

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS DE CONTROL DE SEGUIMIENTO PARA SISTEMAS  
HAMILTONIANOS

POR:

ING. EVERT JOSUÉ GUAJARDO BENAVIDES

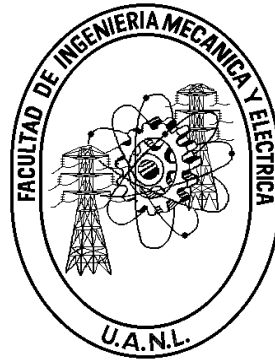
EN OPCIÓN AL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

ENERO 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ANÁLISIS DE CONTROL DE SEGUIMIENTO PARA SISTEMAS  
HAMILTONIANOS

POR:

ING. EVERT JOSUÉ GUAJARDO BENAVIDES

EN OPCIÓN AL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

ENERO 2021



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

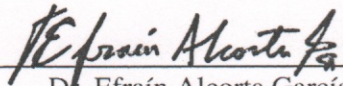


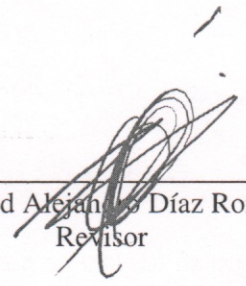
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

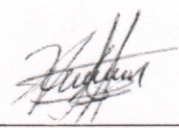
**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Análisis de control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos”, realizada por el alumno Evert Josué Guajardo Benavides, con número de matrícula 1988524, sea aceptada para su defensa como requisito para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.


El Comité de Tesis

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Efraín Alcorta García  
Director

  
\_\_\_\_\_  
Dr. David Alejandro Díaz Romero  
Revisor

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Herman Castañeda Cuevas  
Revisor

Vo. Bo.

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado



118

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, marzo de 2021



*Este trabajo está dedicado principalmente a mi Madre por ser la razón de todos mis logros, de todo lo que soy y de mis futuros proyectos.*

*A Jessica por siempre estar a mi lado en todo momento, siempre de la mano como el gran equipo que hemos sido desde hace mucho tiempo y durante esta etapa importante de mi vida.*

# Agradecimientos

A mi Madre por su apoyo incondicional en cualquiera de mis proyectos y haberme hecho la persona que soy.

A Jessica por estar a mi lado en estos dos años de esta etapa tan importante apoyándome y trabajando juntos.

A mi asesor el Dr. Efraín Alcorta García por ser mi guía durante este trabajo y haberme brindado su apoyo en cuanto lo necesitaba.

A mis revisores, el Dr. David Alejandro Diaz Romero y el Dr. Herman Castañeda Cuevas por sus comentarios con el fin de mejorar este trabajo de investigación.

Al CONACYT por su gran apoyo al otorgarme la beca y hacer posible el cumplimiento de la maestría.

# Resumen

## Análisis de control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos

Publicación No. \_\_\_\_\_

Ing. Evert Josué Guajardo Benavides

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. Efraín Alcorta García

Enero 2021

El control de seguimiento para los sistemas puerto-Hamiltoniano(PCH) aún representa un desafío en la teoría de control a pesar de varios resultados disponibles en la literatura. En esta tesis se propone el uso de transformaciones canónicas generalizadas, con el fin de transferir y/u obtener algunos controladores disponibles que solucionen el problema de seguimiento para una clase de sistemas Hamiltonianos y que además preserven la estructura PCH.

El procedimiento considerado en este trabajo permite trasladar algunos resultados existentes de los sistemas con estructura Euler-Lagrange a estructura puerto-Hamiltoniano diseñando un marco común de análisis, que por medio de la modificación de los parámetros de control, se puedan obtener algunos algoritmos de control de seguimiento existentes en la literatura, estableciendo claramente los requerimientos.

**Palabras clave:** Control de seguimiento, transformaciones canónicas generalizadas, sistemas PCH, pasividad.

# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>X</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Hipótesis y justificación . . . . .	6
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Preliminares</b>	<b>8</b>
2.1. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	8
2.1.1. Derivación de las ecuaciones de movimiento de Hamilton a partir de las de Euler-Lagrange . . . . .	9
2.1.2. Estructura Hamiltoniana controlada por puerto (PCH) . . . . .	10
2.1.2.1. Sistemas mecánicos (ejemplo) . . . . .	11
2.1.2.2. Sistemas eléctricos (ejemplo) . . . . .	13
2.1.3. Estructura Hamiltoniana controlada por puerto con disipación (PCHD) . . . . .	14
2.1.3.1. Sistemas mecánicos (ejemplo) . . . . .	15
2.1.3.2. Sistemas eléctricos (ejemplo) . . . . .	16
2.2. Pasividad en sistemas Hamiltonianos . . . . .	17
2.2.1. Sistemas mecánicos (ejemplo) . . . . .	18
2.2.2. Sistemas eléctricos (ejemplo) . . . . .	19
2.3. Transformaciones canónicas en sistemas PCH . . . . .	19
2.3.1. Transformaciones canónicas sin cambio de Hamiltoniano $H(x,t)$	20

2.3.2.	Transformaciones canónicas con cambio de Hamiltoniano $H(x,t)$	21
2.3.3.	Transformaciones canónicas generalizadas	23
2.4.	Control basado en pasividad (PBC)	24
2.4.1.	Control de Set-point para sistemas PCH/PCHD mediante transformaciones canónicas	26
2.4.1.1.	Control PD con compensación de gravedad y PID	27
<b>3.</b>	<b>Seguimiento de trayectoria para una clase de sistemas PCH mediante transformaciones canónicas generalizadas</b>	<b>32</b>
3.1.	Desarrollo de marco común para el control de seguimiento (sin perturbación)	34
3.1.1.	Prueba de estabilidad en lazo cerrado	38
3.1.2.	Control PD con precompensación	39
3.1.3.	Control PD+	41
3.1.4.	Control par-calculado	43
3.2.	Diseño de marco común para el control de seguimiento (con perturbación)	46
3.2.1.	Prueba de estabilidad en lazo cerrado	52
3.2.2.	Control robusto (A.Donaire)	54
<b>4.</b>	<b>Implementación de algoritmos de control de seguimiento</b>	<b>55</b>
4.1.	Control de seguimiento para brazo manipulador de 2 G.D.L.	55
4.1.1.	Diseño de controladores	56
4.1.1.1.	<b>Caso 1:</b> Ganancias iguales en los controladores, sin perturbación a la entrada ( $u = \tau$ ).	56
4.1.1.2.	<b>Caso 2:</b> Ganancias diferentes en los controladores, sin perturbación a la entrada ( $u = \tau$ ).	57
4.1.1.3.	<b>Caso 3:</b> Ganancias iguales en los controladores, con perturbación a la entrada ( $u = \tau + \bar{d}$ ).	58
4.1.1.4.	<b>Caso 4:</b> Ganancias diferentes en los controladores, con perturbación a la entrada ( $u = \tau + \bar{d}$ ).	59
4.1.2.	Resultados	60
4.1.3.	Conclusiones	68
4.2.	Control de seguimiento para robot móvil diferencial	70
4.2.1.	Diseño de controladores	70



4.2.1.1.	<b>Caso 1:</b> Ganancias iguales en los controladores, sin perturbación a la entrada( $u = \tau$ ). . . . .	71
4.2.1.2.	<b>Caso 2:</b> Ganancias diferentes en los controladores, sin perturbación a la entrada( $u = \tau$ ). . . . .	72
4.2.1.3.	<b>Caso 3:</b> Ganancias iguales en los controladores, con perturbación a la entrada( $u = \tau + \bar{d}$ ). . . . .	72
4.2.1.4.	<b>Caso 4:</b> Ganancias diferentes en los controladores, con perturbación a la entrada( $u = \tau + \bar{d}$ ). . . . .	73
4.2.2.	Resultados . . . . .	73
4.2.3.	Conclusiones . . . . .	85
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>87</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	88
5.2.	Aportaciones . . . . .	89
5.3.	Recomendaciones para trabajos futuros . . . . .	90
<b>A.</b>	<b>Brazo robótico de 2 G.D.L</b>	<b>91</b>
A.1.	Modelo dinámico . . . . .	92
A.2.	Trayectorias deseadas . . . . .	93
<b>B.</b>	<b>Robot móvil de tipo diferencial</b>	<b>96</b>
B.1.	Modelo dinámico . . . . .	97
B.2.	Trayectorias deseadas . . . . .	99

# Lista de figuras

2.1. Péndulo Simple . . . . .	12
2.2. Circuito LC . . . . .	13
2.3. Péndulo Simple con fricción en el soporte . . . . .	16
2.4. Circuito RLC . . . . .	16
2.5. Representación física del controlador PD con compensación de gravedad en un péndulo simple. . . . .	30
3.1. Sistema de error de seguimiento en lazo abierto . . . . .	33
3.2. Sistema de error de seguimiento en lazo cerrado . . . . .	34
3.3. Transformación del sistema de error extendido en lazo abierto . . . . .	47
3.4. Transformación del sistema de error extendido en lazo cerrado . . . . .	47
4.1. Caso 1- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1). . . . .	60
4.2. Caso 1- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2). . . . .	61
4.3. Caso 2- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1). . . . .	62
4.4. Caso 2- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2). . . . .	63
4.5. Caso 3- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1). . . . .	64
4.6. Caso 3- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2). . . . .	65
4.7. Caso 4- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1). . . . .	66
4.8. Caso 4- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2). . . . .	67

4.9. Errores de posición y velocidad y ley de control PD con precompensación con ganancias $K_p = K_d = I$ . . . . .	69
4.10. Errores de posición y velocidad y ley de control PD+ con ganancias $K_p = K_d = I$ . . . . .	69
4.11. Caso 1- Errores de posición y velocidad (coord. X) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	74
4.12. Caso 1- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	75
4.13. Caso 1-Trayectorias del Robot Móvil diferencial. . . . .	76
4.14. Caso 2- Errores de posición y velocidad (coord. X). y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	76
4.15. Caso 2- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	77
4.16. Caso 2-Trayectorias del Robot Móvil diferencial. . . . .	78
4.17. Caso 3- Errores de posición y velocidad (coord. X) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	79
4.18. Caso 3- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	80
4.19. Caso 3-Trayectorias del Robot Móvil diferencial. . . . .	81
4.20. Caso 3-Detalle de la desviación de las trayectorias del Robot Móvil diferencial. . . . .	81
4.21. Caso 4- Errores de posición y velocidad (coord. X) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	82
4.22. Caso 4- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial. . . . .	83
4.23. Caso 4-Trayectorias del Robot Móvil diferencial. . . . .	84
4.24. Caso 4-Detalle de las trayectorias del Robot Móvil diferencial. . . . .	84
4.25. Posición inicial y final del Robot móvil diferencial. . . . .	85
A.1. Brazo robótico de 2G.D.L. Tomada de [1] . . . . .	92
A.2. Posiciones de referencia . . . . .	94
A.3. Velocidades de referencia . . . . .	95
A.4. Aceleraciones de referencia . . . . .	95
B.1. Robot móvil tipo diferencial. Tomada de [2] . . . . .	97

B.2. Trayectoria deseada del robot móvil . . . . .	99
B.3. Trayectorias deseadas de posición, velocidad y aceleración de los estados $q_{B_x}, q_{B_y}$ del robot móvil . . . . .	100

# Lista de tablas

- 4.1. Caso 1- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1). . . . . 61
- 4.2. Caso 1- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2). . . . . 62
- 4.3. Caso 2- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1). . . . . 63
- 4.4. Caso 2- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2). . . . . 64
- 4.5. Caso 3- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1). . . . . 65
- 4.6. Caso 3- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2). . . . . 66
- 4.7. Caso 4- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1). . . . . 67
- 4.8. Caso 4- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2). . . . . 68
- 4.9. Caso 1- Valores del error de posición y velocidad y señal de control- Robot Móvil diferencial. . . . . 75
- 4.10. Caso 2- Valores del error de posición y velocidad y señal de control- Robot Móvil diferencial. . . . . 77
- 4.11. Caso 3- Valores del error de posición y velocidad y señal de control- Robot Móvil diferencial. . . . . 80
- 4.12. Caso 4- Valores del error de posición y velocidad y señal de control- Robot Móvil diferencial. . . . . 83
  
- A.1. Valores de los parámetros del robot . . . . . 91
  
- B.1. Valores de los parámetros del robot móvil diferencial . . . . . 96

# Capítulo 1

## Introducción

El diseño de controladores de seguimiento de trayectoria para sistemas Hamiltonianos es un campo de estudio que ha despertado un gran interés en los últimos años, en muchos casos usando pasividad como herramienta; siendo este un concepto muy utilizado en sistemas cuya representación matemática se basa en la utilización de la energía total como base para obtener las ecuaciones del movimiento de los mismos. Este hecho ha permitido formalizar el estudio de controladores basados en pasividad, cuyo enfoque consiste en la manipulación de la energía como método para determinar el comportamiento del sistema, ya sea para estabilidad o seguimiento de trayectoria.

Una de las principales razones del estudio de controladores basados en pasividad es la interpretación física que estos presentan, ya que permiten establecer una *lingua franca* entre practicantes de diferentes ramas de la ingeniería. De esa manera, el entendimiento sobre lo que se concibe con la aplicación de estos controladores, más allá de una ecuación matemática, es la interacción de la energía total con la dinámica del sistema y cómo manipularla para cumplir con el objetivo de control.

El problema de control de estabilización en sistemas Hamiltonianos ha sido un tema muy investigado y desarrollado, incluso podría decirse que es un problema de control resuelto [3]. Muchas contribuciones han precisado este estudio, tal como la muy conocida técnica de control basado en pasividad por medio de interconexión y asignación de disipación o mejor conocido como *IDA-PBC* [4], cuyo principal objetivo es la estabilización del sistema por medio de la modificación de la energía potencial para establecer el punto de equilibrio deseado y asignación de disipación para estabilización asintótica, bajo un esquema de interconexión; esto es, modificar la estructura Hamiltoniana controlada por puerto o *PCH* por medio de la adición

de nuevas matrices de interconexión.

A pesar de lo anteriormente mencionado, en el caso del control de seguimiento de trayectoria en sistemas Hamiltonianos persisten algunos problemas abiertos; aún así, se han propuesto diferentes estrategias importantes para cierta clase de sistemas. El principal reto de estos controladores es la preservación de la estructura *PCH* en lazo cerrado, siendo esta, una generalización de las ecuaciones de movimiento de Hamilton que naturalmente emerge del estudio de *modelado de redes* de sistemas físicos (complejos). La importancia de conservar la estructura *PCH* es la facilidad del estudio de pasividad del sistema que garantiza estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En algunos casos, el análisis de pasividad en sistemas *PCH* no es sencillo de realizar debido a la estructura del sistema en particular. Sin embargo, existe una metodología conocida como *transformaciones canónicas* [5] que permite realizar un cambio de coordenadas que convierten al sistema original en otro sistema que preserva la estructura *PCH* y que además facilita el análisis de pasividad; por consiguiente, de estabilidad a partir de una retroalimentación de salida. Con esto en mente, se podrían explotar las propiedades de las transformaciones canónicas para abordar el problema del control de seguimiento mediante un cambio de coordenadas que denoten un sistema de error del original.

En esta tesis se propone desarrollar un marco común de análisis mediante el uso de las transformaciones canónicas generalizadas mediante la cual se busca, por un lado obtener en formato PCH controladores a partir de resultados conocidos para sistemas con representación Euler-Lagrange. Por otro lado, se busca reconocer las cualidades que deben de tener las leyes de control de seguimiento desde el punto de vista del manejo de energía. Así, implementar tales algoritmos para dos casos de estudio: Brazo robótico de 2 grados de libertad (G.D.L) de tipo rotacional y robot móvil de tipo diferencial

Primeramente en este capítulo se presenta la motivación de este trabajo de investigación. Después, se abordarán algunos antecedentes respecto al control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos, discutiendo de manera breve cada uno de los resultados disponibles en la literatura especializada. Por último, se plantean los objetivos, las hipótesis y la estructura de la tesis partiendo de los preliminares hasta las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros sobre este tema de investigación.

## 1.1. Motivación

Los sistemas Hamiltonianos, así como los sistemas Euler-Lagrange, han tomado su lugar en la comunidad científica del área de control automático debido a que permiten formalizar la estructura de una gran cantidad de sistemas no lineales de manera estándar. Por tal motivo, los controladores diseñados a partir de las propiedades de estos sistemas, son a su vez algoritmos de control generales; es decir, la misma ley de control funciona para distintas aplicaciones.

De igual manera, dada la gran popularidad obtenida por los controladores basados en pasividad (*PBC*), por la interpretación física que estos presentan, la representación Hamiltoniana con estructura *PCH* facilita el desarrollo de los mismos ya que garantizan estabilidad en el sentido de Lyapunov. Sin embargo, la importancia de preservar esta estructura en lazo cerrado al aplicar un controlador, es tal, que permita conservar las propiedades para su posterior análisis de pasividad o estabilidad, lo cual complica el desarrollo de los algoritmos de control de seguimiento.

A pesar de las dificultades del problema de control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos, existen diferentes aportaciones e investigaciones para cierta clase de sistemas con estructura *PCH* que cumplen con este objetivo de control. Tomando en cuenta la estructura del sistema y de sus propiedades, es prudente pensar en la posibilidad de encontrar una ley de control de seguimiento base, en la que mediante la modificación de sus parámetros, se puedan obtener distintos algoritmos disponibles en la literatura. Por lo que el enfoque de este trabajo de investigación reside en sintetizar algunos de los algoritmos reportados a partir de un marco común de desarrollo y análisis.

## 1.2. Antecedentes

La primera aparición de los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (*PCH*) fue en [6], en donde se propone un esquema de modelado basado en redes de sistemas no-resistivos en el formalismo de *bond graph*. Tal formalismo permite relacionar las variables de puerto, como lo son: flujo ( $f$ ) y de esfuerzo ( $e$ ). Esta relación se hace a través de una matriz de interconexión  $J(x)$  y cuyo producto interno representa la potencia del sistema; al igual que la derivada temporal de la función Hamiltoniana  $H(x)$ .

Partiendo de ese hallazgo, se han presentado avances importantes para el



desarrollo de algoritmos de control que explotan las propiedades de la estructura *PCH*. Tal es el caso que se exhibe en [4] que propone una técnica denominada *Control basado en pasividad por interconexión y asignación de disipación* o mejor conocido como *IDA-PBC* por sus siglas en inglés. Esta técnica tiene como propósito diseñar una ley de control que modifica la energía del sistema a partir de la transformación de la matriz de interconexión, que logra establecer el punto de equilibrio al punto deseado, y de la adición de una matriz de disipación que hace que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable. Sin embargo, esta técnica es aplicada para el caso del problema de estabilización. Un resultado similar a este puede verse en [7], en donde se hacen uso de las transformaciones canónicas para la estabilización de sistemas Hamiltonianos; siendo este, una formulación alternativa al método *IDA-PBC*.

Aunque el problema de control de estabilización es un problema resuelto aplicando las técnicas antes mencionadas, esto no suele ser así para el caso del control de seguimiento. En la literatura de control se han reportado diferentes enfoques para solucionar el problema de seguimiento para sistemas con estructura puerto-Hamiltoniano. En [3] se presenta una estrategia para el control de seguimiento en donde propone diseñar un sistema de error por medio de transformaciones canónicas generalizadas, con el fin de convertir el problema de seguimiento en uno de estabilización que siga preservando la estructura; sin embargo, al igual que el enfoque del método *IDA-PBC*, este requiere de la solución de una ecuación diferencial parcial (EDP) para realizar dichas transformaciones.

Siguiendo los resultados de [3], en [8] se presenta una estrategia de control de seguimiento para robots manipuladores representados por la estructura puerto-Hamiltoniano mediante transformaciones canónicas y control basado en pasividad, proponiendo una nueva metodología de modificación de la energía por medio de la introducción de campos virtuales no homogéneos que permite obtener leyes de control estándar para robots manipuladores como el controlador PD+ o el controlador PD con precompensación (PD con feedforward).

Por otra parte, un control de seguimiento que preserva la estructura *PCH* en lazo cerrado para cierta clase de sistemas Hamiltonianos, se muestra en [9], en donde se comprueba estabilidad asintótica global en el sistema de error cuyo punto de equilibrio es el origen. Con el fin de presentar mayor robustez en el control, el algoritmo se extiende con la adición de una acción integral para cancelar

perturbaciones constantes, explotando el procedimiento propuesto en [10].

Otro enfoque, propuesto en [11], considera un control de seguimiento de trayectoria compuesto por un control equivalente, el cual convierte la superficie de deslizamiento en un conjunto invariante, y un control retroalimentado para asegurar la atracción hacia la invarianza previamente obtenida. Una idea diferente es propuesta en [12], donde se combina un controlador de seguimiento basado en pasividad con un nuevo observador de inmersión e invarianza.

Como se puede apreciar, existen muchas contribuciones sobre el control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos o puerto-Hamiltoniano que motivan el estudio del mismo. En este trabajo se pretende hacer uso de las transformaciones canónicas generalizadas como método para el desarrollo de un marco común de análisis del control de seguimiento.

### 1.3. Objetivos

- **Objetivo general**

- Elaborar un marco general para el desarrollo de algoritmos de control de seguimiento que parten de una estructura Euler-Lagrange y que cumplen con que una vez aplicados a un sistema PCH preservan la estructura, además de lograr el objetivo de seguimiento.

- **Objetivos particulares**

- Revisión bibliográfica sobre control de seguimiento en sistemas Hamiltonianos
- Establecimiento de un marco común para analizar los algoritmos encontrados
- Analizar las características de los algoritmos del control de seguimiento disponibles
- Implementar los algoritmos encontrados para dos casos de estudio: Un brazo robótico de 2G.D.L tipo rotacional y robot móvil tipo diferencial.
- Reporte y verificación de los resultados obtenidos

## 1.4. Hipótesis y justificación

- **Hipótesis:** Las leyes de control de seguimiento de sistemas Hamiltonianos admiten un marco común de análisis; es decir, se pueden obtener distintos algoritmos a partir de una estructura general mediante la modificación de los parámetros de control.
- **Justificación:** Los sistemas Hamiltonianos comparten una estructura que los define, en este contexto, es de esperarse que el desarrollo de leyes de control de seguimiento asociados a estos sistemas tengan algunas características en común cuyo análisis admita una comparación. Es decir que, con una estructura común en su forma Hamiltoniana, es más evidente identificar la interconexión que existe entre las trayectorias del sistema con la energía y su disipación al aplicar cada controlador al mismo.

## 1.5. Estructura de la tesis

Este documento se estructura como sigue:

- **Capítulo 1:** Se exponen algunos trabajos previos sobre el control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos, así como también se presentan la motivación, los objetivos generales y particulares, hipótesis y justificación para este trabajo de investigación.
- **Capítulo 2:** Primeramente se exhiben algunos preliminares sobre los sistemas Hamiltonianos y la estructura puerto-Hamiltoniana(PCH). Después se introduce el concepto de pasividad en los sistemas Hamiltonianos y se exponen dos ejemplos de sistemas: eléctrico y mecánico. Después se aborda la teoría de las transformaciones canónicas y transformaciones canónicas generalizadas. Por último, se muestra el concepto de control basado en pasividad(PBC) y se presenta la técnica de transformaciones canónicas como una alternativa para el control de Set-Point o estabilización.
- **Capítulo 3:** En este capítulo se aborda la principal aportación de este trabajo de investigación, en donde se establece el uso de las transformaciones canónicas generalizadas con el fin de diseñar un marco común para una clase de sistemas Hamiltonianos que permite obtener diferentes algoritmos de control

de seguimiento reportados en la literatura. Esta propuesta considera tanto el caso de sistemas sin perturbación como con perturbación a la entrada.

- **Capítulo 4:** Aquí se presentan los resultados obtenidos de la simulación con la aplicación de algunos de los algoritmos encontrados para dos casos de estudio. Estos resultados son obtenidos bajo distintos escenarios propuestos; esto es con el propósito de comparar cada controlador.
- **Capítulo 5:** Este último capítulo expone algunas conclusiones generales y recomendaciones para trabajos futuros sobre el tema de control de seguimiento, así como las aportaciones principales de la tesis.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presenta la definición de los sistemas Hamiltonianos derivando las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, así como la representación Hamiltoniana controlada por puerto (PCH); cuya estructura nos permitirá analizar, de manera mas sencilla, la estabilidad del sistema en el sentido de Lyapunov. Así mismo, se aborda el concepto de control basado en pasividad (PBC) mostrando algunos ejemplos y la definición de transformaciones canónicas generalizadas, cuyo propósito se centraliza en el cambio de coordenadas del sistema preservando la estructura PCH, con el fin de facilitar el análisis de pasividad del sistema original una vez se haya transformado.

### 2.1. Sistemas Hamiltonianos

Así como los sistemas dinámicos representados por las ecuaciones Euler-Lagrange, los sistemas Hamiltonianos constituyen una forma estándar de modelar un gran número de sistemas físicos no lineales, además de que los sistemas Euler-Lagrange son un subconjunto de los sistemas Hamiltonianos [13]; lo cual indica que la representación Hamiltoniana abarca un mayor número de sistemas físicos.

Ambas técnicas de modelado de sistemas se basan en el principio de conservación de la energía, en donde la función Lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  y Hamiltoniana

$H(q, p)$  se definen de la siguiente manera:

$$L(q, \dot{q}) \triangleq \underbrace{\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}}_{\text{E.Cinética}} - \underbrace{V(q)}_{\text{E.Potencial}} \quad (2.1)$$

$$H(q, p) \triangleq \underbrace{\frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p}_{\text{E.Cinética}} + \underbrace{V(q)}_{\text{E.Potencial}} \quad (2.2)$$

De la definición anterior podemos destacar que el Hamiltoniano corresponde a la energía total del sistema. A pesar de que en ambas definiciones comparten la matriz  $M(q)$  que corresponde a la matriz de inercia del sistema (por lo regular en sistemas mecánicos), en circuitos eléctricos corresponde a una matriz constituida por los elementos inductivos del circuito que forman parte de la definición de energía cinética del mismo. Con esta analogía, podemos decir que los elementos inductivos forman parte de la energía cinética y los capacitivos a la energía potencial de un circuito eléctrico [14].

### 2.1.1. Derivación de las ecuaciones de movimiento de Hamilton a partir de las de Euler-Lagrange

La transformación de Legendre del Lagrangiano resulta en un equivalente de las ecuaciones del movimiento de Hamilton en términos de los covectores de momento conjugado. Para el vector de coordenadas generalizada  $q \in \mathbb{R}^n$ , su derivada temporal (velocidad)  $\dot{q}$  pertenece al espacio tangente  $T_q \mathbb{R}^n$  mientras que el covector momento conjugado  $p$  yace en el espacio cotangente  $T_q^* \mathbb{R}^n$  [15].

La transformación de Legendre se basa en la siguiente relación:

$$p^T \dot{q} = \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) \dot{q}, \forall \dot{q} \in T_q \mathbb{R} \quad (2.3)$$

por lo tanto, la transformación de Legendre corresponde al mapeo  $\mathbb{F}L(q, \dot{q}) : T\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$  definido como:

$$\mathbb{F}L(q, \dot{q}) \triangleq (q, p) \quad (2.4)$$

para  $p \in T_q^* \mathbb{R}^n$ , el momento conjugado dado por:

$$p = \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q})^T \quad (2.5)$$

asumiendo que el Lagrangiano tenga la propiedad de hacer que (2.5) sea invertible, es decir, que la matriz de inercia  $M(q)$  sea de rango completo.

La definición del Hamiltoniano puede ser representada como una función del espacio cotangente de  $\mathbb{R}$ ,  $H : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  descrito por:

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (2.6)$$

considerando  $\dot{q}$  como una función de  $(q, p)$ .

Con la definición del Hamiltoniano anterior y las ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange sin fuerzas externas:

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q})^T - \partial_q L(q, \dot{q})^T = 0 \quad (2.7)$$

se calculan las derivadas de  $H(q, p)$  con respecto a  $q$  y  $p$ ,

$$\begin{aligned} \partial_q H(q, p)^T &= (p^T \partial_q \dot{q})^T - \partial_q L(q, \dot{q})^T - (\partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) \partial_q \dot{q})^T \\ &= -\partial_q L(q, \dot{q})^T \\ &= -\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q})^T) \\ &= -\dot{p} \\ \partial_p H(q, p)^T &= \dot{q} + (p^T \partial_p \dot{q}^T)^T - (\partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) \partial_p \dot{q})^T \\ &= \dot{q} \end{aligned}$$

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de Hamilton se describen como:

$$\dot{q} = \partial_p H(q, p)^T \quad (2.8)$$

$$\dot{p} = -\partial_q H(q, p)^T \quad (2.9)$$

Se puede observar que no hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema, esto es debido a la definición de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (2.7); si (2.7) se iguala al vector de pares externos  $\tau$ , entonces (2.9) resultaría en:

$$\dot{p} = -\partial_q H(q, p)^T + \tau \quad (2.10)$$

### 2.1.2. Estructura Hamiltoniana controlada por puerto (PCH)

De las ecuaciones del movimiento de Hamilton obtenidas en la sección anterior, se definen de manera general como:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H(q, p)^T, (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \\ \dot{p} &= -\partial_q H(q, p)^T + B(q)u, u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= B^T(q) \partial_p H(q, p)^T = B^T(q) \dot{q}, y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde la matriz de entrada  $B(q)$ , junto con la entrada de control  $u$ , denotan el vector de fuerzas o pares que se aplican al sistema (2.11); ya que normalmente  $m < n$  por lo que se trataría de un sistema sub-actuado [16, 17].

Sin embargo, una mayor generalización de la clase de sistemas Hamiltonianos (2.11), se consideran aquellos descritos por coordenadas locales como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= J(x)\partial_x H(x)^T + g(x)u, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= g^T(x)\partial_x H(x)^T, y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}\quad (2.12)$$

con  $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , una matriz antisimétrica ( $J(x) = -J^T(x)$ ) y  $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , la matriz de entradas; donde el par  $(J(x), g(x))$  representan la *estructura de interconexión* del sistema (2.11), siendo  $g(x)$  los *puertos* del mismo. A esta estructura se le conoce como *sistema Hamiltoniano controlado por puerto (PCH)*, [17].

Por lo tanto, podemos ver los sistemas *PCH* no solo como una generalización de las ecuaciones de movimiento de Hamilton, sino como un resultado que naturalmente emerge del estudio de *modelado de redes* de sistemas físicos (complejos) sin elementos disipativos [6].

