



Brechas acústicas en arreglos lineales de dipolos magnéticos

FRANCISCO JAVIER SIERRA VALDEZ*, CARLOS MARTÍNEZ HERNÁNDEZ*,
J. CARLOS RUIZ SUÁREZ**



La propagación de las señales acústicas a través de cadenas de esferas idénticas ha logrado, a través de los años, el estatus de un modelo clave para estudiar las propiedades acústicas de los materiales granulares. Comprimidas^{1,3} o no comprimidas,^{1,4,5} las cadenas se han estudiado con el objetivo de elucidar las diferencias importantes en las respuestas lineales y no lineales observadas en los sistemas granulares. En principio, dos partículas esféricas adyacentes en una cadena comprimida se deforman, según la ley de Hertz: la deformación δ_0 es proporcional a $F_0^{2/3}$, en la que F_0 es la fuerza de contacto. Si la amplitud de las oscilaciones es mucho más pequeña que δ_0 , se conocen bien los resultados para cadenas de masas puntuales idénticas unidas a movimientos oscilatorios lineales,¹ siendo la constante de resorte κ igual a $3/4 (a \cdot F)^{1/3} \theta^{-2/3}$, en la que a es el radio de las esferas, y θ es dada por $3/4 (1 - \nu^2) E^{-1}$, siendo ν el radio de Poisson, y E^{-1} el módulo de Young.

□ El presente artículo está basado en la investigación "Brechas acústicas en arreglos lineales de dipolos magnéticos", galardonada con el Premio de Investigación UANL 2010 en la categoría de Ciencias Exactas, otorgado en sesión solemne del Consejo Universitario, en septiembre de 2010.

Por consiguiente, la velocidad del sonido en una cadena es proporcional a $\kappa^{1/2}$, luego esto se vuelve proporcional a $F_0^{1/6}$. Como consecuencia, cuando F_0 es cero, la cadena es incapaz de transmitir sonido. Sin embargo, cuando la amplitud de las oscilaciones es más grande que δ_0 ,^{4,6} se pueden propagar ondas solitarias (solitones). El conocimiento acumulado hasta ahora acerca de este caso no lineal ha inducido a este grupo a proponer recientemente las nuevas aplicaciones, como los dispositivos de bifurcación.⁸ Un experimento realizado por uno de los grupos anteriores² fue la propagación de sonido en un arreglo lineal de esferas de 8 mm de diámetro.

Se coloca por un extremo de la cadena un emisor que produce una excitación; y por el otro, un receptor que envía la señal a un osciloscopio. A su vez, se aplica una fuerza de compresión a lo largo de la cadena, la cual se mide con un sensor de fuerza estática colocado en un extremo de la misma, detrás del emisor. Obtuvieron que para valores de fuerza pequeños, la ley de Hertz se modifica por $F_0^{1/4}$, para $F_0 \leq 1,250$ N, lo que contrasta con $F_0^{1/6}$ para valores mayores en la fuerza de

* Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UANL.

** Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Unidad Monterrey.

contacto. En la presente investigación retomamos el fenómeno de transmisión de sonido a través de una cadena de esferas (figura 1(a)). Sin embargo, a diferencia de trabajos anteriores, nosotros utilizamos esferas magnéticas idénticas hechas con base en neodimio, hierro y boro (NdFeB). Debido a la interacción dipolar cohesiva existente entre ellas, estos arreglos se consolidan sin necesidad de presión externa, lo que nos permite estudiar el efecto de la magnetización en la propagación del sonido. Nuestro propósito en este trabajo es discutir dos resultados: en primer lugar, la velocidad de una señal acústica, a través de una cadena magnética, sigue un comportamiento tipo ley de potencias con la fuerza de contacto F_m , en el que se encuentra el exponente de $1/3$ en lugar de $1/6$, obtenido anteriormente en cadenas comprimidas.

