Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrio Consistente con Variaciones Conjeturadas en un Modelo Financiero

por

Nancy Solis García

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León   Septiembre de 2021

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrio Consistente con Variaciones Conjeturadas en un Modelo Financiero

por

Nancy Solis García

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Septiembre de 2021

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Equilibrio Consistente con Variaciones Conjeturadas en un Modelo Financiero", realizada por la alumna Nancy Solis García, con número de matrícula 1147948, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dra. Nataliya Kalashnykova
Asesora

Dr. José Guadalupe Flores Muñiz
Co-asesor

Dr. Viacheslav Kalashnikov
Revisor

Dra. Lilia Alanís López
Revisora

Dr. Neale Ricardo Smith Cornejo
Revisor

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Coordinador del programa de Ciencias con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Septiembre de 2021

Índice general

Agradecimientos

Gracias a mi Dios por darme la salud para poder continuar con mi preparación académica, con él tengo todo, sin él nada.

Gracias a mis padres por apoyarme a continuar mis estudios, sin su apoyo esto no hubiera sido posible, gracias por cuidar de mis pequeños cada día que necesitaba salir a estudiar.

Gracias a mi esposo por alentarme a continuar preparándome, por cuidar de mis hijos cuando tenía que trabajar en mis proyectos, por estar dispuesto a cambiar de lugar de residencia para que ésto fuera posible.

Gracias a mis hijos por aceptar todos los cambios necesarios para que yo pudiera cumplir con las asignaciones del doctorado, por sus ánimos y abrazos que me alentaban a continuar esforzándome.

Gracias a la Dra. Nataliya por haber confiado en mí y aceptar ser mi asesora, por compartir conmigo sus conocimientos del área y enseñanzas de vida.

Gracias al Dr. Slava por sus ideas y aportaciones a este trabajo y por su apoyo en el congreso del INFORMS 2020.

Gracias al Dr. José Flores por estar al pendiente de mi trabajo, por darle seguimiento para que pudiera terminarse a tiempo, por estar dispuesto a trabajar en cualquier momento, por su amistad y calidad humana con sus estudiantes.

Gracias al Dr. Neale Smith y a la Dra. Lilia Alanís por aceptar ser parte del comité evaluador de este trabajo, por sus aportaciones, comentarios y sugerencias a fin de mejorar.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) por el apoyo económico para mis estudios de maestría y ahora doctorado.

Gracias a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) y al Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas (PCOM) por brindarme las facilidades y un área de trabajo durante mis estudios de posgrado.

Gracias a la Dra. Yadira Silva por invitarme a estudiar este doctorado, por su amistad y por ayudarme en mis clases.

Gracias a todos mis compañeros del PCOM que, con su ejemplo de perseverancia, me motivaron a seguir adelante y concluir con una meta más.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Revisión de Literatura

1.1.1 La importancia del equilibrio en la economía

A primera vista, la noción de equilibrio debería ser un tabú en el área de investigación de economía, ya que equilibrio significa estabilidad, significa que la situación sigue siendo la misma. Puede ser una buena característica si se habla de una estructura mecánica, pero se supone que una economía crece: si permanece igual, se le llama *estancamiento*, el cual no es un buen fenómeno. Este significado, no muy propio, es correcto si hablamos sobre una economía bien establecida, donde los precios son fijos. Sin embargo, en la economía actual, la que abarca la mayoría de los mercados, se cuestiona: ¿cómo determinar los precios? Los precios se calculan por la relación entre la oferta y la demanda, corresponden al *equilibrio* en donde la oferta y la demanda son exactamente igual, es decir, la cantidad óptima que el vendedor está dispuesto a vender a cierto precio es exactamente igual a la cantidad óptima que el comprador está dispuesto a pagar. Si por un precio determinado, la oferta supera a la demanda, esto significa que las tiendas no pueden vender todos los artículos al precio original, por lo que disminuyen el precio, se inicia la venta y la demanda aumenta, por el contrario, si la demanda excede la oferta, por ejemplo, si estamos buscando juguetes de moda para Navidad, las personas no pueden conseguir su juguete al precio normal, por lo que ofrecen precios más altos en la web y, efectivamente, el precio aumenta.

Por supuesto que las fluctuaciones descritas anteriormente son muy raras: en una tienda grande, hay algunos productos en oferta, pero para la mayoría de los productos, el precio es razonablemente estable. La razón de esta estabilidad es que las empresas intentan evitar tales fluctuaciones, que no son buenas ni para el cliente, ni para el fabricante, ni para el vendedor. Por lo anterior, las empresas analizan cuidadosamente la oferta y la demanda y, por lo tanto, calculan los precios de equilibrio. Algunos métodos para calcular el equilibrio se describen en Cournot (1897), Bagchi (1984), Bulavsky (1997), Bulavsky and Kalashnikov (2012), Flores-Muñiz et al. (2021), por mencionar algunos.

Idealmente, el sistema correspondiente debería tener un equilibrio único. Los casos en donde hay varios equilibrios son sistemas menos estables. El sistema puede oscilar continuamente entre dos equilibrios, lo que tampoco es bueno desde el punto de vista económico. Estos comportamientos cíclicos ocurrieron en el pasado, con periodos de auge, cuando tanto los precios como los salarios crecían, seguido de periodos de crisis, cuando tanto los precios como los salarios disminuían.

Desde el punto de vista de la matemática pura, es posible tener situaciones con dos o más equilibrios, esto puede pasar ya que hay funciones matemáticas con dos o más máximos. Sin embargo, en la mayoría de los modelos económicos realistas, el equilibrio es único. En el Capítulo 4 se presenta un ejemplo de un sistema económico simple donde el equilibrio no es único.

1.1.2 Equilibrio consistente con variaciones conjeturadas

Durante mucho tiempo se han estudiado los equilibrios en el sentido de Cournot, Stackelberg y competencia perfecta, entre otros. A continuación, se describen brevemente estos equilibrios, con el fin de que se observe la diferencia entre éstos y el equilibrio que se estudia en la presente tesis.

En el equilibrio de *Cournot*, las firmas buscan maximizar sus propios beneficios y toman su decisión sin saber la decisión que tomaron las otras firmas. Entre las características más comunes que comparte el equilibrio de Cournot son:

- hay más de una firma,
- todas fabrican el mismo producto,
- el número de firmas es fijo,
- ninguna firma está aliada con otra,

- cada firma supone que sólo el cambio en su volumen de producción afectará el volumen total del mercado,
- las firmas son racionales, es decir, buscarán maximizar sus beneficios individualmente y no tomarán decisiones que podrían llevarlos a la bancarrota.

En el equilibrio de *Stackelberg* las firmas no necesariamente eligen al mismo tiempo los volúmenes de producción, sino que la firma que más impacto tiene en el mercado elige su volumen de producción, a esta firma que tiene mayor impacto en el mercado se le llama firma *líder*, luego de que el líder escoge su volumen, las demás firmas que tienen un peso menor en el mercado escogen su volumen de producción, tomando como base la decisión de la firma *líder*, a éstas firmas se les llama firmas *seguidor*. El líder siempre juega primero; por tanto, los seguidores siempre saben cuál es la primera jugada. El líder sabe que los seguidores observan su acción para determinar la suya y el líder sabe que los seguidores no tienen la opción de cambiar las reglas del juego (es decir, no pueden transformar el equilibrio de Stackelberg en algún otro tipo).

El equilibrio de mercado en competencia perfecta se alcanza cuando el precio logra igualar la cantidad demandada con la ofrecida, es decir el punto donde la oferta y la demanda son exactamente iguales. Un mercado es de competencia perfecta si:

- las empresas carecen de poder para manipular el precio (precio-aceptantes), y se da una maximización del bienestar,
- existencia de muchos productores y consumidores,
- las empresas venden un producto homogéneo,
- intercambian información libremente.

El concepto de equilibrio con variaciones conjeturadas (CVE por sus siglas en inglés) introducido por Bowley (1924) y Frisch (1933) como otra posible solución en juegos estáticos establece que los jugadores se comportan de la siguiente manera: cada jugador escoge su mejor estrategia suponiendo que las estrategias de sus oponentes son una conjetura de su propia estrategia. Por ejemplo, como Laitner (1980) dijo: aunque las firmas tomen la decisión de sus volúmenes simultáneamente, siempre es posible hacer cambios de planes antes de que comience la producción. En otras palabras, al contrario del enfoque de Cournot-Nash, aquí cada firma supone que los cambios en sus volúmenes de producción afectarán las decisiones de sus oponentes. Esta anticipación (o variación conjeturada) es lo que compone el núcleo de la toma de decisiones con variaciones conjeturadas (o equilibrio con variaciones conjeturadas).

Los economistas han hecho un gran uso de una u otra forma del CVE para predecir el resultado de un comportamiento no cooperativo en muchas áreas de la economía. La literatura sobre variaciones conjeturadas se ha centrado principalmente en juegos de dos jugadores, ya que aparecen muchas dificultades conceptuales si el número de jugadores es mayor a dos.

En las obras de Bulavsky and Kalashnikov (1994) y Bulavsky and Kalashnikov (1995) ambos modelos fueron incluidos en una clase uniforme de modelos de oligopolios en los cuales el grado de influencia de cada agente se modela por un parámetro especial (un coeficiente de influencia). En más detalles, en lugar de la hipótesis clásica de Cournot (donde el coeficiente de influencia es igual a 1), se asume que cada productor hace una conjetura sobre las variaciones del volumen total del mercado en función de la variación de su propia producción como sigue:

$$\mathcal{G}_i(\eta) = \mathcal{G} + (\eta - q_i)w_i(\mathcal{G}, q_i) \tag{1}$$

en donde:

- $\mathcal{G}$ es el volumen total de producción del mercado;
- q_i es la cantidad producida actualmente por el productor i;
- η es la cantidad esperada para producir por el productor i;
- $\mathcal{G}_i(\eta)$ es el volumen total conjeturado por el productor i por el cambio de su volumen de producción q_i a η.
- $w_i(\mathcal{G}, q_i)$ es la función de conjetura, la cual representa el coeficiente de influencia del productor i, es decir, $w_i \equiv \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$.

