se presentan los peores casos encontrados con la comparación de reglas antes mencionadas para 2 % y 6 % de variabilidad. En el cuadro 6.12 se

puede apreciar que los criterios relacionados con el ángulo de maduración y con la forma de la vértebra resultaron muy sensibles a variaciones de 1 %.

Criterio	Reglas
2AngMC	11 Iguales, 13 Significativas
3AngMC	15 Iguales, 9 Significativas
4AngMC	17 Iguales, 7 Significativas
3Forma	16 Iguales, 8 Significativas
4Forma	13 Iguales, 11 Significativas
2ABP	24 Iguales
2Ancho	24 Iguales
3ABA	24 Iguales
3Ancho	24 Iguales
3ABP	24 Iguales
4ABA	24 Iguales
4Ancho	24 Iguales

Cuadro 6.12: Reglas con 2 % de variabilidad.

6.3. Análisis de resultados

En lo que respecta a análisis discriminante las gráficas presentadas en las figuras 6.1 y 6.2 muestran claramente que no se logra obtener el objetivo de este análisis, el cual es compactar los elementos de una misma clase y separar las clases. El análisis efectuado con SPSS resultó no tan bueno como se observa en los cuadros 6.2 y 6.3. En general se puede concluir que el análisis discriminante no es eficiente para la caracterización de la maduración ósea empleando las vértebras cervicales.

En lo que refiere a los árboles de decisión, con la aplicación de See 5.0 se obtuvieron muy pocas reglas de decisión, pero los errores en la caracterización de la maduración ósea

Criterio	Reglas
2AngMC	14 Iguales, 10 Significativas
3AngMC	16 Iguales, 7 Significativas, 1 Diferente
4AngMC	15 Iguales, 8 Significativas, 1 Diferente
3Forma	13 Iguales, 11 Significativas
4Forma	13 Iguales, 11 Significativas
2ABP	13 Iguales, 11 Significativas
2Ancho	13 Iguales, 11 Significativas
3ABA	19 Iguales, 5 Significativas
3Ancho	24 Iguales
3ABP	21 Iguales, 3 Significativas
4ABA	23 Iguales, 1 Significativas
4Ancho	21 Iguales, 2 Significativas, 1 Diferente

Cuadro 6.13: Reglas con 6 % de variabilidad.

fueron muchos. Con la otra aplicación, como se puede ver en los cuadros 6.6 y 6.7 la confianza de las reglas de decisión es muy baja.

Los mejores resultados se obtuvieron con la teoría de conjuntos aproximados. En la experimentación desarrollada con este método de clasificación se obtuvieron clasificaciones muy buenas, se logró cubrir en un 95 % los datos con 0 errores en la clasificación de la maduración ósea.

6.4. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los resultados obtenidos con los tres métodos de clasificación propuestos para la caracterización de la maduración ósea mediante la segunda, la tercera y la cuarta vértebra cervical. El análisis discriminante obtuvo los peores resul-

tados como se observó en los cuadros y figuras correspondientes. El método de árboles de decisión obtuvo resultados malos. La teoría de conjuntos aproximados según la experimentación efectuada obtuvo los mejores resultados.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1. Conclusiones

1. Se ha mostrado que el problema de la determinación de la maduración ósea puede modelarse y resolverse eficientemente como un problema de clasificación multi-criterio. Para los datos analizados los conjuntos aproximados han superado a otros métodos convencionales en cuanto a la compacidad, cobertura y precisión del conjunto generado de reglas de decisión.
2. La introducción de etapas de transición como clases fue un acierto desde el punto de vista de la modelación y permitió una clasificación más realista ya que los pacientes se encuentran en continuo crecimiento por lo que no necesariamente sus características morfológicas coinciden 100% con la descripción de las etapas de maduración ósea brindadas en la literatura y enriquecida por la opinión de los expertos. Luego de aplicar la metodología propuesta los expertos coincidieron en que la introducción de las etapas de transición condujo a una mejor clasificación. Luego

este es un resultado original de esta investigación y que no aparece en ninguno de los materiales bibliográficos revisados por el autor.

3. A pesar de que los datos disponibles no poseían una distribución normal y el procedimiento muestral empleado dista mucho de garantizar una representación de la población total de pacientes, los conjuntos aproximados aportaron buenos resultados, en el sentido de que las reglas obtenidas coinciden en gran medida con las reglas establecidas por los expertos, aún cuando muchos de los pacientes no pudieron ser ubicados con exactitud en una etapa de maduración ósea determinada (pero si en etapas de transición).
4. El análisis de sensibilidad arrojó el resultado de que la mayoría de los atributos son sensibles a la elección de las normas de discretización luego el analista debe dedicar atención especial a este hecho cuando extraiga la información preferencial de los expertos. También debe tomarse en cuenta al desarrollar herramientas computacionales automatizadas, lo que complica la implementación de las mismas.
5. Dado el carácter específico de la muestra de datos empleada hay serias dudas de la generalización de la metodología propuesta, y se requiere realizar más experimentos para validar su efectividad en lo que concierne a la pequeña cantidad de reglas generadas, al amplio nivel de cobertura de las mismas y a su precisión.

7.2. Recomendaciones

1. A pesar de lo costoso en tiempo y recursos del proceso de recopilación de datos de los clientes se recomienda confeccionar varios juegos de datos de diferentes regiones o con diferentes características étnicas, seleccionando los individuos bajo criterios muestrales estadísticos para validar la generalidad de la metodología desarrollada. En estos juegos de datos incluir no solo pacientes con oclusión normal sino también con mal oclusión ya que los tratamientos se aplican a estos últimos.
2. Dado que el modelo de clasificación se basa en medidas de las vértebras cervicales

estudiar la posibilidad de desarrollar un módulo o complemento que pueda incorporarse en paquetes comerciales actuales, para apoyar la toma de decisiones en la aplicación de tratamientos de ortodoncia, debido a que los principales paquetes de software que se han revisado poseen herramientas muy rudimentarias para estimar la maduración ósea de los pacientes.

APÉNDICE A

Agrupamiento

Para llevar a cabo el análisis de agrupamiento se separaron los datos, por grupos de edad y sexo, dando un total de 8 conjuntos que son: hombres de 9-10 años (1), mujeres de 9-10 años (2), hombres de 11-12 años (3), mujeres de 11-12 años (4), hombres de 13-14 años (5), mujeres de 13-14 años (6), hombres de 15-16 años (7) y mujeres de 15-16 años (8). El objetivo de este análisis es para cada conjunto de datos definido anteriormente encontrar grupos de niños que tengan la misma edad.

Se realizaron dos experimentos diferentes, el primero consta de normalizar las medidas de los ángulos de la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical, convirtiendo en radianes los valores originales, para el método de K medias. Para el método de agrupamiento jerárquico se normalizaron todos los datos a media 0 y varianza 1.

El otro tipo de experimento, primero se procedió a convertir los grados a radianes de los criterios dados en ángulos, para tener puros números reales y así poder iniciar con el análisis. En seguida todos los valores de los criterios se procedieron a estandarizarse en un rango de 0 a 1, ya que se presentaban problemas de métrica, y esto ocasionaba confusiones

en el cálculo de las distancias para realizar el agrupamiento.

Cabe mencionar que los niños están enumerados de acuerdo a la edad, es decir, en el análisis de hombres de 9 a 10 años se muestran 20 alternativas, las primeras 10 corresponden a los niños de 9 años y los siguientes 10 a los niños de 10 años.

Recordando que en el método jerárquico se pueden aplicar varios tipos de medidas para encontrar la distancia y elegir diferentes métodos de aglomeración, se procede a seleccionar los más recomendados por expertos, los cuales son:

En lo que respecta a las distancias:

- Distancia euclidiana (medida de disimilaridad).
- Distancia euclidiana cuadrada (medida de disimilaridad).
- Correlación de Pearson (medida de similaridad).

En lo que concierne al método de aglomeración se seleccionó a:

- Método de vinculación por el vecino más cercano.
- Método de vinculación por el vecino más lejano.
- Método de vinculación inter-grupos.
- Método de vinculación entre-grupos.

En la experimentación realizada se mezcló cada método con cada distancia, resultando la combinación del método de vecino más lejano y distancia euclidiana cuadrada la mejor agrupación en la mayoría de los casos, tomando en cuenta los términos de compacidad de cada grupo y separabilidad entre los grupos. Esta combinación de distancia con método es la que se expone en esta sección.

A.1. Primer experimento

Para el grupo (1) hombres 9-10 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

1. 1,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,17.
2. 2,11,15,16,18,19,20.

El elemento más distante es el 4 como se puede ver en la figura A.1, ya que tiene una distancia aproximada de 11 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.1 se puede apreciar la compacidad de los miembros de un grupo, cuya distancia no rebasa de 12 aproximadamente. También se puede ver que la distancia de separación de los dos grupos es de 25. En el grupo 1 predominan los niños de 9 años (9 de 10). En el grupo 2 predominan los niños de 10 años (6 de 10).

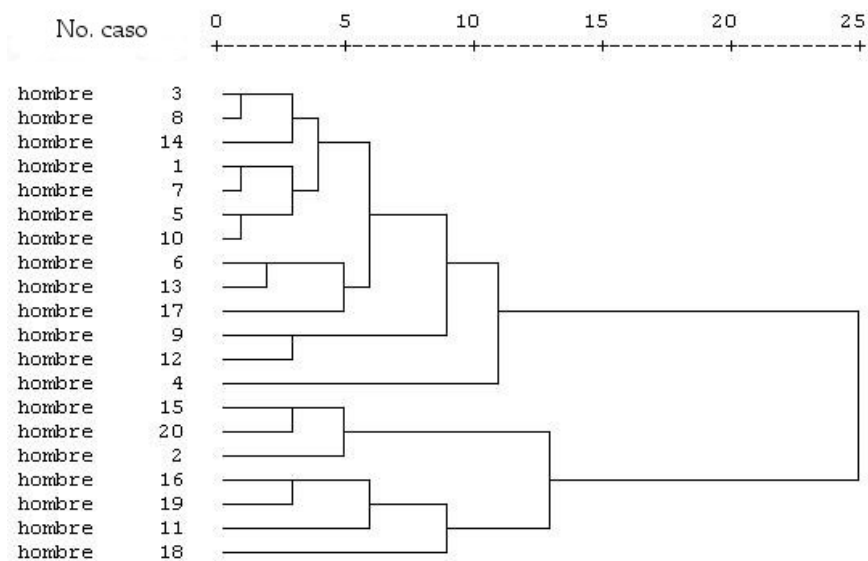


Figura A.1: Dendrograma no. 1.

Para el grupo (1) hombres 9-10 usando el método *K* medias, los elementos agrupados son:

1. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14.

2. 11,12,15,16,17,18,19,20.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.1. El elemento más distante es 19 con una distancia de 6.11 a su centro. En el grupo 2 predominan los niños de 10 años (10 de 10). En el grupo 1 predominan los niños de 9 años (8 de 10).

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	24.54	30.75
2ANCHO	11.00	12.81
3ABP	9.20	11.25
3ABA	6.7	8.25
3AMEDIA	7.95	9.56
3ANCHO	13.08	14.5
4ABP	9.25	11.5
4ABA	6.83	8
4AMEDIA	7.91	9.43
4ANCHO	12.91	14.68
2AngMC	1.85	1.77
3AngMC	1.7	1.69
4AngMC	1.71	1.64

Cuadro A.1: Coordenadas de los centros para el grupo no. 1.

Clasifican muy parecido en general, pero los elementos que no guardan concordancia en la pertenencia de los grupos con los métodos antes mencionados son: 2,12,17.

Para el grupo (2) mujeres 9-10 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

1. 1,3,4,5,6,8,9,12,13,14,15,16,17,18.

2. 2,7,10,11,19,20.

El elemento más distante es el 11 como se puede ver en la figura A.2, ya que tiene una distancia aproximada de 10 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.2 se puede apreciar la compacidad de los miembros de un grupo, cuya distancia no rebasa de 11 aproximadamente. También se puede ver que la distancia de separación de los dos grupos es de 25. En el grupo no. 1 predominan las mujeres de 9 años (7 de 10).

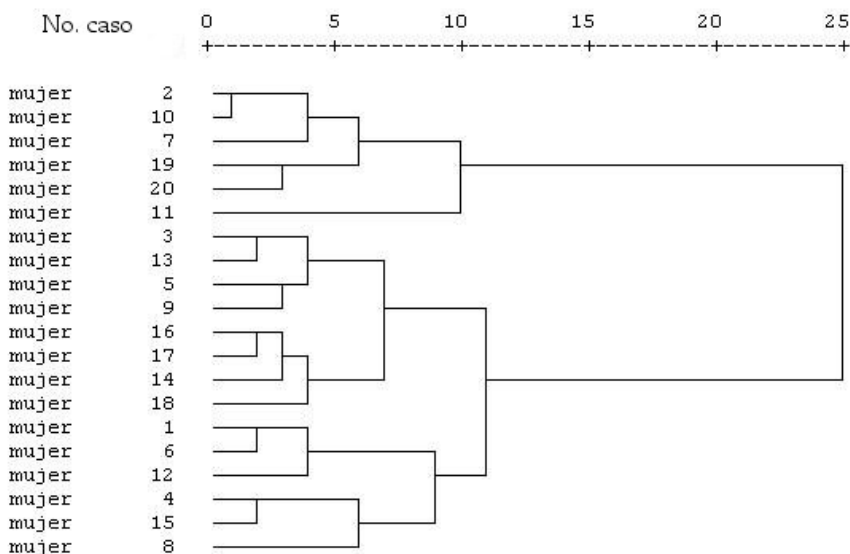


Figura A.2: Dendrograma no. 2.

Para el grupo (2) mujeres 9-10 usando el método *K* medias, los elementos agrupados son:

1. 1,3,4,5,6,8,9,12,13,14,15,16,18.
2. 2,7,10,11,17,19,20.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.2. El elemento más distante es 11 con una distancia de 5.103 a su centro.

Clasifican muy parecido en general, pero el elemento que no guarda concordancia en la pertenencia de los grupos con los métodos antes mencionados es 17.

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	25.8	30.28
2ANCHO	10.61	11.57
3ABP	9.57	11
3ABA	7.07	8.78
3AMEDIA	8.3	9.42
3ANCHO	12.3	13.64
4ABP	9.61	10.85
4ABA	6.96	8.5
4AMEDIA	8.07	9.42
4ANCHO	12.23	13.5
2AngMC	1.78	1.69
3AngMC	1.72	1.65
4AngMC	1.67	1.65

Cuadro A.2: Coordenadas de los centros para el grupo no. 2.

Para el grupo (3) hombres 11-12 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20.

El elemento más distante es 18 y fuera del grupo, como se puede ver en la figura A.3, ya que tiene una distancia aproximada de 25 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.3 se puede apreciar un solo grupo y la presencia de un elemento raro que es el 18.

Para el grupo (3) hombres 11-12 usando el método K medias, los elementos agrupados son:

- 13, 17, 18.

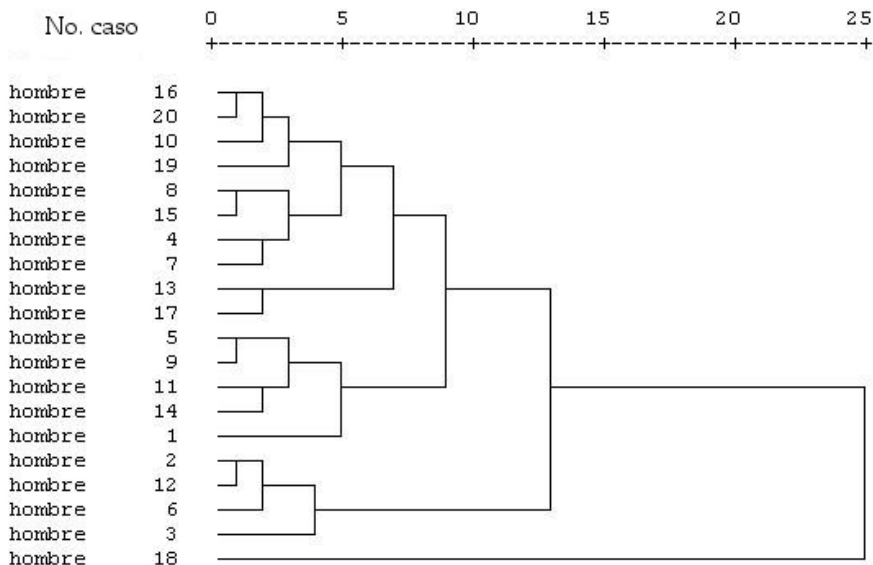


Figura A.3: Dendrograma no. 3.