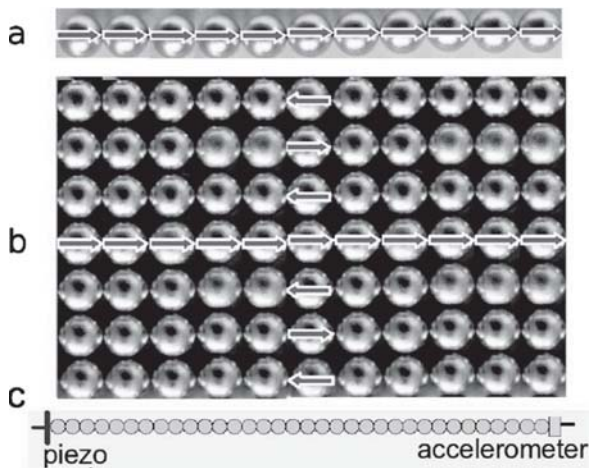


Fig. 1. (Color en línea) (a) Cadena de esferas magnéticas. Los dipolos se alinean de forma cabeza-cola ($\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$). (b) Arreglo bidimensional de esferas magnéticas. En uno de los ejes, los dipolos están alineados como se muestra en (a), y en el otro se orientan alternadamente (izquierda-derecha). (c) El diseño experimental usado en los experimentos.

En segundo lugar, las brechas de frecuencias no se modulan mediante las constantes elásticas de las esferas, sino por su magnetización. Con el fin de evaluar la importancia de este comportamiento tan intrigante, se destaca que los efectos acústicos de ancho de banda se han observado

sólo en compuestos periódicos consistentes de dos materiales diferentes.^{9,10} Cuanto mayor sea el contraste elástico entre los componentes del arreglo, se definirá mejor la brecha de frecuencias. Por ejemplo, una cadena de esferas de acero comprimida externamente, con esferas de nylon periódicamente distribuidas dentro de la misma, puede tener un espectro de transmisión de sonido con al menos un ancho de banda. En el caso fuertemente no lineal, en el que los solitones se observan rutinariamente, un compuesto granular de esta clase es también capaz de limitar y desintegrar estas ondas solitarias.^{7,11}

Interacción magnética

Por otro lado, la energía de interacción magnética entre dos momentos dipolares μ_i y μ_j está dada por $U_{ij} = \mu_i^2 \mu_j^{-3} [\mu_i \cdot \mu_j - 3(\mu_i \cdot r_{ij})(\mu_j \cdot r_{ij})]$, en la que $r_{ij} = |r_j - r_i|$ es la distancia de separación entre los dipolos y $\mu = |\mu_i| = |\mu_j|$. Aunque esta expresión es válida sólo para dipolos ideales, se usa para estimar la fuerza de contacto entre dos esferas adyacentes, $F_{i,i+1}$, en una cadena de N partículas magnetizadas. En la figura 2 se muestran las fuerzas de contacto con dos configuraciones diferentes de dipolos: (a) el caso en el que los dipolos están orientados de forma cabeza-cola ($\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$), y (b) el caso en el que alternan direcciones. Vale la pena remarcar que aunque ambas configuraciones son cohesivas (figura 2), sólo la primera es estable en condiciones reales. Las fuerzas de contacto son menores en las fronteras de la cadena, debido a la naturaleza de las interacciones magnéticas.

De manera interesante, sin embargo, este segundo arreglo se vuelve estable, si las cadenas alineadas cabeza-cola se ensamblan en un arreglo bidimensional (figura 1(b)).¹

Metodología experimental y resultados

Se comenzó por medir la velocidad del sonido en una cadena de 20 esferas magnéticas como una función de la fuerza magnética de contacto. Las