En el modelo clásico de Cournot este coeficiente (w_i) es igual a 1 y en el modelo de competencia perfecta es igual a cero. En estos trabajos se demostró bajo suposiciones muy generales la existencia y unicidad de dichos equilibrios.

Un enfoque completamente nuevo fue propuesto por Bulavsky (1997), donde se supone que cada jugador no hace conjeturas acerca de la variación del volumen total en función de las variaciones de su propio volumen de producción, pero hace conjeturas acerca de las variaciones del precio del mercado en función de las variaciones infinitesimales de su producción. Con este cambio la conjetura fue notada por v_i, es decir $v_i \equiv \dfrac{\partial p}{\partial q_i}$, y se tiene una relación simple con la notación anterior w_i:

$$w_i = -\frac{v_i}{p'(\mathcal{G})},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Una vez que se conocen las conjeturas de todas las firmas (a las cuales también se les llaman coeficientes de influencia), cada firma realiza un procedimiento de verificación y comprueba si su coeficiente de influencia es coherente con los demás o no (es decir, si conjeturó correctamente su influencia o no). La situación cuando los coeficientes de influencia de todas las firmas son coherentes entre sí, es natural considerarlo como equilibrio, estos coeficientes de influencia se llaman consistentes y el equilibrio con conjeturas consistentes se llama equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE por sus siglas en inglés).

1.1.3 Equilibrio consistente en un modelo financiero con variaciones conjeturadas

Las aplicaciones en el área financiera han proporcionado un estímulo para el desarrollo de modelos y avances metodológicos. En particular, en teoría financiera (e.g., Markowitz, 1959; Sharpe, 1970) se ha construido una plataforma sólida para las investigaciones académicas y la práctica empírica.

En los modelos de equilibrio financiero competitivo general considerados en Nagurney (1999), el equilibrio proporciona los volúmenes de activos y pasivos, junto con los precios de los instrumentos. En este último trabajo, para resolver el problema de optimización del portafolio en cada sector, se asume que los cambios en la composición del portafolio no afectan el precio de los instrumentos (es decir, hay competencia perfecta), sin embargo, en algunos casos, se sabe que los cambios en la composición del portafolio afectará el precio de los instrumentos (por ejemplo, si un inversionista recorta las acciones en una determinada empresa, su precio está comprometido a subir debido a la reducción de su volumen total).

En contraste con Nagurney (1999), en Kalashnikov et al. (2015), para considerar la posible dependencia de los precios de los instrumentos sobre la composición del portafolio, se propone otra solución para el equilibrio financiero haciendo uso del equilibrio consistente con variaciones conjeturadas.

A pesar que el criterio de consistencia de Bulavsky (1997) fué desarrollado para un mercado de oligopolio, en Kalashnikov et al. (2019) está demostrado que dicho criterio es equivalente al equilibrio de Nash en un juego de múltiples jugadores al cual llamaron meta-juego. A diferencia del criterio de consistencia, el meta-juego se puede formular con cualquier modelo matemático que haga uso del equilibrio de variación conjetural, y su solución proporciona el equilibrio de variación conjetural consistente (CCVE).

En Nagurney (1999) y Kalashnikov et al. (2015), el equilibrio financiero se caracteriza como la solución de un problema de desigualdades variacionales y se demuestra la unicidad de la composición del portafolio de los sectores en el equilibrio financiero, sin embargo, el equilibrio financiero no es único ya que los precios del equilibrio no son únicos.

1.2 Motivación y Objetivo

El objetivo de este trabajo es el de extender los resultados de Kalashnikov et al. (2015), al probar la existencia del equilibrio financiero como la solución de un problema de programación cuadrática más simple. Como se muestra en un ejemplo simple, en el Capítulo 4, el equilibrio financiero no es único, por lo que, se hizo una caracterización de los equilibrios financieros que tienen exactamente la misma utilidad para todos los sectores, a los que se denominan equilibrio regularizado. No fué posible demostrar la unicidad de este equilibrio regularizado (un ejemplo de esto se encuentra en el Capítulo 5) por lo que la siguiente alternativa fué buscar propiedades para garantizar la unicidad. Luego, se formula el meta-juego como el juego de nivel superior, donde los sectores seleccionan sus coeficientes de influencia para conjeturar la dependencia de los precios de los instrumentos sobre la composición de su portafolio, y se demuestra la existencia del CCVE bajo la suposición de que los coeficientes de influencia están acotados.

1.3 Metodología

En este trabajo se estudia un modelo multi-sector de flujos y precios financieros con múltiples instrumentos. La función de utilidad para cada sector es considerada como una función cuadrática y las restricciones satisfacen una identidad de contabilidad que corresponde a las cuentas de flujo de fondos. Esto se modela como un juego de Stackelberg de dos niveles con múltiples líderes y múltiples seguidores, donde el conjunto de sectores son tanto los líderes en el nivel superior como los seguidores en el nivel inferior. En el nivel superior cada sector hace conjeturas sobre su influencia en el precio de los instrumentos, mientras en el nivel inferior, de acuerdo a sus conjeturas, cada sector determina la composición de su portafolio, es decir sus activos y pasivos. En ambos niveles, los sectores quieren minimizar el riesgo y al mismo tiempo buscan maximizar el valor de sus instrumentos activos y minimizar el valor de sus pasivos. Se demuestra la existencia de una solución para el nivel inferior, además se dan las condiciones que garanticen la unicidad de la solución del nivel inferior y la existencia de una solución para el nivel superior. Finalmente, se introduce el concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturadas para este modelo.

El resto de la tesis se compone de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta la especificación del modelo, así como el problema de optimización principal del portafolio de cada sector. En el Capítulo 3 se define el equilibrio exterior y se muestra que bajo esta definición el equilibrio no es único. En el Capítulo 4 se presenta un ejemplo sencillo que muestra que el equilibrio financiero no es único (Solis-García et al., 2021), para solucionar esto, se presenta el Teorema 1. En el Capítulo 5 se define el equilibrio exterior, el equilibrio regularizado, el problema de programación cuadrática estrictamente convexo y se introduce la notación matricial para este problema. En el Capítulo 6 se analiza el modelo financiero como un juego con múltiples jugadores, se define la consistencia de las conjeturas y se define el equilibrio interior. En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro. En el Capítulo 8 se presentan las demostraciones de los teoremas, proposiciones y corolarios que se desarrollaron en la tesis.

Capítulo 2

Especificación del modelo

Se considera una economía de m sectores, $m \in \mathbb{N}$, se denota cada sector por i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, y n instrumentos, $n \in \mathbb{N}$, se denota cada instrumento por j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. El volumen del instrumento j mantenido en el portafolio del sector i como activo se denota por $x_{ij} \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, mientras que el volumen del instrumento j mantenido en el portafolio del sector i como pasivo se denota por $y_{ij} \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, y el volumen total del portafolio del sector i se denota por $s_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ (se asume que estos volúmenes son exógenos al modelo). Para cada portafolio del sector i, los activos x_{ij}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, son agrupados dentro de un vector columna $x_i = (x_{i1} \ \cdots \ x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$, y los pasivos y_{ij}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, dentro del vector columna $y_i = (y_{i1} \ \cdots \ y_{in}^T) \in \mathbb{R}^n$. Además, los vectores de activos x_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, son agrupados de nuevo en el vector columna $x = (x_1^T \ \cdots \ x_m^T)^T \in \mathbb{R}^{mn}$, los vectores de pasivos y_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, en el vector columna $y = (y_1^T \ \cdots \ y_m^T)^T \in \mathbb{R}^{mn}$, y los volúmenes s_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, en el vector columna $s = (s_1 \ \cdots \ s_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

La utilidad de cada sector está dada por el valor esperado del portafolio en el futuro, el cual puede ser definido por la media y la incertidumbre alrededor de este. Para cada sector se asume que la media del valor esperado del portafolio en el siguiente periodo es igual al valor actual del portafolio en el mercado. La incertidumbre, o evaluación de riesgo, del valor futuro del portafolio se describe mediante una matriz de covarianza que representa las evaluaciones de riesgo de la desviación estándar de los precios para cada instrumento. La matriz de covarianza (de dimensión $2n \times 2n$) asociada a los activos y pasivos del sector i se denota por Q^i, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Ya que las expectativas de cada sector se establecen con respecto a la actividad actual del mercado, la maximización de la utilidad del sector puede ser escrita en términos del portafolio actual, así los sectores pueden comprar, vender o intercambiar sus activos y/o pasivos para optimizar la composición de sus portafolios.

Sea $r_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, el precio del instrumento j, agrupamos estos precios dentro de un vector columna $r = (r_1 \ \cdots \ r_n)^T \in \mathbb{R}^n$. A diferencia del modelo de Nagurney (1999) que hace uso de la suposición de competencia perfecta, es decir, supone que cada sector se comporta como si sus acciones no afectaran los precios de los instrumentos ni (en consecuencia) el comportamiento de los otros sectores, en el trabajo de Kalashnikov et al. (2015) adoptan el enfoque de variación conjeturada para modelos de oligopolios (Isac et al., 2002). Es decir, cada sector i asume que el precio del instrumento j puede aumentar cuando la diferencia $x_{ij} - y_{ij}$ entre el volumen de sus activos y pasivos disminuye, y esta tasa de este crecimiento se denota por $w_{ij} \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, la cual llamaremos coeficiente de influencia del sector i sobre el precio del instrumento j. Los coeficientes de influencia $w_{ij} \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, son agrupados en el vector columna $w_i = (w_{i1} \ \cdots \ w_{in})^T \in \mathbb{R}^n_+$, y estos vectores w_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, son agrupados nuevamente en el vector columna $w = (w_1^T \ \cdots \ w_m^T) \in \mathbb{R}^{mn}_+$.