- 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16,19,20.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.3.

Clasifican muy parecido en general, pero los elementos que no guardan concordancia en la pertenencia de los grupos con los métodos antes mencionados son: 13,17.

Para el grupo (4) mujeres 11-12 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

- 1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14.
- 8,15,16,17,18,19,20.

El elemento más distante es el 5 como se puede ver en la figura A.4, ya que tiene una distancia aproximada de 7 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.4 se puede apreciar la compacidad de los miembros de un grupo, cuya distancia no rebasa de 8 aproximadamente. También se puede ver que la distancia de separación de los dos grupos es de 25. En el grupo 1

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	35.16	28.82
2ANCHO	13.5	11.85
3ABP	13.33	11.35
3ABA	10	8.11
3AMEDIA	10.33	9.08
3ANCHO	15	14.7
4ABP	13.66	11.32
4ABA	9.66	8.02
4AMEDIA	10.83	9.08
4ANCHO	14.5	14.08
2AngMC	1.58	1.66
3AngMC	1.59	1.69
4AngMC	1.53	1.68

Cuadro A.3: Coordenadas de los centros para el grupo no. 3.

predominan los niños de 11 años (9 de 10). En el grupo 2 predominan los niños de 12 años (6 de 10).

Para el grupo (4) mujeres 11-12 usando el método K medias, los elementos agrupados son:

1. 8,15,16,17,18,19,20.
2. 1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.4. El elemento más distante es 5 con una distancia de 5.71 a su centro. En el grupo 1 predominan los niños de 12 años (9 de 10). En el grupo 2 predominan los niños de 11 años (6 de 10).

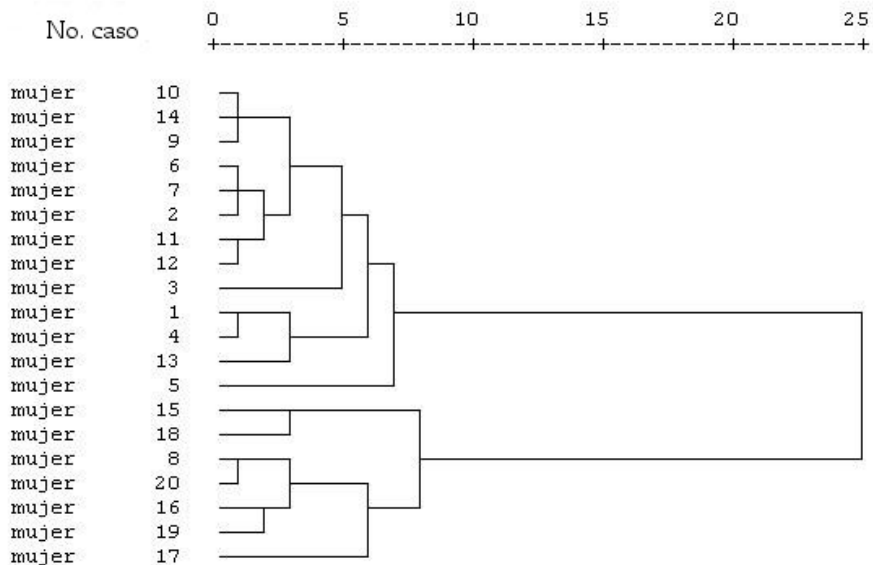


Figura A.4: Dendrograma no. 4.

En general estos dos métodos para este grupo de datos clasificaron lo mismo.

Para el grupo (5) hombres 13-14 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

1. 1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,16,18.
2. 4,12,13,14,15,17,19,20.

El elemento más distante es el 2 como se puede ver en la figura A.5, ya que tiene una distancia aproximada de 11 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.5 se puede apreciar la compacidad de los miembros de un grupo, cuya distancia no rebasa de 15 aproximadamente. También se puede ver que la distancia de separación de los dos grupos es de 25. En el grupo 1 predominan los niños de 13 años (9 de 10). En el grupo 2 predominan los niños de 14 años (7 de 10).

Para el grupo (5) hombres 13-14 usando el método K medias, los elementos agrupados son:

1. 4,12,14,15,17,19,20.

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	32.21	30.15
2ANCHO	12.92	10.73
3ABP	14	11.76
3ABA	12.21	8.53
3AMEDIA	12.14	9.19
3ANCHO	14.35	13.5
4ABP	14.28	11.53
4ABA	11.78	8.46
4AMEDIA	11.28	9.11
4ANCHO	13.5	3.15
2AngMC	1.61	1.63
3AngMC	1.49	1.61
4AngMC	1.53	1.62

Cuadro A.4: Coordenadas de los centros para el grupo no. 4.

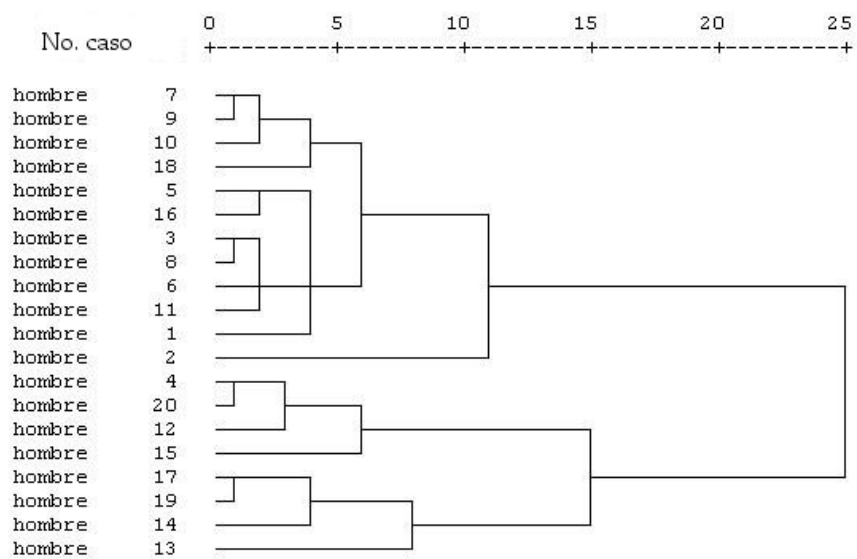


Figura A.5: Dendrograma no. 5.

2. 1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,13,16,18.

A continuación las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.5. El elemento más distante es 15 con una distancia de 6.85 a su centro. En el grupo 1 predominan los niños de 14 años (6 de 10).

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	35.85	31.65
2ANCHO	14	12.38
3ABP	16.64	11.73
3ABA	14.14	9.15
3AMEDIA	14	9.53
3ANCHO	16.07	15.03
4ABP	15.71	12.42
4ABA	13.85	9.3
4AMEDIA	13.21	10.11
4ANCHO	15.92	15
2AngMC	1.51	1.59
3AngMC	1.47	1.51
4AngMC	1.49	1.58

Cuadro A.5: Coordenadas de los centros para el grupo no. 5.

Clasifican muy parecido en general, pero el elemento que no guardó concordancia en la pertenencia de los grupos con los métodos antes mencionados es 13.

Para el grupo (6) mujeres 13-14 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

1. 1,2,6,7,8,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20.
2. 3,4,5,9,11.

El elemento más distante es el 19 como se puede ver en la figura A.6, ya que tiene una distancia aproximada de 6 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.6 se puede apreciar la compacidad de los miembros de un grupo, cuya distancia no rebasa de 13 aproximadamente. También se puede ver que la distancia de separación de los dos grupos es de 25.

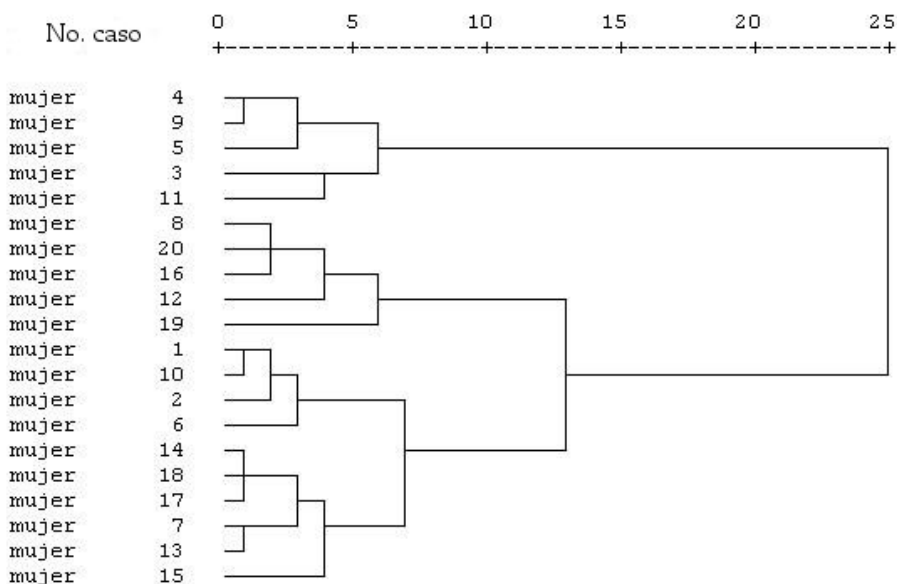


Figura A.6: Dendrograma no. 6.

Para el grupo (6) mujeres 13-14 usando el método *K* medias, los elementos agrupados son:

1. 1,2,6,7,8,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20.
2. 3,4,5,9,11.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.6. El elemento más distante es 19 con una distancia de 5.66 a su centro.

En general estos dos métodos para este grupo de datos clasificaron lo mismo.

Para el grupo (7) hombres 15-16 usando el método jerárquico, la mejor combinación para este grupo de datos que mostraba gran similitud con el método de *K* medias fue distancia euclidiana cuadrada y inter-grupo. Los elementos agrupados son:

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	32.73	31.2
2ANCHO	13.26	11.7
3ABP	14.46	11.8
3ABA	12.86	9.7
3AMEDIA	11.96	10.1
3ANCHO	15.63	13.7
4ABP	14.23	11.2
4ABA	12.4	10
4AMEDIA	12.16	9.8
4ANCHO	15.56	13.7
2AngMC	1.42	1.58
3AngMC	1.43	1.64
4AngMC	1.47	1.62

Cuadro A.6: Coordenadas de los centros para el grupo no. 6.

1. 1,3,5,6,7,8,9,10,11,14,18,20.
2. 2,4,12,13,15,16,17,19.

El elemento más distante es el 11 como se puede ver en la figura A.7, ya que tiene una distancia aproximada de 21 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.7 se puede apreciar que no hay una gran compacidad entre los miembros de un grupo.

Para el grupo (7) hombres 15-16 usando el método K medias, los elementos agrupados son:

1. 1,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15.
2. 2,4,16,17,18,19,20.

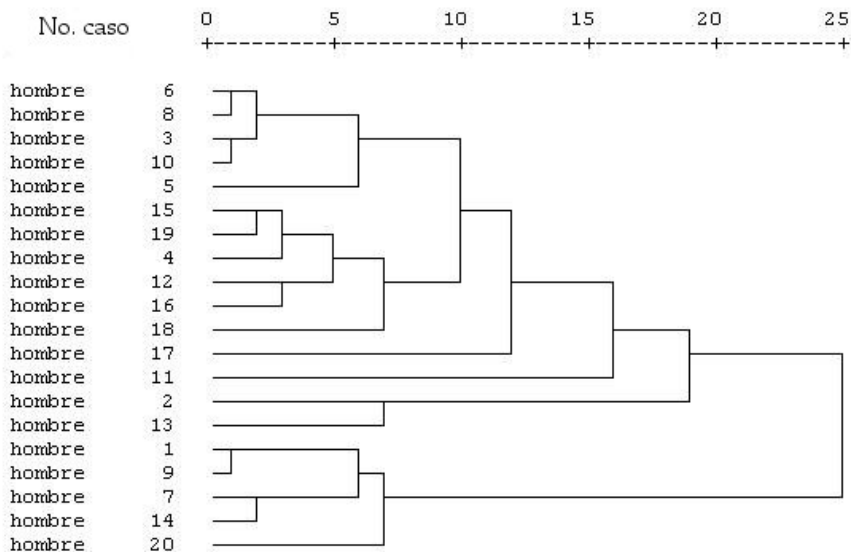


Figura A.7: Dendrograma no. 7.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.7. Los elementos más distantes son 11 y 13 con distancia de 5.54 y 5.78 respectivamente a su centro.

Clasifican muy parecido en general, pero los elementos que no guardan concordancia en la pertenencia de los grupos con los métodos antes mencionados son: 12, 13, 15, 18, 20.

Para el grupo (8) mujeres 15-16 usando el método jerárquico, los elementos agrupados son:

1. 1,3,5,6,7,8,9,10,12,13,14,16,18,19,20.
2. 2,4,11,15,17.

Los elementos más distantes son 2 y 19 como se pueden ver en la figura A.8, ya que tienen una distancia aproximada de 12 a otro componente (elemento individual o elementos fundidos) en la escala estandarizada de 0 al 25. En la figura A.8 se puede apreciar la compacidad de los miembros de un grupo, cuya distancia no rebasa de 13 aproximadamente. También se puede ver que la distancia de separación de los dos grupos es de 25.

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	35.53	40.16
2ANCHO	13.85	14.66
3ABP	15.42	17
3ABA	14.07	15.91
3AMEDIA	13.07	14.58
3ANCHO	16.46	16.91
4ABP	15.25	16.25
4ABA	13.78	14.41
4AMEDIA	13.17	13.5
4ANCHO	16.85	17.33
2AngMC	1.35	1.43
3AngMC	1.34	1.39
4AngMC	1.41	1.42

Cuadro A.7: Coordenadas de los centros para el grupo no. 7.

Para el grupo (8) mujeres 15-16 usando el método K medias, los elementos agrupados son:

1. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,20.
2. 19.

A continuación se presentan las coordenadas de los centros de los grupos formados, véase el cuadro A.8. El elemento más distante es 2 con una distancia de 6.71 a su centro.

En conclusión, no se pudo obtener que los niños tanto como las niñas de una misma edad estuvieran en el mismo grupo, ya que si esto ocurriera, ya no tendría caso aplicar métodos de clasificación para la maduración ósea.

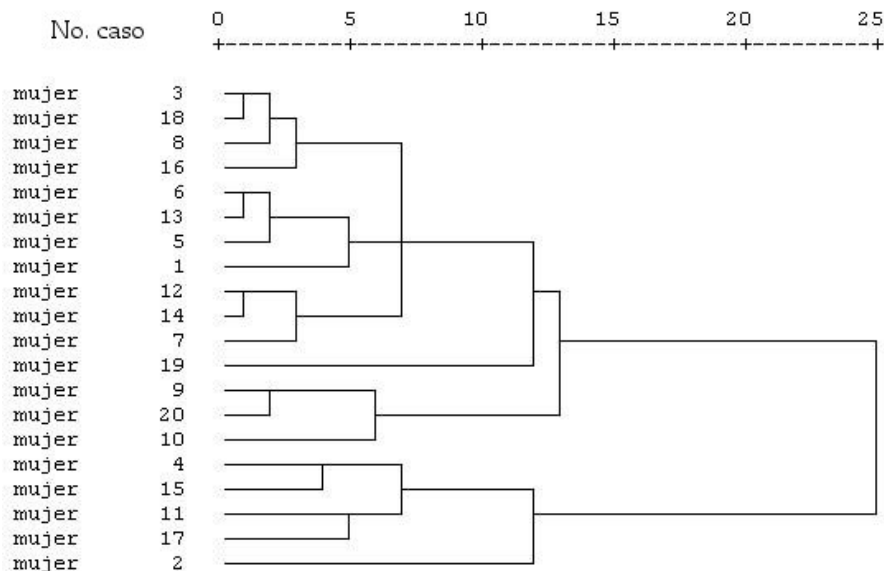


Figura A.8: Dendrograma no. 8.

