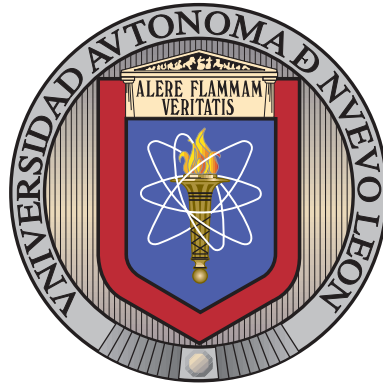


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



OBTENCIÓN DE LAS ONDULETAS ORTOGONALES
DE LA O MEDIANTE LA ORTOGONALIZACIÓN DE
LOS O -SPLINES

POR

ING. JAIME MENÉNDEZ ÁLVAREZ

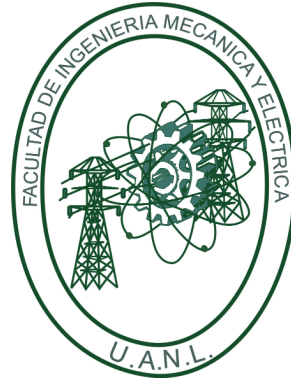
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

MAYO 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



OBTENCIÓN DE LAS ONDULETAS ORTOGONALES
DE LA O MEDIANTE LA ORTOGONALIZACIÓN DE
LOS O -SPLINES

POR

ING. JAIME MENÉNDEZ ÁLVAREZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

MAYO 2021



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Obtención de las onduletas ortogonales de la O mediante la ortogonalización de los O-splines", realizada por el alumno Jaime Menéndez Álvarez, con número de matrícula 2032313, sea aceptada para su defensa como requisito para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis

Dr. José Antonio de la O Serna
Director

Dr. José Ramón Rodríguez Cruz
Revisor

Dr. César Vargas Rosales
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



131

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, mayo de 2021



*A mi Maria, Tati y Magalis,
quienes comenzaron este camino a mi lado pero no pudieron acompañarme en este
momento porque tuvieron que partir de este mundo demasiado pronto.*

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	XI
Resumen	XII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Hipótesis	2
1.3. Objetivo General	3
1.4. Objetivos Particulares	3
1.5. Antecedentes	3
2. Nociones preliminares	6
2.1. Transformada de Fourier en Tiempo Discreto	6
2.2. Transformada Discreta de Fourier	7
2.3. Serie de Taylor	9
2.4. Funciones spline polinomiales	10

3. O-splines	12
3.1. Fasor dinámico	13
3.2. Subespacio Digital Taylor-Fourier	14
3.3. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los filtros DTFT	19
3.4. Diferenciadores paso bajo	22
3.5. O-splines paso bajo en forma cerrada	24
3.6. O-splines armónicos	27
4. Onduletas O-Wavelets	29
4.1. Teoría de Onduletas.	29
4.2. Ortogonalización de los O-Splines.	32
4.3. Obtención de las Onduletas	36
4.4. Notas sobre la implementación.	39
4.5. Pruebas de Ortogonalidad y Normalidad	41
5. Aplicaciones de las O-Wavelets	46
5.1. Transformada de Wavelet	47
5.2. Implementación de los OWavelets en Matlab	48
5.2.1. Análisis de Ruido	48
5.2.2. Detección de Singularidades y Cambios de Frecuencia.	50
6. Conclusiones	53

A. Matriz de Vandermonde	55
A.1. Determinante de la matriz de Vandermonde	55
B. Código de Matlab	57
B.1. Función Owavelet.m	57
B.1.1. Función Gfunction.m	59
B.1.2. Función Osplinepp.m	60
B.1.3. Ejemplo de Uso	61
B.2. Implementación de las OWavelets en el Wavelet Toolbox de Matlab .	63
B.2.1. Archivo owinfo.m	65
B.2.2. Función owaveletm	66
C. Espectros de los O-splines	68
C.1. Espectros de las O-splines en forma cerrada	68
D. Tablas	70

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los filtros paso bajo para $K = 0, \dots, 9$	20
3.2. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes impares $K = 1, \dots, 9$	21
3.3. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes pares $K = 0, \dots, 8$	21
3.4. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los primeros diferenciadores para $K = 1, \dots, 9$	23
3.5. Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los segundos diferenciadores para $K = 2, \dots, 9$	23
4.1. O-Spline de ordenes $m = 1, m = 3, m = 5$ y $m = 7$ con su primera traslación entera.	33
4.3. Función normalizante raíz inversa para los O-splines de órdenes $m = 1 \dots 16$ en el dominio de la frecuencia.	34
4.2. Función normalizante para los O-splines de órdenes $m = 1 \dots 16$ en el dominio de la frecuencia.	34
4.4. Espectro de los O-splines ortogonalizados de órdenes $m = 1 \dots 16$	35

4.5. O-splines Ortogonales de órdenes $m = 1...16$	36
4.6. Funciones $\hat{\varphi}(\gamma)$, $\hat{\varphi}(2\gamma)$ y $H_0(\gamma)$ obtenidas para $m = 1$	37
4.7. Funciones $H_0(\gamma)$ y $H_1(\gamma)$ obtenidas para $m = 1$	38
4.8. Espectro $\hat{\varphi}_m(\gamma)$ de las Onduletas derivadas de los O-splines de orden $m = 1...16$	39
4.9. Onduletas $\psi_m(x)$ para los O-splines de órdenes $m = 1...16$	40
4.10. Diagrama de flujo para la obtención de las onduletas	40
4.11. Energía de la Función Escalante $\varphi_m(x)$ en $[-x, x]$	42
4.12. Energía de la Onduleta $\psi_m(x)$ en $[-x, x]$	43
4.13. Autocorrelación de la Función Escalante. $\varphi_m(x)$	44
4.14. Autocorrelación de la Onduleta $\psi_m(x)$	44
4.15. Prueba de Ortogonalidad para la Onduleta y su primera traslación para $[-x, x]$	45
5.1. Cobertura en el plano Tiempo-Frecuencia de la Transformada de Onduletas.	47
5.2. Señal senoidal con ruido analizada con una <i>OWavelet</i> de orden $m = 3$	50
5.3. Señal con cambios de frecuencia analizada con una <i>OWavelet</i> de orden $m = 3$	51
5.4. Detección de Singularidades con <i>OWavelet</i> de orden $m = 1$	52
B.1. Ventana del Wavelet Toolbox de Matlab.	64

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Principales antecedentes	5
D.1. Coeficientes No Negativos de la antitransformada de $1/\sqrt{G(\gamma)}$. . .	70
D.2. Coeficientes No Negativos de $h_0(n)$	71

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor Dr. José Antonio de la O Serna, quien siempre me alentó y me guió en cada una de las etapas de este proyecto para alcanzar los resultados que buscaba.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por crear oportunidades de superación para los jóvenes de todo el mundo y alentar la investigación. Nada hubiese sido posible de no haber sido por su ayuda.

A Darian, por su apoyo incondicional cada segundo desde que inició este viaje de investigación.

A Eyelin, quien es coautora de los primeros capítulos. Tantas horas de estudio y sacrificio valieron la pena.

A Eduardo, por alegrarme el día con sus cuentos y sacarme una sonrisa siempre.

A mi abuela Magalis, mi tía María y mi abuela Maria Elena, que aunque no llegaron al final de este camino, siempre me iluminaron y confiaron en mí. Donde quiera que estén, GRACIAS.

A mi mamá, a mi hermana y a mi papá, porque son la razón por la que vivo.

RESUMEN

Ing. Jaime Menéndez Álvarez.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: OBTENCIÓN DE LAS ONDULETAS ORTOGONALES DE LA O
MEDIANTE LA ORTOGONALIZACIÓN DE LOS O-SPLINES.

Número de páginas: 74.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: El objetivo general de este proyecto es la obtención de onduletas ortogonales a partir de la ortogonalización de los Osplines mediante el Análisis Multiresolución. Se utilizó un método de estudio analítico donde se profundizó en el trabajo realizado por Battle-Lemarie en la ortogonalización de las B-Splines para aplicar una metodología homóloga a los O-Splines.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Esta investigación soluciona el problema de ortogonalidad de los O-Splines en sus traslaciones enteras, y ofrece una nueva clase de onduletas ortogonales derivadas de los O-Splines. Aporta una nueva herramienta de procesamiento digital de señales que fue aplicada en el análisis de ruido y la detección de cambios de frecuencia y singularidades en las señales. Ofrece además una implementación en el Toolbox de Matlab de la onduleta obtenida para su aplicación en futuras investigaciones.

Firma del asesor: _____
Dr. José Antonio de la O Serna

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El reciente descubrimiento de los O-Splines ha proporcionado una nueva herramienta para el análisis de señales donde, a diferencia de los filtros convencionales, se pueden realizar estimaciones de la frecuencias y sus derivadas al mismo tiempo que se obtienen las estimaciones de amplitud y de fase. Sus propiedades de cardinalidad, estimación y sus formas aproximadas filtros ideales los hacen deseables en aplicaciones como el filtrado y el análisis frecuencial.

Por otro lado, las onduletas (*Wavelets*) se han convertido en una herramienta trascendental debido a su propiedad de localización de tiempo-frecuencia. Esto significa que utilizando la transformada de *Wavelet*, las funciones se pueden representar de forma compacta tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia con una pequeña cantidad de coeficientes. Por esta razón, las onduletas han encontrado numerosas aplicaciones en compresión de señales, reducción de ruido, procesamiento de imágenes, compresión de datos geométricos y en soluciones numéricas eficientes.

Varios estudios han derivados nuevos conjuntos de onduletas utilizando los splines como función escalante en un Análisis Multiresolución. Estas onduletas se conocen como onduletas splines (*Spline wavelet*) y una de las más populares son las de Battle-Lemariés derivadas de los B-Splines. Aunque las B-splines son continuas y con un soporte compacto, no logran formar una base ortonormal, por lo fue

necesario ortogonalizar estas funciones antes aplicar un análisis multiresolución que genere las onduletas ortogonales. Como resultado, se obtuvieron las onduletas de Battle-Lemariés, que poseen numerosas propiedades deseables como ortogonalidad, simetría, suavidad, entre otras.

El lector puede anticipar en este punto los posibles beneficios de obtener un conjunto de onduletas ortogonales derivadas de los O-Splines de manera análoga al trabajo de Battle-Lemariés, por lo que surge la pregunta: ¿Es posible la ortogonalización de los O-Splines para derivar onduletas ortogonales a utilizando el Análisis Multiresolución?

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La pregunta que cierra la sección anterior resume, en esencia, el propósito de esta tesis. Los OSplines no son ortogonales y esto limita su uso en muchas aplicaciones. En el análisis multiresolución, se requiere una función escalante ortogonal en sus traslaciones para la generación de onduletas y en telecomunicaciones también se requieren bases vectoriales ortogonales para que el ruido afecte a ambas componentes por igual. La no ortogonalidad de los O-Splines limita su uso como herramienta de análisis en estos casos.

Por otro lado, tampoco existe una formulación de onduletas ortogonales a partir de O-Splines. No se cuenta con una herramienta de análisis derivada de los O-Splines que aproveche sus características para el análisis tiempo-frecuencia utilizando la transformada de Wavelet.

1.2 HIPÓTESIS

Si se ortogonalizan los O-Splines siguiendo un procedimiento análogo al realizado por Battle-Lemariés con los B-Splines, es posible obtener un conjunto de onduletas

ortogonales utilizando el análisis multiresolución.

1.3 OBJETIVO GENERAL

Obtener onduletas ortogonales derivadas de los O-splines siguiendo un procedimiento análogo al realizado por Battle-Lemariés con los B-Splines.

1.4 OBJETIVOS PARTICULARES

1. Ortogonalizar los O-Splines en sus traslaciones enteras.
2. Obtener un conjunto onduletas ortogonales a partir de la ortogonalización de los Osplines mediante el Análisis Multiresolución.
3. Evaluar la ortonormalidad de las Onduletas en sus traslaciones enteras.
4. Ilustrar las posibles aplicaciones de las Onduletas mediante su implementación y aplicación en el *Wavelet Toolbox* de Matlab.

1.5 ANTECEDENTES

Los splines más conocidos en el procesamiento de señales son los B-splines [1][2]. Los B-splines de orden m son continuos hasta la derivada $m - 1$ lo que garantiza la suavidad en las curvas de interpolación. Tienen un soporte compacto, pero no son splines cardinales. Sin embargo, sientan las bases del marco matemático para diseñar la mayoría de los splines cardinales interpolantes modernos, como los llamados B-splines exponenciales o E-splines [3].

Recientemente, una nueva clase de splines fueron presentados en [4] conocidos como O-splines. Las O-splines se obtuvieron primero numéricamente en [5] para

analizar el sistema de potencia a través de la inversa del operador de Taylor calculado con Matlab. El inconveniente del método numérico es que para órdenes grandes la matriz se hace numéricamente inestable porque su determinante es casi nulo. Este problema se resuelve en [4] donde son obtenidos de forma cerrada para dar estabilidad al método y reducir la complejidad computacional, resolviendo la inestabilidad numérica y siendo utilizados para el análisis de señales limitadas en banda. También se utilizaron para analizar electroencefalogramas (EEG) en [6] donde se desarrolló un banco de filtros Taylor-Fourier implementado con O-splines para la detección y clasificación de epilepsia a partir de la señal de EEG. En [7] se propone un filtro FIR diseñado con el O-spline nónico de la Transformada Taylor-Fourier en Tiempo Discreto (DTTFT) para obtener el sincrofasor de señales reales, como las disponibles en un centro de control. Hasta la fecha, no se ha reportado ningún uso de estos Splines relacionados con onduletas.

Una onduleta spline es una onduleta construida usando una función spline [8]. Existen diferentes tipos de onduletas splines. Las onduletas spline interpoladoras introducidas por C.K. Chui y J.Z. Wang [8] que se basan en una cierta fórmula de interpolación de splines. Aunque estas onduletas son ortogonales, no tienen soportes compactos. Existe una cierta clase de onduletas únicas, construidas utilizando B-splines y con soporte compacto que, aunque no son ortogonales, tienen propiedades especiales que las han hecho bastante populares en muchas aplicaciones [9],[10].

El principal antecedente de este trabajo, es el realizado por Battle y Lemarie [11][12] quienes derivaron de forma independiente las onduletas conocidas con el nombre de Battle- Lemariés ortogonalizando los B-splines y utilizándolos como función escalante para generar un análisis multiresolución. La teoría para la derivación de bases ortogonales ha sido generalizada y publicada en numerosos libros y artículos, de los cuales se han seleccionado como principales antecedentes y punto de partida los que se resumen en la tabla 1.1. Se incluyen los artículos consultados relacionados con los O-Splines, que son el objeto de estudio de esta investigación.

TABLA 1.1: Principales antecedentes

Artículo	Autor	Año
A wavelet tour of signal processing	Stéphane Mallat	1999
Dynamic harmonic analysis with FIR filters designed with O-splines.	J. A. de la O Serna	2020
Orthonormal Bases of Wavelets with Finite Support.	Ingrid Daubechies	1989
An Introduction to Wavelets	C. K. Chui	2016
An Introduction to Wavelet Analysis	D. F. Walnut	2004
Dynamic phasor estimates for power system oscillations.	J. A. de la O Serna	2007
Analyzing power oscillating signals with the O-splines of the discrete Taylor–Fourier transform.	J. A. de la O Serna	2018
EEG-rhythm specific Taylor–Fourier filter bank implemented with O-splines for the detection of epilepsy using EEG signals.	J. A. de la O Serna, et al.	2020
Assessing synchrophasor estimates of an event captured by a phasor measurement unit.	J. A. de la O Serna, et al.	2020

CAPÍTULO 2

NOCIONES PRELIMINARES

Es importante presentar al lector algunos conocimientos previos provenientes de campos de estudios como el procesamiento de señales y las matemáticas avanzadas. Estas nociones serán utilizadas en los desarrollos presentados en los posteriores capítulos del presente trabajo de tesis.

En las secciones 2.1, 2.2 y 2.3 se presentan las definiciones de la Transformada de Fourier y la Serie de Taylor, como herramientas matemáticas imprescindibles para comprender el desarrollo de la DTTFT. Finalmente en 2.4 se define el concepto de splines polinomiales.

2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

DEFINICIÓN 2.1 La Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de una secuencia $x(n)$ es:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)e^{-jwn}, \quad w \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Existe cuando (2.1) converge para todo $w \in \mathbb{R}$, y lo llamamos espectro de $x(n)$. La DTFT inversa de una función periódica $X(e^{jw})$ de período 2π es:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Cuando la DTFT existe denotamos el par DTFT como:

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{jw})$$

Dado que e^{-jwn} es una función periódica de período 2π , función de w para cada $n \in \mathbb{Z}$, la DTFT es siempre una función periódica de período 2π , lo cual se enfatiza con la notación $X(e^{jw})$ [13].

2.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

DEFINICIÓN 2.2 La Transformada Discreta de Fourier (DFT) de una secuencia $x(n)$ de longitud N es:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{kn} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x})_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2.3)$$

y lo llamamos espectro de $x(n)$. La DFT inversa de una secuencia $X(k)$ de longitud N es:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{-kn} = \frac{1}{N} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{X})_n, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2.4)$$

donde $w_N = e^{-j2\pi/N}$.

Denotamos el par DFT como:

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

Dentro de la definición, hemos introducido $\mathbf{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ para representar el operador lineal DFT. La relación entre el inverso y el adjunto en (2.4) se verifica en breve [13].

La expresión DFT (2.3) es el producto vector-vector:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & w_N^k & \cdots & w_N^{(N-1)k} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.5)$$

donde, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ es un vector columna. Al reunir los resultados para $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ para producir el vector columna $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^N$, tenemos:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.6)$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ introducida en (2.3) es:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Usando ortogonalidad, podemos verificar que:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^* \quad (2.9)$$

como se afirma en (2.4). Esto muestra que la DFT es un operador unitario [13]. La matriz \mathbf{F} también es una matriz de Vandermonde (Ver Apéndice A).

2.3 SERIE DE TAYLOR

DEFINICIÓN 2.3 *La serie de Taylor de una función es su representación mediante una serie de potencias de $(x - a)$ de la forma:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f(a)'}{1!}(x-a) + \frac{f(a)''}{2!}(x-a)^2 + \frac{f(a)'''}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f(a)^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots \quad (2.10)$$

para que este desarrollo en serie de Taylor sea posible es necesario que tanto la función como todas sus derivadas estén definidas para $x = a$.