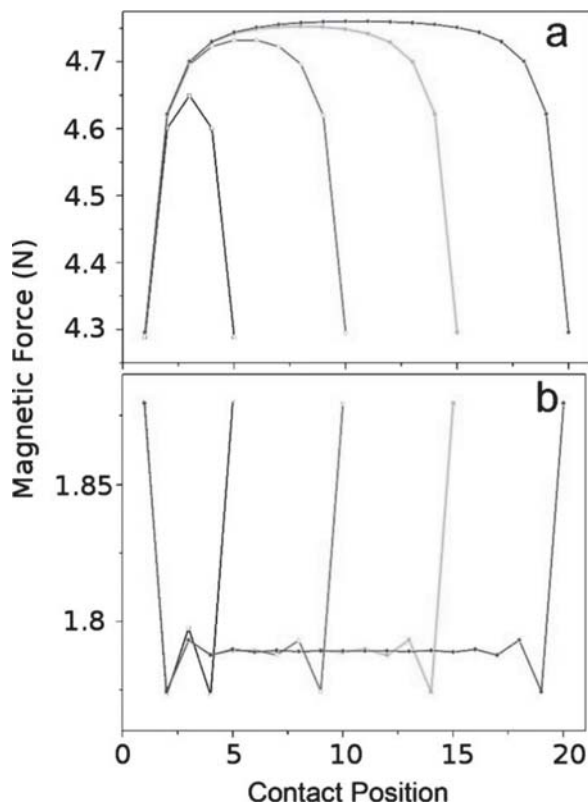


Fig. 2. (Color en línea) (a) Fuerzas de contacto para cadenas de diferentes longitudes, con $N=6,11,16,21$. La configuración de dipolos es de tipo cabeza-cola. (b) Fuerzas de contacto para cadenas con $N=6,11,16,21$, en los que los dipolos alternan orientaciones. Nótese que las fuerzas de contacto son más pequeñas (mayores) a los límites de las cadenas, debido a la naturaleza de la interacción de dipolo de dipolo.

esferas, con un diámetro d de 5 mm, fueron adquiridas (SuperMagnetM) con un dipolo magnético permanente estimado en $\mu=0.07 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ (este valor corresponde a la intensidad superficial de campo medida con un Lakeshore Gaussmeter 475). Estas esferas, hechas de una mezcla de NdFeB, se recubren en el proceso de manufactura con una capa epóxica resistente. Con un horno de temperatura controlada, las esferas se calientan hasta reducir su magnetización. Por lo tanto, las cadenas se forman con diferentes fuerzas de cohesión, las cuales se obtienen fácilmente al medir cuidadosamente la fuerza necesaria para separar las cadenas por la mitad. Se coloca un

piezoeléctrico en contacto con la primera esfera de la cadena, y se anexa un acelerómetro (DeltaTron-BK, 1000 MV/g) en la última [figura 1(c)]. El piezoeléctrico se controla con un generador de señales (HP-33120A) que propaga un pulso cuadrado de 2 s a lo largo de la cadena.

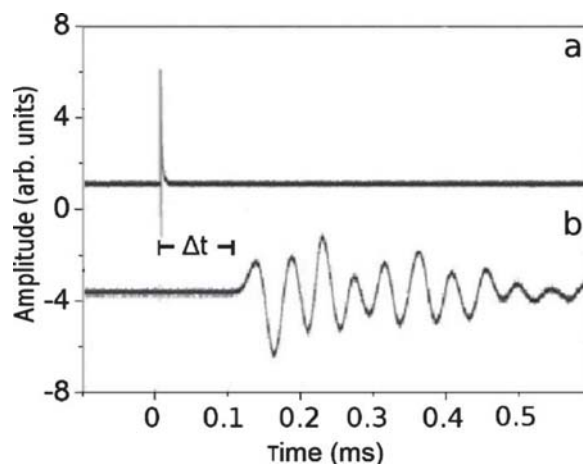


Fig. 3. (a) Pulso acústico enviado a través de la cadena magnética de esferas. El pulso tiene un ancho de $2 \mu\text{s}$. (b) La señal medida al final de la cadena Δt es el tiempo de vuelo del pulso en la cadena. Nótese que el acelerómetro toma alrededor de $400 \mu\text{s}$ para relajarse.

Para medir el tiempo de vuelo del frente de este pulso, se utiliza un osciloscopio Agilent 54641A (figura 3), y conociendo la longitud de la cadena (en este caso 10 cm), la velocidad del sonido puede obtenerse (figura 4). Encontramos que la velocidad medida de esta manera se compara razonablemente bien con la velocidad de la onda real, la cual puede producirse como una onda estacionaria en alguna frecuencia menor que la frecuencia de corte. Por lo que la velocidad del sonido es proporcional a la frecuencia de corte (Coste *et al.*),¹ la velocidad puede estimarse, si encontramos experimentalmente esta frecuencia (ver los puntos rojos en figura 4). Los resultados indican que el pulso angosto usado en el primer método no se dispersa mucho durante la propagación.