A.2. Segundo experimento

Primero se hizo el análisis con el problema agrupamiento jerárquico; para este método se experimentó con las combinaciones de cuatro métodos de aglomeración (vecino más cercano, vecino más lejano, inter-grupos y entre grupos) y 3 medidas de distancias (correlación de Pearson, distancia euclidiana y distancia euclidiana cuadrada). También para este experimento se mezcló cada medida de distancia con cada método y resultó que la combinación de vecino más lejano y distancia euclidiana cuadrada resultó la mejor agrupación en la mayoría de los casos, tomando en cuenta los términos de compacidad de cada grupo y separabilidad entre los grupos.

Se aplicó este método para un rango de 2 a 6 grupos, se pudo observar en los dendrogramas de todos los grupos de datos que en la mayoría de los casos el número óptimo de grupo es 2. En el cuadro A.9 se muestran los 8 juegos de datos con sus respectivos grupos y sus miembros.

Después se experimentó con el método de agrupamiento K medias. El rango de números de grupo varió de 2 a 6, se obtuvieron distancias de separación muy pequeñas entre los centroides y miembros de grupos, lo que dificultaba la correcta clasificación. La

Criterios	Grupo 1	Grupo 2
2ABP	34.1	28
2ANCHO	13.1	13
3ABP	14.94	14.5
3ABA	13.92	13
3AMEDIA	12.26	11
3ANCHO	15.39	18.5
4ABP	14.65	16
4ABA	13.05	12.5
4AMEDIA	12.05	10.5
4ANCHO	15.02	18
2AngMC	1.35	1.19
3AngMC	1.36	1.22
4AngMC	1.36	1.34

Cuadro A.8: Coordenadas de los centros para el grupo no. 8.

distancia de separación de grupos es también muy pequeña, por lo cual se optó por el número de grupos igual a dos, ya que de todas las distancias pequeñas es la más grande. En el cuadro A.10 se presenta la distancia existente entre los dos centros de grupos y se aprecia que son demasiado pequeñas.

Se decidió a analizar las mujeres de 9 a 10 años, en el cuadro A.11 se puede apreciar que los grupos quedan de la siguiente forma:

1. 1,4,5,6,8,9,12,13,15.
2. 2,3,7,10,11,14,16,17,18,19,20.

Ahora se decidió a cambiar el orden de las alternativas para las mujeres de 9 a 10 años, en el cuadro A.12 el orden con respecto a los datos originales es el siguiente: los primeros

Grupo de datos	Miembros al grupo 1 y 2
(1)	1 : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 17 2 : 2, 11, 15, 16, 18, 19, 20
(2)	1 : 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 2 : 2, 7, 10, 11, 19, 20
(3)	1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20 2 : 18
(4)	1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14 2 : 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20
(5)	1 : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18 2 : 4, 12, 14, 15, 17, 19, 20
(6)	1 : 1, 2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 2 : 3, 4, 5, 9, 11
(7)	1 : 1, 7, 9, 14, 20 2 : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19
(8)	1 : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 2 : 2

Cuadro A.9: Método jerárquico.

10 elementos son los últimos 10 en el orden original y los últimos 10 elementos son los primeros 10 en el orden original, entonces, los grupos quedan de la siguiente forma:

1. 2,7,10,11,17,19,20.
2. 1,3,4,5,6,8,9,12,13,14,15,16,18.

Se llegó a la conclusión de que este método es sensible al orden de los datos, ya que al intercambiar dicho orden de aparición de los datos se obtuvieron grupos diferentes. En el cuadro A.13 se muestran los 8 juegos de datos con sus respectivos grupos y sus miembros.

Grupo de datos	Distancias
hombres de 9-10 años	1.382
mujeres de 9 -10 años	1.178
hombres de 11-12 años	1.025
mujeres de 11-12 años	1.274
hombres de 13-14 años	1.396
mujeres de 13-14 años	1.520
hombres de 15-16 años	0.919
mujeres de 15-16 años	0.857

Cuadro A.10: Distancias entre los dos grupos formados para cada muestra de datos.

Los casos que aparecen en negrita en el cuadro A.13 son los casos complicados estos se verán más adelante.

A.2.1. Análisis de casos

En el cuadro A.14 se muestran los casos en los cuales los miembros de los grupos guardan una correspondencia de pertenencia al grupo a pesar de emplear dos métodos diferentes; estos casos son llamados casos invariantes.

En el cuadro A.15 se muestran los casos en los cuales los miembros de los grupos no guardan una correspondencia de pertenencia al grupo al emplear dos métodos diferentes; estos casos son llamados casos complicados.

Analizando el primer grupo de datos que trata de los hombres de 9 -10 años, estamos viendo que los elementos 2 y 15 son los casos complicados. En la línea 15 del cuadro A.16 en la cual se muestran las distancias de los casos a su centro empleando el método de K medias, se observa la distancia que tiene el elemento 15 a su respectivo centro que es de

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	mujer	1	0.737
2	mujer	2	0.518
3	mujer	2	0.8
4	mujer	1	0.65
5	mujer	1	0.56
6	mujer	1	0.565
7	mujer	2	0.811
8	mujer	1	0.8
9	mujer	1	0.812
10	mujer	2	0.518
11	mujer	2	1.176
12	mujer	1	0.968
13	mujer	1	0.646
14	mujer	2	0.736
15	mujer	1	0.665
16	mujer	2	0.748
17	mujer	2	0.453
18	mujer	2	0.918
19	mujer	2	0.611
20	mujer	2	0.971

Cuadro A.11: Pertenencia al grupo de mujeres de 9-10 años.

0.969 y vemos que es el miembro del grupo 1 más alejado del centro. Podemos decir que el elemento 15 podría pertenecer al grupo 2, ya que esta muy lejano del centro 1. Además revisando la misma figura vemos que el elemento 18, es el más lejano al centro del grupo 2 con una distancia de 0.96. Concluimos que existe una compensación de distancias.

En el método jerárquico para el grupo de datos (1) los grupos quedaron de la siguiente

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	mujer	1	1.025
2	mujer	2	0.952
3	mujer	2	0.608
4	mujer	2	0.725
5	mujer	2	0.924
6	mujer	2	0.945
7	mujer	1	0.718
8	mujer	2	0.783
9	mujer	1	0.581
10	mujer	1	0.756
11	mujer	2	0.821
12	mujer	1	0.442
13	mujer	2	0.795
14	mujer	2	0.827
15	mujer	2	0.482
16	mujer	2	0.717
17	mujer	1	0.781
18	mujer	2	0.919
19	mujer	2	0.718
20	mujer	1	0.442

Cuadro A.12: Pertenencia al grupo de mujeres de 9-10 años, con los datos cambiados.

forma:

1. 1,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,17
2. 2,11,15,16,18,19,20

en el cuadro A.17 se presentan las distancias de todos los casos al elemento 2 (que es un

Grupo de datos	Miembros al grupo 1 y 2
(1)	1 : 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 , 17 2 : 11, 16, 18, 19, 20
(2)	1 : 1, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15 2 : 2, 3 , 7, 10, 11, 14, 16, 17, 18 , 19, 20
(3)	1 : 1, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18 , 20 2 : 2,3,4,6,7,12,19
(4)	1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14 2 : 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20
(5)	1 : 4, 12, 14, 15, 17, 19, 20 2 : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18
(6)	1 : 1, 2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 2 : 3, 4, 5, 9, 11
(7)	1 : 1, 3,5,6 , 7, 8 , 9, 10 , 14, 18 , 20 2 : 2, 4, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19
(8)	1 : 1, 2 , 3, 5, 6, 8, 12, 13, 16, 18, 19 2 : 4,7,9,10,11,14,15,17,20

Cuadro A.13: Resultados usando el método *K* medias.

caso complicado). Se puede observar que los elementos 1,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,17, es decir, el grupo 1 esta al igual que los miembros del grupo 2 muy cerca del elemento 2. Esta puede ser una razón del por que el método de *K* medias agrupó el elemento 2 al grupo 1. Además, de todos los elementos el 18 es el más lejano al elemento 2.

Observando el cuadro A.18 obtenida del método de *K* medias, nos damos cuenta que de los casos complicados (3,14,16,17,18), el elemento 17 es el que tiene la menor distancia a su centro, a pesar de esto el otro método (jerárquico) coloca al 17 en el otro grupo. Los demás elementos guardan una distancia promedio.

En la figura A.9 se aprecia el dendrograma obtenido del método jerárquico, en el cual se observa que los elementos complicados (3,14,16,17,18) forman un tercer grupo junto

Grupo de datos	Miembros al grupo 1 y 2
(1)	1 : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 17 2 : 11, 16, 18, 19, 20
(2)	1 : 1, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15 2 : 2, 7, 10, 11, 19, 20
(3)	1 : 1, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 20 2 :
(4)	1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14 2 : 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20
(5)	1 : 4, 12, 14, 15, 17, 19, 20 2 : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18
(6)	1 : 1, 2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 2 : 3, 4, 5, 9, 11
(7)	1 : 1, 7, 9, 14, 20 2 : 2, 4, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19
(8)	1 : 1, 3, 5, 6, 8, 12, 13, 16, 18, 19 2 :

Cuadro A.14: Casos invariantes.

con otros elementos.

En el cuadro A.19 obtenida del método de K medias, nos damos cuenta que el elemento 18 que es uno de los elementos complicados tiene la distancia mas grande a su centro, como se ve en el dendrograma de la figura A.10 es un elemento raro. En dicho dendrograma se logra apreciar que los demás elementos complicados (2,3,4,6,7,12) forman otro grupo.

En el cuadro A.20 obtenida del método de K medias, podemos ver que los elementos 6 y 8 tiene las menores distancias al centro del grupo 1 y apesar de ello son elementos complicados.

Grupo de datos	Miembros al grupo 1 y 2
(1)	2, 15
(2)	3, 14, 16, 17, 18
(3)	2, 3, 4, 6, 7, 12, 18, 19
(7)	3, 5, 6, 8, 10, 18
(8)	2, 4, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 20

Cuadro A.15: Casos complicados.

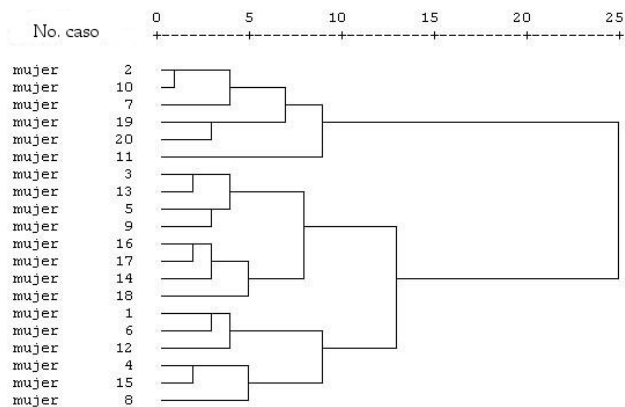


Figura A.9: Dendrograma del grupo 2.

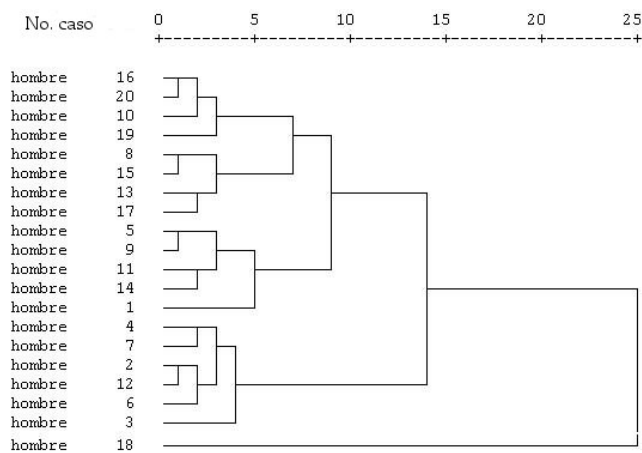


Figura A.10: Dendrograma del grupo 3.

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	hombre	1	0.511
2	hombre	1	0.773
3	hombre	1	0.543
4	hombre	1	0.795
5	hombre	1	0.658
6	hombre	1	0.533
7	hombre	1	0.571
8	hombre	1	0.655
9	hombre	1	0.958
10	hombre	1	0.563
11	hombre	2	0.727
12	hombre	1	0.832
13	hombre	1	0.743
14	hombre	1	0.575
15	hombre	1	0.969
16	hombre	2	0.568
17	hombre	1	0.793
18	hombre	2	0.96
19	hombre	2	0.692
20	hombre	2	0.747

Cuadro A.16: Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 1).

Los casos complicados para el grupo de hombres de 15-16 años, están muy separados en grupo de arriba de la figura A.11, lo que nos dice que los métodos de agrupamiento empleados en este análisis dieron agrupaciones muy diferentes.

En el cuadro A.21 se logra apreciar que el elemento 2 es el más lejano a su correspondiente centro con una distancia de 1.368. En el dendrograma de la figura A.12 se puede

Número de caso	Distancia
1	0.912
2	0
3	1.460
4	1.398
5	1.263
6	1.127
7	1.194
8	1.389
9	1.826
10	1.055
11	1.461
12	1.007
13	0.843
14	0.731
15	1.105
16	1.682
17	1.293
18	2.676
19	1.895
20	0.712

Cuadro A.17: Distancias del grupo de datos (1) al elemento 2.

apreciar que el elemento 2 es un elemento raro y se forman en total tres grupos (un grupo con un solo elemento) y la mayoría de los casos complicados para este grupo de datos se concentran en uno de los grupos.

Agrupar a ciertos niños que tengan una edad en común, con las medidas tomadas en las vértebras cervicales no es una tarea trivial, ya que tras la experimentación, no se llegó a

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	mujer	1	0.737
2	mujer	2	0.518
3	mujer	2	0.8
4	mujer	1	0.65
5	mujer	1	0.56
6	mujer	1	0.565
7	mujer	2	0.811
8	mujer	1	0.8
9	mujer	1	0.812
10	mujer	2	0.518
11	mujer	2	1.176
12	mujer	1	0.968
13	mujer	1	0.646
14	mujer	2	0.736
15	mujer	1	0.665
16	mujer	2	0.748
17	mujer	2	0.453
18	mujer	2	0.918
19	mujer	2	0.611
20	mujer	2	0.971

Cuadro A.18: Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 2).

tal objetivo.

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	hombre	1	1.142
2	hombre	2	0.546
3	hombre	2	0.837
4	hombre	2	0.456
5	hombre	1	0.532
6	hombre	2	0.659
7	hombre	2	0.552
8	hombre	1	0.645
9	hombre	1	0.663
10	hombre	1	0.584
11	hombre	1	0.797
12	hombre	2	0.487
13	hombre	1	0.8
14	hombre	1	0.528
15	hombre	1	0.556
16	hombre	1	0.787
17	hombre	1	0.595
18	hombre	1	1.405
19	hombre	2	0.935
20	hombre	1	0.707

Cuadro A.19: Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 3).

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	hombre	1	0.822
2	hombre	2	0.791
3	hombre	1	0.74
4	hombre	2	0.573
5	hombre	1	0.976
6	hombre	1	0.352
7	hombre	1	0.635
8	hombre	1	0.352
9	hombre	1	0.804
10	hombre	1	0.655
11	hombre	2	1.107
12	hombre	2	0.701
13	hombre	2	1.026
14	hombre	1	0.528
15	hombre	2	0.562
16	hombre	2	0.7
17	hombre	2	1.018
18	hombre	1	0.829
19	hombre	2	0.522
20	hombre	1	0.854

Cuadro A.20: Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 7).