Lo que se pretende mediante la serie de Taylor es aproximar una función cualquiera $f(x)$ mediante un polinomio, sin embargo, salvo que $f(x)$ sea de entrada un polinomio, la aproximación nunca será exacta, a no ser que se usen polinomios con infinitos términos. En la práctica, obviamente, no se usan polinomios infinitos, se

usan series truncadas, las cuales se llaman aproximaciones de orden n . La aproximación se va haciendo menos exacta a medida que x se aleja del punto central a [14].

2.4 FUNCIONES SPLINE POLINOMIALES

A grandes rasgos, un spline es una curva diferenciable definida a trozos mediante polinomios. Definamos primero un polinomio a trozos:

DEFINICIÓN 2.4 Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$ y $\Delta = \{x_i\}_0^{k+1}$. El conjunto Δ particiona el intervalo $[a, b]$ en $k+1$ subintervalos, $I_i = [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, e $I_k = [x_k, x_{k+1})$. Dado un entero positivo m sea

$$\wp\wp_m(\Delta) = \{f: \text{existen polinomios } p_0, p_1, p_k \text{ en } \wp_m \text{ con } f(x) = p_i(x), \text{ para } x \in I_i, \\ i = 0, 1, \dots, k\}. \quad (2.11)$$

Llamamos $\wp\wp_m(\Delta)$ al espacio de polinomios por trozos de orden m , con nodos x_1, \dots, x_k .

Para mantener la flexibilidad de los polinomios por trozos y al mismo tiempo lograr cierto grado de suavidad en las curvas, podemos definir la siguiente clase de funciones:

DEFINICIÓN 2.5 Sea Δ una partición del intervalo $[a, b]$ como en la Definición 2.4, y sea m un entero positivo. Sea

$$\mathfrak{S}_m(\Delta) = \wp\wp_m(\Delta) \cap C^{m-2}[a, b] \quad (2.12)$$

donde $\wp\wp_m(\Delta)$ es el espacio de polinomios por trozos definido en 2.4. Llamamos $\mathfrak{S}_m(\Delta)$ al espacio de splines polinomiales de orden m , con nodos simples en los puntos x_1, \dots, x_k .

Es fácil definir varias clases relacionadas de polinomios por trozos con diferentes grados de suavidad entre las partes. Nos referimos a tales espacios de funciones como splines polinomiales [15].

CAPÍTULO 3

O-SPLINES

Durante las últimas décadas, la teoría de splines ha experimentado un desarrollo vertiginoso que se debe principalmente a su gran utilidad en muchísimas aplicaciones. Dado que son fáciles de evaluar y manipular en una computadora, se ha encontrado una miríada de aplicaciones a la solución numérica de una variedad de problemas en matemáticas aplicadas. La enorme literatura publicada muestra que el desarrollo de la teoría de splines tiene una influencia esencial en grandes áreas de la matemática y la ingeniería moderna, tales como: ajuste, interpolación y aproximación de datos, integración y diferenciación numérica, teoría de control, diseño geométrico asistido por ordenador y geometría computacional, métodos numéricos de teoría de probabilidades y estadística, wavelets y muchas otras, expandiendo cada día más sus áreas de aplicación [16].

Una nueva familia de splines nombrada O-splines fue presentada en [5] [4]. Fue descubierta al reducir la complejidad computacional de la DTTFT; esta transformada a su vez, surgió como herramienta para analizar las señales oscilantes en los sistemas de potencia, mediante el concepto del fasor dinámico, originalmente propuesto en [17]. Es por ello, que para comprender los O-splines debidamente es necesario presentar primero estos conceptos, ya que este trabajo [17] es la génesis de lo que más adelante conllevaría al descubrimiento de estos splines.

3.1 FASOR DINÁMICO

Antes que saliera a la luz la referencia [17], las técnicas de estimación fasorial normalmente asumían un modelo de señal sinusoidal con amplitud y fase constantes durante todo el intervalo de observación, suponiendo así estado estacionario:

$$x(t) = a_0 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0), \quad \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (3.1)$$

donde a_0 y φ_0 son la amplitud y la fase constantes respectivamente, y f_1 y T son la frecuencia y el período fundamental respectivamente de la señal $x(t)$.

Este modelo se puede reescribir en términos de la función exponencial compleja como:

$$x(t) = \text{Re}(a_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j2\pi f_1 t}) = \text{Re}(\xi \cdot e^{j2\pi f_1 t}) \quad (3.2)$$

donde $\xi = a_0 \cdot e^{j\varphi_0}$ es el fasor de la señal $x(t)$.

Esta suposición es muy limitada para las oscilaciones de potencia. Las oscilaciones de amplitud y fase en los sistemas de potencia se pueden modelar mejor mediante una señal pasa banda de la forma:

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \quad (3.3)$$

donde $a(t)$ y $\varphi(t)$ son la amplitud y la fase expresadas como funciones del tiempo. En una señal pasa banda, el contenido en frecuencia se concentra en una banda estrecha en la vecindad de la frecuencia fundamental f_1 , al igual que en una oscilación de potencia.

En términos de la función exponencial compleja se puede reescribir como:

$$x(t) = \text{Re}(a(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j2\pi f_1 t}) = \text{Re}(\xi(t) \cdot e^{j2\pi f_1 t}) \quad (3.4)$$

donde $\xi(t) = a(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$ es la envolvente compleja de la señal pasa banda $x(t)$ y se denomina fador dinámico de la oscilación.

En [17] se propone aproximar el fador dinámico $\xi(t)$ mediante un polinomio de Taylor en cada intervalo de tamaño T . La única condición necesaria para que esta aproximación sea válida es que el fador dinámico debe estar dado por una función analítica.

En este artículo se usó un polinomio de segundo grado para aproximar $\xi(t)$ en el intervalo centrado en $t_0 = 0$:

$$\xi_2(t) = \xi_2 + \dot{\xi}_2 t + \frac{\ddot{\xi}_2}{2} t^2, \quad \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (3.5)$$

donde $\xi_2, \dot{\xi}_2, \ddot{\xi}_2 \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$. Los coeficientes del polinomio de Taylor son las derivadas progresivas del fador dinámico en el centro del intervalo: $\xi_2 = \xi_2(0)$, $\dot{\xi}_2 = \xi_2(0)'$ y $\ddot{\xi}_2 = \xi_2(0)''$.

Esta aproximación aumenta su precisión a medida de que $t \rightarrow 0$, siendo exacta en el límite. Se pueden aplicar polinomios de Taylor de orden superior para aumentar la exactitud de la aproximación, pero en [17] los coeficientes de la función cuadrática proporcionaron estimaciones adecuadas para los propósitos deseados, por lo tanto, se usó una aproximación de segundo orden.

3.2 SUBESPACIO DIGITAL TAYLOR-FOURIER

La extensión del fador estático al fador dinámico conlleva a la extensión del subespacio de Fourier al subespacio de Taylor-Fourier [18]. En esta sección, la formulación matricial de la DTFT se desarrolla utilizando un paralelismo con la DFT.

Explicaremos esta extensión partiendo del modelo de señal de Fourier tradicional de orden cero en forma matricial:

$$\mathbf{x}_0 = \Phi_0 \cdot \xi_0 \quad (3.6)$$

esta es la ecuación de síntesis de \mathbf{x}_0 , donde ξ_0 contiene los coeficientes de Fourier de \mathbf{x}_0 , y Φ_0 es la matriz de Fourier \mathbf{W}_N , la cual se muestra en la ecuación (3.7). Esta matriz contiene $N \times N$ elementos de la forma $(e^{j\frac{2\pi}{N}})^{nk} = (w_N)^{nk}$, para $n, k = 0, 1, \dots, N-1$, siendo N el número de muestras por ciclo fundamental, n la n -ésima muestra y k el k -ésimo armónico.

$$\mathbf{W}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Este modelo tradicional solo toma en cuenta el primer término del polinomio de Taylor, o sea ξ_0 , que es un polinomio de orden cero. Este procedimiento es conocido como filtrado de Fourier de un ciclo, pues cada intervalo de observación tiene longitud de un ciclo fundamental.

Esta aproximación mediante un polinomio de Taylor de orden cero en cada intervalo de observación, genera una función escalón, con cambios de escalón de un intervalo a otro, como resultado de la aproximación del fasor, pues podría haber cambios en los parámetros de la forma de onda durante un intervalo, por lo que la estimación representará un valor promedio en esa ventana de observación. Este modelo solo es adecuado cuando la señal de entrada está en estado estable.

Extendemos este subespacio al subespacio Taylor-Fourier al incluir los términos de Taylor, y lo hacemos utilizando los vectores de la matriz de Fourier \mathbf{W}_N como

moduladores armónicos de los términos de Taylor, que son los que modelan la envolvente de la oscilación. Al aumentar a un orden superior, el tamaño del modelo aumenta en N , ya que cada término de Taylor afecta al conjunto completo de armónicos, y por lo tanto, se necesita otro ciclo fundamental de datos en la parte inferior de la matriz Φ . De manera general para un determinado orden K vamos a necesitar prolongar los vectores de la base a $C = K + 1$ ciclos. De esta forma, la nueva matriz, la matriz de Taylor-Fourier, será de $(K + 1)N \times (K + 1)N$ elementos, como veremos más adelante. La matriz base tiene C matrices verticales, cada una formada a su vez por C submatrices de Fourier \mathbf{W}_N , una debajo de la otra, cada una de estas submatrices tiene vectores armónicos de longitud N , que modularán los términos de Taylor que están en las C matrices diagonales de la forma $\frac{1}{k!} \mathbf{T}^k$, para $k = 0, \dots, K$.

Entonces el modelo de señal de primer orden ($K = 1, C = 2$) quedaría de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_1 = \Phi_1 \cdot \xi_1 = \left(\mathbf{I} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde \mathbf{I} y \mathbf{T} son matrices diagonales que contienen las muestras de los términos de Taylor de orden cero y primer orden respectivamente tomadas en intervalos centrados de longitud de dos ciclos fundamentales. El subvector ξ_1 contiene los N coeficientes de Taylor-Fourier de primer orden, y sus respectivas derivadas se encuentran en el subvector $\dot{\xi}_1$. Esta es la ecuación de síntesis de \mathbf{x}_1 en términos de sus coeficientes Taylor-Fourier $(\xi_1, \dot{\xi}_1)$, los cuales serán obtenidos a partir de la Transformada Taylor-Fourier (ecuación de análisis) de \mathbf{x}_1 , como se verá más adelante.

El modelo de señal correspondiente a la extensión para el K -ésimo orden puede ser generalizado de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_K = \Phi_K \cdot \xi_K = \left(\mathbf{I} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \cdots \frac{1}{K!} \mathbf{T}^K \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N \\ \mathbf{W}_N \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_K \\ \xi_K^k \\ \xi_K \\ \vdots \\ \xi_K^k \\ \xi_K \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde la matriz Φ_K de $(K+1)N \times (K+1)N$ elementos contiene la base vectorial del subespacio extendido, el subvector ξ_K contiene los N coeficientes de Taylor-Fourier de K -ésimo orden y los K subvectores ξ_K^k de longitud N , con $k = 1, \dots, K$, contienen las derivadas progresivas de ξ_K .

Cuando extendemos el modelo tradicional de Fourier al modelo Taylor-Fourier la base Φ_K ya no es ortogonal debido a la oblicuidad introducida por los términos de Taylor, por lo que para $K \geq 1$ es necesario un par de bases biortonormales, la base Φ_K para la ecuación de síntesis:

$$\mathbf{x}_K = \Phi_K \cdot \xi_K \quad (3.10)$$

Esta es la Transformada Inversa Taylor-Fourier de \mathbf{x}_K . Y su dual, $\tilde{\Phi}_K$ para la ecuación de análisis:

$$\hat{\xi}_K = \tilde{\Phi}_K^H \cdot \mathbf{x}_K \quad (3.11)$$

Esta es la Transformada Taylor-Fourier de \mathbf{x}_K , la cual nos brinda los mejores coeficientes LMS ($\hat{\xi}_K$) de la proyección de la señal \mathbf{x}_K en el subespacio Taylor-Fourier.

$\tilde{\Phi}_K$ es la matriz dual y esta dada por:

$$\tilde{\Phi}_K = \Phi_K \cdot (\Phi_K^H \cdot \Phi_K)^{-1} \quad (3.12)$$

tal que $\tilde{\Phi}_K^H \cdot \Phi_K = \mathbf{I}$.

En [19] se propuso la descomposición de la matriz $\Phi_{\mathbf{K}}$ de la siguiente manera:

$$\Phi_{\mathbf{K}} = \Upsilon_{\mathbf{K}} \cdot \Omega_{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_1 & \cdots & \frac{1}{K!} \mathbf{T}_1^K \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_2 & \cdots & \frac{1}{K!} \mathbf{T}_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_C & \cdots & \frac{1}{K!} \mathbf{T}_C^K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{W}_N \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde las submatrices de la forma \mathbf{T}_c , de $N \times N$, siendo $c = 1, \dots, C$, son las correspondientes submatrices diagonales descendientes en la matriz \mathbf{T} en (3.9), que contienen las muestras respectivas de cada uno de los C ciclos. Generalizando podemos decir que $\frac{1}{k!} \mathbf{T}_c^k$ contiene los términos de Taylor de k -ésimo orden correspondientes al c -ésimo ciclo, siendo $k = 1, \dots, K$ y $c = 1, \dots, K + 1$.

En esta descomposición $\Phi_{\mathbf{K}}$ queda separada en dos matrices: $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ para el operador de Taylor y $\Omega_{\mathbf{K}}$ para el operador de Fourier. Esta factorización reduce la complejidad computacional en el cálculo de $\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}}$ en (3.12), pues se reduce a [19]:

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}} = \Upsilon_{\mathbf{K}} \cdot (\Upsilon_{\mathbf{K}}^H \cdot \Upsilon_{\mathbf{K}})^{-1} \cdot \frac{\Omega_{\mathbf{K}}}{N} = \tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}} \cdot \frac{\Omega_{\mathbf{K}}}{N} \quad (3.14)$$

A partir de esta ecuación podemos ver claramente que los vectores en $\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}}$ son modulaciones armónicas de las subdiagonales de $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ en el conjunto de frecuencias armónicas en $\Omega_{\mathbf{K}}$. Esta contribución es importante para aplicaciones en las que la energía está contenida en un pequeño número de frecuencias, como las señales de los sistemas eléctricos de potencia [5].

Entonces, al factorizar el modelo de señal de la DTFT, como vimos en las ecuaciones (3.13) y (3.14), los O-splines paso bajo y sus derivadas, que también son splines, fueron encontrados en las subdiagonales de la matriz dual del operador de Taylor $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$:

$$\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}} = \Upsilon_{\mathbf{K}} \cdot (\Upsilon_{\mathbf{K}}^H \cdot \Upsilon_{\mathbf{K}})^{-1} = (\Upsilon_{\mathbf{K}}^{-1})^T \quad (3.15)$$

Esta matriz dual es simplemente la inversa transpuesta del operador de Taylor, pues la ecuación (3.12) es una fórmula genérica para cualquier matriz que lo que hace es calcular una pseudoinversa, pero si la matriz es cuadrada su dual es simplemente su inversa transpuesta.

3.3 RESPUESTA AL IMPULSO Y RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS DTFT

Como la respuesta al impulso de los filtros de la DTFT, que están en $\tilde{\Phi}_{\mathbf{K}}$, en cada frecuencia armónica, son simplemente versiones moduladas de la respuesta de los filtros paso bajo en $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ (como se puede ver en la ecuación (3.14) en la sección anterior), enfocamos entonces nuestra atención en estos filtros para comprender la evolución de los operadores de la DTFT.

La matriz $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$, la cual es una combinación lineal de los vectores en $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ y por lo tanto preserva la misma estructura, es una matriz cuadrada de $(K + 1)N \times (K + 1)N$ elementos, compuesta por submatrices diagonales. Esta matriz se puede dividir en $K + 1$ bloques de N columnas cada uno, cada bloque contiene $K + 1$ submatrices diagonales, colocadas unas debajo de las otras. Las subdiagonales del primer bloque contienen la respuesta al impulso de los filtros paso bajo, o sea los O-splines. El segundo bloque contiene en sus subdiagonales la respuesta al impulso del primer diferenciador paso bajo, o sea las derivadas de los splines previos. El tercer bloque contiene la respuesta al impulso del segundo diferenciador paso bajo, y así sucesivamente.

La figura 3.1 (a) muestra la respuesta al impulso de los filtros paso bajo en $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ para diferentes órdenes de Taylor: $K = 0, \dots, 9$. Fueron calculadas con $N = 20$

muestras por ciclo fundamental. A partir de la ecuación (3.15) se puede demostrar que forman una nueva familia de splines de $C = K + 1$ ciclos. Los dos primeros se corresponden con los B-splines de orden cero y primer orden respectivamente, pero luego difieren para $K \geq 2$, ya que convergen al seno cardinal. Comienzan con la ventana rectangular, correspondiente al filtro de Fourier tradicional de un ciclo, luego la ventana triangular de dos ciclos, y luego evolucionan hacia la función *Sinc* a medida que K aumenta [5].

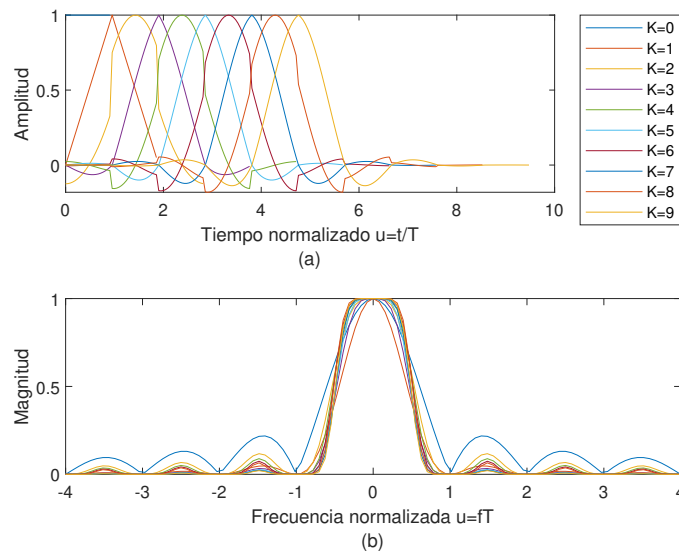


FIGURA 3.1: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los filtros paso bajo para $K = 0, \dots, 9$.