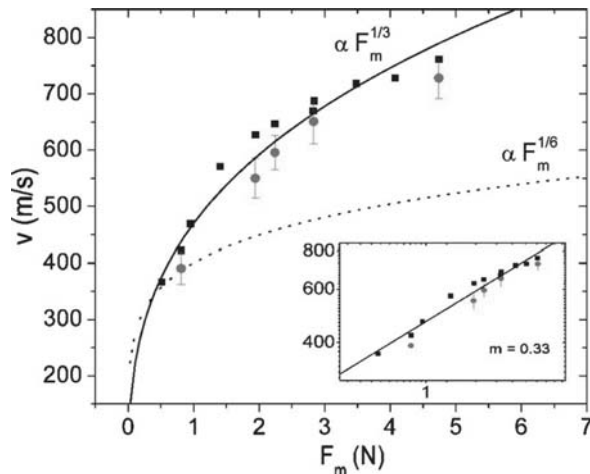


Fig. 4. (Color en línea) Velocidad del sonido como función de la fuerza de contacto en el punto medio de la cadena. Los datos son bien ajustados por una ley de potencias con exponente $1/3$ (ver también gráfica log-log insertada). Los cuadros negros se midieron como se indica en el texto, y los puntos rojos se obtuvieron por una primera medición de las frecuencias de corte (frecuencias en las cuales no se propaga la señal), y luego con la expresión $v=2\pi af_c$, en la que a es el radio de las esferas (ver Coste *et al.*).¹ Adicionalmente mostramos, para comparación, la velocidad del sonido predicha por la ley de Hertz (exponente $1/6$). El error experimental es del tamaño del punto.

Entre más grande es la fuerza de contacto entre las esferas, mayor es la velocidad de propagación (figura 4). Los resultados ajustan razonablemente bien a una ley de potencias con exponente $1/3$ (ver también gráfico log-log insertado en la figura 4). En principio, este valor difiere del resultado clásico dado por el modelo de Hertz, el cual predice un exponente de $1/6$ ¹ (ver la línea punteada en figura 4). Es lógico pensar que si se aplica una fuerza de compresión muy grande a la cadena, la velocidad de propagación presentaría una tendencia a ser constante, suponiendo que no exista destrucción de esferas. Se observa un aumento en los exponentes de la fuerza conforme disminuyen los intervalos de fuerza, ya que para valores de fuerzas mayores a 1,250 N, el exponente es $1/6$.¹ Sin embargo, se ha obtenido el exponente de $1/4$ en otros experimentos.^{1,3,12} Aunque la naturaleza del exponente de $1/4$ es todavía una controversia en la bibliografía científica, se cree

que este exponente tiene su raíz en la ley de Hertz modificada, que toma lugar cuando las fuerzas de compresión se reducen significativamente, alrededor de 20 a 200 N.³ Por lo tanto, especulamos que el exponente encontrado en nuestros experimentos ($1/3$) es mayor que $1/4$, ya que las fuerzas de contacto son reducidas aún más (alrededor de 0.5 a 5 N, como vimos en la figura 4).¹

Creemos que es necesario un poco más de investigación al respecto, para elucidar la naturaleza de este exponente.