### 2.1.2.1. Sistemas mecánicos (ejemplo)

La clase de sistemas *PCH* que representan a los sistemas mecánicos se describe en forma general con la siguiente estructura [18]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \partial_x H(x)^T + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q) \end{bmatrix} u \\ y &= B^T(q)\partial_p H(x)^T = B^T(q)M^{-1}(q)p = B^T(q)\dot{q}\end{aligned}\quad (2.13)$$

para  $x = [q^T, p^T]^T$ , el vector de coordenadas generalizadas que representan la posición  $q$  y el momento  $p$ .

Sea el siguiente sistema de péndulo simple que se muestra en la figura (2.1): cuyas coordenadas generalizadas son  $x = [q, p]^T = [\theta, p_\theta]^T$  y las componentes  $x_m$  y  $y_m$  están dadas por:

$$\begin{aligned}x_m &= l \sin \theta \\ y_m &= -l \cos \theta\end{aligned}$$

se tienen las siguientes expresiones para la energía cinética  $K(q, \dot{q})$  y la energía



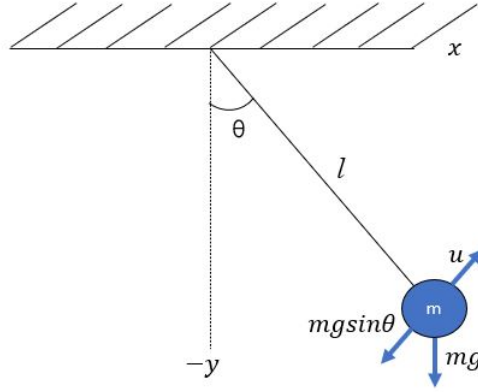


Fig. 2.1: Péndulo Simple

potencial  $V(q)$ :

$$\begin{aligned}
 K(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} \dot{x}_m & \dot{y}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} l \cos \theta \dot{\theta} & l \sin \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \cos \theta \dot{\theta} \\ l \sin \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2}m(l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) \\
 &= \frac{1}{2}m l^2 \dot{\theta}^2 \\
 &= \frac{1}{2}L \dot{q}^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 V(q) &= mgy_m \\
 &= -mgl \cos \theta \\
 &= -mgl \cos q
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde  $L = ml^2$  representa el momento de inercia.

Dado que  $p = M^{-1}(q)\dot{q}$ , para  $M(q) = L$ , la energía cinética en coordenadas  $(q,p)$  sería:

$$K(q, p) = \frac{1}{2L}p^2 \tag{2.16}$$

por lo tanto el Hamiltoniano se representaría como:

$$\begin{aligned}
 H(q, p) &= K(q, p) + V(q) \\
 &= \frac{1}{2L}p^2 - mgl \cos q
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aplicando las ecuaciones (2.11), se tiene la siguiente estructura *PCH*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{J(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} mgl \sin q \\ \frac{p}{L} \end{bmatrix}}_{\partial_x H(x)^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u$$

$$y = \partial_p H(x)^T = \frac{p}{L} \quad (2.18)$$

lo que corresponde a la forma de (2.13) con  $B(q) = 1$ .

### 2.1.2.2. Sistemas eléctricos (ejemplo)

Sea el siguiente circuito LC que se muestra en la Fig (2.2) [16]:

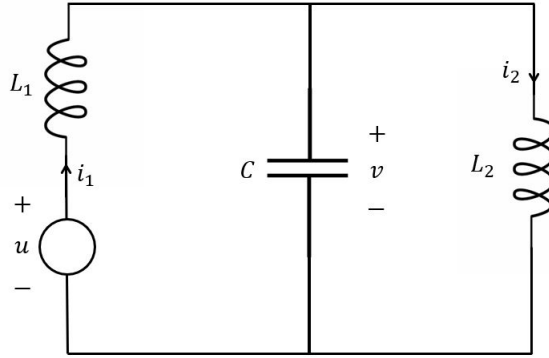


Fig. 2.2: Circuito LC

se tiene el siguiente sistema de ecuaciones aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$C \frac{d}{dt} v = i_1 - i_2 \quad (2.19)$$

$$L_1 \frac{d}{dt} i_1 = -v + u \quad (2.20)$$

$$L_2 \frac{d}{dt} i_2 = v \quad (2.21)$$

definiendo a continuación las coordenadas generalizadas  $[q_1, p_1, p_2]^T$  como:

$$\begin{aligned} q_1 &= C v \\ p_1 &= L_1 i_1 \\ p_2 &= L_2 i_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $q_1$  representa la carga en el capacitor, mientras que  $p_1$  y  $p_2$  el *eslabonamiento de flujo* en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  [16, 19], con el siguiente Hamiltoniano descrito por:

$$H(q_1, p_1, p_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2C} q_1^2 \quad (2.23)$$

Con la definición de las coordenadas generalizadas (2.22) y la función Hamiltoniana (2.23), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones de Hamilton con estructura *PCH*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_1}{C} \\ \frac{p_1}{L_1} \\ \frac{p_2}{L_2} \end{bmatrix}}_{\partial_x H(x)^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g(x)} u$$

$$y = g^T(x) \partial_x H(x)^T = \partial_{p_1} H = \frac{p_1}{L_1} \quad (2.24)$$

en donde la salida  $y = \frac{p_1}{L_1}$  representa la corriente a través del inductor  $L_1$ .

### 2.1.3. Estructura Hamiltoniana controlada por puerto con disipación (PCHD)

En las ecuaciones Euler-Lagrange que describen la dinámica de los sistemas mecánicos descritos por (2.7), normalmente se extienden mediante la aparición de un término disipativo:

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q})^T - \partial_q L(q, \dot{q})^T + \partial_{\dot{q}} R(\dot{q})^T = \tau \quad (2.25)$$

cuya función disipativa  $R(\dot{q})$  se denomina *disipación de Rayleigh* [16], que satisface:

$$\dot{q}^T \partial_{\dot{q}} R(\dot{q})^T \geq 0.$$

En la mayoría de los casos prácticos esta función se suele modelar como una función cuadrática (por ejemplo, fricción viscosa o resistencias constantes) como:

$$R(\dot{q}) \triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T D \dot{q} \quad (2.26)$$

con  $D = D^T$  y diagonal [14]. Por lo tanto, la derivada con respecto a la velocidad sería:

$$\partial_{\dot{q}} R(\dot{q})^T = D \dot{q} = D M^{-1}(q) p \quad (2.27)$$

En en el marco de los sistemas *PCH* descritos por (2.12), la disipación de la energía es incluida por elementos resistivos (normalmente lineales) que absorben parte de la energía suministrada al sistema; esto conlleva a modelar los sistemas *PCHD* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [J(x) - R(x)] \partial_x H(x)^T + g(x)u, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= g^T(x) \partial_x H(x)^T, y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}\quad (2.28)$$

donde  $R(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica positiva semidefinida [17].

### 2.1.3.1. Sistemas mecánicos (ejemplo)

Al igual que en los sistemas *PCH* para sistemas mecánicos representados por (2.13) existe una estructura general para la clase de sistemas mecánicos con estructura *PCHD* [20]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D(q) \end{bmatrix} \partial_x H(x)^T + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q) \end{bmatrix} u \\ y &= B^T(q) \partial_p H(x)^T = B^T(q) M^{-1}(q) p = B^T(q) \dot{q}\end{aligned}\quad (2.29)$$

donde:

$$\begin{aligned}J(x) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \\ R(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(q) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sea el mismo sistema de péndulo simple mostrado en la sección (2.1.2.1) con función de energía cinética (2.14) y energía potencial (2.15) pero ahora con fricción viscosa en el soporte como se muestra en la figura (2.3), donde la función de disipación de Rayleigh está dada por:

$$R(\dot{q}) = \frac{1}{2} b \dot{q}^2 \quad (2.30)$$

para  $b > 0$ , el coeficiente de fricción que al multiplicarse por la velocidad angular  $\dot{q} = \frac{p}{L}$  produce un par que se opone al par externo  $u$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix}}_{J(x)-R(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} mgl \sin q \\ \frac{p}{L} \end{bmatrix}}_{\partial_x H(x)^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u \\ y &= \partial_p H(x)^T = \frac{p}{L}\end{aligned}\quad (2.31)$$

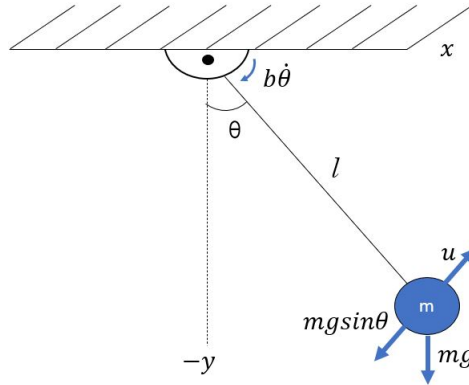


Fig. 2.3: Péndulo Simple con fricción en el soporte

que corresponde a la estructura (2.29) con  $D(q) = b$  y  $B(1) = 1$ .

### 2.1.3.2. Sistemas eléctricos (ejemplo)

Sea el circuito eléctrico  $RLC$  que se muestra en la figura (2.4), con las mismas coordenadas generalizadas  $(q, p)$  de (2.22) y Hamiltoniano (2.23);

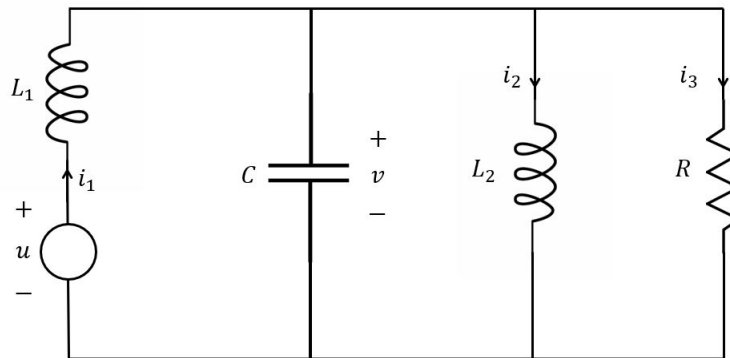


Fig. 2.4: Circuito RLC

se tiene el siguiente sistema de ecuaciones que describen la dinámica del circuito:

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{L_1} - \frac{p_2}{L_2} - \frac{q_1}{RC}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{q_1}{C} + u \quad (2.32)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{q_1}{C} \quad (2.33)$$

por lo tanto se obtiene la siguiente estructura *PCHD* como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J(x)-R(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{q_1}{C} \\ \frac{p_1}{L_1} \\ \frac{p_2}{L_2} \end{bmatrix}}_{\partial_x H(x)^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g(x)} u$$

$$y = g^T(x) \partial_x H(x)^T = \partial_{p_1} H = \frac{p_1}{L_1} \quad (2.34)$$

donde:

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quedando así, la estructura como está definida en (2.28).

## 2.2. Pasividad en sistemas Hamiltonianos

La clase de los sistemas denominados *sistemas pasivos* son aquellos en donde el intercambio de energía con el ambiente juegan un papel muy importante. Se podría decir que un sistema es pasivo si no puede almacenar mas energía de la que se le suministra, siendo la diferencia, la energía disipada [14]. Esto proporciona una herramienta útil para el análisis de *estabilidad- $\mathcal{L}_2$*  en sistemas no-lineales.

Mientras el teorema de *ganancia pequeña* puede ser formulado para todos los espacios  $\mathcal{L}_q$ , el teorema de pasividad se enfoca principalmente en espacios  $\mathcal{L}_2$  [16], con el producto interno definido de manera general como:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t) dt, \quad (2.35)$$

$$f = (f_1, \dots, f_n)^T, g = (g_1, \dots, g_n)^T \in \mathcal{L}_2^n \quad (2.36)$$

Para este caso, se dice que los sistemas (2.12) y (2.28) son:

- *pasivos* si  $\langle u, y \rangle \geq 0$ .

- *sin pérdidas* si  $\langle u, y \rangle = 0$ .
- *pasivos con pre-alimentación a la entrada* si  $\langle u, y \rangle \geq \langle u, \varphi(u) \rangle$  para alguna función  $\varphi$ .
- *estrictamente pasivos a la entrada* si  $\langle u, y \rangle \geq \langle u, \varphi(u) \rangle$  y  $\langle u, \varphi(u) \rangle > 0, \forall u \neq 0$ .
- *pasivos con retroalimentación de salida* si  $\langle u, y \rangle \geq \langle y, \rho(y) \rangle$  para alguna función  $\rho$ .
- *estrictamente pasivos a la salida* si  $\langle u, y \rangle \geq \langle y, \rho(y) \rangle$  y  $\langle y, \rho(y) \rangle > 0, \forall y \neq 0$ .

En todos los casos, las desigualdades deberían cumplirse para todo  $(t, u)$  [21].

Dado que las variables  $u$  y  $y$  son variables conjugadas, el producto interno entre ellos define el flujo de potencia intercambiado con el ambiente del sistema; por ejemplo voltajes y corrientes en sistemas eléctricos, fuerzas y velocidades en sistemas mecánicos. De manera que el balance de energía, para los sistemas representados por (2.28), se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\underbrace{\int_0^t u^T(s)y(s)ds}_{\text{suministrada}} = \underbrace{H[x(t)] - H[x(0)]}_{\text{almacenada}} + \underbrace{\int_0^t \partial_x H[x(s)]R[x(s)]\partial_x H[x(s)]^T ds}_{\text{energía disipada}} \quad (2.37)$$

para todo  $t \geq 0$ . Si el Hamiltoniano  $H(x)$  está acotado por abajo, entonces (2.28) es pasivo con función de almacenamiento  $H(x)$  [4].

Por lo tanto, al evaluar el ritmo de cambio de la energía total del sistema y dada la propiedad de antisimetría de  $J(x)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \underbrace{(\partial_x H)J(x)(\partial_x H^T)}_{=0} - \underbrace{(\partial_x H)R(x)(\partial_x H^T)}_{\geq 0} + y^T u \\ \dot{H} &\leq y^T u \end{aligned} \quad (2.38)$$

lo que demuestra que la energía almacenada no puede ser mayor a la suministrada, entonces el sistema es pasivo.

### 2.2.1. Sistemas mecánicos (ejemplo)

Utilizando de ejemplo nuevamente el sistema de péndulo con fricción en el soporte mostrado en la figura (2.3), con las ecuaciones del movimiento (2.31) y cuyo

Hamiltoniano está dado por:

$$H(q, p) = \frac{1}{2L}p^2 - mgl\cos q \quad (2.39)$$

al derivar (2.39) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{p}{L}\dot{p} + mgl\sin q\dot{q} \\ &= -\frac{p}{L}mgl\sin q - \frac{b}{L^2}p^2 + mgl\sin q\frac{p}{L} + \frac{p}{L}u \\ &= -\frac{b}{L^2}p^2 + yu \leq yu \end{aligned}$$

comprobando que (2.31) es un sistema pasivo.

### 2.2.2. Sistemas eléctricos (ejemplo)

Sea el mismo circuito eléctrico  $RLC$  mostrado en la figura (2.4), cuya dinámica se representa por (2.34) y su función de energía  $H(x)$  es (2.23); el ritmo de cambio de la energía almacenada resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} + \frac{q_1}{C}\dot{q}_1 \\ &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{q_1}{C} + u \\ \frac{q_1}{C} \end{bmatrix} + \frac{q_1}{C}\left(-\frac{q_1}{RC} + \frac{p_1}{L_1} - \frac{p_2}{L_2}\right) \\ &= -\frac{p_1q_1}{L_1C} + \frac{p_1}{L_1}u + \frac{p_2q_1}{L_2C} - \frac{q_1^2}{RC^2} + \frac{q_1p_1}{L_1C} - \frac{q_1p_2}{L_2C} \\ &= yu - \frac{q_1^2}{RC^2} \leq yu \end{aligned}$$

demostrando pasividad en el sistema (2.34).

## 2.3. Transformaciones canónicas en sistemas PCH

Las transformaciones canónicas son una herramienta fundamental en los sistemas conservativos (sobre todo en mecánica clásica), ya que se relacionan fuertemente con la simetría y cantidades conservativas de los mismos; por lo que son útiles en la simplificación de las ecuaciones del movimiento de Hamilton, de manera que estas transformaciones facilitan el análisis de los sistemas mediante un cambio de coordenadas en el espacio de fase, manteniendo las ecuaciones (2.8) y



(2.9) invariantes [22]. En general, las transformaciones canónicas son un cambio de coordenadas que facilita el análisis de estabilidad preservando la estructura Hamiltoniana tanto *PCH* como *PCHD*.

Se dice que el cambio de coordenadas  $(\bar{q}, \bar{p})$  (siendo ambas, funciones de  $(q, p, t)$ ) son canónicas si existe una función  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, t)$  tal que:

$$\dot{\bar{q}}(q, p, t) = \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T \quad (2.40)$$

$$\dot{\bar{p}}(q, p, t) = -\partial_{\bar{q}} \bar{H}^T \quad (2.41)$$

donde las transformaciones  $q \rightarrow \bar{q}$  y  $p \rightarrow \bar{p}$  son conocidas como *transformaciones canónicas* cuya función  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, t)$  toma el lugar de "*nuevo Hamiltoniano*", por lo que esta función debe satisfacer el *Principio de Hamilton* [23]. Por lo tanto:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\bar{p}^T \dot{\bar{q}} - \bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, t)] dt = 0 \quad (2.42)$$

Por lo regular la teoría de transformaciones canónicas se extiende a los sistemas Hamiltonianos variantes en el tiempo con estructura *PCH*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x, t) \partial_x H(x, t)^T + g(x, t)u \\ y &= g^T(x, t) \partial_x H(x, t)^T \end{aligned} \quad (2.43)$$

y estructura *PCHD*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x, t) - R(x, t)] \partial_x H(x, t)^T + g(x, t)u \\ y &= g^T(x, t) \partial_x H(x, t)^T \end{aligned} \quad (2.44)$$

Aquí los sistemas (2.43) y (2.44) no son sin pérdidas ni pasivos, por lo que las transformaciones canónicas ayudan a analizar estas propiedades seleccionando el cambio de coordenadas adecuado.

### 2.3.1. Transformaciones canónicas sin cambio de Hamiltoniano $H(x, t)$

Haciendo referencia al *Lema 3* de [7], en donde menciona que podemos encontrar un cambio de coordenadas  $\bar{x} = \Phi(x, t)$  que transforme al sistema (2.43) en otro conservando la estructura, si y solo si:

$$\partial_x \Phi K \partial_x H^T = \partial_t H \quad (2.45)$$

para  $K(x, t) = -K^T(x, t)$ . Además, si se cumple (2.45), entonces

$$\partial_t H(\Phi^{-1}(\bar{x}, t), t) = \partial_t H(x, t) \quad (2.46)$$

Por lo tanto, para el cambio de coordenadas:

$$\bar{x} = \Phi(x, t)$$

se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \partial_x \Phi(x, t) \dot{x} + \partial_t \Phi(x, t) \\ &= \partial_x \Phi(x, t) J(x, t) \partial_x H(x, t)^T + \partial_x \Phi(x, t) g(x, t) u + \partial_x \Phi(x, t) K(x, t) \partial_x H(x, t)^T \\ &= \underbrace{\partial_x \Phi(x, t) [J(x, t) + K(x, t)] \partial_x \Phi(x, t)^T}_{\bar{J}(\bar{x}, t)} \partial_x H(x, t)^T + \underbrace{\partial_x \Phi(x, t) g(x, t)}_{\bar{g}(\bar{x}, t)} u \end{aligned}$$

de esta manera, el sistema transformado resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{J}(\bar{x}, t) \partial_{\bar{x}} H(\bar{x}, t)^T + \bar{g}(\bar{x}, t) u \\ y &= \bar{g}^T(\bar{x}, t) \partial_{\bar{x}} H(\bar{x}, t)^T \end{aligned} \quad (2.47)$$

en donde se ha hecho el cambio  $x = \Phi^{-1}(\bar{x}, t)$ . De esta última ecuación podemos destacar que el Hamiltoniano  $H(x, t)$  es el mismo que en (2.43) pero ahora representado en coordenadas  $(\bar{x}, t)$ .

### 2.3.2. Transformaciones canónicas con cambio de Hamiltoniano $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$

De acuerdo al *Lema 6* de [7], para cualquier función escalar  $U(x, t)$ , existen un par de funciones  $\Phi(x, t)$  y  $\alpha(x, t)$  que permiten una transformación canónica al sistema (2.43) con el siguiente conjunto de transformaciones:

$$\bar{x} = \Phi(x, t) \quad (2.48)$$

$$\bar{H} = H(x, t) + U(x, t) \quad (2.49)$$

$$\bar{y} = y + \alpha(x, t) \quad (2.50)$$

donde  $\alpha(x, t)$  esta dado por:

$$\alpha(x, t) = g^T(x, t) \partial_x U(x, t)^T \quad (2.51)$$

Además,  $\Phi(x, t)$  implica transformaciones canónicas para cualquier  $U(x, t)$ , si y solo si:

$$\partial_x \Phi (J \partial_x U^T + K \partial_x (H + U)^T) = \partial_t \Phi \quad (2.52)$$

para  $K(x, t) = -K^T(x, t)$ . Esto implica:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \partial_x \Phi \dot{x} + \partial_t \Phi \\ &= \partial_x \Phi J \partial_x H^T + \partial_x \Phi g u + \partial_x \Phi (J \partial_x U^T + K \partial_x (H + U)^T) \\ &= \underbrace{\partial_x \Phi (J + K) \partial_x \Phi^T}_{\bar{J}(\bar{x}, t)} \partial_{\bar{x}} \bar{H}^T + \underbrace{\partial_x \Phi g}_{\bar{g}(\bar{x}, t)} u \end{aligned}$$

Dado que  $\alpha = \bar{y} - y$  (nótese que en (2.47)  $y = \bar{y}$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{g}^T \partial_{\bar{x}} \bar{H}^T - g^T \partial_x H^T \\ &= g^T \partial_x \Phi^T \partial_{\bar{x}} (H + U)^T - g^T \partial_x H^T \\ &= g^T \partial_x \Phi^T (\partial_x \Phi)^{-T} \partial_x (H + U)^T - g^T \partial_x H^T \\ &= g^T \partial_x H^T + g^T \partial_x U^T - g^T \partial_x H^T \\ &= g^T \partial_x U^T \end{aligned}$$

lo que comprueba (2.51).

Por lo tanto, con las transformaciones canónicas (2.48), (2.49) y (2.50) junto con la matriz  $\bar{J}(\bar{x}, t)$ , se obtiene el siguiente sistema transformado que preserva la estructura *PCH*:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{J}(\bar{x}, t) \partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{x}, t)^T + \bar{g}(\bar{x}, t) u \\ \bar{y} &= \bar{g}^T(\bar{x}, t) \partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{x}, t)^T \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ejemplo: Sea el siguiente sistema variante en el tiempo mostrado en [7]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q H^T \\ \partial_p H^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q H^T \\ \partial_p H^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (1 + a \sin t) p \end{aligned} \quad (2.54)$$

con el Hamiltoniano  $(1/2)(1 + a \sin t)p^T p$  y una constante  $a$ . Considerando la transformación canónica con  $U = -(a \sin t)/2 p^T p$  y aplicando (2.52) se obtiene:

$$\partial_x \Phi \left( \begin{bmatrix} -(a \sin t) p \\ 0 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \partial_t \Phi$$

Si se selecciona  $K = 0$ , se obtiene una solución a la ecuación diferencial parcial (EDP) anterior como:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \Phi(x, t) = \begin{bmatrix} q + (a \cos t)p \\ p \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema transformado mediante transformaciones canónicas en coordenadas  $\bar{x} = [\bar{q}^T, \bar{p}^T]^T$  y Hamiltoniano  $\bar{H} = (1/2)\bar{p}^T p$  resulta en:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{\bar{q}} \bar{H}^T \\ \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a \cos t)I \\ I \end{bmatrix} u \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} (a \cos t)I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{\bar{q}} \bar{H}^T \\ \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T \end{bmatrix} = \bar{p} = p \end{aligned} \quad (2.55)$$

Se puede apreciar que ahora el Hamiltoniano  $\bar{H}(\bar{x})$  no depende explícitamente del tiempo, por lo que este hecho implica que el sistema es pasivo (sin pérdidas); mientras que el sistema original (2.54) no lo es [7].

### 2.3.3. Transformaciones canónicas generalizadas

A diferencia de las secciones anteriores, en esta se introduce el concepto de *transformación canónica dual* en donde se hace un cambio en la entrada, es decir, una transformación en la retroalimentación para el sistema Hamiltoniano generalizado (2.43); de manera que el par de transformaciones:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \Phi(x, t) \\ \bar{u} &= u + \beta(x, t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

cuyo cambio de coordenadas  $x \rightarrow \bar{x}$  y entrada  $u \rightarrow \bar{u}$  se dicen que son una *transformación canónica dual* si transforman (2.43) en otro sistema Hamiltoniano generalizado variante o invariante en el tiempo [7].

De acuerdo con el *Lema 11* de [7], para cualquier función vectorial  $\beta(x, t)$ , existe un cambio de coordenadas  $\Phi(x, t)$  que permite una *transformación canónica dual*, si y solo si:

$$\partial_x \Phi (g\beta + K\partial_x H^T) = \partial_t \Phi \quad (2.57)$$

para  $K(x, t) = -K^T(x, t)$ .

Sin embargo, las transformaciones canónicas mostradas en (2.3.2) y la transformación canónica dual (2.56) pueden combinarse en un solo conjunto de transformaciones como:

$$\bar{x} = \Phi(x, t) \quad (2.58)$$

$$\bar{H} = H(x, t) + U(x, t) \quad (2.59)$$

$$\bar{y} = y + \alpha(x, t) \quad (2.60)$$

$$\bar{u} = u + \beta(x, t) \quad (2.61)$$

cuyo cambio de coordenadas  $x \rightarrow \bar{x}$ , Hamiltoniano  $H \rightarrow \bar{H}$ , salida  $y \rightarrow \bar{y}$  y entrada  $u \rightarrow \bar{u}$  se les denomina *Transformaciones canónicas generalizadas*.

Por lo tanto, con estas transformaciones se tiene que para toda función escalar  $U(x, t)$  y función vectorial  $\beta(x, t)$ , existe una transformación o cambio de coordenadas  $\Phi(x, t)$  que permite una *transformación canónica generalizada*, si y solo si:

$$\partial_x \Phi \left( J \partial_x U^T + K \partial_x (H + U)^T + g \beta \right) = \partial_t \Phi \quad (2.62)$$

para  $K(x, t) = -K^T(x, t)$ , de acuerdo al *Teorema 13* de [7].

De forma similar, este teorema puede ser aplicado para los sistemas *PCHD* representados con (2.44), en donde existe un cambio de coordenadas  $\Phi(x, t)$  que satisfaga la EDP:

$$\partial_x \Phi \left( (J - R) \partial_x U^T + (K - S) \partial_x (H + U)^T + g \beta \right) = \partial_t \Phi \quad (2.63)$$

para  $S(x, t) = S^T(x, t)$  que satisface  $R + S \geq 0$ . Además, el cambio de salida  $\alpha(x, t)$  y las matrices  $\bar{J}(\bar{x}, t)$ ,  $\bar{R}(\bar{x}, t)$  y  $\bar{g}(\bar{x}, t)$  están dadas por:

$$\alpha(\bar{x}, t) \triangleq g^T(x, t) \partial_x U^T(x, t) \quad (2.64)$$

$$\bar{J}(\bar{x}, t) \triangleq \partial_x \Phi (J + K) \partial_x \Phi^T \quad (2.65)$$

$$\bar{R}(\bar{x}, t) \triangleq \partial_x \Phi (R + S) \partial_x \Phi^T \quad (2.66)$$

$$\bar{g}(\bar{x}, t) \triangleq \partial_x \Phi g(x, t) \quad (2.67)$$

para  $x = \Phi^{-1}(\bar{x}, t)$  [3].

## 2.4. Control basado en pasividad (PBC)

El control basado en pasividad (PBC), primeramente introducido en [24], es una de las técnicas muy revolucionarias en la teoría de control debido a su interpretación

física que este presenta, estableciendo una *lingua franca* entre practicantes de diferentes ramas de la ingeniería; además de que se utiliza no solo en la estabilidad, sino también en el desempeño del sistema [25].

Esta técnica que puede ser considerada como una extensión de la muy conocida técnica de *modelado de energía con inyección de amortiguamiento* (en inglés: *energy-shaping plus damping injection*) introducida para resolver el problema de regulación por medio de retroalimentación de estados para sistemas robóticos completamente actuados [14]. En forma general, un control basado en pasividad se divide en dos partes:

$$PBC = \text{Modificación de energía} + \text{Asignación de disipación} \quad (2.68)$$

en donde la parte de *modificación de energía* se refiere al cambio de la energía potencial logrando el objetivo de *pasividad*, mientras que la parte de *asignación de disipación* refuerza la propiedad de *pasividad estrictamente a la salida* para resolver el problema de regulación o set-point.

Otra de las alternativas muy reconocidas para el control basado en pasividad, es el control basado en pasividad por medio de interconexión y asignación de disipación o mejor conocido como *IDA-PBC*, que se extiende a una mayor clase de sistemas partiendo de la estructura *PCH* o *PCHD*; cuyo principal objetivo es encontrar un controlador por medio de una retroalimentación de estados estática  $u = \beta(x)$  tal que la dinámica en lazo cerrado sea un sistema *PCHD* de la forma:

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \partial_x H_d x^T \quad (2.69)$$

donde la función de energía deseada  $H_d(x)$  tiene un mínimo local estricto en el punto de equilibrio deseado  $x_d$ , y  $J_d(x) = -J_d^T(x)$ ,  $R_d(x) = R_d^T(x)$  son matrices de *interconexión* y *disipación* deseadas respectivamente.

Esta estrategia establece que para los sistemas de la forma (2.28) se pueden fijar las matrices  $J_a$  y  $R_a$  para satisfacer la siguiente EDP:

$$\begin{aligned} g^\perp(x) [J(x) + J_a(x) - (R(x) + R_a(x))] \partial_x H_a(x)^T \\ = -g^\perp(x) [J_a(x) - R_a(x)] \partial_x H(x)^T \end{aligned} \quad (2.70)$$

en términos de  $H_a(x)$ , siendo  $g^\perp(x)$  un aniquilador por izquierda de  $g(x)$ , i.e.  $g^\perp g(x) =$

0, y en donde:

$$J_d(x) \triangleq J(x) + J_a(x) = -J_d^T(x) \quad (2.71)$$

$$R_d(x) \triangleq R(x) + R_a(x) = R_d^T(x) \quad (2.72)$$

$$H_d \triangleq H(x) + H_a(x) \quad (2.73)$$

Una vez solucionado (2.70), el control puede ser directamente calculado con la siguiente fórmula que presenta [4]:

$$\begin{aligned} \beta(x) = & [g^T(x)g(x)]^{-1} g^T(x) \{ [J(x) + J_a(x) - (R(x) + R_a(x))] \partial_x H_a(x)^T \\ & + [J_a(x) - R_a(x)] \partial_x H(x)^T \} \end{aligned} \quad (2.74)$$

De igual manera, se pueden explotar las propiedades vistas en la sección (2.3.2) para resolver el problema de regulación por medio de transformaciones canónicas generalizadas que se verá en la siguiente sección.