La figura 3.1 (b) ilustra la respuesta en frecuencia de los O-splines. Como podemos ver, la secuencia comienza con la función seno cardinal correspondiente a la ventana rectangular. Después comienzan a tener bandas de paso cada vez más planas, y bandas eliminadas con ganancia cero cada vez más planas también. Esta característica es muy importante para rechazar las interferencias armónicas.

Para poder apreciar mejor la evolución de los filtros y su espectro al aumentar el orden K de Taylor, en la figura 3.2 se muestran por separado los O-splines de órdenes impares hasta $K = 9$, con sus respectivas respuestas en frecuencia debajo, y lo mismo se muestra en la figura 3.3 para los O-splines pares hasta $K = 8$.

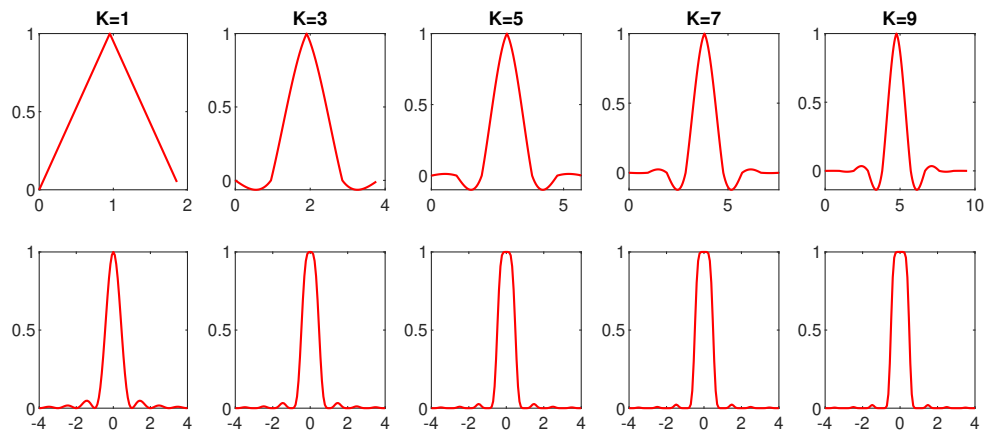


FIGURA 3.2: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes impares $K = 1, \dots, 9$.

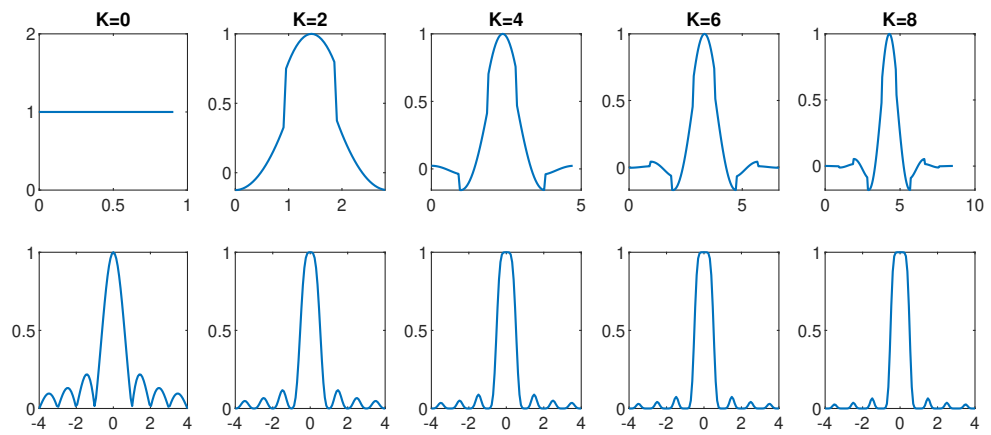


FIGURA 3.3: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los O-splines paso bajo para órdenes pares $K = 0, \dots, 8$.

Como se puede apreciar en la figura 3.2 los O-splines paso bajo de orden impar proporcionan una familia de filtros FIR que convergen al filtro paso bajo ideal. Cada pieza polinomial se aproxima a un lóbulo de la función *Sinc*. La respuesta en frecuencia tiene una ganancia monótona en la banda de paso y pequeños rizados en la banda eliminada, similar a los filtros de Chebyshev Tipo II IIR. A medida que aumenta el orden K de Taylor, estos filtros proporcionan una nueva secuencia de aproximación al filtro ideal [4].

Los O-splines paso bajo de orden par también convergen a la función *Sinc*, pero tienen discontinuidades que producen rizados más altos en su banda eliminada, como se puede ver en la figura 3.3.

3.4 DIFERENCIADORES PASO BAJO

Los filtros de la DTFT también incluyen sus propios diferenciadores, como veremos en esta sección.

La parte superior de la figura 3.4 muestra las respuestas al impulso de los primeros diferenciadores paso bajo en $\tilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{K}}$. Nótese que son splines discontinuos, que se obtienen de la primera derivada de los anteriores. Su respuesta en frecuencia se muestra en la parte inferior de la figura 3.4.

Si $H_k^{(0)}(f)$ es la respuesta en frecuencia del k -ésimo filtro paso bajo, entonces la respuesta en frecuencia del primer diferenciador será $H_k^{(1)}(f) = (j2\pi f)^1 H_k^{(0)}(f)$, por lo tanto, su respuesta en frecuencia tiene una ganancia lineal en su banda de paso. Nótese que los filtros pares tienen lóbulos laterales más altos que los impares.

De manera similar, las respuestas al impulso de los segundos diferenciadores se muestran en la parte superior de la figura 3.5. De nuevo, son splines discontinuos, que son las derivadas de los precedentes. Sus respuestas en frecuencia se muestran en la parte inferior de la figura 3.5. Estas tienen una ganancia parabólica en la banda

de paso ya que $H_k^{(2)}(f) = (j2\pi f)^2 H_k^{(0)}(f)$ [5].

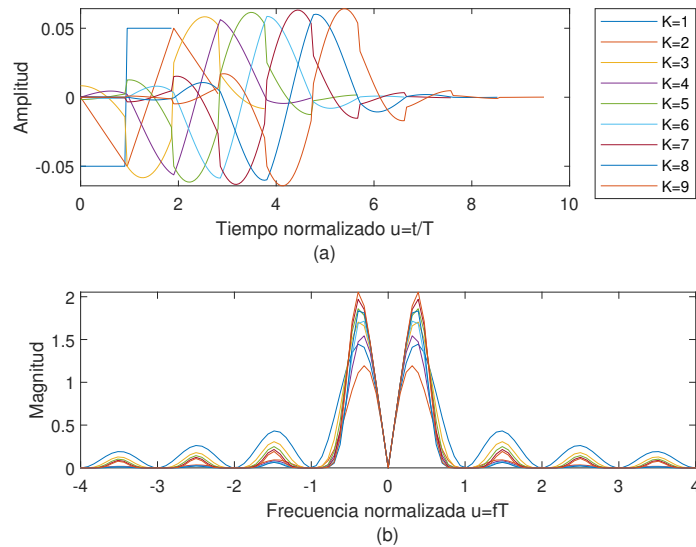


FIGURA 3.4: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los primeros diferenciadores para $K = 1, \dots, 9$.

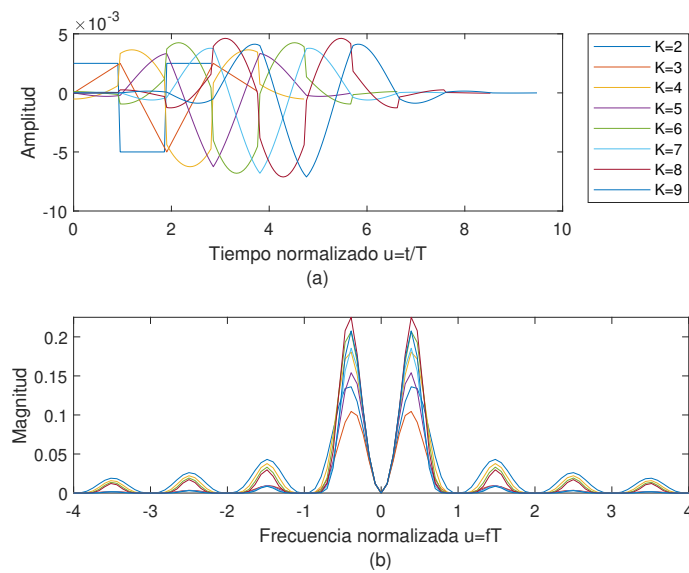


FIGURA 3.5: Respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de los segundos diferenciadores para $K = 2, \dots, 9$.

3.5 O-SPLINES PASO BAJO EN FORMA CERRADA

Los O-splines primero se obtuvieron numéricamente en 2018 en [5], sin embargo, el inconveniente del método numérico es que para órdenes grandes la matriz se hace numéricamente inestable porque su determinante es casi nulo. En [4] se resolvió la inversa de la matriz teóricamente y ahora es posible encontrar O-splines de órdenes arbitrarios y de forma continua, a partir de su expresión en forma cerrada.

Los O-splines y sus derivadas son la respuesta al impulso de los filtros paso bajo en $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$. Como $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ es una matriz real cuadrada invertible, su dual es simplemente la transpuesta de su inversa, que se puede calcular mediante la fórmula de Cramer:

$$\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}} = (\Upsilon_{\mathbf{K}}^{-1})^T = \frac{(\text{Adj}(\Upsilon_{\mathbf{K}}^{-1}))^T}{|\Upsilon_{\mathbf{K}}|} \quad (3.16)$$

La multiplicación de las submatrices diagonales \mathbf{T}_c^k en el operador de Taylor $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ da como resultado el producto puntual de sus diagonales. En consecuencia, $\Upsilon_{\mathbf{K}}$ puede compactarse en una matriz $C \times C$ sustituyendo cada submatriz diagonal \mathbf{T}_c^k por el k -ésimo término de Taylor como una función de tiempo evaluada en su correspondiente c -ésimo segmento. La inversa de esa matriz compacta puede obtenerse fácilmente ya que esas funciones actúan como cofactores en la inversión.

A continuación, el K -ésimo O-spline paso bajo y sus primeras derivadas se obtienen en forma cerrada a partir de numerador en (3.14) cuando cada submatriz $\mathbf{W}_{\mathbf{N}}$ en se reduce a su primera columna de unos. La submatriz obtenida se denota por $\tilde{\Phi}_0$, ya que esta operación convierte las diagonales en cada fila de $\tilde{\Upsilon}_{\mathbf{K}}$ en un vector que concatena tales diagonales en un polinomio por trozos. Las diagonales de la primera fila proporcionan el spline y las de las filas siguientes sus primeras derivadas. Los O-splines pasa banda o armónicos son simplemente modulaciones de los O-splines paso bajo y sus derivadas en cada frecuencia armónica [4].

Para $K = 0$, tenemos $t_1 = t_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$ y $\Phi_0^{(0)} = 1$, por lo tanto $\tilde{\Phi}_0^{(0)} = 1$. El

sistema es ortogonal y el spline es un pulso rectangular:

$$\tilde{\varphi}_0^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } \frac{-T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.17)$$

Para $K = 1$, tenemos $t_1 = t[-T_1, 0)$ y $t_2 = t[0, T_1) = t_1 + T_1$, entonces:

$$\Phi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

y,

$$|\Phi_0^{(1)}| = t_2 - t_1 = T_1 \quad (3.19)$$

Entonces:

$$\tilde{\Phi}_0^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ -t_1 & 1 \end{pmatrix}}{T_1} = \begin{pmatrix} u_1 + 1 & -F_1 \\ -(u_2 - 1) & F_1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

donde u_n es el tiempo normalizado: $u = t_n/T_1$. Sus columnas son el pulso triangular:

$$\tilde{\varphi}_0^{(1)}(u) = \begin{cases} u + 1, & \text{para } -1 \leq u < 0 \\ -(u - 1), & \text{para } 0 \leq u < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.21)$$

Para $K = 2$, tenemos $t_1 = t[\frac{-3T_1}{2}, \frac{-T_1}{2})$, $t_2 = t_1 + T_1$ y $t_3 = t_1 + 2T_1$, entonces:

$$\Phi_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2/2 \\ 1 & t_2 & t_2^2/2 \\ 1 & t_3 & t_3^2/2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y,

$$|\Phi_0^{(2)}| = T_1^3 \quad (3.23)$$

$$\tilde{\Phi}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_1 + 2)(u_1 + 1) & -F_1(u_1 + \frac{3}{2}) & F_1^2 \\ -(u_2 + 1)(u_2 - 1) & 2F_1u_2 & -2F_1^2 \\ \frac{1}{2}(u_3 - 1)(u_3 - 2) & -F_1(u_3 - \frac{3}{2}) & F_1^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Entonces:

$$\tilde{\varphi}_0^{(2)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u + 2)(u + 1), & \text{para } -3/2 \leq u < -1/2 \\ -(u + 1)(u - 1), & \text{para } -1/2 \leq u < 1/2 \\ \frac{1}{2}(u - 1)(u - 2), & \text{para } 1/2 \leq u < 3/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.25)$$

En las ecuaciones (3.20) y (3.24) se puede ver que es suficiente calcular la primera columna de la matriz dual, ya que las siguientes son las derivadas negativas de las anteriores, escaladas por factores constantes. De hecho, dado que la primera columna tiene simetría uniforme, solo se necesita su primera mitad.

A partir de (3.22) se puede ver que $\Phi_0^{(K)}$ es una matriz de Vandermonde con columnas escaladas. En el Apéndice A se demuestra que su determinante es $|\Phi_0^{(K)}| = T_1^{\frac{K(K+1)}{2}}$ [4].

Para $K = 3$, tenemos $t_1 = t[-2T_1, -T_1]$, $t_n = t_1 + (n - 1)T_1$, con $n = 2, 3, 4$, entonces:

$$|\Phi_0^{(3)}| = T_1^6 \quad (3.26)$$

A partir de la primera columna de la dual, obtenemos:

$$\tilde{\varphi}_0^{(3)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{6}(u+3)(u+2)(u+1), & \text{para } -2 \leq u < -1 \\ -\frac{1}{2}(u+2)(u+1)(u-1), & \text{para } -1 \leq u < 0 \\ \frac{1}{2}(u+1)(u-1)(u-2), & \text{para } 0 \leq u < 1 \\ -\frac{1}{6}(u-1)(u-2)(u-3), & \text{para } 1 \leq u < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.27)$$

En general, el polinomio en el c -ésimo intervalo de tiempo de izquierda a derecha del K -ésimo O-spline paso bajo está dado por la siguiente expresión:

$$p_c(u) = \frac{1}{D_c} \prod_{n=1}^{(K+1)} (u+n-c), \quad c = 1, 2, \dots, K+1 \quad (3.28)$$

en la cual la constante D_c garantiza valor unitario con $u = 0$ para cada polinomio. La forma factorizada en (3.28) permite el cálculo de cualquier O-spline, pieza por pieza, evitando el problema de singularidad encontrado en la inversión del operador numérico de Taylor en (3.16) cuando el período T_1 es pequeño [4].

Para los espectros de las O-splines de órdenes desde $K = 1$ hasta $K = 9$, también fueron halladas expresiones en forma cerrada, en el software Wolfram Mathematica. Estos resultados se muestran en el Apéndice B.

3.6 O-SPLINES ARMÓNICOS

Los O-splines armónicos son simplemente versiones moduladas de los splines paso bajo a una frecuencia armónica particular.

$$\tilde{\varphi}_h^{(K)}(u) = \tilde{\varphi}_0^{(K)}(u) \cdot e^{j2\pi hu}, \quad h = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.29)$$

Los cruces por cero de la función exponencial compleja coinciden con los de las O-splines, conservando su propiedad cíclica [4].

CAPÍTULO 4

ONDULETAS O-WAVELETS

En este capítulo se presentarán las bases y resultados relevantes para la obtención de las onduletas ortogonales a partir de los O-splines. Se introducirá al lector a la teoría de onduletas y se exponen las nociones básicas que fundamentan la construcción de estas funciones. Finalmente se aplica la teoría para la obtención numérica de las onduletas a partir de los Osplines y se describen los pasos y resultados en Matlab.

4.1 TEORÍA DE ONDULETAS.

La teoría onduletas proporciona una forma de construir bases ortonormales en $L^2(\mathbb{R})$ mediante la traslación y escalamiento de una función fija $\psi(x)$, conocida como Onduleta (Wavelet), definida como:

DEFINICIÓN 4.1 Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$:

I Para $j, k \in \mathbb{Z}$ se define $\psi_{j,k}$ como:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), x \in \mathbb{R}$$

II La función $\psi(x)$ se denomina onduleta si las funciones $\psi_{j,k}(x)$ forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

Esta definición puede escribirse en términos del operador de traslación T_k y el operador de dilatación D^a como:

$$\psi_{j,k} = D^{2^j} T_k \psi, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Donde $D^a f(x) = a^{1/2} f(ax)$ y $T_b f(x) = f(x - b)$.

En la segunda mitad de la década de los 80, Mallat y Meyer [20] introdujeron el análisis multiresolución como una herramienta general para construir bases ortonormales de onduletas a partir de una función escalar $\varphi(x)$ ortonormal en sus traslaciones enteras.