El problema de optimización del portafolio del sector i se define como sigue, $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\min_{x_i, y_i} \quad \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(x_{ij} - y_{ij}), \tag{3}$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = s_i, \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ y_{ij} \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{5}$$

donde

$$r_{ij} = r_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = r_j - w_{ij}(x_{ij} - y_{ij}). \tag{6}$$

En el modelo anterior, para cada sector,

- la función objetivo (3) busca determinar la composición óptima de los instrumentos mantenidos como activos y pasivos, que minimicen el riesgo, y al mismo tiempo maximizar el valor de sus activos y minimizar el valor de sus pasivos,

- las restricciones (4) describen la identidad de contabilidad, la cual refleja el balance entre los activos y pasivos para el sector i,
- las restricciones (5) son las restricciones usuales de no-negatividad.

El vector r de los precios de los instrumentos son exógenos al problema de optimización de cada sector individual, mientras que el coeficiente w_{ij} refleja el grado de influencia del sector i sobre el precio del instrumento j conjeturado por el mismo sector. Es decir, el sector i conjetura que el precio esperado del instrumento j es igual al valor r_{ij} dado en la fórmula (6), al igual que antes, denotamos esto como $w_{ij} \equiv -\dfrac{\partial r_j}{\partial(x_{ij} - y_{ij})}$.

Como Q^i es una matriz de covarianzas, podemos asumir que es definida positiva, por lo que la función objetivo para cada portafolio del sector es un problema de optimización estrictamente convexo.

Capítulo 3

Equilibrio exterior

En este capítulo, se define el equilibrio exterior y se muestra que bajo este concepto el equilibrio nunca es único.

Para comenzar, se definen las desigualdades que rigen los precios de los instrumentos en la economía. Los precios proporcionan información del sistema económico para los sectores respecto al equilibrio del total de activos y pasivos de cada instrumento. Además, asumimos que hay disposición libre, por lo que los precios de los instrumentos son no-negativos. Entonces, las condiciones del sistema económico que garantiza la liquidación del mercado toma la siguiente forma: Para cada instrumento j, $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - y_{ij}) \begin{cases} = 0, & \text{si } r_j > 0, \\ \geq 0, & \text{si } r_j = 0. \end{cases} \tag{7}$$

En otras palabras, si el precio es positivo, el mercado debe estar en equilibrio para el instrumento j, por otra parte, si hay un exceso de un instrumento en la economía, el precio de este instrumento debe ser cero. Combinando los problemas de optimización del portafolio de todos los sectores, (3)-(6), y la condición de equilibrio del mercado (7) llegamos a la siguiente definición, la cual se llama equilibrio exterior. Este concepto ha sido definido en trabajos que utilizan el modelo de variaciones conjeturadas consistentes para mercados de oligopolios (e.g., Kalashnikov et al., 2011; Flores-Muñiz et al., 2021).

Definición 1. *Para un vector fijo de conjeturas $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, un vector $(x^*, y^*, r^*) \in \mathbb{R}^{2mn+n}$ de activos, pasivos y precios de instrumentos, es llamado un equilibrio exterior para el modelo financiero si los vectores x^* y y^* son una solución óptima para los problemas de* *optimización de cada sector,* (3)-(6)*, con* $r = r^*$*, y la condición de equilibrio de mercado* (7) *se satisfacen para todos los instrumentos* j*,* $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cualquier vector de conjeturas $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$ hay un número infinito de equilibrios exteriores. Por ejemplo, si el vector (x^*, y^*, r^*) es un equilibrio exterior, entonces el vector (x^*, y^*, r^{**}), donde $r_j^{**} = r_j^* + \varepsilon$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $\varepsilon > 0$, también es un equilibrio exterior. Un ejemplo simple de esta situación se presenta en el Capítulo 4, mostrando que, incluso en el caso más simple, el equilibrio financiero no es único. Sin embargo, para estos dos equilibrios, (x^*, y^*, r^*) y (x^*, y^*, r^{**}) la función objetivo (3) tiene el mismo valor (mínimo) para todos los sectores. En el capítulo 5 se caracterizan estos equilibrios que tienen el mismo valor en la función objetivo (3) y se define otro equilibrio (regularizado), el cual, si puede ser único.

Capítulo 4

El equilibrio no es único, incluso en los casos más simples

Al tratar de obtener el equilibrio exterior, para el problema en estudio, observamos que para cualquier vector de conjeturas $w \in \mathbb{R}_{+}^{mn}$ hay un número infinito de equilibrios exteriores. Por lo anterior, decidimos mostrar un ejemplo desde el punto de vista económico con sólo dos sectores, dos instrumentos, una situación simple y fácil para probar el equilibrio.

Se considera la situación cuando sólo se tienen 2 instrumentos: dos acciones, etiquetadas como A y B. Al principio el sector 1 tiene una cierta cantidad del instrumento A y el sector 2 tiene una cantidad similar de otro instrumento B. Vamos a llamar a esta cantidad (la misma para ambos sectores) a.

Se asume que el sector 1 considera que el instrumento A es demasiado arriesgado y el instrumento B es mucho menos arriesgado y que, por el contrario, el sector 2 considera que el instrumento B es demasiado arriesgado y el instrumento A menos arriesgado.

Para simplificar, se asume que, de acuerdo al sector 1, la desviación estándar del instrumento A es $\sigma_A > 0$, mientras que la desviación de B es despreciable por lo que puede tomarse como 0; similarmente, de acuerdo al sector 2, la desviación estándar del instrumento B es $\sigma_B > 0$, mientras que la desviación estándar de A es despreciable, por lo que puede tomarse como 0.

Como resultado de esta diferencia de opiniones, se tiene que, el sector 1 quiere cambiar su parte del instrumento A con la parte del instrumento B del sector 2, y el sector 2 está dispuesto a hacer este intercambio.

Entonces, aquí se tiene oferta y demanda. Necesitamos averiguar como cambian los precios de estos dos instrumentos.

El hecho de que dos sectores tengan predicciones diferentes acerca del mismo instrumento tiene perfecto sentido. Si todos los sectores tuvieran las mismas predicciones sobre el comportamiento de los instrumentos, no habría incentivo para la negociación de instrumentos. Entonces, el mismo hecho de que haya una gran cantidad del instrumento cambiando de manos todo el tiempo es un buen indicador de que diferentes sectores tienen diferentes predicciones de precios en los instrumentos.

¿Porqué intercambiar instrumentos y no sólo comprar y/o vender? Bien, las personas comúnmente mantienen algo de dinero en efectivo. Sin embargo, desde el punto de vista económico, esto no tiene sentido: si invertimos dinero en algún instrumento financiero, este probablemente se incrementará, mientras que si lo mantenemos en efectivo, esto no pasará. Debido a esto, ambos sectores no tienen dinero para comprar acciones adicionales para sus portafolios, sin embargo, pueden intercambiar acciones.

Para descubrir como afectará el comportamiento del sector los cambios de precios, recordemos que en primer lugar la gente toma decisiones racionales. De acuerdo a la teoría de decisión (ver, por ejemplo Fishburn, 1969; Kreinovich, 2014; Nguyen et al., 2009) un sector racional maximiza el valor esperado de su utilidad u. En general, la utilidad u (no lineal) depende de la cantidad total de dinero π.

Si la cantidad total original de dinero era π_0, entonces la utilidad correspondiente a la cantidad adicional ξ es igual a $\tilde{u}(\pi_0 + \xi)$. No consideramos situaciones en las cuales los sectores apuestan sus propiedades enteras, estamos considerando una transacción financiera de rutina. En tal transacción, la ganancia esperada ξ es mucho menor que la cantidad total de dinero π_0 que tiene el sector. Dado que $\xi \ll \pi_0$, podemos expandir la dependencia $\tilde{u}(\pi_0 + \xi)$ en series de Taylor y mantener sólo los primeros términos en esta expansión.

La aproximación más simple es lineal, pero como nos gustaría tomar en cuenta la no-linealidad de la función $u(\pi)$, tomamos el término cuadrático también. Entonces, obtenemos

$$\tilde{u}(\pi_0 + \xi) \approx u(\pi_0) + u'(\pi_0) \cdot \xi + \frac{u''(\pi_0)}{2} \cdot \xi^2, \tag{8}$$

donde, $u'(\pi_0)$ denota la derivada y $u''(\pi_0)$ denota la segunda derivada. Cuanto más dinero tengamos, mejor, por lo que la función $u(\pi)$ está incrementando y $u'(\pi_0) > 0$. Por otro lado, el incremento en nuestra utilidad causado por tener un dólar adicional es mucho mayor cuando la cantidad original era baja y mucho más baja cuando este dólar se agrega a la cantidad original grande.

Así, el valor de $u'(\pi)$ decrece con π y por lo tanto, la derivada de este valor es negativo: $u''(\pi_0) < 0$.