### 2.4.1. Control de Set-point para sistemas PCH/PCHD mediante transformaciones canónicas

Considerando un sistema representado por (2.12) y una transformación canónica generalizada con  $U(x, t)$  y  $\beta(x, t)$  tal que  $H + U \geq 0$ , el mapeo *entrada-salida*  $\bar{u} \mapsto \bar{y}$  es pasivo con función de almacenamiento  $\bar{H}$  que satisface  $\partial_t \bar{H} \leq 0$  si y solo si [7]:

$$\partial_x(H + U) (J\partial_x U^T + g\beta) \geq \partial_t(H + U) \quad (2.75)$$

Suponiendo que se cumple (2.75) y que  $H + U$  sea una función positiva definida y que además el sistema transformado sea *detectable de estado cero* (en inglés: zero-state detectable)<sup>1</sup> con respecto a  $x$ , entonces la retroalimentación unitaria  $\bar{u} = -\bar{y}$  permite que el sistema sea *uniformemente asintóticamente estable*, de acuerdo al *Teorema 15* de [7].

Se puede apreciar que para el caso invariante en el tiempo se obtiene un  $\beta$  similar al de la técnica de *IDA-PBC*, ya que (2.63) resultaría en:

$$\partial_x \Phi \left( (J - R) \partial_x U^T + (K - S) \partial_x (H + U)^T + g\beta \right) = 0$$

---

<sup>1</sup>Se dice que un sistema con entrada  $u$ , salida  $y$  y estado  $x$  es detectable de estado cero, si  $u, y \equiv 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$

esto implicaría:

$$\beta = - [g^T(x)g(x)]^{-1} g^T(x) \left[ (J(x) - R(x)) \partial_x U(x)^T + (K(x) - S(x)) \partial_x (H + U)^T(x) \right]$$

que es el mismo  $\beta$  que en (2.74) a diferencia del signo “-” y además las matrices son:

$$K(x) = J_a(x)$$

$$S(x) = R_a(x)$$

$$U(x) = H_a(x)$$

y cuya ley de control es  $u = -\beta(x) + \bar{u}$  para  $\bar{u} = 0$ .

#### 2.4.1.1. Control PD con compensación de gravedad y PID

En esta sección se considerará el caso para los sistemas mecánicos, aunque esta teoría se puede aplicar para una amplia cantidad de sistemas incluyendo eléctricos y electromecánicos.

- Control PD con compensación de gravedad

Sea el sistema mecánico representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D \end{bmatrix} \partial_x H^T + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \\ y &= \partial_p H^T = M^{-1}p \end{aligned} \quad (2.76)$$

cuya función de energía es  $H(x) = (1/2)p^T M^{-1}p + V(q)$  <sup>2</sup>.

Suponiendo una función de energía deseada  $\bar{H} = (1/2)p^T M^{-1}p + \bar{V}(\bar{q})$ , en donde la función  $\bar{V}(\bar{q})$  representa la energía potencial virtual deseada cuyo valor mínimo local se encuentra en el origen, i.e. cuando  $\bar{q} = 0$ ; un cambio de coordenadas podría ser:

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q - q_d \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

---

<sup>2</sup>Por simplicidad en la escritura, se empleará la matriz  $M$  como la matriz de inercia  $M(q)$  y otras funciones como  $H, U, \beta, \alpha$ , etc. que dependan de  $x$  en los siguientes capítulos



esto implica que

$$\begin{aligned}\partial_x \Phi &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \partial_t \Phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \partial_x U^T &= \left[ -\partial_q V(q)^T + \partial_q \bar{V}(\bar{q})^T \right]\end{aligned}$$

debido a que en el problema de regulación o set-point, la posición deseada  $q_d$  no depende explícitamente del tiempo.

Suponiendo ahora que las matrices  $K$  y  $S$  de (2.63) sean iguales a cero, se obtiene la siguiente EDP:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -G + \partial_q \bar{V}(\bar{q})^T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (2.78)$$

donde la matriz  $G = G(q) = \partial_q V^T(q)$  representa el vector de pares gravitacionales; el vector  $\beta$  resultaría en

$$\beta = \partial_q \bar{V}(\bar{q})^T - G$$

que satisface (2.78). Además, las matrices  $\bar{J}$  y  $\bar{R}$  resultarían iguales a las matrices  $J$  y  $R$  respectivamente. Por lo tanto, el sistema transformado es:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} &= \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T = M^{-1} \bar{p} = M^{-1} p = y\end{aligned} \quad (2.79)$$

nótese que  $\alpha = 0$  al aplicar (2.64). Nótese también que la función de energía deseada  $\bar{H}$  satisface  $\partial_t \bar{H} \leq 0$ , es decir:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{H}} &= \partial_{\bar{x}} \bar{H} \dot{\hat{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_{\bar{q}} \bar{V}(\bar{q}) & \bar{p}^T M^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{\bar{q}} \bar{V}^T(\bar{q}) \\ M^{-1} \bar{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{u} \right\} \\ &= -\bar{p}^T M^{-1} \partial_{\bar{q}} \bar{V}^T + \partial_{\bar{q}} \bar{V}(\bar{q}) M^{-1} \bar{p} - \bar{p}^T M^{-1} D M^{-1} \bar{p} + \bar{p}^T M^{-1} \bar{u} \\ &= -\bar{p}^T M^{-1} D M^{-1} \bar{p} + \bar{p}^T M^{-1} \bar{u} \leq 0\end{aligned}$$

dado que la función es negativa semidefinida, al aplicar el *Teorema de LaSalle invariante* [21], se demuestra estabilidad asintótica global en el origen con

una retroalimentación unitaria  $\bar{u} = -\bar{y}$ , siendo  $\bar{V}(0) = 0$ . Sin embargo, la retroalimentación puede no ser necesariamente unitaria, es decir, existe una retroalimentación  $\bar{u} = -C(x)\bar{y}$  para  $C(x) \geq \varepsilon I > 0$  que permita pasividad en (2.79) [3].

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D - C(x) \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}^T \\ \bar{y} &= \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T = M^{-1} \bar{p} = M^{-1} p = y \end{aligned} \quad (2.80)$$

así, la ley de control se define como:

$$u = -\beta - C(x)\bar{y} = -\partial_q \bar{V}(\bar{q})^T + G - C(x)M^{-1}p \quad (2.81)$$

Este resultado se puede ver en el *el corolario 17 y 1* de [5, 7], respectivamente.

Si se define  $\bar{V}(\bar{q}) = (1/2)\bar{q}^T K_p \bar{q}$ , para  $K_p > 0$  y  $C(x) = K_d > 0$ , la ley de control quedaría como:

$$u = -K_p \bar{q} + G - K_d M^{-1} p = -K_p (q - q_d) + G - K_d \dot{q} \quad (2.82)$$

tal como lo presentan [1, 14].

De esta ley de control se puede destacar que

$$u = \underbrace{-K_p \bar{q} + G}_{\text{Modificación de energía}} + \underbrace{(-K_d M^{-1} p)}_{\text{Asignación de disipación}}$$

de manera que la parte proporcional modifica la energía potencial y la parte derivativa agrega disipación al sistema.

En términos físicos, por ejemplo para el sistema de péndulo simple de la figura (2.3), la constante proporcional  $K_p$  representa la rigidez de un resorte virtual agregado al péndulo y la constante derivativa  $K_d$  es el coeficiente de fricción viscosa de un amortiguador virtual sujetos al punto de equilibrio deseado  $q_d$  como se muestra en la figura (2.5).

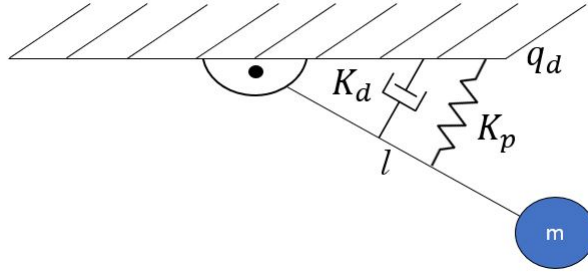


Fig. 2.5: Representación física del controlador PD con compensación de gravedad en un péndulo simple.

- Control PID

Del controlador PD con compensación de gravedad visto anteriormente, es necesario conocer el vector de pares gravitacionales  $G(q) \neq 0$ , ya que sin este término, el valor de la posición en estado estacionario tendría un error con respecto al punto de equilibrio deseado  $q_d$ . Entonces, desde el punto de vista del control automático, parece natural introducir un término *integral* al controlador *PD* con el fin de satisfacer el objetivo del control de posición  $q = q_d$  y llevar al error de posición  $\tilde{q} = q - q_d$  a cero [1].

Sea el siguiente cambio de coordenadas:

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q - q_d \\ p + K_i \int_{t_0}^t f(q, t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

en donde  $K_i > 0$  y  $f(q, t)$  es una función arbitraria de la posición y el tiempo, y la función de energía deseada definida como:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x) &= H(x) + \frac{1}{2}(q - q_d)^T K_p (q - q_d) \\ &= \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + V(q) + \frac{1}{2} (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \end{aligned} \quad (2.84)$$

lo cual implica

$$\bar{H}(\bar{x}) = \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \bar{p} - K_i \int_{t_0}^t f(q, t) dt \right]^T M^{-1} \left[ \bar{p} - K_i \int_{t_0}^t f(q, t) dt \right]}_{H(\Phi^{-1}(\bar{x}))} + V(\bar{q} + q_d) + \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q} \quad (2.85)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \quad (2.86)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{x}}\bar{H}(\bar{x})^T &= \begin{bmatrix} \underbrace{\partial_{\bar{q}}H(\Phi^{-1}(\bar{x}))^T + K_p\bar{q}}_{\partial_q H^T} \\ M^{-1} \underbrace{\left[ \bar{p} - K_i \int_{t_0}^t f(q, t) dt \right]}_p \end{bmatrix} \\ \partial_x U^T &= \begin{bmatrix} K_p(q - q_d) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \partial_x \Phi &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \partial_t \Phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ K_i f(q, t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

nótese que  $\alpha = 0$  de acuerdo a (2.64).

Entonces, al aplicar (2.63) para  $K = S = 0$ , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p(q - q_d) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_i f(q, t) \end{bmatrix}$$

de modo que  $\beta = K_p(q - q_d) + K_i f(q, t)$  satisface (2.63). Nótese que  $\beta$  no incluye la compensación de pares gravitacionales  $G$ . Además, si  $f(q, t) = \int_{t_0}^t (q - q_d) dt$  se tiene la siguiente ley de control:

$$u = -\beta - C(x)\bar{y} = -K_p(q - q_d) - K_i \int_{t_0}^t (q - q_d) dt - K_d M^{-1} p \quad (2.87)$$

para  $C(x) = K_d$ , tal y como está reportado en [1, 14].

## Capítulo 3

# Seguimiento de trayectoria para una clase de sistemas PCH mediante transformaciones canónicas generalizadas

El control de seguimiento de trayectoria ha atraído mucho la atención en la comunidad científica en los últimos años por ser un campo relativamente recién estudiado para los sistemas Hamiltonianos y Euler-Lagrange en general [11]. Sin embargo, se han hecho grandes aportaciones en el control de seguimiento para los sistemas mecánicos con estructura *PCH*, específicamente en robots manipuladores, todos ellos con diferentes técnicas pero cuyas leyes de control son muy similares. En vista de que los sistemas Hamiltonianos comparten una estructura que los define, es sensato pensar que las leyes de control de seguimiento compartan cierta relación cercana entre ellas, es decir, que se puedan apreciar fácilmente qué parámetros modifican la energía del sistema para cumplir con el objetivo de control.

A pesar de que en el problema de regulación se modifica sólo la energía potencial para establecer el equilibrio en el punto deseado, el control de seguimiento requiere no solo modificar la energía potencial, sino también la energía cinética; sin embargo, es importante enfatizar que la función de energía que se asigna en lazo cerrado por medio del controlador no es una función de energía que defina las ecuaciones del movimiento. Es decir, la representación física de la modificación de la energía se rompe para el caso del control de seguimiento, aunque se pudiera seguir entendiendo

este paso como *modificación de la energía* o *pasivación* con función de energía de *almacenamiento* deseada [14].

Aunque parece simple la idea de que la estructura *PCH* facilite el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov utilizando la función de energía como función candidata, no es tarea fácil para el caso del control de seguimiento al diseñar un controlador que preserve la estructura *PCH* en lazo cerrado para hacer este tipo de análisis, esto se debe a que la función de energía a transformar debe ser variante en el tiempo; lo cual implica que la propiedad de pasividad no se cumpla en general y se requiera aplicar una técnica de estabilización para sistemas Hamiltonianos por medio de controladores variantes en el tiempo [26].

En el capítulo anterior se mencionaron las transformaciones canónicas como una forma de facilitar el análisis de pasividad en los sistemas Hamiltonianos. Sin embargo, se han hecho estudios para tratar el problema de seguimiento mediante las transformaciones canónicas generalizadas, cuyo propósito se enfoca en diseñar un sistema de error mediante un cambio de coordenadas, de manera que el problema de seguimiento se vuelva uno de estabilización y se empleen las técnicas vistas anteriormente [3].

Como se mencionó antes, las transformaciones canónicas generalizadas, como método de diseño de un sistema de error de seguimiento, busca un cambio de coordenadas  $\bar{x} = \Phi(x, t)$  con la restricción  $\bar{x} = 0 \Rightarrow x = x_d(t)$  y  $(H + U)(x, t) \geq (H + U)(x_d(t), t) = 0, \forall t, x$ , ya que es una condición fundamental en el control de seguimiento puesto que  $\bar{H}$  juega el papel de función de Lyapunov (cuando se pretende estabilizar el sistema de error); de forma que el sistema transformado sea un sistema de error del original:

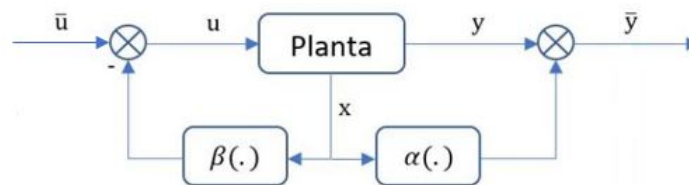


Fig. 3.1: Sistema de error de seguimiento en lazo abierto

con el siguiente conjunto de transformaciones canónicas:

$$\bar{x} = \Phi(x, t) \quad (3.1)$$

$$\bar{H} = H(x, t) + U(x, t) \quad (3.2)$$

$$\bar{y} = y + \alpha(x, t) \quad (3.3)$$

$$\bar{u} = u + \beta(x, t) \quad (3.4)$$

de manera que al aplicar la *Proposición 1* de [3], el sistema de error es pasivo con función de almacenamiento  $\bar{H}(\bar{x}, t)$ , además, la retroalimentación  $\bar{u} = -C(x, t)\bar{y}$  hace que el sistema de error en lazo cerrado:

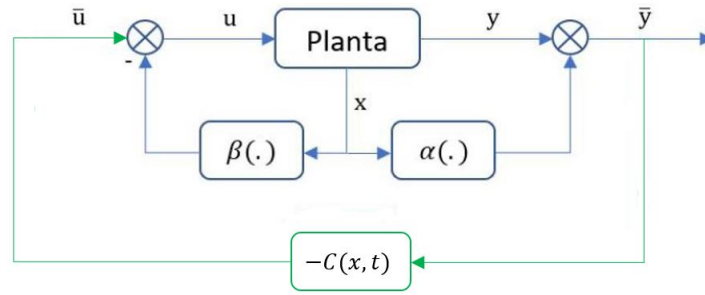


Fig. 3.2: Sistema de error de seguimiento en lazo cerrado

converja hacia el origen, es decir  $(\bar{u}, \bar{y}) \rightarrow 0$ .

En éste capítulo se abordará el control de seguimiento de trayectoria para una clase específica de sistemas Hamiltonianos, en éste caso en particular, los sistemas mecánicos con estructura *PCH* mediante transformaciones canónicas generalizadas.

### 3.1. Desarrollo de marco común para el control de seguimiento (sin perturbación)

Como se vio en el capítulo anterior, los sistemas mecánicos tienen una representación general que los define por medio de la estructura *PCH/PCHD*, que por conveniencia, definimos nuevamente en (3.5),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -D(q) \end{bmatrix} \partial_x H(x)^T + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q) \end{bmatrix} u \\ y &= B^T(q) \partial_p H(x)^T = B^T(q) M^{-1}(q) p = B^T(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde si  $D(q) = 0$ , es un sistema mecánico sin fricción o sistema mecánico con estructura *PCH*.

La idea principal de esta sección es hacer uso de las transformaciones canónicas generalizadas para crear una estructura genérica que nos permita obtener diferentes algoritmos de control de seguimiento mediante modificaciones en los parámetros del sistema transformado. Para este caso específico, se tratará de sistemas mecánicos completamente actuados sin fricción y sin perturbación en la entrada, es decir, para  $B(q) = I$ ,  $D(q) = 0$  y  $u = \tau + \tau_d$  con  $\tau_d = 0$ ; quedando el sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \partial_x H(x)^T + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \\ y &= \partial_p H(x)^T = M^{-1}(q)p = \dot{q} \end{aligned} \quad (3.6)$$

con función de energía  $H(x) = (1/2)p^T M^{-1}p + V(q)$ .

Se pretende encontrar una ley de control  $u$  que asegure

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d(t) \quad (3.7)$$

Sea el siguiente cambio de coordenadas

$$\Phi(x, t) = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - q_d(t) \\ p - p_d(t) + \Gamma \nabla \bar{V}(\bar{q}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

por lo tanto

$$\partial_x \Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Gamma \nabla^2 \bar{V} & I \end{bmatrix}, \partial_t \Phi = \begin{bmatrix} -\dot{q}_d(t) \\ -\dot{p}_d(t) - \Gamma \nabla^2 \bar{V} \dot{q}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

para  $\Gamma > 0$ , una matriz constante y  $\bar{V}(\bar{q})$ , la energía potencial deseada cuyo gradiente se representa por  $\nabla \bar{V}(\bar{q})$  y satisface  $\bar{V}(0) = 0$ . Nótese que ahora las trayectorias deseadas  $q_d(t)$  y  $p_d(t)$  son variantes en el tiempo <sup>1</sup>, y por lo tanto sus derivadas son diferentes de cero, a diferencia del caso para el control de regulación.

Sea también la siguiente función de energía deseada

$$\bar{H}(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} + \bar{V}(\bar{q}) \quad (3.10)$$

---

<sup>1</sup>Por simplicidad en la escritura, se omitirá especificar que  $q_d$  y  $p_d$  son dependientes explícitamente del tiempo ( $t$ ), ya que éste capítulo trata sobre control de seguimiento.



donde  $M_d$  es una matriz constante tal que  $M_d = M_d^T > 0$ . Esto implica que

$$U(x) = -H(x) + \frac{1}{2} [p - p_d + \Gamma \nabla \bar{V}(q - q_d)]^T M_d^{-1} [p - p_d + \Gamma \nabla \bar{V}(q - q_d)] + \bar{V}(q - q_d) \quad (3.11)$$

Se proponen las matrices  $K(x)$  y  $S(x)$  de la siguiente forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d - I \\ I - M_dM^{-1} & M_dM^{-1}(\nabla^2 \bar{V})^T \Gamma^T - \Gamma(\nabla^2 \bar{V})M^{-1}M_d \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$S = \begin{bmatrix} M^{-1}\Gamma & -M^{-1}\Gamma(\nabla^2 \bar{V}^T)\Gamma^T \\ -\Gamma(\nabla^2 \bar{V})\Gamma^T M^{-1} & \Gamma(\nabla^2 \bar{V})M^{-1}\Gamma(\nabla^2 \bar{V})^T \Gamma^T \end{bmatrix}$$

asumiendo que  $M^{-1}\Gamma = \Gamma^T M^{-1}$  y  $\nabla^2 \bar{V} = \nabla^2 \bar{V}^T$ , se tiene que  $K = -K^T$  y  $S = S^T$ . Con el fin de satisfacer la EDP

$$\partial_x \Phi \left( (J - R) \partial_x U^T + (K - S) \partial_x (H + U)^T + g\beta \right) = \partial_t \Phi \quad (3.14)$$

con  $R = 0$ ,  $\beta$  puede ser seleccionado como:

$$\beta = -\dot{p}_d(t) - \partial_q H^T + M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - \Gamma \nabla^2 \bar{V} (M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p}) \quad (3.15)$$

Por lo tanto, con los gradientes de  $U$  y  $H + U$  definidos como:

$$\partial_x \Phi (J - R) \partial_x U^T = \begin{bmatrix} -M^{-1}p + M_d^{-1}\bar{p} \\ -\Gamma(\nabla^2 \bar{V})M^{-1}p + \partial_q H^T - \nabla \bar{V} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\partial_x \Phi (K - S) \partial_x (H + U)^T = \begin{bmatrix} M^{-1}(p - p_d) - M_d^{-1}\bar{p} \\ (I - M_d M^{-1})\nabla \bar{V} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

entonces se tiene lo siguiente:

$$\partial_x \Phi (J - R) \partial_x U^T + \partial_x \Phi (K - S) \partial_x (H + U)^T + \partial_x \Phi g\beta = \begin{bmatrix} -M^{-1}p_d \\ -\dot{p}_d - \Gamma(\nabla^2 \bar{V})M^{-1}p_d \end{bmatrix}$$

asumiendo que  $p_d = M\dot{q}_d$ , se satisface (3.14).

El sistema transformado adopta ahora la siguiente forma en lazo abierto:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -M^{-1}\Gamma & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & 0 \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}}\bar{H}(\bar{x})^T + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} &= \bar{g}^T(\bar{x})\partial_{\bar{x}}\bar{H}^T(\bar{x}) = M_d^{-1}\bar{p}\end{aligned}\quad (3.18)$$

en donde el cambio de salida  $\alpha$  y las matrices  $\bar{J}$ ,  $\bar{R}$  y  $\bar{g}$  dados por:

$$\alpha(\bar{x}, t) \triangleq g^T(x, t)\partial_x U^T(x, t) \quad (3.19)$$

$$\bar{J}(\bar{x}, t) \triangleq \partial_x \Phi (J + K) \partial_x \Phi^T \quad (3.20)$$

$$\bar{R}(\bar{x}, t) \triangleq \partial_x \Phi (R + S) \partial_x \Phi^T \quad (3.21)$$

$$\bar{g}(\bar{x}, t) \triangleq \partial_x \Phi g(x, t) \quad (3.22)$$

son lo siguiente:

$$\alpha = \partial_p U^T = -M^{-1}p + M_d^{-1}\bar{p} \quad (3.23)$$

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} M^{-1}\Gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\bar{g} = g = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Suponemos que se cumple el *Teorema 1 (iii)* de [3], al retroalimentar el sistema mediante una función  $C(x) \geq \epsilon I > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  como se mostró en la figura (3.2), se tiene que el sistema (3.18) en lazo cerrado resulta en:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -M^{-1}\Gamma & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & -C(x) \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}}\bar{H}^T(\bar{x}) \\ \bar{y} &= \bar{g}^T(\bar{x})\partial_{\bar{x}}\bar{H}^T(\bar{x}) = M_d^{-1}\bar{p}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{H}} &= \partial_{\bar{x}}\bar{H}\dot{\bar{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \nabla\bar{V}^T & \bar{p}^T M_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M^{-1}\Gamma & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & -C(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla\bar{V} \\ M_d^{-1}\bar{p} \end{bmatrix} \\ &= -\nabla\bar{V}^T M^{-1}\Gamma \nabla\bar{V} - \bar{p}^T M^{-1} \nabla\bar{V} + \nabla\bar{V} M^{-1} \bar{p} - \bar{p}^T M_d^{-1} C(x) M_d^{-1} \bar{p} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla\bar{V}^T (M^{-1}\Gamma + \Gamma^T M^{-1}) \nabla\bar{V} - \bar{p}^T M_d^{-1} C(x) M_d^{-1} \bar{p}\end{aligned}$$

nótese que  $C(x)$  puede estar formado por una parte simétrica  $R_2 = R_2^T > 0$  y otra antisimétrica  $J_2 = -J_2^T$ , de manera que con  $C(x) = R_2 + J_2$  y  $M^{-1}\Gamma + \Gamma^T M^{-1} > 0$ , el sistema (3.27) es globalmente asintóticamente estable en el origen como lo presenta [9].

Mediante la transformación canónica (3.4), la ley de control quedaría como:

$$u = \dot{p}_d + \partial_q H^T - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - C(x) M_d^{-1} \bar{p} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} (M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p}) \quad (3.28)$$

Cabe mencionar que la selección de las matrices  $K(x)$  y  $S(x)$  es parte de la principal aportación de esta sección, ya que fueron propuestas de tal forma que, en conjunto con el cambio de coordenadas (3.8), satisficieran la EDP (3.14) para realizar las transformaciones canónicas generalizadas y obtener la ley de control (3.28).

### 3.1.1. Prueba de estabilidad en lazo cerrado

De la ley de control (3.28) aplicado al sistema (3.6), se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\dot{q} = M^{-1} p \quad (3.29)$$

$$\dot{p} = \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - C(q, p) M_d^{-1} \bar{p} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} \underbrace{(M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p})}_{M^{-1}(\bar{p})} \quad (3.30)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \tilde{p} + \Gamma \nabla \bar{V}(\bar{q}) \\ \tilde{p} &= p - p_d(t) \\ \bar{q} &= q - q_d(t) \\ \bar{V}(0) = 0 &\Rightarrow q = q_d(t) \end{aligned}$$

Se puede notar que

$$\dot{p} - \dot{p}_d - \Gamma \nabla^2 \bar{V} = \dot{\tilde{p}}$$

por lo que de esta expresión se obtiene el siguiente sistema de error:

$$\dot{\bar{q}} = M^{-1} \bar{p} - M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} \quad (3.31)$$

$$\dot{\tilde{p}} = -M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - C(q, p) M_d^{-1} \bar{p} \quad (3.32)$$

Al definir el Hamiltoniano  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$  como una función candidata de Lyapunov de la siguiente manera:

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} + \bar{V}(\bar{q}) \quad (3.33)$$

se tiene que la derivada temporal cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}} &= \partial_{\bar{q}} \bar{H} \dot{\bar{q}} + \partial_{\bar{p}} \bar{H} \dot{\bar{p}} \\ &= (\nabla \bar{V})^T (M^{-1} \bar{p} - M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V}) + \bar{p}^T M_d^{-1} (M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - C(q, p) M_d^{-1} \bar{p}) \\ &= (\nabla \bar{V})^T M^{-1} \bar{p} - (\nabla \bar{V})^T M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - \bar{p}^T M_d^{-1} C(q, p) M_d^{-1} \bar{p} \\ &= -(\nabla \bar{V})^T M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - \bar{p}^T M_d^{-1} C(q, p) M_d^{-1} \bar{p} \leq 0 \end{aligned}$$

De este resultado, se comprueba

$$\begin{aligned} \nabla \bar{V} \rightarrow 0 &\Rightarrow q \rightarrow q_d(t), \\ \bar{p} \rightarrow 0, q \rightarrow q_d(t) &\Rightarrow p \rightarrow p_d(t) \\ \bar{p} \rightarrow 0 &\text{ cuando } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad asintótica.

### 3.1.2. Control PD con precompensación

De acuerdo a lo obtenido en la sección anterior, se tienen ahora las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 0 \\ M_d &= M \\ \bar{V} &= \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q}, \text{ donde } K_p = K_p^T > 0 \\ C(x) &= K_d = K_d^T > 0 \end{aligned}$$

lo cual implican lo siguiente:

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q - q_d \\ p - p_d \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\partial_x \Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\partial_t \Phi = \begin{bmatrix} -\dot{q}_d \\ -\dot{p}_d \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$K = S = 0 \quad (3.37)$$

por lo tanto las funciones  $\bar{H}$  y  $U$  están definidas como:

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{2}(p - p_d)^T M^{-1}(p - p_d) + \frac{1}{2}(q - q_d)^T K_p(q - q_d) \quad (3.38)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}\dot{q}_d^T M \dot{q}_d - p^T \dot{q}_d - V(q) + \frac{1}{2}(q - q_d)^T K_p(q - q_d) \quad (3.39)$$

Al aplicar la EDP (3.14) debe satisfacer:

$$\partial_x \Phi(J - R) \partial_x U^T + \partial_x \Phi g \beta = \begin{bmatrix} -\dot{q}_d \\ -\dot{p}_d \end{bmatrix}$$

en donde:

$$\partial_x \Phi(J - R) \partial_x U^T = \begin{bmatrix} -M^{-1} p_d \\ G + \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M \dot{q}_d)^T - K_p \bar{q} \end{bmatrix}$$

por lo que si  $\beta = -\dot{p}_d - G + \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M \dot{q}_d)^T + K_p \bar{q}$ , entonces se cumple (3.14).

Sin embargo, en el control de precompensación se evalúan la matriz de inercia  $M(q)$  y el vector de pares gravitacionales  $G(q)$  en sus trayectorias deseadas  $q_d$ , es decir:  $M(q) |_{q=q_d} = M^*$  y  $G(q) |_{q=q_d} = G_d$ , de manera que  $\beta$  ahora es:

$$\begin{aligned} \beta &= -\dot{p}_d - G_d + \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M^* \dot{q}_d)^T + K_p \bar{q} \\ &= -M^* \ddot{q}_d - \underbrace{(\dot{M}^* \dot{q}_d - \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M^* \dot{q}_d)^T)}_{C(q_d, \dot{q}_d)} - G_d + K_p \bar{q} \end{aligned}$$

donde  $C(q_d, \dot{q}_d) = C_d$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis evaluada en las trayectorias deseadas  $(q_d, \dot{q}_d)$ .

Entonces, al aplicar (3.4) se tiene la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} u &= -\beta - C(x) M^{-1} \bar{p} \\ &= M^* \ddot{q}_d + \dot{M}^* \dot{q}_d - \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M^* \dot{q}_d)^T + G_d - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1} p - \dot{q}_d) \\ &= M^* \ddot{q}_d + C_d \dot{q}_d + G_d - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1} p - \dot{q}_d) \end{aligned} \quad (3.40)$$

tal y como presentan [1, 8, 27].