Caso	Sexo	Grupo	Distancia
1	mujer	1	0.822
2	mujer	1	1.368
3	mujer	1	0.527
4	mujer	2	0.892
5	mujer	1	0.717
6	mujer	1	0.704
7	mujer	2	0.861
8	mujer	1	0.606
9	mujer	2	0.62
10	mujer	2	1.012
11	mujer	2	0.855
12	mujer	1	0.865
13	mujer	1	0.67
14	mujer	2	0.795
15	mujer	2	0.884
16	mujer	1	0.965
17	mujer	2	0.945
18	mujer	1	0.631
19	mujer	1	1.132
20	mujer	2	0.753

Cuadro A.21: Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 8).

APÉNDICE B

Clasificación del sexo

A continuación se detalla la clasificación del sexo, ya que se desea mostrar que tan difícil es categorizar, en base a las mediciones dadas. En este experimento se denota al sexo masculino como 1 y al sexo femenino como 2. Se formaron los siguientes juegos de datos:

- niños y niñas de 9 a 10 años.
- niños y niñas de 11 a 12 años.
- niños y niñas de 13 a 14 años.
- niños y niñas de 15 a 16 años.

Los criterios que se ocuparon en la clasificación del sexo de los niños son: 2ABP, 2ANCHO, 2AngMC, 3ABP, 3ABA, 3AMEDIA, 3ANCHO, 3AngMC, 4ABP, 4ABA, 4AMEDIA, 4ANCHO y 4AngMC.

B.1. Análisis discriminante

A continuación se presentan los resultados obtenidos con la función de análisis discriminante lineal 3.9; ésta fue desarrollada en Microsoft Excel, véase las figuras B.1 a B.4. Observando estas figuras se puede apreciar que no se obtiene una buena discriminación; entonces, se optó por hacer otro tipo de análisis discriminante (no lineal), en el software Statistical Package for the Social Sciences 16.0 (SPSS).

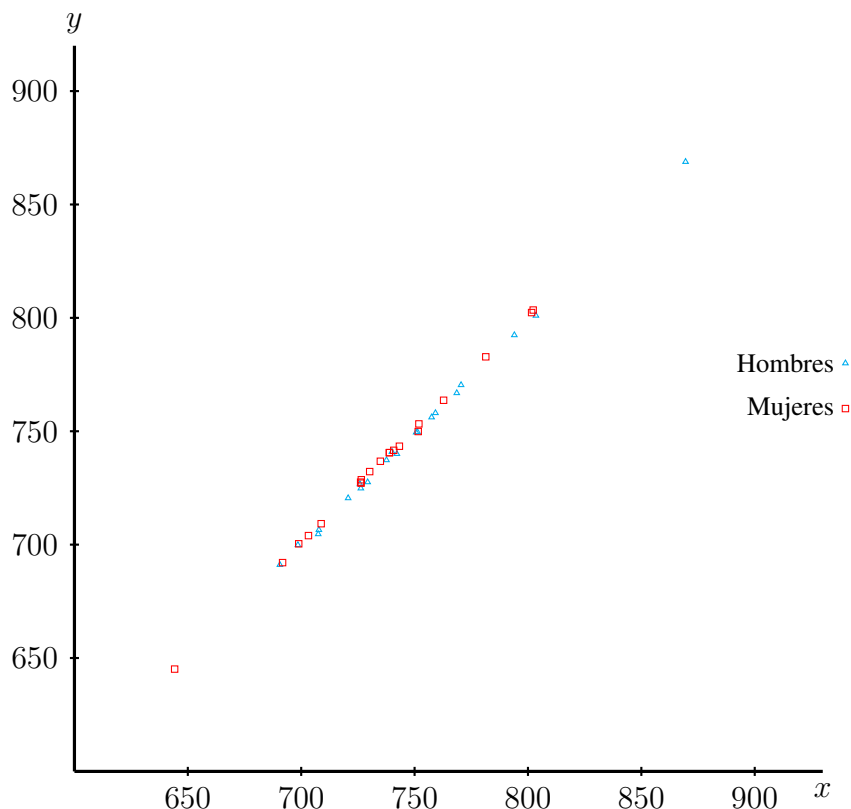


Figura B.1: Niños de 9 a 10 años.

El punto de partida de nuestro análisis es el conjunto de criterios que representan las diferentes mediciones en la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical, junto con otra variable categórica indicativa del sexo de los niños. Esta última variable tomará dos valores: 1 masculino y 2 femenino. Los criterios seleccionados en la estimación de la edad ósea, un total de 13 (mencionadas al inicio de la sección), van a actuar como criterios explicativos de las diferencias existentes entre los dos niveles de la variable categórica, es decir, entre

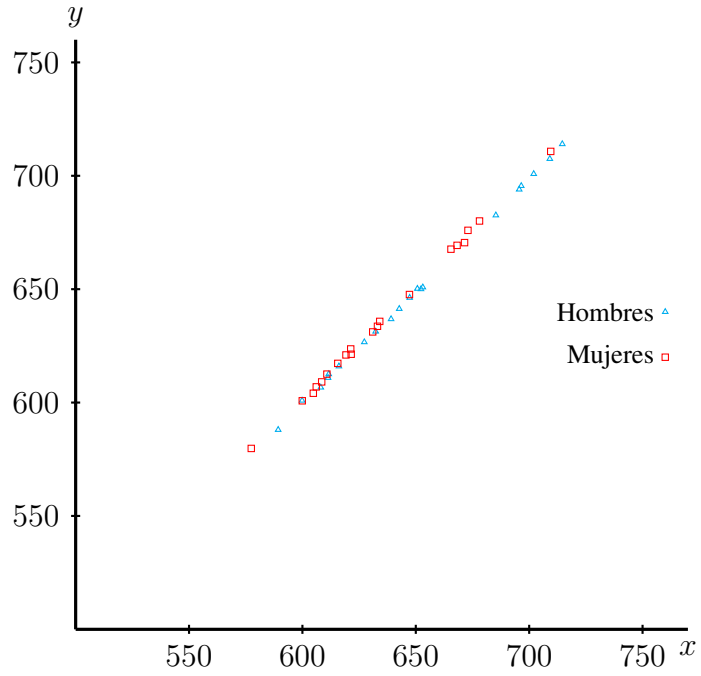


Figura B.2: Niños de 11 a 12 años.

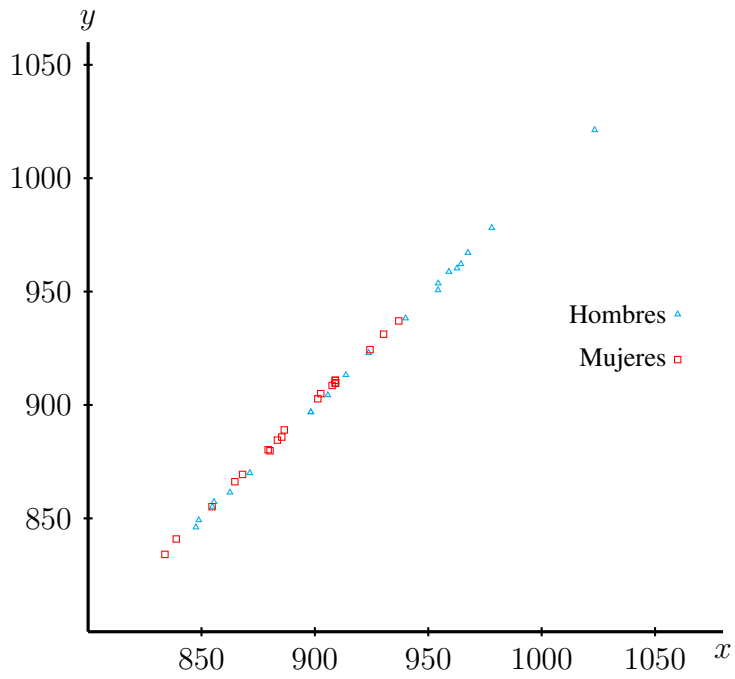


Figura B.3: Niños de 13 a 14 años.

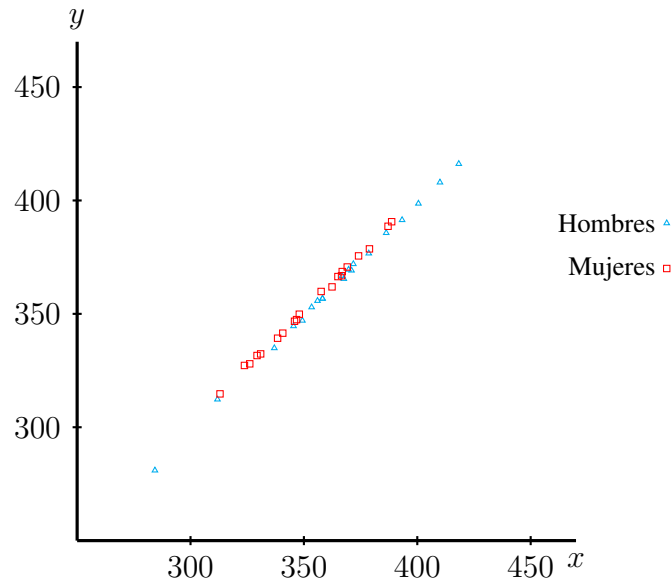


Figura B.4: Niños de 15 a 16 años.

los distintos sexos.

Nuestro objetivo será, entonces, identificar, en la medida de lo posible, las características que definen a los dos sexos, utilizando para ello la información que nos proporcionan los 13 criterios, y después, determinar cuáles de esos criterios son los que más contribuyen a diferenciar entre uno y otro grupo. La función a determinar es la B.1 vista en la sección 3.3.1.

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p, \quad (\text{B.1})$$

donde p es el número de criterios discriminantes y los coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_p\}$ se eligen de tal forma que se consiga la máxima separación entre el número de grupos existentes. A continuación se presentan los criterios de las funciones discriminantes resultantes y los valores del λ de Wilks de éstas, para los cuatro juegos de datos mencionados al inicio de esta sección, además también se hizo este análisis para todos los niños (véase las ecuaciones B.2 a B.6).

Según los cuadros B.1 y B.2, la expresión de la función discriminante es:

$$Y = -23.340 + (0.133)2\text{AngMC} + (0.742)4\text{ANCHO}. \quad (\text{B.2})$$

Paso	Criterio	λ de Wilks
1	4ANCHO	0.867
2	2AngMC	0.706

Cuadro B.1: Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 9 a 10 años.

Criterio	Coficiente
2AngMC	0.133
4ANCHO	0.742
Cte	-23.340

Cuadro B.2: Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 9 a 10 años.

Paso	Criterio introducido	Criterio eliminado	λ de Wilks
1	3AngMC		0.783
2	3ANCHO		0.657
3	4ABA		0.552
4		3AngMC	0.569

Cuadro B.3: Criterios introducidos y eliminadas en la función discriminante B.1 para niños de 11 a 12 años.

Según los cuadros B.3 y B.4, la expresión de la función discriminante es:

$$Y = -9.086 + (0.988)3ANCHO - (0.561)4ABA. \quad (\text{B.3})$$

Criterio	Coeficiente
3ANCHO	0.988
4ABA	-0.561
Cte	-9.086

Cuadro B.4: Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 11 a 12 años.

Paso	Criterio	λ de Wilks
1	2AngMC	0.875

Cuadro B.5: Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 13 a 14 años.

Criterio	Coeficiente
2AngMC	0.122
Cte	-10.54

Cuadro B.6: Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 13 a 14 años.

Según los cuadros B.5 y B.6, la expresión de la función discriminante es:

$$Y = -10.54 + (0.122)2\text{AngMC}. \quad (\text{B.4})$$

Según los cuadros B.7 y B.8, la expresión de la función discriminante es:

$$Y = -20.334 + (0.169)2\text{ABP} + (0.516)4\text{MEDIA} + (0.487)4\text{ANCHO}. \quad (\text{B.5})$$

Paso	Criterio	λ de Wilks
1	4ANCHO	0.673
2	4MEDIA	0.527
3	2ABP	0.466

Cuadro B.7: Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 15 a 16 años.

Criterio	Coefficiente
2ABP	0.169
4MEDIA	0.516
4ANCHO	0.487
Cte	-20.334

Cuadro B.8: Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 15 a 16 años.

Paso	Criterio	λ de Wilks
1	4ANCHO	0.925
2	2AngMC	0.797
3	3ABA	0.762
4	2ANCHO	0.732

Cuadro B.9: Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 9 a 16 años.

Según los cuadros B.9 y B.10, la expresión de la función discriminante es:

$$Y = -15.47 + (0.67)4ANCHO + (0.05)2AngMC - (0.304)3ABA + (0.356)2ANCHO. \quad (B.6)$$

Criterio	Coeficiente
4ANCHO	0.67
2AngMC	0.05
3ABA	-0.304
2ANCHO	0.356
Cte	-15.47

Cuadro B.10: Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 9 a 16 años.

El estadístico λ de Wilks es también una medida de las diferencias entre los grupos debidas a las funciones discriminantes y es importante saber que sus valores varían entre 0 y 1: valores próximos a 0 indican mucha discriminación, es decir los grupos están muy separados, mientras que valores cercanos a 1 representan escasa discriminación o poca diferencia entre los grupos.

A continuación se presenta el valor de λ de Wilks, para los juegos de datos:

- Para niños 9-10 Años $\lambda = 0.706$.
- Para niños 11-12 Años $\lambda = 0.569$.
- Para niños 13-14 Años $\lambda = 0.875$.
- Para niños 15-16 Años $\lambda = 0.466$.
- Para niños 9-16 Años $\lambda = 0.732$.

Observando estos valores de λ de Wilks, se puede apreciar que se obtuvo poca discriminación con las funciones resultantes.

B.2. Árboles de decisión

Para obtener las reglas de decisión se utilizaron dos herramientas, See 5.0 y una aplicación desarrollada en Microsoft Excel. Presentamos primero los resultados obtenidos con See 5.0, donde además se presentan los criterios que se usaron más en la caracterización del sexo de los niños. Los cuadros del B.11 a B.15 se interpretan de la siguiente manera, por ejemplo en la tabla B.11, dos niños fueron clasificados como niñas y una niña fue clasificada como niño, dando así un total de tres errores.

	Sexo 1	Sexo 2
Sexo 1	18	2
Sexo 2	1	19

Cuadro B.11: Clasificación para niños de 9 a 10 años.

En el cuadro B.11, se clasificaron los niños de 9 a 10 años, obteniendo tres errores con cuatro reglas de decisión. Los criterios mas usados en estas reglas son: 3ANCHO(100 %), 2ANCHO(25 %), 3AngMC(25 %), 4ABA(25 %), 3ABA(18 %) y 4ANCHO(18 %).

	Sexo 1	Sexo 2
Sexo 1	20	
Sexo 2	6	14

Cuadro B.12: Clasificación para niños de 11 a 12 años.

En el cuadro B.12, se clasificaron los niños de 11 a 12 años, obteniendo seis errores con tres reglas de decisión. Los criterios mas usados en estas reglas son: 3ANCHO(90 %) y 3AMEDIA(80 %).

En el cuadro B.13, se clasificaron los niños de 13 a 14 años, obteniendo cuatro errores con cinco reglas de decisión. Los criterios mas usados en estas reglas son: 3AME-

	Sexo 1	Sexo 2
Sexo 1	19	1
Sexo 2	3	17

Cuadro B.13: Clasificación para niños de 13 a 14 años.

DIA(68 %), 3ABA(53 %), 4ANCHO(40 %) y 3ABP(38 %).

	Sexo 1	Sexo 2
Sexo 1	17	3
Sexo 2		20

Cuadro B.14: Clasificación para niños de 15 a 16 años.

En el cuadro B.14, se clasificaron los niños de 15 a 16 años, obteniendo tres errores con cuatro reglas de decisión. Los criterios mas usados en estas reglas son: 4AMEDIA(78 %), 2ABP(73 %) y 4ANCHO(55 %).

	Sexo 1	Sexo 2
Sexo 1	73	7
Sexo 2	10	70

Cuadro B.15: Clasificación para niños de 9 a 16 años.