Por la ecuación (8), el valor esperado de la utilidad tiene la siguiente forma

$$E[\tilde{u}(\pi_0 + \xi)] = u(\pi_0) + u'(\pi_0) \cdot E[\xi] + \frac{u''(\pi_0)}{2} \cdot E[\xi^2]. \tag{9}$$

Denotamos la ganancia monetaria esperada por

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} E[\xi].$$

En estos términos, el segundo momento $E[\xi^2]$ puede ser representado como $\mu^2 + \sigma^2$, donde σ es la desviación estándar, por lo tanto, la ecuación (9) toma la forma

$$E[\tilde{u}(\pi_0 + \xi)] = u(\pi_0) + u'(\pi_0) \cdot \mu + \frac{u''(\pi_0)}{2} \cdot (\mu^2 + \sigma^2). \tag{10}$$

Para las acciones, la ganancia esperada usualmente es pequeña, al menos cuando consideramos las ganancias a corto plazo, mientras que las fluctuaciones son mucho mayores. Por lo tanto, $\mu \ll \sigma$, así que podamos ignorar con seguridad el término μ^2 en la suma $\mu^2 + \sigma^2$, y obtener la siguiente forma mas simplificada

$$E[\tilde{u}(\pi_0 + \xi)] = u(\pi_0) + u'(\pi_0) \cdot \mu + \frac{u''(\pi_0)}{2} \cdot \sigma^2. \tag{11}$$

Si agregamos la misma constante $u(\pi_0)$ a todos los valores de la función objetivo, esto no cambia los valores de esta función. Por lo tanto, maximizando la función (11) y maximizando la misma función restando la constante $u(\pi_0)$, seleccionamos exactamente las mismas decisiones óptimas. Entonces, para simplificar, podemos restar la constante y considerar la siguiente función objetivo simplificada

$$u'(\pi_0) \cdot \mu + \frac{u''(\pi_0)}{2} \cdot \sigma^2. \tag{12}$$

Similarmente, si multiplicamos todos los valores de la función objetivo por el mismo número positivo, los valores no cambian. Por lo tanto, maximizando la función (12) y maximizando la misma función dividida por $u'(\pi_0)$ se seleccionan las mismas decisiones óptimas. Entonces, simplificando, podemos dividir por esta constante y considerar la siguiente función simplificada

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \mu - \alpha \cdot \sigma^2,$$

donde denotamos

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{u''(\pi_0)}{2u'(\pi_0)}.$$

Llamaremos a esta función *utilidad esperada reescalada* o simplemente *utilidad*.

De acuerdo a nuestro análisis, para describir la toma de decisiones de un sector, necesitamos conocer el valor α que describe este sector. Denotamos los valores de la cantidad α correspondiente a cada sector por α_A y α_B.

Queremos encontrar los precios relativos p_A y p_B, que conducen al equilibrio en el cual ambos sectores están interesados en negociar, es decir, ¿cuánto pagaremos el siguiente año por lo que cuesta un dólar hoy?. En la actualidad, las acciones que ellos cambian tiene el mismo precio, pero hacen el intercambio porque tienen diferentes espectativas sobre cómo cambiarán los precios el siguiente año. Consideremos c la proporción de producto que intercambian los sectores. Entonces, estimamos la utilidad correspondiente a ambos sectores.

Para el sector 1:

- el valor de su cantidad $c \cdot a$ de Stock de B para el siguiente año será $p_B \cdot c \cdot a$
- el valor de su cantidad $(1 - c) \cdot a$ de Stock de A será $p_A \cdot (1 - c) \cdot a$, y
- el valor de la varianza que, según su creencia, proviene exclusivamente del Stock A es igual a

$$(1 - c)^2 \cdot \sigma_A^2.$$

Por lo tanto, la utilidad total $U_1(c)$ del sector 1 es igual a

$$U_1(c) = p_B \cdot c \cdot a + p_A \cdot (1-c) \cdot a - \alpha_A \cdot \sigma_A^2 \cdot (1-c)^2. \tag{13}$$

Similarmente, para el sector 2:

- el valor de su cantidad $c \cdot a$ de Stock de A para el siguiente año será $p_A \cdot c \cdot a$
- el valor de su cantidad $(1-c) \cdot a$ de Stock de B será $p_B \cdot (1-c) \cdot a$, y
- el valor de la varianza que, según su creencia, proviene exclusivamente del Stock B es igual a
$$(1-c)^2 \cdot \sigma_B^2.$$

Por lo tanto, la utilidad total $U_2(c)$ del sector 2 es igual a

$$U_2(c) = p_A \cdot c \cdot a + p_B \cdot (1-c) \cdot a - \alpha_B \cdot \sigma_B^2 \cdot (1-c)^2. \tag{14}$$

En esta situación ¿qué significa tener un equilibrio? En nuestro ejemplo: El sector 1 encuentra el valor de c en el intervalo $[0, 1]$ al maximizar la expresión (13), mientras que el sector 2 encuentra el valor de c maximizando la expresión (14).

El equilibrio es cuando ambas optimizaciones conducen a el mismo valor óptimo c.

Entonces, necesitamos encontrar los precios (relativos) p_A y p_B para los dos problemas de optimización:

- maximizar la utilidad (13) del sector 1 y
- maximizar la utilidad (14) del sector 2

que llevan al mismo valor c. Demostramos que estos precios de equilibrio no son determinados de manera única, hay diferentes pares (p_A, p_B) para los cuales tenemos un equilibrio.

Primer caso de equilibrio: La idea principal es mantener los precios como están, es decir, $p_A = p_B = 1$. En este caso, la expresión (13) toma la forma

$$U_1(c) = c \cdot a + (1-c) \cdot a - \alpha_A \cdot \sigma_A^2 \cdot (1-c)^2 = a - \alpha_A \cdot \sigma_A^2 \cdot (1-c)^2,$$

y la expresión (14) toma la forma

$$U_2(c) = c \cdot a + (1-c) \cdot a - \alpha_B \cdot \sigma_B^2 \cdot (1-c)^2 = a - \alpha_B \cdot \sigma_B^2 \cdot (1-c)^2.$$

En ambos casos, la utilidad es la máxima cuando el término negativo es lo más pequeño, es decir, cuando $1 - c = 0$ y $c = 1$.

En ambos problemas de optimización, tenemos el mismo valor óptimo, así que en efecto este es un equilibrio.

Segundo caso de equilibrio: ¿Qúe tanto aumentan los precios?, es decir, ¿se tiene que $p_A = p_B > 1$? En este caso, argumentos similares muestran que el mismo valor $c = 1$ será alcanzado.

Entonces, tenemos el nuevo par de precios, que también tienen un equilibrio.

Esto es exactamente lo que buscábamos. Por lo tanto, en esta situación simple tenemos un equilibrio no único.

Por supuesto, una "no unicidad" similar puede ser observado en todas las situaciones en las que las funciones objetivos son lineales. En tales situaciones, si simplemente se multiplican todos los precios por una constante, todas las igualdades y las desigualdades seguirán siendo válidas, y por lo tanto, lo que fue un equilibrio sigue siendo un equilibrio.

Sin embargo, en nuestro caso, la situación es diferente: las funciones objetivos no son lineales. En este caso, en general, simplemente multiplicar todos los precios por una constante no llevará a un equilibrio, e incluso si conduce a un equilibrio, la combinación óptima resultante es, en general, diferente.

Capítulo 5

Equilibrio regularizado

En este capítulo se caracterizan los equilibrios que tienen el mismo valor en la función objetivo (3), para esto, se define otro concepto de equilibrio que sólo considera las diferencias de los precios $\rho_j = r_j - r_n$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Esta definición se presenta a continuación:

Definición 2. *Para un vector fijo de conjeturas $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, un vector $(x^*, y^*, \rho^*) \in \mathbb{R}^{2mn+n-1}$ es llamado un equilibrio regularizado si los vectores x^* y y^* son una solución óptima para los problemas de programación cuadrática*

$$\min_{x_i, y_i} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j (x_{ij} - y_{ij}), \tag{15}$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = s_i, \tag{16}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; y_{ij} \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{17}$$

para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, y la condición

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - y_{ij}) = 0 \tag{18}$$

es válida para todo j, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

La siguiente proposición establece la relación entre un equilibrio regularizado y un equilibrio exterior.

Proposición 1. *Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, si (x^*, y^*, r^*) es un equilibrio exterior, entonces el vector (x^*, y^*, ρ^*), donde $\rho^* = (r_1^* - r_n^*, \ldots, r_{n-1}^* - r_n^*)$ es un equilibrio regularizado y la ecuación*

$$-\sum_{j=1}^{n} r_j^*(x_{ij}^* - y_{ij}^*) = -\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j^*(x_{ij}^* - y_{ij}^*) \tag{19}$$

se cumple para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por otro lado, si (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado, entonces, existe r^* tal que $\rho^* = (r_1^* - r_n^*, \ldots, r_{n-1}^* - r_n^*)$, el vector (x^*, y^*, r^*) es un equilibrio exterior y la ecuación (19) *se cumple para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Demostración. Ver apéndice 8.1.

La proposición anterior nos permite relacionar cada equilibrio exterior (x^*, y^*, r^*) con un único equilibrio regularizado (x^*, y^*, ρ^*) definiendo $\rho^* = (r_1^* - r_n^*, \ldots, r_{n-1}^* - r_n^*)$, más aún, para este equilibrio regularizado, la función objetivo (15) de todos los sectores tiene el mismo valor que la función objetivo definida por (3). Es decir, para cada sector, su problema de optimización del portafolio depende de las diferencias $r_j - r_n$ entre el precio del instrumento j y el precio del instrumento n, en lugar del vector de precios r en sí. Por esta razón, los resultados de este trabajo se presentan en términos del equilibrio regularizado.

En Kalashnikov et al. (2015) el equilibrio exterior para el modelo financiero es caracterizado como la solución de un problema de desigualdades variacionales. En dicho trabajo se presentaron teoremas que caracterizan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad del equilibrio exterior. En nuestro trabajo se demuestra un resultado más fuerte, establecido en el siguiente teorema y su corolario.

Teorema 1. *Para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, el vector $(x^*, y^*, \rho^*) \in \mathbb{R}^{2mn+n-1}$ es un equilibrio regularizado si y sólo si los vectores x^* y y^* son la solución óptima para el siguiente problema de programación cuadrática estrictamente convexo*

$$\min_{x,y} \quad \sum_{i=1}^{m} \left[\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 \right], \tag{20}$$

$$\textit{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = s_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - y_{ij}) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n-1\}, \tag{22}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; y_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \; j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{23}$$

y el vector ρ^* sirve como los multiplicadores de Lagrange para el conjunto de restricciones (22).

Demostración. Ver Apéndice 8.2.