Nótese que la misma ley de control puede ser obtenida de (3.28) al hacer las sustituciones correspondientes de  $M_d$ ,  $\Gamma$ ,  $\bar{V}(\bar{q})$  y  $C(x)$  considerando lo siguiente:

$$\begin{aligned} u &= \dot{p}_d |_{q=q_d} + \partial_q H^T |_{q=q_d, p=p_d} - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - C(x) M_d^{-1} \bar{p} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} (M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p}) \\ &= M^* \ddot{q}_d + \dot{M}^* \dot{q}_d + \frac{(\partial_d p_d^T M^{*-1} p_d)^T}{2} + G_d - K_p \bar{q} - K_d M^{-1} \bar{p} \\ &= M^* \ddot{q}_d + \dot{M}^* \dot{q}_d - \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M^* \dot{q}_d)^T + G_d - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1} p - \dot{q}_d) \end{aligned}$$

en donde  $(\partial_d p_d^T M^{*-1} p_d)^T = -(\partial_q \dot{q}_d^T M^* \dot{q}_d)^T$ .

Este controlador puede, condicionando a usar matrices de diseño  $K_p$  y  $K_d$  lo suficientemente grandes, satisfacer el objetivo de control de seguimiento en forma global [27].

### 3.1.3. Control PD+

A pesar de la sencillez del controlador *PD con precompensación*, este requiere disponer a *priori* la tarea encomendada en el control de seguimiento, aunque sea computacionalmente más rápido que otros algoritmos puesto que no es necesario re-calcular el valor de las matrices  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $G(q)$  ya que son evaluadas en las trayectorias deseadas  $(q_d, \dot{q}_d)$  en un principio, por otro lado el procedimiento de sintonía es laborioso debido que hace uso del modelo dinámico del sistema [27].

Por otro lado, el control *PD+* es uno de los controladores más simples para el control de seguimiento, sobre todo en robots manipuladores, que garantiza el cumplimiento del objetivo de forma global, esto es estabilidad asintótica uniforme global (GUAS por sus siglas en inglés) del origen  $(\bar{q}, \bar{p}) = (0, 0)$ . Este es considerado como una extensión natural del controlador *PD con compensación de gravedad* visto en (2.4.1.1) [14].

La manera de obtener este controlador por medio de transformaciones canónicas generalizadas es similar al del controlador anterior con las mismas condiciones, es decir:

$$\begin{aligned}\Gamma &= 0 \\ M_d &= M \\ \bar{V} &= \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q}, \text{ donde } K_p = K_p^T > 0 \\ C(x) &= K_d = K_d^T > 0\end{aligned}$$

que implica:

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q - q_d \\ p - p_d \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\partial_x \Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\partial_t \Phi = \begin{bmatrix} -\dot{q}_d \\ -\dot{p}_d \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$K = S = 0 \quad (3.44)$$

Teniendo en cuenta esto, el valor de  $\beta$  es igual al de la sección anterior, sin embargo para este caso no se evalúan  $M(q)$  y  $G(q)$  en las trayectorias deseadas; dando como resultado el siguiente controlador:

$$\begin{aligned} u &= -\beta - C(x)M^{-1}\bar{p} \\ &= \dot{p}_d - \frac{\partial_q(\dot{q}_d^T M \dot{q}_d)^T}{2} + G - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1}p - \dot{q}_d) \\ &= M\ddot{q}_d + \dot{M}\dot{q}_d - \frac{1}{2}\partial_q(\dot{q}_d^T M \dot{q}_d)^T + G - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1}p - \dot{q}_d) \\ &= M\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1}p - \dot{q}_d) \end{aligned} \quad (3.45)$$

se puede apreciar que (3.45) difiere del controlador  $PD+$  definido en [1] debido que en este último no evalúa la matriz  $C(q, \dot{q})$  en la velocidad deseada  $\dot{q}_d$ , sin embargo la estructura es prácticamente la misma, incluso versiones similares se presentan en [28, 29]. En lazo cerrado, el sistema adopta la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -K_d \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{x})^T \\ \bar{y} &= M_d^{-1}\bar{p} = M^{-1}\bar{p} \end{aligned} \quad (3.46)$$

similar al lazo cerrado obtenido con el controlador  $PD$  con compensación de gravedad de la sección (2.4.1.1) pero sin el término de disipación.

El mismo controlador se puede obtener de (3.28) haciendo la sustituciones correspondientes y considerando lo siguiente:

$$\begin{aligned} u &= \dot{p}_d + \partial_q H^T|_{p=p_d} - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - C(x) M_d^{-1} \bar{p} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} (M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p}) \\ &= M\ddot{q}_d + \dot{M}\dot{q}_d + \frac{(\partial_d p_d^T M^{-1} p_d)^T}{2} + G - K_p \bar{q} - K_d M^{-1} \bar{p} \\ &= M\ddot{q}_d + \dot{M}\dot{q}_d - \frac{1}{2} \partial_q (\dot{q}_d^T M \dot{q}_d)^T + G - K_p(q - q_d) - K_d(M^{-1}p - \dot{q}_d) \end{aligned}$$

Por lo que podemos decir que el controlador *PD con precompensación* es el mismo controlador *PD+* evaluado en las trayectorias deseadas.

### 3.1.4. Control par-calculado

El controlador *Par-calculado* se caracteriza por ser un control linealizante por medio de una retroalimentación en sistemas Lagrangianos, siendo este de los primeros controladores de movimiento *basado en modelo* [1]. Sin embargo, esta linealización en lazo cerrado no ocurre en coordenadas  $(q, p)$  debido a que el momento es igual a  $p = M\dot{q}$ . A continuación se presenta la forma de obtener el controlador *Par-calculado* por medio de transformaciones canónicas generalizadas, tomando en cuenta ciertos criterios y condiciones para conseguir esta ley de control similar a como se presenta en [1, 30].

Sean las siguientes condiciones:

$$\Gamma = 0$$

$$M_d = M^2$$

$$\bar{V} = \frac{1}{2}\bar{q}^T K_p \bar{q}, \text{ donde } K_p = K_p^T > 0$$

$$C(x) = MK_d M, \text{ donde } K_d = K_d^T > 0$$

que implican lo siguiente:

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q - q_d \\ p - p_d \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\partial_x \Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\partial_t \Phi = \begin{bmatrix} -\dot{q}_d \\ -\dot{p}_d \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & M - I \\ I - M & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$S = 0 \quad (3.51)$$

Tomando en cuenta estas condiciones, las funciones  $\bar{H}(x)$  y  $U(x)$  son:

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{2}(p - p_d)^T M^{-2}(p - p_d) + \frac{1}{2}(q - q_d)^T K_p (q - q_d) \quad (3.52)$$

$$U(x) = -H + \frac{1}{2}p^T M^{-2}p - \frac{1}{2}\dot{q}_d^T \dot{q}_d - p^T M^{-1}\dot{q}_d + \frac{1}{2}(q - q_d)^T K_p (q - q_d) \quad (3.53)$$



por lo que al realizar las sustituciones en la EDP (3.14) se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(J - R) \partial_x U^T &= \\ &\left[ \begin{array}{c} M^{-1}p + M^{-2}p - M^{-1}\dot{q}_d \\ \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-1}p)^T + G - \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-2}p)^T + (\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T - K_p \bar{q} \end{array} \right] \\ \partial_x \Phi(K - S) \partial_x (H + U)^T &= \\ &\left[ \begin{array}{c} M^{-1}p - M^{-2}p - \dot{q}_d + M^{-1}\dot{q}_d \\ \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-2}p)^T - (\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T - \frac{1}{2}M(\partial_q p^T M^{-2}p)^T + M(\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T - MK_p \bar{q} \end{array} \right] \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(J - R) \partial_x U^T + \partial_x \Phi(K - S) \partial_x (H + U)^T + \partial_x \Phi g \beta &= \\ &\left[ \begin{array}{c} -\dot{q}_d \\ \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-1}p)^T + G - \frac{1}{2}M(\partial_q p^T M^{-2}p)^T + M(\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T - MK_p \bar{q} + \beta \end{array} \right] \end{aligned}$$

para satisfacer (3.14), el valor de  $\beta$  sería:

$$\beta = -\dot{p}_d - \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-1}p)^T - G + \frac{1}{2}M(\partial_q p^T M^{-2}p)^T - M(\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T + MK_p \bar{q} \quad (3.54)$$

de esta manera se obtiene la ley de control:

$$\begin{aligned} u &= -\beta - C(x)M^{-2}\bar{p} \\ &= \dot{p}_d + \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-1}p)^T + G - \frac{1}{2}M(\partial_q p^T M^{-2}p)^T \\ &\quad + M(\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T - MK_p \bar{q} - MK_d(M^{-1}p - \dot{q}_d) \end{aligned} \quad (3.55)$$

que implica el siguiente sistema transformado en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & M \\ -M & -MK_d M \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{x})^T \\ \bar{y} &= M^{-2}\bar{p} = M^{-1}\dot{\bar{q}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Sin embargo, para obtener un resultado similar al que presentan [1, 30], ya que estas leyes de control están basadas en las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tendría que considerar:

$$\begin{aligned} (\partial_q p^T M^{-2}p)^T &= (\partial_q \dot{q}^T \dot{q})^T = 0 \\ (\partial_q p^T M^{-1}\dot{q}_d)^T &= (\partial_q \dot{q}^T \dot{q}_d)^T = 0 \end{aligned}$$

dado que en los sistemas Lagrangianos, las coordenadas  $(q, \dot{q})$  son independientes. Con esto, la ley de control resultaría en:

$$u = \dot{p}_d + \frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-1} p)^T + G - MK_p \bar{q} - MK_d(M^{-1} p - \dot{q}_d) \quad (3.57)$$

De hecho no se podría obtener (3.55) por medio del controlador (3.28) sustituyendo directamente las matrices y funciones correspondientes, por eso la necesidad de hacer esta consideración. Sin embargo esto no resulta ser un tanto válido porque en realidad la ley de control (3.57) está basada en coordenadas  $(q, \dot{q})$ , por lo que las derivadas parciales deberían estar con respecto a  $M^{-1} p$  y no en solamente  $p$  como se manejó en todo el procedimiento en donde se obtuvo (3.55).

Debido a que [30] considera la función de energía deseada  $\bar{H}$  como:

$$\bar{H}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \dot{\bar{q}} + \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q} \quad (3.58)$$

para  $\bar{q} = q - q_d$ , es sensato pensar que en coordenadas  $(q, p)$  la función de energía deseada  $\bar{H}$  fuera:

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \bar{p}^T \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q} \quad (3.59)$$

para  $\bar{p} = p - p_d$ . Con esta función de energía deseada  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$  y las siguientes condiciones:

$$\Gamma = 0$$

$$M_d = I$$

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q}, \text{ donde } K_p = K_p^T > 0$$

$$C(x) = M^{-1} K_d, \text{ donde } K_d = K_d^T > 0$$

tal que:

$$\bar{x} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q - q_d \\ p - p_d \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\partial_x \Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\partial_t \Phi = \begin{bmatrix} -\dot{q}_d \\ -\dot{p}_d \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} - I \\ I - M^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$S = 0 \quad (3.64)$$

se aplica todo el procedimiento anterior de manera que  $\beta$  sea tal que la ley de control tenga la siguiente forma:

$$u = \dot{p}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1} p)^T}{2} + G - M^{-1} K_p \bar{q} - M^{-1} K_d \bar{p} \quad (3.65)$$

por lo tanto, el sistema transformado en lazo cerrado sería:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -M^{-1} & -M^{-1} K_d \end{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}(\bar{x})^T \\ \bar{y} = \bar{p} &= M \dot{\bar{q}} \end{aligned} \quad (3.66)$$

en donde se puede obtener la misma ley de control directamente de (3.28).

### 3.2. Diseño de marco común para el control de seguimiento (con perturbación)

En la sección anterior se presentó el caso para sistemas sin perturbación en la entrada ( $\tau_d(t) = 0$ ) en donde las leyes de control cuentan con términos de compensación basados en el modelo del sistema mas la parte proporcional-derivativa *PD*. En esta sección se presenta el caso de control de seguimiento para  $\tau_d(t) = \bar{d} + d(t)$ , en donde  $\bar{d}$  es un vector constante y  $d(t)$  un vector variante en el tiempo, por medio de transformaciones canónicas generalizadas.

En la mayoría de los sistemas reales, es muy importante atenuar los efectos de ruidos en mediciones, incertidumbres en el modelo del sistema o señales externas que perturben al mismo. Una manera práctica de lograr esto es mediante la adición de un controlador integral, de manera que el sistema se estabilice en el punto de equilibrio deseado en presencia de perturbaciones.

Para ello, es necesario extender el sistema (3.18) de manera que siga preservando la estructura *PCH*, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{J} & -h \\ h^T & 0 \end{bmatrix}}_{J_e} - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_e} \right) \begin{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}^T \\ \partial_z \bar{H}^T \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_e} \bar{u} \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{g}^T & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{H}^T \\ \partial_z \bar{H}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

en donde  $z = \int_{t_0}^t h^T(\bar{x}, \tau) \partial_{\bar{x}} H(\bar{x}, \tau)^T d\tau \in \mathbb{R}^k$ ,  $h(\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^{n \times k}$  y  $x_e = [\bar{x}^T, z^T]^T$ , como se muestra en [3]. La idea de esto es obtener nuevamente un sistema transformado como se muestra en la figura (3.3) mediante el siguiente conjunto de transformaciones canónicas:

$$\hat{x} = \bar{\Phi}(x_e, t) \quad (3.68)$$

$$\hat{H} = \bar{H}(x_e, t) + \bar{U}(x_e, t) \quad (3.69)$$

$$\hat{y} = \bar{y} + \bar{\alpha}(x_e, t) \quad (3.70)$$

$$\hat{u} = \bar{u} + \bar{\beta}(x_e, t) \quad (3.71)$$

de manera que por medio de una retroalimentación de salida se estabilice el nuevo sistema de error tal como se muestra en la figura (3.4).

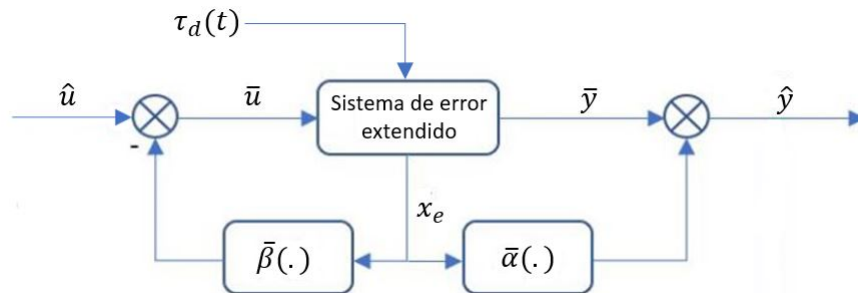


Fig. 3.3: Transformación del sistema de error extendido en lazo abierto

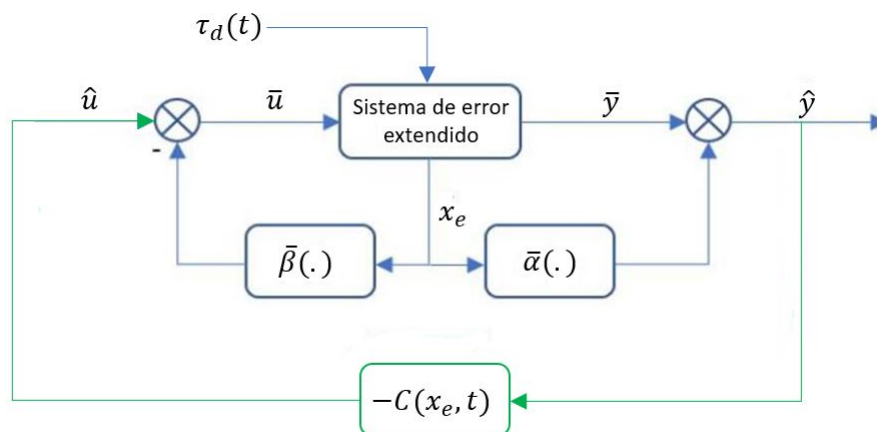


Fig. 3.4: Transformación del sistema de error extendido en lazo cerrado

Si se define:

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}M_d \\ (J_3 - R_3)^T \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

donde  $J_3 = -J_3^T$  y  $R_3 = R_3^T > 0$ , entonces el sistema mecánico (3.18) extendido quedaría de la siguiente manera:

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} -M^{-1}\Gamma & M^{-1}M_d & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & 0 & -(J_3 - R_3)^T \\ -M_dM^{-1} & J_3 - R_3 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla \bar{V} \\ M_d^{-1}\bar{p} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\partial_{x_e} \bar{H}^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_e} \bar{u} \quad (3.73)$$

$$\bar{y} = g_e^T \partial_{x_e} \bar{H}^T = M_d^{-1}\bar{p}$$

nótese que  $\partial_z \bar{H}^T = 0$ .

Sea el siguiente cambio de coordenadas:

$$\hat{x} = \bar{\Phi}(x_e) = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} - M_d K_i(z - a) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

con  $K_i = K_i^T > 0$  y  $a$  un vector constante. Entonces se tiene que:

$$\partial_{x_e} \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -M_d K_i \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\partial_t \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

siendo  $\bar{q}$ ,  $\bar{p}$  y  $M_d$  como se definieron en la sección (3.1).

Suponiendo una función de energía deseada  $\hat{H}(\hat{x})$  como:

$$\hat{H}(\hat{x}) = \frac{1}{2} \hat{p}^T M_d^{-1} \hat{p} + \bar{V}(\hat{q}) + \frac{1}{2} (\hat{z} - a)^T K_i (\hat{z} - a) \quad (3.75)$$

de manera que  $\hat{H}(x_e)$  sería:

$$\begin{aligned} \hat{H}(x_e) &= \bar{H} + \bar{U} \\ &= \frac{1}{2} \bar{p}^T M_d^{-1} \bar{p} + \bar{V}(\bar{q}) - \bar{p}^T K_i (z - a) + \frac{1}{2} (z - a)^T [K_i (I + M_d K_i)] (z - a) \end{aligned} \quad (3.76)$$

en donde:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\bar{p}^T M_d^{-1}\bar{p} + \bar{V}(\bar{q}) \quad (3.77)$$

$$\bar{U} = -\bar{p}^T K_i(z - a) + \frac{1}{2}(z - a)^T [K_i(I + M_d K_i)](z - a) \quad (3.78)$$

entonces se tiene que el gradiente de  $\hat{H}(x_e)$  y  $\bar{U}(x_e)$  es:

$$\partial_{x_e} \hat{H}^T = \begin{bmatrix} \nabla \bar{V} \\ M_d^{-1}\bar{p} - K_i(z - a) \\ -K_i\bar{p} + K_i M_d K_i(z - a) + K_i(z - a) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\partial_{x_e} \bar{U}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_i(z - a) \\ -K_i\bar{p} + K_i M_d K_i(z - a) + K_i(z - a) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Con el nuevo cambio de coordenadas y la nueva función  $\hat{H}$  y  $\bar{U}$ , se debe encontrar un  $\bar{\beta}$  que satisfaga la siguiente EDP:

$$\partial_{x_e} \bar{\Phi} \left\{ (J_e - R_e) \partial_{x_e} \bar{U}^T + (\bar{K} - \bar{S}) \partial_{x_e} (\bar{H} + \bar{U})^T + g_e \bar{\beta} \right\} = \partial_t \bar{\Phi} \quad (3.81)$$

Se definen las matrices  $\bar{K}$  y  $\bar{S}$  como:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d K_i M_d & 0 \\ -M_d K_i M_d M^{-1} & M_d K_i (J_3 - R_3) - (J_3 - R_3)^T K_i M_d + M_d K_i J_3 K_i M_d & M_d K_i J_3 \\ 0 & J_3 K_i M_d & J_3 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d K_i R_3 K_i M_d & M_d K_i R_3 \\ 0 & R_3 K_i M_d & R_3 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

nótese que  $\bar{K} = -\bar{K}^T$  y  $\bar{S} = \bar{S}^T$ .

Por lo tanto:

$$\partial_{x_e} \bar{\Phi} (J_e - R_e) \partial_{x_e} \bar{U}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -M^{-1}M_dK_i\hat{p} \\ M_dK_i(J_3 - R_3)K_i(z - a) - (J_3 - R_3)^TK_i(z - a) + (J_3 - R_3)^TK_i\hat{p} \\ -(J_3 - R_3)K_i(z - a) \end{bmatrix},$$

$$\partial_{x_e} \bar{\Phi} (\bar{K} - \bar{S}) \partial_{x_e} (\bar{H} + \bar{U})^T =$$

$$\begin{bmatrix} M^{-1}M_dK_i\hat{p} \\ -M_dK_iM_dM^{-1}\nabla\bar{V} + M_dK_i(J_3 - R_3)M_d^{-1}\bar{p} - M_dK_i(J_3 - R_3)K_i(z - a) - (J_3 - R_3)^TK_i\hat{p} \\ (J_3 - R_3)K_i(z - a) \end{bmatrix},$$

$$\partial_{x_e} \bar{\Phi} g_e \bar{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces para satisfacer (3.81)  $\bar{\beta}$  tendría que ser:

$$\bar{\beta} = -M_dK_i(J_3 - R_3)M_d^{-1}\bar{p} + M_dK_iM_dM^{-1}\nabla\bar{V} + (J_3 - R_3)^TK_i(z - a) \quad (3.84)$$

Con las siguientes transformaciones definidas como:

$$\bar{\alpha} \triangleq g_e^T(x_e, t) \partial_{x_e} \bar{U}^T(x_e, t) \quad (3.85)$$

$$\hat{J} \triangleq \partial_{x_e} \bar{\Phi} (J_e + \bar{K}) \partial_{x_e} \bar{\Phi}^T \quad (3.86)$$

$$\hat{R} \triangleq \partial_{x_e} \bar{\Phi} (R_e + \bar{S}) \partial_{x_e} \bar{\Phi}^T \quad (3.87)$$

$$\hat{g} \triangleq \partial_{x_e} \bar{\Phi} g_e(x_e, t) \quad (3.88)$$

y evaluando cada una de estas con los resultados obtenidos, se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= -K_i(z - a) \\ \hat{J} &= \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & 0 & -(J_3 - R_3)^T \\ -M_dM^{-1} & J_3 - R_3 & J_3 \end{bmatrix} \\ \hat{R} &= \begin{bmatrix} M^{-1}\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \\ \hat{g} = g_e &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto el nuevo sistema transformado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} -M^{-1}\Gamma & M^{-1}M_d & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & 0 & -(J_3 - R_3)^T \\ -M_dM^{-1} & J_3 - R_3 & J_3 - R_3 \end{bmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{H}(\bar{x})^T + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{g}^T \partial_{\hat{x}}\hat{H}(\bar{x})^T = M_d^{-1}\hat{p}\end{aligned}\quad (3.89)$$

Mediante la retroalimentación de salida  $\hat{u} = -C(x_e)\hat{y} = -C(x_e)M_d^{-1}\hat{p}$  se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} -M^{-1}\Gamma & M^{-1}M_d & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & -C(x_e) & -(J_3 - R_3)^T \\ -M_dM^{-1} & J_3 - R_3 & J_3 - R_3 \end{bmatrix} \partial_{\hat{x}}\hat{H}(\bar{x})^T \\ \hat{y} &= \hat{g}^T \partial_{\hat{x}}\hat{H}(\bar{x})^T = M_d^{-1}\hat{p}\end{aligned}\quad (3.90)$$

Aplicando la transformación (3.71) implica que:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -\bar{\beta} - C(x_e)\hat{y}, \\ \bar{u} &= u + \beta \Rightarrow u = -\beta + \bar{u} \Rightarrow \\ u &= -\beta - \bar{\beta} - C(x_e)\hat{y} = -\beta - \bar{\beta} - C(x_e)(y + \alpha + \bar{\alpha})\end{aligned}$$

en donde:

$$y + \alpha + \bar{\alpha} = M^{-1}p - M^{-1}p + M_d^{-1}\bar{p} - K_i(z - a) = M_d^{-1}[\bar{p} - M_dK_i(z - a)]$$

resultando en el siguiente vector de entrada  $u$ :

$$\begin{aligned}u &= \dot{p}_d + \partial_q H^T - M_dM^{-1}\nabla\bar{V} + \Gamma\nabla^2\bar{V}(M^{-1}\Gamma\nabla\bar{V} - M^{-1}\bar{p}) \\ &\quad M_dK_i(J_3 - R_3)M_d^{-1}\bar{p} - M_dK_iM_dM^{-1}\nabla\bar{V} - (J_3 - R_3)^TK_i(z - a) \\ &\quad - C(x_e)M_d^{-1}[\bar{p} - M_dK_i(z - a)] \\ &= \dot{p}_d + \partial_q H^T - M_dM^{-1}\nabla\bar{V} + \Gamma\nabla^2\bar{V}(M^{-1}\Gamma\nabla\bar{V} - M^{-1}\bar{p}) + M_dK_i\dot{z} \\ &\quad - (J_3 - R_3)^TK_i(z - a) - C(x_e)M_d^{-1}[\bar{p} - M_dK_i(z - a)]\end{aligned}\quad (3.91)$$

Dado que  $u = \tau + \tau_d = \tau + \bar{d} + d(t)$  y si se considera que:

$$a = K_i^{-1}[-C(x_e) + (J_3 - R_3)^T]^{-1}\bar{d}\quad (3.92)$$

$$d(t) = 0\quad (3.93)$$



entonces la ley de control  $\tau$  sería lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tau = & \dot{p}_d + \partial_q H^T - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} (M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p}) \\ & + M_d K_i \dot{z} - (J_3 - R_3)^T K_i z - C(x_e) M_d^{-1} [\bar{p} - M_d K_i z] \end{aligned} \quad (3.94)$$

por lo que (3.94) cumple con el objetivo de seguimiento de trayectoria para el sistema (3.6) en presencia de perturbaciones constantes, siendo el sistema transformado exponencialmente estable en lazo cerrado. Sin embargo, si  $d(t) \neq 0$ , entonces el sistema transformado sería:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} -M^{-1} \Gamma & M^{-1} M_d & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & -C(x_e) & -(J_3 - R_3)^T \\ -M_d M^{-1} & J_3 - R_3 & J_3 - R_3 \end{bmatrix} \partial_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x})^T + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ \hat{y} &= \hat{g}^T \partial_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x})^T = M_d^{-1} \hat{p} \end{aligned} \quad (3.95)$$

en donde  $d(t)$  es ahora la señal de entrada del sistema transformado; entonces el sistema será estable si la perturbación  $d(t)$  está acotada [9].

### 3.2.1. Prueba de estabilidad en lazo cerrado

Al considerar  $u = \tau + \tau_d(t) = \tau + \bar{d} + d(t)$  en el sistema (3.6), entonces este sistema resultaría como sigue:

$$\dot{q} = M^{-1} p \quad (3.96)$$

$$\dot{p} = -\partial_q H^T + \tau + \bar{d} + d(t) \quad (3.97)$$

Si se le aplica la ley de control (3.94), entonces se obtendría el siguiente resultado en lazo cerrado:

$$\dot{q} = M^{-1} p \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - \Gamma \nabla^2 \bar{V} M^{-1} \bar{p} + \\ & M_d K_i \dot{z} - (J_3 - R_3)^T K_i z - C(x_e) M_d^{-1} \bar{p} - C(x_e) K_i z + \bar{d} + d(t) \end{aligned} \quad (3.99)$$

con  $\dot{z} = -[M_d M^{-1} - (J_3 - R_3)^T M_d^{-1} \Gamma] \nabla \bar{V} + (J_3 - R_3) M_d^{-1} (p - p_d)$ .

Teniendo en cuenta que la parte constante de la perturbación  $\bar{d}$  se obtiene de la ecuación (3.92), siendo  $a$  una constante, entonces la función  $C(x_e)$  debe también ser constante; con el fin de obtener:

$$\dot{\bar{p}} = \bar{p} - M_d K_i \dot{z} = \dot{p} - \dot{p}_d + \Gamma \nabla^2 \bar{V} M^{-1} \bar{p} - \Gamma \nabla^2 \bar{V} M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M_d K_i \dot{z}$$

siendo el cambio de coordenadas  $\hat{p}$  como se ve en (3.74). De esta forma, y considerando  $C(x_e) = \epsilon I > 0$ , entonces la derivada del momento  $p$  con respecto al tiempo tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \dot{p}_d - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - \Gamma \nabla^2 \bar{V} M^{-1} \bar{p} + \\ &M_d K_i \dot{z} - (J_3 - R_3)^T K_i (z - a) - \epsilon M_d^{-1} \bar{p} - \epsilon K_i (z - a) + d(t) \end{aligned} \quad (3.100)$$

por lo tanto, se concluye que

$$\dot{q} = M^{-1}(p - p_d) = M^{-1} \hat{p} - M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} + M^{-1} M_d K_i (z - a) \quad (3.101)$$

$$\dot{\hat{p}} = -M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - (J_3 - R_3)^T K_i (z - a) - \epsilon M_d^{-1} \hat{p} + d(t) \quad (3.102)$$

$$\dot{z} = -M_d M^{-1} \nabla \bar{V} + (J_3 - R_3) M_d^{-1} \hat{p} + (J_3 - R_3) K_i (z - a) \quad (3.103)$$

cuya forma corresponde a (3.95).