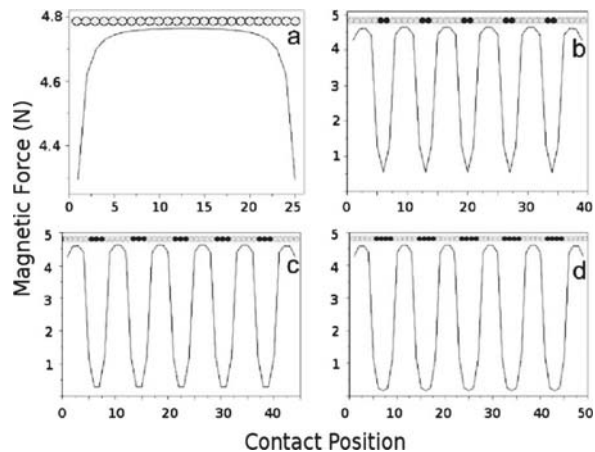


Fig. 5. (Color en línea) Fuerzas de contacto en cadenas cortas como función de la longitud de la cadena (número de esferas). Cada cadena está formada por cinco celdas y media. Y cada celda, formada por cinco esferas magnéticas (amarillas) y (a) uno, (b) dos, (c) tres y (d) cuatro esferas no magnéticas (negro).

En el caso de la velocidad de propagación a través de una malla (23×23 esferas), se utilizó el mismo procedimiento experimental mostrado para la cadena, e incluye los mismos parámetros. Al medir, en el caso de la línea 1 (dipolos alineados), la velocidad es de 639.5 m/s, y en la línea 2 (dipolos desalineados) es de 263.03 m/s; siendo ésta mayor en la línea 1, debido al alineamiento de los dipolos, por lo que ejercen mayor fuerza entre ellos [figura 1(b)].

Como se mencionó antes, un segundo experimento se llevó a cabo para ver si la cadena magnética se comporta como un cristal fotónico, cuando las esferas no magnéticas (impurezas) son insertadas periódicamente dentro de la cadena. En prin-

cipio, esta inserción de esferas de este tipo podría modular la impedancia acústica dentro de la cadena, lo que afecta el resultado de la onda de sonido y viaja a través de ésta.

La cadena se forma por $N=25$ celdas, cada celda contiene cinco esferas magnéticas y n no magnéticas, en el que n puede ser 1, 2, 3 o 4. Una vez que las esferas no magnéticas se colocan dentro de la cadena, éstas, por supuesto, se remagnetizan un poco, y garantizan la cohesión de la cadena. Sin embargo, entre mayor sea n , menores son las fuerzas de contacto en tales segmentos, y mayor es el contraste entre éstos y las esferas magnéticas. La figura 5 ilustra la modulación de estas fuerzas de contacto en una cadena integrada por cinco celdas y media.

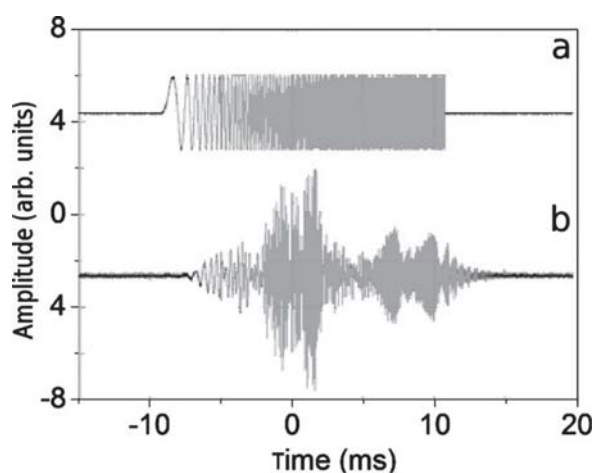


Fig. 6. (a) Señal acústica enviada a través de una cadena de esferas magnéticas. La señal se compone de un tren de onda de 20 ms, en el que la frecuencia incrementa con el tiempo desde 1kHz hasta 15kHz. (b) Señal medida al final de la cadena.

En principio, hay dos formas para obtener el espectro de potencias de un pulso de sonido que viaja a través de una cadena lineal: el *normal-mode analysis* (NMA) y el *pulse analysis* (PA) (ver, por ejemplo, Parmley *et al.*).¹⁴ En el primero, una oscilación con una frecuencia dada se transmite través de la estructura, y cuando esta frecuencia varía, el arribo de la señal es registrado. En el segundo, un pulso, rico en frecuencias, se genera y se envía a través de la cadena. Luego, la señal se mide con

un receptor, posteriormente se le aplica la transformada de Fourier. El método PA es mucho más rápido, pero la composición de las frecuencias del pulso tiene que determinarse previamente. Nosotros implementamos un tercer método, cercanamente relacionado con el segundo.