Corolario 1. *Para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$ existe un equilibrio regularizado. Además si (x^*, y^*, ρ^*) y $(x^{**}, y^{**}, \rho^{**})$ son 2 equilibrios regularizados, entonces, $x^* = x^{**}$ y $y^* = y^{**}$.*

Demostración. Ver Apéndice 8.3.

Corolario 2. *Para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$ existe un equilibrio exterior.*

Demostración. Ver Apéndice 8.4.

El teorema anterior y sus corolarios garantizan la existencia de el equilibrio regularizado (o exterior) resolviendo el problema de programación cuadrático (20)-(23) donde la función objetivo es la suma de las funciones objetivos de todos los sectores (15), quitando los términos correspondientes a los valores ρ_j, mientras que las restricciones corresponden a las restricciones (16)-(17) de todos los sectores junto con la condición (18) para todo j, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Para cualquier vector fijo de coeficiente de influencia $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, el equilibrio regularizado caracteriza todos los equilibrios exteriores que generan el mismo valor al momento de evaluar la sumatoria en el lado izquierdo de (19). Aun así, el equilibro regularizado puede no ser único en algunos casos, por ejemplo, consideremos la siguiente instancia con $m = 2$ sectores, $n = 2$ instrumentos, y los coeficientes de influencia $w_{ij} = 0$ para todo i, $j \in \{1, 2\}$:

El problema de optimización del portafolio del sector 1 es:

$$\min_{x_1, y_1} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} - \rho_1(x_{11} - y_{11}), \tag{24}$$

$$\text{sujeto a} \qquad x_{11} + x_{12} = 10, \tag{25}$$

$$y_{11} + y_{12} = 10, \tag{26}$$

$$x_{11}, x_{12}, y_{11}, y_{12} \geq 0, \tag{27}$$

El problema de optimización del portafolio del sector 2 es:

$$\min_{x_2, y_2} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 50 & 25 & 20 & 5 \\ 25 & 40 & -3 & 15 \\ 20 & -3 & 20 & 5 \\ 5 & 15 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} - \rho_1(x_{21} - y_{21}), \tag{28}$$

$$\text{sujeto a} \qquad x_{21} + x_{22} = 10, \tag{29}$$

$$y_{21} + y_{22} = 10, \tag{30}$$

$$x_{21}, x_{22}, y_{21}, y_{22} \geq 0, \tag{31}$$

Mientras que la condición de equilibrio del mercado es

$$x_{11} - y_{11} + x_{21} - y_{21} = 0 \tag{32}$$

Resolviendo el sistema no lineal de igualdades y desigualdades dado por las condiciones de KKT de los problemas de optimización cuadráticos (24)-(27) y (28)-(31), junto con la igualdad (32), encontramos que todas las soluciones para esta instancia son las siguientes:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad y^* = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1^* \in [20, 60]. \tag{33}$$

Es fácil ver que, aunque x^* y y^* son únicos, hay infinitas soluciones ya que ρ_1^* puede tomar cualquier valor dentro del intervalo cerrado $[20, 60]$. Además, para 2 equilibrios regularizados diferentes, el valor de la función objetivo (15) también puede ser diferente, por ejemplo, si tomamos el equilibrio regularizado con $\rho_1^* = 20$, obtenemos que las funciones objetivo de los sectores 1 y 2 toman el valor mínimo $f_1^* = 100$ y $f_2^* = 5600$, respectivamente, mientras que tomando el equilibrio regularizado con $\rho_1^* = 60$, obtenemos que las funciones objetivo de los sectores 1 y 2 toman el valor mínimo $f_1^* = -300$ y $f_2^* = 6000$, respectivamente.

Sin embargo, si x_{ij}, $y_{ij} > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, podemos garantizar la unicidad del equilibrio regularizado, además de su continuidad respecto a los coeficientes de influencia w.

Teorema 2. *Sea (x^*, y^*, ρ^*) el equilibrio regularizado para el vector de conjeturas $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$. Si x^*, $y^* > 0$, entonces, el equilibrio regularizado es único y continuo con respecto a w.*

Demostración. Ver Apéndice 8.5.

Utilizando las condiciones de KKT y notación matricial podemos obtener una condición necesaria y suficiente para que un equilibrio regularizado (x^*, y^*, ρ^*) cumpla que x^*, $y^* > 0$.

Para establecer este resultado, introducimos la siguiente notación (esta misma notación es utilizada en las demostraciones de los teoremas).

Para cualesquiera t, $s \in \mathbb{N}$, definimos 1_t como el vector de $\mathbb{R}^t$ con todas sus componentes igual a 1, 0_t como el vector de $\mathbb{R}^t$ con todos sus componentes igual a cero, I_t como la matriz identidad de dimensión $t \times t$, y $O_{t \times s}$ como la matriz nula de dimensión $t \times s$. Además, para cualesquiera dos vectores $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t) \in \mathbb{R}^t$, $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha_k \leq \beta_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, t\}$, y $\alpha * \beta = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_t\beta_t)$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ definimos la matriz diagonal

$$W_i = \begin{pmatrix} w_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & w_{in} \end{pmatrix} \tag{34}$$

de dimensión $n \times n$ cuyos elementos son los coeficientes de influencia w_{ij}, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

También definimos los siguientes vectores:

$$b_i = \begin{pmatrix} s_i \\ s_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \tag{35}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}, \tag{36}$$

y las matrices de bloques:

$$C = \begin{pmatrix} -I_{n-1} \\ 0_{n-1}^T \\ I_{n-1} \\ 0_{n-1}^T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, \quad \Omega^i = \begin{pmatrix} W_i & -W_i \\ -W_i & W_i \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \tag{37}$$

donde C tiene dimensión $2n \times (n-1), B$ tienen dimensión $2n \times 2$, y Ω^i tiene dimensión $2n \times 2n$ para todo i. Además, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, definimos la matriz $H_i = Q^i + \Omega^i$ de dimensión $2n \times 2n$, y la matriz de bloques

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix} \tag{38}$$

la cual consiste de una columna cuyas entradas son m matrices C, por lo que su dimensión es de $2mn \times (n-1)$. Finalmente, definimos las matrices diagonales de bloques

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 & & \\ & \ddots & \\ & & H_m \end{pmatrix}, \tag{39}$$

donde la diagonal de $\mathcal{B}$ consiste de m matrices B, por lo que su dimensión es de $2mn \times 2m$, y la diagonal de $\mathcal{H}$ son las matrices H_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, por lo que su dimensión es de $2mn \times 2mn$.

Utilizando esta notación, formulamos el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea* (x^*, y^*, ρ^*) *el equilibrio regularizado para el vector de conjeturas* $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$*. Entonces,* x^**,* $y^* > 0$ *si y sólo si*

$$\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{B}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T\end{pmatrix}\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{B}\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0_{n-1} \\ b\end{pmatrix} > 0. \tag{40}$$

Demostración. Ver Apéndice 8.6.

Es importante mencionar que la matriz que está del lado izquierdo en (40) siempre existe (esto se demuestra dentro del Teorema 3) y no depende del equilibrio regularizado (x^*, y^*, ρ^*), sin embargo, sí depende de los coeficientes de influencia w y de los demás parámetros del modelo.

Capítulo 6

Equilibrio interior y consistencia

Para el equilibrio regularizado (y el exterior), se asume que las conjeturas $w \in \mathbb{R}_{+}^{mn}$, seleccionadas por los sectores, son exógenas al modelo. Ya que cada sector puede seleccionar cualquier conjunto de valores positivos para sus conjeturas, es natural preguntarse, ¿cuáles valores proporcionan mejores resultados para los intereses de cada sector?. Para responder a esta pregunta es necesario contar con un criterio que defina la consistencia de las conjeturas. Un criterio de consistencia para un modelo de oligopolio fue propuesto en Bulavsky (1997) y ha sido utilizado en varias publicaciones (e.g., ver Kalashnikov et al., 2011; Bulavsky and Kalashnikov, 2012; Kalashnikov, Bulavsky, Kalashnikov-Jr and Kalashnykova, 2014; Kalashnikov, Bulavsky, Kalashnykova, Watada and Hernández-Rodríguez, 2014; Kalashnikov-Jr et al., 2017). Sin embargo, aún no ha sido propuesto un criterio de consistencia para modelos financieros.

Una idea de cómo definir ésta consistencia para los coeficientes de influencia surge de los resultados obtenidos en Kalashnikov et al. (2019) donde se muestra que (bajo ciertas suposiciones) cualquier conjetura consistente en un oligopolio clásico con funciones de costos cuadráticas es equivalente a un equilibrio de Nash en el meta-juego (nombrado de esta manera en dicho artículo). Para este meta-juego, las estrategias de los jugadores (los productores del mercado de oligopolio) son sus propias conjeturas (coeficientes de influencia) sobre el precio del producto en el mercado. Por otra parte, la función de pago está dada por sus propios beneficios netos cuando el mercado está en equilibrio exterior para los coeficientes de influencia seleccionados. Lo anterior nos da la idea de cómo definir la consistencia para las conjeturas de los sectores. Esta idea es el resultado principal de nuestro trabajo y se presenta a continuación:

Primero, se define un juego con múltiples jugadores, $\Gamma = (P, W, F)$, donde el conjunto de jugadores $P = \{1, \ldots, n\}$ es el mismo conjunto de sectores del modelo financiero, el conjunto de posibles estrategias $W = \mathbb{R}_+^{nm}$ es el conjunto de conjeturas factibles w, y la función de pagos $F = F(w) = (f_1(w), \ldots, f_m(w))$ son las funciones objetivos usadas por los sectores i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, para estimar su beneficio como resultado de seleccionar las estrategias $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$. Entonces, el juego no-cooperativo $\Gamma = (P, W, F)$ está dado de la siguiente manera:

$$\min_{w_i} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j(x_{ij} - y_{ij}), \quad i \in P, \tag{41}$$

$$\text{sujeto a} \quad (x, y, \rho) \text{ es un equilibrio regularizado.} \tag{42}$$

El Teorema 2 garantiza que para cualquier vector de estrategias (coeficientes de influencia) $w \geq 0$, si se cumple la condición x^*, $y^* > 0$, las funciones de pagos dadas por (41) están bien definidas y son continuas respecto a este vector w.