En el cuadro B.15, se clasificaron los niños de 9 a 16 años, obteniendo 17 errores con 17 reglas de decisión. Los criterios mas usados en estas reglas son: 4ANCHO(77 %), 4AngMC(61 %), 2ANCHO(54 %), 3ANCHO(43 %), 4ABP(32 %), 3AMEDIA(30 %), 2AngMC(28 %), 3AngMC(26 %), 4AMEDIA(25 %), 3ABA(18 %) y 3ABP(13 %).

Revisando los cuadros de B.11 a B.15, podemos observar que se obtienen muchos errores en la clasificación de la maduración ósea.

A continuación se presenta los porcentajes de confianza de las reglas de decisión que resultaron con la aplicación desarrollada en Microsoft Excel. Revisando los cuadros de B.16 a B.20, nos damos cuenta que las reglas de decisión obtenidas tienen poco porcentaje de confianza.

No. de regla	% de confianza
1	71.4
2	61.1
3	52.6
4	56.7
5	55.9

Cuadro B.16: Confianza de las reglas para niños de 9 a 10 años.

No. de regla	% de confianza
1	51.4
2	59.1
3	51.3

Cuadro B.17: Confianza de las reglas para niños de 11 a 12 años.

No. de regla	% de confianza
1	84.6
2	55.6
3	61.5
4	52.8

Cuadro B.18: Confianza de las reglas para niños de 13 a 14 años.

No. de regla	% de confianza
1	91.7
2	72.7
3	57.1
4	77.8

Cuadro B.19: Confianza de las reglas para niños de 15 a 16 años.

No. de regla	% de confianza
1	59.3
2	58.1
3	58.1
4	52.6
5	56.8
6	65.3

Cuadro B.20: Confianza de las reglas para niños de 9 a 16 años.

APÉNDICE C

Reglas de decisión

En esta sección se muestran las reglas de decisión obtenidas con RSES 2.2 con las medidas de Calvo y con las variables propuestas en este trabajo de investigación.

Reglas de decisión para niños con las medidas de Calvo.

1. (3AngMC = (75.0,83.0)), (4ANCHO = (16.0,21.0)), (2AngMC = (75.0,83.0)) entonces clase = 6[8]
2. (3AngMC = (75.0,83.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (4ANCHO = (16.0,21.0)), (3ANCHO = (16.0,20.0)), (3ABA = (14.0,18.0)) entonces clase = 6[7]
3. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ABA = (8.0,10.0)), (3ABP = (12.0,14.0)), (3ABA = (9.0,12.0)) entonces clase = 1[6]
4. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)) entonces clase = 1[6]

5. (3AngMC = (90.0,120.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (4AngMC = (83.0,90.0)) entonces clase = 2[4]
6. (4AngMC = (90.0,120.0)), (3ANCHO = (16.0,20.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4ANCHO = (16.0,21.0)) entonces clase = 2[4]
7. (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (83.0,90.0)) entonces clase = 2[4]
8. (3AngMC = (75.0,83.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (4ABP = (13.0,15.0)), (2AngMC = (60.0,75.0)) entonces clase = 6[4]
9. (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (3AMEDIA = (9.0,10.0)), (4ABP = (9.0,11.0)), (4ABA = (8.0,10.0)) entonces clase = 2[3]
10. (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (2ANCHO = (10.0,11.0)), (3ANCHO = (11.0,13.0)) entonces clase = 2[3]
11. (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (3ANCHO = (16.0,20.0)), (3ABP = (15.0,19.0)) entonces clase = 2[3]
12. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ANCHO = (14.0,16.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (3AMEDIA = (9.0,10.0)), (4ABA = (8.0,10.0)) entonces clase = 1[3]
13. (3AngMC = (83.0,90.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (3ABP = (15.0,19.0)), (3ABA = (14.0,18.0)), (3AMEDIA = (13.0,17.0)), (4ANCHO = (16.0,21.0)), (3ANCHO = (16.0,20.0)), (4ABP = (15.0,19.0)) entonces clase = 4[3]
14. (3AMEDIA = (13.0,17.0)), (3ABP = (15.0,19.0)), (4ABP = (15.0,19.0)), (4AMEDIA = (13.0,16.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)) entonces clase = 6[3]
15. (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (4ABP = (9.0,11.0)), (3ABA = (7.0,8.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)), (2ABP = (22.0,25.0)) entonces clase = 2[2]

16. (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (4ABA = (6.0,8.0)), (4ANCHO = (11.0,14.0)), (3AMEDIA = (8.0,9.0)), (2ABP = (-Inf,22.0)) entonces clase = 2[2]
17. (3AngMC = (90.0,120.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (3ABA = (9.0,12.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (3ABP = (12.0,14.0)), (2ANCHO = (10.0,11.0)) entonces clase = 2[2]
18. (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (3ABP = (11.0,12.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AMEDIA = (9.0,10.0)), (4AMEDIA = (9.0,10.0)) entonces clase = 2[2]
19. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ANCHO = (14.0,16.0)), (4ABA = (6.0,8.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)) entonces clase = 1[2]
20. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (3ABP = (11.0,12.0)), (3AMEDIA = (8.0,9.0)) entonces clase = 1[2]
21. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (4ABA = (6.0,8.0)), (3ABA = (6.0,7.0)), (4AMEDIA = (7.0,8.0)), (2ABP = (22.0,25.0)) entonces clase = 1[2]
22. (2ABP = (31.0,33.0)), (3AngMC = (83.0,90.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)) entonces clase = 4[2]
23. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)), (3ABP = (10.0,11.0)) entonces clase = 1[1]
24. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2ABP = (25.0,31.0)), (4ABP = (11.0,13.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)), (3ABP = (12.0,14.0)) entonces clase = 1[1]

25. (2ABP = (31.0,33.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (3ANCHO = (15.0,16.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (3ABP = (12.0,14.0)), (3ABA = (9.0,12.0)), (3AMEDIA = (10.0,12.0)), (3AngMC = (75.0,83.0)) entonces clase = 4[1]
26. (2ABP = (31.0,33.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (4ABP = (13.0,15.0)), (2AngMC = (83.0,90.0)) entonces clase = 4[1]
27. (3ANCHO = (15.0,16.0)), (3AngMC = (83.0,90.0)), (2ABP = (31.0,33.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)) entonces clase = 4[1]
28. (2ANCHO = (13.0,16.0)), (3ANCHO = (15.0,16.0)), (3AngMC = (83.0,90.0)), (4ABP = (13.0,15.0)), (2ABP = (-Inf,22.0)) entonces clase = 4[1]
29. (3ABP = (15.0,19.0)), (3ABA = (14.0,18.0)), (3AMEDIA = (13.0,17.0)), (4ABA = (14.0,16.0)), (4ANCHO = (16.0,21.0)), (2ABP = (37.0,42.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)) entonces clase = 4[1]
30. (3AngMC = (75.0,83.0)), (4ANCHO = (16.0,21.0)), (3ANCHO = (16.0,20.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (2ABP = (33.0,35.0)), (2AngMC = (83.0,90.0)) entonces clase = 6[1]
31. (3AMEDIA = (13.0,17.0)), (2ANCHO = (13.0,16.0)), (4ABP = (15.0,19.0)), (2ABP = (35.0,37.0)), (3ABP = (15.0,19.0)), (2AngMC = (83.0,90.0)), (3ABA = (12.0,14.0)) entonces clase = 6[1]

Reglas de decisión para niñas con las medidas de Dra. Calvo.

1. (2AngMC = (83.0,90.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)) entonces clase = 2[7]
2. (2AngMC = (90.0,130.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AMEDIA = (10.0,12.0)) entonces clase = 2[6]
3. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (3ABA = (6.0,9.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)), (4ABA = (7.0,9.0)), (3AMEDIA = (9.0,10.0)) entonces clase = 1[5]

4. (4AngMC = (83.0,90.0)), (3ANCHO = (15.0,17.0)), (4ANCHO = (15.0,17.0)), (2AngMC = (75.0,83.0)) entonces clase = 4[5]
5. (3AngMC = (75.0,83.0)), (4ABP = (15.0,19.0)), (4AMEDIA = (11.0,13.0)), (3ABP = (15.0,16.0)) entonces clase = 6[5]
6. (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (3ABA = (9.0,10.0)), (4AMEDIA = (9.0,11.0)) entonces clase = 2[4]
7. (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4ANCHO = (11.0,13.0)), (2ANCHO = (11.0,12.0)), (4ABA = (9.0,11.0)) entonces clase = 2[4]
8. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3ABA = (6.0,9.0)), (4ABA = (7.0,9.0)), (2ANCHO = (10.0,11.0)) entonces clase = 2[4]
9. (2ANCHO = (12.0,13.0)), (4AngMC = (83.0,90.0)), (3ABP = (13.0,14.0)) entonces clase = 4[4]
10. (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (4ANCHO = (11.0,13.0)), (2ABP = (26.0,28.0)), (3AMEDIA = (7.0,9.0)), (3ABA = (6.0,9.0)), (3ANCHO = (12.0,13.0)) entonces clase = 2[3]
11. (2AngMC = (90.0,130.0)), (4ABA = (9.0,11.0)), (2ABP = (32.0,35.0)) entonces clase = 2[3]
12. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AMEDIA = (7.0,9.0)), (3ANCHO = (13.0,14.0)), (4AMEDIA = (9.0,11.0)) entonces clase = 1[3]
13. (3AngMC = (83.0,90.0)), (3ANCHO = (15.0,17.0)), (4ABP = (14.0,15.0)), (4ABA = (11.0,13.0)), (3ABA = (13.0,15.0)), (3AMEDIA = (12.0,14.0)), (4ANCHO = (15.0,17.0)) entonces clase = 4[3]
14. (3AngMC = (83.0,90.0)), (4AMEDIA = (11.0,13.0)), (3ABP = (14.0,15.0)), (2ABP = (32.0,35.0)) entonces clase = 4[3]

15. (4AngMC = (75.0,83.0)), (4ABP = (15.0,19.0)), (2ANCHO = (13.0,14.0)), (2AngMC = (60.0,75.0)) entonces clase = 6[3]
16. (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (4AMEDIA = (7.0,9.0)), (3ABA = (6.0,9.0)), (2ABP = (22.0,26.0)) entonces clase = 2[2]
17. (3AngMC = (90.0,120.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (3ABP = (10.0,11.0)) entonces clase = 2[2]
18. (3ANCHO = (15.0,17.0)), (2AngMC = (90.0,130.0)), (2ABP = (30.0,32.0)) entonces clase = 2[2]
19. (2AngMC = (83.0,90.0)), (3AngMC = (75.0,83.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)) entonces clase = 2[2]
20. (2ABP = (35.0,37.0)), (3ABA = (13.0,15.0)), (4AngMC = (83.0,90.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)) entonces clase = 4[2]
21. (3AngMC = (75.0,83.0)), (3ANCHO = (15.0,17.0)), (4ANCHO = (15.0,17.0)), (2ABP = (32.0,35.0)), (4ABA = (14.0,16.0)) entonces clase = 6[2]
22. (3AngMC = (75.0,83.0)), (2AngMC = (75.0,83.0)), (2ABP = (30.0,32.0)), (4AngMC = (75.0,83.0)) entonces clase = 6[2]
23. (3ABP = (16.0,19.0)), (3ANCHO = (15.0,17.0)), (3AngMC = (75.0,83.0)), (2ABP = (32.0,35.0)) entonces clase = 6[2]
24. (2ABP = (32.0,35.0)), (3ABA = (13.0,15.0)), (3ANCHO = (13.0,14.0)) entonces clase = 8[2]
25. (2AngMC = (90.0,130.0)), (3AngMC = (90.0,120.0)), (4AngMC = (90.0,120.0)), (3AMEDIA = (7.0,9.0)), (3ABA = (6.0,9.0)), (2ANCHO = (10.0,11.0)), (4ANCHO = (11.0,13.0)), (2ABP = (26.0,28.0)), (3ABP = (9.0,10.0)) entonces clase = 1[1]
26. (3AMEDIA = (12.0,14.0)), (3AngMC = (83.0,90.0)), (4ABA = (11.0,13.0)), (2ABP = (28.0,30.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)) entonces clase = 4[1]

27. (3AMEDIA = (12.0,14.0)), (2ANCHO = (12.0,13.0)), (3ABA = (10.0,13.0)), (4ABA = (13.0,14.0)), (2ABP = (30.0,32.0)) entonces clase = 6[1]
28. (2ANCHO = (13.0,14.0)), (4ABA = (11.0,13.0)), (4AMEDIA = (11.0,13.0)), (4ANCHO = (15.0,17.0)), (2ABP = (35.0,37.0)) entonces clase = 6[1]

Reglas de decisión para niños con las variables propuestas.

1. (3AngMC = 2), (4AngMC = 2), (4Forma = 1), (3Forma = 1) entonces clase 2[17]
2. (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 1), (3AngMC = 2) entonces clase 2[14]
3. (a_3ABA = 3), (a_2Ancho = 2), (a_3Ancho = 2), (a_4Ancho = 2), (a_4ABA = 3), (a_2ABP = 3), (4AngMC = 2) entonces clase 4[8]
4. (a_2Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_3Ancho = 1), (2AngMC = 1), (a_3ABP = 1), (a_3ABA = 1), (a_2ABP = 1), (4Forma = 2) entonces clase 2[6]
5. (a_3ABP = 2), (a_4ABA = 1), (2AngMC = 2), (3Forma = 1), (3AngMC = 1), (4AngMC = 2) entonces clase 2[4]
6. (4Forma = 1), (2AngMC = 1), (a_4Ancho = 1), (3AngMC = 1) entonces clase 1[3]
7. (a_2Ancho = 1), (4AngMC = 1), (4Forma = 1) entonces clase 1[3]
8. (a_2ABP = 2), (3AngMC = 2), (a_3Ancho = 2), (4AngMC = 2), (4Forma = 2), (a_4Ancho = 2) entonces clase 3[3]
9. (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (a_4ABA = 3), (a_4Ancho = 2), (4Forma = 2), (a_2ABP = 3), (2AngMC = 3), (3Forma = 2), (a_2Ancho = 2), (3AngMC = 3), (4AngMC = 3) entonces clase 5[3]
10. (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (a_4ABA = 3), (a_4Ancho = 2), (a_2Ancho = 2), (4Forma = 2), (2AngMC = 4), (3AngMC = 3) entonces clase 5[3]
11. (a_2ABP = 2), (a_3ABA = 2), (2AngMC = 1), (3Forma = 2), (a_2Ancho = 1) entonces clase 2[2]

12. (a_2ABP = 2), (2AngMC = 2), (a_2Ancho = 2), (a_3Ancho = 2), (a_4Ancho = 2), (a_3ABA = 3), (3AngMC = 2), (a_3ABP = 3), (a_4ABA = 3), (3Forma = 2) entonces clase 3[2]
13. (a_2ABP = 2), (4AngMC = 2), (2AngMC = 2), (a_2Ancho = 2), (3AngMC = 2), (3Forma = 2) entonces clase 3[2]
14. (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (a_4ABA = 3), (a_4Ancho = 2), (4Forma = 2), (a_2ABP = 3), (2AngMC = 3), (a_2Ancho = 1) entonces clase 5[2]
15. (2AngMC = 3), (a_2ABP = 3), (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (4AngMC = 4) entonces clase 5[2]
16. (2AngMC = 4), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 2), (3Forma = 2), (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (4AngMC = 4) entonces clase 7[2]
17. (a_3ABA = 3), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 2), (2AngMC = 2), (a_3Ancho = 2), (a_4Ancho = 2), (3AngMC = 3), (3Forma = 2), (a_3ABP = 2), (4AngMC = 3) entonces clase 4[1]
18. (a_3ABA = 3), (a_4ABA = 3), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (2AngMC = 2), (3AngMC = 2), (3Forma = 3) entonces clase 4[1]
19. (a_3ABA = 3), (4AngMC = 4), (a_4ABA = 3), (a_2ABP = 2), (3AngMC = 3), (2AngMC = 1) entonces clase 4[1]
20. (a_2Ancho = 2), (a_3ABA = 3), (a_3ABP = 3), (4AngMC = 4), (4Forma = 1), (a_4ABA = 3), (2AngMC = 2) entonces clase 4[1]
21. (3Forma = 5), (2AngMC = 1) entonces clase 4[1]
22. (a_2ABP = 2), (2AngMC = 2), (a_2Ancho = 2), (a_3Ancho = 2), (a_4Ancho = 2), (3AngMC = 3), (a_3ABP = 2), (4Forma = 1), (a_4ABA = 2), (3Forma = 2), (a_3ABA = 3), (4AngMC = 1) entonces clase 3[1]
23. (a_2ABP = 2), (a_3Ancho = 2), (4AngMC = 2), (a_4Ancho = 2), (2AngMC = 2), (a_2Ancho = 2), (3Forma = 1), (3AngMC = 3) entonces clase 3[1]

24. (2AngMC = 4), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 2), (3Forma = 2), (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (a_4ABA = 3), (3AngMC = 2) entonces clase 6[1]

Reglas de decisión para niñas con las variables propuestas.