DEFINICIÓN 4.2 (*Análisis Multiresolución*) *Un análisis multiresolución para $L^2(\mathbb{R})$ consiste en una secuencia de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ y una función $\varphi \in V_0$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:*

I *Para todo $j \in \mathbb{Z}$, los subespacios V_j están anidados:*

$$\dots V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$$

II $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

III $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} = D(V_j)$

IV $f \in V_0 \Rightarrow T_k f \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$

V *Existe una función $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ llamada escalante tal que $V_0 = \text{span}(T_k \varphi)_{k \in \mathbb{Z}}$.*

Como se definió en 4.2, un análisis multiresolución consiste en una serie de condiciones en ciertos subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ y una función asociada $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Para construirlo partiendo de los espacios V_j , es necesario definir sus complementos ortogonales W_j como [21]:

DEFINICIÓN 4.3 (*Espacios W_j*) Sea V_j una secuencia de subespacios cerrados en $L^2(\mathbb{R})$ que cumplen la condición (I) de la definición 4.2, entonces $\forall j \in \mathbb{Z}$ se denota W_j como el complemento ortogonal de V_j con respecto a V_{j+1} . Por tanto:

$$W_j := \{f \in V_{j+1} \mid \langle f, g \rangle = 0, \forall g \in V_j\}$$

Los espacios V_j en un análisis multiresolución están determinados unívocamente por la función $\varphi(x)$, por ello, se dice que $\varphi(x)$ genera un análisis multiresolución. Pero solo funciones muy especiales $\varphi(x)$ pueden generar una análisis multiresolución. En general, las condiciones ello se enuncian en la Definición 4.4:

DEFINICIÓN 4.4 Sea $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, V_j un conjunto de espacios definido por (I) y (II) en 4.2 y se cumple que:

1. $\inf_{-\epsilon, \epsilon} |\varphi(\gamma)| > 0$ para algún $\epsilon > 0$
2. Existe una función $H_0 \in L^2(0, 1)$ de periodo 1 tal que:

$$\hat{\varphi}(\gamma) = H_0(\gamma/2)\hat{\varphi}(\gamma/2) \quad (4.1)$$

O alternativamente:

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_0(n)\sqrt{2}\varphi(2x - n) \quad (4.2)$$

3. $\{T_k\varphi(x)\}$ constituyen un sistema ortonormal.

Entonces se dice que $\varphi(x)$ es una función escalante y genera un análisis multiresolución.

Ya se han definido las condiciones que debe cumplir una función escalante $\varphi(x)$ para generar un análisis multiresolución, pero aún no se menciona como obtener la onduleta a través de $\varphi(x)$. El siguiente teorema relaciona la onduleta y la función escalante.

TEOREMA 4.5 Sea $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ una función que genera un análisis multiresolución y $H_0 \in L^2(0, 1)$ una función de periodo 1 que satisface 4.1, se define $H_1(\gamma)$ como:

$$H_1(\gamma) = \overline{H_0(\gamma + 1/2)} e^{-2\pi i(\gamma + 1/2)} \quad (4.3)$$

De manera que:

$$\hat{\psi}(\gamma) = H_1(\gamma/2) \hat{\psi}(\gamma/2) \quad (4.4)$$

Por tanto, se cumple que:

- I $\{T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal para W_0 .
- II $\{D^j T_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ y por tanto, ψ es una onduleta.

De esta forma, encontrando la función $H_1(\gamma)$ es posible definir de manera indirecta la onduleta $\psi(x)$.

4.2 ORTOGONALIZACIÓN DE LOS O-SPLINES.

Para la obtención de una onduleta $\psi(x)$ a partir de un O-spline, deben verificarse las condiciones planteadas en la definición 4.4 para considerar el O-Spline como función escalante. Sin embargo, la condición (III) de esta definición no se cumple para órdenes $m \geq 1$, debido a que los O-splines no constituyen un sistema ortogonal en sus traslaciones enteras. El producto interno de traslaciones enteras no es cero $\langle T_i \varphi(x), T_k \varphi(x) \rangle \neq 0$.

En la figura 4.1, se muestra el traslape de 4 Osplines de distinto orden y su primera traslación entera a la derecha. Note que el traslape entre las translaciones provoca la pérdida de ortogonalidad.

Se necesita entonces ortogonalizar los O-splines para su uso como función

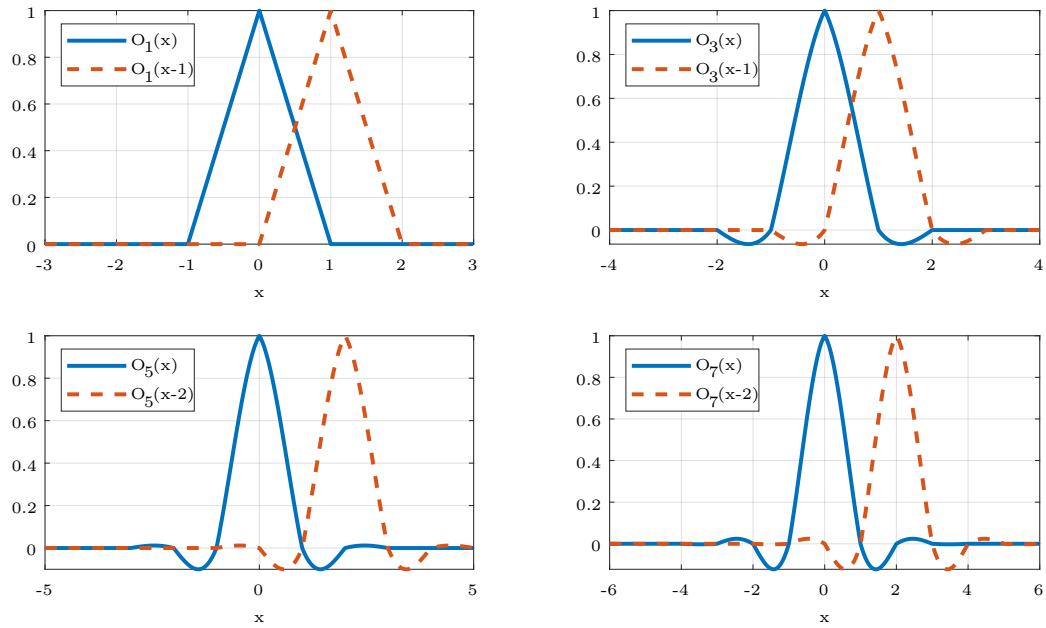


FIGURA 4.1: O-Spline de ordenes $m = 1$, $m = 3$, $m = 5$ y $m = 7$ con su primera traslación entera.

escalante, para lo cual, se define la función normalizante [22]:

$$G(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{O}_m(\gamma + k)|^2 \tag{4.5}$$

La función $G(\gamma)$ es periódica de periodo unitario, por tanto, su representación en el dominio temporal estará dada por coeficientes discretos que pueden obtenerse a través de su desarrollo en serie de Fourier.

El espectro del O-spline ortogonal de orden m usando $G(\gamma)$ estará dado por:

$$\Phi(\gamma)_m = \frac{\hat{O}_m(\gamma)}{\sqrt{G(\gamma)}} \tag{4.6}$$

La función $G(\gamma)$ y su inversa obtenidas se muestran en la figura 4.2 y 4.3. Note como a medida de que aumenta el orden del O-Spline los órdenes impares se hacen más ortogonales y los órdenes pares menos ortogonales, acortándose el espacio entre ellos como se muestra en la figura 4.2.

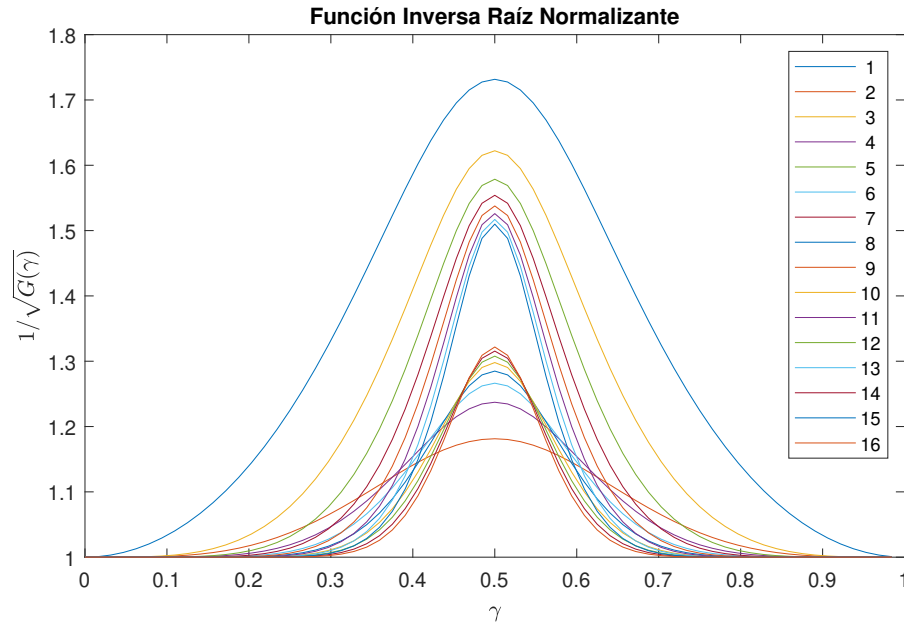


FIGURA 4.3: Función normalizante raíz inversa para los O-splines de órdenes $m = 1...16$ en el dominio de la frecuencia.

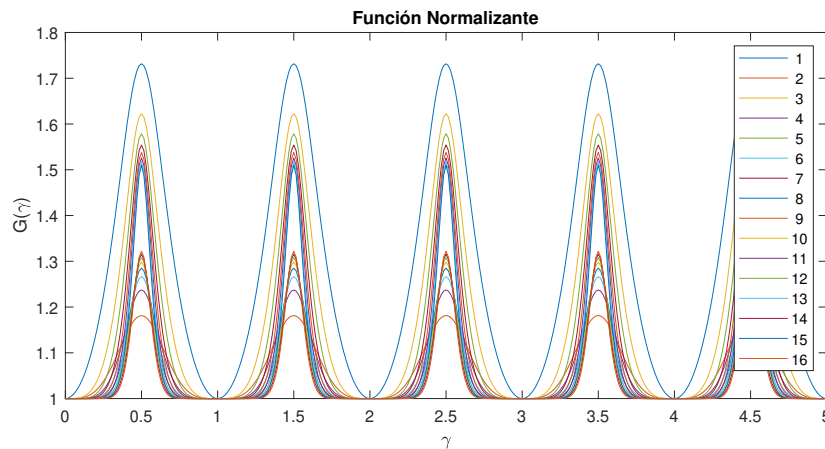


FIGURA 4.2: Función normalizante para los O-splines de órdenes $m = 1...16$ en el dominio de la frecuencia.

Los O-Splines ortogonales se obtuvieron a partir de la ecuación 4.6 en el dominio temporal utilizando dos procedimientos análogos:

1. Antitransformando la expresión 4.6 directamente al dominio temporal utilizando

la transformada inversa de Fourier.

2. Obteniendo los coeficientes discretos de $1/\sqrt{G(\gamma)}$ y realizando la convolución en el tiempo con el O-Spline.

Ambas vías fueron implementadas obteniendo resultados equivalentes. Se adjunta en el Apéndice D los coeficientes discretos en el tiempo del desarrollo en serie de coseno de la función $1/\sqrt{G(\gamma)}$ obtenidos numéricamente para los órdenes impares desde $m = 1$ hasta $m = 15$.

La figura 4.4 muestra los espectros de los O-Splines normalizados de orden $m = 1 \dots 16$ y la figura 4.5 sus formas de onda en el dominio del tiempo.

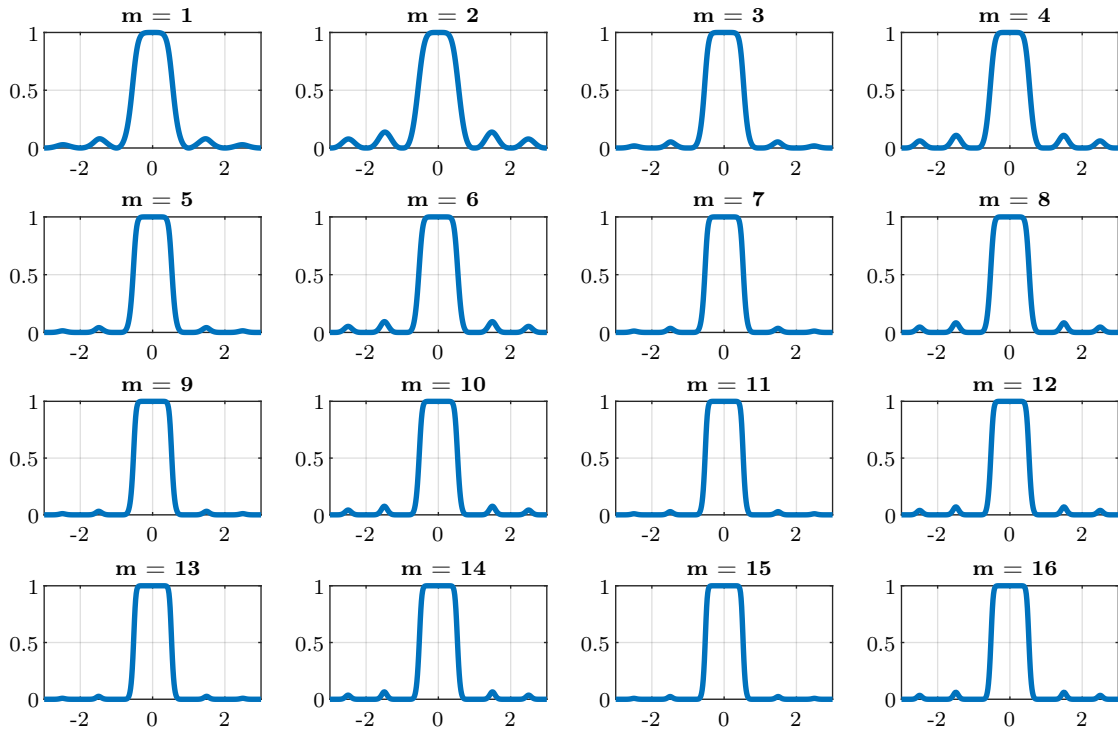
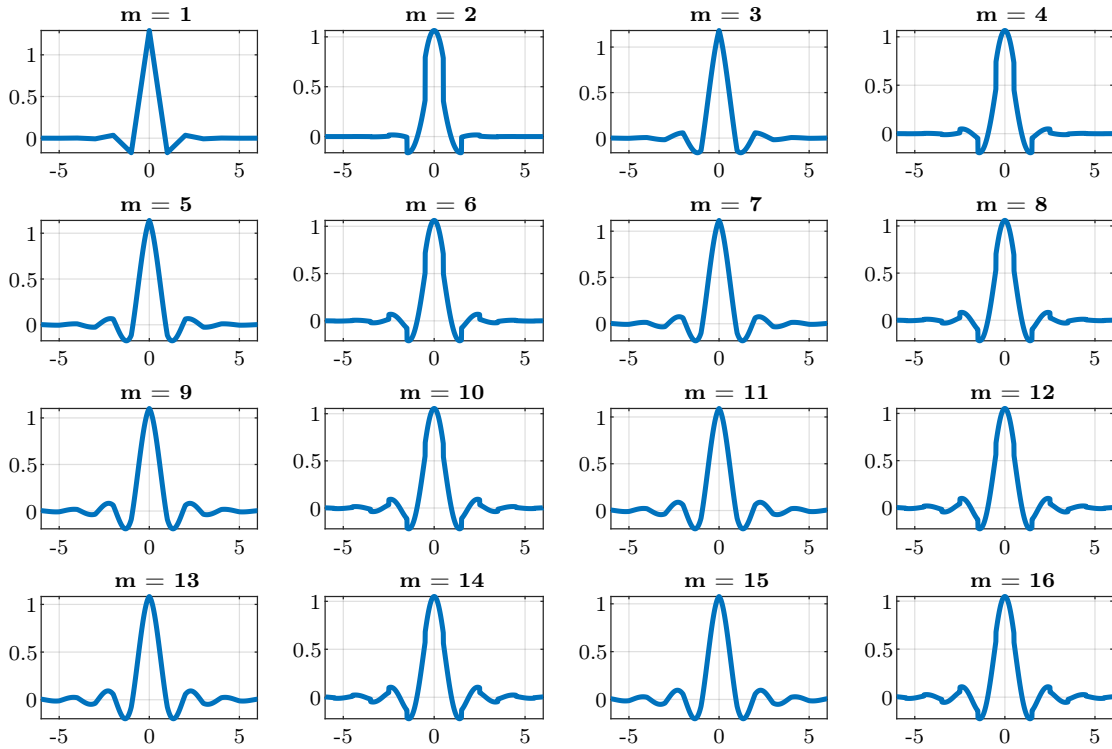


FIGURA 4.4: Espectro de los O-splines ortogonalizados de órdenes $m = 1 \dots 16$.

FIGURA 4.5: O-splines Ortogonales de órdenes $m = 1...16$.

4.3 OBTENCIÓN DE LAS ONDULETAS

Una vez obtenidos los O-Splines ortogonales, se satisfacen todos los requerimientos de la Definición 4.4 para la generación de un análisis multiresolución, por lo que se consideran los O-Splines ortogonales como funciones escalantes $\varphi_m(x)$.

Se conoce de la ecuación 4.1 que la función auxiliar $H_0(\gamma)$ asociada con $\varphi(x)$ en un análisis multiresolución cumple que:

$$H_0(\gamma) = \frac{\hat{\varphi}(2\gamma)}{\hat{\varphi}(\gamma)}$$

Que puede escribirse por conveniencia en su versión expandida haciendo $\gamma = \gamma/2$ de la forma:

$$H_0\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\hat{\varphi}(\gamma)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (4.7)$$

Por tanto, expandiendo por un factor de 2 espectro de la función escalante $\hat{\varphi}(\gamma)$ y realizando la división punto a punto es fácil obtener una aproximación numérica de $H_0(\gamma/2)$. Debido a la periodicidad de la función $H_0(\gamma)$ solo es necesario realizar el cociente para el intervalo $\gamma \in [0, 1)$ ya que $H_0(\gamma)$ es periódica con periodo 1.

En la figura 4.6 se muestran los resultados numéricos para las funciones $\hat{\varphi}(\gamma)$, $\hat{\varphi}(2\gamma)$ y $H_0(\gamma)$ obtenidas para $m = 1$.

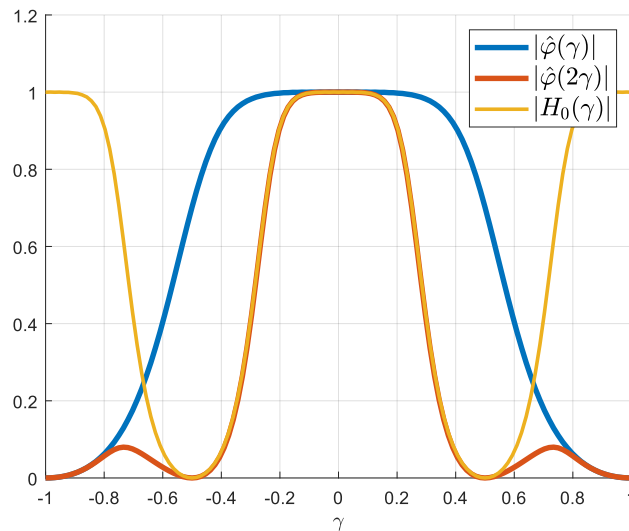


FIGURA 4.6: Funciones $\hat{\varphi}(\gamma)$, $\hat{\varphi}(2\gamma)$ y $H_0(\gamma)$ obtenidas para $m = 1$.