Éste consiste en la propagación de un tren de ondas sinusoidales, en el que la frecuencia incrementa con el tiempo. El detector (acelerómetro) actúa como un integrador, y a la señal registrada se le aplica la transformada de Fourier. La figura 6 muestra un tren de ondas típico y la correspondiente señal recibida.

A continuación se muestran los resultados del espectro de potencias de la onda transmitida para las cadenas consideradas. Como se señaló, la cadena se forma de $N=25$ celdas, y cada celda incorpora un creciente número de impurezas (esferas no magnéticas). Para establecer una mejor apreciación de la influencia que tiene la incorporación de impurezas, se compara con respecto a la cadena completamente magnética (figura 7).

Encontramos claramente una brecha de frecuencias en los últimos tres espectros. En el caso $n=0$, todas las frecuencias que se transmiten inicialmente son capaces de atravesar la cadena libremente. El caso para $n=1$ no se muestra, ya que es muy similar al caso en el que todas las esferas de la cadena son magnéticas, y esto se debe a que las esferas magnéticas no perciben una impureza, por lo que no se consigue una superposición destructiva para la formación de una brecha, esto es, todas las frecuencias logran atravesar la cadena libremente. Posteriormente se puede observar que en $n=2,3$, y 4 se da lugar a superposiciones destructivas que generan una brecha de frecuencias en la que el sonido no se puede propagar. El espectro, junto con las brechas, se corre hacia bajas frecuencias conforme el número de impurezas (n) aumenta. Considerando que la longitud de la cadena también crece con n , este corrimiento es esperado. Nótese que el caso de la figura 7 (a) se normaliza con respecto al pico más alto de la gráfica (0.08164 Volts). Cabe señalar que para un