Con la definición del Hamiltoniano  $\hat{H}(\bar{q}, \hat{p}, z)$  como en (3.75), se comprueba estabilidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{H}} &= \partial_{\bar{q}} \hat{H} \dot{\bar{q}} + \partial_{\hat{p}} \hat{H} \dot{\hat{p}} + \partial_z \hat{H} \dot{z} \\ &= (\nabla \bar{V})^T [-M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} + M^{-1} \hat{p} + M^{-1} M_d K_i (z - a)] + \\ &\hat{p}^T M_d^{-1} [-M_d M^{-1} \nabla \bar{V} - \epsilon M_d^{-1} \hat{p} - (J_3 - R_3)^T K_i (z - a)] + \hat{p}^T M_d^{-1} d(t) + \\ &(z - a)^T K_i [-M_d M^{-1} \nabla \bar{V} + (J_3 - R_3) M_d^{-1} \hat{p} + (J_3 - R_3) K_i (z - a)] \\ &= -(\nabla \bar{V})^T M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - \hat{p}^T M_d^{-1} \epsilon M_d^{-1} \hat{p} - (z - a)^T K_i R_3 K_i (z - a) + \hat{p}^T M_d^{-1} d(t) \end{aligned}$$

Si ahora se considera que

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(M_d^{-1})$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\min}(K_i R_3 K_i)$$

$$M^{-1} \Gamma \geq \gamma I > 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{\hat{H}} &\leq -\gamma \|\nabla \bar{V}\|^2 - \lambda_1^2 \epsilon \|\hat{p}\|^2 - \lambda_2 \|z - a\|^2 + \hat{p}^T M_d^{-1} d(t) \\ &\leq -\gamma \|\nabla \bar{V}\|^2 - \lambda_1^2 \epsilon \|\hat{p}\|^2 - \lambda_2 \|z - a\|^2 + \frac{\lambda_3}{2} \|\hat{p}\|^2 + \frac{\lambda_3}{2} \|d(t)\|^2 \\ &= -\gamma \|\nabla \bar{V}\|^2 - \left( \lambda_1^2 \epsilon - \frac{\lambda_3}{2} \right) \|\hat{p}\|^2 - \lambda_2 \|z - a\|^2 + \frac{\lambda_3}{2} \|d(t)\|^2, \\ &\text{para } \epsilon > \frac{\lambda_3}{2\lambda_1^2}, \lambda_3 = \lambda_{\max}(M_d)^{-1} \end{aligned}$$

Con esto se comprueba que cuando la perturbación  $\tau_d$  es constante ( $d(t) = 0$ ), el sistema es asintóticamente estable y converge en el equilibrio  $(\bar{q}_*, \hat{p}_*, z_*) = (0, 0, a)$ ; lo que implica que  $q \rightarrow q_d$  y  $p \rightarrow p_d$ .

### 3.2.2. Control robusto (A.Donaire)

El controlador (3.94) está basado precisamente en el que presenta [9] en donde se demuestra estabilidad cuando  $d(t) \neq 0$  y estabilidad exponencial cuando  $d(t) = 0$ . Para obtener este mismo controlador robusto, es necesario que en (3.94),  $C(x_e) = R_2 - J_2$ , para  $J_2 = -J_2^T$  y  $R_2 = R_2^T > 0$ ; por lo que la ley de control  $\tau$  resultaría en:

$$\begin{aligned} \tau = & \dot{p}_d + \partial_q H^T - M_d M^{-1} \nabla \bar{V} + \Gamma \nabla^2 \bar{V} (M^{-1} \Gamma \nabla \bar{V} - M^{-1} \bar{p}) \\ & + M_d K_i \dot{z} - (J_3 - R_3)^T K_i z + (J_2 - R_2) M_d^{-1} [\bar{p} - M_d K_i z] \end{aligned} \quad (3.104)$$

quedando el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & \begin{bmatrix} -M^{-1} \Gamma & M^{-1} M_d & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 - R_2 & -(J_3 - R_3)^T \\ -M_d M^{-1} & J_3 - R_3 & J_3 - R_3 \end{bmatrix} \partial_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x})^T \\ \hat{y} = & \hat{g}^T \partial_{\hat{x}} \hat{H}(\hat{x})^T = M_d^{-1} \hat{p} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Sin embargo, (3.104) se obtuvo mediante transformaciones canónicas generalizadas como lo muestra la sección anterior, a diferencia de [9] que utiliza un método que permite agregar una acción integral que siga preservando la estructura *PCH* presentado en [10].

# Capítulo 4

## Implementación de algoritmos de control de seguimiento

En esta sección se presenta la aplicación de los distintos algoritmos vistos anteriormente para el control de seguimiento de trayectoria en dos sistemas diferentes: un robot de 2 grados de libertad de tipo rotacional y un robot móvil tipo diferencial. Se pretende mostrar los resultados del error de seguimiento bajo diferentes escenarios, con y sin perturbaciones en la entrada. El diseño de los controladores será por medio de la selección adecuada de las ganancias de los mismos, primero con ganancias iguales en  $K_p$  y  $K_d$  y después con ganancias diferentes obtenidas de manera heurística para obtener respuestas que cumplan con ciertas condiciones establecidas.

La simulación de los sistemas fue realizada en el software MATLAB ver.2017 por medio de *scripts*, utilizando el método *Runge Kutta de orden 4* como método de integración. El paso de integración para ambos sistemas, brazo robótico y robot móvil diferencial, fue de  $1 \times 10^{-3}$ .

### 4.1. Control de seguimiento para brazo manipulador de 2 G.D.L.

Para el control de seguimiento de trayectorias del brazo manipulador se utilizará el modelo definido en A, cuyas ecuaciones del movimiento y los valores de los

parámetros se muestran en la ecuación (A.1) y en la tabla (A.1).

El objetivo principal de esta sección es el seguimiento de las trayectorias definidas en la sección (A.2), en donde cada controlador se evaluará través del error de posición y velocidad; además de comparar cada señal de control  $u$ .

Se pretende también comparar los controladores en diferentes escenarios, es decir, en presencia de perturbaciones constantes ( $d(t) = 0$ ) en la entrada.

#### 4.1.1. Diseño de controladores

##### 4.1.1.1. Caso 1: Ganancias iguales en los controladores, sin perturbación a la entrada ( $u = \tau$ ).

Se definen las ganancias  $K_p = 785I$  y  $K_d = 250I$  para cada algoritmo de control. **Control PD con precompensación.**

$$u = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) - 785(q - q_d) - 250(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \quad (4.1)$$

**Control PD+.**

$$u = M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d - \frac{(\partial_q \dot{q}_d^T M(q) \dot{q}_d)^T}{2} + G(q) - 785(q - q_d) - 250(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \quad (4.2)$$

**Control Par-Calculado.**

$$u = M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 785M^{-1}(q)(q - q_d) - 250M^{-1}(q)(p - p_d) \quad (4.3)$$

**Control Robusto(A.Donaire).** Para este controlador se hacen las siguientes consideraciones en sus parámetros para todos los casos:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= J_3 = 0, \\
 \Gamma &= M_d = I, \\
 R_2 &= K_d, \\
 R_3 &= I, \\
 K_i &= 10I, \\
 \bar{V}(\bar{q}) &= \frac{1}{2}\bar{q}^T K_p \bar{q}
 \end{aligned}$$

por lo tanto, la ley de control es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 u &= M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 785(M^{-1}(q) + 250I)(q - q_d) \\
 &\quad - (250I + 785M^{-1}(q))(p - p_d) + 10\dot{z} + 2510z
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

#### 4.1.1.2. Caso 2: Ganancias diferentes en los controladores, sin perturbación a la entrada( $u = \tau$ ).

En este caso se diseñan los controladores para que el tiempo de convergencia del error de posición sea aproximadamente 1 segundo.

##### Control PD con precompensación.

Ganancias del controlador:  $K_p = 1100I$ ,  $K_d = 200I$ .

Ley de control:

$$u = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) - 1100(q - q_d) - 200(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \tag{4.5}$$

##### Control PD+.

Ganancias del controlador:  $K_p = 1100I$ ,  $K_d = 200I$ .

Ley de control:

$$\begin{aligned}
 u &= M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d - \frac{(\partial_q \dot{q}_d^T M(q)\dot{q}_d)^T}{2} + G(q) - 1100(q - q_d) \\
 &\quad - 200(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

##### Control Par-Calculado.

Ganancias del controlador:  $K_p = 2500I$ ,  $K_d = 200I$ .

Ley de control:

$$u = M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 2500M^{-1}(q)(q - q_d) - 200M^{-1}(q)(p - p_d) \quad (4.7)$$

### Control Robusto(A.Donaire).

Ganancias del controlador:  $K_p = 50I$ ,  $K_d = 10I$ .

Ley de control:

$$u = M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 50(M^{-1}(q) + 10I)(q - q_d) - (10I + 50M^{-1}(q))(p - p_d) + 10\dot{z} + 110z \quad (4.8)$$

#### **4.1.1.3. Caso 3: Ganancias iguales en los controladores, con perturbación a la entrada ( $u = \tau + \bar{d}$ ).**

Las ganancias a utilizar en este caso son:  $K_p = 785I$  y  $K_d = 250I$ . El vector de perturbación a la entrada  $\bar{d}$  es un vector constante de pares aplicado a cada eslabón con valores:  $\bar{d} = [20, 30]^T [Nm]$ , siendo  $\bar{d}_1$  aplicado en el segundo 0.5 y  $\bar{d}_2$  en el segundo 1. De acuerdo a las dimensiones del robot, asumiendo que la perturbación se aplica en las longitudes de los eslabones  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente,  $\bar{d}_1$  aplicaría un Par equivalente a  $4,53Kg$ ; mientras que  $\bar{d}_2$ , de  $6,803Kg$ . En comparación con las masas de los eslabones, la fuerza de masa aplicada por  $\bar{d}_1$  es aproximadamente la quinta parte de la masa del eslabón 1; sin embargo, la de  $\bar{d}_2$  es casi el doble de la masa del eslabón 2. Esta perturbación constante está asociada a la fuerza de fricción, ya que esta fuerza es proporcional a la fuerza normal aplicada a cada uno de los eslabones.

### Control PD con precompensación.

$$\tau = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) - 785(q - q_d) - 250(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \quad (4.9)$$

### Control PD+.

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d - \frac{(\partial_q \dot{q}_d^T M(q)\dot{q}_d)^T}{2} + G(q) - 785(q - q_d) - 250(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \quad (4.10)$$

### Control Par-Calculado.

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 785M^{-1}(q)(q - q_d) - 250M^{-1}(q)(p - p_d) \quad (4.11)$$

**Control Robusto(A.Donaire).**

$$\begin{aligned} \tau = & M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 785(M^{-1}(q) + 250I)(q - q_d) \\ & - (250I + 785M^{-1}(q))(p - p_d) + 10\dot{z} + 2510z \end{aligned} \quad (4.12)$$

**4.1.1.4. Caso 4: Ganancias diferentes en los controladores, con perturbación a la entrada( $u = \tau + \bar{d}$ ).**

El mismo vector de perturbación a la entrada  $\bar{d}$  del caso anterior es aplicado. Se diseñan los controladores para que el error de posición sea  $\leq 1,5\%$ .

**Control PD con precompensación.**

Ganancias del controlador:  $K_p = 2000I$ ,  $K_d = 200I$ .

Ley de control:

$$\tau = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) - 2000(q - q_d) - 200(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \quad (4.13)$$

**Control PD+.**

Ganancias del controlador:  $K_p = 2000I$ ,  $K_d = 200I$ .

Ley de control:

$$\begin{aligned} \tau = & M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d - \frac{(\partial_q \dot{q}_d^T M(q)\dot{q}_d)^T}{2} + G(q) - 2000(q - q_d) \\ & - 200(M^{-1}(q)p - \dot{q}_d) \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Control Par-Calculado.**

Ganancias del controlador:  $K_p = 4125I$ ,  $K_d = 100I$ .

Ley de control:

$$\begin{aligned} \tau = & M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 4125M^{-1}(q)(q - q_d) \\ & - 100M^{-1}(q)(p - p_d) \end{aligned} \quad (4.15)$$

**Control Robusto(A.Donaire).**

Ganancias del controlador:  $K_p = 45I$ ,  $K_d = 30I$ .

Ley de control:

$$\begin{aligned} \tau = & M(q)\ddot{q}_d + \dot{M}(q)\dot{q}_d + \frac{(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T}{2} + G(q) - 45(M^{-1}(q) + 30I)(q - q_d) \\ & - (30I + 45M^{-1}(q))(p - p_d) + 10\dot{z} + 310z \end{aligned} \quad (4.16)$$



### 4.1.2. Resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de cada algoritmo de control con condiciones iniciales  $q_0 = 0$  y  $\dot{q}_0 = 0$  mediante gráficas y tablas de datos del error de seguimiento, tanto de posición como de velocidad y de la señal de control. Los datos mostrados en cada una de las tablas para el error de posición y velocidad fueron tomados en el intervalo  $2,5s \leq t \leq 3s$ , ya que el error de seguimiento es lo suficientemente pequeño para considerarlo como el cumplimiento del objetivo de control.

- **Caso 1: Ganancias iguales en los controladores, sin perturbación a la entrada ( $u = \tau$ ).**

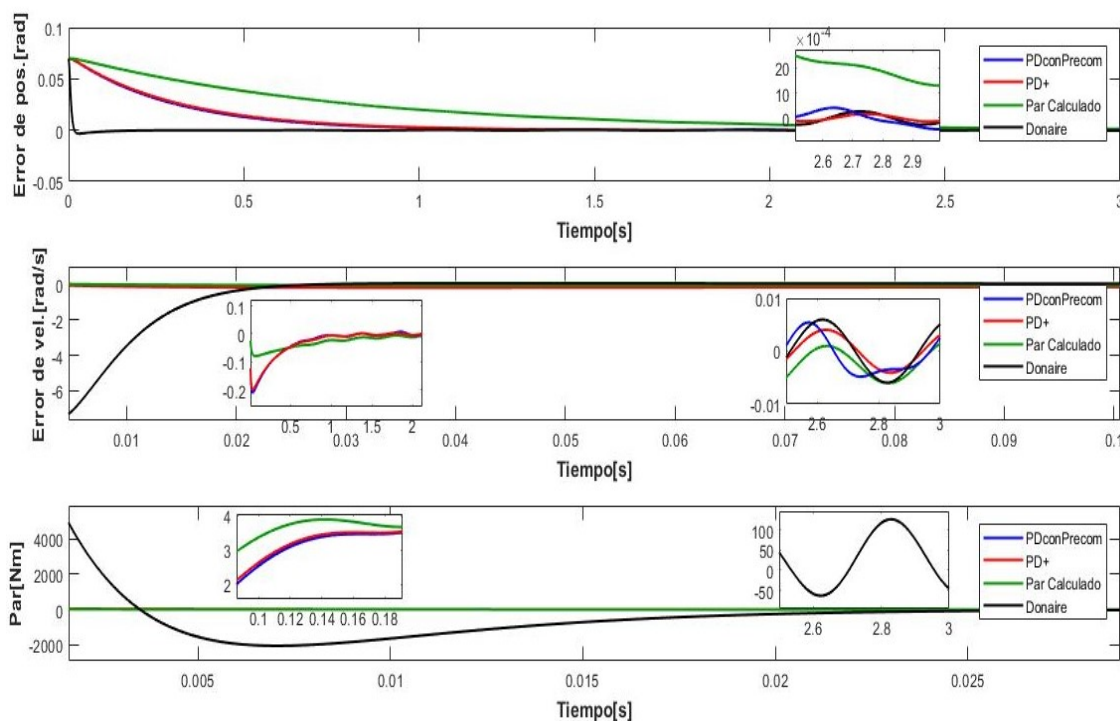


Fig. 4.1: Caso 1- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1).

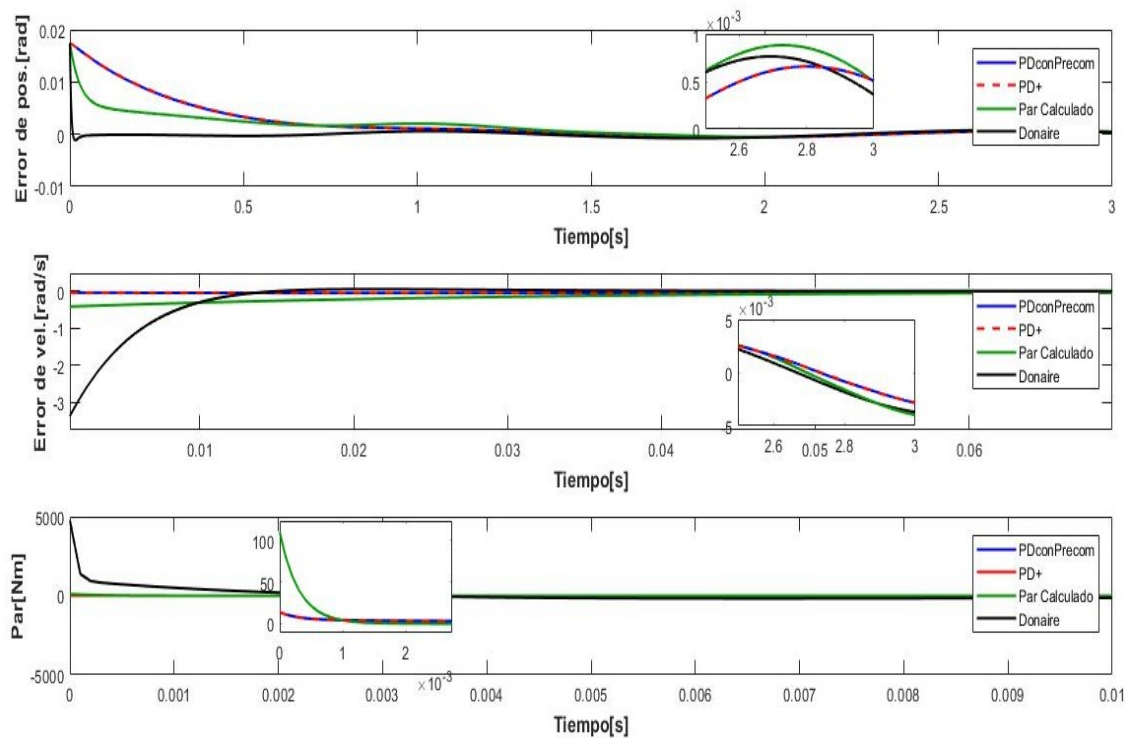


Fig. 4.2: Caso 1- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2).

Controlador	Error de pos. [rad](2.5-3s)			Error de vel. [rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	-0,00045	1.8e-6	0,00040	-0,0048	0.0008	0,0054	-65,52	24,07	127
PD+	-0,00016	1.2e-5	0,00016	-0,0043	9.7e-5	0,0043	-65,36	24,05	127,1
Par-Calculado	-0,00016	0.0019	0,00016	-0,0042	0.0024	0,0043	-65,51	23,7	126,8
A.Donaire	-0,00028	3.98e-5	0,00027	-0,0058	0.00034	0,0059	-2040	24,34	14400

Tabla 4.1: Caso 1- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1).

Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	0.00031	0.0005	0.00065	-0.0028	0.0001	0.0026	-5.81	0.53	13.86
PD+	0.00031	0.0005	0.00065	-0.0028	0.0001	0.0026	-5.82	0.53	13.7
Par-Calculado	0.0005	0.0007	0.00088	-0.004	0.00075	0.0026	-5.82	0.52	109.5
A.Donaire	0.00036	0.00065	0.00076	-0.0037	0.00099	0.0023	-172.5	0.54	4766

Tabla 4.2: Caso 1- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2).

- **Caso 2: Ganancias diferentes en los controladores, sin perturbación a la entrada( $u = \tau$ ).**

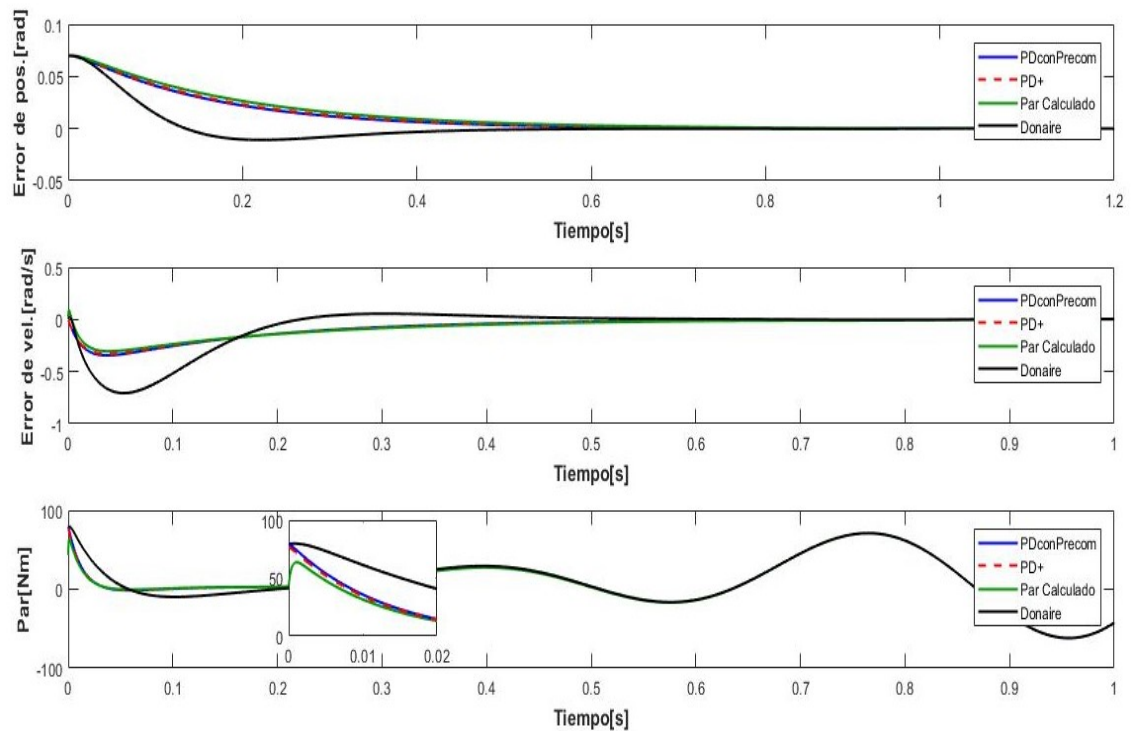


Fig. 4.3: Caso 2- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1).

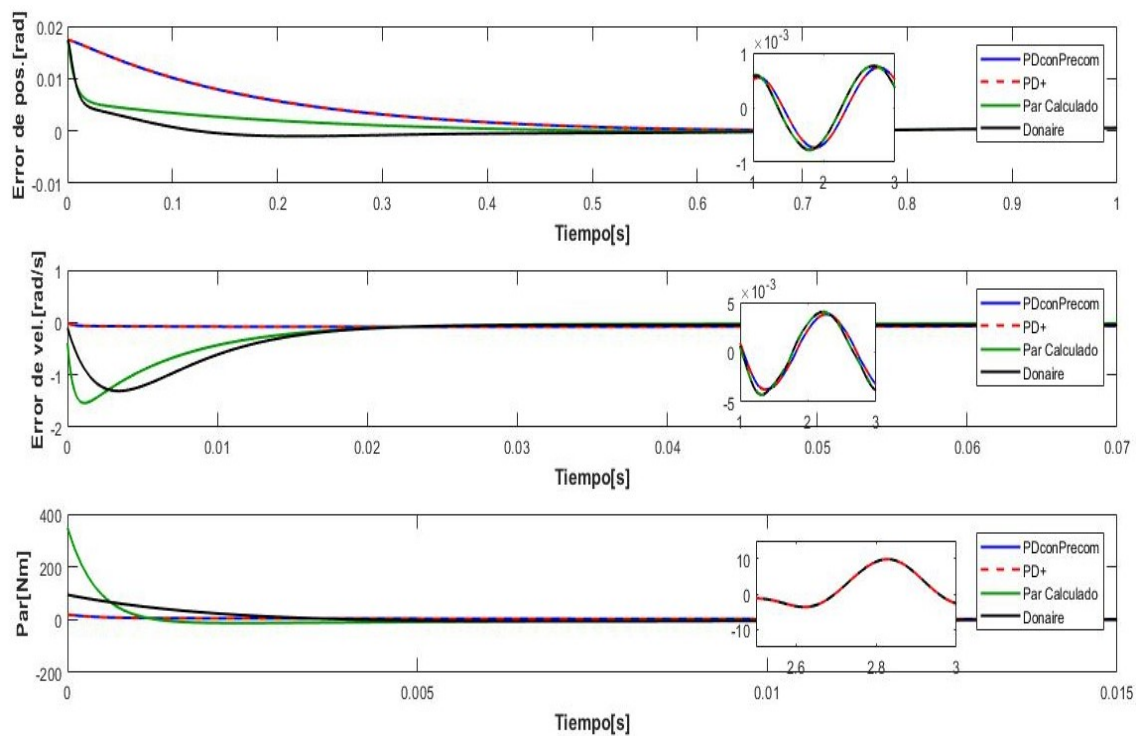


Fig. 4.4: Caso 2- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2).

Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	-0.00049	6.35e-5	0.00036	-0.0052	0.00079	0.0056	-65.56	24.18	127
PD+	-0.00016	2.54e-5	0.00016	-0.0043	9.12e-5	0.0043	-65.36	24.17	127.1
Par-Calculado	-0.00016	2.37e-5	0.00016	-0.0042	0.00012	0.0043	-65.36	24.15	127.1
A.Donaire	-0.00028	3.99e-5	0.00027	-0.0058	3.83e-6	0.0059	-65.4	24.31	127.2

Tabla 4.3: Caso 2- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1).

Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	0.00041	0.00063	0.00073	-0.0032	0.00034	0.0027	-5.8	0.53	19.36
PD+	0.00041	0.00063	0.00073	-0.0032	0.00034	0.0027	-5.81	0.53	19.2
Par-Calculado	0.00035	0.00066	0.00075	-0.0038	0.00096	0.0023	-12.76	0.53	348.6
A.Donaire	0.00035	0.00066	0.00076	-0.0038	0.0010	0.0023	-6.57	0.54	94.15

Tabla 4.4: Caso 2- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2).

- **Caso 3: Ganancias iguales en los controladores, con perturbación a la entrada**( $u = \tau + \bar{d}$ ).

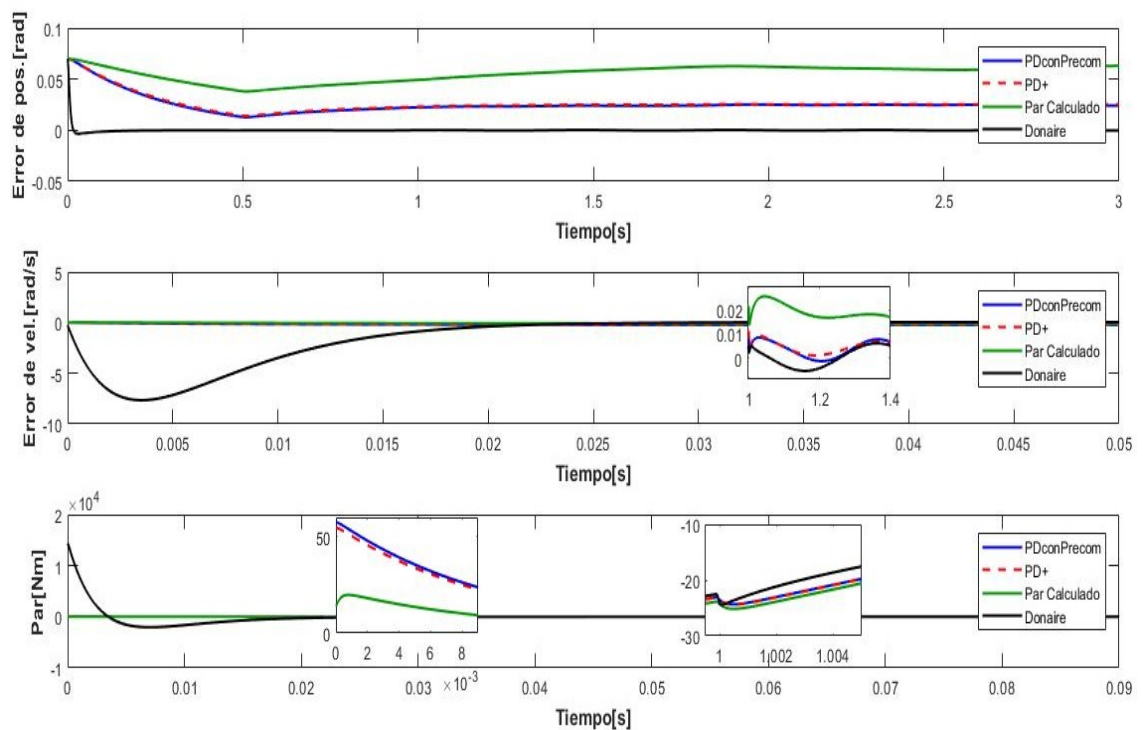


Fig. 4.5: Caso 3- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1).

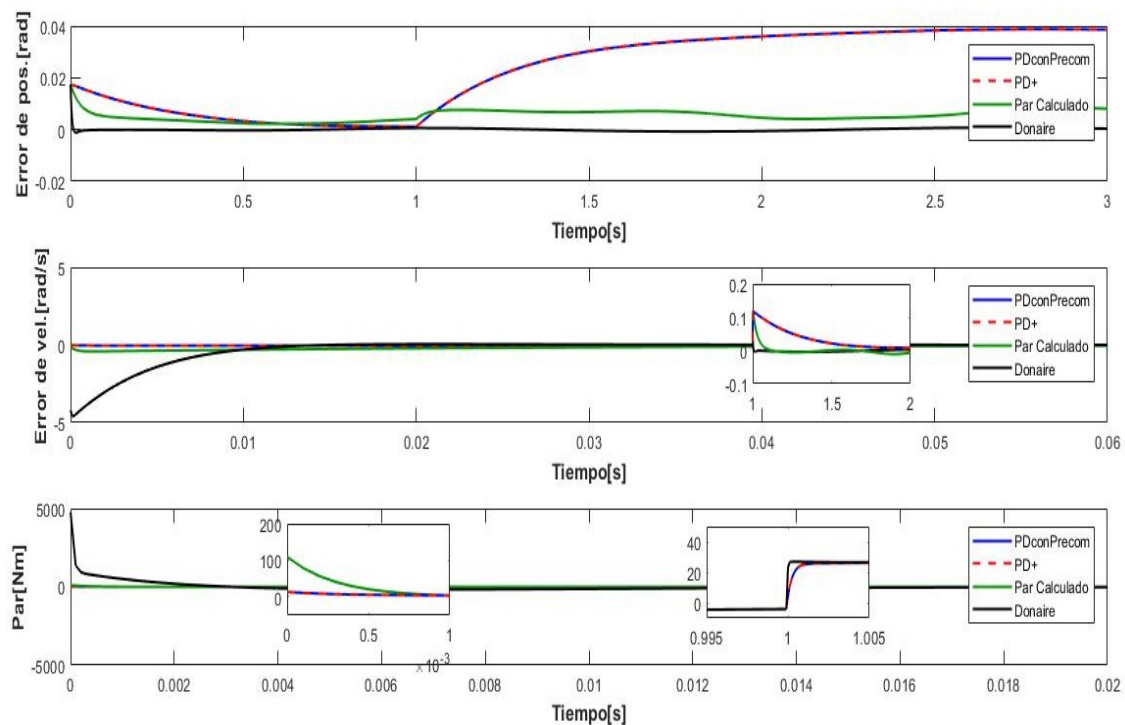


Fig. 4.6: Caso 3- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2).

Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	0.0242	0.0247	0.0251	-0.0043	0.00087	0.0053	-49.99	40.26	146.1
PD+	0.0253	0.0254	0.0256	-0.0041	0.00015	0.0041	-45.87	40.23	146.2
Par-Calculado	0.0591	0.0607	0.0631	-0.0038	0.0078	0.0108	-46.43	39.37	145.1
A.Donaire	-0.00026	3.98e-5	0.00026	-0.006	0.00034	0.006	-2040	41.1	14400

Tabla 4.5: Caso 3- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1).

Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	0.0383	0.0387	0.0388	-0.0027	7.61e-5	0.0039	-5.81	20.53	39.7
PD+	0.0382	0.0386	0.0388	-0.0026	0.00038	0.0037	-5.81	20.53	39.7
Par-Calculado	0.0053	0.0075	0.0085	-0.0072	0.0050	0.0130	-5.83	20.52	109.5
A.Donaire	0.00036	0.00065	0.00076	-0.0037	0.00099	0.0023	-172.5	20.55	4766

Tabla 4.6: Caso 3- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2).

- **Caso 4: Ganancias diferentes en los controladores, con perturbación a la entrada**( $u = \tau + \bar{d}$ ).

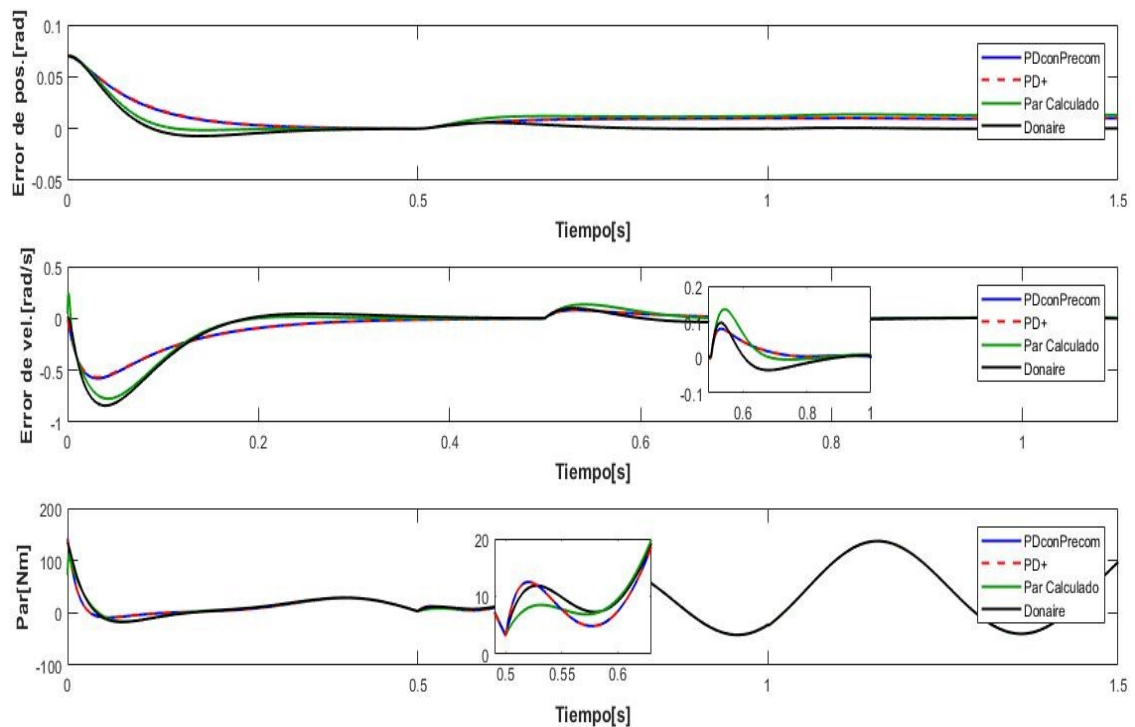


Fig. 4.7: Caso 4- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 1).

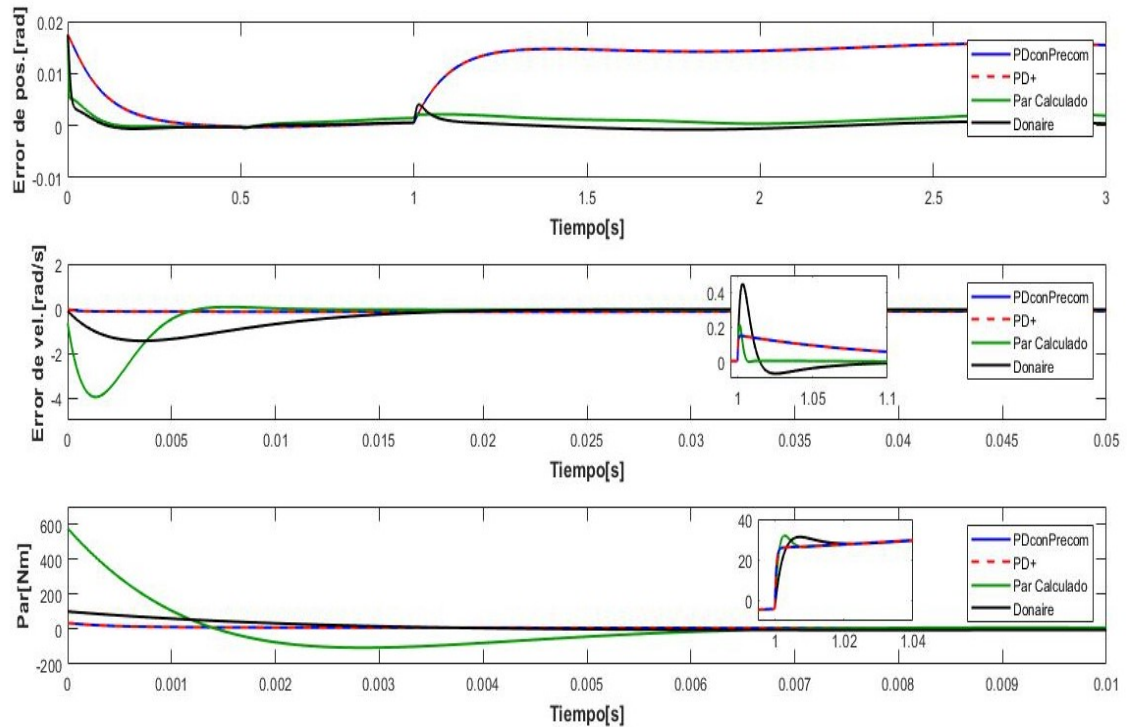


Fig. 4.8: Caso 4- Errores de posición y velocidad y ley de control del Brazo robótico (eslabón 2).

Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	0.0094	0.0098	0.0101	-0.0038	0.00056	0.0047	-45.77	40.71	146.7
PD+	0.0098	0.0100	0.0102	-0.0049	7.6e-5	0.0048	-45.58	40.7	146.8
Par-Calculado	0.0106	0.0125	0.0135	-0.0038	0.0050	0.0150	-45.47	40.69	146.7
A.Donaire	-0.00027	4.11e-5	0.00027	-0.0058	0.00011	0.0059	-45.38	40.96	147.1

Tabla 4.7: Caso 4- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 1).



Controlador	Error de pos.[rad](2.5-3s)			Error de vel.[rad/s](2.5-3s)			Señal de control [Nm]		
	Min	MSE	Max	Min	MSE	Max	Min	Prom.	Max
PD con precomp.	0.0155	0.0157	0.0158	-0.0034	0.00068	0.0026	-5.8	20.54	39.75
PD+	0.0155	0.0157	0.0158	-0.0035	0.0006	0.0026	-5.81	20.54	39.75
Par-Calculado	0.0015	0.0021	0.0023	-0.0049	0.0002	0.0037	-106.2	20.54	575.2
A.Donaire	0.00035	0.00065	0.00076	-0.0038	0.0010	0.0022	-5.81	20.54	100.4

Tabla 4.8: Caso 4- Valores del error de posición y velocidad y señal de control para el brazo robótico (eslabón 2).

### 4.1.3. Conclusiones

En las pruebas anteriores se mostró que los algoritmos cumplen con el objetivo del control de seguimiento. Sin embargo, ante presencia de perturbaciones en la entrada, el único algoritmo que cumplió con el objetivo fue el controlador *Robusto de A.Donaire*; esto se debe a la acción integral que logra la estabilidad asintótica global del sistema de error ante perturbaciones constantes [9].

El algoritmo que requirió mayor ganancia proporcional y derivativa fue el controlador *Par-Calculado*; a diferencia del controlador que presenta [1], este multiplica el error de posición y de momento por la inversa de la matriz de inercia ( $M^{-1}(q)$ ). Por ello, la ganancia que aporta la matriz de inercia será pequeña si la masa y el momento de inercia en función de la posición  $q$  son mayores a 1. Este hecho puede verse en la tabla (4.5) en donde las ganancias son iguales pero el error de posición y de velocidad del eslabón 1 en el controlador *Par-Calculado* es mayor al de los demás; aunque en la tabla (4.6) muestra que el error de posición del eslabón 2 es menor que en los controladores *PD con precompensación* y *PD+* por el sobre tiro del torque aplicado, haciendo que el objetivo de seguimiento se logre antes de que la perturbación sea aplicada al eslabón, y por la *Propiedad 3* de la matriz de inercia en robots únicamente articulados que muestra [1], se concluye que la inversa de la matriz de inercia aporta mayor ganancia cuando  $q \rightarrow q_d$ ; entonces cuando se aplica la perturbación al eslabón 2, la ley de control aplicará mayor torque haciendo que el error de posición sea menos sensible a la perturbación.

Por otro lado, los controladores *PD con precompensación* y *PD+* muestran respuestas prácticamente iguales. Sin embargo eso deja de ser cierto en pequeñas ganancias, ya que en el control *PD con precompensación* se deben seleccionar las ganancias  $K_p$  y  $K_d$  suficientemente grandes para satisfacer el objetivo de control de

seguimiento en forma global [1].

A continuación se muestran los resultados de estos dos controladores con ganancias  $K_p = K_d = I$  en donde se demuestra que el control  $PD+$  brinda mejor respuesta que el control  $PD$  con precompensación.

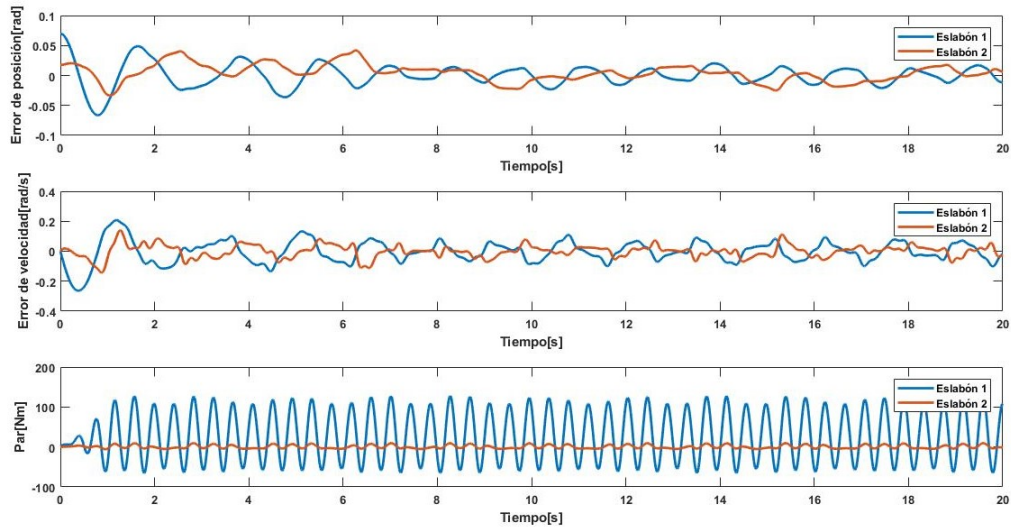


Fig. 4.9: Errores de posición y velocidad y ley de control PD con precompensación con ganancias  $K_p = K_d = I$

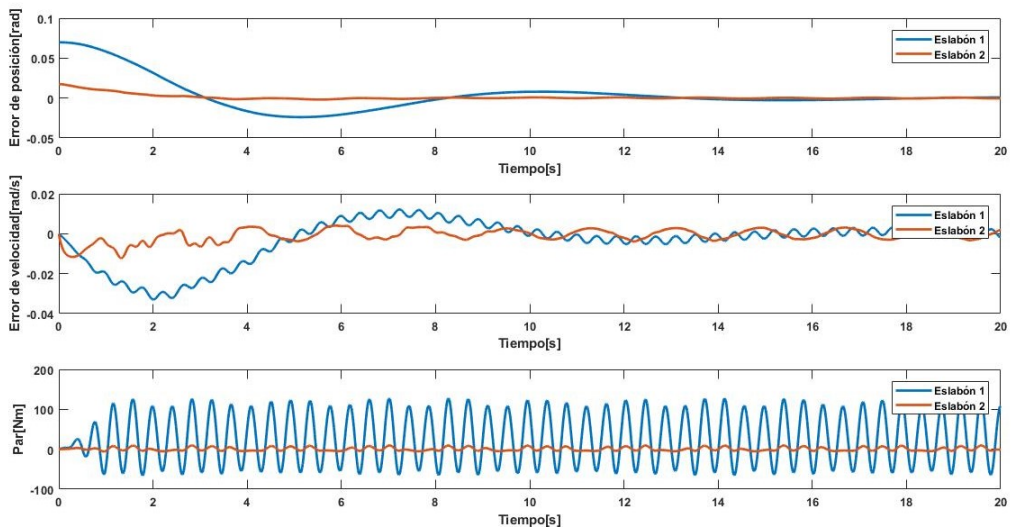


Fig. 4.10: Errores de posición y velocidad y ley de control  $PD+$  con ganancias  $K_p = K_d = I$

## 4.2. Control de seguimiento para robot móvil diferencial

El objetivo de esta sección es presentar el control de un robot móvil diferencial que siga una trayectoria como se muestra en B en la figura (B.2). Se utilizará un modelo con estructura *PCH* representado por las ecuaciones del movimiento (B.8) y valores de parámetros de la tabla (B.1).

Aunque el modelo contiene restricciones no-holonómicas, las leyes de control que se presentarán a continuación están basadas en los algoritmos vistos anteriormente. Por convención, los controladores se nombrarán de igual forma que en la sección anterior, y se agregarán en su definición la matriz  $S(q)$  y  $\bar{C}(\bar{p})$ ; en donde se antepondrá la matriz  $S^T(q)$  en la ganancia  $K_p$  para transformar el error de posición de las coordenadas individuales en un solo error de posición, ya que el control aplica una fuerza lineal en dirección del movimiento frontal del robot.

### 4.2.1. Diseño de controladores

Dada la definición de las trayectorias deseadas (B.10), en el control de posición no interesa tanto la orientación cuando se pretende seguir una trayectoria, al menos de que la aplicación así lo requiera; como por ejemplo robots móviles que contienen una herramienta para cortar, es necesario incluir también el control de orientación. Para este caso se puede ignorar el estado  $\theta$ , puesto que solo interesa el control de seguimiento de posición, como se ve en [31]. De esa manera la matriz  $S(q)$  sería una matriz cuadrada cuya inversa existe; esto es:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -d_{AB}\sin\theta \\ \sin\theta & d_{AB}\cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$S^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{d_{AB}}\sin\theta & \frac{1}{d_{AB}}\cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

por lo tanto, los estados a controlar son solamente  $q = [q_{B_x}, q_{B_y}]^T$ .

Los algoritmos a utilizar son los siguientes:

### Control PD con precompensación.

Considerando  $S_d = S(q_d)$ , se propone la siguiente ley de control:

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}_d^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S_d^{-1}\ddot{q}_d - S^T K_p(q - q_d) - K_d(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.19)$$

### Control PD+.

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - S^T K_p(q - q_d) - K_d(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.20)$$

### Control Robusto(A.Donaire).

$$\begin{aligned} u = & -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - (\bar{M}^{-1} + K_d)S^T K_p(q - q_d) \\ & - (K_d + K_p\bar{M}^{-1})(\bar{p} - \bar{p}_d) + K_i\dot{z} + (I + K_d)K_i z \end{aligned} \quad (4.21)$$

en donde  $\dot{z} = -(\bar{M}^{-1} + I)S^T K_p(q - q_d) - (\bar{p} - \bar{p}_d)$ .

Debido a que la matriz de inercia  $\bar{M}$  es constante, no se podría implementar el controlador *Par-Calculdado*, ya que esta matriz solo tomaría el rol de una ganancia constante que multiplica a las ganancias  $K_p$  y  $K_d$ ; por lo que podría omitirse.

A continuación se muestra el diseño de cada uno de los controladores, con los mismos escenarios de la sección anterior.

#### **4.2.1.1. Caso 1: Ganancias iguales en los controladores, sin perturbación a la entrada( $u = \tau$ ).**

Se definen las ganancias  $K_p = 1000I$  y  $K_d = 250I$  para cada algoritmo de control tomando como referencia el tiempo de asentamiento  $t_s \approx 6s$  del controlador *PD con precompensación*.

### Control PD con precompensación.

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}_d^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S_d^{-1}\ddot{q}_d - 1000S^T(q - q_d) - 250(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.22)$$

### Control PD+.

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - 1000S^T(q - q_d) - 250(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.23)$$

### Control Robusto(A.Donaire).

Con  $K_i = 10I$ , se tiene la siguiente ley de control:

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - 1000(\bar{M}^{-1} + 250I)S^T(q - q_d) - (250I + 1000\bar{M}^{-1})(\bar{p} - \bar{p}_d) + 10\dot{z} + 2510z \quad (4.24)$$

#### **4.2.1.2. Caso 2: Ganancias diferentes en los controladores, sin perturbación a la entrada( $u = \tau$ ).**

En este caso se diseñan los controladores para que el tiempo de convergencia del error de posición sea aproximadamente 10 segundos.

### Control PD con precompensación.

Ganancias del controlador:  $K_p = 980I$ ,  $K_d = 180I$ .

Ley de control:

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}_d^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S_d^{-1}\ddot{q}_d - 980S^T(q - q_d) - 180(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.25)$$

### Control PD+.

Ganancias del controlador:  $K_p = 450I$ ,  $K_d = 150I$ .

Ley de control:

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - 450S^T(q - q_d) - 150(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.26)$$

### Control Robusto(A.Donaire).

Ganancias del controlador:  $K_p = 55I$ ,  $K_d = 20I$ ,  $K_i = 10$ .

Ley de control:

$$u = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - 55(\bar{M}^{-1} + 20I)S^T(q - q_d) - (20I + 55\bar{M}^{-1})(\bar{p} - \bar{p}_d) + 10\dot{z} + 210z \quad (4.27)$$

#### **4.2.1.3. Caso 3: Ganancias iguales en los controladores, con perturbación a la entrada( $u = \tau + \bar{d}$ ).**

Las ganancias a utilizar en este caso son las mismas que en el caso 1 ( $K_p = 1000I$  y  $K_d = 250I$ ), solo que ahora la perturbación a la entrada es un vector constante de Fuerza y Par que se ejercen sobre el robot a partir de  $t = 2s$ . El valor de la perturbación a considerar es:  $\bar{d} = [0N, 100Nm]^T$ .

#### 4.2.1.4. Caso 4: Ganancias diferentes en los controladores, con perturbación a la entrada ( $u = \tau + \bar{d}$ ).

El mismo vector de perturbación a la entrada  $\bar{d}$  del caso anterior es aplicado. En este caso se diseñan los controladores para que el error RMS de posición sea  $\leq 5\%$ .

##### Control PD con precompensación.

Ganancias del controlador:  $K_p = 4500I$ ,  $K_d = 250I$ .

Ley de control:

$$\tau = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}_d^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S_d^{-1}\ddot{q}_d - 4500S^T(q - q_d) - 250(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.28)$$

##### Control PD+.

Ganancias del controlador:  $K_p = 4750I$ ,  $K_d = 250I$ .

Ley de control:

$$\tau = -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - 4750S^T(q - q_d) - 250(\bar{M}^{-1}\bar{p} - \dot{q}_d) \quad (4.29)$$

##### Control Robusto(A.Donaire).

Ganancias del controlador:  $K_p = 45I$ ,  $K_d = 30I$ ,  $K_i = 10I$ .

Ley de control:

$$\begin{aligned} \tau = & -\bar{C}\bar{M}^{-1}\bar{p} + \bar{M}\dot{S}^{-1}\dot{q}_d + \bar{M}S^{-1}\ddot{q}_d - 20(\bar{M}^{-1} + 10I)S^T(q - q_d) \\ & - (10I + 20\bar{M}^{-1})(\bar{p} - \bar{p}_d) + 10\dot{z} + 110z \end{aligned} \quad (4.30)$$

## 4.2.2. Resultados

Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de cada uno de los algoritmos para cada escenario presentado en la sección anterior son mostrados por medio de gráficas y tablas de datos. Las condiciones iniciales del sistema fueron:  $q_0 = [6, -3, 3\pi/4]^T$  y  $\bar{p}_0 = [0, 0]^T$ .

- Caso 1: Ganancias iguales en los controladores, sin perturbación a la entrada ( $u = \tau$ ).

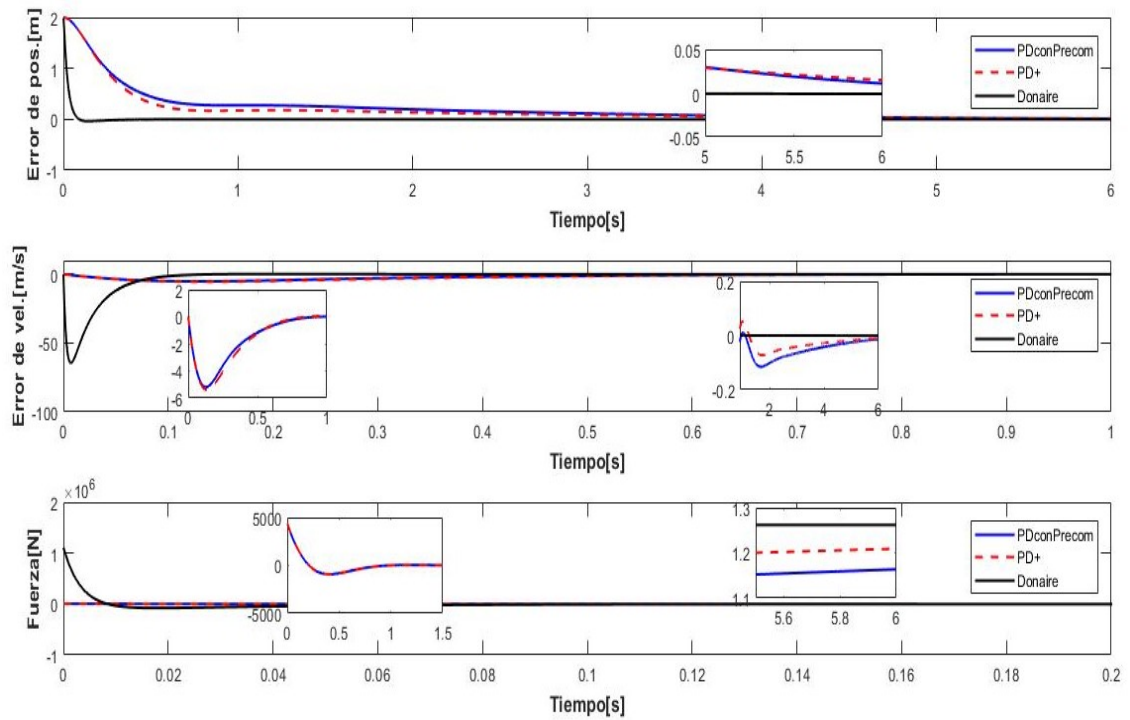


Fig. 4.11: Caso 1- Errores de posición y velocidad (coord. X) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

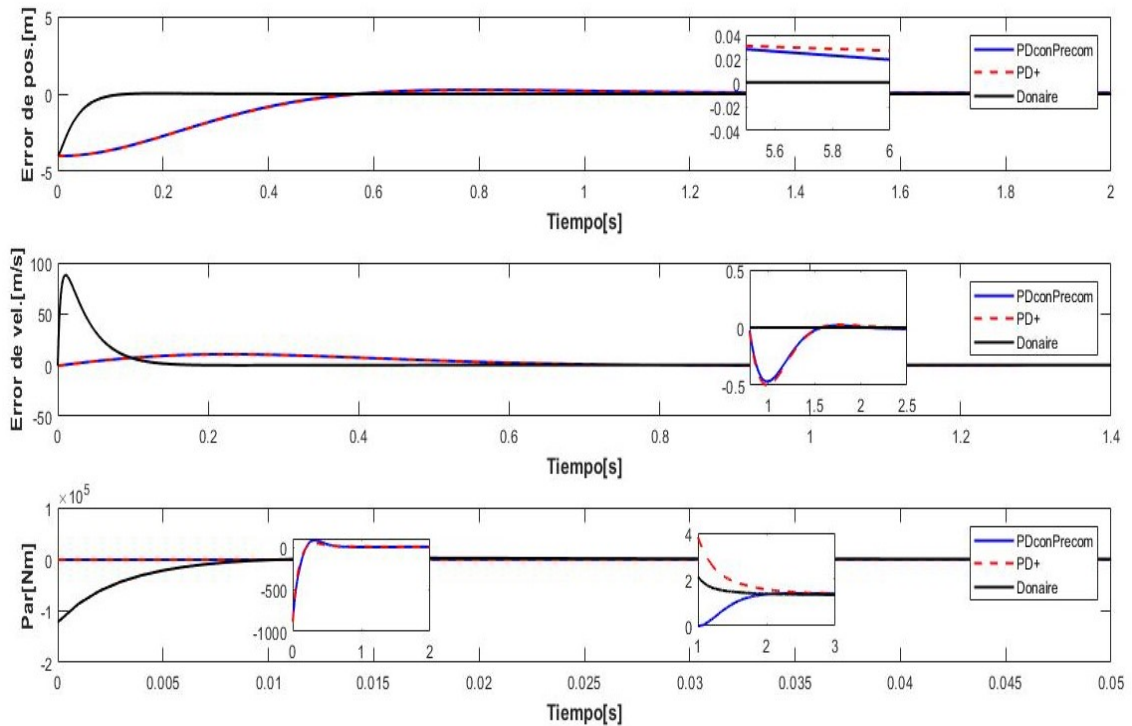


Fig. 4.12: Caso 1- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

Controlador	Error MSE de pos.[m] (5.5-6s)		Error MSE de vel.[m/s] (5.5-6s)		Señal de control					
	Coord. X	Coord. Y	Coord. X	Coord. Y	Fuerza[N]			Par[Nm]		
					Min.	Prom.	Max.	Min.	Prom.	Max.
PDconPrecom.	0.0149	0.0237	0.0161	0.0171	-924.72	5.8847	4388.2	-888.41	-5.9575	79.951
PD+	0.0180	0.0288	-0.0126	0.0078	-926.73	6.0628	4388.2	-888.41	-5.7442	45.892
A.Donaire	0.0007	0.0003	0.0003	0.0001	-77788	0.2733	1.10e+6	-12196	-50.325	2363.2

Tabla 4.9: Caso 1- Valores del error de posición y velocidad y señal de control-Robot Móvil diferencial.



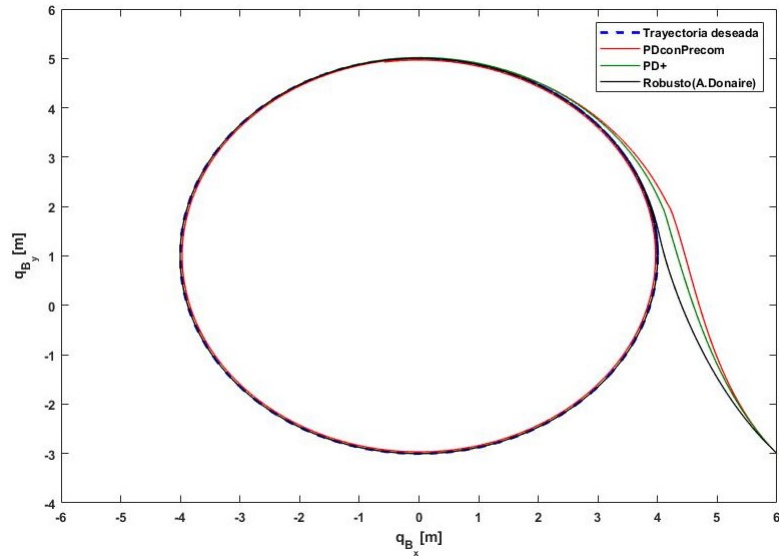


Fig. 4.13: Caso 1-Trayectorias del Robot Móvil diferencial.

- **Caso 2: Ganancias diferentes en los controladores, sin perturbación a la entrada ( $u = \tau$ ).**

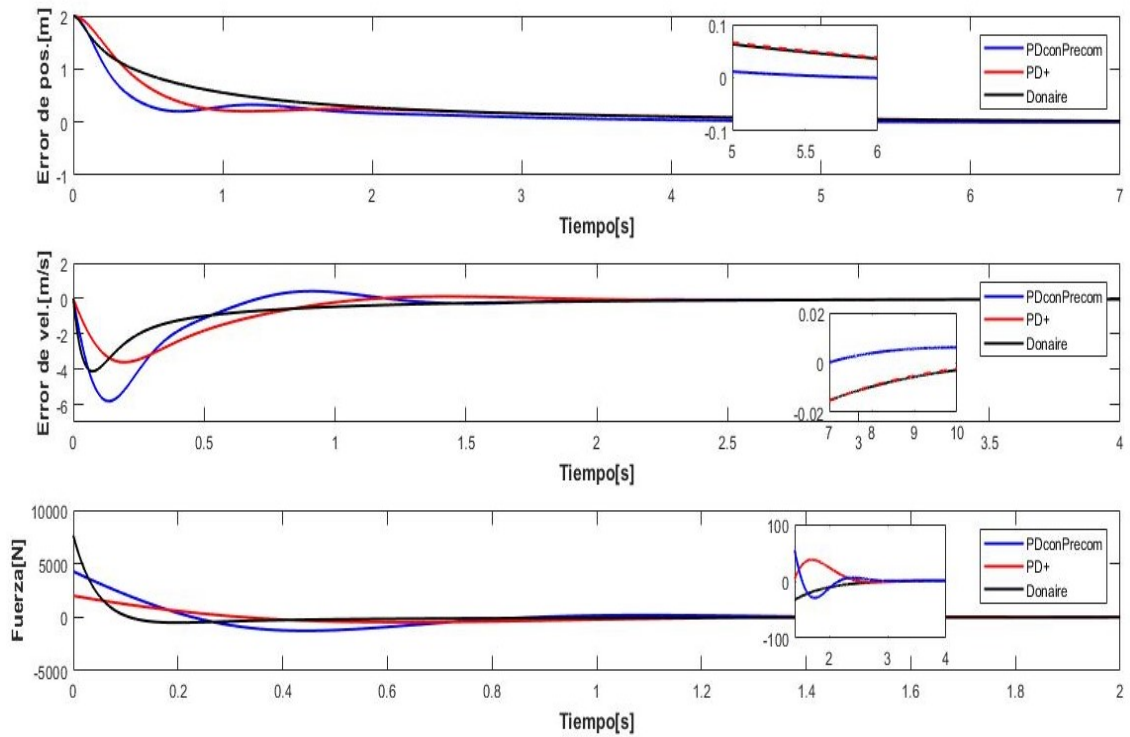


Fig. 4.14: Caso 2- Errores de posición y velocidad (coord. X). y ley de control del Robot Móvil diferencial.