1. (3AngMC = 3), (a_4ABA = 3), (2AngMC = 3) entonces clase 4[11]
2. (3AngMC = 2), (2AngMC = 1) entonces clase 2[10]
3. (a_2ABP = 2), (a_3Ancho = 2), (a_2Ancho = 2), (a_4ABA = 3), (a_4Ancho = 2), (a_3ABA = 3), (2AngMC = 3) entonces clase 4[10]
4. (4AngMC = 2), (a_3Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_2Ancho = 1), (a_3ABA = 1), (a_4ABA = 1), (a_2ABP = 1), (a_3ABP = 1), (3AngMC = 2) entonces clase 2[9]
5. (4AngMC = 2), (a_3Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_2Ancho = 1), (a_3ABA = 1), (4Forma = 1), (a_2ABP = 2) entonces clase 2[6]
6. (a_3Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_2Ancho = 1), (4AngMC = 2), (3AngMC = 1), (3Forma = 2) entonces clase 2[5]
7. (2AngMC = 2), (a_3ABP = 2), (3AngMC = 2), (a_2ABP = 1), (a_2Ancho = 2) entonces clase 2[5]
8. (3Forma = 2), (4AngMC = 2), (3AngMC = 2), (a_2Ancho = 2), (a_3ABA = 3), (a_3Ancho = 2), (a_4Ancho = 2) entonces clase 2[4]
9. (a_3Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_2Ancho = 1), (a_2ABP = 1), (a_3ABA = 1), (2AngMC = 1), (a_4ABA = 1), (3AngMC = 1), (3Forma = 2) entonces clase 2[4]
10. (a_2ABP = 1), (a_2Ancho = 1), (3AngMC = 1), (3Forma = 1) entonces clase 1[4]
11. (3AngMC = 3), (a_2ABP = 2), (a_3Ancho = 2), (a_2Ancho = 2), (3Forma = 2), (a_3ABA = 3), (a_3ABP = 3), (2AngMC = 2) entonces clase 4[4]
12. (a_2ABP = 2), (a_3ABA = 3), (4AngMC = 4), (2AngMC = 4) entonces clase 7[4]

13. (3AngMC = 2), (a_3Ancho = 1), (a_3ABP = 2), (2AngMC = 2), (4AngMC = 1) entonces clase 2[3]
14. (2AngMC = 2), (4AngMC = 2), (a_4ABA = 2), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 2) entonces clase 3[3]
15. (3Forma = 2), (4AngMC = 2), (2AngMC = 2), (a_3ABP = 2), (a_4ABA = 2), (a_3ABA = 2), (a_3Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_2ABP = 1) entonces clase 2[2]
16. (2AngMC = 2), (a_3ABP = 2), (3AngMC = 2), (a_4ABA = 2), (3Forma = 2), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 1), (a_3ABA = 1) entonces clase 2[2]
17. (2AngMC = 2), (a_2ABP = 2), (a_2Ancho = 2), (3Forma = 2), (a_3ABP = 2), (3AngMC = 2), (4Forma = 2), (a_3Ancho = 2) entonces clase 3[2]
18. (2AngMC = 2), (a_2Ancho = 1), (3AngMC = 2), (3Forma = 2), (a_3ABA = 2), (a_3ABP = 2), (4AngMC = 2) entonces clase 3[2]
19. (2AngMC = 4), (a_2Ancho = 2), (3AngMC = 4) entonces clase 6[2]
20. (a_3Ancho = 1), (a_4Ancho = 1), (a_2Ancho = 1), (2AngMC = 2), (a_3ABA = 2), (a_2ABP = 2), (a_3ABP = 2), (3AngMC = 3) entonces clase 2[1]
21. (a_2ABP = 1), (a_2Ancho = 1), (2AngMC = 2), (3AngMC = 1), (3Forma = 5) entonces clase 2[1]
22. (a_2ABP = 2), (a_3Ancho = 2), (a_3ABP = 3), (4AngMC = 3), (a_4ABA = 3), (a_4Ancho = 2), (2AngMC = 2), (a_2Ancho = 1) entonces clase 5[1]

Esta herramienta proporciona el número de alternativas que fueron clasificadas con la regla de decisión, este número viene dado entre corchetes en las reglas de decisión.

APÉNDICE D

Conjuntos aproximados

Para los experimentos se utilizó la herramienta computacional Rough Set Exploration System 2.2.1 (RSES 2.2).

Después se analizó los datos para poder realizar cortes y así discretizar la información e ir agrupando de una vez los pacientes con características muy similares.

Para el primer juego de datos (sexo masculino con criterios originales), se emplearon dos algoritmos de reductos: algoritmo exhaustivo y algoritmo genético (variando el número de reductos: 3, 6, 9). Se determinaron las reglas de decisión para llegar a la clasificación de los pacientes, los resultados obtenidos son para los valores de la correcta clasificación y de cobertura de los datos, se obtuvieron resultados muy buenos, pero el número de reglas de decisión varía entre 219 y 11,616. Dado el número muy grande de reglas de decisión, se optó por determinar las reglas de decisión directamente de la tabla discretizada.

Contando con cuatro algoritmos para encontrar las reglas de decisión a partir de la muestra de datos discretizada: algoritmo exhaustivo, algoritmo genético (variando el

número de reductos: 3, 6, 9), algoritmo de cobertura (variando el parámetro de cobertura: 0.3, 0.6, 0.95) y algoritmo LEM2 (variando el parámetro de cobertura: 0.3, 0.6, 0.95). Los resultados del experimento son los siguientes:

- para el algoritmo exhaustivo, el número de reglas es de 3,286.
- para el algoritmo genético, el número de reglas varió entre: 213 y 702.
- para el algoritmo de cobertura, el número de reglas es de: 10, 26 y 59. Para el caso de 59 reglas, se obtuvo una proporción de 0.75 de cobertura. Para el caso de 26 reglas, se obtuvo una proporción de 0.425 de cobertura. Para el caso de 10 reglas, se obtuvo una proporción de 0.112 de cobertura.
- para el algoritmo de LEM2, el número de reglas es de: 8, 19 y 34. Para el caso de 8 reglas, se obtuvo una proporción de 0.312 de cobertura. Para el caso de 19 reglas, se obtuvo una proporción de 0.625 de cobertura. Para el caso de 34 reglas, se obtuvo una proporción de 0.925 de cobertura.

Dado que el algoritmo de LEM2 arrojó buenos resultados, se procedió a realizar un análisis más profundo en dicho algoritmo.

Para el segundo juego de datos (sexo femenino con criterios originales), se emplearon dos algoritmos de reductos: algoritmo exhaustivo y algoritmo genético (variando el número de reductos: 3, 6, 9). Se determinaron las reglas de decisión para llegar a la clasificación de los pacientes, los resultados obtenidos son: para los valores de la correcta clasificación y de cobertura de los datos, se obtuvieron resultados muy buenos, pero el número de reglas de decisión varía entre: 217 y 19,156.

Dado el número muy grande de reglas de decisión, se optó por determinar las reglas de decisión directamente de la tabla discretizada. Contando con cuatro algoritmos para encontrar las reglas de decisión: algoritmo exhaustivo, algoritmo genético (variando el número de reductos: 3, 6, 9), algoritmo de cobertura (variando el parámetro de cobertura: 0.3, 0.6, 0.95) y algoritmo LEM2 (variando el parámetro de cobertura: 0.3, 0.6, 0.95).

Los resultados del experimento anterior son los siguientes:

- para el algoritmo exhaustivo, el número de reglas es de 3,747.
- para el algoritmo genético, el número de reglas varió entre: 229 y 688.
- para el algoritmo de cobertura, el número de reglas es de: 4, 30 y 54. Para el caso de cuatro reglas, se obtuvo una proporción de 0.05 de cobertura. Para el caso de 30 reglas, se obtuvo una proporción de 0.462 de cobertura. Para el caso de 54 reglas, se obtuvo una proporción de 0.788 de cobertura.
- para el algoritmo de LEM2, el número de reglas es de: 7, 15 y 27. Para el caso de 7 reglas, se obtuvo una proporción de 0.312 de cobertura. Para el caso de 15 reglas, se obtuvo una proporción de 0.6 de cobertura. Para el caso de 27 reglas, se obtuvo una proporción de 0.962 de cobertura.

Dado que el algoritmo de LEM2 arrojó buenos resultados, se procedió a realizar un análisis más profundo en dicho algoritmo.

Análisis de las mediciones tomadas por Calvo

En esta sección se presenta el análisis de la maduración ósea mediante las mediciones tomadas por Calvo y Martínez. Primero se muestran los resultados obtenidos con el método de análisis discriminante, después los de árboles de decisión y por último los de la teoría de conjuntos aproximados.

E.1. Análisis discriminante

En las figuras E.1 y E.2 se observa que el análisis discriminante lineal no actúa de manera adecuada, ya que no logra su objetivo. El análisis discriminante efectuado con el software SPSS tampoco produjo buenos resultados. Los resultados obtenidos con SPSS se muestran en los cuadros E.1 y E.2.

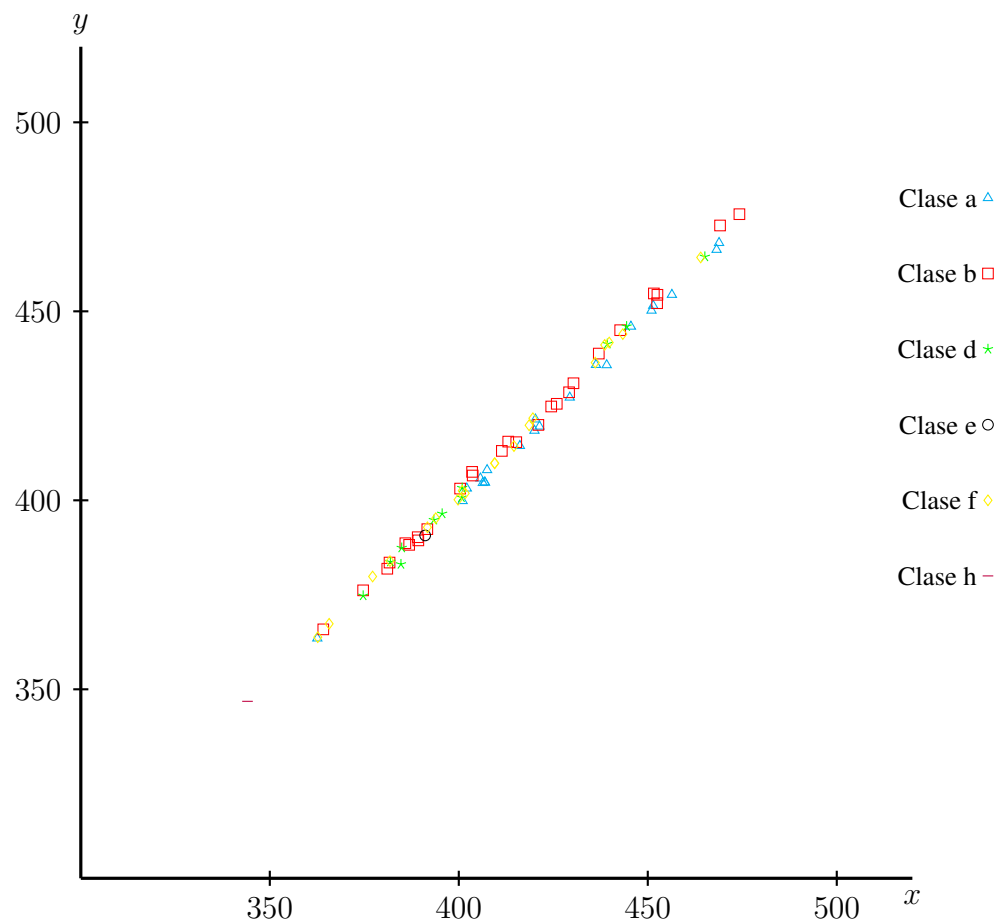


Figura E.1: Niños.

Clase	a	b	d	e	f	h	Total
a	17	4	0	0	0	0	21
b	8	18	1	0	0	0	27
d	0	1	6	1	2	1	11
e	0	0	0	1	0	0	1
f	0	0	6	1	12	0	19
h	0	0	0	0	0	1	1

Cuadro E.1: Niños usando el criterio de Mahalanobis.

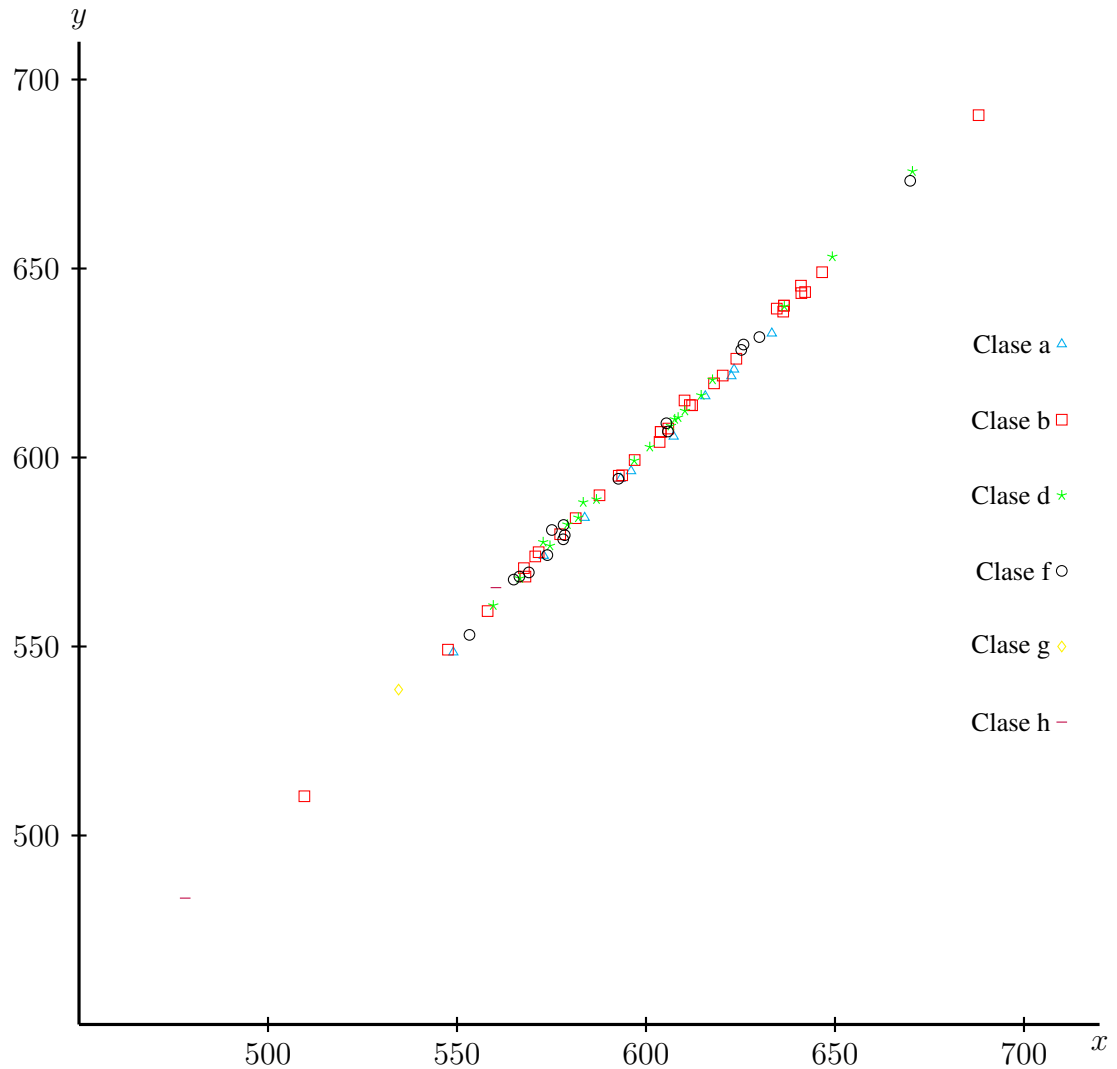


Figura E.2: Niñas.