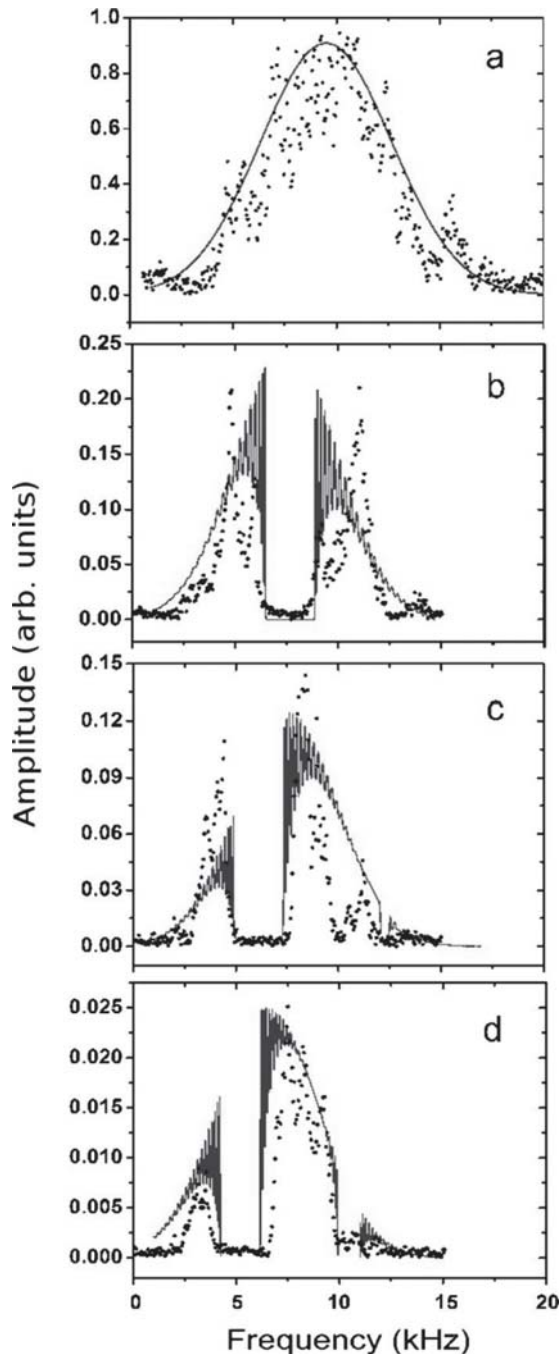


Fig. 7. (Color en línea) Espectro de potencias del pulso transmitido conforme el número de esferas no magnéticas (n) es incrementado; (a) $n=0$, (b) $n=2$, (c) $n=3$, (d) $n=4$. Los puntos negros son los datos experimentales, y la curva azul representa la predicción teórica del modelo matemático que será discutido en el apartado siguiente.

número de impurezas mayor a 4, el sonido se disipa en gran medida durante su viaje, por lo que el espectro de salida no arroja datos importantes.

Discusión

El modelo teórico que respalda nuestros resultados experimentales se presenta a continuación. Este modelo utiliza una expresión matemática reportada por Griffiths y Steinke,¹⁵ quienes resuelven la teoría general de propagación de ondas en un medio localmente (finito) periódico, con la estructura de la matriz de transferencia (teoría cuántica de dispersión). Tenemos una señal sinusoidal de una frecuencia dada f , propagándose a través de un sistema unidimensional (1D) periódico finito como el mostrado en la figura 5, donde ésta se transmite con un coeficiente de transmisión, dado por Griffiths y C. Steinke:¹⁵ $T = [1 + z^2(\text{sen}N\gamma / \text{sen}\gamma)^2]^{-1}$, en el que $z = \varepsilon \text{sen}(\kappa_2 b)$, $\gamma = \cos^{-1}(\xi)$, y $\xi = \cos(\kappa_2 b) \cos(\kappa_1 L) - \zeta_1 \text{sen}(\kappa_2 b) \text{sen}(\kappa_1 L)$. ε , κ , η , b y L se definen así: $\varepsilon_{\pm} = 1/2(\eta \pm 1/\eta)$, $\kappa_1 = (2\pi f)/v_1$, $\eta = \kappa_1/\kappa_2 = v_2/v_1$, $b = nd$, y $L = 5d$. Todas las esferas de la cadena (magnetizadas y no magnetizadas) son elásticamente idénticas, η es simplemente el cociente de las impedancias acústicas, y este cociente se toma como el único parámetro libre para adaptar la posición y forma de las brechas acústicas. Sin embargo, tenemos que resolver primero el siguiente inconveniente: la teoría de Griffiths y Steinke se restringe al caso de ondas no disipativas, mientras que en nuestro caso la propagación del sonido es fuertemente disipativa. La función *ad hoc* es Gaussiana, debido a que el espectro asociado a $n=0$ tiene claramente esta forma. Los parámetros introducidos en el modelo anterior para el ajuste de los datos experimentales en la figura 7 son: (a) $n=0$, $\eta=1$, $f_0=9.5$ kHz, $\sigma=4.5$ kHz, y $\lambda=0.95$; (b) $n=2$, $\eta=0.61$, $f_0=7.6$ kHz, $\sigma=3.5$ kHz, y $\lambda=0.22$; (c) $n=3$, $\eta=0.58$, $f_0=6.1$ kHz, $\sigma=3.5$ kHz, y $\lambda=0.14$; (d) $n=4$, $\eta=0.54$, $f_0=5.2$ kHz, $\sigma=3.5$ kHz, y $\lambda=0.025$. El acuerdo razonable que encontramos con los resultados experimentales

(ver la curva azul en figura 7) es digno de mencionarse. Primero, una expresión matemática compacta que tiene su origen en una teoría cuántica de dispersión es capaz de describir completamente un sistema mecánico finito. Segundo, para adaptar los datos, se usó sólo un parámetro libre, η , y este parámetro es simplemente el cociente de dos velocidades.