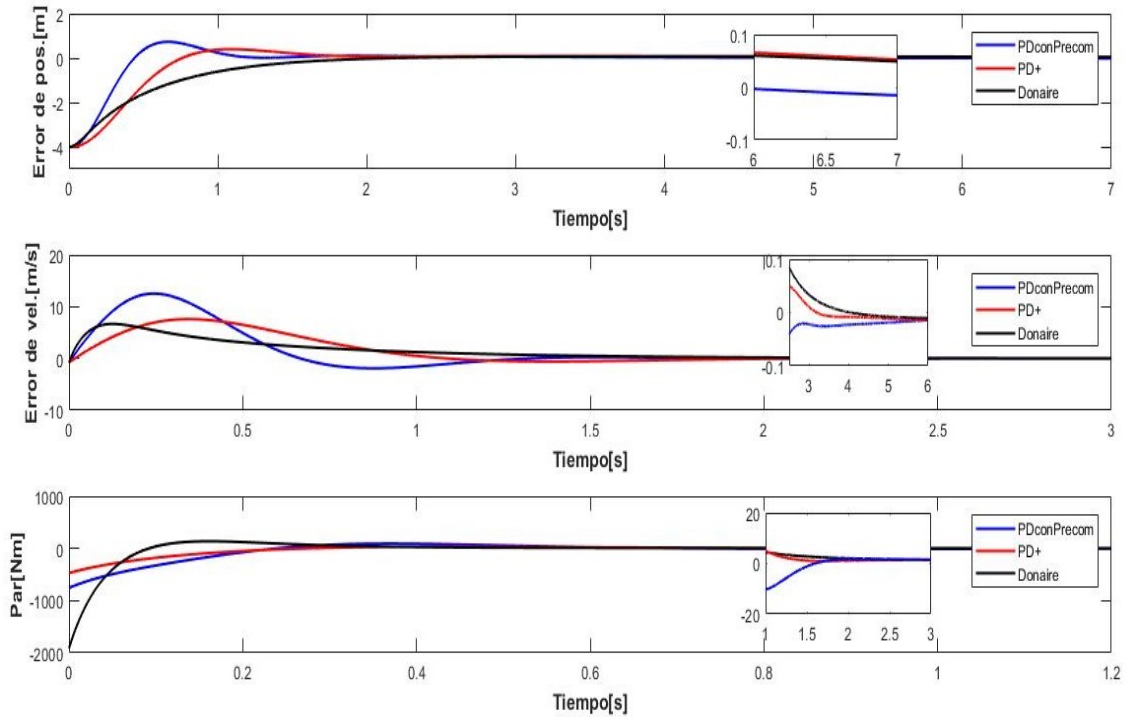


Fig. 4.15: Caso 2- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

Controlador	Error MSE de pos.[m] (9.5-10s)		Error MSE de vel.[m/s] (9.5-10s)		Señal de control					
	Coord. X	Coord. Y	Coord. X	Coord. Y	Fuerza[N]			Par[Nm]		
					Min.	Prom.	Max.	Min.	Prom.	Max.
PDconPrecom.	0.0095	0.0291	0.006	0.0007	-1266.5	3.8963	4263.8	-747.96	-4.1426	92.6997
PD+	0.0028	0.0233	0.0032	0.008	-466.83	4.2963	1997.9	-466.24	-1.6932	34.9413
A.Donaire	0.0047	0.0226	0.0037	0.0077	-507.86	4.1004	7658.4	-1910.1	-1.3772	137.27

Tabla 4.10: Caso 2- Valores del error de posición y velocidad y señal de control-Robot Móvil diferencial.

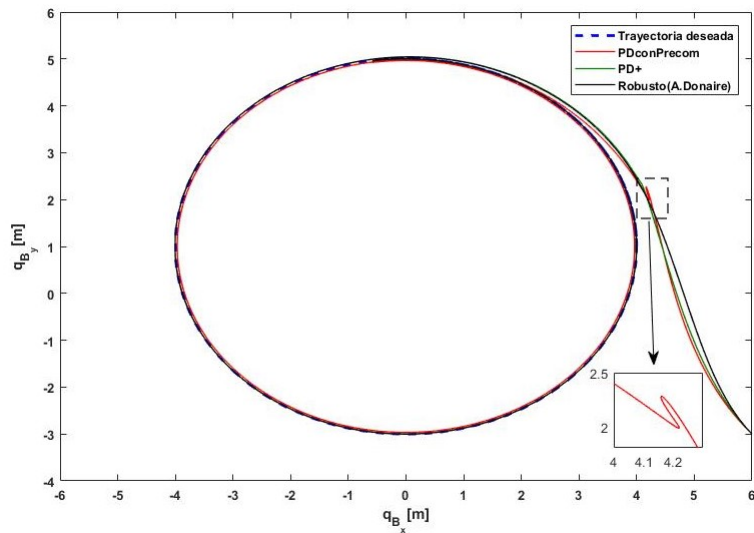


Fig. 4.16: Caso 2-Trayectorias del Robot Móvil diferencial.

El efecto producido que muestra el recuadro punteado de la figura (4.16) se debe al pequeño sobre tiro en el error de velocidad de la figura (4.14), ya que en aproximadamente 1s, el error se vuelve negativo; lo que implica un movimiento en reversa por parte del robot.

- Caso 3: Ganancias iguales en los controladores, con perturbación a la entrada ( $u = \tau + \bar{d}$ ).

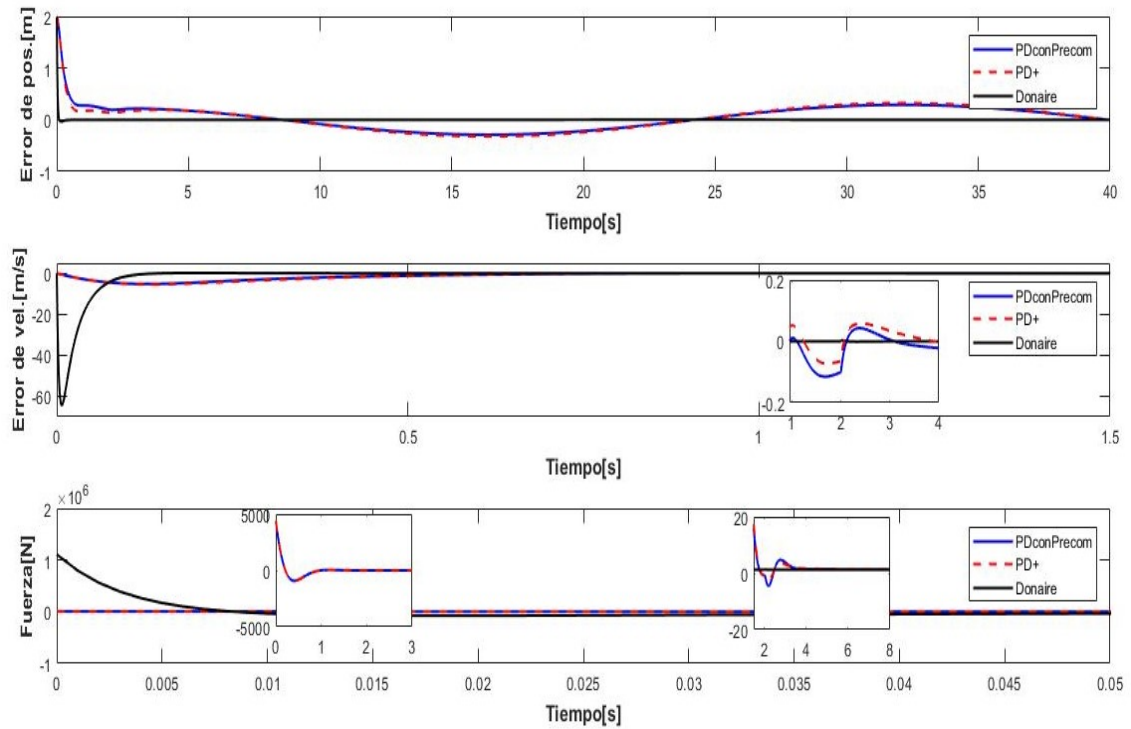


Fig. 4.17: Caso 3- Errores de posición y velocidad (coord. X) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

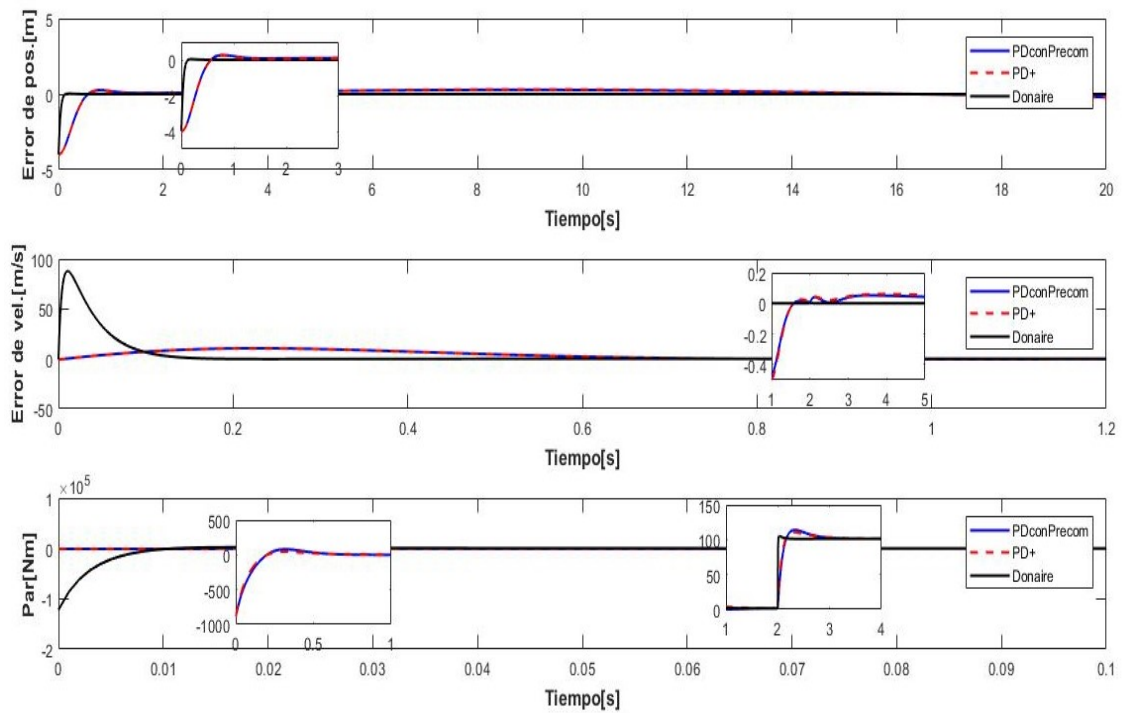


Fig. 4.18: Caso 3- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

Controlador	Error MSE de pos.[m] (2-40s)		Error MSE de vel.[m/s] (2-40s)		Señal de control					
	Coord. X	Coord. Y	Coord. X	Coord. Y	Fuerza[N]			Par[Nm]		
					Min.	Prom.	Max.	Min.	Prom.	Max.
PDconPrecom.	0.1972	0.2053	0.0413	0.04	-924.77	2.0935	4388.2	-485.87	96.3427	109.75
PD+	0.216	0.2251	0.0456	0.0453	-926.73	2.1362	4388.2	-88.41	95.371	110.85
A.Donaire	0.0005	0.0005	0.0003	0.0002	-77788	1.1135	1.1e+6	-1.21e+5	88.588	2363.2

Tabla 4.11: Caso 3- Valores del error de posición y velocidad y señal de control-Robot Móvil diferencial.

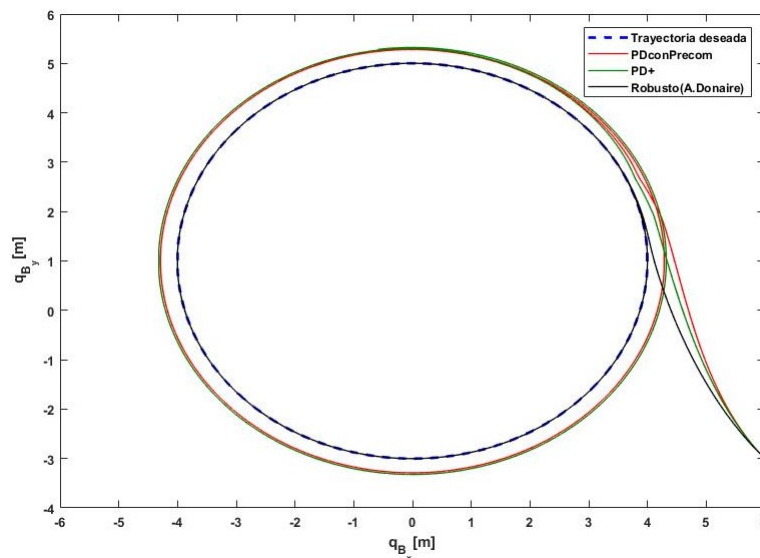


Fig. 4.19: Caso 3-Trayectorias del Robot Móvil diferencial.

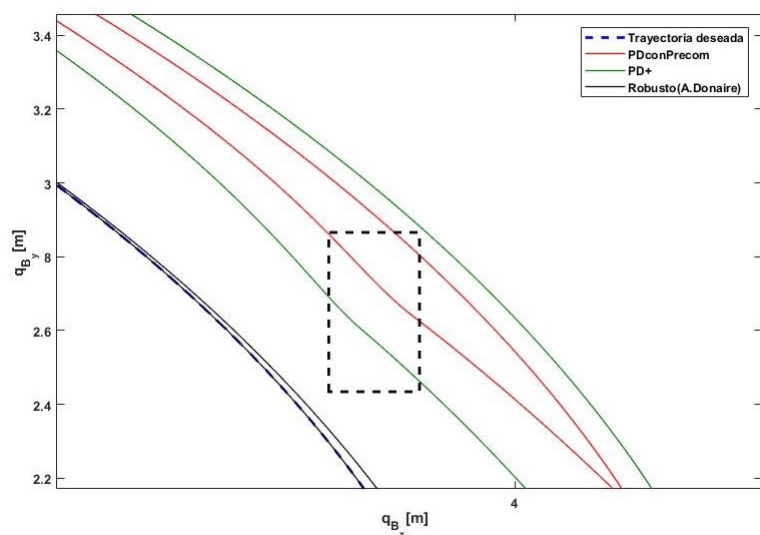


Fig. 4.20: Caso 3-Detalle de la desviación de las trayectorias del Robot Móvil diferencial.

En la figura (4.20) se observa como en las trayectorias del sistema, mediante la aplicación de los controladores *PD con precompensación* y *PD+*, existe una desviación que provoca el error de las mismas a causa de la perturbación constante a la entrada ( $\bar{d}$ ). Sin embargo, para el controlador robusto de *A.Donaire*, la perturbación no afecta en el seguimiento de trayectoria.

- Caso 4: Ganancias diferentes en los controladores, con perturbación a la entrada ( $u = \tau + \bar{d}$ ).

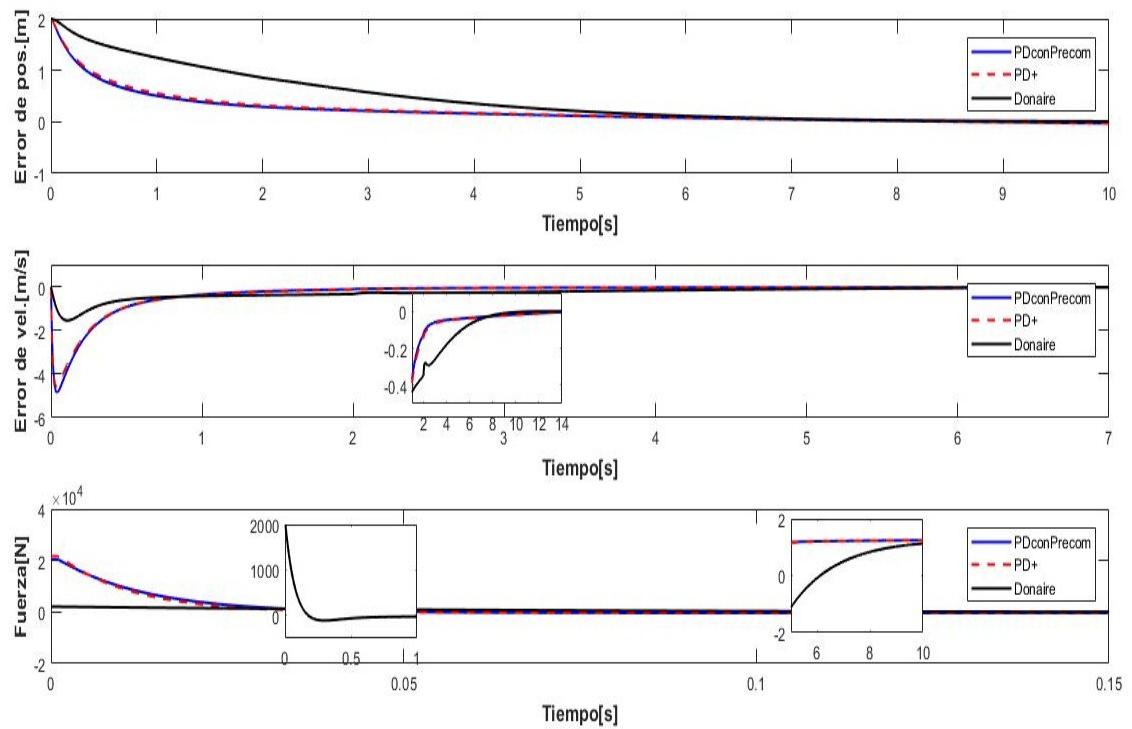


Fig. 4.21: Caso 4- Errores de posición y velocidad (coord. X) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

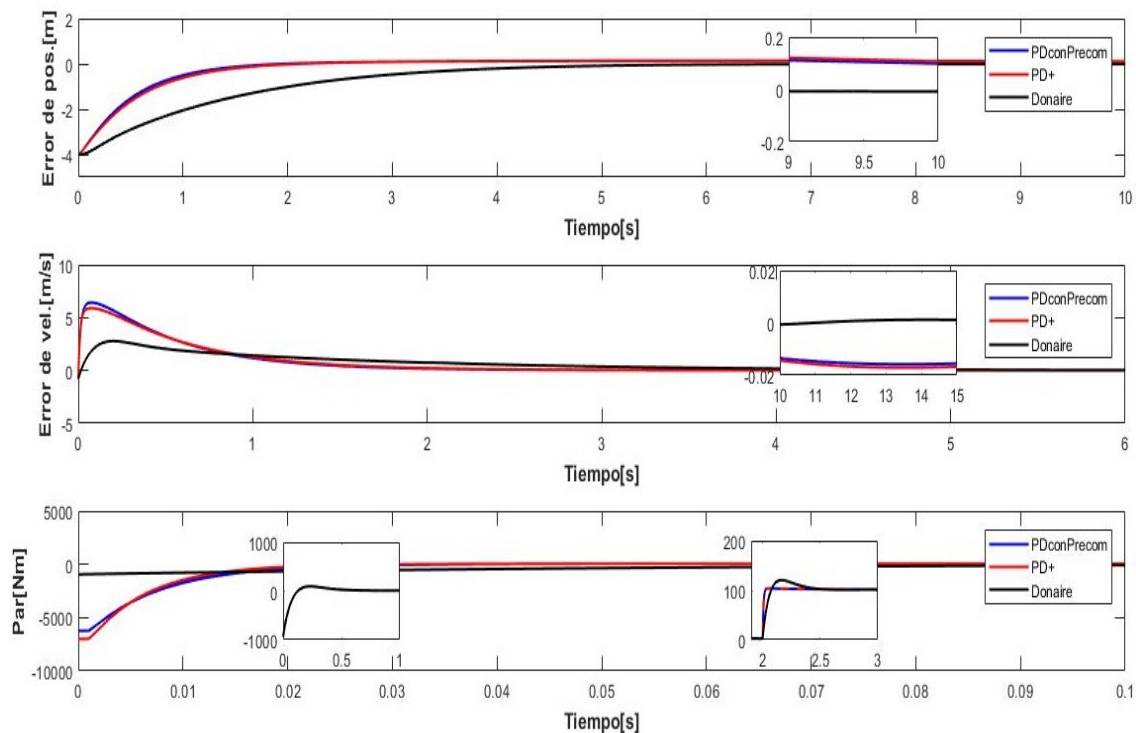


Fig. 4.22: Caso 4- Errores de posición y velocidad (coord. Y) y ley de control del Robot Móvil diferencial.

Controlador	Error MSE de pos.[m] (35-40s)		Error MSE de vel.[m/s] (35-40s)		Señal de control					
	Coord. X	Coord. Y	Coord. X	Coord. Y	Fuerza[N]			Par[Nm]		
					Min.	Prom.	Max.	Min.	Prom.	Max.
PDconPrecom.	0.0318	0.0492	0.0102	0.0066	-391.56	2.016	20398	-7004	95.689	103.61
PD+	0.0334	0.05	0.0105	0.0069	-329.23	2.0237	21657	-2480.3	92.768	129.67
A.Donaire	0.0006	0.0005	0.0002	0.0001	-110.61	1.9888	2103.2	-938.53	96.094	120.45

Tabla 4.12: Caso 4- Valores del error de posición y velocidad y señal de control-Robot Móvil diferencial.



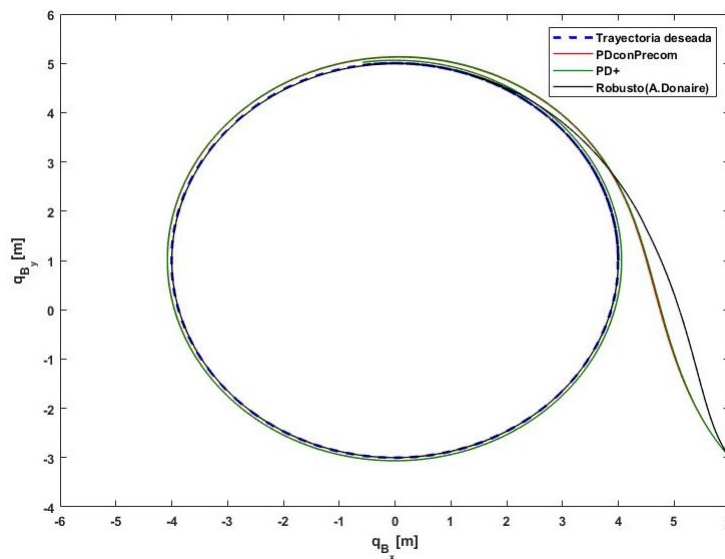


Fig. 4.23: Caso 4-Trayectorias del Robot Móvil diferencial.

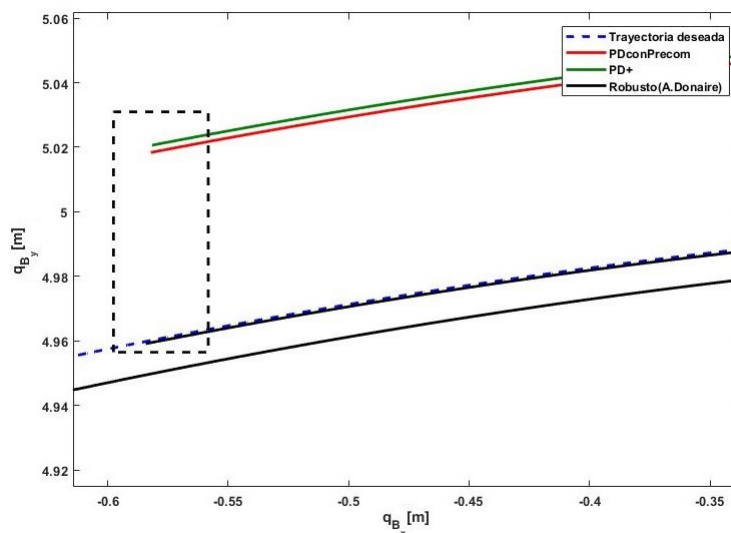


Fig. 4.24: Caso 4-Detalle de las trayectorias del Robot Móvil diferencial.

A pesar de la cercanía de las trayectorias obtenidas con los controladores *PD con precompensación* y *PD+* hacia la trayectoria deseada, en la figura (4.24) se observa con detalle el error de posición de ambos controladores, a diferencia del controlador robusto de *A.Donaire* en donde la acción integral permite solucionar el error de seguimiento en estado estable.

### 4.2.3. Conclusiones

Los algoritmos presentados en la sección de resultados cumplieron con el objetivo de control de seguimiento para los casos en que no había perturbación a la entrada. Sin embargo, con esta perturbación, los controladores *PD con precompensación* y *PD+* no consiguieron cumplir con el objetivo, a diferencia del controlador robusto de *A.Donaire* que logró cumplir con el objetivo de control debido a la acción integral que corrige el error en estado estable.

A pesar de que en la literatura se encuentran muchas contribuciones para el control de trayectoria para robots móviles de tipo diferencial, tomando en cuenta únicamente la cinemática del sistema, es decir, que las entradas son las velocidades lineal  $v_f$  y angular  $\omega$ ; los controladores propuestos, que están basados en la dinámica del robot, presentaron muy buena respuesta en el seguimiento de trayectoria aunque se omitiera el control de  $\theta$ . A pesar de ello, el error en orientación final del robot en cada caso fue despreciable, ya que la postura final del mismo coincide en buena medida con la trayectoria deseada como se muestra en la figura (4.25).

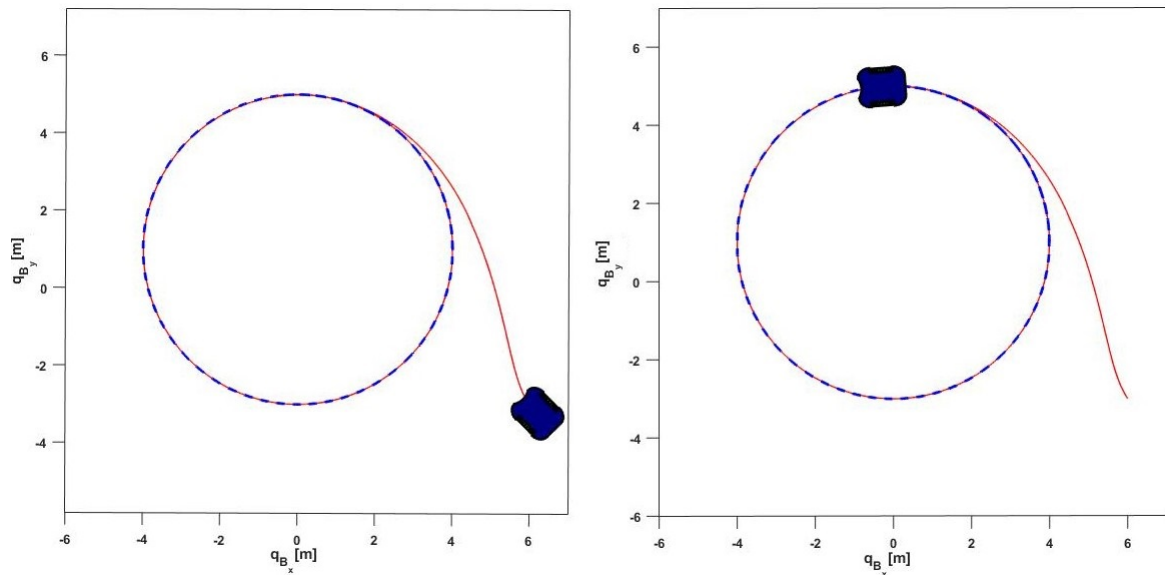


Fig. 4.25: Posición inicial y final del Robot móvil diferencial.

Aunque el controlador robusto de *A.Donaire* (adaptado al robot móvil diferencial) presenta mejor respuestas que los otros, este no conserva la estructura *PCH* en lazo cerrado debido a la aparición de la matriz  $S(q)$  en la estructura, por lo que se tendría que hacer un estudio más a fondo en sistemas mecánicos con restricciones *no-holónicas*; de esa manera, obtener un marco común de análisis

como se presentó en el Capítulo 3. Sin embargo eso está fuera del alcance de este trabajo.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Recomendaciones

Entre las diferentes aplicaciones que se le pueden dar a los controladores basados en pasividad, se encuentran los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCH), ya que han despertado gran interés en los últimos años debido a la formalidad que presentan al representar gran cantidad de sistemas no lineales.

La estructura *PCH* permite entender fácilmente cómo interactúan las trayectorias del sistema con el gradiente de la función de energía a través de la matriz de interconexiones  $J(x, t)$ . Para los sistemas mecánicos, que fue el caso particular de este trabajo, esta matriz rota al gradiente de la función de energía o Hamiltoniano  $90^\circ$  indicando que las trayectorias del sistema se mueven alrededor de esta función; permitiendo así, realizar un estudio de estabilidad empleando el Hamiltoniano como función candidata de Lyapunov. De esa manera, la ley de control a diseñar es tal que modifique la energía del sistema para obtener una nueva función de energía deseada. Sin embargo, para explotar las propiedades de la estructura *PCH* y seguir con esta motivación, es necesario que el sistema en lazo cerrado preserve la estructura. Esto con el fin de realizar más fácilmente el estudio de pasividad; por consiguiente, de estabilidad.

A pesar de los retos implicados en el diseño de controladores pasivos para sistemas Hamiltonianos, y que además preserven la estructura *PCH* en lazo cerrado, es importante señalar que los algoritmos de control de seguimiento comparten una relación muy significativa entre ellos (por lo menos para el caso de estudio de este trabajo); es decir, que nos hace reflexionar en la existencia de una ley de control general cuyos parámetros se puedan modificar para obtener diferentes algoritmos de control reportados en la literatura y que han sido obtenidos por diferentes metodologías.