La función $H_1(\gamma)$ fue presentada en la ecuación 4.3 para definir indirectamente la función onduleta $\psi(x)$. Su relación con $H_0(\gamma)$ está dada por:

$$H_1(\gamma) = \overline{H_0(\gamma + 1/2)} e^{-2\pi i(\gamma + 1/2)}$$

Por tanto, desfasando de un medio la función auxiliar $H_0(\gamma)$, obteniendo su versión conjugada y multiplicándola por factor exponencial de fase se podrá obtener $H_1(\gamma)$, y por consiguiente, la función $\psi(x)$. La figura 4.7 muestra dos periodos del valor absoluto de las funciones $H_0(\gamma)$ y $H_1(\gamma)$ obtenidos para $m = 1$.

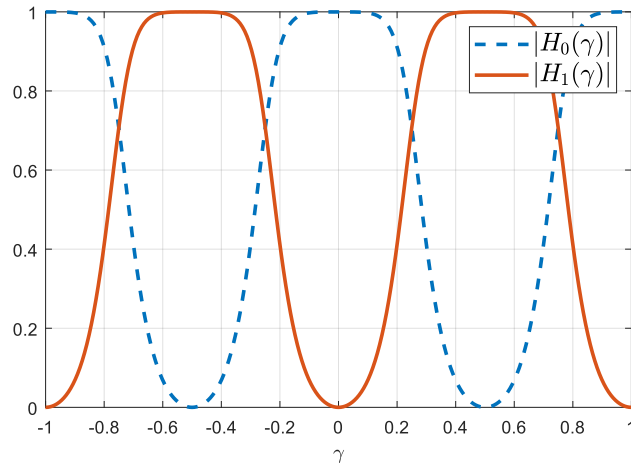


FIGURA 4.7: Funciones $H_0(\gamma)$ y $H_1(\gamma)$ obtenidas para $m = 1$.

Finalmente utilizando la ecuación 4.4 podemos obtener el espectro de la onduleta sabiendo que:

$$\hat{\psi}(\gamma) = H_1(\gamma/2)\hat{\varphi}(\gamma/2)$$

O de manera alternativa en el dominio temporal:

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h_0(1-n)} \varphi(2x-n) \sqrt{2} \quad (4.8)$$

La obtención de las funciones $\psi(x)$ se realizó tanto en el dominio frecuencial como el en dominio temporal, y en ambos casos se obtuvo el mismo resultado. Para dominio temporal se encontraron los coeficientes $h_0(x)$ que se adjuntan en el apéndice D resolviendo el sistema de ecuaciones que se plantea en 4.2. Una vez obtenido los coeficientes, la función $\psi(x)$ fue hallada usando 4.8.

En el dominio frecuencial, se calculó la función $H_0(\gamma)$ utilizando 4.7 y posteriormente la onduleta antitransformando la ecuación 4.4. Se prefiere el método frecuencial, debido a la facilidad de implementación y eficiencia computacional utilizando la Transformada Rápida de Fourier. No obstante, se usó un acercamiento temporal como método de validación del algoritmo, pero el orden del sistema a resolver aumenta considerablemente al incrementarse el orden del O-Spline y la frecuencia de muestreo.

En la figura 4.8 se muestra el espectro de la onduleta obtenida mediante el método frecuencial y en 4.9 la forma de onda en el tiempo para los órdenes $m = 1 \dots 16$.

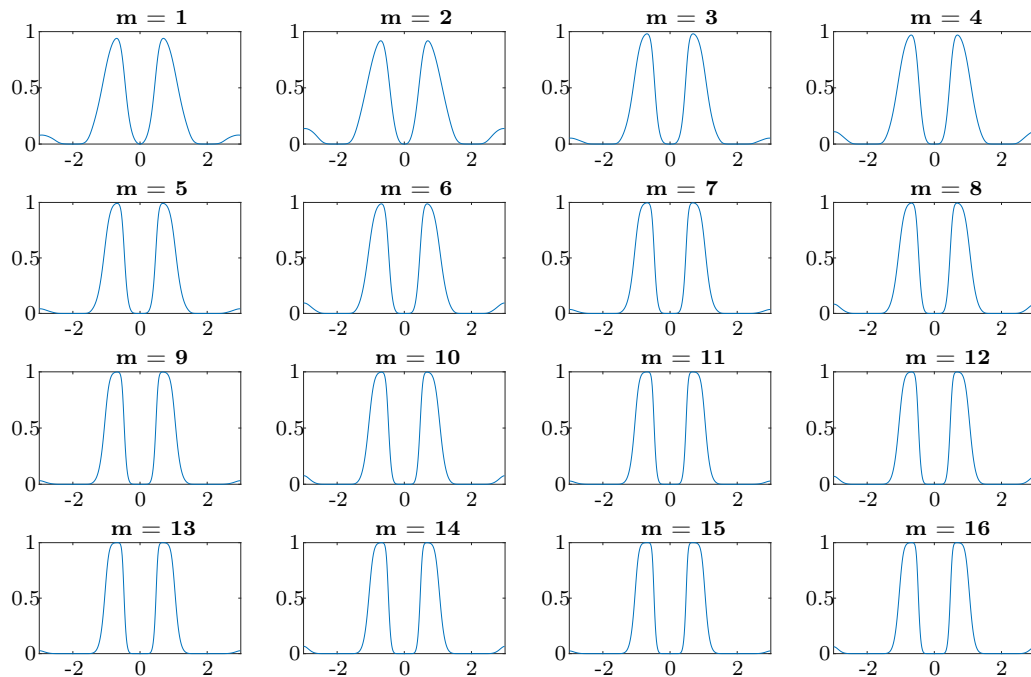


FIGURA 4.8: Espectro $\hat{\varphi}_m(\gamma)$ de las Onduletas derivadas de los O-splines de orden $m = 1 \dots 16$.

4.4 NOTAS SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN.

El proceso de obtención de las onduletas descrito en las secciones 4.1, 4.2 y 4.3 se ha resumido en la Figura 4.10, en la cuál se presenta el Diagrama de Flujo del algoritmo desarrollado.

Todos los resultados de la ortogonalización fueron obtenidos de manera numérica y se adjunta su código de Matlab como parte la función `Owavelets` en el Apéndice B. Para la generación de los Osplines se utilizó la función `Osplinepp` presentada en [23]. El orden de la onduleta más alto que puede obtenerse está limitado por esta función `Osplinepp` ya que para órdenes mayores a $m = 177$ lanza una excepción.

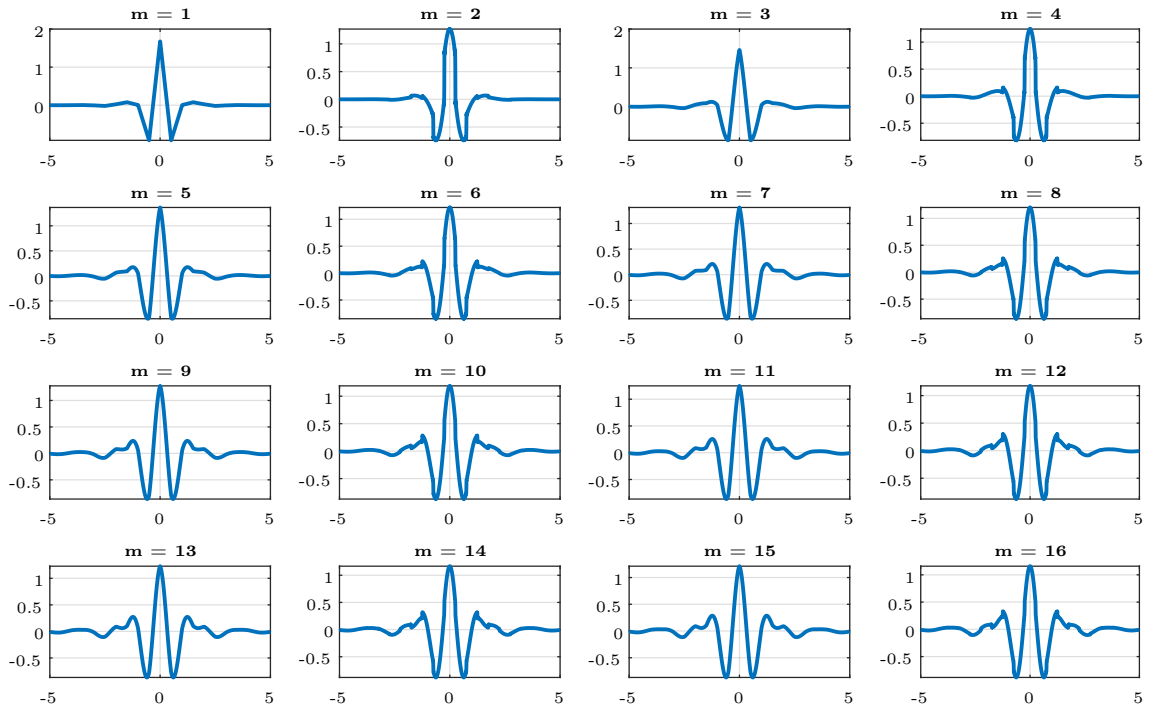


FIGURA 4.9: Onduletas $\psi_m(x)$ para los O-splines de órdenes $m = 1...16$.

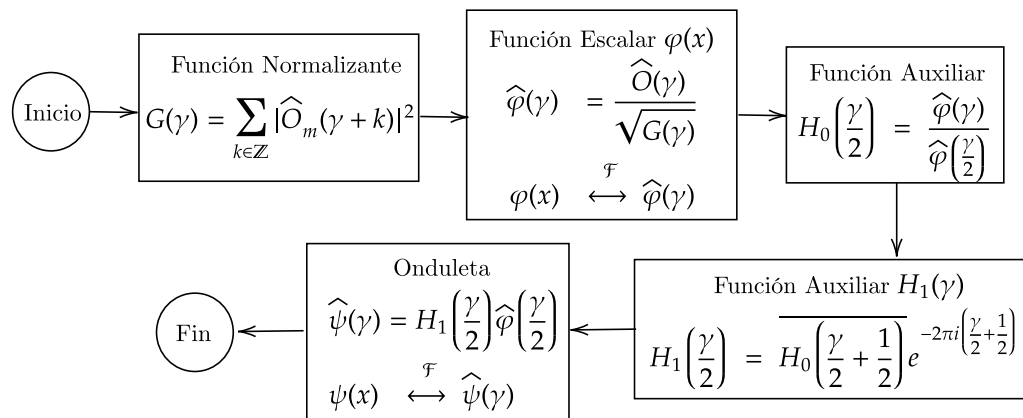


FIGURA 4.10: Diagrama de flujo para la obtención de las onduletas

La función Owavelets admite variaciones en la frecuencia de muestreo N_0 y la cantidad de puntos NFFT de la Transformada Rápida de Fourier, pero para ilustrar el procedimiento en esta tesis, se seleccionó $N_0 = 128$ muestras por ciclo para el O-Spline y $NFFT = 4096$. Note que ambos son potencias de 2 de manera que el cociente $NFFT/2N_0$ es un número entero. Este cociente es el máximo orden que puede obtenerse con una frecuencia de N_0 y NFFT puntos debido a que una onduleta de orden m necesita $m+1$ ciclos, y por el Teorema de Muestreo:

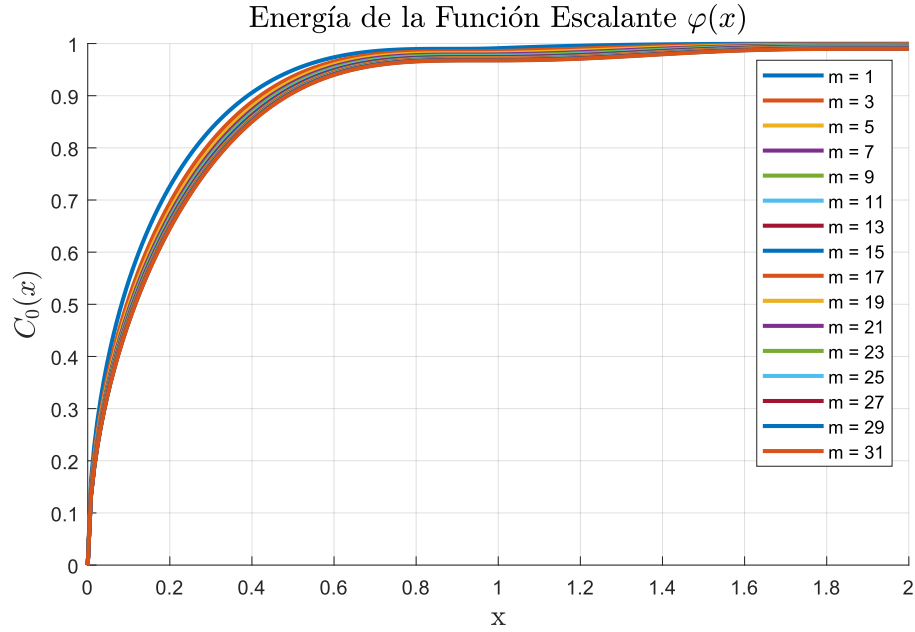
$$\begin{aligned} (m+1)N_0 &\leq \frac{NFFT}{2} \\ m+1 &\leq \frac{NFFT}{2N_0} \\ m &\leq \frac{NFFT}{2N_0} - 1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

La transformación de los O-Splines de orden m al dominio de la frecuencia $\hat{O}_m(\gamma)$ se ha realizado usando la Transformada Rápida de Fourier con 4096 puntos y la suma de los cuadrados de los espectros desplazados se realizó de manera numérica.

4.5 PRUEBAS DE ORTOGONALIDAD Y NORMALIDAD

De manera estricta, el soporte de las onduletas ortogonales es el intervalo infinito $I \in (-\infty, \infty)$. Esto es un inconveniente desde el punto de vista de implementación, pues las funciones deberán traducirse a vectores numéricos. Es entonces necesario redefinir el intervalo de soporte a un intervalo finito sin afectar la propiedad de ortonormalidad de la base.

En el dominio temporal, la energía de las funciones escalante y la onduleta se concentran en el origen, por lo que resulta adecuado delimitar el intervalo de soporte al intervalo finito $I \in (-S/2, S/2)$, donde S es el intervalo de soporte. Con el propósito de evaluar el efecto provocado por esta delimitación, se definen los

FIGURA 4.11: Energía de la Función Escalante $\varphi_m(x)$ en $[-x, x]$.

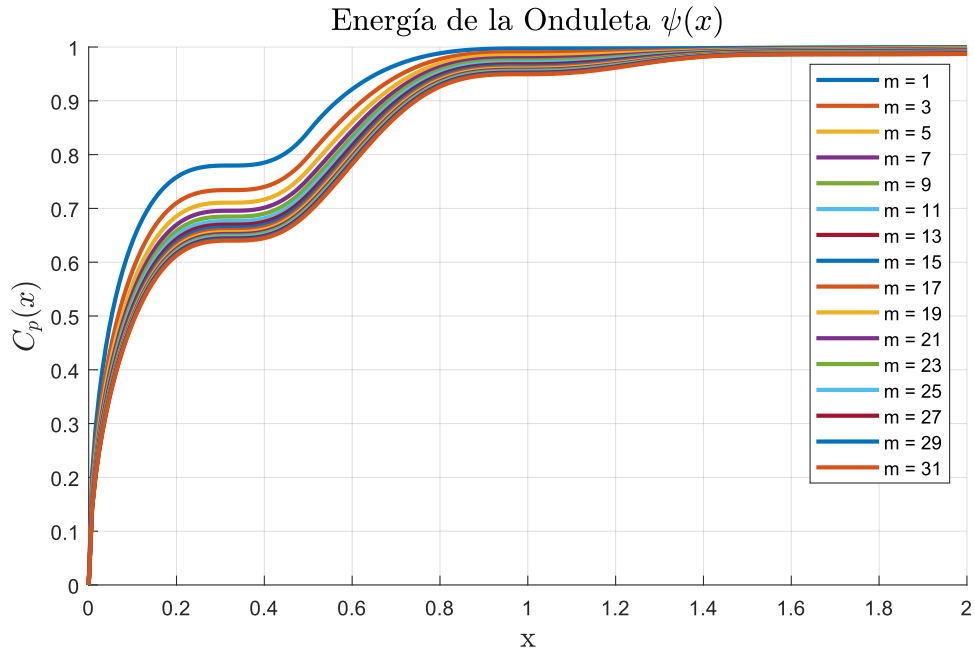
siguientes indicadores:

$$C_0(x) = \sqrt{\int_{-x}^x \varphi^2(x) dx} \quad (4.10)$$

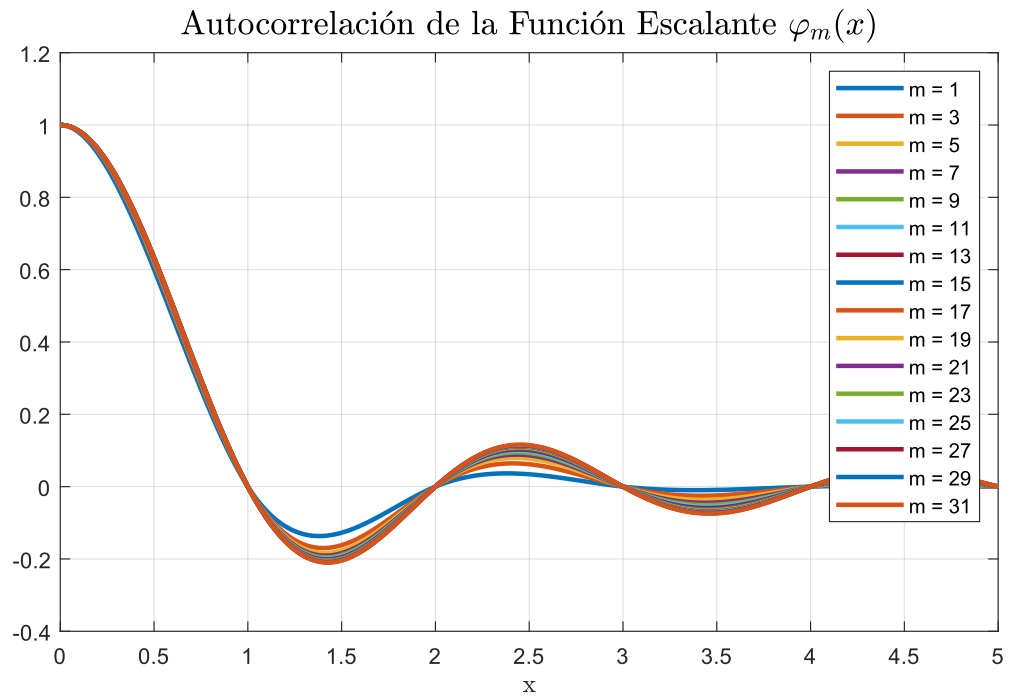
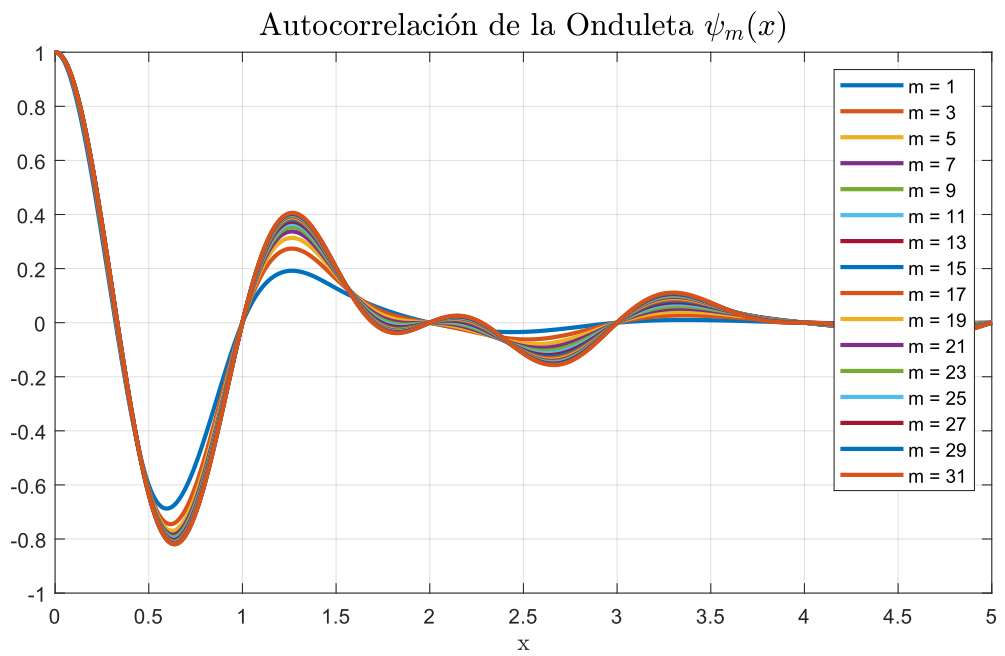
$$C_p(x) = \sqrt{\int_{-x}^x \psi^2(x) dx} \quad (4.11)$$

Estos parámetros evalúan la propiedad de normalidad, es decir, que la norma de cada función sea unitaria, respecto a la delimitación del intervalo de soporte. En otras palabras, evalúan la energía de la señal en el intervalo $[-x, x]$.

Las curvas resultantes de las ecuaciones 4.11 y 4.10 se muestran en las figuras 4.11 y 4.12 para los primeros 16 órdenes impares. Note que para $x = 1.5$, es decir, para un ciclo y medio de la onduleta la energía de la señal es prácticamente unitaria, por lo que el intervalo $[-1.5, 1.5]$ se concentra la mayor parte de la energía de la onduleta. Por otro lado se evidencia que al aumentar el orden disminuye ligeramente el soporte consecuencia de que aumenta el número de ciclos del O-Spline. Debido a las discontinuidades en los O-Splines de orden par, se ha omitido su análisis y su comprobación en el resto de esta tesis.

FIGURA 4.12: Energía de la Onduleta $\psi_m(x)$ en $[-x, x]$

A continuación, se evalúa la ortogonalidad de las onduletas y las funciones escalantes utilizando la función de autocorrelación normalizada. Como se muestra en las figuras 4.13 y 4.14 la autocorrelación es nula para valores enteros de x , por tanto, se verifica que las funciones son ortogonales en sus traslaciones enteras.

FIGURA 4.13: Autocorrelación de la Función Escalante. $\varphi_m(x)$.FIGURA 4.14: Autocorrelación de la Onduleta $\psi_m(x)$.

Finalmente se evaluará la ortogonalidad entre dos onduletas desplazadas una unidad mediante el parámetro $D_{\psi(x)-\psi(x-1)}$ en el intervalo $[-x, x]$ dado por la ecuación 4.12:

$$D_{\psi(x)-\psi(x-1)} = \frac{\int_{-x}^x \psi(t)\psi(t-1)dt}{\sqrt{\int_{-x}^x \psi^2(t)dt \int_{-x}^x \psi^2(t-1)dt}} \quad (4.12)$$

Los resultados para órdenes impares se adjuntan en la figura 4.15. Note como para un intervalo de truncamiento de $[-2, 2]$ las onduletas ya su producto interno es nulo, evidenciando su ortogonalidad.

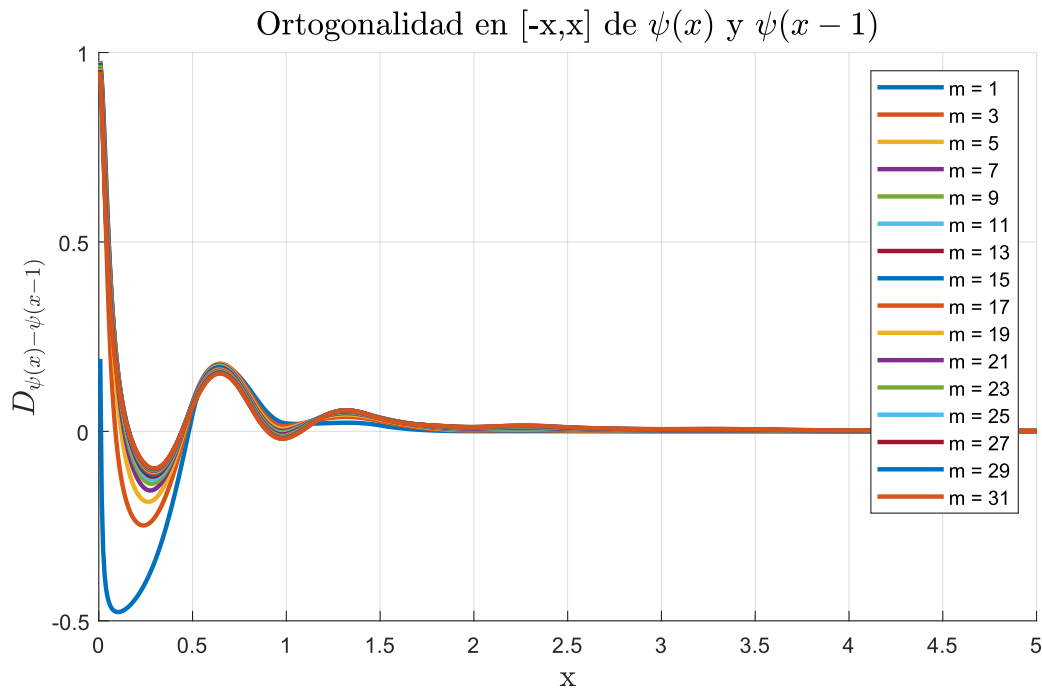


FIGURA 4.15: Prueba de Ortogonalidad para la Onduleta y su primera traslación para $[-x, x]$

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LAS O-WAVELETS

El análisis de señales utilizando onduletas se ha convertido en una herramienta muy eficaz en el procesamiento de señales en las últimas décadas. Las onduletas son funciones matemáticas analizan los datos en diferentes componentes de frecuencia y luego muestran cada componente en diferentes escalas. Poseen numerosas ventajas sobre los métodos tradicionales de Fourier en el análisis de situaciones físicas donde la señal contiene discontinuidades y picos agudos.

La idea fundamental detrás de las onduletas es el análisis multiresolución. Las wavelets son funciones que satisfacen ciertos requisitos matemáticos y se utilizan para representar datos u otras funciones. Los algoritmos de wavelet procesan datos a diferentes escalas o resoluciones. Si se observa una señal con una escala relativamente grande notaremos sus características gruesas o de baja frecuencia. De manera similar, si miramos una señal con una escala pequeña, notaremos las características de alta frecuencia. Esto hace que las onduletas sean interesantes y útiles.

En el capítulo 4 se presentó un algoritmo para la obtención de onduletas ortogonales a partir de los O-Splines que denominaremos OWavelets, y se validaron sus características de ortogonalidad y normalidad. En esta capítulo se implementarán las onduletas obtenidas como parte del *Wavelet Toolbox* de Matlab y se analizarán algunas de sus aplicaciones. El objetivo no es hacer un análisis profundo de las

onduletas obtenidas, sino ilustrar al lector algunas de las posibles aplicaciones de las *OWavelets*.

5.1 TRANSFORMADA DE WAVELET

El procedimiento de análisis de onduletas consiste en adoptar una función de prototipo conocida como onduleta madre $\psi(x)$ y descomponer las señales en coeficientes dados por:

$$C_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (5.1)$$

Donde el parámetro a representa la escala b representa la porción de la señal en el tiempo que se está analizando. La figura 5.1 muestra la cobertura en el plano tiempo-frecuencia donde el eje vertical está controlado por a y el horizontal por b . Note como dependiendo de la escala, tenemos una mayor resolución en el tiempo o en la frecuencia.

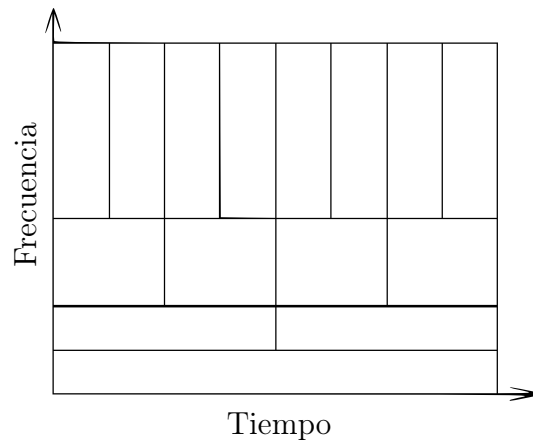


FIGURA 5.1: Cobertura en el plano Tiempo-Frecuencia de la Transformada de Onduletas.

El primer nivel de coeficientes aproxima la función de manera general, proyectándola en un espacio generado funciones base de gran escala. El segundo nivel será un poco menos general, y así sucesivamente se representará completamente la señal de

manera que los coeficientes sean una representación exacta de la señal original. En general, la transformada de onduletas particiona un vector o señal en una secuencia de subespacios, cada uno de ellos representando un nivel de escala diferente. Cada escala corresponde a una dilatación diferente de la onduleta madre. Los coeficientes de menor numeración representan las características de escala más grandes (baja frecuencia) y los de mayor numeración representan las características de escala más pequeñas (alta frecuencia). Es posible observar de la figura 5.1 que el número de coeficientes que representan un nivel de escala crece en un factor de dos a medida que la escala de las características decrece. Esto significa que el número de coeficientes usados para representar la información de alta frecuencia es sustancialmente mayor que aquel para representar la información de baja escala.

5.2 IMPLEMENTACIÓN DE LOS OWAVELETS EN MATLAB

Como parte de la suite de Matlab se incluye el *Wavelet Toolbox* que ofrece un conjunto de herramientas y algoritmos muy útiles para análisis de onduletas. Esta herramientas permite la implementación de nuevas *wavelets* definidas por el usuario, por lo que se utilizará esta funcionalidad para realizar algunas pruebas de los O-Wavelets utilizando los propios ejemplos predefinidos en el ToolBox. El código y los detalles necesarios para la implementación se adjuntan en el Apéndice B.

5.2.1 ANÁLISIS DE RUIDO

El enfoque habitual para la eliminación de ruido modela el ruido como una señal de alta frecuencia añadida a una señal original. El análisis de ondículas permite separar las frecuencias de ruido de las frecuencias de la señal. El ruido se representará como una señal de alta frecuencia constante en todo el tiempo y, por lo tanto, su

identificación será muy fácil utilizando las escalas pequeñas de la Transformada de Wavelet.

La forma original y más sencilla de eliminar el ruido de una señal contaminada consiste en modificar los coeficientes de las ondículas de forma inteligente de tal forma que se descuiden los coeficientes “pequeños” asociados al ruido. Por tanto, los coeficientes modificados pueden utilizarse para reconstruir la señal original libre de los efectos del ruido. Está implícito en la estrategia que sólo unos pocos coeficientes de ondas están asociados con la señal original, y que su identificación y eliminación permitirá una reconstrucción casi perfecta de la señal subyacente.

En la figura 5.2 se presenta el la señal *noissin* de 1000 muestras predefinida como ejemplo en Matlab y su análisis utilizando una OWavelet de orden 3. En la imagen, el eje vertical representa las diferentes escalas y el eje horizontal representa las muestras. Note que prácticamente toda la información de la señal está representada por los coeficientes de la escala de $a = 128$, por lo tanto, sería conveniente reducir o eliminar el resto de los coeficientes que representan el ruido.

El desempeño de las Owavelets analizadas en el *Toolbox* es muy similar a la onduleta ortogonal de Meyer propuestas por Yves Meyer. A pesar de que no se realizó un análisis cuantitativo, es evidente su posible aplicación en el análisis de ruido.

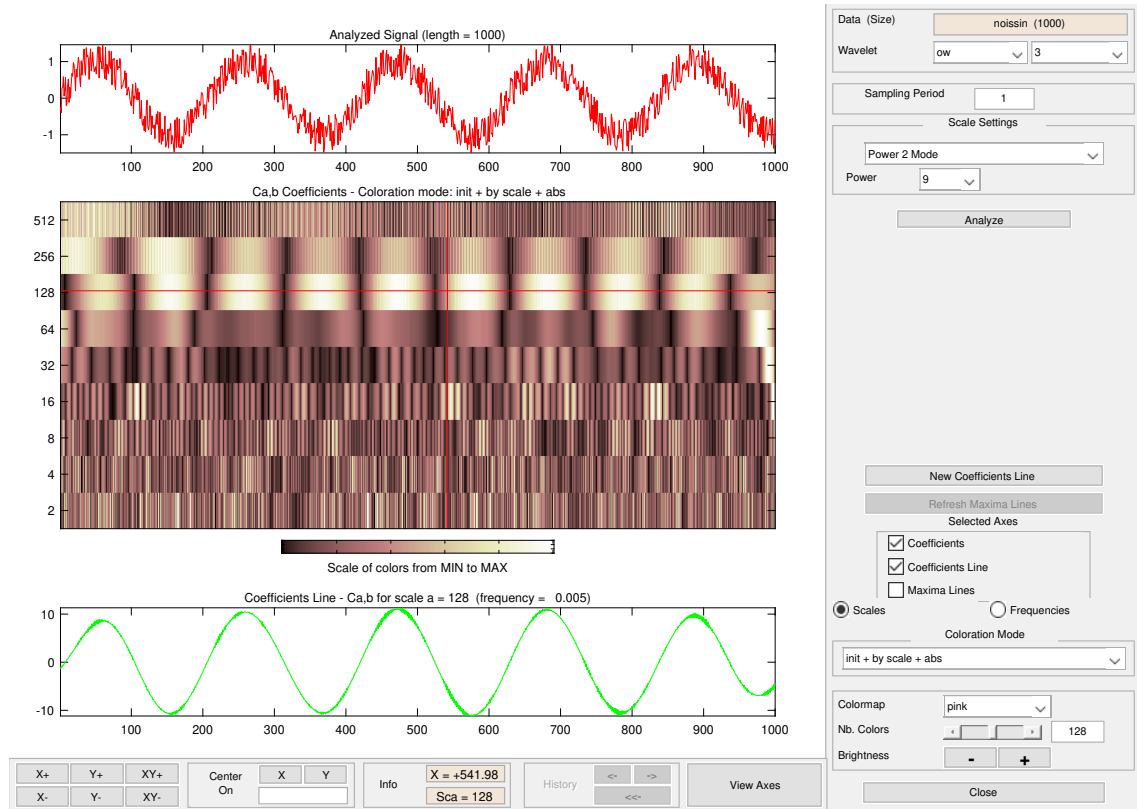


FIGURA 5.2: Señal senoidal con ruido analizada con una *OWavelet* de orden $m = 3$

5.2.2 DETECCIÓN DE SINGULARIDADES Y CAMBIOS DE FRECUENCIA.

Las señales con cambios muy rápidos, como las señales transitorias en sistemas dinámicos, pueden sufrir cambios abruptos de frecuencia, que se evidencian en saltos o cambios bruscos en la primera o segunda derivada. El análisis de Fourier generalmente no puede detectar esos eventos, pero un análisis utilizando onduletas puede arrojarnos mucha información al respecto. El propósito de este ejemplo es mostrar cómo utilizando las *OWavelets* es posible detectar el instante exacto en que cambia una señal y así como la amplitud del cambio. Esto posee gran trascendencia en el procesamiento de imágenes ya que una de sus principales aplicaciones es la detección de bordes, lo

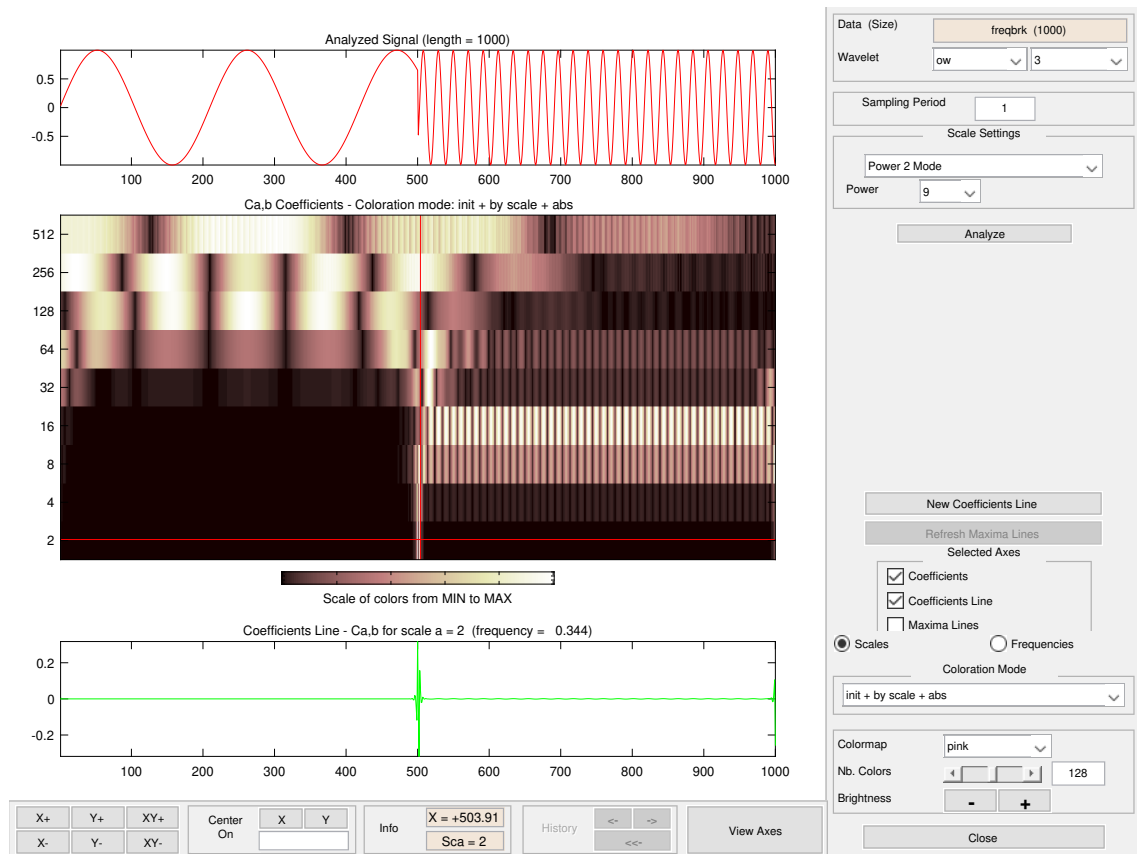


FIGURA 5.3: Señal con cambios de frecuencia analizada con una *OWavelet* de orden $m = 3$

cual implica la detección de cambios bruscos.