Conclusión

Una cadena lineal de esferas sin compresión externa es capaz de propagar sonido, si las esferas se atraen entre ellas con una fuerza magnética interna. La velocidad de una señal acústica es proporcional a $F_m^{1/3}$, donde F es la fuerza dipolar magnética. La diferencia entre el exponente encontrado en nuestras mediciones y los trabajos realizados anteriormente ($1/6$ y $1/4$) se debe a que por primera vez las fuerzas de interacción magnéticas usadas son mucho menores a las fuerzas de compresión utilizadas previamente. En cuanto a la velocidad propagación del sonido en la malla (2D), encontramos que ésta es casi 2.5 veces mayor en que los dipolos están alineados en comparación con la línea en donde los dipolos están desalineados. Por último, un resultado muy importante en este trabajo es la existencia de brechas acústicas. Si la interacción magnética entre las esferas de la cadena (es decir, fuerza de contacto) se modula con la inserción de esferas completamente desmagnetizadas del mismo material, las brechas de frecuencia aparecen.

Resumen

Las brechas acústicas se observan en medios inhomogéneos hechos de materiales compuestos. La modulación de las propiedades elásticas en tales medios crea los efectos coherentes de la dispersión e interferencia que llevan a los intervalos de

frecuencia en los que la propagación del sonido es prohibida. En contraste, aquí se reporta una observación experimental de las brechas acústicas en medios homogéneos; específicamente en cadenas granulares. Las esferas usadas en este estudio son magnéticas, por lo tanto, en lugar de modular las propiedades elásticas de la cadena, nosotros modulamos la magnetización, esto es, las fuerzas de contacto. La velocidad de propagación de las señales acústicas a través de las cadenas magnéticas usadas en este estudio es distinta a la velocidad predicha por la ley de Hertz.

Palabras clave: Cadena de esferas, Fuerza magnética, Ley de Hertz, Velocidad del sonido, Brechas acústicas.

Abstract

Acoustic gaps are observed in inhomogeneous structures made of composite materials. The modulation of the elastic properties in such media creates the coherent effects of scattering and interference that lead to frequency intervals where sound propagation is forbidden. In contrast, we report here an experimental observation of acoustic gaps in homogeneous media; specifically in granular chains. The beads used in our study are magnetic. Therefore, instead of modulating the elastic properties of the chain, we modulate the magnetization, i.e. the contact forces. We also observe that the propagation speed of acoustic signals through the magnetic chains used in this study is at odds with the speed predicted by Hertz's law.

Keywords: Chain of beads, Magnetic force, Hertz's law, Speed of sound, Acoustic-gaps.

Referencias

1. Coste, E. Falcon, and S. Fauve, Phys. Rev. E (1997).
2. C. Coste and B. Gilles, Eur. Phys. J.B. 7, 155

- (1999).
3. M. de Billy, J. Acoust. Soc. Am. 108, 1486 (2000).
 4. V.F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. (1983).
 5. V.F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. (1984).
 6. V.F. Nesterenko, Dynamics of Heterogeneous Materials (Springer-Verlag, New York, 2001), Chap. 1.
 7. C. Daraio, V.F. Nesterenko, E.B. Herbold, and S. Jin, Phys. Rev. Lett. 96, 058002 (2006).
 8. C. Daraio and V.F. Nesterenko, in Shock Compression of Condensed Matter, edited by M. Elert, M.D. Furnish, R. Chau, N. Holmes, and J. Nguyen, AIP Conf. Proc. No. 978 (AIP, New York, 2007), p. 1419.
 9. J.N. Munday, C.B. Bennet, J. Acoust. Soc. (2002).
 10. P.G. Luan and Z. Ye, Phys. Rev. E 63, (2001).
 11. M.A. Porter, C. Daraio, I. Szelengowicz, E.B. Herbold, and P.G. Kevrekidis, Physica D 238, 666 (2009).
 12. P.G. de Gennes, Europhys. Lett. 35, 145 (1996).
 13. X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky, Phys. Rev. Lett. 82, 1863 (1999).
 14. S. Parmley et al., Appl. Phys. Lett. 67, 777 (1995).
 15. D. Griffiths and C. Steinke, Am. J. Phys. 69, 137 (2001).

Recibido: 01 de agosto de 2010

Aceptado: 01 de septiembre de 2010