Aunque los sistemas Hamiltonianos muestran ventaja sobre los sistemas Euler-Lagrange al poder estudiar un mayor número de sistemas no-lineales, es muy bien sabido que para los sistemas mecánicos, la demanda computacional para el control es mayor en los sistemas Hamiltonianos debido a la inversa de la matriz de inercia  $M(q)$ ; en consecuencia de esto, hubo necesidad de resolver  $(1/2)(\partial_q \dot{q}^T M(q) \dot{q})$  simbólicamente en MATLAB para después sustituir las trayectorias del sistema  $q(t)$  en las ecuaciones obtenidas considerando la propiedad  $(1/2)(\partial_q p^T M^{-1}(q) p) = -(1/2)(\partial_q \dot{q}^T M(q) \dot{q})$ . De esa manera, el tiempo en la simulación para cada controlador se redujo significativamente.

A continuación, se presentan algunas conclusiones y aportaciones para trabajos futuros, así como también algunas recomendaciones sobre este trabajo referente al control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos.

## 5.1. Conclusiones

En este trabajo se presentaron algunos algoritmos de control de seguimiento para sistemas Hamiltonianos disponibles en la literatura, en donde se propuso un marco común de desarrollo y análisis mediante transformaciones canónicas generalizadas, cuya formalidad permitió obtener tales algoritmos modificando ciertos parámetros del sistema transformado.

De acuerdo a lo anterior, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- El control de seguimiento mediante transformaciones canónicas generalizadas es una de las metodologías que permite convertir el problema de control seguimiento en uno de estabilización por medio de un cambio de coordenadas variante en el tiempo, cuya restricción se enfoca en que el cambio de coordenadas sea un sistema de error del original.
- Tanto el método de transformaciones canónicas generalizadas como el muy conocido *IDA-PBC* requieren de soluciones de EDP's, lo cual hace complejo el análisis y desarrollo del control para el solucionar problema tanto de estabilización como de seguimiento y que además preserve la estructura *PCH* en lazo cerrado.
- Las transformaciones canónicas propuestas para el control de seguimiento permiten obtener algunos de los resultados disponibles en la literatura. Sin

embargo, es necesario profundizar el estudio de estas transformaciones con el fin de poder obtener otros algoritmos recientemente reportados, por ejemplo el algoritmo que se presenta en [11], que utiliza un cambio de coordenadas similar al de [9] del cual se basó este trabajo, ofrece un controlador dividido en dos partes: la primera parte convierte una superficie deslizante en una variedad invariante; la segunda, hace que la variedad invariante sea atractiva. Por lo tanto, podría ser posible obtener tal algoritmo con las transformaciones propuestas, ya que el cambio de coordenadas es básicamente el mismo.

- En el caso de perturbaciones a la entrada, fue posible extender el sistema ya transformado al agregarse un nuevo estado y al aplicar nuevamente el método de transformaciones canónicas generalizadas; con el fin de obtener un control robusto mediante la adición de una acción integral tal como se ve en [9].
- A pesar de que en este trabajo se muestra un caso de estudio de un robot móvil con restricciones no-holonómicas, el resultado de este trabajo sólo se enfoca en la clase de sistemas mecánicos sin restricciones; por consiguiente, es necesario realizar un estudio sobre la clase de sistemas mecánicos con restricciones no-holonómicas aplicando esta metodología y obtener resultados que se encuentren disponibles en la literatura. Sin embargo, los controladores propuestos para el control de seguimiento del robot móvil diferencial, que están basados en los que se presentan en este trabajo, cumplieron con el objetivo de control; no obstante, no todos preservaron la estructura *PCH* en lazo cerrado.

## 5.2. Aportaciones

Las principales aportaciones en este trabajo de investigación fueron las siguientes:

- Desarrollo de un marco común de análisis mediante transformaciones canónicas generalizadas para el control de seguimiento en sistemas Hamiltonianos mecánicos tanto con perturbaciones a la entrada como sin ellas, permitiendo obtener algunos algoritmos reportados en la literatura por medio de la modificación de los parámetros de control.
- Implementación de los algoritmos de control de seguimiento para dos casos de estudio: Un brazo manipulador tipo rotacional y un robot móvil tipo diferencial.

- Se propusieron algunos algoritmos de control de seguimiento para el caso de un robot móvil tipo diferencial basados en la dinámica del sistema y sin considerar el control de orientación. Para este caso, el objetivo fue seguir una trayectoria circular con y sin presencia de perturbación a la entrada.
- Comparación y simulación de los algoritmos de control de seguimiento en cuatro escenarios diferentes para cada sistema.

Como resultado de este trabajo se desarrolló el siguiente producto:

E. J. Guajardo Benavides, E. Alcorta Garcia, "A development framework for tracking control in Hamiltonian systems", in Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, 2020.

### 5.3. Recomendaciones para trabajos futuros

Dentro de la investigación realizada en este trabajo y los resultados obtenidos, se tienen las siguientes recomendaciones a considerar para trabajos futuros y así continuar con el estudio enfocado al control de seguimiento de sistemas Hamiltonianos.

- Profundizar el estudio de las transformaciones canónicas generalizadas propuestas para la obtención de otros algoritmos de control de seguimiento para la clase de sistemas mecánicos.
- Extender el concepto de este trabajo a otra clase de sistemas Hamiltonianos, como por ejemplo: los sistemas electromecánicos con la estructura que presenta [3].
- Profundizar el estudio para el caso de sistemas con restricciones no-holonómicas, como el robot móvil diferencial. De esa manera, tener un resultado mas formal de los algoritmos propuestos para este caso, preservando la estructura *PCH* en lazo cerrado.
- Llevar a fase experimental los algoritmos presentados con el propósito de comparar los resultados con las simulaciones mostradas.

# Apéndice A

## Brazo robótico de 2 G.D.L

En este apéndice se presenta el modelo dinámico de un brazo robótico de 2 grados de libertad tipo rotativo. El modelo y parámetros están basados en el sistema que presenta [1], cuyas ecuaciones del movimiento son *Euler-Lagrange*.

El sistema se muestra en la figura A.1 que consiste en dos eslabones conectados a través de articulaciones rotacionales, cuyos parámetros se resumen en la tabla A.1.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud del eslabón 1	$l_1$	0.450	m
Longitud del eslabón 2	$l_2$	0.450	m
Distancia al centro de masa(eslabón 1)	$l_{c1}$	0.091	m
Distancia al centro de masa(eslabón 2)	$l_{c2}$	0.048	m
Masa del eslabón 1	$m_1$	23.902	kg
Masa del eslabón 2	$m_2$	3.880	kg
Inercia relativa al centro de masa(eslabón 1)	$I_1$	1.266	kg.m <sup>2</sup>
Inercia relativa al centro de masa(eslabón 2)	$I_2$	0.093	kg.m <sup>2</sup>
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/s <sup>2</sup>

Tabla A.1: Valores de los parámetros del robot



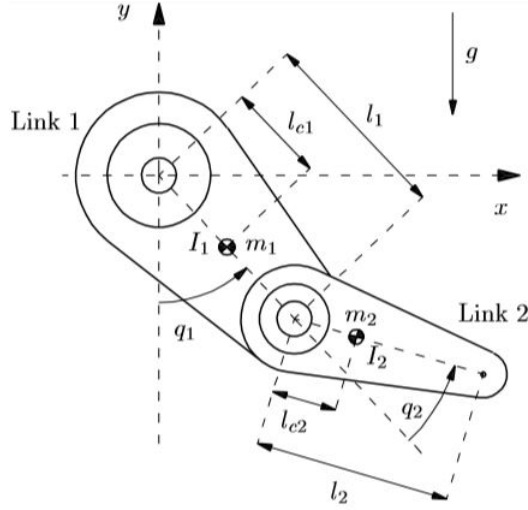


Fig. A.1: Brazo robótico de 2G.D.L. Tomada de [1]

## A.1. Modelo dinámico

Las ecuaciones del movimiento del robot manipulador mostrado en la figura A.1 son representadas por la siguiente expresión:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}}_{M(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix}}_{G(q)} = \tau \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(q) = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2$$

$$M_{21}(q) = M_{12}(q)$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0$$

$$G_1(q) = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

$$G_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

Sin embargo, dada la definición de la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis  $C(q, \dot{q})$  como:

$$C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}(\partial_q \dot{q}^T M(q)\dot{q})^T$$

entonces la expresión (A.1) sería equivalente a:

$$\underbrace{M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q}}_{\dot{p}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}(\partial_q \dot{q}^T M(q)\dot{q})^T\right)}_{\frac{1}{2}(\partial_q p^T M^{-1}(q)p)^T} + G(q) = \tau \Rightarrow \dot{p} + \partial_q H(q, p)^T = \tau$$

$$\therefore \dot{p} = -\partial_q H(q, p)^T + \tau$$

que representa al sistema en ecuaciones del movimiento de Hamilton como se vio en el Capítulo 2.

## A.2. Trayectorias deseadas

Con el fin de evaluar los diferentes algoritmos de control presentados en el Capítulo 3, se han seleccionado las siguientes trayectorias para el movimiento rotativo del robot como lo muestra [27]:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 [1 - e^{-2,0t^3}] + c_1 [1 - e^{-2,0t^3}] \sin(\omega_1 t) \\ b_2 [1 - e^{-1,8t^3}] + c_2 [1 - e^{-1,8t^3}] \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

para

$$\begin{aligned} a_1 &= \pi/45[\text{rad}], \\ a_2 &= \pi/180[\text{rad}], \\ b_1 &= \pi/4[\text{rad}], \\ b_2 &= \pi/3[\text{rad}], \\ c_1 &= \pi/18[\text{rad}], \\ c_2 &= 25\pi/36[\text{rad}], \\ \omega_1 &= 15[\text{rad/s}], \\ \omega_2 &= 3,5[\text{rad/s}] \end{aligned}$$

donde los subíndices 1,2 representan la primera y segunda articulación. La figura (A.2) muestra el perfil de las trayectorias deseadas para ambos eslabones.

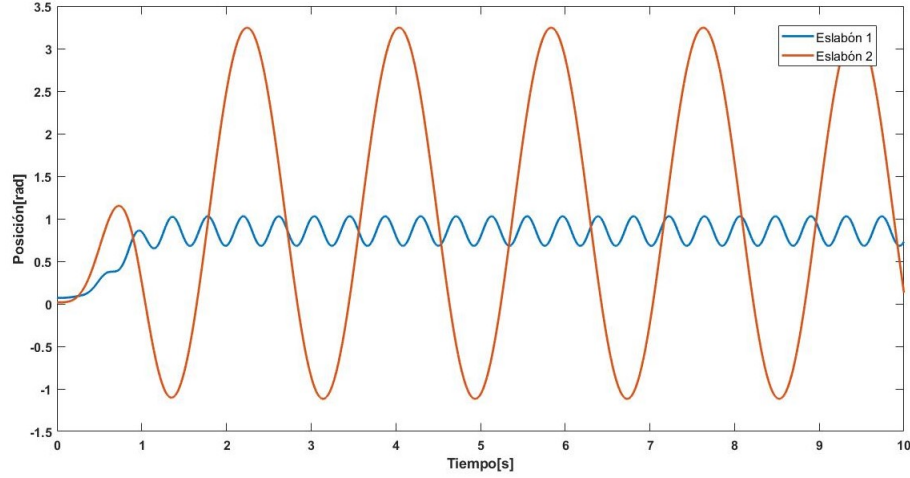


Fig. A.2: Posiciones de referencia

De (A.2) es posible obtener las velocidades y aceleraciones de referencia que se muestran en las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6b_1t^2e^{-2,0t^3} + 6c_1t^2e^{-2,0t^3} \sin(\omega_1t) + [c_1 - c_1e^{-2,0t^3}] \cos(\omega_1t)\omega_1 \\ 5,4b_2t^2e^{-1,8t^3} + 5,4c_2t^2e^{-1,8t^3} \sin(\omega_2t) + [c_2 - c_2e^{-1,8t^3}] \cos(\omega_2t)\omega_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} \\ \ddot{q}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12b_1te^{-2,0t^3} - 36b_1t^4e^{-2,0t^3} + 12c_1te^{-2,0t^3} \sin(\omega_1t) - 36c_1t^4e^{-2,0t^3} \sin(\omega_1t) \\ + 12c_1t^2e^{-2,0t^3} \cos(\omega_1t)\omega_1 - [c_1 - c_1e^{-2,0t^3}] \sin(\omega_1t)\omega_1^2 \\ 10,8b_2te^{-1,8t^3} - 29,2b_2t^4e^{-1,8t^3} + 10,8c_2te^{-1,8t^3} \sin(\omega_2t) - 29,2c_2t^4e^{-1,8t^3} \sin(\omega_2t) \\ + 10,8c_2t^2e^{-1,8t^3} \cos(\omega_2t)\omega_2 - [c_2 - c_2e^{-1,8t^3}] \sin(\omega_2t)\omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

cuyas gráficas se muestran en las figuras (A.3) y (A.4).

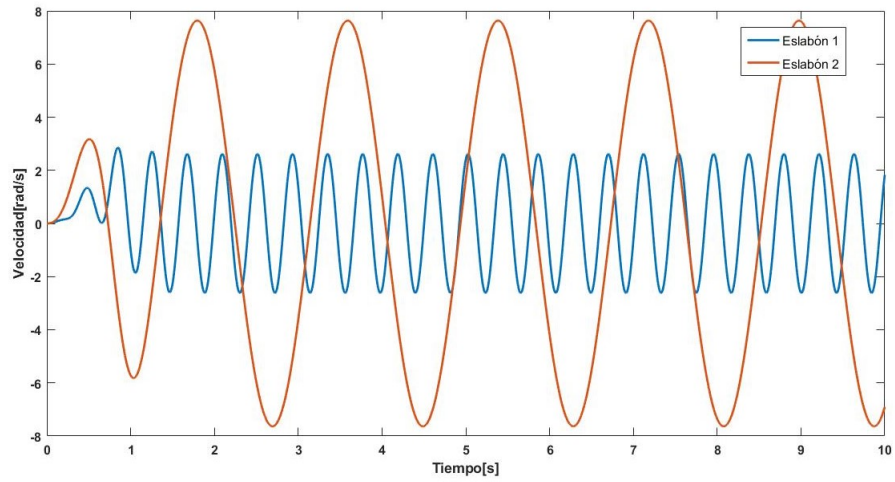


Fig. A.3: Velocidades de referencia

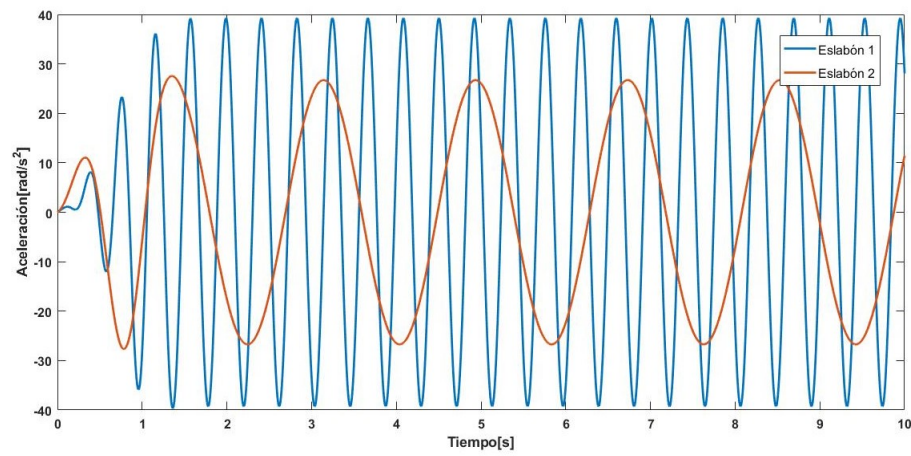


Fig. A.4: Aceleraciones de referencia

# Apéndice B

## Robot móvil de tipo diferencial

En este apéndice se presenta el modelo dinámico de un robot móvil tipo diferencial. El modelo está basado en el sistema que presenta [2], cuya estructura está representada en *PCH*. Los valores de los parámetros de la tabla B.1 fueron tomados de [32] y adaptados al robot que se muestra en la figura B.1.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Masa del robot	$m$	32	$kg$
Inercia del centro de masa	$I_{cm}$	18.509	$kg.m^2$
Fricción hacia adelante	$d_f$	2	$kg/s$
Fricción rotacional	$d_\theta$	0.01	$kg.m^2/s$
Distancia del eje de las ruedas hacia el centro de masa	$d_{AB}$	0.3	m
Distancia del centro de masa hacia el frente del robot	$d_{AC}$	0.5	m
Radio de las ruedas	$r$	0.15	m
Longitud de la mitad del eje de las ruedas	$R$	0.75	m

Tabla B.1: Valores de los parámetros del robot móvil diferencial

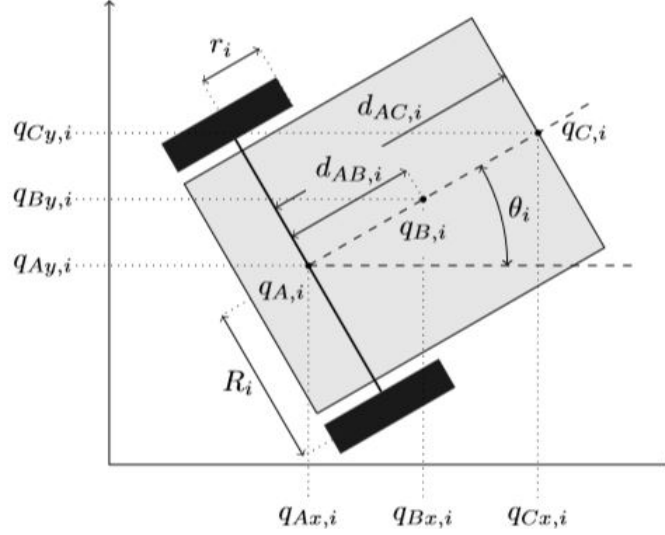


Fig. B.1: Robot móvil tipo diferencial. Tomada de [2]

## B.1. Modelo dinámico

Al ser el robot móvil diferencial un sistema mecánico, sin considerar el modelo de los motores de las ruedas, se puede modelar por las ecuaciones vistas en el Capítulo 2 para sistemas mecánicos con estructura *PCH*. En donde los estados del robot son las coordenadas del centro de masa; de manera que la dinámica sea la siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q H^T \\ \partial_p H^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \\ y &= G^T(q) \partial_p H^T \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

en donde  $q = [q_{B_x}, q_{B_y}, \theta]^T$ ,  $p = [p_{B_x}, p_{B_y}, p_\theta]^T$  con función de energía  $H = 1/2 p^T M^{-1} p$  para una matriz de inercia  $M = \text{diag}(m, m, I_{cm})$ .

La entrada  $u = [u_f, u_\theta]^T$  representa la fuerza lineal y el torque aplicado al robot a través de los motores de las ruedas; mientras que la salida  $y = [y_f, y_\theta]^T$ , la velocidad lineal y angular.

La matriz de entrada  $G(q)$  está dada por la siguiente expresión:

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

que relaciona las fuerzas (lineal y par) aplicadas al sistema con las coordenadas del centro de masa  $q_B$ .

Al tratarse de un robot móvil de tipo diferencial, existen restricciones en el movimiento debido a que no es omnidireccional y es necesario que el robot gire para ubicarse en el punto deseado; para este caso, estas son de tipo no-holonómicas por la siguiente expresión que representa las restricciones en el eje de las ruedas:

$$\sin \theta \dot{q}_{Ax} - \cos \theta \dot{q}_{Ay} = 0 \quad (\text{B.3})$$

cuya expresión puede ser reescrita como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & d_{AB} \end{bmatrix}}_{A^T(q)} \partial_p H^T = 0 \quad (\text{B.4})$$

como se define en [16].

Definiendo la siguiente matriz:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d_{AB} \sin \theta \\ \sin \theta & d_{AB} \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

tal que  $A^T(q)S(q) = 0$  y  $\text{rank}S(q) = 2$ . Ahora se define lo siguiente:

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} p_f \\ \bar{p}_\theta \end{bmatrix} \triangleq S^T(q)p \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{p}_s \triangleq A^T(q)p \quad (\text{B.7})$$

en donde  $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{p}_s \in \mathbb{R}$  [2]. Por lo tanto la dinámica del robot móvil en el espacio de estados con restricciones es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S(q) \\ -S^T(q) & \bar{C}(\bar{p}) - \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_q \bar{H}^T \\ \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u$$

$$y = \partial_{\bar{p}} \bar{H}^T \quad (\text{B.8})$$

con el Hamiltoniano  $\bar{H} = 1/2\bar{p}^T \bar{M}^{-1}\bar{p}$ , para  $\bar{M} = \text{diag}(M, I_{cm})$ . La matriz  $\bar{D} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz positiva semidefinida que corresponde a los términos de fricción o disipación del robot definida como  $\bar{D} = [d_f, d_\theta]^T$ . La matriz  $\bar{C}(\bar{p}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz antisimétrica que modela las fuerzas centrífugas y de Coriolis debido a que el

centro de masa del robot no se encuentra en el eje de las ruedas; esta se define como:

$$\bar{C}(\bar{p}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{md_{AB}}{md_{AB}^2 + I_{cm}} \bar{p}\theta \\ -\frac{md_{AB}}{md_{AB}^2 + I_{cm}} \bar{p}\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Con las definiciones anteriores, el sistema (B.8) representa el modelo dinámico del robot móvil tipo diferencial que se emplea en el Capítulo 4 para el estudio del control de seguimiento.

## B.2. Trayectorias deseadas

La trayectoria deseada del robot se define por las siguientes ecuaciones:

$$q_d = \begin{bmatrix} q_{Bx_d} \\ q_{By_d} \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cos \theta_d \\ 4 \sin \theta_d + 1 \\ 0,2t \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

que corresponde a la trayectoria circular mostrada en la figura B.2.

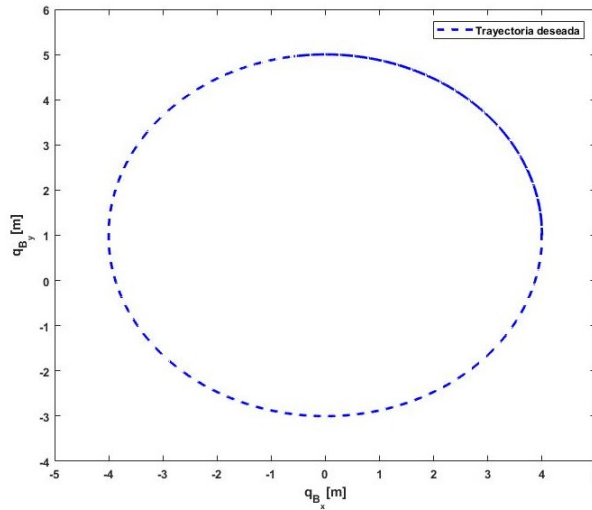


Fig. B.2: Trayectoria deseada del robot móvil



Por lo tanto las velocidades y aceleraciones deseadas se definen como:

$$\dot{q}_d = \begin{bmatrix} \dot{q}_{B_{x_d}} \\ \dot{q}_{B_{y_d}} \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \sin \theta_d \\ 0,8 \cos \theta_d \\ 0,2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\ddot{q}_d = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{B_{x_d}} \\ \ddot{q}_{B_{y_d}} \\ \ddot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,16 \cos \theta_d \\ -0,16 \sin \theta_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

De esta manera, las trayectorias deseadas de las coordenadas  $(q_{B_x}, q_{B_y})$  en el dominio del tiempo se representan en la figura B.3.

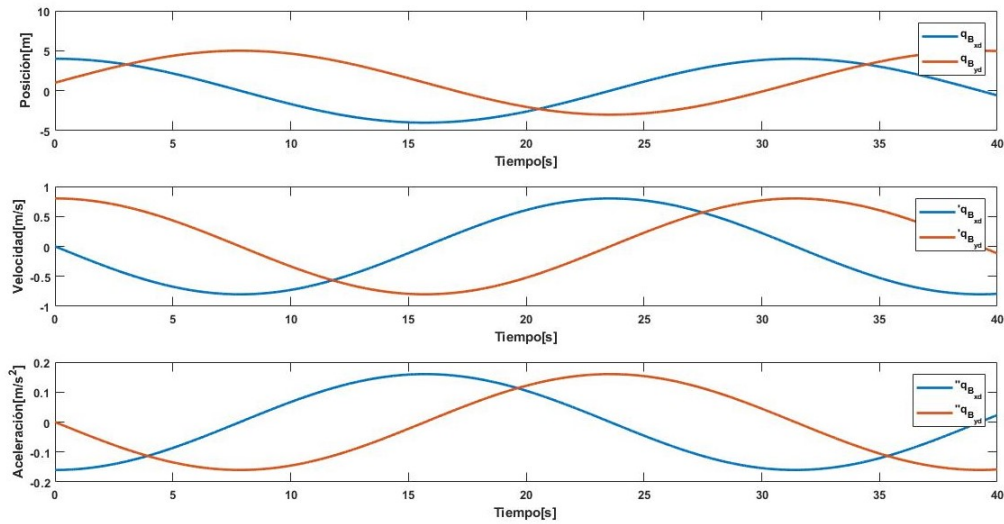


Fig. B.3: Trayectorias deseadas de posición, velocidad y aceleración de los estados  $q_{B_x}, q_{B_y}$  del robot móvil

# Bibliografía

- [1] R. Kelly, V. S. Davila, and J. A. L. Perez, *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] E. Vos, J. M. Scherpen, A. J. van der Schaft, and A. Postma, “Formation control of wheeled robots in the port-hamiltonian framework,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 6662–6667, 2014.
- [3] K. Fujimoto, K. Sakurama, and T. Sugie, “Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems via generalized canonical transformations,” *Automatica*, vol. 39, no. 12, pp. 2059–2069, 2003.
- [4] R. Ortega, A. Van Der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar, “Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems,” *Automatica*, vol. 38, no. 4, pp. 585–596, 2002.
- [5] K. Fujimoto and T. Sugie, “Canonical transformation and stabilization of generalized hamiltonian systems,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 31, no. 17, pp. 523–528, 1998.
- [6] B. M. Maschke and A. J. van der Schaft, “Port-controlled hamiltonian systems: modelling origins and systemtheoretic properties,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 25, no. 13, pp. 359–365, 1992.
- [7] K. Fujimoto and T. Sugie, “Canonical transformation and stabilization of generalized hamiltonian systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 42, no. 3, pp. 217–227, 2001.
- [8] J. I. Mulero-Martínez, “Canonical transformations used to derive robot control laws from a port-controlled hamiltonian system perspective,” *Automatica*, vol. 44, no. 9, pp. 2435–2440, 2008.

- [9] A. Donaire, T. Perez, and N. Bartlett, “Tracking control of a class of hamiltonian mechanical systems with disturbances,” 2014.
- [10] A. Donaire and S. Junco, “On the addition of integral action to port-controlled hamiltonian systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1910–1916, 2009.
- [11] R. Reyes-Báez, A. van der Schaft, and B. Jayawardhana, “Tracking control of fully-actuated port-hamiltonian mechanical systems via sliding manifolds and contraction analysis,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 8256–8261, 2017.
- [12] J. G. Romero, R. Ortega, and I. Sarras, “A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 3, pp. 818–823, 2014.
- [13] C. Batlle, J. Gomis, J. Pons, and N. Roman-Roy, “Equivalence between the lagrangian and hamiltonian formalism for constrained systems,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 27, no. 12, pp. 2953–2962, 1986.
- [14] R. Ortega, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Application*. Springer, first ed., 1998.
- [15] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch, “Global formulations of lagrangian and hamiltonian dynamics on embedded manifolds,” in *Proceedings of the IMA Conference on Mathematics of Robotics*, 2015.
- [16] A. J. Van der Schaft and A. Van Der Schaft, *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*, vol. 2. Springer, 2000.
- [17] A. v. d. SCHAFT, “Robust nonlinear control. port-controlled hamiltonian systems: Towards a theory for control and design of nonlinear physical systems.,” vol. 39, no. 2, pp. 91–98, 2000.
- [18] M. Ryalat, D. S. Laila, and M. M. Torbati, “Integral ida-pbc and pid-like control for port-controlled hamiltonian systems,” in *2015 American Control Conference (ACC)*, pp. 5365–5370, IEEE, 2015.
- [19] M. N. Sadiku, *Elements of electromagnetics*. Oxford university press, 2014.

- [20] R. Ortega, A. Van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar, “Energy-shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection,” in *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*, vol. 2, pp. 1646–1651, IEEE, 1999.
- [21] H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [22] A. Bravetti, H. Cruz, and D. Tapias, “Contact hamiltonian mechanics,” *Annals of Physics*, vol. 376, pp. 17–39, 2017.
- [23] C. Mondal, *Classical Mechanics*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2008.
- [24] R. Ortega and M. W. Spong, “Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial,” *Automatica*, vol. 25, no. 6, pp. 877–888, 1989.
- [25] D. Hill, J. Z. ANU, and R. Gregg, “20 years of passivity-based control (pbc): Theory and applications,” *Automatica*, vol. 25, no. 6, pp. 877–888, 1989.
- [26] K. Fujimoto and T. Sugie, “Time-varying stabilization of hamiltonian systems via generalized canonical transformations,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 33, no. 2, pp. 63–68, 2000.
- [27] V. Kelly, R. y Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Educación,S.A., Madrid, first ed., 2003.
- [28] A. Yaghmaei and M. J. Yazdanpanah, “Trajectory tracking of a class of port hamiltonian systems using timed ida-pbc technique,” in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 5037–5042, IEEE, 2015.
- [29] D. A. Dirksz and J. M. Scherpen, “On tracking control of rigid-joint robots with only position measurements,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 1510–1513, 2012.
- [30] Z. Wang and P. Goldsmith, “Modified energy-balancing-based control for the tracking problem,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, no. 4, pp. 310–322, 2008.
- [31] D. Diaz and R. Kelly, “On modeling and position tracking control of the generalized differential driven wheeled mobile robot,” in *2016 IEEE International Conference on Automatica (ICA-ACCA)*, pp. 1–6, IEEE, 2016.

- [32] J. L. Avendaño-Juárez, V. M. Hernández-Guzmán, and R. Silva-Ortigoza, "Velocity and current inner loops in a wheeled mobile robot," *Advanced Robotics*, vol. 24, no. 8-9, pp. 1385–1404, 2010.