Por lo tanto, el juego $\Gamma = (P, W, F)$ descrito por (41) y (42) está bien definido. Esto da lugar a la siguiente definición para la consistencia de las conjeturas de los sectores en el modelo financiero.

Definición 3. *El vector (x^*, y^*, ρ^*) de activos, pasivos y diferencias de precios, es llamado un equilibrio interior para el modelo financiero, y las conjeturas correspondientes w^* son llamadas consistentes si w^* es un equilibrio de Nash para el juego $\Gamma = (P, W, F)$ y (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado para w^*.*

Si el conjunto de estrategias W en el juego $\Gamma = (P, W, F)$ es un subconjunto compacto (es decir, cerrado y acotado) de $\mathbb{R}_+^{mn}$, se puede garantizar la existencia del equilibrio de Nash, entonces, tenemos el resultado final.

Teorema 4. *Para cualquier conjunto compacto de conjeturas factibles W, si x^*, $y^* > 0$ para todo $w \in W$, existe un equilibrio interior.*

Demostración. Ver Apéndice 8.7.

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajo a Futuro

En esta tesis, se extienden los resultados de Nagurney (1999) y Kalashnikov et al. (2015) para el modelo financiero con funciones de utilidad cuadráticas. Se hace uso de variaciones conjeturadas para formular el equilibrio financiero (llamado equilibrio exterior), y aunque éste nunca es único, se encuentra una caracterización de aquellos equilibrios (llamado equilibrio regularizado) que tienen exactamente la misma utilidad para todos los sectores. Se proporcionan teoremas de existencia tanto para el equilibrio exterior como para el regularizado, junto con una reformulación que nos permite encontrar el equilibrio regularizado como la solución de un problema de programación cuadrática estrictamente convexo. A diferencia del equilibrio exterior, el equilibrio regularizado puede ser único bajo ciertos supuestos, lo que permitió definir la consistencia de las variaciones conjeturadas utilizando el resultado de Kalashnikov et al. (2019). Finalmente, se probó la existencia del equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE) bajo las condiciones que garantizan la unicidad del equilibrio regularizado.

Como trabajo futuro, se planea examinar más profundamente el equilibrio regularizado para relajar las condiciones necesarias que garanticen la unicidad. También se planea extender el resultado a funciones de utilidad más generales y desarrollar algoritmos para calcular el CCVE.

Capítulo 8

Apéndices

8.1 Demostración de la Proposición 1

Proposición 1. *Para cualquier $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, si (x^*, y^*, r^*) es un equilibrio exterior, entonces el vector (x^*, y^*, ρ^*), donde $\rho^* = (r_1^* - r_n^*, \ldots, r_{n-1}^* - r_n^*)$ es un equilibrio regularizado y la ecuación*

$$-\sum_{j=1}^{n} r_j^*(x_{ij}^* - y_{ij}^*) = -\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j^*(x_{ij}^* - y_{ij}^*) \tag{19}$$

se cumple para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por otro lado, si (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado, entonces, existe r^* tal que $\rho^* = (r_1^* - r_n^*, \ldots, r_{n-1}^* - r_n^*)$, el vector (x^*, y^*, r^*) es un equilibrio exterior y la ecuación (19) *se cumple para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Demostración. Sustituyendo los valores r_{ij} de (6) en (3), la función objetivo del sector $i, i \in \{1, \ldots, m\}$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n} r_j(x_{ij} - y_{ij}). \tag{43}$$

Además, de las restricciones (4) podemos ver que cualquier composición factible del portafolio, (x_i, y_i), para el sector i, debe satisfacer las relaciones

$$x_{in} = s_i - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij}, \quad y_{in} = s_i - \sum_{j=1}^{n-1} y_{ij} \tag{44}$$

Sustituyendo parcialmente los valores de x_{in} y y_{in} dados por (44), en la función objetivo (43) para cada sector i, tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n} r_j(x_{ij} - y_{ij}) \\
&= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n-1} r_j(x_{ij} - y_{ij}) \\
&\quad - r_n \left(s_i - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} - s_i + \sum_{j=1}^{n-1} y_{ij} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n-1} (r_j - r_n)(x_{ij} - y_{ij}),
\end{aligned} \tag{45}$$

y definiendo $\rho_j = r_j - r_n$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, se tiene la identidad

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n} r_j(x_{ij} - y_{ij}) \\
&= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j(x_{ij} - y_{ij}).
\end{aligned} \tag{46}$$

Ahora, supongamos que x^*, y^*, r^* es un equilibrio exterior y sea $\rho^* = (r_1^* - r_n^*, \ldots, r_{n-1}^* - r_n^*) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces, x^* y y^* son una solución óptima para el problema de optimización (3)-(6) con $r = r^*$, para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Después, de la ecuación (46) vemos que x^* y y^* también son una solución óptima para el problema de optimización (15)-(17) con $\rho = \rho^*$, para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, dado que los problemas de optimización (3)-(6) y (15)-(17) son equivalentes. Además, de la ecuación (46), podemos concluir que la ecuación (19) es válida.

Luego, de la condición de equilibrio del mercado (7) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{ij}^* - y_{ij}^*) \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\} \tag{47}$$

Sustituyendo las ecuaciones (44), con $x = x^*$ y $y = y^*$, en la desigualdad (47) correspondiente a $j = n$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{m}(x_{in}^* - y_{in}^*) &= \sum_{i=1}^{m}\left(s_i - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij}^* - s_i + \sum_{j=1}^{n-1} y_{ij}^*\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}(x_{ij}^* - y_{ij}^*) = -\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}^* - y_{ij}^*), \end{aligned} \tag{48}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}^* - y_{ij}^*) \leq 0 \tag{49}$$

Por lo tanto, de (47) y (49) se concluye que la condición (18) se cumple para todo j, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, y el vector (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado.

Ahora, supongamos que (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado.

Sea $r_n^* = min\{0, \rho_1^*, \ldots, \rho_{n-1}^*\}$ y $r_j^* = \rho_j^* + r_n^*$. Entonces, $r^* = (r_1^*, \ldots, r_n^*)$ es un vector no negativo de precios que satisface $\rho_j^* = r_j^* - r_n^*$ para todo j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por la definición de equilibrio regularizados, los vectores x^* y y^* son una solución para el problema de optimización (15)-(17) con $\rho = \rho^*$, para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Además, ya que los problemas de optimización (3)-(6) y (15)-(17) son equivalentes, los vectores $x = x^*$ y $y = y^*$ son una solución para el problema de optimización (3)-(6) con $r = r^*$, para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, por lo que la ecuación (19) se satisface. Finalmente, de las ecuaciones (18) y (48), podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{in}^* - y_{in}^*) = -\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}^* - y_{ij}^*) = 0. \tag{50}$$

Por lo tanto, de (18) y (50), la condición de equilibrio del mercado (7) se cumple. Por lo tanto, (x^*, y^*, r^*) es un equilibrio exterior. ■

8.2 Demostración del Teorema 1

Teorema 1. *Para cualquier vector* $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$*, el vector* $(x^*, y^*, \rho^*) \in \mathbb{R}^{2mn+n-1}$ *es un equilibrio regularizado si y sólo si los vectores* x^* *y* y^* *son la solución óptima para el siguiente problema de programación cuadrática estrictamente convexo*

$$\min_{x,y} \quad \sum_{i=1}^{m} \left[\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}^T Q^i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_{ij} - y_{ij})^2 \right], \tag{20}$$

$$\textit{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = s_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - y_{ij}) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n-1\}, \tag{22}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ y_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{23}$$

y el vector ρ^* *sirve como los multiplicadores de Lagrange para el conjunto de restricciones* (22)*.*

Demostración. Definiendo $z_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, y utilizando la notación definida en el Capítulo 5 podemos reescribir el problema de optimización (15)-(17) del sector i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, en forma matricial de la siguiente manera

$$\min_{z_i} \quad z_i^T H_i z_i + \rho^T C^T z_i, \tag{51}$$

$$\text{sujeto a} \quad B^T z_i = b_i, \tag{52}$$

$$z_i \geq 0_{2n}, \tag{53}$$

Mientras que la condición (18) del equilibrio regularizado se reescribe en forma matricial como:

$$\sum_{i=1}^{m} C^T z_i = 0_{n-1} \tag{54}$$

Para un sector fijo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, el problema de programación cuadrática (51)-(53) es estrictamente convexo (es decir, la matriz simétrica H_i es definida positiva), entonces, usando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), este problema puede ser reemplazado por el siguiente sistema de igualdades y desigualdades

$$z_i * (2H_i z_i + C\rho + B\mu_i) = 0_{2n}, \tag{55}$$

$$B^T z_i = b_i, \tag{56}$$

$$2H_i z_i + C\rho + B\mu_i \geq 0_{2n}, \tag{57}$$

$$z_i \geq 0_{2n}, \tag{58}$$

donde $\mu_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, el vector (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado si y sólo si, existen vectores μ_i^*, $i \in \{1, \ldots, m\}$, tales que x^*, y^*, ρ^*, y μ_i^*, $i \in \{1, \ldots, m\}$, satisfacen el sistema de igualdades y desigualdades (55)-(58), para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, y la condición (54) se cumple. Más aún, el sistema de igualdades y desigualdades obtenidas al reunir (55)-(58) para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, junto con (54), es equivalente (usando las condiciones KKT) al problema de programación cuadrático

$$\min_{z} \quad \sum_{i=1}^{m} (z_i^T H_i z_i), \tag{59}$$

$$\text{sujeto a} \quad B^T z_i = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{60}$$

$$\sum_{i=1}^{m} C^T z_i = 0_{n-1}, \tag{61}$$

$$z_i \geq 0_{2n}, \tag{62}$$

donde μ_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, son los multiplicadores de Lagrange de las restricciones (60) y ρ son los multiplicadores de Lagrange de las restricciones (61).

Por lo tanto, (x^*, y^*, ρ^*) es el equilibrio exterior, si y sólo si, x^* y y^* son solución óptima del problema de programación cuadrático (59)-(62) estrictamente convexo (ya que todas las matrices H_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, son definidas positivas) y ρ^* sirve como multiplicadores de Lagrange para el conjunto de restricciones dadas por (61). Por la notación matricial definida previamente, el problema de programación cuadrático (59)-(62) coincide con el problema de programación cuadrático (20)-(23). ∎

8.3 Demostración del Corolario 1

Corolario 1. *Para cualquier vector* $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$ *existe un equilibrio regularizado. Además si* (x^*, y^*, ρ^*) *y* $(x^{**}, y^{**}, \rho^{**})$ *son 2 equilibrios regularizados, entonces,* $x^* = x^{**}$ *y* $y^* = y^{**}$.

Demostración. El problema de programación cuadrática estrictamente convexo (20)-(23) tiene una única solución (x^*, y^*), por lo tanto, existe un vector ρ^*, correspondiente a los multiplicadores de Lagrange para el conjunto de restricciones (22), tal que (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado.

Más aún, si existe otro equilibrio regularizado $(x^{**}, y^{**}, \rho^{**})$, por el Teorema 1, (x^{**}, y^{**}) tiene que ser solución de (20)-(23) por lo que $x^{**} = x^*$ y $y^{**} = y^*$. ■

8.4 Demostración del Corolario 2

Corolario 2. *Para cualquier vector* $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$ *existe un equilibrio exterior.*

Demostración. Como existe un equilibrio regularizado, por el Corolario 1, entonces, la Proposición 1 garantiza la existencia del equilibrio exterior. ■

8.5 Demostración del Teorema 2

Teorema 2. *Sea* (x^*, y^*, ρ^*) *el equilibrio regularizado para el vector de conjeturas* $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$*. Si* x^*, $y^* > 0$*, entonces, el equilibrio regularizado es único y continuo con respecto a* w*.*

Demostración. Para cualquier vector $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$, por el Teorema 1 y el Corolario 1, existe un equilibrio regularizado (x^*, y^*, ρ^*), donde los vectores x^* y y^* son únicos, entonces, podemos considerarlos como funciones de w, $x^* = x^*(w)$ y $y^* = y^*(w)$. Además, es fácil ver que la función objetivo (20) es una función continua con respecto a $w \in \mathbb{R}^{mn}_+$ (ya que esta es una función polinomial), así como las restricciones (21)-(23) (ya que no dependen de w). Entonces, por la teoría de la estabilidad sobre la solución óptima de un problema de programación cuadrático estrictamente convexo (e. g., ver Daniel (1973)), los vectores $x^*(w)$ y $y^*(w)$ son también funciones continuas con respecto a $w \in \mathbb{R}^{mn}_+$.

Además, de la demostración del Teorema 1, tenemos que (x^*, y^*, ρ^*) es un equilibrio regularizado si y sólo si existe un vector $\mu^* = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ tal que $(x^*, y^*, \rho^*, \mu^*)$ es solución del siguiente sistema de igualdades y desigualdades

$$
\begin{aligned}
z_i * (2H_i z_i + C\rho + B\mu_i) = 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (63)\\
2H_i z_i + C\rho + B\mu_i \geq 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (64)\\
z_i \geq 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (65)\\
B^T z_i = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (66)\\
\sum_{i=1}^{m} C^T z_i = 0_{n-1}. \qquad (67)
\end{aligned}
$$

Si x^*, $y^* > 0$, entonces, la solución de (63)-(67) debe satisfacer $z_i > 0_{2n}$ para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, por lo que las ecuaciones dadas por (63) se pueden reescribir como

$$2H_i z_i + C\rho + B\mu_i = 0_{2n}, \ i \in \{1, \ldots, m\} \qquad (68)$$

Sustituyendo los valores $x^*(w)$ y $y^*(w)$ del equilibrio regularizado en (68), definiendo $z_i^* = z_i^*(w) = \begin{pmatrix} x_i^*(w) \\ y_i^*(w) \end{pmatrix}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las variables $\rho \in \mathbb{R}^{n-1}, \mu \in \mathbb{R}^{2m}$

$$C\rho + B\mu_i = -2H_i z_i^*, \ i \in \{1, \ldots, m\} \qquad (69)$$

El sistema de ecuaciones (69) tiene $2m + n - 1$ variables y $2mn$ ecuaciones. Además, por el Teorema 1 y el Corolario 1, el sistema (69) tiene una solución (ρ^*, μ^*).

Utilizando la notación definida previamente podemos reescribir el sistema matricial de ecuaciones (69) de la siguiente manera

$$-\rho_j + \mu_{i1} = -2h_{ij}z_i^*, \quad i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n-1\}, \tag{70}$$

$$\mu_{i1} = -2h_{in}z_i^*, \quad i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{71}$$

$$\rho_j + \mu_{i2} = -2h_{i(n+j)}z_i^*, \quad i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n-1\}, \tag{72}$$

$$\mu_{i2} = -2h_{i(2n)}z_i^*, \quad i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{73}$$

donde h_{ik}, $k \in \{1,\ldots,2m\}$, es la k-ésima fila de H_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Del sistema de ecuaciones (70)-(73) podemos ver que las $2m$ ecuaciones dadas por (71) y (73) son linealmente independientes. De igual manera, para $i = 1$ las $(n-1)$ ecuaciones dadas por (70) son linealmente independientes, más aún, estas $(n-1)$ ecuaciones son linealmente independientes de las $2m$ ecuaciones dadas por (71) y (73), dado que estas últimas no tiene ninguna de las variables ρ_j, $j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Entonces, el sistema de ecuaciones dado por (70)-(73) tiene $2m+n-1$ ecuaciones linealmente independientes, lo cual garantiza que su solución (ρ^*, μ^*) es única. Además, es fácil ver que la solución para las $2m+n-1$ ecuaciones linealmente independientes es

$$\rho_j = 2h_{1j}z_1^* - 2h_{1n}z_1^*, \quad j \in \{1,\ldots,n-1\}, \tag{74}$$

$$\mu_{i1} = -2h_{in}z_i^*, \quad i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{75}$$

$$\mu_{i2} = -2h_{i(2n)}z_i^*, \quad i \in \{1,\ldots,m\}. \tag{76}$$

Luego, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, tenemos que $H_i = Q^i + \Omega^i$, donde Q^i es una matriz constante y, de (34) y (37), las entradas de Ω^i son lineales respecto a w, por lo que las filas h_{ik}, $k \in \{1,\ldots,2m\}$, de H_i son continuas respecto a w. Además, como $x^*(w)$ y $y^*(w)$ son funciones continuas con respecto a w, entonces, z_i^*, $i \in \{1,\ldots,m\}$, también es continua respecto a w. Entonces, de (74)-(76), podemos ver que ρ_j, $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ y μ_{i1}, μ_{i2}, $i \in \{1,\ldots,m\}$, son funciones continuas de w.

Por lo tanto, el equilibrio regularizado $(x^*, y^*, \rho^*) = (x^*(w), y^*(w), \rho^*(w))$ es único y continuo respecto a $w \in \mathbb{R}_+^{mn}$ ■

8.6 Demostración del Teorema 3

Teorema 3. *Sea* (x^*, y^*, ρ^*) *el equilibrio regularizado para el vector de conjeturas* $w \in \mathbb{R}^{mn}_{+}$. *Entonces,* x^*, $y^* > 0$ *si y sólo si*

$$\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{B}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T\end{pmatrix}\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{B}\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0_{n-1} \\ b\end{pmatrix} > 0. \tag{40}$$

Demostración. Sea (x^*, y^*, ρ^*) un equilibrio regularizado.

($\Rightarrow$) Supongamos que x^*, $y^* > 0$. Como mencionamos en la demostración anterior, la solución para (63)-(67) debe satisfacer $z_i > 0$ para todo i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces el sistema de igualdades y desigualdades (63)-(67) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$2H_i z_i + C\rho + B\mu_i = 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{77}$$

$$B^T z_i = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{78}$$

$$\sum_{i=1}^{m} C^T z_i = 0_{n-1}. \tag{79}$$

Ahora, definimos el vector

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Usando la misma notación matricial definida previamente, junto con (80), podemos reescribir el sistema (77)-(79) como sigue

$$\begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & O_{(n-1)\times(n-1)} & O_{(n-1)\times 2m} \\ \mathcal{B}^T & O_{2m\times(n-1)} & O_{2m\times 2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \rho \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2mn} \\ 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}. \tag{81}$$

El sistema de ecuaciones (81) es lineal y, por el Teorema 2, tiene solución única, por lo que su matriz de coeficientes es invertible (de otra manera, si la matriz de coeficientes fuera singular, tendría cero o infinitas soluciones). Por tanto, su solución está dada por

$$\begin{pmatrix} z^* \\ \rho^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & O_{(n-1)\times(n-1)} & O_{(n-1)\times 2m} \\ \mathcal{B}^T & O_{2m\times(n-1)} & O_{2m\times 2m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2mn} \\ 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Enseguida, definimos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} O_{(n-1)\times(n-1)} & O_{(n-1)\times 2m} \\ O_{2m\times(n-1)} & O_{2m\times 2m} \end{pmatrix}, \tag{83}$$

entonces podemos reescribir

$$\begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & O_{(n-1)\times(n-1)} & O_{(n-1)\times 2m} \\ \mathcal{B}^T & O_{2m\times(n-1)} & O_{2m\times 2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Además, la matriz $\mathcal{H}$ también es invertible ya que es una matriz diagonal a bloques cuyos elementos de la diagonal son las matrices invertibles H_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces, haciendo uso del complemento de Schur

$$\begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathcal{O} \end{pmatrix} / (2\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}\Lambda^T \mathcal{H}^{-1}\Lambda, \tag{85}$$

podemos calcular la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathcal{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{H}^{-1} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\Lambda^T\mathcal{H}^{-1} & \mathcal{H}^{-1}\Lambda\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1} \\ \big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\Lambda^T\mathcal{H}^{-1} & -2\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} z^* \\ \rho^* \\ \mu^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{H}^{-1} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\Lambda^T\mathcal{H}^{-1} & \mathcal{H}^{-1}\Lambda\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1} \\ \big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\Lambda^T\mathcal{H}^{-1} & -2\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{2mn} \\ 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{H}^{-1}\Lambda\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} \\ -2\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{87}$$

De (83) y (87) encontramos que

$$\begin{aligned} z^* &= \mathcal{H}^{-1}\Lambda\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix}\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{pmatrix} \rho^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = -2\big(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda\big)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} = -2\left(\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix}\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}, \tag{89}$$

y dado que esta solución debe satisfacer $z^* > 0$ (ya que $x^*, y^* > 0$), concluimos que

$$z^* = \mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix}\mathcal{H}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} > 0. \tag{90}$$

($\Leftarrow$) Consideremos nuevamente la matriz

$$\begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & O_{(n-1)\times(n-1)} & O_{(n-1)\times 2m} \\ \mathcal{B}^T & O_{2m\times(n-1)} & O_{2m\times 2m} \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Como mencionamos antes, la matriz $\mathcal{H}$ es invertible, por lo tanto, haciendo uso del complemento de Schur (85), podemos calcular el determinante

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathcal{O} \end{pmatrix} &= \det(2\mathcal{H}) \det(\mathcal{O} - \Lambda^T (2\mathcal{H})^{-1}\Lambda) \\ &= 2^{2mn} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2m+n-1} \det(\mathcal{H}) \det(\Lambda^T \mathcal{H}^{-1}\Lambda) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{(2m-1)(n-1)} \det(\mathcal{H}) \det(\Lambda^T \mathcal{H}^{-1}\Lambda). \end{aligned} \tag{92}$$

Podemos ver fácilmente que las matrices

$$C = \begin{pmatrix} -I_{n-1} \\ 0_{n-1}^T \\ I_{n-1} \\ 0_{n-1}^T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, \tag{93}$$

tienen rango de columna completo, entonces, las matrices

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix}, \tag{94}$$

también tendrán rango de columna completo.

Además, las columnas de C son linealmente independientes de las columnas de B, y viceversa, entonces, la matriz de bloques $\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ también tiene rango de columna completo, lo que garantiza que la matriz $\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ es invertible (ya que $\mathcal{H}^{-1}$ es invertible y $\begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix}$ tiene rango de fila completo).

Por lo tanto, ambos, $\mathcal{H}$ y $\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$, son matrices invertibles, entonces, tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathcal{O} \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} 2^{(2m-1)(n-1)} \det(\mathcal{H}) \det(\Lambda^T\mathcal{H}^{-1}\Lambda) \neq 0, \tag{95}$$

por lo que, la matriz (91) también es invertible, así que el sistema de ecuaciones lineales (81) tiene la unica solución

$$\begin{pmatrix} z^{**} \\ \rho^{**} \\ \mu^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathcal{H} & \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}^T & O_{(n-1)\times(n-1)} & O_{(n-1)\times 2m} \\ \mathcal{B}^T & O_{2m\times(n-1)} & O_{2m\times 2m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2mn} \\ 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}, \tag{96}$$

y (como hicimos en la primera parte de esta demostración) encontramos que

$$z^{**} = \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}, \tag{97}$$

$$\begin{pmatrix} \rho^{**} \\ \mu^{**} \end{pmatrix} = -2 \left(\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Ahora, suponemos que $\mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{pmatrix} > 0$, entonces, la solución $(z^{**}, \rho^{**}, \mu^{**})$ del sistema (81) satisface, por (97), que $z^{**} > 0$.

Recordemos que el sistema (81) es la forma matricial del sistema (77)-(79), por lo tanto,

$$2H_i z_i^{**} + C\rho^{**} + B\mu_i^{**} = 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{99}$$

$$B^T z_i^{**} = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{100}$$

$$\sum_{i=1}^{m} C^T z_i^{**} = 0_{n-1}. \tag{101}$$

Además, ya que $z^{**} > 0$, las ecuaciones dadas por (99) son equivalentes al siguiente grupo de igualdades y desigualdades

$$z_i^{**} * (2H_i z_i^{**} + C\rho^{**} + B\mu_i^{**}) = 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{102}$$

$$2H_i z_i^{**} + C\rho^{**} + B\mu_i^{**} \geq 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{103}$$

$$z_i^{**} \geq 0_{2n}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{104}$$

En otras palabras, $(z^{**}, \rho^{**}, \mu^{**})$ es una solución para las condiciones KKT dadas por (63)-(67), es decir, $(z^{**}, \rho^{**}, \mu^{**})$ es un equilibrio regularizado.

Finalmente, ya que $z^{**} > 0$, tenemos que x^{**}, $y^{**} > 0$, por lo tanto, por el Corolario 1, tenemos que $x^* = x^{**} > 0$ y $y^* = y^{**} > 0$. ■

8.7 Demostración del Teorema 4

Teorema 4. *Para cualquier conjunto compacto de conjeturas factibles W, si x^*, $y^* > 0$ para todo $w \in W$, existe un equilibrio interior.*

Demostración. Por el Teorema 2, el juego $\Gamma = (P, W, F)$ definido por (41) y (42) es un juego continuo con funciones de pago continuas y un conjunto compacto de estrategias W, entonces, por la generalización de Irving Glicksberg del teorema de punto fijo de Kakutani, existe un equilibrio de Nash w^*. Para este equilibrio de Nash w^*, por el Teorema 1, existe un equilibrio regularizado (x^*, y^*, ρ^*), el cual cumple la definición de equilibrio interior, mientras que w^* cumple la definición de consistente. ■

Referencias

Bagchi, A., ed. (1984), *Stackelberg Differential Games in Economical Models*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Bowley, A. L. (1924), 'The mathematical groundwork of economics', *Social Forces* **3**(1), 185.

Bulavsky, V. A. (1997), 'Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **33**, 112–134. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1994), 'One-parametric method to study equilibrium', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **30**, 129–138. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1995), 'Equilibrium in generalized Cournot and Stackelberg models', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **31**, 164–176. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (2012), 'Games with linear conjectures about system parameters', *Journal of Optimization Theory and Applications* **152**(1), 152–170.

Cournot, A., ed. (1897), *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, The Macmillan Company, London.

Fishburn, P. C. (1969), *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley & Sons, New York.

Flores-Muñiz, J. G., Kalashnykova, N., Kalashnikov, V. V. and Kreinovich, V. (2021), *Public Interest and Private Enterprize: New Developments*, Springer International Publishing.

Frisch, R. (1933), 'Monopole-polypole: La notion de force dans l'économie', *Nationaløkonomisk Tidsskrift* **71**, 241–259. In french, translated to english in Frisch (1951).

Frisch, R. (1951), 'Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy', *International Economics Papers* **1**, 23–36.

Isac, G., Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (2002), *Complementarity, equilibrium, efficiency and economics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Kalashnikov-Jr, V. V., Flores-Muñiz, J. G., Kalashnikov, V. V. and Kalashnykova, N. I. (2017), 'Consistent conjectural variations equilibrium in a semi-mixed duopoly', *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **21**(7), 1125–1134.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnikov-Jr, V. V. and Kalashnykova, N. I. (2014), 'Structure of demand and consistent conjectural variations equilibrium (ccve) in a mixed oligopoly model', *Annals of Operations Research* **217**(1), 281–297.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I. and Castillo-Pérez, F. J. (2011), 'Mixed oligopoly with consistent conjectures', *European Journal of Operational Research* **210**(3), 729–735.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., Watada, J. and Hernández-Rodríguez, D. J. (2014), 'Mixed oligopoly: Analysis of consistent equilibria', *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **18**(6), 971–984.

Kalashnikov, V. V., Kalashnykova, N. I. and Castillo-Pérez, F. J. (2015), Finding equilibrium in a financial model by solving a variational inequality problem, *in* Le Thi, H. A., Pham Dinh, T. and Nguyen, N. T., eds, 'Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences', Springer International Publishing, Cham, 281–291.

Kalashnikov, V. V., Kalashnykova, N. I. and Flores-Muñiz, J. G. (2019), 'Special issue on variational inequalities: Consistent conjectural variations coincide with the nash solution in the meta-model', *Networks and Spatial Economics* 1–25.

Kreinovich, V. (2014), Decision making under interval uncertainty (and beyond), *in* Guo, P. and Pedrycz, W., ed., 'Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences', Springer Verlag, 163–193.

Laitner, J. P. (1980), '"rational" duopoly equilibria', *The Quarterly Journal of Economics* **95**(4), 641–662.

Markowitz, H. M. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York.

Nagurney, A. (1999), *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Nguyen, H. T., Kosheleva, O. and Kreinovich, V. (2009), 'Decision making beyond arrow's 'imposibility theorem', with the analysis of effects of collusion and mutual attraction', *International Journal of Intelligent Systems* **24, No. 1**, 27–47.

Sharpe, W. (1970), *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, New York.

Solis-García, N., Flores-Muñiz, J. G., Kalashnikov, V., Kalashnykova, N. and Kosheleva, O. (2021), 'Even in simple economic systems, equilibrium can be non-unique: An example', *Soft Computing* .