E.2. Árboles de decisión

Con el método de árboles de decisión se utilizaron dos herramientas computacionales. En los cuadros E.3 y E.4 se presentan los resultados con el software See 5.0. En los cuadros E.5 y E.6 se presentan los resultados obtenidos con la aplicación desarrollada en Microsoft Excel. El método de árboles de decisión produjo malos resultados como se puede observar en estos cuadros.

Clase	a	b	d	f	g	h	Total
a	10	0	0	0	0	0	10
b	5	24	3	0	0	0	32
d	0	1	17	1	0	0	19
f	0	0	3	12	0	1	16
g	0	0	0	0	1	0	1
h	0	0	0	0	0	2	2

Cuadro E.2: Niñas usando el criterio de Mahalanobis.

a	b	c	d	e	f	g	h	Clase
19	2	0	0	0	0	0	0	a
0	25	0	2	0	0	0	0	b
0	0	0	0	0	0	0	0	c
0	0	0	8	0	3	0	0	d
0	0	0	0	0	1	0	0	e
0	0	0	1	0	18	0	0	f
0	0	0	0	0	0	0	0	g
0	0	0	0	0	1	0	0	h

Cuadro E.3: Niños (See).

E.3. Conjuntos aproximados

Para los niños, los resultados se observan en el cuadro E.7. En el mismo cuadro, se puede apreciar que con 31 reglas se obtienen buenos resultados de correcta clasificación y de cobertura. Para las niñas, los resultados se observan en el cuadro E.8. En el mismo cuadro, se puede apreciar que con 24 y 28 reglas se obtienen buenos resultados de correcta clasificación y de cobertura.

a	b	c	d	e	f	g	h	Clase
10	0	0	0	0	0	0	0	a
1	29	0	2	0	0	0	0	b
0	0	0	0	0	0	0	0	c
0	1	0	18	0	0	0	0	d
0	0	0	0	0	0	0	0	e
0	0	0	2	0	14	0	0	f
0	0	0	0	0	1	0	0	g
0	0	0	0	0	0	0	2	h

Cuadro E.4: Niñas (See).

Regla	Clase	Longitud	Soporte	Confianza	Cobertura
1	b	1	59.0 %	54.3 %	92.6 %
2	b	1	41.0 %	53.1 %	63.0 %
3	f	1	25.6 %	80.0 %	84.2 %
4	a	1	50.0 %	51.3 %	95.2 %
5	a	1	25.6 %	55.0 %	52.4 %
6	b	1	55.1 %	51.2 %	81.5 %

Cuadro E.5: Niños (C 4.5).

Regla	Clase	Longitud	Soporte	Confianza	Cobertura
1	b	1	46.8 %	73.0 %	84.4 %
2	b	1	26.6 %	66.7 %	43.8 %
3	b	1	45.6 %	69.4 %	78.1 %

Cuadro E.6: Niñas (C 4.5).

Reglas de decisión	Correcta clasificación	Cobertura
31	1	0.912
28	1	0.862
24	1	0.775
26	0.688	1

Cuadro E.7: Niños (LEM2).

Reglas de decisión	Correcta clasificación	Cobertura
28	1	0.938
24	1	0.875
20	1	0.8
25	0.788	1

Cuadro E.8: Niñas (LEM2).

APÉNDICE F

Discretizaciones

Es esta sección se presenta los cortes aplicados a los datos para poder iniciar a experimentar con la teoría de conjuntos aproximados; dichas discretizaciones fueron sugeridas por los expertos y se presentan a continuación:

Nombre	Valores
Borde plano	≥ 100
Borde ligeramente cóncavo	< 100 y ≥ 83
Borde cóncavo	< 83 y ≥ 75
Borde cóncavo pronunciado	< 75

Cuadro F.1: Para los criterios: 2AngMC, 3AngMC y 4AngMC.

Nombre	Valores
No hay aumento	Si el valor de la variable original correspondiente es menor al parámetro de no significancia (en este caso igual a 1.05) multiplicado por la suma del promedio de la edad de 9 años más su desviación estándar. Este cálculo es dependiente con respecto al sexo, se le asigno el código (1).
Hay aumento	Si el valor de la variable original correspondiente se encuentra entre el parámetro de significancia (en este caso igual a 1.05) multiplicado por la suma del promedio de la edad de 9 años más su desviación estándar y entre el parámetro de significancia (en este caso igual a 1.35) multiplicado por la suma del promedio de la edad de 9 años más su desviación estándar. Este cálculo es dependiente con respecto al sexo, se le asigno el código (2).
Hay mucho aumento	Si el valor de la variable original correspondiente es mayor al parámetro de mucha significancia (en este caso igual a 1.35) multiplicado por la suma del promedio de la edad de 9 años más su desviación estándar. Este cálculo es dependiente con respecto al sexo, se le asigno el código (3).

Cuadro F.2: Para los criterios: a_2ABP, a_2Ancho, a_3ABA, a_3Ancho, a_3ABP, a_4ABA y a_4Ancho.

Nombre	Valores
Cuña pronunciada	Si la diferencia de la altura de los bordes posterior y la altura del borde inferior de los criterios originales correspondientes es mayor a un parámetro (que en este caso toma valor 3), se le asigno el código (1).
Cuña moderada	Si la diferencia de la altura de los bordes posterior y la altura del borde inferior de los criterios originales correspondientes esta en el intervalo de parámetro (1,3), se le asigno el código (2).
Cuadrada	Si el valor absoluto de la diferencia entre el máximo de la altura de borde posterior y la altura de borde anterior con el ancho de los criterios originales es menor a un parámetro (en este caso toma valor menor o igual a 1), se le asigno el código (3).
Rectángulo más alto que ancho	Si la altura del borde posterior es mayor al ancho de los criterios originales, se le asigno el código (4).
Rectángulo más ancho que alto	Si las condiciones anteriores no se cumplieron, se le asigno el código (5).

Cuadro F.3: Para los criterios: 3Forma y 4Forma.

APÉNDICE G

Etapas de maduración ósea

Para conocer el estadio de maduración ósea de cada niño se requirió la asesoría de un experto en la materia, Calvo nos proporcionó la descripción para identificar la etapa de maduración ósea de cada niño. En los cuadros G.1, G.2 y G.3 se presentan estos criterios.

Vértebra	Iniciación	Aceleración
Segunda	Borde inferior plano.	Concavidad ligera en el borde inferior, incrementos significativos en la altura del borde posterior y en el ancho.
Tercera	Borde inferior plano y forma de cuña abierta.	Concavidad ligera en el borde inferior, forma de cuña moderada y crecimiento en el borde anterior.
Cuarta	Borde inferior plano y forma de cuña abierta.	Concavidad ligera en el borde inferior, forma de cuña moderada y crecimiento en el borde anterior.

Cuadro G.1: Descripción de las etapas: iniciación y aceleración.

Vértebra	Transición	Desaceleración
Segunda	Aumento muy significativo en el borde posterior y aumento en la concavidad en el borde inferior.	Profundiza la concavidad en el borde inferior.
Tercera	Incrementos en el ancho resultando mayor que la altura de borde posterior y que la altura del borde anterior, aumento en la concavidad del borde inferior y forma rectangular.	Profundiza la concavidad del borde inferior, mayor correspondencia entre los valores verticales que con el ancho y forma cuadrada.
Cuarta	Aumento en la concavidad en el borde inferior, más ancho que alto, forma rectangular y crece el borde anterior.	Profundiza la concavidad del borde inferior, forma cuadrada y más alta que ancha.

Cuadro G.2: Descripción de las etapas: transición y desaceleración.

Vértebra	Madurez	Terminación
Segunda	Vértebra más alta que ancha para las mujeres y para los hombres no se incluyen en la muestra.	La muestra no incluye estos datos.
Tercera	Más alta que ancha, se acentúa la concavidad del borde inferior.	Borde superior recto y muy cóncavo.
Cuarta	Se acentúa la concavidad del borde inferior.	Borde superior recto y muy cóncavo.

Cuadro G.3: Descripción de las etapas: madurez y terminación.

Glosario

Apófisis.- Es también la parte saliente de un hueso en la que este se articula o en la que se producen las inserciones de los músculos.

Cefalograma.- Trazado constituido por el conjunto de medidas lineales y angulares obtenidas sobre la telerradiografía cefalométrica. Su estudio determina el diagnóstico y plan de tratamiento ortodóncico mediante el análisis morfológico del complejo bucofacial, sus posibles alteraciones y la tendencia de crecimiento, permitiendo además realizar análisis cefalométricos comparativos para un mismo paciente a lo largo del tiempo.

condrogénesis.- Formación de tejido cartilaginoso.

Desarrollo de los huesos.- (Osificación) Se denomina osificación al conjunto de mecanismos (vasculares, celulares e intercelulares) por medio de los cuales el **tejido conjuntivo** se transforma en tejido óseo.

Diáfisis.- La parte central de la que consta el hueso.

Disyunción palatina.- La disyunción de la sutura palatina es un método de tratamiento descrito en el año 1860 por Angle, que logra la expansión forzada mecánicamente de la sutura palatina media.

Ecografías.- Ultrasonografía o ecosonografía es un procedimiento de imagenología

que emplea los ecos de una emisión de ultrasonidos dirigida sobre un cuerpo u objeto como fuente de datos para formar una imagen de los órganos o masas internas con fines de diagnóstico.

Edad ósea (maduración ósea).- Hace referencia al grado de desarrollo (o crecimiento) de los huesos.

Entropía.- Medida de la incertidumbre existente ante un conjunto de mensajes, de los cuales se va a recibir uno solo.

Epífisis.- Cada uno de los extremos de un hueso largo, es generalmente abultada para dar mayor firmeza a la articulación.

Incisivo.- Dientes anteriores con borde afilado. Cortan los alimentos.

Intermaxilares.- Cada uno de los tres que forman las mandíbulas; dos de ellos, la superior, y el otro la inferior.

Maloclusiones.- Se refiere al mal alineamiento de los dientes o a la forma en que los dientes superiores e inferiores encajan entre sí.

Maloclusión Clase III.- Es causada por sobre crecimiento del **maxilar inferior** va a tener una **mordida cruzada** anterior, otra característica es la inclinación labial de los **incisivos** superiores y la inclinación lingual de los incisivos inferiores. La relación molar se va dar cuando la cúspide mesiobucal es de la molar superior van a tener contacto por detrás del surco vestibular molar inferior.

Maxilar inferior.- También llamada mandíbula, es uno de los huesos de la cara, plano, impar, central y simétrico, en forma de herradura. Está situado en la parte inferior y anterior de la cara, constituyendo por sí solo la mandíbula.

Maxilar superior.- Es un hueso de la cara, par, corto, de forma irregular cuadrilátera, con dos caras, interna y externa, cuatro bordes y cuatro ángulos.

Maxilofacial.- Perteneciente o relativo a los huesos de la cara.

Mordida abierta.- Se llama así cuando algunos dientes no van a tener contacto entre los superiores e inferiores. Se va a presenciar una abertura al cierre de las arcadas, puede

ser mordida abierta posterior o anterior.

Mordida cruzada.- Cuando encontramos la relación de los dientes superiores con los inferiores en una posición anormal, se pueden dar en el sector anterior, posterior, unilateral y bilateral. Van a ser anomalías que se ven frecuentemente.

Morfología.- Parte de la biología que trata de la forma de los seres orgánicos y de las modificaciones o transformaciones que experimenta.

Oclusión.- Se refiere al alineamiento de los dientes y la forma como encajan los dientes superiores e inferiores (mordida). La oclusión ideal se presenta cuando todos los dientes superiores encajan o ajustan ligeramente sobre los inferiores. Las puntas de los molares encajan en los surcos de los molares opuestos y todos los dientes están alineados, derechos y espaciados de manera proporcional. Asimismo, los dientes superiores impiden que las mejillas y los labios sean mordidos y los inferiores protegen la lengua.

Odontología.- Es la especialidad médica que se encarga del diagnóstico, tratamiento y prevención de las enfermedades del aparato estomatognático (esto incluye los dientes, la encía, la lengua, el paladar, la mucosa oral, las glándulas salivales y otras estructuras anatómicas implicadas, como los labios, amígdalas, orofaringe y la articulación temporomandibular).

Palatina.- Corresponde a aquella cara del diente que mira hacia el paladar este término se utiliza para la arcada superior.

Sesamoideo .- Hueso de pequeño tamaño, parecido por su forma y tamaño a una semilla de sésamo (de lo que le viene el nombre), y que se encuentra en el seno de algunos tendones o en una cápsula.

Tejido conjuntivo.- Está formado por células de diversos tipos, en su mayoría de origen mesenquimático, situadas en una matriz intercelular constituida por diversos tipos de fibras proteicas, llamadas fibras conjuntivas, embutidas en una sustancia fundamental amorfa. El tejido conjuntivo se encuentra rellenando los espacios entre otros tejidos o formando el estroma, es decir el soporte estructural, de las células de otros tejidos, como el muscular o el adiposo, o entre ellas y los vasos sanguíneos y nervios.

Tratamiento Funcional.- Se van a emplear aparatos para la musculatura o va a intervenir a la actividad funcional para mover los cambios de la oclusión.

Tratamiento Ortopédico.- Fundamentalmente va hacer esquelético y de localización **maxilofacial**. Se va controlar el crecimiento de los maxilares y corregir la maloclusión.

Bibliografía

- [1] Tiziano Baccetti, Lorenzo Franchi y James A. McNamara. An improved version of the cervical vertebral maturation (cvm) method for the assessment of mandibular growth. *Angle Orthodontist*, 72(4):316–323, 2002.
- [2] Natalia Bernal y Maria Isabel Arias. Indicadores de maduración esquelética y dental. *Revista CES Odontología*, 20(1):59–68, 2007.
- [3] Marko Bohanec. What is decision support? *Department of intelligent systems*, pages 86–89, 2001. Proc. Information Society IS-2001: Data Mining and Decision Support in Action!, (eds. Škrjanc, M., Mladenic, D.), Ljubljana.
- [4] R. Cañete Estrada y A. Suanes Cabello. Evaluación de la maduración ósea mediante mediciones métricas automatizadas. *DOYMA*, 52(2):123–131, 2000.
- [5] Damariz Calvo Pérez. Edad ósea en las vértebras cervicales en población de 9 a 16 años con oclusión normal. Master's thesis, Facultad de Ciencias Médicas, Matanzas, Cuba, 2006.
- [6] Juan Carreño García, Mario Menéndez Nuñez, María Ángeles de Vicente Gener y José Antonio Alarcón Pérez. Pautas terapéuticas del síndrome maloclusivo de clase ii según su tipología. *Revista Española Ortodoncica*, 30:365–372, 2000.