La figura 5.3 muestra el ejemplo “Frequency Breakdown” incluido en el Wavelet Toolbox de Matlab. La señal consiste en una onda sinusoidal lenta seguida abruptamente por una onda sinusoidal media.

La señal está formada por un seno lento y un seno medio, a cada lado de 500 muestras. Estos dos senos no están conectados de manera continua, de manera que con los coeficientes de la escala $a = 2$ pueden usarse para detectar esta discontinuidad. Note que el instante en que ocurre el cambio localizado con mucha precisión: solo un pequeño dominio alrededor de la muestra contiene grandes detalles. Esto se debe a que la ruptura contiene la parte de alta frecuencia y que las frecuencias en el resto

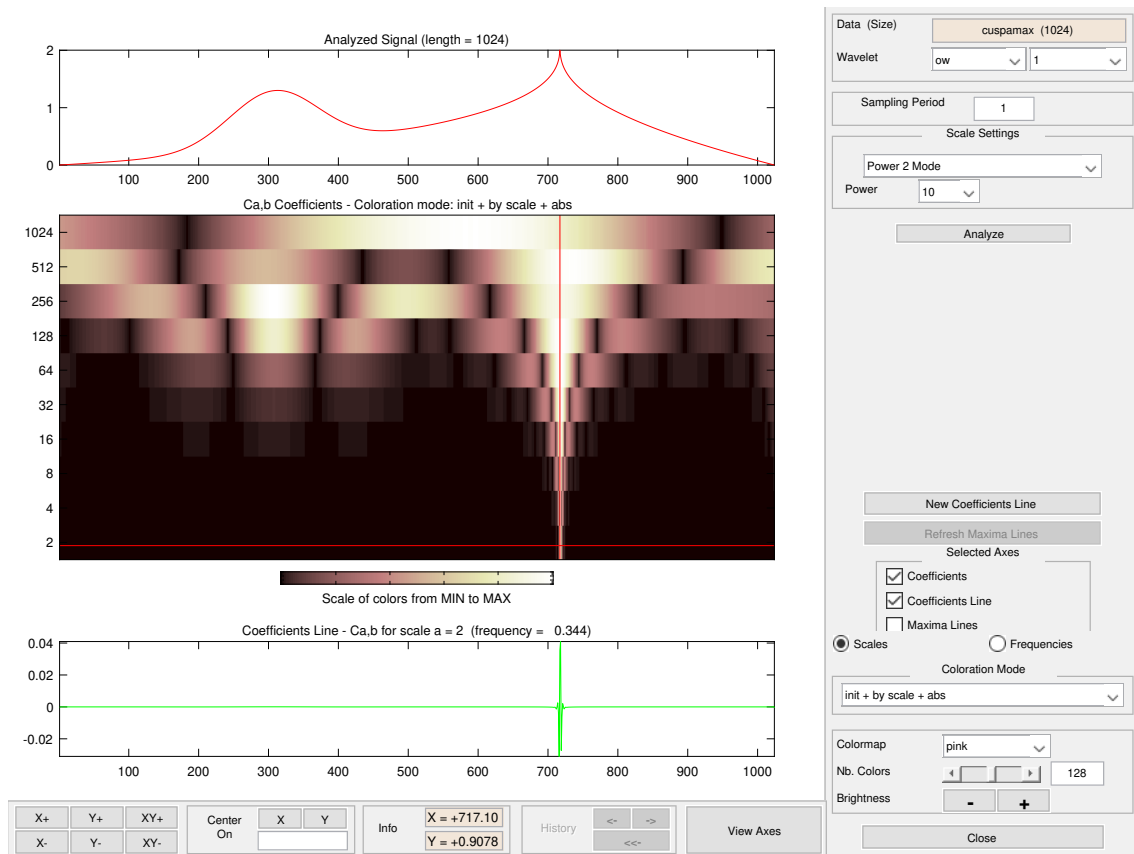


FIGURA 5.4: Detección de Singularidades con *OWavelet* de orden $m = 1$

de la señal no son tan altas.

En la figura 5.4 se ilustra otro ejemplo de detección de singularidades incluido en Matlab llamado "Test Singularities". Note que con una onduleta *OWavelet* de orden $m = 1$ es posible localizar con gran precisión la singularidad, simplemente con los coeficientes de la escala $a = 2$.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En el presente documento de tesis, se desarrolló un algoritmo numérico para la obtención de onduletas ortogonales derivadas de los O-Splines utilizando la teoría del Análisis Multiresolución.

Se elaboró de manera numérica utilizando Matlab un algoritmo basado en la transformada rápida de fourier (FFT) capaz ortogonalizar en sus traslaciones enteras los O-Splines de cualquier orden y se realizaron pruebas de ortogonalidad y ortonormalidad para validar los resultados. Los O-Splines ortogonales fueron obtenidos tanto desarrollando la función normalizante tanto en el dominio temporal como en el dominio de la frecuencia, arribando a resultados idénticos en ambos casos. Debido al alto orden de los sistemas de ecuaciones a resolver a medida que aumenta el orden del O-Spline, se prefirió el trabajo en la frecuencia utilizando la Transformada rápida de Fourier (fft) y su inversa (ifft).

Se obtuvieron una nueva clase de onduletas ortogonales utilizando los O-Splines ortogonalizados como función escalante para generar un Análisis Multiresolución. De manera análoga al desarrollo de los O-Splines, fueron desarrolladas las ecuaciones numéricamente tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia y en ambos casos se llegó al mismo resultados. Se realizaron pruebas sobre ortogonalidad de los O-Splines.

Se implementó en el Wavelet Toolbox de Matlab las nuevas onduletas obtenidas y se presentó su uso para la detección de singularidades, cambios de frecuencia y análisis de ruido. Se definió la transformada Wavelet y se mostró la descomposición de diferentes señales el plano de tiempo-frecuencia realizando la utilidad de esta herramienta para localizar los cambios de frecuencia de una señal.

El presente trabajo se limitó a la ortogonalización de los O-Splines, obtención de las onduletas ortogonales y a su implementación en Matlab, pero se recomienda en futuros estudios realizar una comparación minuciosa con las onduletas más usadas actualmente. Se abren nuevas posibilidades de aplicación en el análisis de señales, o incluso como base para un sistema de comunicaciones, donde la ortogonalidad es una propiedad muy deseada.

APÉNDICE A

MATRIZ DE VANDERMONDE

A.1 DETERMINANTE DE LA MATRIZ DE VANDERMONDE

Dada la matriz de Vandermonde:

$$V_K = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{K-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_K & c_K^2 & \cdots & c_K^{K-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Es conocido que:

$$\det(V_K) = \left[\prod_{k=1}^{(K-1)} (c_K - c_{K-k}) \right] \det(V_{K-1}) \quad (\text{A.2})$$

En el caso de $\Phi_0^{(K)}$, $t_K - t_{K-k} = kT$, y

$$\det(\Phi_0^{(K)}) = T^K \cdot \det(\Phi_0^{(K-1)}) \quad (\text{A.3})$$

los factoriales de los términos de Taylor en las columnas de $\Phi_0^{(K)}$ cancelan los factoriales en el determinante de la matriz de Vandermonde.

Por lo tanto:

$$\det(\Phi_0^{(K)}) = T^K \cdot T^{K-1} \cdot T^{K-2} \dots T^2 \cdot T = T^{\frac{K(K+1)}{2}} \quad (\text{A.4})$$

con $\det(\Phi_0^{(0)}) = 1$ [4].

APÉNDICE B

CÓDIGO DE MATLAB

Se adjunta el código de la función programada para la obtención de las Onduletas siguiendo el diagrama de flujo mostrado en la figura 4.10.

La sección B.1 contiene el código de la función para la obtención de las Onduletas, en B.1.1 y B.1.2 se adjuntan sus dependencias y en B.1.3 se muestra un ejemplo de uso de este código.

En la sección B.2 se ofrece el código e información sobre la implementación de la Onduleta en el Wavelet Toolbox de Matlab.

Todo el código, incluyendo funcionalidades gráficas y posibles actualizaciones estarán disponibles en <https://github.com/JaimeMenendez/dela0wavelets>.

B.1 FUNCIÓN OWAVELET.M

```
1 function [SfT, Ondf, Ondt] = Owavelet(No, Nfft, K)
2 % Returns the Scalar Function SFT (f), and the Wavelet in time Ondt(x)
3 % and frequency Ondf (f) of the 0-Spline of order K.
4 % — No is the sample rate of the 0-Spline
5 % — K is the order of the 0-spline
6 % — Nfft is the length of the Fourier transform
```

```
7 %
8 % The value of K is limited by the relation  $fsf = Nfft/No$ , note that
9 %  $0 < K < fsf/2$ . In order to obtain a higher orders of K, change the
10 % values of Nfft and No. Make sure that `NFFT` and `No` are powers
11 % of 2.
12 %
13 % The 0wavelet function uses a numerical algorithm for
14 % orthogonalization of the 0-Splines and obtaining the Wavelets
15 % derived from the analytical process of obtaining the Battle-Lemarie
16 % wavelets from the B-Splines. It is based on the Fast Fourier
17 % Transform and Anti-Transform.
18
19 fsf = Nfft/No;
20 [Oh,~,~]=0splinepp(K,No);           % Spline impulse response
21 f = -No/2:1/fsf:No/2-1/fsf;         % Frecuency vector
22
23 Of = fftshift(fft(Oh,Nfft)/No)';    % Spline (f)
24 GK = Gfunction(Of,Nfft,No);         % Normalizing function (f)
25 Of = Of.*exp(-(K+1)*1i*pi*f);       % Phase correction
26
27 Of2 = resample(Of,2,1);             % Spline in frequency(f/2)
28 Of2 = Of2(Nfft/2+1:3*Nfft/2);      % Resampling for NFFT points
29
30 GK2 = resample(GK,2,1);             % Normalizing function (f)
31 GK2 = GK2(Nfft/2+1:3*Nfft/2);      % Resampling to have NFFT points
32
33 SFf = Of ./ sqrt(GK);               % Scaling Function in f
34 SFf2 = Of2 ./ sqrt(GK2);           % Scaling Function in f/2
35
36 % Scaling Function in x domain.
```

```

37 SFt = real(ifftshift(ifft(fftshift(SFf*Nfft)))/fsf);
38
39 H0 = SFf ./ SFf2 ;           % H0(f/2) = SF(f)/SF(f/2)
40
41 % Taking just one period
42 H0t = H0(Nfft/2-fsf:Nfft/2+fsf-1);
43
44 % Replicate to make H0(f/2) periodic
45 Hoc = repmat(H0t,[1 Nfft/(2*fsf)+1]);
46 Hoc = Hoc(fsf+2:Nfft+fsf+1); % H0 with NFFT points
47
48 Hoc12 = circshift(abs(Hoc),fsf); % Shift Half cycle
49 H1 = conj(Hoc12);           % H1(f/2)
50
51 Ondf = H1 .* Of2 ./sqrt(GK2); % Wavelet: Ond(f) = H(f/2)*SF(f/2)
52 Ondt = ifft(fftshift(Ondf));
53 Ondt =ifftshift(real(Ondt)*No); % Wavelet in time: Ond(t)
54
55 end

```

B.1.1 FUNCIÓN GFUNCTION.M

```

1 function [Ga] = Gfunction(Of,Nfft,No)
2 % Returns Nfft points of the Normalizing function G.
3 Ga = zeros(1,2*Nfft);
4 for k = 0:Nfft/No:Nfft
5     Ga(k+1:k+Nfft) = Ga(k+1:k+Nfft)+ abs(Of).^2;
6 end
7 Ga = Ga(Nfft/2+1:3*Nfft/2);

```

```
8 end
```

B.1.2 FUNCIÓN OSPLINEPP.M

```
1 function [phi, phip, phipp]=Osplinepp(K,N0)
2 %Order K>3
3 %N0 Number of samples per cycle
4 delt=1/N0;
5 unit=(0:delt:1-delt)';
6
7 %Order K
8 knots=[flip(-[1:K]) [1:K]];
9 P=ones(N0,K+1);
10 Pp=ones(N0,K+1);
11 Ppp=ones(N0,K+1);
12 ir0=0;
13 for nint=1:K+1
14     u=(K+1)/2-1+nint+unit;
15     coef= [1, -knots(ir0+1)]/(-knots(ir0+1));
16     for k=1:K
17         P(:,nint)=P(:,nint).*(u-knots(ir0+k))/(-knots(ir0+k));
18         if k>1
19             coef = conv(coef, [1, -knots(ir0+k)]/(-knots(ir0+k)));
20         end
21     end
22     % Derivative Polynomial coefficients
23     C(:,nint)=coef';
24     Cp(:,nint)=polyder(coef)';
25     Cpp(:,nint)=polyder(Cp(:,nint))';
```

```
26
27     % First derivative by Horner scheme
28     Pp(:,nint)=Cp(1,nint)*Pp(:,nint);
29     for k=1:K-1
30         Pp(:,nint)=Pp(:,nint).*u + Cp(k+1,nint);
31     end
32
33     % Second derivative by Horner scheme
34     Ppp(:,nint)=Cpp(1,nint)*Ppp(:,nint);
35     for k=1:K-2
36         Ppp(:,nint)=Ppp(:,nint).*u + Cpp(k+1,nint);
37     end
38     ir0=ir0+1;
39 end
40 N=(K+1)*N0;
41 phi=reshape(P,[N,1]);
42 phip=reshape(Pp,[N,1]);
43 phipp=reshape(Ppp,[N,1]);
44 end
```

B.1.3 EJEMPLO DE USO

```
1 %%Declaring Values
2 Nfft = 8192;
3 No = 128;           % Sample frequency in time for 0-Splines
4 fsf = Nfft/No;     % Sample frequency in Frequency Domain
5
6 m = 3;             % Order of 0-Spline ( 0 < m < fsf/2).
7
```

```
8 % Set Latex as default Interpreter
9 set(0, 'DefaultLineLineWidth', 2);
10 set(0, 'defaultTextInterpreter', 'latex');
11
12 %% Find Scalar Function, Wavelet Spectrum and Wavelet
13 [SFt, Ondf, Ondt] = Owavelet(No, Nfft, m);
14
15 %% =====
16 %                               Plots
17 % =====
18 fsize = 15; % font size
19 flim = 3; % Limits [-flim flim] for Wavelet Spectrum
20
21 f = -No/2:1/fsf:No/2-1/fsf;
22 n = 0:(Nfft-1);
23 x = (n-Nfft/2)/No;
24
25 %% Plot Wavelet
26 figure()
27 plot(x, Ondt);
28 set(gca, 'XLim', [-5 5])
29 title(['0-Spline Wavelet (m = ' num2str(m) ')'], 'FontSize', fsize+1)
30 xlabel('$x$', 'FontSize', fsize)
31 ylabel('$\psi(x)$', 'FontSize', fsize)
32 grid on;
33
34 %% Plot Wavelet Spectrum
35 figure()
36 plot(f, abs(Ondf));
37 title(['m = ' num2str(m)]);
```

```

38 set(gca,'XLim',[-flim flim])
39 title(['0-Spline Wavelet Spectrum (m = ' num2str(m) ')'],...
40       'FontSize', fsize+1)
41 xlabel('$\gamma$', 'FontSize', fsize)
42 ylabel('$\hat{\psi}(\gamma)$', 'FontSize', fsize)
43 grid on;
44
45 %%Plot Scaling Function
46 figure()
47 plot(x,Sf);
48 title(['Scaling Function (m = ' num2str(m) ')'], 'FontSize', fsize+1)
49 xlabel('$x$', 'FontSize', fsize)
50 ylabel('$\varphi(x)$', 'FontSize', fsize)
51 set(gca,'XLim',[-5 5])
52 grid on;

```

B.2 IMPLEMENTACIÓN DE LAS OWAVELETS EN EL WAVELET TOOLBOX DE MATLAB

En esta sección se incluye la implementación de las OWavelets en el *Wavelet Toolbox* de Matlab basado en [24]. Para incluirla asegúrese de seguir los siguientes pasos:

1. Cree un nuevo directorio específicamente para contener los archivos de esta sección. Asegurese de que el directorio contenga: `AddingOWavelet.m`, `owinfo.m`, `owaveletm.m`, `Osplinepp.m` y `Gfunction.m`.
2. Agregue a la ruta de MATLAB el directorio creado.
3. Ejecute el script `AddingOWavelet.m`.

Para ejecutar el Wavelet Toolbox teclee en la ventana de comandos `waveletAnalyzer` y observará la ventana mostrada en la figura B.1.

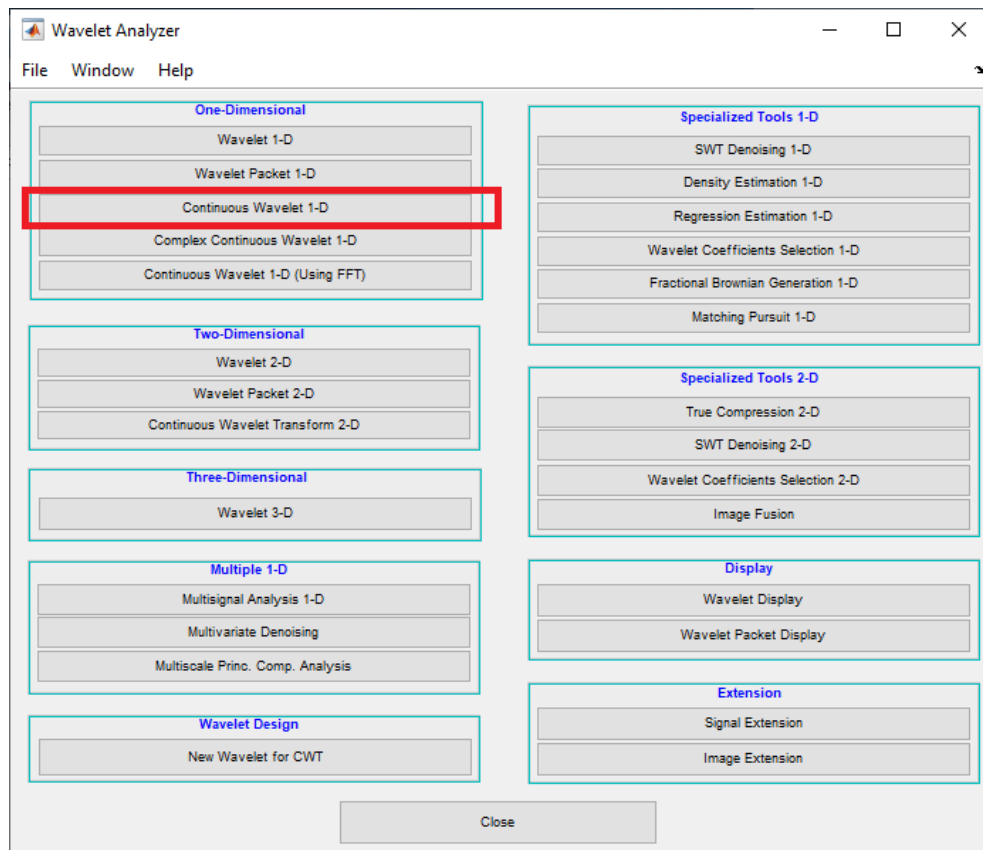


FIGURA B.1: Ventana del Wavelet Toolbox de Matlab.

```

1 % Preparing to Add a New Wavelet Family
2
3 %1- Choose the full name of the wavelet family (fn).
4 fn = "owavelet";
5
6 %2- Choose the short name of the wavelet family (fsn).
7 fsn = "ow";
8
9 %3- Determine the wavelet type (wt).(Type 3)
10 % Orthogonal wavelets without FIR filter, but with scale function
11 wt = 3;

```

```
12
13 %4— Define the Orders of Wavelets Within the Given Family
14 nums = '1 2 3 **';
15
16 %5— Define the Orders of Wavelets Within the Given Family (Type 3):
17 % "Orthogonal with Scale Function"
18 % The syntax of the first line in the M-file must be
19 %     function [phi,psi,t] = file(lb,ub,n,wname)
20 file = "owaveletm";
21
22 %6— Define the Effective Support
23 b = [-8,8];
24
25
26 % Add Wavelet
27 wavemngr('add',fn,fsn,wt,nums,file,b)
```

B.2.1 ARCHIVO OWINFO.M

```
1 function owinfo
2 %OWINFO Information on O-Wavelet.
3 %
4 % O-Wavelet
5 %
6 % Orthogonal           yes
7 % Biorthogonal        no
8 % Compact support     no
9 % DWT                  no
10 % CWT                  yes
```

```

11 %
12 % Support width           infinite
13 % Effective support      [-8 8]
14 % Symmetry               yes

```

B.2.2 FUNCIÓN OWAVELETM

```

1 function [phi,psi,t] = owaveletm(lb,ub,n,wname)
2 wname = char(wname);
3 K = str2double(wname(3:end));
4 Nfft = 8192;
5 No = 64;
6 fsf = Nfft/No;
7 [Oh,~,~]=osplinepp(K,No);           % Spline impulse response
8 f = -No/2:1/fsf:No/2-1/fsf;         % Frequency vector
9
10 Of = fftshift(fft(Oh,Nfft)/No)';    % Spline in frequency (f)
11 GK = Gfunction(Of,Nfft,No);        % Normalizing function (f)
12 Of = Of.*exp(-(K+1)*1i*pi*f);      % Phase correction
13
14 Of2 = resample(Of,2,1);             % Spline in frequency (f/2)
15 Of2 = Of2(Nfft/2+1:3*Nfft/2);      % Resampling to have NFFT points
16
17 GK2 = resample(GK,2,1);            % Normalizing function (f)
18 GK2 = GK2(Nfft/2+1:3*Nfft/2);      % Resampling to have NFFT points
19
20 SFf = Of ./ sqrt(GK);              % Scaling Function in frequency (f)
21 SFf2 = Of2 ./ sqrt(GK2);           % Scaling Function in frequency (f/2)
22

```

```
23 % Scaling Function in x domain.
24 SFt = real(ifftshift(ifft(fftshift(SFf*Nfft)))/fsf);
25
26 H0 = SFf ./ SFf2 ; % H0(f/2) = SF(f)/SF(f/2)
27 H0t = H0(Nfft/2-fsf:Nfft/2+fsf-1); % Just one period [-0.5,0.5)
28 Hoc = repmat(H0t,[1 Nfft/(2*fsf)+1]); % Make H0(f/2) periodic
29 Hoc = Hoc(fsf+2:Nfft+fsf+1); % H0 with NFFT points
30
31 Hoc12 = circshift(abs(Hoc),fsf); % Shift 0.5 Hz, (Half cycle)
32 H1 = conj(Hoc12); % H1(f/2)
33
34 Ondf = H1 .* Of2 ./sqrt(GK2); % Wavelet: Ond(f) = H(f/2)*SF(f/2)
35 Ondt = ifft(fftshift(Ondf));
36 Ondt =ifftshift(real(Ondt)*No); % Wavelet in time: Ond(t)
37
38 x = ((0:(Nfft-1))-Nfft/2)/No;
39
40 t = linspace(lb,ub,n);
41 phi = spline(x,SFt,t);
42 psi = spline(x,Ondt,t);
43
44 end
```

APÉNDICE C

ESPECTROS DE LOS O-SPLINES

C.1 ESPECTROS DE LAS O-SPLINES EN FORMA CERRADA

A continuación se muestran expresiones en forma cerrada para los espectros de las O-splines, para órdenes desde $K = 1$ hasta $K = 9$. Fueron obtenidos en el software Wolfram Mathematica.

Para $K = 1$:

$$H(w) = \frac{2 - 2\text{Cos}[w]}{\sqrt{2\pi}w^2} \quad (\text{C.1})$$

Para $K = 2$:

$$H(w) = \frac{ie^{-\frac{3iw}{2}} (-1 + e^{iw})^3 (8 + w^2)}{8\sqrt{2\pi}w^3} \quad (\text{C.2})$$

Para $K = 3$:

$$H(w) = \frac{e^{-2iw} (-1 + e^{iw})^4 (6 + w^2)}{6\sqrt{2\pi}w^4} \quad (\text{C.3})$$

Para $K = 4$:

$$H(w) = -\frac{ie^{-\frac{5iw}{2}} (-1 + e^{iw})^5 (384 + 80w^2 + 9w^4)}{384\sqrt{2\pi}w^5} \quad (\text{C.4})$$

Para $K = 5$:

$$H(w) = -\frac{e^{-3iw} (-1 + e^{iw})^6 (60 + 15w^2 + 2w^4)}{60\sqrt{2\pi}w^6} \quad (\text{C.5})$$

Para $K = 6$:

$$H(w) = \frac{ie^{-\frac{7iw}{2}} (-1 + e^{iw})^7 (46080 + 13440w^2 + 2072w^4 + 225w^6)}{46080\sqrt{2\pi}w^7} \quad (\text{C.6})$$

Para $K = 7$:

$$H(w) = \frac{e^{-4iw} (-1 + e^{iw})^8 (840 + 280w^2 + 49w^4 + 6w^6)}{840\sqrt{2\pi}w^8} \quad (\text{C.7})$$

Para $K = 8$:

$$H(w) = -\frac{ie^{-\frac{9iw}{2}} (-1 + e^{iw})^9 (10321920 + 3870720w^2 + 758016w^4 + 103328w^6 + 11025w^8)}{10321920\sqrt{2\pi}w^9} \quad (\text{C.8})$$

Para $K = 9$:

$$H(w) = -\frac{e^{-5iw} (-1 + e^{iw})^{10} (15120 + 6300w^2 + 1365w^4 + 205w^6 + 24w^8)}{15120\sqrt{2\pi}w^{10}} \quad (\text{C.9})$$

APÉNDICE D

TABLAS

TABLA D.1: Coeficientes No Negativos de la antitransformada de $1/\sqrt{G(\gamma)}$

Index	m=0	m=3	m=5	m=7	m=9	m=11	m=13	m=15
0	1.2917	1.1818	1.1396	1.1165	1.1015	1.0908	1.0828	1.0765
1	-0.1746	-0.1354	-0.1136	-0.0994	-0.0892	-0.0815	-0.0754	-0.0705
2	0.0351	0.0575	0.0624	0.0627	0.0613	0.0593	0.0573	0.0553
3	-0.0078	-0.0175	-0.0257	-0.0311	-0.0342	-0.0361	-0.0371	-0.0376
4	0.0018	0.0061	0.0100	0.0138	0.0169	0.0194	0.0214	0.0229
5	-0.0004	-0.0021	-0.0042	-0.0063	-0.0082	-0.0100	-0.0116	-0.0131
6	0.0001	0.0008	0.0018	0.0030	0.0041	0.0052	0.0063	0.0074
7		-0.0003	-0.0008	-0.0014	-0.0021	-0.0028	-0.0035	-0.0042
8		0.0001	0.0003	0.0007	0.0011	0.0015	0.0020	0.0024
9			-0.0001	-0.0003	-0.0006	-0.0008	-0.0011	-0.0014
10			0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008
11				0.0001	-0.0001	-0.0002	-0.0004	-0.0005
12					0.0001	0.0001	0.0002	0.0003
13						-0.0001	-0.0001	-0.0002
14							0.0001	0.0001
15								-0.0001

TABLA D.2: Coeficientes No Negativos de $h_0(n)$.

Index	m=1	m=3	m=5	m=7	m=9	m=11	m=13	m=15
0	1.1562	1.1136	1.0945	1.0828	1.0747	1.0687	1.0639	1.0600
1/2	-0.5618	-0.5950	-0.6075	-0.6141	-0.6182	-0.6211	-0.6231	-0.6247
2/2	-0.0977	-0.0871	-0.0783	-0.0716	-0.0663	-0.0621	-0.0585	-0.0555
3/2	0.0735	0.1192	0.1416	0.1552	0.1643	0.1708	0.1758	0.1796
4/2	0.0240	0.0404	0.0455	0.0470	0.0469	0.0462	0.0453	0.0442
5/2	-0.0141	-0.0317	-0.0460	-0.0569	-0.0652	-0.0719	-0.0772	-0.0817
6/2	-0.0055	-0.0137	-0.0203	-0.0246	-0.0273	-0.0291	-0.0302	-0.0308
7/2	0.0031	0.0101	0.0166	0.0225	0.0278	0.0325	0.0366	0.0402
8/2	0.0013	0.0048	0.0082	0.0114	0.0141	0.0162	0.0179	0.0193
9/2	-0.0007	-0.0034	-0.0066	-0.0097	-0.0126	-0.0155	-0.0181	-0.0206
10/2	-0.0003	-0.0017	-0.0035	-0.0053	-0.0070	-0.0086	-0.0100	-0.0113
11/2	0.0002	0.0012	0.0027	0.0044	0.0061	0.0078	0.0094	0.0110
12/2	0.0001	0.0006	0.0015	0.0025	0.0035	0.0045	0.0055	0.0065
13/2		-0.0004	-0.0011	-0.0020	-0.0030	-0.0040	-0.0051	-0.0061
14/2		-0.0002	-0.0006	-0.0012	-0.0018	-0.0024	-0.0031	-0.0037
15/2		0.0002	0.0005	0.0009	0.0015	0.0021	0.0028	0.0034
16/2		0.0001	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0017	0.0022
17/2		-0.0001	-0.0002	-0.0004	-0.0008	-0.0011	-0.0015	-0.0020

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, “B-spline signal processing. I. Theory,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 821–833, Feb. 1993. Conference Name: IEEE Transactions on Signal Processing.
- [2] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, “B-spline signal processing. II. Efficiency design and applications,” *IEEE transactions on signal processing*, vol. 41, no. 2, pp. 834–848, 1993. Publisher: IEEE.
- [3] M. Unser and T. Blu, “Cardinal exponential splines: part I-theory and filtering algorithms,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438, 2005. Publisher: IEEE.
- [4] J. A. de la O Serna, “Dynamic harmonic analysis with fir filters designed with o-splines,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 67, no. 12, pp. 5092–5100, 2020.
- [5] J. A. de la O Serna, “Analyzing Power Oscillating Signals With the O-Splines of the Discrete Taylor–Fourier Transform,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 33, pp. 7087–7095, Nov. 2018. Conference Name: IEEE Transactions on Power Systems.
- [6] J. A. de la O Serna, M. R. A. Paternina, A. Zamora-Méndez, R. K. Tripathy, and R. B. Pachori, “EEG-Rhythm Specific Taylor–Fourier Filter Bank Implemented With O-Splines for the Detection of Epilepsy Using EEG Signals,” *IEEE Sensors*

- Journal*, vol. 20, pp. 6542–6551, June 2020. Conference Name: IEEE Sensors Journal.
- [7] J. A. D. L. O. Serna, M. R. A. Paternina, and A. Zamora-Mendez, “Assessing synchrophasor estimates of an event captured by a phasor measurement unit,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2020.
- [8] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*. Elsevier, June 2016. Google-Books-ID: IC1fDAAAQBAJ.
- [9] M. Unser, “Ten Good Reasons for Using Spline Wavelets,” *Wavelet Applications in Signal and Image Processing V*, vol. 3169, Sept. 2002.
- [10] A. Redd, “A comment on the orthogonalization of B-spline basis functions and their derivatives,” *Statistics and Computing*, vol. 22, no. 1, pp. 251–257, 2012. Publisher: Springer.
- [11] G. Battle, “A block spin construction of ondelettes. part i: Lemarié functions,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 110, no. 4, pp. 601–615, 1987.
- [12] P. Lemarie, “Ondelettes with exponential localization,” *Journal De Mathematiques Pures et Appliquees*, vol. 67, no. 3, pp. 227–236, 1988.
- [13] M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, *Foundations of signal processing*. Cambridge University Press, 2014.
- [14] F. Ayres, E. Mendelson, and L. Abellanas, *Cálculo diferencial e integral*. No. 517/A98dE/3a. ed., McGraw-Hill, 1991.
- [15] L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [16] G. Micula and S. Micula, *Handbook of Splines*. Mathematics and Its Applications, Springer Netherlands, 1999.
- [17] J. A. de la O Serna, “Dynamic phasor estimates for power system oscillations,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, no. 5, pp. 1648–1657, 2007.

-
- [18] M. A. P. a. J. Platas-Garza and J. A. d. l. O. Serna, “Dynamic Phasor and Frequency Estimates Through Maximally Flat Differentiators,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, pp. 1803–1811, July 2010. Conference Name: IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement.
- [19] J. A. de la O Serna, “Taylor–fourier analysis of blood pressure oscillometric waveforms,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 62, no. 9, pp. 2511–2518, 2013.
- [20] S. G. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation,” *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, 1989.
- [21] D. F. Walnut, *An introduction to wavelet analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [22] O. Christensen, *Functions, spaces, and expansions: mathematical tools in physics and engineering*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [23] J. A. D. L. O. Serna, M. R. A. Paternina, and A. Zamora-Mendez, “Assessing Synchronphasor Estimates of an Event Captured by a Phasor Measurement Unit,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, pp. 1–1, 2020. Conference Name: IEEE Transactions on Power Delivery.
- [24] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, and J.-M. Poggi, “Wavelet toolbox,” *The MathWorks Inc., Natick, MA*, vol. 15, p. 21, 1996.

RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

Ing. Jaime Menéndez Álvarez

Candidato para obtener el grado de
Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

OBTENCIÓN DE LAS ONDULETAS ORTOGONALES DE LA O
MEDIANTE LA ORTOGONALIZACIÓN DE LOS O-SPLINES

Jaime Menéndez Álvarez, hijo de Jaime Menéndez Álvarez y Liusik de la Caridad Álvarez Santana, nació en La Habana, Cuba el 9 de marzo de 1994. Estudió la Educación Primaria en la escuela Carlos Manuel de Céspedes y la Educación Secundaria en Augusto César Sandino, ambas del municipio Regla. Cursó el preuniversitario en el IPVCE Vladimir Ilich Lenin y realizó sus estudios universitarios en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, en La Habana, Cuba, graduándose como Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica en julio de 2018. Durante sus estudios se desempeñó como profesor ayudante de la Asignatura de Física y estuvo vinculado a proyectos de investigación de procesamiento digital de señales relacionados con el reconocimiento de locutores, el ruido impulsivo y la modulación OFDM. Realizó su tesis de grado en el desarrollo de un dispositivo inercial para la medición

de parámetros en ancianos vinculado al Centro de Neurociencias de Cuba donde posteriormente inició su vida laboral.