- [7] Marco Castro Contreras. Desarrollo e implementación de un framework para la formación de carteras de proyectos de iandd en organizaciones públicas. Master's thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, N.L., México, 2007.
- [8] Angela Ceglia. Indicadores de maduración de la edad ósea, dental y morfológica [versión electrónica: <http://www.ortodoncia.ws/publicaciones/2005/>]. *Revista latinoamericana de odontología y odontopediatría*, 2005. ISSN: 1317-5823.
- [9] Simon Chen, Pete E. Lestrel, W. John S. Kerr y Jhon H. McColl. Describing shape changes in the human mandible using elliptical fourier functions. *European Orthodontic Society*, 22:205–216, 2000.
- [10] Zuleika Díaz Martínez, José Fernández Menéndez y Paloma Martínez Almodóvar. *El algoritmo de inducción de reglas y árboles de decisión See5 aplicado a la predicción de insolvencias de empresas de seguros*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España, 2003.
- [11] Michael Doumpos y Constantin Zopounidis. Multicriteria classification methods in financial and banking decisions. *Wiley Inter Science*, 2001.
- [12] Michael Doumpos y Constantin Zopounidis. *Multicriteria decision aid classification methods*, volume 73 of *Applied Optimization*. Kluwer academic publishers, 2004.
- [13] Ward Edwards, Ralph F. Miles Jr. y Detlof von Winterfeldt. *Advances in Decision Analysis: from foundations to applications*. Cambridge University Press, 2007.
- [14] J. Figueira, Y. De Smet, B. Mareschal y JP Brans. MCDA methods for sorting and clustering problems: promethee tri and promethee cluster. Technical report, INESC Coimbra, Coimbra, 2003.
- [15] Paola Gandini, Marta Mancini y Federico Andreani. A comparison of hand-wrist bone and cervical vertebral analyses in measuring skeletal maturation. *Angle Orthodontist*, 76(6):984–989, 2006.

- [16] J. Guerrero. Edad ósea. *Asociación Española de Pediatría*, 2007. Hospital infantil La Paz, Madrid. InfoFAMILIA. El Portal Médico para Padres de la Asociación Española de Pediatría.
- [17] J.A. Hartigan y M.A. Wong. Algorithm as136: A k means clustering algorithm. *Applied Statistics*, 28:100–108, 1979.
- [18] Brent Hassel y Allan G. Farman. Skeletal maturation evaluation using cervical vertebrae. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 107(1):58–66, 1995.
- [19] Dolphin Imaging, 2008. <http://www.dolphinimaging.com/home.html>.
- [20] Ralph Keeney. Making better decision makers. *Decision analysis PORTAL*, 1(4):193–204, 2004. ISSN:1545-8490.
- [21] Don G. Lamparski y Surender K. Nanda. Skeletal age assessment utilizing cervical vertebrae. *The british library*, 39:171–184, 2002. ISSN: 0162-7279.
- [22] Pedro Larrañaga, Iñaki Inza y Abdelmalik Moujahid. Árboles de clasificación. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.
- [23] Jacek Leski. Towards a robust fuzzy clustering. *PORTAL*, 137(2):215–233, 2003. ISSN:0165-0114.
- [24] P. Lestrel. Some approaches toward the mathematical modeling of the craniofacial complex. *J. of Craniofac Genetics and Dev Biol. National Center for Biotechnology Information*, 9(1):77–91, 1989.
- [25] Ezequiel Lopez. Departamento de antropología biológica. <http://anatomiadescrptiva.blogspot.com/2007/05/miembro-superior.html>, 2007.
- [26] S. López, L. Magdalena y J.R. Velasco. Generación de particiones borrosas mediante técnicas de agrupamiento mejoradas con algoritmos genéticos. *Inteligencia Artificial*, 2(5), 1998.

- [27] K. H. Lu. Harmonic analysis of the human face. *National Center for Biotechnology Information PubMed Biometrics*, 21:491–505, 1965.
- [28] Y. Malavé y I. Rojas. Análisis carpal como indicador de maduración ósea. *Acta Odontológica Venezolana*, 38(3):4–9, 2000. . ISSN 0001-6365.
- [29] Radio Memory, 2005. <http://www.radiocefstudio.com/>.
- [30] M. Moss, R. Skalak, M. Shinozuka, H. Patel, L. Moss-Salentijn, H. Vilmann y P. Mehta. Statistical testing of an allometric centered model of craniofacial growth. *National Center for Biotechnology Information*, 83, 1983.
- [31] Dental Office, 1994. <http://www.dentaloffice.com.br/espanol/>.
- [32] Tomás Orellana, Héctor Marengo C., Luciano Soldevilla G. y Martín Orlando Orellana M. Estudio de la maduración ósea en pacientes niños de la clínica odontológica de la unmsm. *Odontología Sanmarquina*, 9(2):25–27, 2006.
- [33] Mónica Ortiz, Sol Godoy, Dorathys Fuenmayor, Margarita Farias, Oscar Quirós, Sandra Rondón y Harry Lerner. Método de maduración ósea en las vertebrales cervicales, en pacientes del diplomado de ortodoncia interceptiva. *Revista Latinoamericana de ortodoncia y odontopediatría*, 2007. [versión electrónica] <http://www.ortodoncia.ws/publicaciones/2007/maduracionoseavertebrascervicales>.
- [34] Eduardo Padrós y Mercedes Creus. Revisión de los métodos para estudiar el crecimiento craneofacial en ortodoncia. *Ortodoncia Clínica*, 5(2):100–116, 2002.
- [35] Zdzislaw Pawlak. A primer on rough sets: a new approach to drawing conclusions from data. *Cardozo Law Review*, 22:1407–1415, 2002.
- [36] Rulequest Research, 2007. <http://www.rulequest.com/>.
- [37] Napoleón José Romero Guia. Precisión en la localización de los puntos cefalométricos en un análisis de radiografía lateral. Master's thesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2004.

- [38] Paloma San Román, Juan Carlos Palma, María Dolores Oteo y Esther Nevado. Skeletal maturation determined by cervical vertebrae development. *European Orthodontic Society*, 24:303–311, 2002.
- [39] RSES, 2005. <http://logic.mimuw.edu.pl/rses/> Warsaw University.
- [40] A. Sasaki, Takeshita S., Moss ML., Publico AS., Tanaka E., Ishino Y., Watanabe M. y Tanne K. Finite element growth analysis for the craniofacial skeleton in patients with cleft lip and palate. *National Center for Biotechnology Information*, 26(2):109–18, 2004.
- [41] K. Schunk, W. Kraus y R. Boor. The sonographic examination of the distal femoral epiphysis as a method of determining maturity of the newborn. *National Center for Biotechnology Information PubMed*, 146(6):623–7, 1987.
- [42] María Segovia Vargas. *Predicción de crisis empresariales en seguros no vida mediante la metodología rough sets*. PhD thesis, Facultad de ciencias económicas y empresariales, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España, 2003.
- [43] Sabrina Sholts, Philip L. Walker, Kevin Miller y Sebastian Warmlander. The application of three-dimensional midfacial profiling in the identification of human skeletal remains. *The 18th International Symposium on Human Identification*, 2007. Los Angeles, California.
- [44] Yves De Smet y Linett Montano Guzmán. Towards multicriteria clustering: An extension of the k-means algorithm. *European Journal of Operational Research*, 158:390–398, 2004.
- [45] Begoña Sobradillo. Estudio de la maduración ósea y predicción de la talla adulta, 2000. [versión electrónica] [http://www.comtf.es/pediatria/CongresoAEP2000/Ponenciashtm/BegoC3B1aSobradillo .htm](http://www.comtf.es/pediatria/CongresoAEP2000/Ponenciashtm/BegoC3B1aSobradillo.htm).
- [46] Guang-Quan Song. Three-dimensional finite element stress analysis of post-core

- restored endodontically treated teeth. Master's thesis, The University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, 2005.
- [47] Quick Ceph System, 2000. <http://www.quickceph.com/>.
- [48] Satoshi Takeshita, Akiko Sasaki, Kazuo Tanne Andre S. Publico y Melvin L. Moss. The nature of human craniofacial growth studied with finite element analytical approach. *WILEY Inter Science*, 4, 2001. DOI: 10.1034/j.1600-0544.2001.040305.x.
- [49] Pang-Ning Tan, Michael Steinbach y Vipin Kumar. Introduction to data mining. *Addison-Wesley*, pages 487–650, 2005. Capítulo 8.
- [50] Kardi Teknomo. Discriminant analysis tutorial. <http://people.revoledu.com/kardi/tutorial/LDA/index.html>, 2006.
- [51] Evangelos Triantaphyllou. Multi-criteria decision making methods: A comparative study. *Kluwer Academic Publishers*, 2000.
- [52] Juan Tristán Fernández, Fernando Ruiz Santiago, Miguel C. Botella López, Rosa Maroto Benavides y Silvia Jiménez Brobeil. Análisis de los métodos radiológicos que predicen la edad ósea de los niños desde el punto de vista antropológico. *Antropo*, 12:93–102, 2006.
- [53] Michael D. Twa, Srinivasan Parthasarathy, Mark A. Bullimore, Cynthia Roberts, Ashraf M. Mahmoud, Tom Raasch y David J. Schanzlin. Automated decision tree classification of keratoconus from videokeratography. The Ohio State University, 2000.
- [54] Mariluz Velásquez V. y Pablo Emilio Correa E. Indicadores de crecimiento físico. *Revista CES Odontología*, 17(1):75–79, 2004.
- [55] Rui Xu y Donald Wunsch II. Survey of clustering algorithms. *IEEE Xplore Transactions of Neural Networks*, 16(3):645–678, 2005.

- [56] W. Yu. Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique de tri: Concepts, méthode et applications. *Doctoral Dissertation, université de Paris Dauphine.*, 1992.

Índice de figuras

2.1. Anatomía de la mano-muñeca [25].	10
2.2. Etapas de maduración ósea ($Cx =$ número de vértebra cervical, $x =$ 2,3,4,5,6) [1].	13
3.1. El proceso de toma de decisión [7].	25
3.2. Clasificación de los problemas de toma de decisión [12].	26
3.3. Esquema general de un modelo para problemas de clasificación [12]. . . .	27
3.4. Metodologías de modelos de clasificación [12].	28
3.5. Árbol de decisión/clasificación [12].	35
3.6. Funciones de pertenencia para dos alternativas [51].	40
3.7. Los problemas de clasificación comparados con los problemas de agru- pamiento [12].	41
3.8. Dendrograma.	45
4.1. Comparación de metodologías MAUT-ORT y PDA [12].	55

4.2. Perfiles en ELECTRE TRI [12].	57
4.3. Índice parcial de concordancia [12].	58
4.4. Índice parcial de discordancia [12].	59
4.5. Conjuntos aproximados	62
5.1. Clasificación de los problemas de decisión discretos [12].	68
5.2. Radiografía muestra.	70
5.3. Mediciones en la tercera vértebra cervical.	71
6.1. Niños (Análisis discriminante).	77
6.2. Niñas (Análisis discriminante).	78
A.1. Dendrograma no. 1.	94
A.2. Dendrograma no. 2.	96
A.3. Dendrograma no. 3.	98
A.4. Dendrograma no. 4.	100
A.5. Dendrograma no. 5.	101
A.6. Dendrograma no. 6.	103
A.7. Dendrograma no. 7.	105
A.8. Dendrograma no. 8.	107
A.9. Dendrograma del grupo 2.	115
A.10. Dendrograma del grupo 3.	115
A.11. Dendrograma del grupo 7.	121
A.12. Dendrograma del grupo 8.	121
B.1. Niños de 9 a 10 años.	124
B.2. Niños de 11 a 12 años.	125

B.3. Niños de 13 a 14 años.	125
B.4. Niños de 15 a 16 años.	126
E.1. Niños.	150
E.2. Niñas.	151

Índice de cuadros

2.1. Métodos de evaluación de la maduración ósea.	15
4.1. Clasificación: grupos ordenados y no ordenados.	56
6.1. Muestra de datos.	76
6.2. Niños (Mahalanobis, 77.5 % de correcta clasificación).	78
6.3. Niñas (Mahalanobis, 76.3 % de correcta clasificación).	79
6.4. Niños (See 5.0, 83.7 % de correcta clasificación).	80
6.5. Niñas (See 5.0, 88.7 % de correcta clasificación).	80
6.6. Niños (C 4.5).	81
6.7. Niñas (C 4.5).	82
6.8. Niños (RSES 2.2 - LEM2.)	83
6.9. Distribución de las reglas de los niños (24 reglas).	83
6.10. Niñas (RSES 2.2 - LEM2.)	84
6.11. Distribución de las reglas de las niñas (22 reglas).	84

6.12. Reglas con 2 % de variabilidad. 86

6.13. Reglas con 6 % de variabilidad. 87

A.1. Coordenadas de los centros para el grupo no. 1. 95

A.2. Coordenadas de los centros para el grupo no. 2. 97

A.3. Coordenadas de los centros para el grupo no. 3. 99

A.4. Coordenadas de los centros para el grupo no. 4. 101

A.5. Coordenadas de los centros para el grupo no. 5. 102

A.6. Coordenadas de los centros para el grupo no. 6. 104

A.7. Coordenadas de los centros para el grupo no. 7. 106

A.8. Coordenadas de los centros para el grupo no. 8. 108

A.9. Método jerárquico. 109

A.10. Distancias entre los dos grupos formados para cada muestra de datos. . . 110

A.11. Pertenencia al grupo de mujeres de 9-10 años. 111

A.12. Pertenencia al grupo de mujeres de 9-10 años, con los datos cambiados. . 112

A.13. Resultados usando el método K medias. 113

A.14. Casos invariantes. 114

A.15. Casos complicados. 115

A.16. Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 1). 116

A.17. Distancias del grupo de datos (1) al elemento 2. 117

A.18. Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 2). 118

A.19. Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 3). 119

A.20. Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 7). 120

A.21. Distancias de los casos a sus respectivos centros (grupo 8). 122

B.1. Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 9 a 10 años.	127
B.2. Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 9 a 10 años.	127
B.3. Criterios introducidos y eliminadas en la función discriminante B.1 para niños de 11 a 12 años.	127
B.4. Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 11 a 12 años.	128
B.5. Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 13 a 14 años.	128
B.6. Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 13 a 14 años.	128
B.7. Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 15 a 16 años.	129
B.8. Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 15 a 16 años.	129
B.9. Criterios introducidos en la función discriminante B.1 para niños de 9 a 16 años.	129
B.10. Coeficientes para los criterios de la función discriminante B.1 para niños de 9 a 16 años.	130
B.11. Clasificación para niños de 9 a 10 años.	131
B.12. Clasificación para niños de 11 a 12 años.	131
B.13. Clasificación para niños de 13 a 14 años.	132
B.14. Clasificación para niños de 15 a 16 años.	132
B.15. Clasificación para niños de 9 a 16 años.	132
B.16. Confianza de las reglas para niños de 9 a 10 años.	133

B.17. Confianza de las reglas para niños de 11 a 12 años.	134
B.18. Confianza de las reglas para niños de 13 a 14 años.	134
B.19. Confianza de las reglas para niños de 15 a 16 años.	135
B.20. Confianza de las reglas para niños de 9 a 16 años.	135
E.1. Niños usando el criterio de Mahalanobis.	150
E.2. Niñas usando el criterio de Mahalanobis.	152
E.3. Niños (See).	152
E.4. Niñas (See).	153
E.5. Niños (C 4.5).	153
E.6. Niñas (C 4.5).	153
E.7. Niños (LEM2).	154
E.8. Niñas (LEM2).	154
F.1. Para los criterios: 2AngMC, 3AngMC y 4AngMC.	155
F.2. Para los criterios: a_2ABP, a_2Ancho, a_3ABA, a_3Ancho, a_3ABP, a_4ABA y a_4Ancho.	156
F.3. Para los criterios: 3Forma y 4Forma.	157
G.1. Descripción de las etapas: iniciación y aceleración.	159
G.2. Descripción de las etapas: transición y desaceleración.	160
G.3. Descripción de las etapas: madurez y terminación.	160

Autobiografía

Luis Miguel Prado Llanes

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

CLASIFICACIÓN MULTICRITERIO APLICADA A LA CARACTERIZACIÓN DE
LA MADURACIÓN ÓSEA EN NIÑOS Y ADOLESCENTES CON OCLUSIÓN
NORMAL Y EDADES ENTRE 9 Y 16 AÑOS

Nací el 11 de febrero de 1983. En el año 2000 ingresé a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. En la Facultad realicé la tesis *Programa simulador de un proceso de inventario* para obtener el título de Licenciado en Ciencias Computacionales en agosto del 2007. A partir de enero del 2007 soy estudiante del Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas.