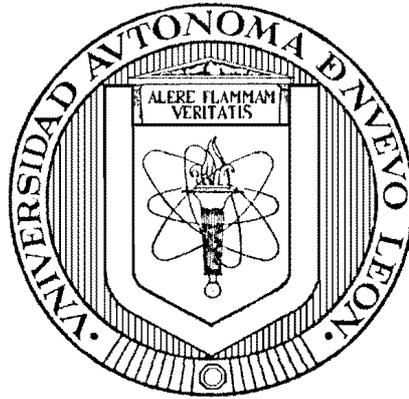


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESQUEMA DE CONTROL BASADO EN OBSERVACIÓN ADAPTABLE
PARA SISTEMAS CAÓTICOS CLASE P

POR

JUAN ANGEL RODRÍGUEZ LIÑÁN

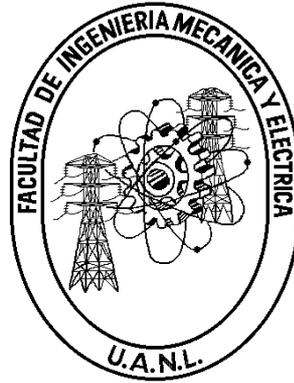
T E S I S

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD
EN CONTROL AUTOMÁTICO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

AGOSTO 2005

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESQUEMA DE CONTROL BASADO EN OBSERVACIÓN ADAPTABLE
PARA SISTEMAS CAÓTICOS CLASE P

POR

JUAN ANGEL RODRÍGUEZ LIÑÁN

T E S I S

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD
EN CONTROL AUTOMÁTICO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

AGOSTO 2005

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Esquema de Control basado en observación adaptable para sistemas caóticos clase P**”, realizada por **Juan Angel Rodríguez Liñán**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control Automático.

El comité de tesis:

Asesor
Dr. Jesús de León Morales

Coasesor:
Dr. Marco Tulio Mata Jiménez

Coasesor:
Dr. José Antonio de la O Serna

Vo. Bo.
Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez
División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N.L.

Agosto 2005

A mi familia por su apoyo.

Agradecimientos

Primeramente a mi asesor, Dr. Jesús de León Morales, quien fue el guía de esta investigación, además por sus recomendaciones y apoyo durante este proyecto. También a mis revisores de Tesis, Dr. Marco Tulio Mata Jiménez y Dr. José Antonio De la O Serna, por sus valiosos puntos de vista sobre este trabajo. No puedo pasar por alto, a los profesores del Posgrado que me impartieron clase.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para la realización de mis estudios de posgrado en esta Facultad.

Al Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores, y al Ing. Crescencio Hernández Rosales por su enriquecedora colaboración y apoyo técnico, así mismo al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por su apoyo económico y que juntamente con apoyo de la F.I.M.E., me fue posible realizar una estancia para experimentación en los laboratorios de dicho instituto.

Por supuesto, a mis padres por su apoyo, paciencia, y comprensión.

A mis compañeros del Posgrado: René, Javier, Nicolás, Alma, Catarino, con los cuales compartí momentos gratos durante esta etapa.

Finalmente, extendiendo mi agradecimiento a Dios porque me ha permitido llegar hasta aquí.

Resumen

Actualmente, el término *caos* se refiere a un fenómeno de sistemas determinísticos, cuya característica es que la evolución de un sistema tiene una sensible dependencia a las condiciones iniciales. Esto causa impredecibilidad, tal como en modelos climáticos, por ello es deseable eliminar las dinámicas caóticas, con la finalidad de trabajar con sistemas que presenten evolución regular, y por lo tanto, predecible.

Por otra parte, en trabajos publicados acerca del control de caos, se considera que se dispone de la información de todos los estados, para aplicar alguna estrategia de control, lo cual no siempre es el caso. En muchas situaciones prácticas, sólo se dispone de información parcial de los estados. El problema se agudiza cuando se desconoce el valor de parámetros del sistema.

El objetivo en este estudio consiste en la supresión de dinámicas caóticas, considerando que no se encuentra disponible la medición de todos los estados y que algunos parámetros son desconocidos. La metodología propuesta para abordar este problema consiste, primeramente, en analizar las características dinámicas del sistema caótico que se desea controlar. Particularmente se estudia sistemas dinámicos caóticos conocidos como clase P, cuya estructura algebraica es la más simple para la cual se presenta caos.

Luego, se estudia el problema de diseño de un observador adaptable, considerando que no se dispone de todos los estados y parámetros, con el fin de estimarlos. Se plantea una estrategia de control linealizante mediante retroalimentación de estados, considerando objetivos como

estabilización en el origen y seguimiento a una señal de referencia. Entonces, se propone un esquema completo de control basado en el observador, para supresión de caos en los sistemas caóticos clase P.

Se presentan resultados obtenidos al implementar este esquema mediante simulaciones y experimentalmente, mostrando su desempeño. Finalmente, se exponen conclusiones obtenidas de este estudio.

Índice General

Agradecimientos	iv
Resumen	v
Índice General	vii
Índice de Tablas	x
Índice de Figuras	xi
1 Introducción	1
1.1 Caos Determinístico	1
1.2 Control de Caos	4
1.3 Antecedentes del Problema de Control de Caos	5
1.3.1 Control en lazo abierto	5
1.3.2 Control lineal y no lineal	6
1.3.3 Método OGY: Ott-Grebogi-Yorke	6
1.3.4 Método de Pyragas	7
1.3.5 Sistemas discretos	7
1.3.6 Control basado en redes neuronales	8
1.3.7 Sistemas difusos	8
1.4 Objetivo de la Tesis	8
1.5 Estructura de la Tesis	9
2 Teoría del Caos	11
2.1 Introducción	11
2.2 Sistemas dinámicos	12

2.2.1	Puntos de equilibrio	13
2.2.2	Atractor	14
2.3	Sistemas caóticos	16
2.3.1	Atractor caótico	20
2.3.2	Sistema caótico	20
2.3.3	Fenómenos en que se ha observado el caos	22
2.4	Conclusiones de Capítulo	23
3	Sistemas Caóticos Clase P	24
3.1	Introducción	24
3.2	Sistema caótico más simple	25
3.3	Sistemas caóticos clase P y clase R	26
3.3.1	Sistemas caóticos clase P	27
3.3.2	Sistemas caóticos clase R	32
3.4	Conclusiones de Capítulo	33
4	Diseño de Observadores y Controladores para Sistemas No Lineales	35
4.1	Introducción	35
4.2	Observadores	36
4.2.1	Observabilidad	36
4.2.2	Diseño de un Observador Adaptable	37
4.3	Control por retroalimentación de estados	42
4.3.1	Grado relativo	42
4.3.2	Sistema inverso, dinámica cero, y dinámica de seguimiento	44
4.3.3	Control linealizante por retroalimentación de estado para estabilización y seguimiento	46
4.4	Conclusiones de Capítulo	48
5	Esquema Observador adaptable - Control no lineal por retroalimentación de estados	50
5.1	Introducción	50
5.2	Observador adaptable para sistemas caóticos clase P	51
5.3	Control no lineal por retroalimentación de estados para sistemas caóticos clase P	53
5.3.1	Esquema controlador-observador para sistemas caóticos clase P	54

5.4	Implementación del esquema	57
5.4.1	Diseño del observador adaptable y controlador	57
5.4.2	Resultados en simulación	60
5.5	Conclusiones de Capítulo	71
6	Resultados experimentales	72
6.1	Introducción	72
6.2	Implementación Física de un Sistema Clase P	73
6.3	Resultados de la implementación física del esquema controlador-observador adaptable	76
6.4	Conclusiones de Capítulo	81
7	Conclusiones y Trabajos futuros	82
A	Bases de geometría diferencial	84
A.1	Difeomorfismos	84
A.2	Campos vectoriales	85
A.3	Derivadas Lie	86
B	Implementación del sistema mediante circuitos electrónicos	87
B.1	Configuraciones con Amplificadores Operacionales	87
B.2	Verificación del Modelo (6.2.1)	88
B.3	Equipo <i>dSPACE</i> para implementación física del esquema controlador-observador adaptable	88
C	Artículo Publicado	90
	Glosario de Símbolos	97
	Bibliografía	98

Índice de Tablas

3.3.1 Sistemas caóticos clase P C^∞ -conjugados	28
5.2.1 Difeomorfismos para transformar los sistemas clase P en una forma afin	52
6.2.1 Valores de los parámetros del circuito	75
6.3.2 Errores de estimación para el sistema implementado físicamente	79

Índice de Figuras

1.1	Sección de Poincaré	7
2.1	Atractor del sistema de Lorenz	17
2.2	Tubo alrededor de la solución de una ecuación diferencial	19
3.1	Estados del sistema (3.2.3) <i>vs</i> tiempo	30
3.2	Atractor caótico del sistema (3.2.3)	30
3.3	Estados del sistema (3.2.4) <i>vs</i> tiempo	31
3.4	Atractor caótico del sistema (3.2.4)	31
3.5	Atractor caótico del sistema (3.3.6)	32
4.1	Esquema de observador adaptable para un sistema no lineal	37
4.2	Esquema controlador por retroalimentación de estados para sistemas no lineales	47
5.1	Esquema controlador-observador adaptable para sistemas caóticos clase P	55
5.2	Estimación del parámetro α , caso 1	61
5.3	Estimación del estado x_1 , caso 1	62
5.4	Estimación del estado x_2 , caso 1	62
5.5	Estimación del estado x_3 , caso 1	62
5.6	Errores de estimación del parámetro y los estados, caso 1	63
5.7	Estimación del parámetro α , caso 2	64
5.8	Errores de estimación del parámetro y los estados, caso 2	64
5.9	Estabilización del estado x_1	65
5.10	Estabilización del estado x_2	65
5.11	Estabilización del estado x_3	65
5.12	Sistema estabilizado en el origen del espacio de estados	66
5.13	Señal de control para estabilización del sistema	67

5.14	Estimación del parámetro α , caso 3	67
5.15	Errores de estimación del parámetro y los estados, caso 3	68
5.16	Seguimiento del estado x_1	68
5.17	Seguimiento del estado x_2	69
5.18	Seguimiento del estado x_3	69
5.19	Seguimiento del sistema en el espacio de estados	69
5.20	Señal de control para seguimiento	70
6.1	Diagrama para implementación del sistema (5.4.1)	74
6.2	Circuito correspondiente al sistema (5.4.1)	74
6.3	Plano $x_1 - x_2$ para $R_4 = 4.9M\Omega$	76
6.4	Plano $x_1 - x_2$ para $R_4 = 4.71M\Omega$	76
6.5	Estimación y error de estimación del parámetro α del circuito	77
6.6	Estimación de los estados del circuito	77
6.7	Errores de estimación de los estados del circuito caótico	78
6.8	Señal de control aplicada al circuito.	79
6.9	Estados del circuito al aplicar la señal de control	80
6.10	Estimación y error de estimación del parámetro del circuito caótico con aplicación de la señal de control	80
B.1	Diagrama de Bloques y configuraciones para implementación electrónica de sistemas dinámicos	87

Capítulo 1

Introducción

Debido a que en este trabajo se estudiará el problema de control para una clase de sistemas caóticos, es necesario introducir el significado de algunos conceptos, como el de la palabra Caos.

El uso coloquial de la palabra caos es sinónimo de desorden en frases tales como, "tu cuarto es un caos", "mi vida es un caos", "el tráfico es un caos", o "la situación política es caótica", debido a la mezcla desordenada de todos sus elementos, asociando la palabra caos con comportamientos muy complicados e impredecibles que son resultado de interacciones muy complejas. De esta manera, el término caos es muy asociado, al desorden y confusión, con carencia de leyes y principios, y por ende la suposición de que es absurdo estudiarlo e imposible entenderlo. Sin embargo, los matemáticos y físicos le han dado un significado a la palabra caos desde otra perspectiva.

1.1 Caos Determinístico

En la ciencia actual, se emplea el término CAOS para referirse a un fenómeno que tiene lugar en sistemas no lineales, y es estudiado mediante la teoría de sistemas dinámicos determinísticos.

El Determinismo es la corriente ideológica que dice que cada acción es el resultado de

acciones precedentes. A Isaac Newton se le atribuye el establecimiento del determinismo en la ciencia moderna, puesto que, las Leyes de Newton expresan que todos los eventos en cierto instante de tiempo están basados completamente en los eventos ocurridos anteriormente. En este modelo Newtoniano, la evolución del universo puede predecirse matemáticamente a partir de las condiciones iniciales en un momento determinado, como una película que puede avanzar o retroceder en el tiempo. De tal manera, los fenómenos de la naturaleza que son estudiados en su evolución temporal pueden ser analizados con las herramientas de la teoría de sistemas dinámicos determinísticos.

En ese contexto, T. Li y J.A. Yorke fueron aparentemente los primeros autores quienes introdujeron en 1975 [21] el término **caos**, o más precisamente **caos determinístico**, el cual es utilizado ampliamente desde entonces en la Teoría de Sistemas Dinámicos. El caos determinístico comparte con las apreciaciones filosóficas la idea de comportamiento complicado e impredecible, pero no como resultado de interacciones muy complicadas o aleatorias. De ahí el concepto de caos determinístico, es decir, el caos que se presenta aún cuando las reglas que rigen el comportamiento del sistema están claramente especificadas y no haya aleatoriedad alguna. El caos determinístico aparece no sólo en sistemas físicos, químicos, o biológicos, sino también en muchos otros campos, por ejemplo, la economía, la fisiología, la psiquiatría y en fenómenos como los movimientos de los planetas, los latidos del corazón, el desplazamiento de las ondas de radio, la ascensión del aire (y sus nubes) por convección, el crecimiento de una población de conejos, el movimiento de las moléculas de gases y de la bola en un billar, las variaciones de precios en la Bolsa, unas bacterias o virus que se propagan en una población humana.

Para analizar este tipo de sistemas se ha desarrollado la teoría del caos, la cual es considerada una de las tres revoluciones científicas del siglo XX. La primera y la segunda respectivamente, son la teoría cuántica y la teoría de la relatividad; la tercera, la teoría del caos [14]. Sin la

Teoría del caos, el *status quo* suponía que el comportamiento complejo tenía su origen necesariamente en interacciones complicadas y/o de muchos cuerpos y, además, que sistemas sencillos producirían comportamiento simple y predecible. La lección principal de la teoría del caos, desarrollada fuertemente durante los últimos 30 años, es que bajo ciertas condiciones, sistemas simples también pueden producir dinámica con comportamiento caótico. Se ha demostrado [44] que la causa del comportamiento caótico en sistemas dinámicos determinísticos es la gran sensibilidad a las condiciones iniciales.

Precisamente esta sensibilidad respecto de las condiciones iniciales es la característica más importante y definitoria de los fenómenos caóticos. La sensibilidad respecto de las condiciones iniciales había sido percibida, ya desde el siglo XIX, como causante del azar en ciertos fenómenos físicos. Pero en aquel entonces los estudios de dinámica estaban más orientados hacia los sistemas estables, esto es, los sistemas en que pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales no producen más que pequeñas modificaciones en la evolución futura. Esta propiedad es particularmente importante dado que siempre se producen pequeños errores en las mediciones, y la ubicación inicial nunca se conoce con precisión absoluta. Por tanto, la trayectoria descrita no es nunca la exactamente calculada o deseada. Esto no es un problema mayor si en la zona en que se trabaja el sistema es estable, en tal caso, la evolución real va a ser cercana a la prevista.

Ahora bien, sistemas tan comunes como los de fluidos turbulentos (que incluyen la dinámica atmosférica), o el movimiento de las moléculas de un gas, no son estables en este sentido (ni en otros), por lo tanto, las trayectorias de sus partículas no pueden ser predichas, y por el contrario, un pequeño cambio en el presente provoca inmensas consecuencias en el futuro. Edward Lorenz, meteorólogo del M.I.T., llamó a esta característica efecto mariposa: "El simple aletear de una mariposa puede modificar las condiciones del sistema atmosférico y provocar grandes modificaciones en el clima futuro".

Debemos distinguir entre eventos aleatorios y dinámicas caóticas. El término aleatorio es

reservado para problemas en los cuales no conocemos con certeza las entradas o sólo tenemos información estadística acerca de los parámetros. En cambio, el término **caótico** es reservado para aquellos problemas determinísticos, con entradas o parámetros no aleatorios, cuya dinámica es altamente sensible a sus condiciones iniciales. Los sistemas caóticos representan una clase de modelos con indeterminación diferente de los modelos estocásticos. Mientras que con el conocimiento del estado actual del sistema, un modelo determinístico puede predecir la trayectoria futura para un período arbitrariamente largo, los modelos estocásticos no pueden hacer un pronóstico preciso, en general, ni aún para un tiempo arbitrariamente corto. Puesto que los sistemas caóticos son determinísticos, es posible predecir su trayectoria futura, sin embargo, debido a su sensibilidad a las condiciones iniciales, el error de predicción para estos sistemas crece exponencialmente conforme se aleja el horizonte de predicción y, consecuentemente, sólo puede realizarse un pronóstico para un intervalo de tiempo limitado por un error de predicción admisible. De esta manera, los sistemas caóticos son prácticamente imposibles de predecir, porque su intervalo temporal de predicción es de corto plazo. A pesar de que no es posible predecir los sistemas caóticos a largo plazo, es posible encontrar métodos y estrategias para controlarlos, y de alguna manera eliminar ese comportamiento caótico [3].

1.2 Control de Caos

La Teoría de Control abarca los distintos marcos teóricos utilizados para el análisis y diseño de controladores, donde un controlador es un sistema diseñado para interactuar con el sistema dinámico a controlar, llamado planta, de tal manera, que se logre controlar la planta con características dinámicas determinadas. Por características dinámicas nos referimos a la forma en la cual evoluciona el estado del sistema en el tiempo. Lo que se busca en el diseño de un sistema de control es obtener un sistema controlado cuyos estados de equilibrio puedan ser establecidos a voluntad y/o cuyos estados transitorios evolucionen dentro de ciertas especificaciones en cuanto a transiciones en los valores de las variables y tiempos en los cuales ello se produce.

De tal modo que el término control de caos se utiliza generalmente para referirse al área de estudio de los métodos de control de sistemas determinísticos que exhiben un comportamiento irregular, caótico. El propio intento de estudiar el caos determinístico parece disparatado: ya desde los inicios, el ordenamiento del Caos fue "tarea sobrehumana". La combinación "Control de caos" supone un sentido paradójico despertando un interés adicional en el tópico.

1.3 Antecedentes del Problema de Control de Caos

Los problemas de control de caos se enfocan principalmente en tres clases de objetivos:

Supresión de caos. Eliminar la dinámica caótica en los sistemas.

Caotización o anticontrol. Inducir a un sistema no caótico a manifestar dinámicas caóticas

Sincronización. Inducir a las dinámicas de dos sistemas caóticos (un maestro y un esclavo) para que coincidan en el tiempo.

Estos objetivos de control han sido abordados mediante diferentes técnicas y métodos, entre los cuales se encuentran los siguientes [3]:

1.3.1 Control en lazo abierto

El principio de control por perturbación se basa en el comportamiento variante de los sistemas no lineales bajo la acción de entradas de control en función del tiempo, independientes a las variables del proceso controlado. Estas entradas de control pueden realizar cierta acción sobre las variables del sistema o sobre algún parámetro del sistema controlado. Esta estrategia es atractiva debido a su simplicidad, ya que no requiere mediciones o sensores, es importante donde los estados del sistema no pueden ser medidos. Algunos de los trabajos en este sentido atacan los problemas de supresión de caos y la caotización de sistemas [33, 1, 22].

1.3.2 Control lineal y no lineal

Es posible utilizar estrategias tradicionales y métodos de control automático en los problemas de control de caos. El objetivo deseado puede alcanzarse algunas veces mediante simples leyes de control proporcionales y de retroalimentación. La teoría de control no lineal desarrolla una diversidad de métodos para resolver problemas de control con medición parcial de los estados. Uno de los métodos más elaborados es la linealización por retroalimentación de estados o de salida, aplicada a los sistemas caóticos en [2, 7, 48]. Una desventaja de esta estrategia consiste en que, por no tomar en cuenta las dinámicas propias del sistema, en algunas ocasiones, se alcanzan los objetivos de control a expensas de una señal de control que requiere mucha energía. Las aplicaciones de retroalimentación de dinámicas pueden ser mejoradas utilizando observadores, esta estrategia provee un fundamento sistemático para control de sistemas con variables no completamente medibles [32, 15, 29]. Además de estos métodos se han propuesto otros como el procedimiento por backstepping [27], métodos de diseño basados en pasividad [12], el diseño H_∞ -óptimo [45], los cuales han sido utilizados para resolver problemas de estabilización en un estado dado o superficie objetivo.

1.3.3 Método OGY: Ott-Grebogi-Yorke

En 1990, E. Ott, C. Grebogi, y J.A. Yorke publicaron un método de control de caos [33]. La estrategia OGY consiste en estabilizar el sistema aplicando pequeñas perturbaciones en el parámetro que gobierna el caos, para estabilizar la órbita en un punto fijo, o en una órbita periódica inestable presente en el atractor caótico. Primeramente, se discretiza el sistema mediante una sección de Poincaré. Luego, se linealiza el modelo discretizado alrededor de un punto en la sección de Poincaré. Entonces se aplica una perturbación en el parámetro, tal que, el sistema linealizado se estabilice en el punto elegido en la sección de Poincaré.

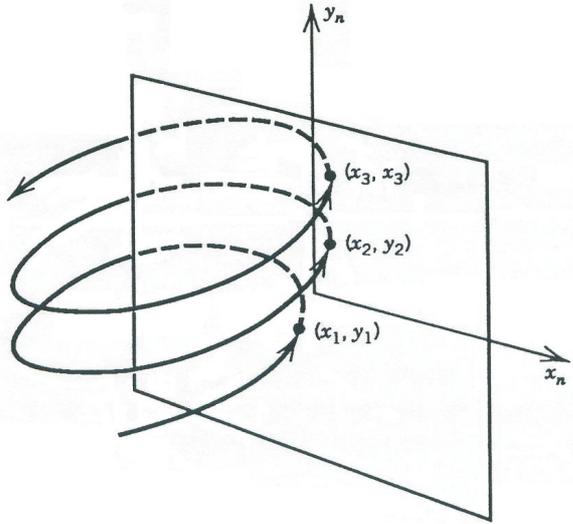


Figura 1.1: Sección de Poincaré para una órbita en el espacio de fase

1.3.4 Método de Pyragas

En 1992, K. Pyragas consideró el problema de estabilización de órbitas τ -periódicas inestables en sistemas caóticos [34]. Propuso una ley de control que consiste básicamente en una retroalimentación proporcional a la diferencia entre el estado actual y el mismo estado retardado en un tiempo τ , correspondiente al período de la órbita que se quiere estabilizar. En la literatura se encuentran reportados algunos trabajos donde se aplica este método para estabilización de los **modos coherentes** en láseres [23, 30] y sistemas magnetoelásticos [16].

1.3.5 Sistemas discretos

Algunos de los algoritmos en tiempo discreto incluyen métodos basados en el mapa de Poincaré [33] y métodos de control con retroalimentación con retardos de tiempo [34]. Estos pueden ser considerados como variantes de las leyes de control por pulsos.

1.3.6 Control basado en redes neuronales

Como los sistemas caóticos son básicamente no lineales, algunas redes neuronales de aprendizaje universales para el control de sistemas no lineales han sido sugeridas [18]. Las estructuras de redes neuronales para control y predicción de los procesos en sistemas no lineales puede encontrarse en [4].

1.3.7 Sistemas difusos

Estrategias mediante los sistemas difusos Takagi-Sugeno han sido propuestos en [46] para estabilización y sincronización de sistemas caóticos, también han sido utilizadas en problemas de sincronización basada en observadores, y aplicado a los sistemas de transmisión de información. Otras estrategias para diseño de modelos difusos de sistemas caóticos se basan en identificación de sus parámetros en combinación con los métodos estándares de diseño de sistemas no lineales [6]. Sin embargo, no se consideran las características dinámicas de los sistemas caóticos, y por ende no se garantiza la efectividad de las leyes de control.

1.4 Objetivo de la Tesis

El problema de supresión de caos representa un tema interesante de estudio puesto que, en muchos casos, el caos es indeseable debido a la presencia de las oscilaciones irregulares. Al respecto, existen problemas en los cuales se trabaja actualmente y que muestran la utilización de herramientas del estudio de dinámicas caóticas en las distintas ramas de la vida humana, como lo son los estudios para entender los desórdenes en el ritmo cardíaco, desde el punto de vista matemático, donde a la luz de ese conocimiento se pretende construir marcapasos que detecten las características de ese desorden y tomen medidas para controlar el caos, que en este caso, se ha producido en el corazón. Además, hay ejemplos similares en el control de láseres, de sistemas de comunicaciones, en tecnologías químicas, y en tratamientos médicos de epilepsia.

Como ya se ha mencionado, se han realizado trabajos con el fin de resolver problemas para suprimir los efectos debidos a sistemas caóticos. Sin embargo, en muchos de los trabajos publicados en la literatura al respecto, se considera que se dispone de toda la información de los estados para aplicar alguna estrategia de control, lo cual no es siempre el caso. En muchos sistemas físicos, químicos, biológicos, y demás, sólo se dispone de información parcial del estado del sistema. Además, si bien las ecuaciones de los modelos se pueden obtener con una razonable exactitud, ellas van sufriendo pequeñas modificaciones a lo largo del tiempo, en ecología esto es particularmente claro (variación de los índices de crecimiento, de disponibilidad de alimentos). Esto hace que el sistema no sea "un sistema", sino muchos, debido a la presencia continua de perturbaciones y/o incertidumbres en sus parámetros.

Para evitar estas limitaciones, en este estudio se analiza la posibilidad de utilizar una estrategia de control para atacar el problema de supresión de caos en una clase de sistemas caóticos de dimensión finita, en el cual se propone un esquema de control basado en observadores adaptables para considerar las incertidumbres y/o variaciones paramétricas, es decir, se estudia el problema de control de una clase sistemas caóticos de dimensión finita, donde parte de la información de los estados y parámetros del sistema no están disponibles.

1.5 Estructura de la Tesis

En el capítulo 2 se introduce brevemente la Teoría de Caos. Partiendo de conceptos y definiciones de Teoría de Sistemas Dinámicos, se abordan conceptos y resultados acerca del Caos Determinístico, cuya comprensión es importante para poder realizar un estudio de los sistemas que presentan dinámicas conocidas como caóticas.

En el capítulo 3 se hace referencia a la clase de sistemas a estudiar, es decir, se presenta a los sistemas caóticos de dimensión finita de clase P. Se realiza una breve recopilación acerca de investigaciones recientes para encontrar los sistemas caóticos de mayor simplicidad algebraica,

a partir de estas investigaciones surge la clase de sistemas P, la cual es reportada actualmente en la literatura como la clase de sistemas más simple, en términos algebraicos, que presenta dinámicas caóticas. En este capítulo, se analizan las características dinámicas de estos sistemas.

En el capítulo 4 se discute acerca de observadores adaptables. Se presenta la condición de observabilidad para sistemas no lineales, y los resultados previos para llegar al diseño de un observador adaptable, el cual estima los estados y parámetros desconocidos de un sistema no lineal afin en el estado, para resolver el problema de información incompleta del vector de estado y parámetros. También se repasan conceptos sobre el control de sistemas no lineales, tales como grado relativo, sistema inverso, dinámica cero, sistema de fase mínima, y demás conceptos que sirven de base para considerar posteriormente algunas estrategias de control no lineal mediante retroalimentación de estados para cierta clase de sistemas con los objetivos de estabilización y seguimiento.

En el capítulo 5 se presentan los resultados necesarios para el diseño de un observador adaptable y para el diseño de leyes de control para los sistemas caóticos clase P, con el fin de obtener un esquema controlador-observador adaptable, bajo el cual se pretende controlar esta clase de sistemas basados en la estimación de los estados y parámetros mediante dicho observador. El objetivo de control principal es la supresión de caos en los sistemas caóticos clase P, además, otros objetivos de control son la estabilización en un punto y seguimiento a una señal de referencia.

En el capítulo 6 se presenta la construcción física de uno de los sistemas caóticos clase P mediante circuitos electrónicos con Amplificadores Operacionales. Además, se exponen los resultados experimentales obtenidos de la implementación del esquema controlador-observador adaptable a este circuito caótico.

Por último, se discuten las conclusiones generales de este estudio, así como también los trabajos futuros.

Capítulo 2

Teoría del Caos

2.1 Introducción

La teoría de sistemas dinámicos determinísticos es una rama de las matemáticas que pretende entender y predecir los procesos en movimiento. El estudio de la dinámica comienza con las Leyes de Newton, mediante las cuales, si las fuerzas entre partículas y sus posiciones y velocidades iniciales fueran dadas, uno podría predecir la trayectoria o historial de un sistema perpetuamente en el futuro. Además, se suponía que el comportamiento complejo tenía su origen necesariamente en interacciones complicadas y/o de muchos cuerpos y, además, que sistemas sencillos producirían comportamiento simple y predecible. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, existen sistemas simples que también producen dinámica de comportamiento muy complejo, errático, y sobre todo, impredecible para un futuro lejano, estas dinámicas han sido llamadas *caóticas*.

Varias definiciones matemáticas de caos determinístico (o simplemente caos) son conocidas, pero todas ellas expresan características muy similares de los sistemas dinámicos concernientes con la "supersensibilidad" a las condiciones iniciales, es decir, trayectorias arbitrariamente cercanas divergen en un intervalo finito de tiempo, esto implica que predicciones a largo plazo de las trayectorias son imposibles. Sin embargo, cada trayectoria permanece acotada, a lo cual

se le conoce como inestabilidad local.

En este capítulo se presenta una serie de conceptos y definiciones sobre Sistemas Dinámicos y Teoría de Caos, los cuales serán utilizados a lo largo del desarrollo de la tesis.

2.2 Sistemas dinámicos

El concepto de sistema dinámico, representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, ha sido utilizado para describir una gran variedad de fenómenos o procesos en función del tiempo. La característica de un sistema dinámico es que el estado del sistema está cambiando o moviéndose con respecto al tiempo, y lo que se pretende es predecir o conocer su comportamiento futuro.

En general, un sistema dinámico no lineal puede representarse por un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.2.1)$$

donde \dot{x} denota la derivada de x con respecto a la variable de tiempo t , x es un vector cuyas n componentes son las variables de estado, y u es un vector de entrada m -dimensional. Al sistema descrito por (2.2.1) se le asocia algunas veces la ecuación

$$y = h(t, x, u) \quad (2.2.2)$$

la cual define un vector de salida q -dimensional que comprende variables de interés particular en el análisis del sistema dinámico. A la ecuación (2.2.2) se le llamará ecuación de salida, y a las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) conjuntamente modelo en espacio de estados.

Cuando no aparece explícitamente una entrada u en el modelo en espacio de estado, se le llama ecuación de estado no forzada

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2.3)$$

Un caso especial de (2.2.3) surge cuando la función f no depende explícitamente del tiempo t , esto es,

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2.4}$$

en tal caso se dice que el sistema es autónomo o invariante en el tiempo. Si el sistema no es autónomo, entonces es llamado no autónomo o variante en el tiempo.

2.2.1 Puntos de equilibrio

Un concepto importante relacionado con la ecuación de estado (2.2.4) es el de puntos de equilibrio.

Punto de equilibrio. Un punto $x = x_e$ en el espacio de estado es un punto de equilibrio de (2.2.4) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x_e , permanece en x_e en todo tiempo futuro. Los puntos de equilibrio de (2.2.4) son las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0$$

Puesto que las técnicas de análisis y control lineales son bien conocidas, es conveniente, al analizar un sistema no lineal, comenzar linealizando el sistema alrededor de algún punto de equilibrio y estudiar el sistema lineal resultante [20]. El sistema linealizado está dado por $\dot{x} = Ax$, donde la matriz

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e}$$

es la matriz jacobiana de $f(x)$ evaluada en el punto de equilibrio x_e . Analizando los valores propios de la matriz jacobiana se puede determinar las propiedades del punto de equilibrio en el origen del sistema linealizado.

Si la matriz jacobiana tiene solamente valores propios reales negativos, entonces el punto de equilibrio es un nodo estable. Si los valores propios son todos positivos, entonces el punto de equilibrio es un nodo inestable. En el caso en que los valores propios tienen signos opuestos, los valores propios negativos son llamados los valores propios estables, y los valores propios

positivos, son los valores propios inestables. En este caso, el punto de equilibrio es llamado punto silla.

Si la matriz jacobiana tiene valores propios complejos con parte real negativa solamente, entonces el punto de equilibrio se llama foco estable. Si los valores propios tienen todos parte real positiva, entonces el punto de equilibrio es un foco inestable. En el caso que la parte real es cero para todos los valores propios, el punto de equilibrio es llamado un centro. Si se presentan valores propios, entre ellos valores complejos, donde la parte real de algunos es negativa y la parte real de los demás es positiva, entonces el punto de equilibrio se denomina punto **silla-foco**.

Cabe mencionar que un sistema no lineal tiene múltiples puntos de equilibrio, por lo tanto, su comportamiento cualitativo global es determinado por todos sus puntos de equilibrio. Por esta razón, la dinámica de un sistema no lineal es mucho más rica que la de un sistema lineal, así, los sistemas no lineales descritos por (2.2.4) presentan ciertos estados de equilibrio, también llamados *atractores* de un sistema.

2.2.2 Atractor

Considérese la siguiente definición de atractor.

Definición 2.2.1. El conjunto cerrado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es llamado el atractor del sistema (2.2.4) si (a) existe un conjunto abierto $\Omega_0 \supset \Omega$ tal que todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (2.2.4) originadas en Ω_0 están definidas para todo $t \geq 0$ y tienden a Ω cuando $t \rightarrow \infty$, esto es, $dist(x(t), \Omega) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $x(0) \in \Omega_0$, donde $dist(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$ es la distancia¹ del punto x al conjunto Ω , y (b) subconjuntos de Ω no tienen esta propiedad.

En otras palabras, se llama atractor porque si está presente alguna forma de amortiguamiento en el sistema no lineal, conforme el estado transitorio decae, el sistema es "atraído" al conjunto Ω . Los atractores en los sistemas no lineales, además de los puntos de equilibrio estables, son

¹ $\|\cdot\|$ indica la norma Euclídeana, y $\|\cdot\|_\infty$, la norma infinita en los espacios de vectores y funciones. El espacio Euclídeano de los vectores n -dimensionales se denota por \mathbb{R}^n .

los siguientes:

1. Órbita periódica o ciclo límite.
2. Órbita cuasiperiódica.
3. Atractor caótico.

Ciclos límite. El sistema (2.2.4) tiene un ciclo límite cuando tiene una solución periódica no trivial

$$x(t + T) = x(t), \forall t \geq 0$$

para algún periodo de tiempo $T > 0$. La palabra "no trivial" es utilizada para excluir soluciones constantes correspondientes a puntos de equilibrio. Una solución periódica en el plano de fase es una trayectoria cerrada, usualmente llamada órbita periódica u órbita cerrada. Cabe mencionar que un sistema oscilador no lineal es estructuralmente estable, es decir, sus propiedades dinámicas cualitativas persisten bajo pequeñas perturbaciones, y por lo tanto, puede presentar oscilaciones (en estado estable) con amplitud y frecuencia fijas e independientes de las condiciones iniciales.

Órbita cuasiperiódica. Un sistema no lineal podría tener más de una oscilación simultáneamente, cuando las frecuencias de estas oscilaciones son inconmensurables. En este caso, el movimiento observado no es en sí periódico, sino que es llamado cuasiperiódico. El término inconmensurable se refiere a que la relación entre las frecuencias es irracional, es decir, si ω_1 es la frecuencia de una oscilación y ω_2 es la frecuencia de una segunda oscilación, y la relación ω_1/ω_2 es irracional, se dice que el sistema tiene una oscilación cuasiperiódica.

Atractor caótico. Este último tipo de dinámica es llamada caótica, en el sentido de que no es predecible cuando existe una pequeña incertidumbre en la condición inicial, y tal estado de movimiento es llamado un atractor caótico.

2.3 Sistemas caóticos

A mediados del siglo XX, se creía que los modelos de oscilación lineal y los modelos no lineales con ciclos límite describían todos los posibles tipos de oscilaciones de los sistemas determinísticos. Sin embargo, los matemáticos M. Cartwright y J. Littlewood [5], y S. Smale [39] demostraron que eso no es cierto para los sistemas de tercer orden: dinámicas muy complejas tales como oscilaciones no periódicas acotadas eran posibles en los sistemas no lineales. En 1963, E. Lorenz revolucionó la mentalidad por su trabajo [24], demostrando que la naturaleza cualitativa de la turbulencia atmosférica, la cual cumple las ecuaciones diferenciales parciales complejas de Navier-Stokes, puede ser representada por un modelo no lineal simple de tercer orden (llamado Sistema de Lorenz), el cual está representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

Si $\sigma = 10$, $r = 28$, y $b = 8/3$, la solución de (2.3.1) es una trayectoria conocida como atractor caótico. Este atractor caótico se ilustra en la Figura 2.1, para condiciones iniciales arbitrariamente cercanas al origen. Al respecto, puede notarse que la trayectoria de estado del sistema (2.3.1) no es ni un punto de equilibrio, ni un ciclo límite, sino otro tipo de atractor, oscilaciones no periódicas y acotadas. La atención de los físicos y matemáticos, y posteriormente de ingenieros, fue atraída a este tipo de modelos mediante el trabajo de D. Ruelle y F. Taken [38], quienes llamaron a éstos atractores extraños y también por el trabajo de Li y Yorke [21], donde se introdujo el concepto de caos para designar el fenómeno errático en los sistemas determinísticos. A partir de entonces, el comportamiento caótico fue descubierto en mecánica, sistemas con láser y radiofísica, química, biología y medicina, circuitos electrónicos, y otros [31]. Los métodos de estudio analítico y numérico de sistemas demostraron que el caos no se debe a un tipo excepcional de comportamiento de los sistemas no lineales. Hablando a grandes rasgos, las dinámicas caóticas surgen cada vez que las trayectorias del sistema son globalmente acotadas y

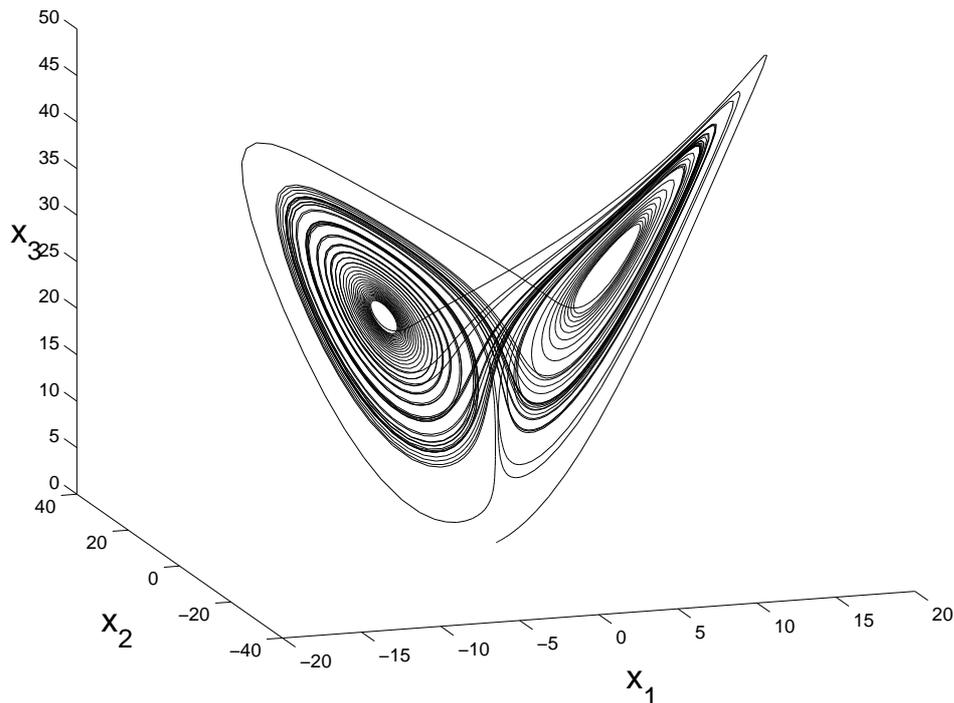


Figura 2.1: Trayectoria en el espacio de estados del sistema (2.3.1), para $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, y $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.0001$.

localmente inestables. En los sistemas caóticos, una divergencia inicial arbitrariamente pequeña de las trayectorias no permanece pequeña sino que crece exponencialmente.

Por otra parte, en muchos de los casos, en el estudio de sistemas dinámicos no lineales, se tiene la condición que garantiza existencia y unicidad de la solución de un sistema $\dot{x} = f(t, x)$, la cual se establece a través del Teorema que considera la condición de Lipschitz [20], esto es:

Teorema 2.3.1. *Sea $f(t, x)$ continua por tramos en t y satisface la condición de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (2.3.2)$$

$\forall x, y \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces existe algún $\delta > 0$ tal que $f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$, tiene una solución única en $[t_0, t_0 + \delta]$.

El estudio de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$, es equivalente a estudiar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación

integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.3.3)$$

la cual se puede ver como un mapeo de la función continua $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotada por

$$x(t) = (Px)(t) \quad (2.3.4)$$

Una solución de (2.3.4) es un punto fijo del mapeo x en Px . La existencia de un punto fijo de (2.3.4) puede establecerse mediante el Teorema del Mapeo Contractivo [20].

Por otra parte, la solución de la ecuación de estado (2.2.3) podría depender continuamente del instante inicial t_0 , del estado inicial x_0 , y de la función del lado derecho $f(t, x)$. La forma integral (2.3.3) muestra que la dependencia continua del instante inicial es obvia. Por dependencia continua de la condición inicial entendemos lo siguiente: Sea $y(t)$ la solución de (2.2.3) que comienza en $y(t_0) = y_0$ y está definida en el intervalo compacto $[t_0, t_1]$; dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo z_0 en la bola $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ tiene una solución única $z(t)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$, y satisface $\|z(t) - y(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Para definir dependencia continua de la función del lado derecho f , debe precisarse en qué forma f es perturbada. Considérese que f depende continuamente de un conjunto de parámetros constantes, es decir, $f = f(t, x, \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^p$, los parámetros constantes podrían representar parámetros físicos del sistema. Sea $x(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda_0) = x_0$. Se dice que la solución depende continuamente de λ si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo λ en la bola $\{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una solución única $x(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda) = x_0$, y satisface $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Esto queda expresado en el siguiente teorema [20]:

Teorema 2.3.2. *(Continuidad en condiciones iniciales y parámetros). Sea $f(t, x, \lambda)$ continua en sus argumentos y localmente Lipschitz en x (uniformemente en t y λ) en $[t_0, t_1] \times D \times \{\lambda \mid \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Sea $y(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ con $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$. Supongamos que $y(t, \lambda_0)$ está definida y permanece en D para todo $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si*

$$\|y_0 - z_0\| < \delta \quad y \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una solución única $z(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0, \lambda) = z_0$, y satisface

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Es decir, si un sistema cumple las condiciones establecidas en los Teoremas (2.3.1) y (2.3.2), podemos definir un "tubo" U (Figura 2.2) alrededor de la solución $y(t, \lambda_0)$ de la siguiente manera

$$U = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \mid \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \epsilon\}$$

donde, si ϵ es elegida lo suficientemente pequeña para que $U \in [t_0, t_1] \times D$, y por continuidad de f en λ , para cada $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ (con $\beta < c$) tal que

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \alpha, \quad \forall (t, x) \in U, \quad \forall \|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$

Tomando $\alpha < \epsilon$ y $\|y_0 - z_0\| < \alpha$, por el teorema de existencia local y unicidad, existe una solución única $z(t, \lambda)$ en algún intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$. La solución comienza dentro del tubo U y puede extenderse mientras permanezca dentro del tubo [20].

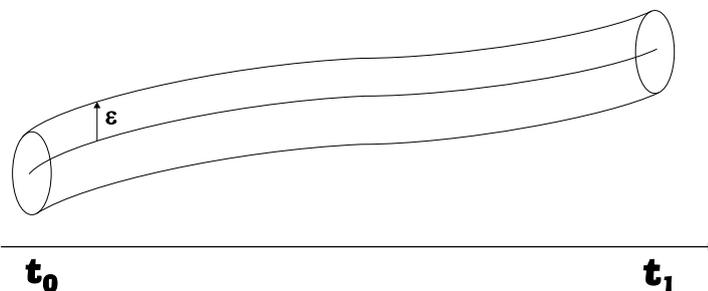


Figura 2.2: Un tubo construido alrededor de la solución $y(t, \lambda_0)$.

O dicho de otra forma, si son satisfechas las condiciones de los Teoremas (2.3.1) y (2.3.2), las soluciones del sistema (2.2.3) que comienzan arbitrariamente cerca una de la otra permanecerán arbitrariamente "cercanas" para todo el intervalo de tiempo. Pero, ¿qué sucede si un sistema no cumple con las condiciones de existencia y unicidad?, ya no puede garantizarse lo anterior, entonces, trayectorias arbitrariamente cercanas en un tiempo t_0 podrían alejarse en un intervalo finito de tiempo.

A esto se le conoce como inestabilidad local, y es precisamente lo que sucede con las trayectorias de los sistemas caóticos, sin embargo estas trayectorias permanecen acotadas en una región del espacio. Es por eso que se dice que los sistemas caóticos son altamente sensibles a las condiciones iniciales, porque una pequeña variación ϵ en las condiciones iniciales x_0 provoca que la trayectoria del sistema $x(t)$, comenzando en $x_0 + \epsilon$, siga una órbita muy diferente que la trayectoria originada en x_0 en un intervalo de tiempo finito.

Por otra parte, la terminología en la teoría del caos no está aún bien establecida, y existen definiciones diferentes en el campo de los modelos caóticos, de las cuales se presentan algunas de las más simples a continuación.

2.3.1 Atractor caótico

Considérese la Definición (2.2.1) de atractor, para definir un atractor caótico.

Definición 2.3.1. Un atractor es caótico si es acotado y cualquier trayectoria originada en él es una trayectoria inestable en el sentido de Lyapunov [3].

Esto es, las trayectorias en un atractor caótico se mantienen dentro del atractor, es decir, son acotadas, sin embargo son inestables localmente, ya que no se quedan en un punto de equilibrio ni siguen una órbita periódica ni cuasiperiódica, sino que tienden a separarse unas de otras, y por lo tanto parecieran "enmarañarse" entre sí, como en la Figura 2.1.

2.3.2 Sistema caótico

Definición 2.3.2. Un sistema es caótico si al menos tiene un atractor caótico [3].

La inestabilidad en el sentido de Lyapunov caracteriza la propiedad principal de las oscilaciones caóticas llamada la "sensibilidad" a las condiciones iniciales: dos trayectorias cualesquiera arbitrariamente cercanas necesariamente se alejan una de la otra en una distancia finita. Por otro lado, se observa que las trayectorias parecen volver a pasar muy cerca de algún punto, esto es llamado recurrencia.

Por otra parte, para cuantificar la inestabilidad de las trayectorias, se utilizan los exponentes de Lyapunov como una herramienta cuantitativa en el estudio de sistemas caóticos.

Exponentes de Lyapunov

Los modelos caóticos presentan inestabilidad local como característica principal, esto es, dispersión de las trayectorias inicialmente cercanas. Al respecto, la rapidez de dispersión está dada por los exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov son determinados de la siguiente manera. Se considera la trayectoria de referencia $\bar{x}(t)$ dada por el sistema (2.2.4) con la condición inicial $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, para la cual, una ecuación en variaciones (un sistema linealizado alrededor de $\bar{x}(t)$) está dada por:

$$\frac{d}{dt}\delta x = W(t)\delta x \quad (2.3.5)$$

donde $\delta x = x - \bar{x}(t)$, y $W(t) = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x}$ es la matriz jacobiana del sistema (2.2.4) calculada a lo largo de la solución $\bar{x}(t)$. Definiendo la desviación inicial $z = \delta x(0)$, se calcula

$$L(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|} \quad (2.3.6)$$

La expresión (2.3.6) caracteriza la tasa de crecimiento exponencial de la solución de (2.3.5) en la dirección de z , y es llamada exponente de Lyapunov en la dirección de z [8, 28, 31]. Lyapunov demostró, bajo ciertas suposiciones, que el límite en (2.3.6) existe, es finito para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$, e independiente de la elección del punto x_0 en la trayectoria $x(t)$. Además, la cantidad de exponentes diferentes es finita, pueden ser numerados en orden descendente $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_n$, y existe una base $z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, para $L(x_0, z_i) = L_i$.

El exponente mayor de Lyapunov (L_1) es el más importante. Si $L_1 > 0$ a lo largo de la solución acotada $\bar{x}(t)$, la cual es densa en el atractor Ω , entonces esta solución es inestable en el sentido de Lyapunov y el atractor es extraño. Al respecto, L_1 caracteriza el grado de

inestabilidad o, dicho de otra forma, el grado de sensibilidad exponencial a la condición inicial. Es claro que, el exponente $L_1 = \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A))$ para el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, con matriz constante A y solución de referencia $\bar{x}(t) = 0$, coincide con el grado usual de inestabilidad del sistema.

Es posible calcular una aproximación del exponente mayor de Lyapunov, sin la construcción de soluciones fundamentales de las ecuaciones en variaciones, mediante la expresión

$$L_1 \approx \frac{1}{t} \ln \frac{\|x(t) - \bar{x}(t)\|}{\epsilon}, \quad (2.3.7)$$

donde $x(t)$ es la solución de (2.2.4) con la condición inicial $x(0)$, y $\epsilon = \|x(0) - \bar{x}(0)\|$, tal que t es suficientemente grande, y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Finalmente, también existen definiciones de caos relacionadas con los exponentes de Lyapunov, puesto que éstos permiten cuantificar el grado de inestabilidad de las trayectorias.

2.3.3 Fenómenos en que se ha observado el caos

Se sabe que las oscilaciones caóticas ocurren cuando existe alguna no linealidad fuerte, ejemplos de sistemas físicos conocidos que exhiben oscilaciones caóticas incluyen los siguientes: Reactores químicos, problemas de flujo inducido o aeoroelásticos, accionadores magnetomecánicos, oscilaciones tridimensionales de estructuras tales como vigas y láminas, sistemas con fricción deslizante, sistemas rotacionales o giroscópicos, sistemas acústicos no lineales, circuitos forzados con diodos o transistores, circuitos forzados armónicamente con elementos de inductancia o capacitancia no lineales, dispositivos de control por retroalimentación, láseres y sistemas ópticos no lineales, retroalimentación de video.

Estos son sólo unos pocos de los muchos fenómenos en los que el caos ha sido observado. Pero las características principales que se han descubierto en el fenómeno caótico son invariablemente: la sensibilidad a cambios en las condiciones iniciales; dispersión del espectro de la transformada de Fourier, aún cuando el movimiento sea generado por una frecuencia única, es decir, el espectro

de frecuencia de la trayectoria caótica es continuo; propiedades fractales de movimiento en el espacio de fases denota un atractor extraño; e incremento en la complejidad de movimientos regulares al variar algún parámetro.

2.4 Conclusiones de Capítulo

En este capítulo se han presentado algunos conceptos y resultados utilizados en el estudio de dinámicas caóticas, a partir de los conceptos generales de la teoría de sistemas dinámicos determinísticos, donde el análisis de la dinámica se origina del hecho que si la posición del vector de estado en un tiempo inicial es conocida, y todas las entradas de control son conocidas en un intervalo de tiempo, uno podría predecir la trayectoria o historial del sistema perpetuamente en el futuro. Sin embargo, en los sistemas caóticos se pierde esta característica de predictibilidad ya que este tipo de sistemas tienen una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, trayectorias arbitrariamente cercanas divergen con el tiempo en una distancia finita, implicando la pérdida de predicción, a largo plazo de las trayectorias.

Además, bajo variaciones en los parámetros de un sistema no lineal su estabilidad puede cambiar drásticamente, por lo que pueden presentar estabilidad con atractores en forma de punto de equilibrio, ciclos límite, u órbitas cuasiperiódicas para ciertos rangos de valores de los parámetros, mientras que para otros valores presentan dinámicas caóticas. Dichas características dinámicas serán estudiadas para una clase de sistemas caóticos conocida como clase P.

A pesar de la inestabilidad local en sistemas caóticos, cada trayectoria permanece acotada, y esto es lo que motiva al estudio de estos sistemas, cuyas trayectorias son localmente inestables pero acotadas. Lo cual en cierta manera, si bien nos impide predecir su comportamiento, no evita del todo la posibilidad de aplicar técnicas que permitan controlar las variables de un sistema caótico.

Capítulo 3

Sistemas Caóticos Clase P

3.1 Introducción

Como se ha mencionado, existen sistemas físicos, químicos, biológicos, meteorológicos, o fisiológicos, cuyos modelos matemáticos exhiben dinámica caótica. También hay modelos caóticos que corresponden a sistemas en áreas del conocimiento como la economía, la psiquiatría, la sociología, y demás. Sin embargo, no se conocen todas las condiciones para que el modelo de un sistema dinámico presente comportamiento caótico. Por esta razón, se han realizado investigaciones en las cuales se estudian sistemas de ecuaciones diferenciales con la finalidad de descubrir condiciones mínimas para que un modelo exhiba caos.

En este capítulo se presentan los resultados de algunas investigaciones, que han permitido encontrar un conjunto de sistemas caóticos, cuya estructura algebraica es la más simple reportada actualmente. A este grupo de sistemas se le ha llamado sistemas caóticos clase P, y el interés de estudiarlos radica en el propósito de averiguar si es posible aplicar ciertas estrategias de control a sistemas caóticos, al menos en este caso, en aquel cuyas dinámicas son las más simples.

3.2 Sistema caótico más simple

Después de tres décadas de estudio, aún no se conocen las condiciones suficientes para que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo exhiba caos. Para sistemas continuos, el teorema de Poincaré-Bendixson [19] implica la necesidad de tres variables y al menos una no linealidad. El sistema de Rössler [36, 37] es un ejemplo conocido de un sistema de tres dimensiones con seis términos lineales y un término no lineal. Con la finalidad de encontrar los elementos suficientes para que aparezca el fenómeno caótico, J.C. Sprott comenzó una búsqueda de los casos más simples de ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones caóticas [43]. En esa línea de investigación, Sprott [40] encontró algunos sistemas algebraicamente simples, generados por ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones caóticas; catorce sistemas constituidos por seis términos y una no linealidad cuadrática, y cinco sistemas constituidos por cinco términos y dos no linealidades cuadráticas, todos ellos más simples que los sistemas de Lorenz [24] y Rössler [36].

En estudios numéricos subsecuentes [42, 41], Sprott encontró dos ecuaciones *jerk* caóticas equivalentes disipativas, i.e., ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma $x^{(3)} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$ cuyas soluciones incluyen al fenómeno caótico, cada una de ellas definida por una función polinomial $J(x, \dot{x}, \ddot{x})$ constituida por tres monomios, incluida una única no linealidad de tipo cuadrática. Los sistemas *jerk* son interesantes debido a que se les puede encontrar tanto en la naturaleza como a manera de sistemas artificiales, considerando que el fenómeno *jerk* puede interpretarse como la razón de cambio de la aceleración con respecto al tiempo. Las dos ecuaciones encontradas por Sprott están dadas por:

$$x^{(3)} = -\alpha\ddot{x} - x + \dot{x}^2 \quad (3.2.1)$$

$$x^{(3)} = -\alpha\ddot{x} - x + x\dot{x} \quad (3.2.2)$$

Se dice que son equivalentes, ya que es posible definir $v \equiv \dot{x}$, tal que diferenciando (3.2.1) respecto al tiempo, se obtiene (3.2.2), con un coeficiente constante diferente para $x\dot{x}$. Estas

ecuaciones presentan soluciones caóticas para valores del parámetro dentro del rango $2.0168... < \alpha < 2.0577....$

Las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.1) pueden ser reescritas en una representación en espacio de estados, como sistemas dinámicos, definiendo $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, y $x_3 = \ddot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_2^2 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Las ecuaciones representadas por (3.2.3) y (3.2.4), con cinco monomios en su lado derecho y solamente un término no lineal, son las ecuaciones *jerk* cuadráticas cuyas dinámicas caóticas asociadas son algebraicamente más simples que cualquier otra reportada previamente con estructura tridimensional cuadrática [25].

3.3 Sistemas caóticos clase P y clase R

De los resultados de Sprott surge una pregunta: ¿Cuántos sistemas caóticos disipativos distintos, con cinco términos incluyendo una no linealidad cuadrática, pueden existir?

Para poder responder esta pregunta, J.M. Malasoma realizó un estudio en el año 2002 [25], con la finalidad de descubrir si existían otros modelos caóticos con las mismas características que (3.2.3) y (3.2.4). Considerando solamente sistemas de tres dimensiones constituidos por cinco términos e incluida una única no linealidad de tipo cuadrática, Malasoma encontró nueve sistemas caóticos, incluidos los sistemas (3.2.3) y (3.2.4) reportados previamente por Sprott; los cuales tienen la estructura algebraica más simple cuyas dinámicas exhiben caos, en el sentido que contiene el menor número de términos y la no linealidad diferenciable más simple.

Estos nueve sistemas caóticos pueden agruparse en dos distintas clases de sistemas mediante \mathcal{C}^k -equivalencias de campos vectoriales [47]; esto es, sean $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{z} = g(z)$ dos \mathcal{C}^r ($r \geq 1$) campos vectoriales definidos en \mathbb{R}^n , ellos son \mathcal{C}^k -equivalentes ($k \leq r$) si existe un \mathcal{C}^k -difeomorfismo Q (véase Apéndice A.1) tal que mapea las órbitas $\phi_t(x)$ del primer sistema en las órbitas $\psi_t(x)$ del segundo sistema, preservando la orientación pero no necesariamente la parametrización por tiempo. Sea $\tau(x, t)$ una función creciente de t a lo largo de las órbitas, entonces los sistemas son \mathcal{C}^k -equivalentes si $Q \circ \phi_t(x) = \psi_{\tau(x, t)}(Q(x))$. Si Q preserva la parametrización por tiempo, entonces los sistemas son \mathcal{C}^k -conjugados. Para este caso $\tau(x, t) \equiv t$ y $Q \circ \phi_t(x) = \psi_t(Q(x))$. Estas dos clases de sistemas son denominadas clase P y clase R [25].

3.3.1 Sistemas caóticos clase P

La primer clase contiene (al menos) seis sistemas que presentan comportamiento caótico para varios conjuntos de valores de sus parámetros. Cuatro de los cinco coeficientes pueden ser ± 1 por normalización de cada una de las tres variables y el tiempo. De esta manera, todos los sistemas tienen un parámetro único, el cual se elige como el coeficiente de amortiguamiento $\alpha > 0$. Estos seis sistemas son (3.2.3) y (3.2.4), además de:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 1 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2^2 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Esta primer clase de sistemas se denota como clase P porque al menos una variable (x_1 o x_2) satisface una ecuación *jerk* polinomial $x^{(3)} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$. Malasoma mostró [25] que los sistemas (3.2.3)-(3.3.4) son C^∞ -conjugados y C^∞ -equivalentes, y además encontró sus respectivos C^∞ -difeomorfismos (ver Tabla 3.3.1). Vale la pena mencionar que en cada caso el C^∞ -difeomorfismo Q y su inverso Q^{-1} son polinomiales. Entonces, ya que las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) son caóticas [41, 42], todos los sistemas de la clase P son caóticos para el mismo rango $2.0168... < \alpha < 2.0577...$ del parámetro [25].

Tabla 3.3.1: Sistemas (3.2.3)-(3.3.3) C^∞ -conjugados al sistema (3.3.4). Los C^∞ -difeomorfismos y sus inversos están listados en la segunda y tercer columna, respectivamente

Sistema clase P	Q	Q^{-1}
$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2$		
$\dot{z}_1 = z_2$ $\dot{z}_2 = z_3$ $\dot{z}_3 = -\alpha z_3 - z_1 + z_2^2$	$z_1 = x_1^2/4 - x_3/2$ $z_2 = x_1/2$ $z_3 = x_2/2$	$x_1 = 2z_2$ $x_2 = 2z_3$ $x_3 = -2z_1 + 2z_2^2$
$\dot{z}_1 = z_2$ $\dot{z}_2 = z_3$ $\dot{z}_3 = -\alpha z_3 - z_1 + z_1 z_2$	$z_1 = x_1$ $z_2 = x_2$ $z_3 = -\alpha x_2 + x_3$	$x_1 = z_1$ $x_2 = z_2$ $x_3 = \alpha z_2 + z_3$
$\dot{z}_1 = z_2 + 1$ $\dot{z}_2 = -\alpha z_2 + x_3$ $\dot{z}_3 = z_1 z_2$	$z_1 = x_1$ $z_2 = x_2 - 1$ $z_3 = x_3 - \alpha$	$x_1 = z_1$ $x_2 = z_2 + 1$ $x_3 = z_3 + \alpha$
$\dot{z}_1 = z_3$ $\dot{z}_2 = z_1 + 1$ $\dot{z}_3 = -\alpha z_3 + z_1 z_2$	$z_1 = x_2 - 1$ $z_2 = x_1$ $z_3 = x_3 - \alpha x_2$	$x_1 = z_2$ $x_2 = z_1 + 1$ $x_3 = z_3 + \alpha z_1 + \alpha$
$\dot{z}_1 = z_2$ $\dot{z}_2 = -\alpha z_2 + z_3$ $\dot{z}_3 = -z_1 + z_2^2$	$z_1 = x_1^2/4 - x_3/2$ $z_2 = x_1/2$ $z_3 = \alpha x_1/2 + x_2/2$	$x_1 = 2z_2$ $x_2 = -2\alpha z_2 + 2z_3$ $x_3 = -2z_1 + 2z_2^2$

Por otra parte, las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) tienen un punto de equilibrio aislado en el origen, con valores propios que satisfacen el polinomio característico $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 1 = 0$, cuyo rango

de raíces está dado por $\lambda = \{(-2.2198, -2.2545), (0.1015 + 0.6635j, 0.0984 + 0.6587j), (0.1015 - 0.6635j, 0.0984 - 0.6587j)\}$, considerando el rango de valores del parámetro α para los cuales las soluciones son caóticas. Entonces, el origen es un punto **silla-foco** (ver Sección 2.2.1), con un índice de inestabilidad de 2, i.e., con un valor propio real negativo y dos valores propios conjugados complejos con parte real positiva; la **variedad** estable es una línea, y la **variedad** inestable es una superficie bidimensional.

Todos los sistemas clase P tienen un punto de equilibrio aislado tal que los valores propios satisfacen el polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 1 = 0$. Dicho punto de equilibrio es un punto hiperbólico: un punto **silla-foco** con un valor propio real negativo y dos valores propios conjugados complejos con parte real positiva.

Por otro lado, para $\alpha = 2.017$, los exponentes de Lyapunov (en base- e) determinados numéricamente son $L \simeq \{0.0550, 0, -2.0720\}$ [41]. Considerando estos valores, cabe notar que la suma de los exponentes de Lyapunov es la tasa de contracción de volumen y está dada por $\sum L = \partial J / \partial \ddot{x} = -\alpha$. Además, si se considera una ecuación tipo *jerk* $x^{(3)} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$ como la derivada respecto al tiempo de la aceleración \ddot{x} , i.e. $\frac{d(F/m)}{dt} = J$, entonces α es una medida del amortiguamiento, ya que $\frac{\partial(F/m)}{\partial \ddot{x}} = -\alpha$.

Resulta muy interesante que todos los sistemas caóticos clase P sean \mathcal{C}^∞ -equivalentes y además \mathcal{C}^∞ -conjugados, es decir, al mapear las órbitas de uno de los sistemas en las órbitas de otro se preserva su orientación y la parametrización del tiempo, y que además los difeomorfismos para mapearlos sean polinomiales, ya que así, es posible trabajar con uno de estos sistemas, y posteriormente, extender los resultados obtenidos a toda la clase.

La Figura 3.1 muestra las trayectorias de x y de sus primeras dos derivadas con respecto al tiempo para el sistema (3.2.3), y la Figura 3.2 muestra el espacio de fase de su atractor caótico, para un valor de $\alpha = 2.017$.

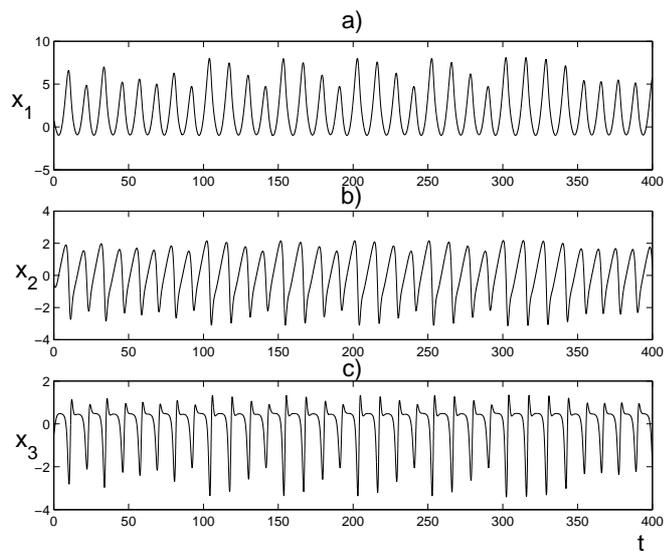


Figura 3.1: Estados del sistema (3.2.3) para $\alpha = 2.017$.

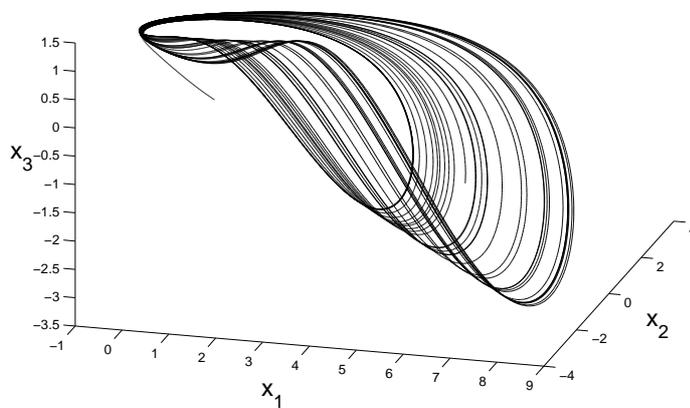


Figura 3.2: Atractor caótico del sistema (3.2.3) para $\alpha = 2.017$.

Luego, la Figura 3.3 muestra las trayectorias de x y de sus primeras dos derivadas con respecto al tiempo para el sistema (3.2.4), y la Figura 3.4 muestra el espacio de fase de su atractor caótico, para un valor de $\alpha = 2.017$.

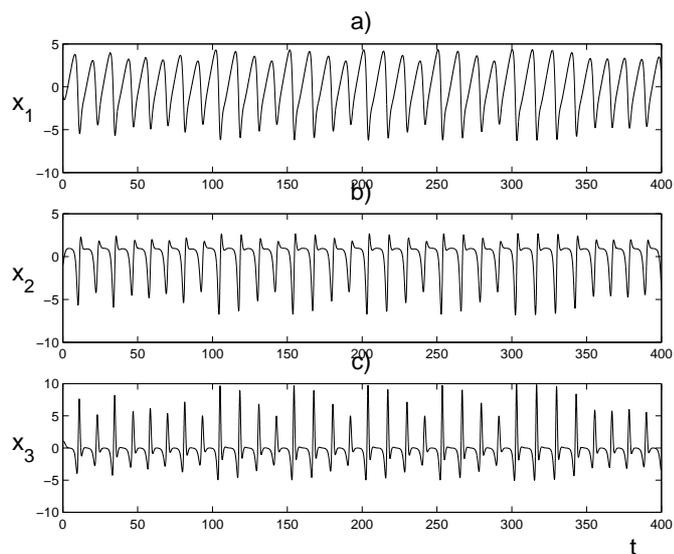


Figura 3.3: Estados del sistema (3.2.4) para $\alpha = 2.017$.

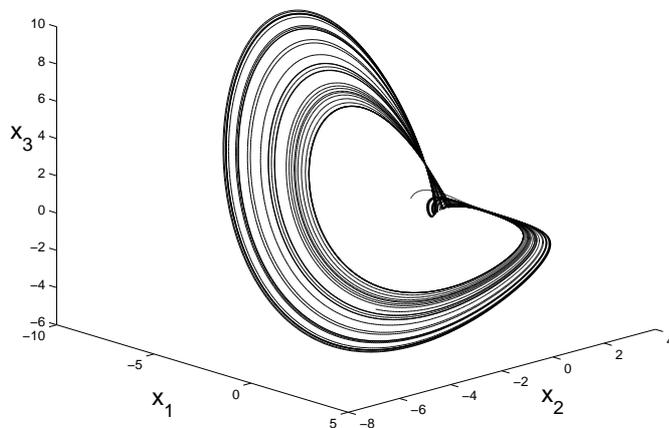


Figura 3.4: Atractor caótico del sistema (3.2.4) para $\alpha = 2.017$.

Como puede verse, los estados x_1 y x_2 del sistema (3.2.4) corresponden a los estados x_2 y x_3 , respectivamente, del sistema (3.2.4), aunque escalados en magnitud. Esto es obvio, puesto que la transformación que mapea las órbitas del sistema (3.2.3) en las órbitas del sistema (3.2.4)

está dada por

$$\begin{cases} z_1 = 2x_2 \\ z_2 = 2x_3 \\ z_3 = -2\alpha x_3 - 2x_1 + 2x_2^2 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

De esta manera, las trayectorias de cada uno de los sistemas pertenecientes a esta clase pueden ser mapeadas en las trayectorias de cualquier otro, mediante los respectivos difeomorfismos.

3.3.2 Sistemas caóticos clase R

La segunda clase, de los sistemas encontrados por Malasoma, se denota como clase R, debido a que al menos una variable (x_1 o x_2) satisface una ecuación *jerk* racional, pero no una polinomial. Estos tres sistemas clase R están dados por los siguientes modelos:

El primero,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Las soluciones numéricas acotadas para la ecuación (3.3.6) se encuentran para el rango $10.284 < \beta < 14.620$. La Figura 3.5 muestra un espacio de fase del atractor caótico de (3.3.6) para $\beta = 10.285$, con condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-22, -12, -109)$.

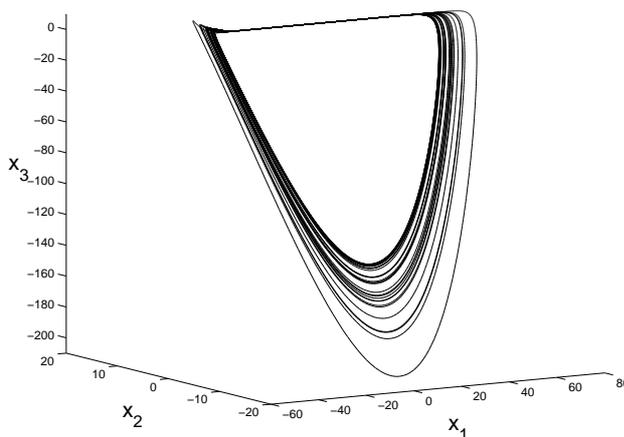


Figura 3.5: Atractor caótico del sistema (3.3.6) para $\beta = 10.285$.

El segundo sistema caótico de la clase R,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 + x_3 - 1 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.3.7)$$

La ecuación (3.3.7) es caótica en el rango $4.7293... < \beta < 4.7558....$

El tercer sistema caótico de clase R,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + 1 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

es resultado de una traslación [25] de la tercer variable del sistema (3.3.7), el cual es también caótico en el intervalo $4.7293... < \beta < 4.7558....$

3.4 Conclusiones de Capítulo

En este capítulo se presentaron los sistemas caóticos algebraicamente más simples reportados. Éstos surgen de ecuaciones diferenciales de tercer orden, denominadas *jerk* , los cuales son muy importantes ya que este tipo de sistemas pueden encontrarse tanto en fenómenos naturales como en procesos artificiales. Cada uno de estos sistemas, al representarse en espacio de estados, está constituido por cinco términos solamente, y con una sola no linealidad, la cual es de tipo cuadrática.

Todos estos sistemas, se encuentran agrupados en dos clases. La primera, denominada clase P, consiste de seis sistemas que satisfacen al menos una ecuación diferencial polinomial; la segunda, denominada clase R, consiste de tres sistemas que satisfacen al menos una ecuación diferencial racional, pero no satisfacen ecuaciones polinomiales.

Todos los sistemas clase P tienen un punto de equilibrio aislado tal que los valores propios satisfacen el mismo polinomio característico, y las raíces de este polinomio son tales que dicho

punto de equilibrio es un punto **silla-foco** con un índice de inestabilidad de 2, esto es, con un valor propio real negativo y dos valores propios conjugados complejos con parte real positiva.

Finalmente, a partir de este breve análisis de los sistemas caóticos descubiertos por Malasoma [25], se concluye que estos sistemas son los casos más elementales, con la misma complejidad algebraica que los sistemas caóticos diferenciables más simples encontrados por Sprott [41]. Las órbitas de los sistemas de cada una de estas clases pueden ser mapeadas entre sí, lo cual nos permite trabajar con la estructura de un sistema, y posteriormente trasladar los resultados obtenidos al resto de los sistemas pertenecientes a la misma clase.

En el siguiente capítulo se discutirán algunas técnicas de observación y control con el objetivo de aplicar, posteriormente, una estrategia que permita realizar supresión de las dinámicas caóticas en los sistemas caóticos clase P.

Capítulo 4

Diseño de Observadores y Controladores para Sistemas No Lineales

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta un repaso de conceptos relacionados con el diseño de observadores y controladores para sistemas no lineales.

En lo que respecta al diseño observadores, se aborda el caso particular de observadores adaptables. La finalidad es presentar resultados para estimación de estados y de parámetros desconocidos de un sistema, con el objeto de utilizarlos posteriormente para los sistemas caóticos clase P.

En cuanto al diseño de controladores, nos enfocamos en estrategias de linealización mediante retroalimentación de estados, con el propósito de cumplir objetivos de control como estabilización en el origen y seguimiento de señales de referencia. Estos resultados serán considerados en capítulos posteriores para plantear un esquema de control basado en observación adaptable para los sistemas caóticos estudiados.

4.2 Observadores

Primeramente se repasan conceptos relacionados con la observabilidad de sistemas no lineales, y posteriormente se presenta el diseño de observadores para algunas clases de sistemas no lineales.

4.2.1 Observabilidad

Considérese un sistema no lineal autónomo con salida escalar dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, & u \in \mathbb{R}^m \\ y_m &= h_m(x), & y_m \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

donde x es el vector de estados, u y y_m la entrada de control y salida medible del sistema respectivamente, f y g son campos vectoriales suaves en \mathbb{R}^n , con $f(0) = 0$, $g(0) \neq 0$, y $h_m : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $h_m(0) = 0$. La condición de observabilidad para los sistemas no lineales es dada como sigue [26].

Definición 4.2.1. El espacio de observación del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

se define como

$$\mathcal{O} = (h_m, L_f h_m, \dots, L_f^{n-1} h_m)^T \quad (4.2.3)$$

El sistema (4.2.2) es localmente observable en U_0 , una vecindad del origen, si

$$\text{rango}\{d\mathcal{O}\} = \text{rango}\{dh_m, \dots, d(L_f^{n-1} h_m)\} = n, \quad \forall x \in U_0. \quad (4.2.4)$$

Si (4.2.4) se cumple $\forall x \in \mathbb{R}^n$, decimos que el sistema es globalmente observable [26].

Ahora se presentan resultados relacionados el diseño de observadores para algunas clases de sistemas, con el objetivo de obtener el diseño de un observador adaptable con la finalidad de aplicarlo a los sistemas caóticos clase P.

4.2.2 Diseño de un Observador Adaptable

Un observador adaptable es un sistema que estima tanto el vector de estados no medibles, como el vector de parámetros, a partir de la entrada y la salida del sistema. Un esquema para un observador adaptable puede ser representado como se muestra en la Figura 4.1.

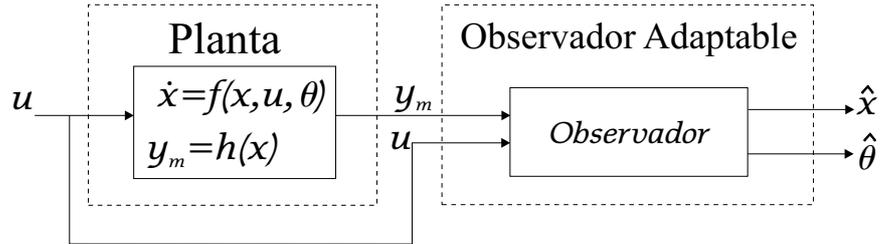


Figura 4.1: Esquema de observador adaptable para un sistema no lineal.

Observador de estado para un sistema afín en el estado

A continuación se presenta el diseño de un observador de estado para los sistemas no lineales afines en el estado de la forma [17]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u(t), y_m(t))x(t) + \varphi(u(t), y_m(t)) \\ y_m(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

donde x , u , y_m denotan los vectores de estado, entrada y salida medible, respectivamente; y las componentes de la matriz $A(u(t), y_m(t))$ y del vector $\varphi(u(t), y_m(t))$ son funciones continuas dependientes de u y y_m ¹, uniformemente acotadas.

Puesto que la observabilidad de un sistema no lineal depende de la entrada, se introduce la siguiente suposición relacionada con la entrada del sistema.

Suposición 4.2.1. *La entrada u es persistentemente excitadora, en el sentido que existen $\alpha_1, \beta_1, T_1 > 0$ y $t_0 \geq 0$ tal que:*

$$\alpha_1 I \leq \int_t^{t+T_1} \Psi_u(\tau, t)^T C^T \Sigma C(\tau) \Psi_u(\tau, t) d\tau \leq \beta_1 I\tag{4.2.6}$$

¹Se omite la dependencia de t con la intención de simplificar la notación.

$\forall t \geq t_0$, donde Ψ_u denota la matriz de transición para el sistema $\dot{x} = A(u, y_m)x$, $y_m = Cx$, $y = \Sigma$ alguna matriz definida positiva acotada.

Entonces, es posible establecer el siguiente resultado.

Lema 4.2.1. *Un observador exponencial para el sistema (4.2.5) está dado por*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A(u, y_m)\hat{x} + \varphi(u, y_m) + S^{-1}C^T\Sigma(y_m - C\hat{x}) \\ \hat{y}_m &= C\hat{x}\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

donde $S = S^T > 0$ es la solución de la ecuación:

$$\dot{S} = -\rho S - A(u, y_m)^T S - SA(u, y_m) + C^T \Sigma C \quad (4.2.8)$$

para $S(0) > 0$, y alguna constante positiva ρ suficientemente grande.

Además, el error de estimación $e = \hat{x} - x$ converge exponencialmente a cero, para $\rho > 0$ suficientemente grande.

Prueba. La dinámica del error de estimación está dada por

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \{A(u, y_m) - S^{-1}C^T\Sigma C\}e$$

Tomando en cuenta la condición (4.2.6), y considerando $V(e) = e^T S e$ como una función de Lyapunov, donde S es solución a (4.2.8), la derivada en el tiempo de $V(e)$ está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= \dot{e}^T S e + e^T \dot{S} e + e^T S \dot{e} \\ &= e^T \{A^T(u, y_m) - C^T \Sigma C S^{-1}\} S e + e^T \dot{S} e + e^T S \{A(u, y_m) - S^{-1}C^T \Sigma C\} e \\ &= e^T \{A^T(u, y_m) S - C^T \Sigma C + \dot{S} + SA(u, y_m) - C^T \Sigma C\} e \\ &= -\rho e^T S e - e^T C^T \Sigma C e \\ &< -\rho e^T S e = -\rho V(e)\end{aligned}$$

□

Observadores adaptables exponenciales para sistemas lineales variantes en el tiempo

Ahora, para el diseño de un observador adaptable para sistemas lineales variantes en el tiempo de la forma [49]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\theta \\ y_m(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

donde θ es algún vector de parámetros desconocidos. Se considera que A , B , C , y Φ son matrices conocidas de dimensiones apropiadas, continuas y uniformemente acotadas en el tiempo.

Considérese que las siguientes suposiciones se cumplen,

Suposición 4.2.2. *Existe una matriz variante en el tiempo acotada $K(t)$ tal que el sistema $\dot{\eta}(t) = (A(t) - K(t)C(t))\eta(t)$ es exponencialmente estable.*

Suposición 4.2.3. *La solución $\Lambda(t)$ de $\dot{\Lambda}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t)$ es persistentemente excitada en el sentido que existen α_2 , β_2 , T_2 tal que*

$$\alpha_2 I \leq \int_t^{t+T_2} \Lambda(\tau)^T C^T \Sigma C(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta_2 I \quad (4.2.10)$$

$\forall t \geq t_0$, para algún $t_0 \geq 0$ y alguna matriz definida positiva acotada Σ .

Entonces, el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\hat{\theta}(t) \\ &\quad + [K(t) + \Lambda(t)\Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)][y_m(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)[y_m(t) - C(t)\hat{x}(t)] \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

es un observador exponencial para el sistema (4.2.9), en el sentido que para cualquier conjunto de condiciones iniciales, el error de estimación $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ y $e_\theta = \hat{\theta}(t) - \theta$ decaen exponencialmente a cero, donde una ley de adaptación para la ganancia Γ del parámetro puede obtenerse de la solución de

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)C(t)\Lambda(t)\Gamma(t) + \lambda\Gamma(t) \quad (4.2.12)$$

para $\lambda > 0$.

Prueba. Véase [49].

Observadores adaptables para sistemas no lineales afines en el estado y afín a los parámetros

Ahora se presenta un resultado más general relacionado con el diseño de un observador adaptable para sistemas afines en el estado que dependen de parámetros desconocidos en una forma

afín, con el propósito de utilizarlo para los sistemas caóticos clase P. Considerando que tienen sólo un parámetro desconocido diferente de la unidad. Partiendo de los resultados previamente presentados, considérense los sistemas descritos por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(u, y_m)x + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\theta \\ y_m &= Cx\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

donde las componentes de la matriz $A(u, y_m)$ y de los vectores $\varphi(u, y_m)$ y $\Phi(u, y_m)$ son funciones continuas dependientes de u y de y_m acotadas uniformemente, y θ es un vector de parámetros desconocidos.

Tomando en cuenta las Suposiciones (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) y definiendo $K = S_x^{-1}C^T$, donde S_x es la solución de (4.2.8) [13], un observador adaptable para el sistema (4.2.13), está dado por

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(u, y_m)\hat{x} + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\hat{\theta} + \{\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T + S_x^{-1}C^T\}\Sigma(y_m - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma(y_m - C\hat{x}) \\ \dot{\Lambda} &= \{A(u, y_m) - S_x^{-1}C^T C\}\Lambda + \Phi(u, y_m) \\ \dot{S}_x &= -\varrho_x S_x - A(u, y_m)^T S_x - S_x A(u, y_m) + C^T \Sigma C \\ \dot{S}_\theta &= -\varrho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \end{cases}\tag{4.2.14}$$

donde $S_x(0) > 0$, $S_\theta(0) > 0$, y ϱ_x y ϱ_θ son constantes positivas suficientemente grandes y Σ alguna matriz definida positiva acotada.

Nota 4.2.1. Si las Suposiciones (4.2.2) y (4.2.3) son verificadas, entonces ellas permiten asegurar la invertibilidad de las matrices S_x y S_θ , las cuales son matrices definidas positivas simétricas.

Entonces se establece el siguiente resultado.

Lema 4.2.2. *Considerando el sistema (4.2.13) y que las Suposiciones (4.2.1), (4.2.2) y (4.2.3) son satisfechas. Entonces, el sistema (4.2.14) es un observador adaptable para el sistema (4.2.13). Además, el vector del error de estimación ($e_x := \hat{x} - x$, $e_\theta := \hat{\theta} - \theta$) converge exponencialmente a cero con una razón dada por $\varrho = \min(\varrho_x, \varrho_\theta)$.*

Prueba. Sean $e_x := \hat{x} - x$ y $e_\theta := \hat{\theta} - \theta$ los errores de convergencia para los estados y parámetros, respectivamente; y cuyas dinámicas están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \{A(u, y_m) - \Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma C - S_x^{-1}C^T \Sigma C\}e_x + \Phi(u, y_m)e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T \Sigma C e_x\end{aligned}$$

Definiendo el siguiente cambio de variable $\epsilon_x = e_x - \Lambda\epsilon_\theta$, se deduce que

$$\dot{\epsilon}_x = \{A(u, y_m) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} e_x + \Phi(u, y_m) \epsilon_\theta - \dot{\Lambda} \epsilon_\theta - \Lambda \dot{\epsilon}_\theta$$

Sustituyendo las expresiones apropiadas en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= \{A(u, y_m) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ \dot{\epsilon}_\theta &= -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)\end{aligned}$$

Puesto que S_x y S_θ son matrices definidas positivas, sea:

$$V(\epsilon_x, \epsilon_\theta) = \epsilon_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

una función que califica como una función de Lyapunov. Entonces, la derivada con respecto al tiempo de V está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \epsilon_x^T \{A(u, y_m) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\}^T S_x \epsilon_x + \epsilon_x^T S_x \{A(u, y_m) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ &\quad - (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T \{S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C\}^T S_\theta \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T S_\theta \{S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C\} (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &\quad + \epsilon_x^T \dot{S}_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T \dot{S}_\theta \epsilon_\theta\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones apropiadas, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta \\ &\quad - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}-\epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta &= -(e_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T C^T \Sigma C (e_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

entonces

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

Tomando $\rho = \min(\rho_x, \rho_\theta)$, se tiene

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho V(\epsilon_x, \epsilon_\theta)$$

Finalmente, ϵ_x y ϵ_θ convergen exponencialmente a cero con una razón dada por ρ . \square

Esto demuestra que es posible diseñar observadores adaptables para los sistemas de la forma (4.2.13), con un error de estimación de los estados y parámetros desconocidos que decrece exponencialmente, siempre y cuando se cumplan las hipótesis establecidas (Suposición 4.2.1), (Suposición 4.2.2), (Suposición 4.2.3), y se tenga disponible una salida $y_m = h_m(x)$ que satisfaga la condición (4.2.4) de observabilidad. Este resultado será utilizado para los sistemas caóticos clase P en los capítulos posteriores.

4.3 Control por retroalimentación de estados

Hay muchos objetivos de control que requieren la utilización de control retroalimentado. Dependiendo del objetivo de control que se pretenda alcanzar, existen varias formulaciones del problema de control. Estos objetivos pueden ser la estabilización, el seguimiento, y el rechazo/atenuación de perturbaciones (o combinaciones de ellos), los cuales plantean algunos de los problemas de control. Para cada uno de estos objetivos, existe el enfoque por retroalimentación de estados, el cual requiere de la información de todas las variables de estado para ser implementado.

En esta sección se expone los conceptos relacionados con el control de sistemas no lineales, y particularmente, se presenta la estrategia de control mediante retroalimentación de los estados para sistemas linealizables por retroalimentación, para efectuar la estabilización y el seguimiento del sistema.

Primeramente se exponen algunos conceptos básicos relacionados con el control de sistemas no lineales. Posteriormente, se plantea el diseño de controladores que cumplen los objetivos de control mencionados.

4.3.1 Grado relativo

La idea de controlabilidad en sistemas lineales está asociada con el concepto de grado relativo en los sistemas no lineales. Considérese un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, & u \in \mathbb{R} \\ y &= h(x), & y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

donde f y g son campos vectoriales suaves en \mathbb{R}^n y $h_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave tal que $h_m(0) = 0$; x , u y y son los vector de estado, entrada, y salida a controlar, respectivamente.

Definición 4.3.1. (Grado Relativo) El grado relativo ρ del sistema (4.3.1) se define como el

entero tal que

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad \forall x \in U_0, \quad 0 \leq i \leq \rho - 2 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0, \quad \forall x \in U_0 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde U_0 es una vecindad del origen. Si

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad \forall x \in U_0, \quad \forall i \geq 0$$

decimos que $\rho = \infty$ [26].

El punto alrededor del cual se define el grado relativo es tomado sin pérdida de generalidad en el origen, podría ser cualquier punto del espacio \mathbb{R}^n .

Definición 4.3.2. (Grado Relativo Global) [26] El grado relativo global ρ del sistema (4.3.1) se define como el entero tal que

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq i \leq \rho - 2 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Si

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \geq 0$$

decimos que $\rho = \infty$.

Nota 4.3.1. [26] El grado relativo ρ es invariante bajo la acción de transformaciones de retroalimentación de estado no lineales. De hecho, la condición (4.3.2) es independiente de cualquier cambio de coordenadas locales. La retroalimentación de estado $u = k(x) + \beta(x)v$ transforma f en $\tilde{f} = f + kg$ y g en $\tilde{g} = \beta g$. Si $L_g h = 0$, entonces también $L_{\tilde{g}} = \beta(L_g h) = 0$. Procediendo por inducción: supóngase que

$$L_g L_f^i h = 0, \quad 0 \leq i \leq j \quad (4.3.3)$$

lo cual implica que $L_f^i h = L_{\tilde{f}}^i h$, $1 \leq i \leq j + 1$; se afirma que si

$$L_g L_f^{j+1} h = 0 \quad (4.3.4)$$

entonces

$$L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^{j+1} h = 0$$

De hecho, las Suposiciones (4.3.3) y (4.3.4) implican

$$L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^{j+1} h = \beta L_g (L_f^{j+1} h) = 0$$

Similarmente si $L_g L_f^{\rho-1} h \neq 0$, entonces $L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^{\rho-1} h \neq 0$.

Nota 4.3.2. [20] El grado relativo ρ es igual al orden menor de la derivada de la salida respecto al tiempo en la que aparece la entrada u con un coeficiente no nulo. Entonces para el sistema (4.3.1),

$$y^{(\rho)} = \frac{d^\rho h(x)}{dt^\rho} = L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h$$

donde el coeficiente de u es $L_g L_f^{\rho-1} h \neq 0$ en U_0 . Si $\rho = \infty$, las derivadas en el tiempo de y de cualquier orden no son afectadas por la entrada u para cualquier $x \in U_0$.

4.3.2 Sistema inverso, dinámica cero, y dinámica de seguimiento

Ahora se presentan algunos conceptos, los cuales serán utilizados para formular los problemas de estabilización y seguimiento para sistemas de la forma (4.3.1). El problema de seguimiento consiste en el diseño de un control con la propiedad de que, dada una señal de referencia suave y acotada $y_r(t)$, la variable de salida y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$$

para cualquier condición inicial del sistema en lazo cerrado.

Los siguientes dos lemas [26] introducen las coordenadas de estado útiles para control de sistemas con grado relativo $\rho < \infty$.

Lema 4.3.1. *Supóngase que $\rho < \infty$ para el sistema (4.3.1). Entonces $\rho \leq n$ y*

$$\text{rango}\{dh(x), \dots, d(L_f^{i-1}h(x))\} = i. \quad \forall x \in U_0$$

para cada $i = 1, \dots, \rho$.

Lema 4.3.2. *Supóngase que $\rho \leq n$ para el sistema (4.3.1). Entonces existen $n - \rho$ funciones $\xi_i(x)$, $1 \leq i \leq n - \rho$, tal que:*

(i) *Las funciones*

$$\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \dots, L_f^{\rho-1}h(x)$$

forman un difeomorfismo local cerca del origen;

(ii) *$\langle d\xi_i, g \rangle = 0$, $0 \leq i \leq n - \rho$. En coordenadas locales*

$$\begin{aligned} (\xi, z) &= (\xi(x), z(x)) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), z_1(x), \dots, z_\rho(x)) \\ &= (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \dots, L_f^{\rho-1}h(x)) \end{aligned}$$

*el sistema (4.3.1) se expresa en la **forma de seguimiento** (también llamada **forma normal**)*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Si, adicionalmente, el grado relativo global ρ esta bien definido con $\rho \leq n$ y

(iii) los campos vectoriales

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \quad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g$$

son completos, entonces existe un difeomorfismo global que transforma (4.3.1) en la forma de seguimiento (4.3.5).

Nota 4.3.3. Las funciones $\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x)$ son elegidas explícitamente tales que $\langle d\xi_i, g \rangle = 0$, $1 \leq i \leq n - \rho$. Por otro lado, si las coordenadas locales $(h, \dots, L_f^{\rho-1} h, \xi_1, \dots, \xi_{n-\rho})$ son determinadas simplemente por las funciones escogidas $\xi_1, \dots, \xi_{n-\rho}$ tales que

$$\text{rango}\{dh, \dots, d(L_f^{\rho-1} h), d\xi_1, \dots, d\xi_{n-\rho}\} = n,$$

en tales coordenadas locales el sistema se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi_1(\xi, z) + \phi_2(\xi, z)u \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h \\ y &= z_1 \end{aligned}.$$

Lema 4.3.3. *Si el sistema (4.3.1) tiene grado relativo $\rho \leq n$, entonces es localmente parcialmente linealizable por retroalimentación de estado con índice ρ .*

Si $\rho \leq n$, se aplica el Lema (4.3.2) a fin de que el sistema (4.3.1) se exprese, en nuevas coordenadas (ξ, z) , en la forma de seguimiento (4.3.5). Ya que por definición de ρ , $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$ en U_0 , la entrada que, aplicada al sistema (4.3.1) con condiciones iniciales x_0 compatibles, garantiza seguimiento exacto en una vecindad del origen $V_0 \subset U_0$, i.e. $y(t) = y_r(t)$, $0 \leq t < T(x_0, u_r, V_0)$, está dada por el **sistema inverso**

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} &= \phi(\bar{\xi}, y_r, \dots, y_r^{(\rho-1)}), & \bar{\xi}(0) &= \xi(0) \\ u_r &= \frac{-L_f^\rho h(\bar{\xi}, y_r, \dots, y_r^{(\rho-1)}) + y_r^{(\rho)}}{L_g L_f^{\rho-1} h(\bar{\xi}, y_r, \dots, y_r^{(\rho-1)})} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

La dinámica del sistema inverso guiado por $y_r, \dots, y_r^{(\rho-1)}$ es llamada dinámica de seguimiento. Si la señal de referencia es $y_r(t) = 0$, la dinámica del sistema inverso

$$\dot{\bar{\xi}} = \phi(\bar{\xi}, 0) \quad (4.3.7)$$

es llamada dinámica cero.

Definición 4.3.3. (Dinámica Cero) Supóngase que $\rho \leq n$ en U_0 para el sistema (4.3.1). Sea $z_i = L_f^{i-1}h(x)$, $1 \leq i \leq \rho$. Definiendo la variedad $(n - \rho)$ -dimensional $M = \{x \in U_0 : h(x) = 0, \dots, L_f^{\rho-1}h(x) = 0\}$. La dinámica del sistema (4.3.1) restringida en M es llamada la dinámica cero.

Definición 4.3.4. (Fase Mínima) El sistema (4.3.1) con $\rho \leq n$ es de fase mínima si el origen $\xi = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable para las dinámicas cero. Un sistema que no es de fase mínima es llamado de fase no mínima.

La dinámica cero es un caso especial de un concepto más general: la dinámica de seguimiento.

Definición 4.3.5. (Dinámica de Seguimiento) Supóngase que $\rho \leq n$ en U_0 para el sistema (4.3.1) y que existe una condición inicial $x_0 \in U_0$ la cual es compatible con la señal de referencia $y_r(t)$, i.e. $y_r^{(i)}(0) = L_f^i h(x_0)$, $0 \leq i \leq \rho - 1$. Sea

$$M_t = \{x \in U_0 : h(x) = y_r(t), \dots, L_f^{\rho-1}h(x) = y_r^{(\rho-1)}(t)\}$$

la variedad integral $(n - \rho)$ -dimensional variante en el tiempo llamada la **variedad de seguimiento**. La dinámica del sistema (4.3.1) restringida en M_t es llamada la dinámica de seguimiento.

4.3.3 Control linealizante por retroalimentación de estado para estabilización y seguimiento

Ahora se presenta una estrategia de control mediante retroalimentación de estados para sistemas linealizables por retroalimentación, con dos objetivos principales: estabilización y seguimiento, con la finalidad de diseñar controladores de este tipo para los sistemas caóticos clase P, puesto que los objetivos principales son la supresión del caos y eventualmente ver si es posible llevar las dinámicas de esa clase de sistemas a órbitas periódicas y trayectorias arbitrarias en general.

A partir de los resultados mencionados anteriormente, se puede decir que si el sistema (4.3.1) puede expresarse, en coordenadas (ξ, z) , como (4.3.5), entonces el control u por retroalimentación de estados que linealiza parcialmente al sistema con índice $\rho \leq n$, está definido por

$$u = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} v \quad (4.3.8)$$

$$(4.3.9)$$

donde v es llamado el control auxiliar para el sistema linealizado:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \varphi(\xi, z) \\ \dot{z} &= A_c z + b_c v \\ y &= z_1\end{aligned}$$

En la Figura 4.2 se presenta un esquema para la implementación de una ley de control linealizante mediante retroalimentación de estados a un sistema no lineal.

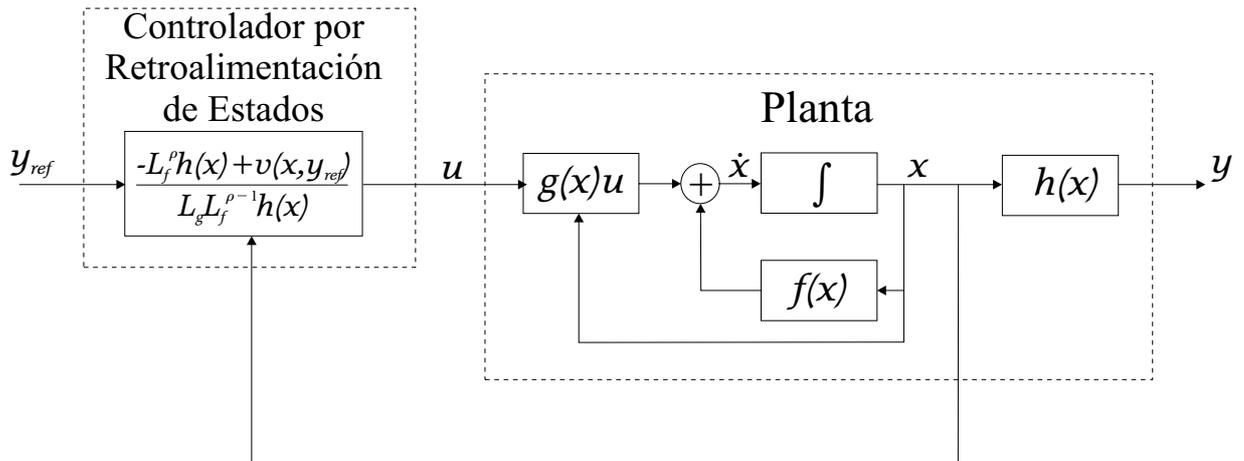


Figura 4.2: Esquema controlador por retroalimentación de estados para sistemas no lineales.

Por otra parte, para el diseño de controladores estabilizantes y de seguimiento para los sistemas (4.3.1) considérese por un lado que el caso de estabilización en el origen corresponde al caso particular del problema de seguimiento cuando $y_r(t) = 0$, por otro lado el diseño de un controlador en el caso de seguimiento para los sistemas (4.3.1) se realiza mediante los siguientes resultados.

Definición 4.3.6. (Seguimiento por Retroalimentación de Estado Estática) [26] Dada una señal de referencia acotada suave $y_r(t)$ con derivadas en el tiempo acotadas $y_r^{(1)}(t), \dots, y_r^{(\rho)}(t)$, el problema de seguimiento se dice que es globalmente resoluble por retroalimentación de estado estática para el sistema (4.3.1) si existe un control

$$u = k(x) + \beta(x)v_r(y_r(t), \dots, y_r^{(\rho)}(t))$$

con $\beta(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, k y β funciones suaves en \mathbb{R}^n , v una función continua llamada control

auxiliar, tal que, dada cualquier condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ para el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)k(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x),\end{aligned}$$

- (i) $\|x(t)\|$ es acotada, $\forall t \geq 0$,
(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$.

Teorema 4.3.1. (*Seguimiento por Retroalimentación de Estado Estática*) [26] *Considérese el sistema el sistema (4.3.1) y supóngase que: el grado relativo global está bien definido con $\rho \leq n$, la dinámica de seguimiento tiene estados acotados para entradas acotadas, y los campos vectoriales*

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \quad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g$$

son completos. Entonces, el problema de seguimiento es globalmente resoluble por retroalimentación de estado estática.

La ley de control que permite realizar seguimiento de la salida a una señal de referencia $y_r(t)$ mediante retroalimentación de estado estática para el sistema (4.3.1), está dada por el control linealizante (4.3.8) con la función v como:

$$\begin{aligned}v &= -k_1(y(t) - y_r(t)) - k_2(y^{(1)}(t) - y_r^{(1)}(t)) - \dots \\ &\dots - k_\rho(y^{(\rho-1)}(t) - y_r^{(\rho-1)}(t)) + y_r^{(\rho)}(t)\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

donde los valores de las constantes k_i ($i = \{1, 2, \dots, \rho\}$) deben ser tales que $s^\rho + k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1$ sea un polinomio Hurwitz.

Puesto que para el problema de estabilización se considera $y_r(t) = 0$, entonces la ecuación (4.3.10) resulta en la ley de control:

$$v = -k_1 y(t) - k_2 y^{(1)}(t) - \dots - k_\rho y^{(\rho-1)}(t)\tag{4.3.11}$$

Estos resultados permiten que la dinámica del sistema (4.3.1) sea estabilizada en el origen, o que realice seguimiento a una señal $y_r(t)$, dependiendo de la elección del control auxiliar v .

4.4 Conclusiones de Capítulo

En este capítulo se presentaron algunos conceptos relacionados con la observabilidad de sistemas no lineales, con el fin de diseñar un observador adaptable para la clase de sistemas afines en el

estado y parámetros desconocidos. El diseño de observadores de este tipo se discutió a la luz de resultados recientes sobre observadores adaptables para sistemas lineales variantes en el tiempo y de los resultados existentes sobre el diseño de observadores para sistemas afines en el estado. Además, se obtuvieron condiciones suficientes para demostrar la convergencia del observador adaptable considerado.

Por otra parte, se consideró un enfoque de control que consiste en la eliminación de la dinámica no lineal de un sistema, es decir, un enfoque de linealización exacta, el cual se efectúa mediante alguna ley de retroalimentación de los estados. Además, se logra que la variable de salida a controlar del sistema siga a una señal de referencia deseada. Para este propósito, han sido introducidos los conceptos de grado relativo, dinámica cero, sistema de fase mínima, y dinámica de seguimiento, los cuales son necesarios para la comprensión del Teorema que da solución al problema de seguimiento para cierta clase de sistemas no lineales.

Tomando en cuenta estos resultados de manera conjunta, es posible plantear un esquema de control de linealización exacta mediante retroalimentación de estados, basado en el diseño de observadores adaptables, para los sistemas caóticos clase P.

Capítulo 5

Esquema Observador adaptable - Control no lineal por retroalimentación de estados

5.1 Introducción

Como ya se ha mencionado, las oscilaciones erráticas debidas a las dinámicas caóticas son a menudo indeseables puesto que pueden causar daños en los sistemas físicos, por esta razón es importante la supresión del caos en los sistemas. Además, el control de caos podría ser utilizado para resolver problemas de control actuales, entre otros, la supresión de caos en convertidores DC-DC, láseres multimodos, la regulación de las dinámicas en fluidos, en el diseño de sistemas para comunicaciones seguras en internet, y algunos problemas en ciencias médicas, e.g., arritmias. Actualmente, los problemas en control de caos están relacionados con análisis y diseños robustos en las estrategias de retroalimentación. Estas cuestiones se deben a que hay muchos sistemas donde está disponible sólo información parcial para la retroalimentación (estados medibles o valores de parámetros) y la extrema sensibilidad de los sistemas caóticos a las condiciones iniciales y a los valores de sus parámetros.

Una alternativa para superar estos problemas es el diseño de estrategias por retroalimentación basadas en estructuras adaptables [3, 35]. En este capítulo, se estudia una estrategia de control para supresión de caos a partir de observadores adaptables. El esquema de control

es robusto en el sentido que los estados no medidos y las incertidumbres de los parámetros son compensados. Primero, utilizando los resultados obtenidos en el capítulo 4, se diseña un observador adaptable para la estimación de las variables de estado y de los parámetros reales de los sistemas caóticos clase P. Entonces, tomando los estados y parámetros estimados, se diseña una ley de control por retroalimentación de estados que suprime el comportamiento caótico en esta clase de sistemas.

5.2 Observador adaptable para sistemas caóticos clase P

Es claro que los sistemas caóticos clase P pueden ser representados en la forma general

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \alpha) \\ y_m &= h_m(x)\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y_m \in \mathbb{R}$ es la salida medida, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro desconocido y constante, f es un campo vectorial suave en \mathbb{R}^n , y h_m es la función de salida medible.

Mediante un cambio de coordenadas se puede transformar el sistema (5.2.1) en un sistema afín en el estado, para el cual es posible diseñar un observador adaptable; esto es, si existe algún C^∞ -difeomorfismo $z = Q(x)$ que lleve el sistema (5.2.1) a la forma (4.2.13) dada por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(u, y_m)z + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\theta \\ y_m &= Cz\end{aligned}$$

Entonces es posible diseñar el observador adaptable de la forma (4.2.14)

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A(u, y_m)\hat{z} + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\hat{\theta} + \{\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T + S_z^{-1} C^T\} \Sigma (y_m - C\hat{z}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma (y_m - C\hat{z}) \\ \dot{\Lambda} &= \{A(u, y_m) - S_z^{-1} C^T C\} \Lambda + \Phi(u, y_m) \\ \dot{S}_z &= -\rho_z S_z - A(u, y_m)^T S_z - S_z A(u, y_m) + C^T \Sigma C \\ \dot{S}_\theta &= -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \end{cases}\tag{5.2.2}$$

para estimar los estados y parámetro desconocido del sistema transformado $\dot{z} = \bar{f}(z, \theta)$, tal que aplicando $x = Q^{-1}(z)$ se obtienen los estados y el parámetro estimados del sistema original (5.2.1).

Algunos C^∞ -difeomorfismos $z = Q(x)$ para transformar los sistemas clase P (5.2.1) a la forma afín dada por (4.2.13) están dados en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2.1: C^∞ -difeomorfismos Q que transforman los sistemas clase P a la estructura (4.2.13), considerando $y_m = z_1$

Sistema	Estructura (5.2.1)	Q	Estructura (4.2.13)
(3.2.3)	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = x_3$ $\dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_2^2$	$z_1 = 2x_3$ $z_2 = -2x_1 + 2x_2^2$ $z_3 = 2x_2$	$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2$ $\dot{z}_2 = -z_3 + z_1 z_3$ $\dot{z}_3 = z_1$
(3.2.4)	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = x_3$ $\dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2$	$z_1 = x_2$ $z_2 = \alpha x_2 + x_3$ $z_3 = x_1$	$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2$ $\dot{z}_2 = -z_3 + z_1 z_3$ $\dot{z}_3 = z_1$
(3.3.1)	$\dot{x}_1 = x_2 + 1$ $\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = x_1 x_2$	$z_1 = x_2$ $z_2 = x_3$ $z_3 = x_1$	$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2$ $\dot{z}_2 = z_1 z_3$ $\dot{z}_3 = z_1 + 1$
(3.3.2)	$\dot{x}_1 = x_3$ $\dot{x}_2 = x_1 + 1$ $\dot{x}_3 = -\alpha x_3 + x_1 x_2$	$z_1 = x_1 + 1$ $z_2 = x_3 + \alpha x_1 + \alpha$ $z_3 = x_2$	$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2$ $\dot{z}_2 = -z_3 + z_1 z_3$ $\dot{z}_3 = z_1$
(3.3.3)	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = -x_1 + x_2^2$	$z_1 = x_2$ $z_2 = x_3$ $z_3 = x_1$	$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2$ $\dot{z}_2 = -z_2 + z_1^2$ $\dot{z}_3 = z_1$
(3.3.4)	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2$	$z_1 = x_2$ $z_2 = x_3$ $z_3 = x_1$	$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2$ $\dot{z}_2 = -z_3 + z_1 z_3$ $\dot{z}_3 = z_1$

5.3 Control no lineal por retroalimentación de estados para sistemas caóticos clase P

A partir de los resultados presentados en el capítulo 4, es posible diseñar un control por retroalimentación de estados para los sistemas caóticos clase P. Tal diseño es utilizado como un controlador intermedio dentro del enfoque utilizado con el observador adaptable.

Para esto, considérese un sistema caótico clase P en la forma (4.3.1) dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \alpha) + g(x, \alpha)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ son los vectores de estado, entrada de control, y salida a controlar, respectivamente; el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante cuyo valor es desconocido.

Si el sistema (4.3.1) tiene puntos de equilibrio y grado relativo bien definido $\rho = n$, entonces su dinámica caótica puede ser suprimida mediante un control linealizante por retroalimentación de estados descrito por (4.3.8):

$$u = \frac{-L_f^\rho h(x) + v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}$$

donde v es el control auxiliar para el sistema resultante de la linealización por retroalimentación de estados.

Ahora, si se desea estabilizar el sistema (4.3.1) en el origen, sin pérdida de generalidad, es necesario considerar un control auxiliar dado por (4.3.11):

$$v = -k_1 y(t) - k_2 \dot{y}(t) - \dots - k_\rho y^{(\rho-1)}(t)$$

donde los valores de las constantes k_i ($i = \{1, 2, \dots, \rho\}$) deben ser tales que $s^\rho + k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1$ sea un polinomio Hurwitz.

Además, la salida del sistema puede seguir a una señal de referencia y_r suave (continuamente diferenciable), si se escribe el control auxiliar v como (4.3.10):

$$v = -k_1 (y(t) - y_r(t)) - k_2 (\dot{y}(t) - \dot{y}_r(t)) - \dots - k_\rho (y^{(\rho-1)}(t) - y_r^{(\rho-1)}(t)) + y_r^{(\rho)}(t)$$

Nótese que la entrada de control u para los sistemas (3.2.3) a (3.3.4) corresponde a una fuerza exógena de control del sistema. Entonces, el controlador por retroalimentación de estado puede ser utilizado para estabilización o seguimiento.

5.3.1 Esquema controlador-observador para sistemas caóticos clase P

Las leyes de control obtenidas requieren todos los estados y parámetro del sistema (5.2.1) para realizar la retroalimentación. Sin embargo, el parámetro α es desconocido y x y sus derivadas en el tiempo \dot{x} y \ddot{x} no están disponibles para la retroalimentación, entonces los estados y el parámetro α serán substituidos en la ley de control por los valores estimados por el observador adaptable. De esta forma, el esquema propuesto queda integrado por el observador adaptable (5.2.2) y la ley de control por retroalimentación (4.3.8), donde v está dado por (4.3.11) ó (4.3.10) para el caso de estabilización y seguimiento a una señal de referencia y_r , respectivamente. En la Figura 5.1 se presenta un esquema completo para la implementación de controlador basado en un observador adaptable.

En seguida se considera la estabilidad asintótica del esquema controlador-observador dado por (5.2.2) y (4.3.8)-(4.3.11). En vista de la forma del sistema considerado (4.2.13), es claro que si se extiende el vector de estado z por el vector de parámetros constantes θ , en el vector $Z := (z \ \theta)^T$, se preserva la estructura afín en el estado:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= F(\vartheta)Z + G(\vartheta) \\ y_m &= HZ \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

donde $F(\vartheta) = \begin{pmatrix} A(\vartheta) & \Phi(\vartheta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G(\vartheta) = \begin{pmatrix} \varphi(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$, $H = (C \ 0)$, y $\vartheta := (u \ y_m)$.

Ahora, considerando el esquema controlador-observador dado por

$$\begin{cases} \dot{Z} &= F(\vartheta(\hat{Z}))Z + G(\vartheta(\hat{Z})) \\ \dot{\hat{Z}} &= F(\vartheta(\hat{Z}))\hat{Z} + G(\vartheta(\hat{Z})) + S^{-1}H^T(y_m - H\hat{Z}) \\ \dot{S} &= -\rho S - F^T(u(\hat{Z}))S - SF(u(\hat{Z})) + H^T H \end{cases} \tag{5.3.2}$$

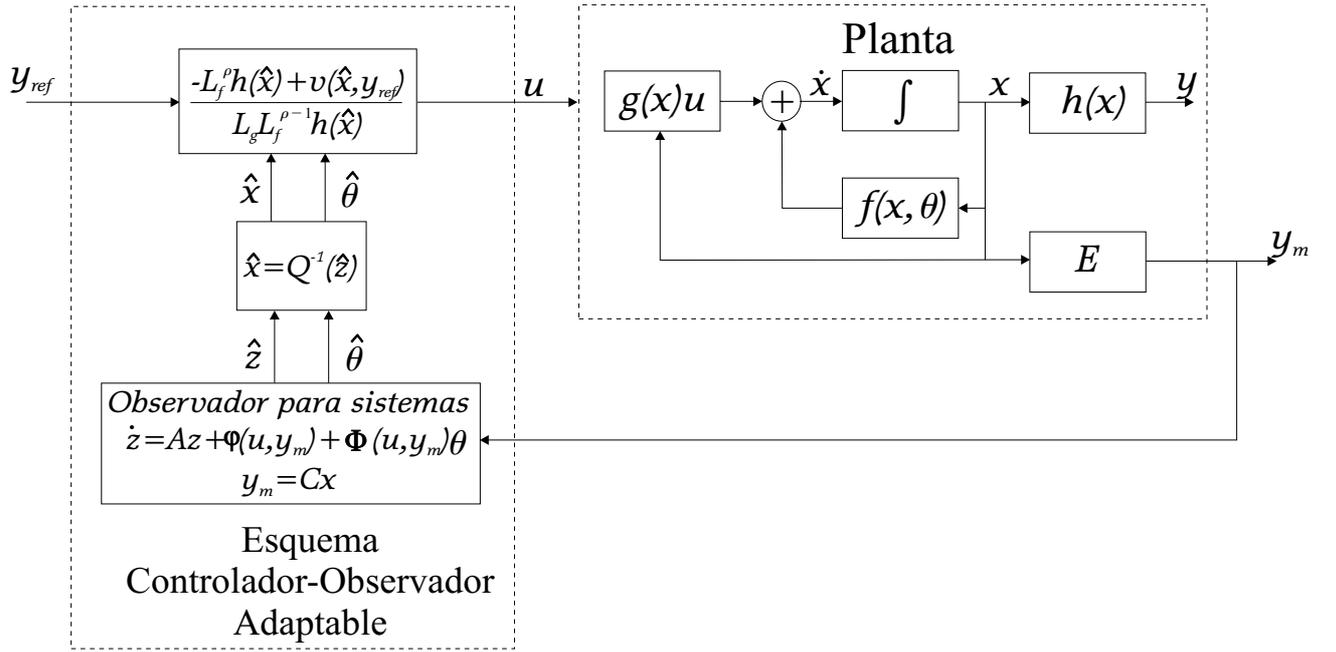


Figura 5.1: Esquema controlador-observador adaptable para sistemas caóticos clase P.

donde $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix}$. S_z , S_θ , Λ de (5.2.2) están relacionados con S mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} S_z = S_1 \\ S_\theta = S_3 - S_2^T S_1^{-1} S_2 \\ \Lambda = -S_1^{-1} S_2 \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Sea $e := \hat{Z} - Z$ el error de estimación, entonces las dinámicas del esquema controlador-observador resultante puede ser escrito como sigue:

$$\begin{cases} \dot{e} = \{F(\vartheta(\hat{Z})) - S^{-1}H^T H\}e \\ \dot{Z} = F(\vartheta(\hat{Z}))Z + G(\vartheta(\hat{Z})) \\ \dot{S} = -\theta S - F^T(\vartheta(\hat{Z}))S - SF(\vartheta(\hat{Z})) + H^T H \end{cases} \quad (5.3.4)$$

donde $u(\hat{Z})$ es la ley de control correspondiente dada por (4.3.8)-(4.3.11), la cual depende de los valores estimados por el observador (5.2.2). Entonces, puede establecerse en el siguiente resultado:

Teorema 5.3.1. *Bajo la suposición de que el controlador nominal es globalmente asintóticamente estable y que el estado Z en (5.3.2) permanece para tiempo positivo en un conjunto*

compacto Ω (el cual contiene el punto de equilibrio del controlador nominal) $\forall Z(0) \in \Omega$, el sistema completo (5.3.2) es globalmente asintóticamente estable en $\Omega \times \mathbb{R}^n \times S_n^+$ (i.e., $\forall Z(0) \in \Omega, \forall \hat{Z}(0) \in \mathbb{R}^n; \forall S(0) > 0$).

Prueba. El observador (5.2.2) es tal que el error de estimación error tiende a cero (por lo tanto es acotado) y la matriz S , la cual es solución de la ecuación diferencial de Riccati en (5.3.2), es acotada por arriba y por abajo en el conjunto de matrices definidas positivas, esto es,

Lema 5.3.1. *Supóngase que ϑ es regularmente persistente para (5.3.1), y considérese la siguiente ecuación diferencial de Lyapunov:*

$$\dot{S}(t) = -\theta S(t) - F^T(\vartheta(\hat{Z}))S(t) - S(t)F(\vartheta(\hat{Z})) + H^T H$$

con $S(0) > 0$. Entonces: $\exists \theta_0 > 0$ tal que para cualquier matriz simétrica definida positiva $S(0); \forall \theta \geq \theta_0$

$$\exists \bar{\alpha} > 0, \bar{\beta} > 0, t_0 > 0 : \forall t > t_0$$

$$\bar{\alpha}I \leq S(t) \leq \bar{\beta}I.$$

Entonces el estado completo $e = (\hat{Z} - Z, \hat{Z}, S)$ de (5.3.2) permanece en un conjunto compacto a lo largo de cualquier trayectoria.

Sea $\Lambda = \{(e(t), \hat{Z}(t), S(t)), t \geq 0\}$ una semitrayectoria del esquema controlador-observador dado por (5.3.2). Esta semitrayectoria, permanece en un conjunto compacto como se mencionó anteriormente, tiene un conjunto ω -límite no vacío (el conjunto ω -límite de una trayectoria es el conjunto de sus puntos de acumulación). Sea $[\bar{e}, \bar{Z}, \bar{S}]$ un elemento del conjunto ω -límite considerado de Λ . Es claro que $e \rightarrow 0$ implica que $\bar{e} = 0$. Sea $\{(0, \hat{Z}(t), S(t)), t \geq 0\}$ una semitrayectoria que comienza en tiempo $t = 0$ en $[0, \bar{Z}, \bar{S}]$. Puesto que el conjunto ω -límite es positivamente invariante, entonces la semitrayectoria $\{(0, \hat{Z}(t), S(t)), t \geq 0\}$ pertenece al conjunto ω -límite considerado de Λ . El error de estimación es aquí igual a 0 para esta semitrayectoria, y utilizando nuestra suposición de estabilidad en lazo cerrado, \hat{Z} es globalmente asintóticamente estable, i.e., $\hat{Z}(t) \rightarrow Z^* = \psi(Z^*)$. De esta manera, hay puntos en los cuales $e = 0$ y $\hat{Z} = Z^*$ en el conjunto ω -límite de Λ , puesto que él es un conjunto cerrado. Al ser $[0, Z^*, \bar{S}(t)]$ un elemento del conjunto ω -límite de Λ se sigue el mismo razonamiento: sea $\{(0, Z^*, S(t)), t \geq 0\}$ una semitrayectoria que comienza en tiempo $t = 0$ en $[0, Z^*, \bar{S}]$. Esta semitrayectoria pertenece al conjunto ω -límite de Λ . Las dinámicas de $S(t)$ están dadas por la ecuación diferencial de Riccati y utilizando la observabilidad del sistema lineal constante $(F^* + G^*, H)$, que $S(t)$ tiende a S^* , la única solución definida positiva de la ecuación algebraica de Riccati.

Entonces, $[0, Z^*, S^*]$ pertenece al conjunto ω -límite de Λ . Resulta que, bajo la suposición de estabilidad asintótica (local) de (5.3.2), Λ entra en un tiempo finito en la región de atracción de $[0, Z^*, S^*]$. Por consiguiente (5.3.2) es globalmente asintóticamente estable en $\Omega \times \mathbb{R}^n \times S_n^+$. \square

5.4 Implementación del esquema

Ahora consideraremos un caso particular para ilustrar la implementación del esquema controlador por retroalimentación de estados basado en un observador adaptable para supresión de caos en los sistemas caóticos clase P.

Se considera el ejemplo del sistema caótico clase P (3.2.4), para el cual se estiman sus estados y parámetro α , y se diseña una ley de control que permite estabilización y otra que permite realizar seguimiento a una señal de referencia.

5.4.1 Diseño del observador adaptable y controlador

El sistema caótico (3.2.4) está descrito por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

donde se considera que el parámetro α es constante y desconocido, $y = x_1$ es la variable del sistema a controlar, y el sistema está controlado por una entrada exógena u . Por otra parte, la única información de que se dispone es la componente del vector de estados x_2 , la cual es medible.

Antes de diseñar algún observador o controlador, es necesario conocer el grado relativo y la observabilidad del sistema. Primeramente, se analiza el grado relativo del sistema. Considérese la Nota 4.3.2, puesto que $y = x_1$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = x_3 \\ y^{(3)} &= \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 + u \end{aligned}$$

Por lo tanto, el grado relativo $\rho = 3$, es decir, en este caso, $\rho = n$.

Por otra parte, también analizamos la observabilidad del sistema mediante la condición de rango dada por (4.2.4). Ya que $y_m = x_2$ es la variable medida, entonces el espacio de observación para el sistema (5.4.1) está dado por

$$\mathcal{O} = \{x_2, x_3, -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2\}$$

Por consiguiente,

$$d\mathcal{O} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0, & 0, & x_2 - 1 \\ 1, & 0, & x_1 \\ 0, & 1, & -\alpha \end{array} \right\}$$

El rango de $d\mathcal{O}$ depende del valor de x_2 , esto es, la matriz $d\mathcal{O}$ pierde rango solamente para $x_2 = 1$, por lo tanto, la observabilidad está sujeta a dicha restricción. Por este hecho, se procurará no llevar el sistema al plano, en el espacio de estados, para el cual $x_2 = 1$.

Ahora para aplicar el esquema control-observador a este sistema se procede de la siguiente forma. El sistema (5.4.1) es transformado en la forma afín en el estado (4.2.13) mediante el mapeo (\mathcal{C}^∞ -difeomorfismo) $Q : f \rightarrow \bar{f}, x \rightarrow z$ dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_2 \\ z_2 = \alpha x_2 + x_3 \\ z_3 = x_1 \end{array} \right. \quad (5.4.2)$$

Por consiguiente, debe diseñarse el observador adaptable para el sistema ($\dot{z} = f(z, \alpha)$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_3 + z_1 z_3 + u \\ \dot{z}_3 = z_1 \\ y_m = z_1 \end{array} \right. \quad (5.4.3)$$

Definiendo $\theta := \alpha$, el sistema (5.4.3) queda expresado en la forma (4.2.13), donde

$$\begin{aligned} A(u, y_m) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (y_m - 1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \varphi(u, y_m) &= \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ y_m \end{bmatrix} \\ \Phi(u, y_m) &= \begin{bmatrix} -y_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Entonces, diseñamos el observador adaptable de la forma (5.2.2), mediante el cual se obtiene el vector de estados estimados \hat{z} y el parámetro estimado $\hat{\alpha}$ a partir de la salida medida y_m . Utilizando la transformación Q^{-1} dada por

$$\begin{cases} x_1 = z_3 \\ x_2 = z_1 \\ x_3 = z_2 - \alpha z_1 \end{cases} \quad (5.4.5)$$

obtenemos el vector de estados estimados \hat{x} y el parámetro estimado $\hat{\alpha}$, los cuales están disponibles para el diseño de la ley de control.

Por otra parte, es evidente que el sistema (5.4.1), el cual es de grado relativo $\rho = n$, tiene la forma (4.3.1), donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.6)$$

Entonces la ley de control u que suprime el caos en el sistema (5.4.1), mediante linealización exacta por retroalimentación de estados, es calculada por (4.3.8), entonces está dada por la expresión

$$u = \alpha x_3 + x_1 - x_1 x_2 + v \quad (5.4.7)$$

Luego, el control auxiliar v puede asignar la dinámica deseada al sistema linealizado resultante. Es decir, si el objetivo es estabilizar en el origen al sistema (5.4.1), la ley de control auxiliar está dada por (4.3.11)

$$v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 \quad (5.4.8)$$

Ahora, si el objetivo es que la salida y del sistema (5.4.1) siga a una señal de referencia deseada y_r , la ley de control auxiliar está dada por (4.3.10)

$$v = -k_1(x_1 - y_r) - k_2(x_2 - \dot{y}_r) - k_3(x_3 - \ddot{y}_r) + y_r^{(3)} \quad (5.4.9)$$

Ya que se ha supuesto que no todos los estados son medibles para ley de control y el parámetro se considera desconocido, entonces son sustituidos, por sus valores estimados proporcionados

por el observador, en la ley de control linealizante:

$$u = \hat{\alpha}\hat{x}_3 + \hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_2 + v \quad (5.4.10)$$

en la ley de control auxiliar estabilizante en el origen:

$$v = -k_1\hat{x}_1 - k_2\hat{x}_2 - k_3\hat{x}_3 \quad (5.4.11)$$

y en la ley de control auxiliar para seguimiento de la salida y a una señal de referencia y_r :

$$v = -k_1(\hat{x}_1 - y_r) - k_2(\hat{x}_2 - \dot{y}_r) - k_3(\hat{x}_3 - \ddot{y}_r) + y_r^{(3)} \quad (5.4.12)$$

En conclusión, el esquema controlador-observador dado por las ecuaciones (5.2.2), (5.4.4), (5.4.5), (5.4.10), y la ecuación (5.4.11) o (5.4.12), permite suprimir caos y asignar dinámicas deseadas al sistema (5.4.1), disponiendo solamente de la salida y_m .

5.4.2 Resultados en simulación

Con el propósito de ilustrar la eficiencia del esquema de control-observador en este caso particular, se presentan a continuación los resultados obtenidos mediante simulaciones en MATLAB.

Los valores numéricos utilizados para las simulaciones fueron:

- Las condiciones iniciales del vector de estado para el sistema (5.4.1) fueron arbitrariamente: $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 1$.
- El parámetro fue elegido constante y dentro del rango caótico con un valor $\alpha = 2.02$.
- Las condiciones iniciales arbitrarias para el observador adaptable (5.2.2)-(5.4.4): $\hat{z}_1(0) = -5$, $\hat{z}_2(0) = 1$, $\hat{z}_3(0) = 5$, $\hat{\alpha}(0) = 0$.
- $S_z(0) = I$, $S_\theta(0) = I$, $\Lambda(0) = [10 \ 10 \ \dots \ 10]$ con dimensiones apropiadas para (5.2.2)-(5.4.4).

- Ganancias positivas arbitrarias para (5.2.2): $\rho_z = \rho_\theta = 10$.
- Las constantes k_i del polinomio $s^3 + k_3s^2 + k_2s + k_1$, para las ecuaciones (5.4.11) y (5.4.12), fueron elegidas como $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ y $k_3 = 3$, colocando las raíces del polinomio en $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ y $s_3 = -1$, con el fin de que fuera Hurwitz y que no tuviera modos oscilantes (raíces sin parte imaginaria).

1. Estimación de estados y parámetro

En un primer caso, se considera que no se aplica ninguna entrada de control, es decir, $u(t) \equiv 0$, $\forall t \geq 0$. En consecuencia, sólo se estiman los valores de cada uno de los estados y el valor del parámetro α , sin realizar acciones de control, lo que permite realizar la estimación del sistema (5.4.1) en comportamiento caótico.

La Figura 5.2 muestra el valor del parámetro α con respecto al tiempo y su estimado $\hat{\alpha}$.

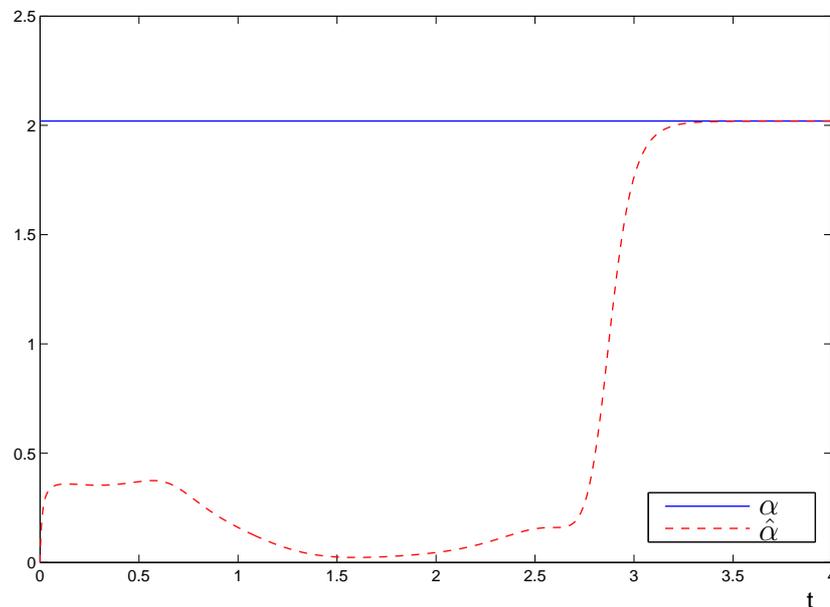


Figura 5.2: Parámetro α y su estimado $\hat{\alpha}$ vs t , caso 1.

Las Figuras 5.3 a 5.5 muestran la evolución caótica de los tres estados del sistema y sus estimados.

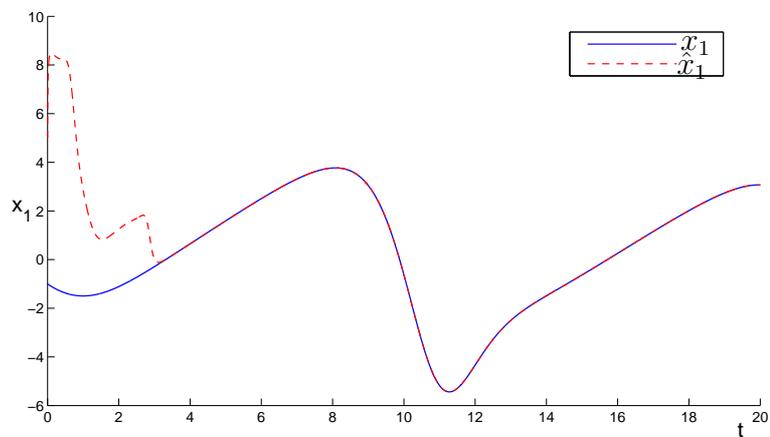


Figura 5.3: Estado x_1 y su estimado \hat{x}_1 vs t , caso 1.

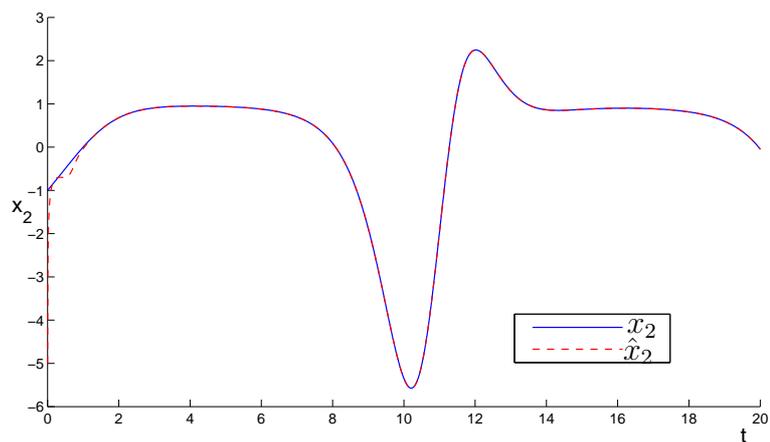


Figura 5.4: Estado x_2 y su estimado \hat{x}_2 vs t , caso 1.

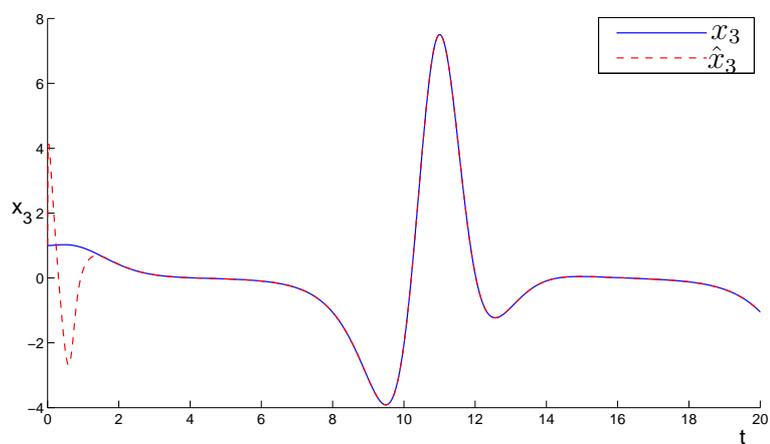


Figura 5.5: Estado x_3 y su estimado \hat{x}_3 vs t , caso 1.

La Figura 5.6 muestra el error de estimación del parámetro α , y los errores de estimación e_{x_1} , e_{x_2} , y e_{x_3} , correspondientes a las variables de estado x_1 , x_2 , y x_3 , respectivamente.

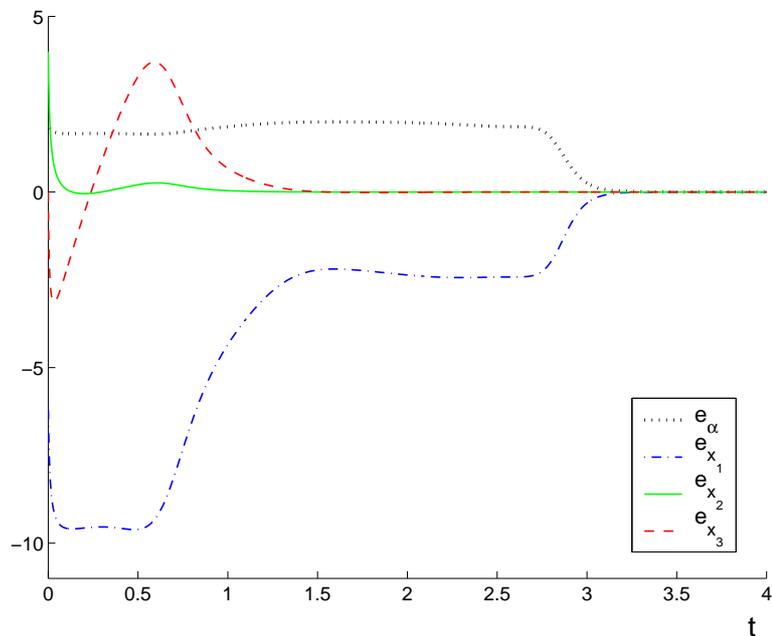


Figura 5.6: Errores de estimación del parámetro α y de los estados vs t , caso 1.

2. Supresión de caos y estabilización en el origen

En este caso, se aplica la entrada de control por retroalimentación de estados u , dada por (5.4.10)-(5.4.11), al sistema (5.4.1) que permite suprimir su evolución caótica y además estabilizarlo en el origen, a través de los valores $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{\alpha}$ proporcionados por el observador adaptable. El control u fue aplicado a partir de $t = 25\text{seg}$ para mostrar la diferencia entre las trayectorias de estado libres ($u(t) = 0, 0 \leq t < 25\text{seg}$) y las trayectorias de estado bajo la acción de control. La Figura 5.7 muestra el valor del parámetro α con respecto al tiempo y su estimado $\hat{\alpha}$.

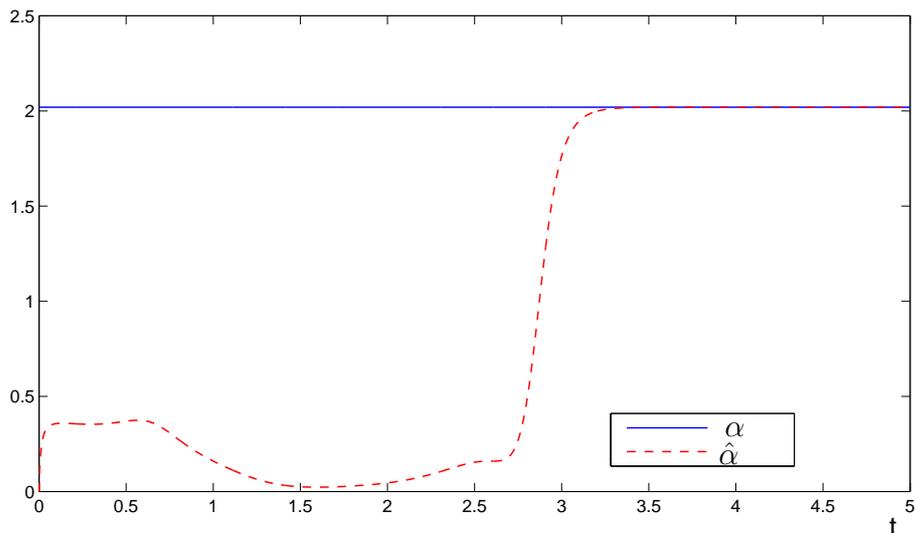


Figura 5.7: Parámetro α y su estimado $\hat{\alpha}$ vs tiempo t , caso 2.

La Figura 5.8 muestra los errores de estimación del parámetro α y de las variables de estado. Las Figuras 5.9 a 5.11 muestran la supresión de la dinámica caótica de los tres estados y la

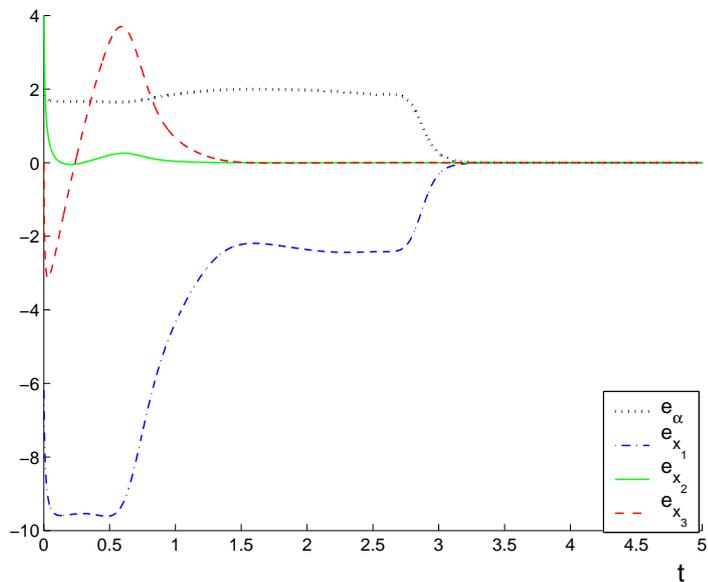


Figura 5.8: Errores de estimación del parámetro α y de los estados vs tiempo t , caso 2.

estabilización del sistema en $x = [0, 0, 0]^T$, por la acción de control para $t \geq 25\text{seg}$. La Figura 5.12 es un espacio de fase en que se ilustra la estabilización del sistema en el origen.

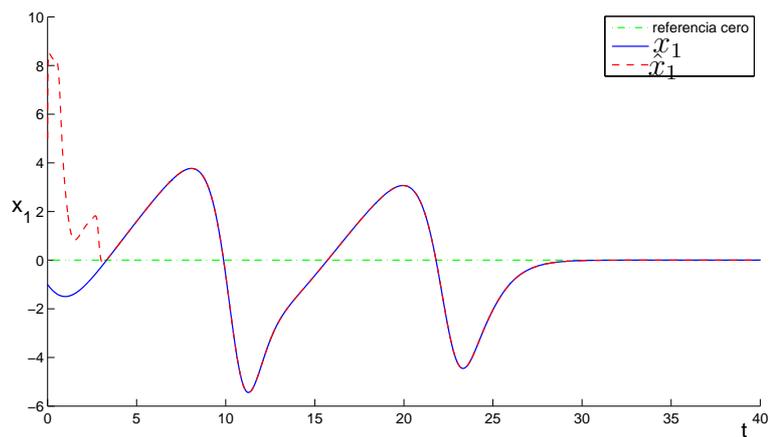


Figura 5.9: Estado x_1 vs tiempo t (estabilizado), caso 2.

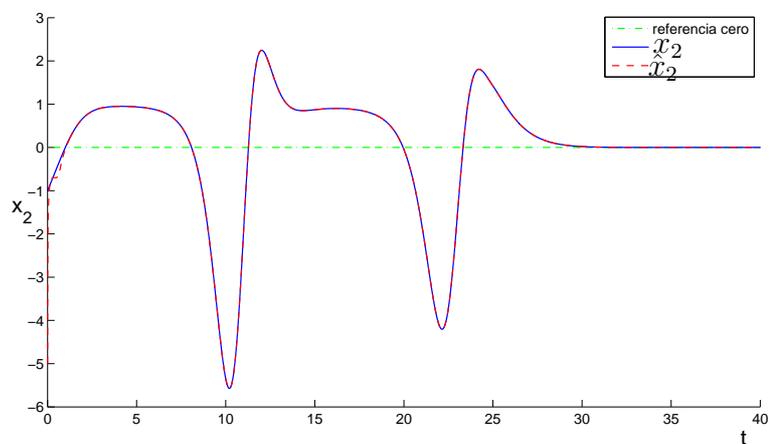


Figura 5.10: Estado x_2 vs tiempo t (estabilizado), caso 2.

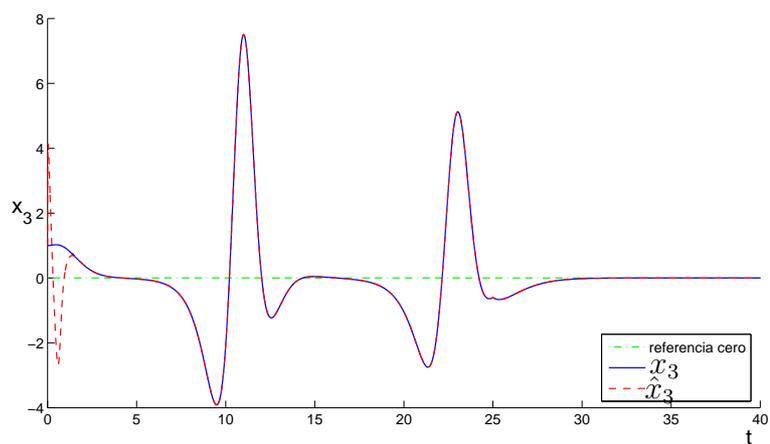


Figura 5.11: Estado x_3 vs tiempo t (estabilizado), caso 2.

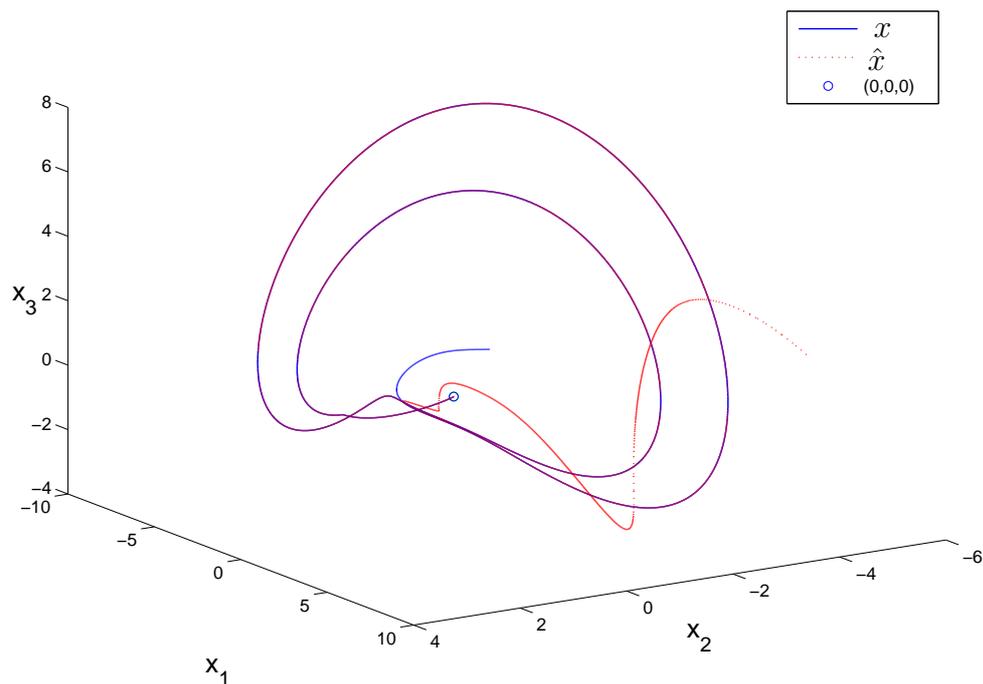


Figura 5.12: Evolución del sistema estabilizado en el origen del espacio de fase, caso 2.

La Figura 5.13 muestra la señal de control u dada por (5.4.10)-(5.4.11), aplicada en $t \geq 25$.

Como es claro, los errores de estimación tienden hacia cero mostrando con ello el buen desempeño del observador. El sistema (5.4.1) es estabilizado asintóticamente en el origen al aplicar la ley de control (5.4.10)-(5.4.11) para $t \geq 25$. Vale la pena mencionar que es necesario estimar el parámetro desconocido antes de aplicar la ley de control para garantizar la condición de excitación persistente (Suposición 4.2.1) (considerando $\vartheta := (u, y_m)$ como la excitación persistente), de otro modo la estimación del parámetro podría ser falsa.

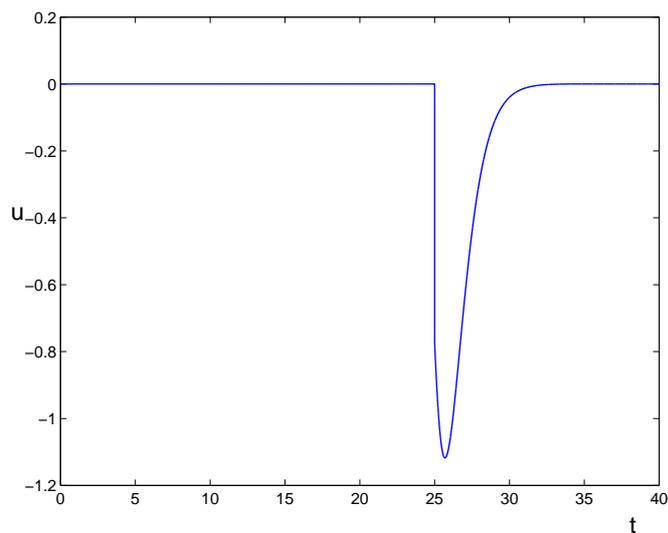


Figura 5.13: Señal de control u (aplicada en $t \geq 25$) vs tiempo t , caso 2.

3. Supresión de caos y seguimiento a una señal de referencia

Ahora, se aplica la entrada de control por retroalimentación de estados u , dada por (5.4.10)-(5.4.12), al sistema (5.4.1) para suprimir su evolución caótica y además que la salida y siga a una señal de referencia periódica dada por $y_r = \text{sen}(t)$, a partir de los valores $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{\alpha}$ proporcionados por el observador adaptable. El control u es aplicado también para $t \geq 25$. La Figura 5.14 muestra el valor del parámetro α con respecto al tiempo y su estimado $\hat{\alpha}$.

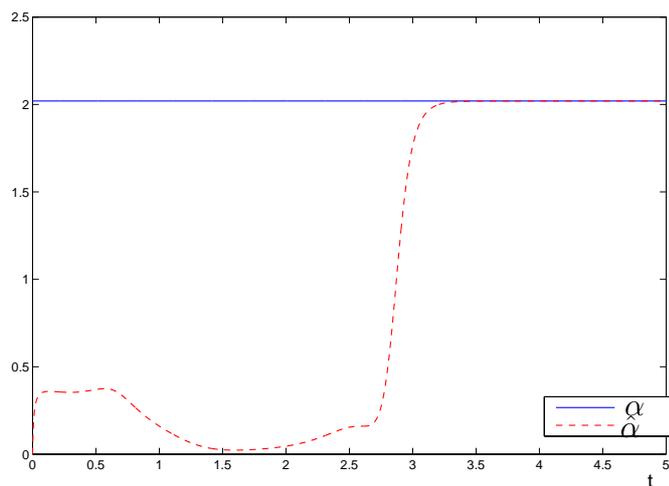


Figura 5.14: Parámetro α y su estimado $\hat{\alpha}$ vs tiempo t , caso 3.

La Figura 5.15 muestra los errores de estimación del parámetro α , y de las variables de estado.

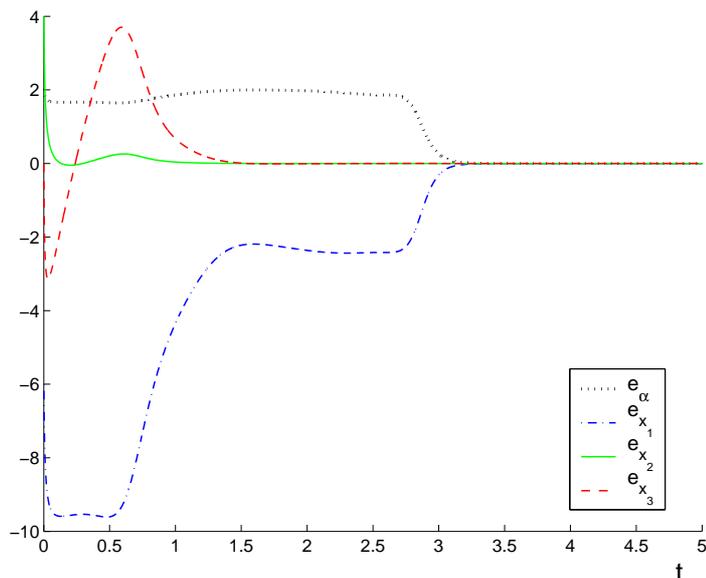


Figura 5.15: Errores de estimación del parámetro α (línea continua) y de los estados (líneas punteadas) vs tiempo t , caso 3.

Las Figuras 5.16 a 5.18 muestran la supresión de la dinámica caótica de los tres estados del sistema, y el seguimiento de la salida y a la señal de referencia y_r , por la acción de control u para $t \geq 25$. El tiempo que tarda el sistema en seguir a la señal de referencia depende de la elección de las constantes k_i del control auxiliar, puesto que mediante estas constantes se realiza la asignación de polos en el sistema en lazo cerrado. En la Figura 5.19 se muestra la evolución del sistema en el espacio de fase.

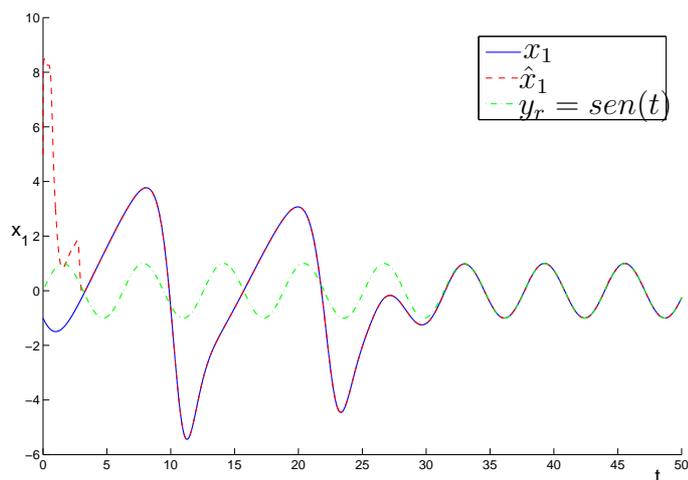


Figura 5.16: Estado x_1 y señal de referencia y_r vs tiempo t , caso 3.

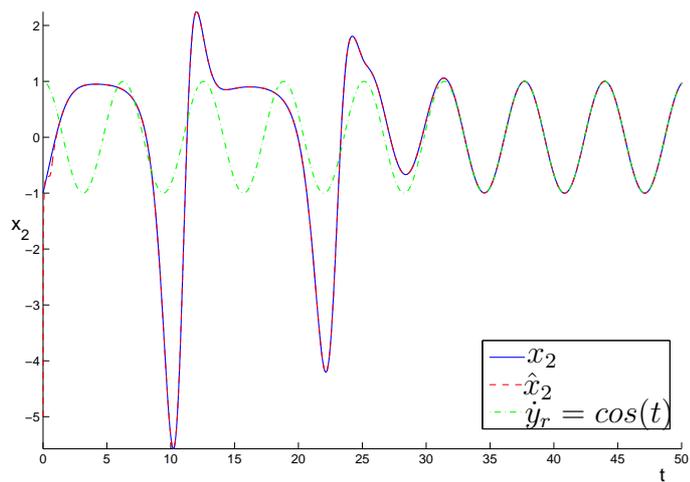


Figura 5.17: Estado x_2 y primer derivada de la referencia \dot{y}_r vs tiempo t , caso 3.

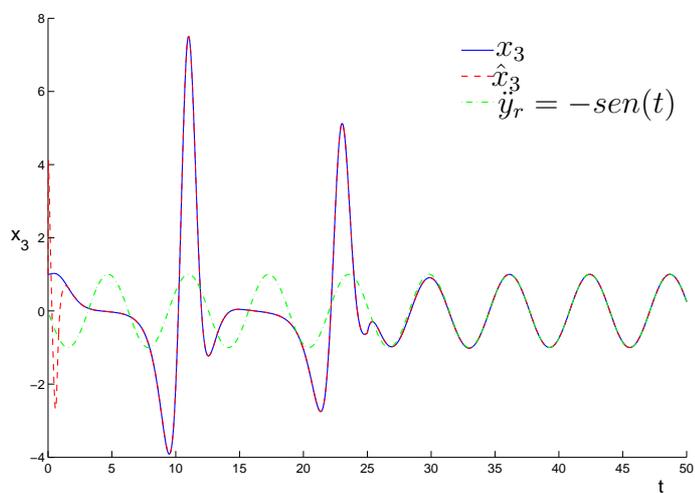


Figura 5.18: Estado x_3 y segunda derivada de la referencia \ddot{y}_r vs tiempo t , caso 3.

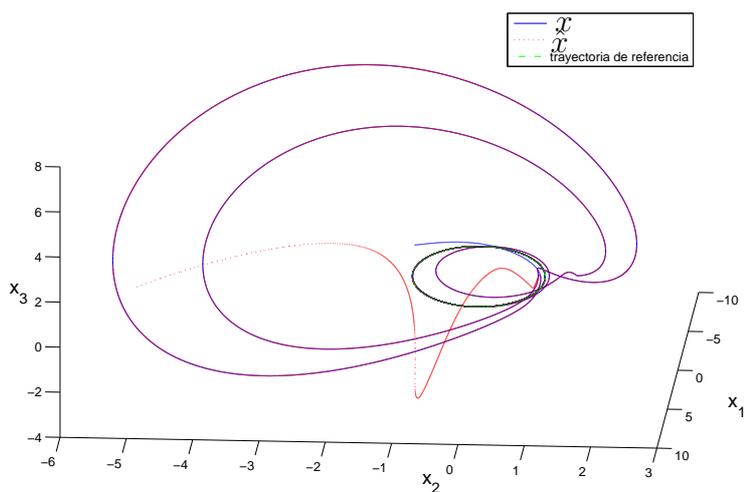


Figura 5.19: Evolución del sistema en seguimiento en el espacio de fase, caso 3.

La Figura 5.20 muestra la señal de control u dada por (5.4.10)-(5.4.11), aplicada en $t \geq 25$.

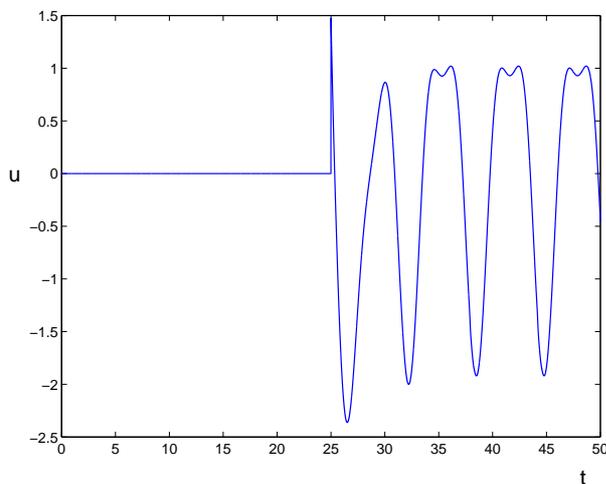


Figura 5.20: Señal de control u (aplicada en $t \geq 25$ seg) vs tiempo t , caso 3.

Los errores de estimación tienden hacia cero mostrando con ello una buena estimación y el buen desempeño del observador. La salida y sigue adecuadamente a la señal $y_r = \text{sen}(t)$ del sistema (5.4.1) al aplicar la ley de control (5.4.10)-(5.4.12) para $t \geq 25$ seg. Como ya se ha mencionado, este esquema funciona siempre y cuando se cumplan las hipótesis establecidas, es decir, se consideró que no se llevará el sistema a algún subespacio en el cual $x_2 = 1$, puesto que ahí se pierde observabilidad. Además, se consideró que el sistema tiene grado relativo pleno, por lo cual no se han considerado sistemas de fase no mínima. Por otro lado, es necesario considerar que la rapidez de convergencia del observador depende de los parámetros de ganancia ρ_z y ρ_θ , mientras que la rapidez del controlador se ajusta mediante las ganancias k_i del control auxiliar v , y es recomendable aplicar la acción del control después que se inicie la estimación para asegurar que el observador converja. También es importante cuidar que el ruido de medición o alguna perturbación en el sistema no afecte la estimación realizada por el observador, puesto que esto provocaría una acción de control con estados retroalimentados falsos debidos a una mala estimación.

5.5 Conclusiones de Capítulo

En este capítulo, se presentó una estrategia de control que tiene su sustento en un enfoque de linealización exacta, y que en particular permite la supresión de la dinámica de caos en los sistemas clase P. Mediante este enfoque de control, es posible imponer una dinámica deseada a esta clase de sistemas, esto es, es posible estabilizar éstos sistemas en un punto del espacio de estados, así como lograr que una variable de salida siga alguna señal de referencia deseada.

Este esquema de control está basado en observación adaptable, es decir, en primer lugar es diseñar un observador que proporciona valores estimados tanto de los estados no medidos como del parámetro con incertidumbre del sistema en cuestión, luego es diseñada la ley de control ya mencionada que permite la eliminación de la dinámica caótica en el sistema, y que además, logra llevar el sistema linealizado a los objetivos de control especificados.

Además, se presentó un análisis de lazo cerrado para una clase de sistema no lineales afines en el estado, clase en la cual pueden ser mapeados los sistemas clase P, utilizando el enfoque de control por retroalimentación de estados junto con el observador adaptable, asegurando la estabilidad del sistema completo.

Por último se ilustra la implementación del esquema de controlador basado en el observador adaptable mediante un ejemplo, en el que exitosamente se ha logrado suprimir la dinámica de caos a un sistema clase P, también se logró estabilizarlo en el origen, y además fue posible que una variable de salida de dicho sistema siguiera a una señal de referencia periódica. Estos resultados fueron presentados en simulaciones.

Enseguida se presentarán resultados experimentales obtenidos de la implementación física del esquema.

Capítulo 6

Resultados experimentales

6.1 Introducción

En este capítulo son corroborados experimentalmente los resultados teóricos mediante la implementación de un circuito caótico. El circuito corresponde a una subclase de los sistemas dinámicos clase P, y los resultados pueden extenderse de igual manera para los sistemas clase P incluyendo funciones continuas, no diferenciables (i.e., una subclase de los sistemas Lur'e). Estos experimentos se llevaron a cabo en los laboratorios de la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT). La implementación del esquema controlador-observador adaptable se realiza mediante un equipo de control I/O *dSPACE*. Las características técnicas principales del equipo de control *dSPACE* se encuentran en el Apéndice B.3. Primero se explica la manera en que se implementó el sistema caótico en cuestión. Posteriormente se presentan los resultados experimentales obtenidos. Finalmente, se dan algunas conclusiones.

6.2 Implementación Física de un Sistema Clase P

Aquí se describen algunos detalles técnicos acerca de la implementación electrónica del sistema (5.4.1) con la finalidad de verificar experimentalmente el desempeño del esquema controlador-observador adaptable.

El circuito (5.4.1) se construye por medio de Amplificadores Operacionales (Op-Amps) modelo TL084CN y TL082CN, un multiplicador analógico modelo AD633JN, y algunos componentes pasivos (potenciómetros y capacitores), mediante los siguientes arreglos (véase Apéndice B.1):

1. Una configuración de sumador inversor con ganancia unitaria.
2. Tres configuraciones de integradores con ganancia variable.
3. Una configuración inversor de ganancia unitaria.

El diagrama esquemático del circuito está dado en la Figura 6.1. El dispositivo que permite ajustar el parámetro alfa es el potenciómetro R4, el cual toma el valor de 4.9 M Ω para un caso en que (5.4.1) exhibe dinámica caótica. La Figura 6.1 muestra el diagrama del circuito utilizado para verificar el esquema propuesto. El modelo matemático que describe la dinámica de este circuito (véase Apéndice B.2) está dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_3 \\ \dot{x}_3 &= -c\alpha x_3 - dx_1 + ex_1x_2 + u \end{cases} \quad (6.2.1)$$

donde los parámetros del modelo están dados por $a = \frac{1}{R_8C_3}$, $b = \frac{R_6}{R_4R_5R_7C_1C_2}$, $c = \frac{R_2R_6}{R_3R_5}$, $d = \frac{R_2}{R_1}$, $e = \frac{R_2(R_9+R_{10})}{R_1}$, $\alpha = \frac{1}{R_4C_1}$, y x_1, x_2, x_3 son voltajes. Este modelo corresponde exactamente a (5.4.1) para $a = b = c = d = e = 1$; sin embargo, éstos coeficientes pueden ser seleccionados mediante las ganancias de los integradores de tal manera que el sistema (6.2.1) corresponde con el mismo comportamiento cualitativo que el sistema (5.4.1), pero escalado en el tiempo, esto es también, un escalamiento en frecuencia con respecto al sistema (5.4.1).

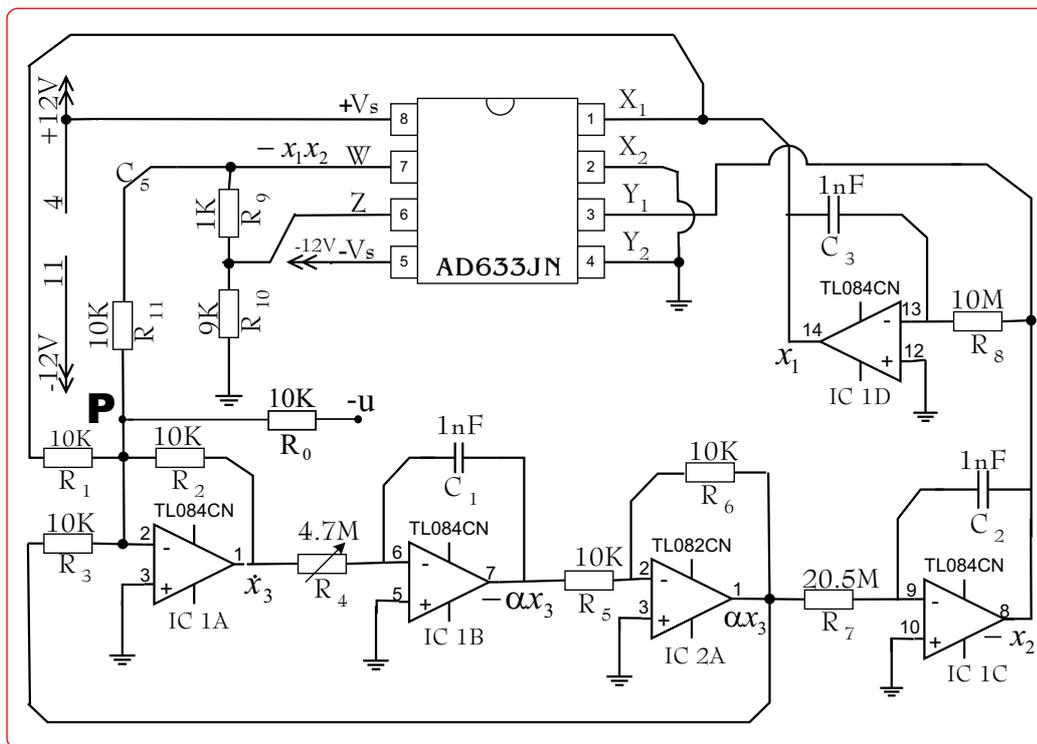


Figura 6.1: Diagrama esquemático del circuito para implementación del sistema (5.4.1).

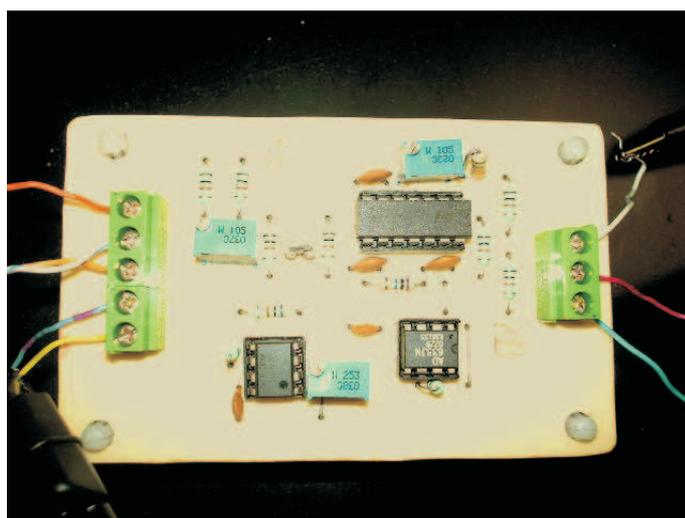


Figura 6.2: Circuito correspondiente al sistema (5.4.1).

Tabla 6.2.1: Valores de los parámetros del circuito de la Figura 6.2

Parámetro	Valor experimental
R_1	9.93 k Ω
R_2	9.94 k Ω
R_3	9.78 k Ω
R_4	4-5 M Ω
R_5	9.97 k Ω
R_6	9.91 k Ω
R_7	20-21 M Ω
R_8	10.3 M Ω
R_9	960 Ω
R_{10}	8.63 k Ω
R_{11}	8 k Ω
C_1	1 nF
C_2	1 nF
C_3	1 nF

Aunque teóricamente, los valores de los parámetros del sistema (6.2.1) corresponden a las ganancias en las configuraciones de los Op-Amp en la Figura 6.1; en la práctica, el circuito de la Figura 6.2 corresponde a los valores dados en la Tabla 6.2.1.

Las Figuras 6.3 y 6.4 muestran el comportamiento del circuito de la Figura, para diferentes valores del parámetro α . Estas gráficas fueron realizadas con un osciloscopio Tektronix's modelo TDS3034B. La Figura 6.3 muestra la dinámica para el caso en que $R_4 = 4.9M\Omega$ esto es equivalente a un valor de $\alpha = 2.004$. Esta gráfica muestra el retrato de fase en el plano de los estados $x_1 - x_2$, puede verse una órbita periódica del sistema (5.4.1).

La Figura 6.4 muestra la dinámica para el caso en que $R_4 = 4.71M\Omega$, esto es equivalente a un valor de $\alpha = 2.12$. En esta gráfica puede verse el atractor generado por la dinámica caótica en el circuito de la Figura 6.2, de manera similar a las simulaciones del sistema (5.4.1).

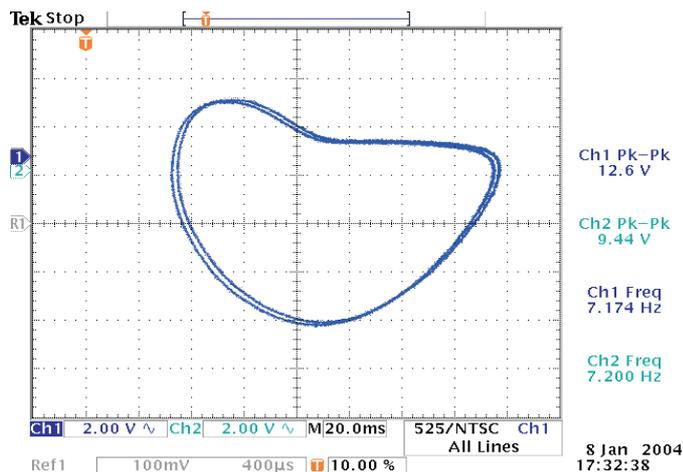


Figura 6.3: Plano $x_1 - x_2$ para $R_4 = 4.9M\Omega$.

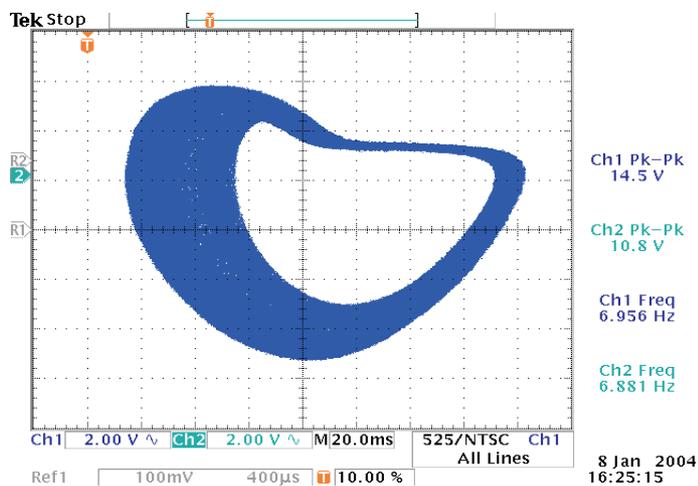


Figura 6.4: Plano $x_1 - x_2$ para $R_4 = 4.71M\Omega$

6.3 Resultados de la implementación física del esquema controlador-observador adaptable

Ahora se presentan los resultados experimentales obtenidos al utilizar el esquema propuesto controlador-observador. En las Figuras 6.5 a 6.7, se muestran los resultados experimentales en lazo abierto utilizando solamente el observador adaptable. Se obtuvieron estos resultados al escoger los siguientes parámetros de diseño para el observador, $\rho_z = 80$ y $\rho_\theta = 1$. A partir de

estas figuras, se puede ver el buen desempeño obtenido al utilizar el observador propuesto. Sin embargo, el error de estimación no es cero, pero si suficientemente pequeño tomando en cuenta el ruido presente en la medición de las variables.

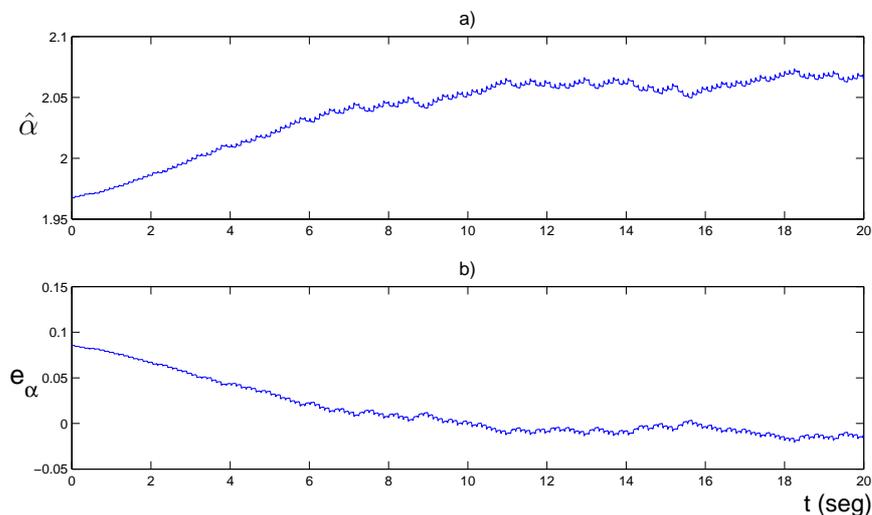


Figura 6.5: a) Estimación del parámetro ($\alpha = 2.053$) y b) Error de estimación del parámetro α del sistema (6.2.1).

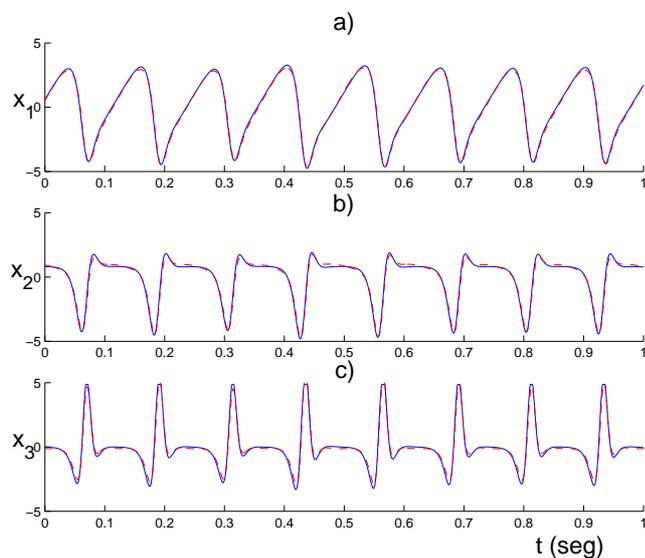


Figura 6.6: Estimación de los Estados (línea punteada: Estimados): a) Estado x_1 , b) Estado x_2 , c) Estado x_3 .

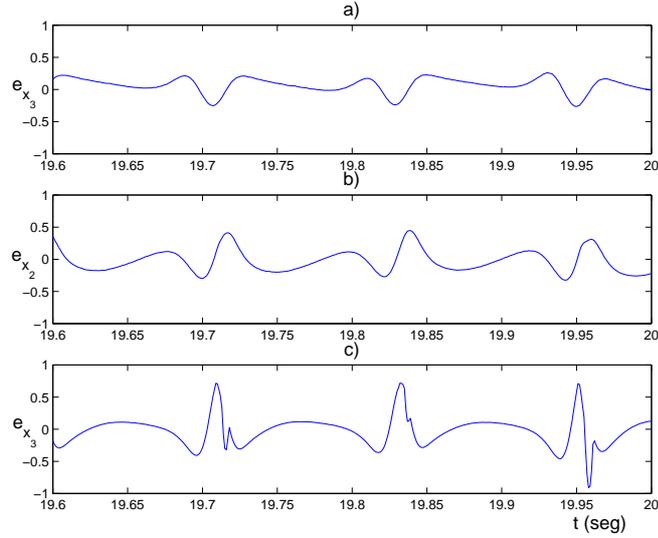


Figura 6.7: Errores de estimación de los estados: a) Error del estado x_1 , b) Error del estado x_2 , c) Error del estado x_3 .

Con la finalidad de medir el error de estimación, definamos el error de estimación del estado promedio como

$$e_x = \frac{1}{(t_f - t_0)} \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{e_{x_1}^2 + e_{x_2}^2 + e_{x_3}^2} dt \quad (6.3.1)$$

y el error de estimación promedio del parámetro del sistema como

$$e_\alpha = \frac{1}{(t_f - t_0)} \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{(\hat{\alpha} - \alpha)^2} dt \quad (6.3.2)$$

donde t_0 es el tiempo inicial y t_f el tiempo final del intervalo $t \in [t_0, t_f]$ en que es estimado el vector de estados x y el parámetro α , $e_{x_1} = \hat{x}_1 - x_1$, $e_{x_2} = \hat{x}_2 - x_2$, y $e_{x_3} = \hat{x}_3 - x_3$. Así, los errores fueron calculados para una colección de experimentos, los resultados se muestran en la Tabla 6.3.2. Por otro lado, con el fin de estabilizar en el origen al circuito de la Figura 6.2 (implementación física del sistema (5.4.1)), aplicamos la ley de control u dada por las expresiones (5.4.10)-(5.4.11), esto es

$$u = \hat{\alpha}\hat{x}_3 + \hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - k_1\hat{x}_1 - k_2\hat{x}_2 - k_3\hat{x}_3 ,$$

donde los valores estimados para los estados \hat{x} y el parámetro $\hat{\alpha}$ fueron tomados del observador adaptable, para $\rho_z = 80$ y $\rho_\theta = 1$.

Tabla 6.3.2: Errores de estimación para el sistema (6.2.1)

Gain ρ_z	e_x	e_α
1	6.49×10^5	74.3282
10	24.724	1.6960
30	0.7318	0.3102
50	0.3267	0.0619
70	0.2323	0.0388
80	0.2833	0.0226
100	0.2856	0.0305
200	0.2858	0.1702
500	0.2859	0.2339

La Figura 6.8 muestra la acción de control aplicada al circuito correspondiente al sistema caótico (6.2.1). La Figura 6.9 muestra la supresión de caos en el circuito, bajo la acción de control aplicada en tiempo $t = 14.2$, y ya que u es un control estabilizante en el origen, los estados del sistema convergen a cero. Además el parámetro fue estimado adecuadamente, el error de estimación del parámetro no converge a cero, sin embargo es suficientemente pequeño para asegurar una buena estimación.

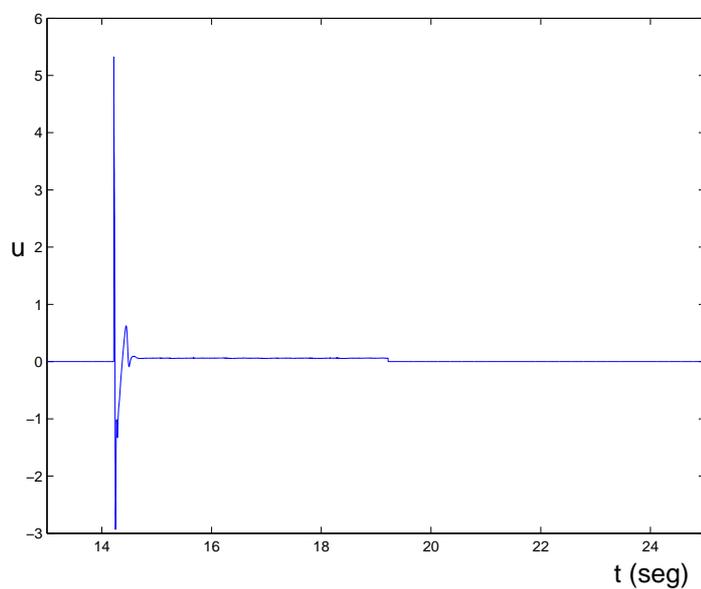


Figura 6.8: Señal de control aplicada al circuito.

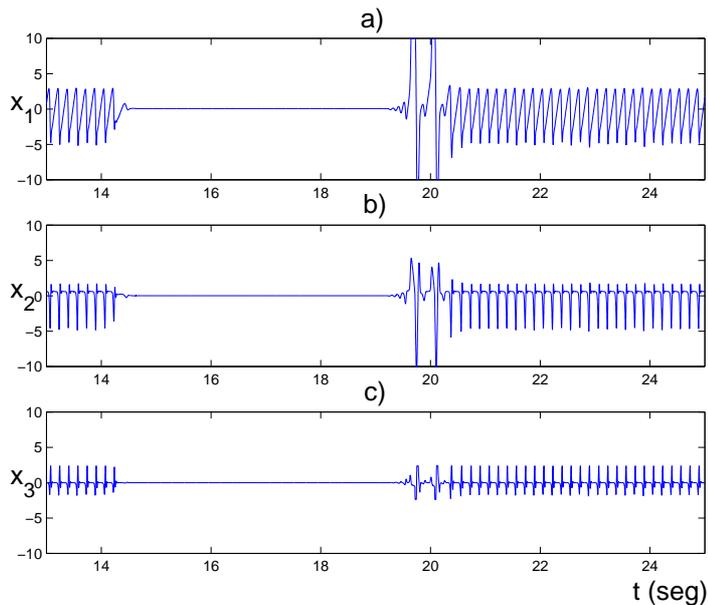


Figura 6.9: Estados del circuito, aplicando control: a) Estado x_1 , b) Estado x_2 , c) Estado x_3 .

En la Figura 6.10 se muestra la estimación del parámetro y el error de estimación. Una vez que la acción de control desaparece ($u = 0$), el sistema vuelve a su comportamiento caótico, y el observador es reinicializado con el fin de estimar los estados y parámetro actuales, el cual converge un tiempo después.

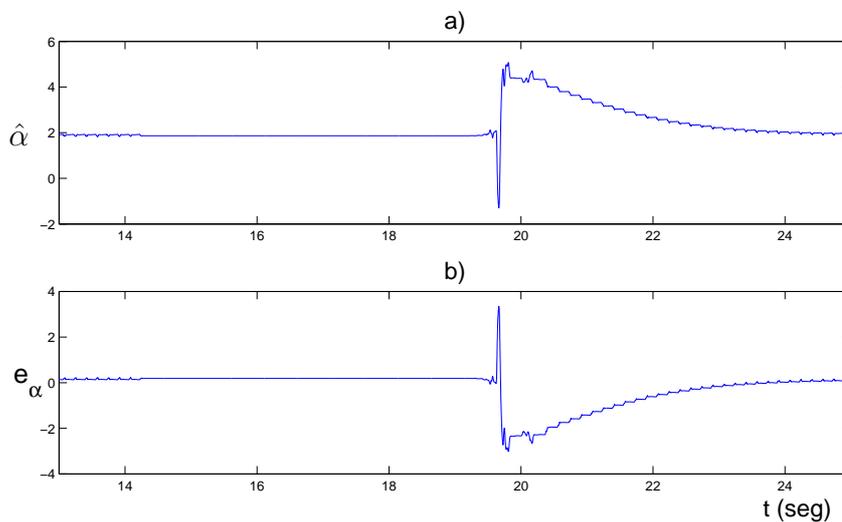


Figura 6.10: Estimación del parámetro del circuito: a) Estimación del parámetro ($\alpha = 2.053$), b) Error de estimación del parámetro.

6.4 Conclusiones de Capítulo

En este capítulo se presentaron resultados experimentales obtenidos al evaluar el desempeño del esquema de control propuesto, el cual fue implementado para un circuito electrónico que representa a un sistema caótico clase P.

Se han mostrado los índices en los cuales el observador adaptable estima los valores de los estados no medidos y del parámetro desconocido del circuito caótico. Para lo cual, aunque si bien es cierto que los errores de estimación no convergen a cero, sí son suficientemente pequeños para garantizar una estimación adecuada.

Además, se utilizó una ley de control para linealización exacta por retroalimentación de estados que permite también estabilización. Al aplicar esta ley de control junto con el observador adaptable se logró suprimir caos, y además, estabilizar en el origen a un circuito caótico correspondiente a los sistemas clase P.

Por estos resultados, consideramos que el esquema de control basado en observación adaptable es eficaz para lograr los objetivos de control planteados, en particular la supresión de caos en los sistemas clase P.

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajos futuros

Este estudio muestra la eficacia de la estrategia de control considerada para la supresión de caos en una clase de sistemas caóticos de dimensión finita conocida como clase P. Puesto que dicha estrategia consta de un observador adaptable y un controlador linealizante por retroalimentación de estados, se han mostrado condiciones suficientes de convergencia asintótica del observador. Lo cual es válido bajo la suposición de que los sistemas clase P disponen, al menos, de una variable para su medición, y que sólo se desconoce el parámetro alfa, el cual se supone constante. Además, es considerado que existe algún difeomorfismo que transforma cada uno de los sistemas caóticos clase P en la estructura afín en los estados y parámetro. La condición de excitación persistente, para la convergencia del observador adaptable, es tratada considerando que el sistema es autoexcitado con la propia dinámica caótica de la variable de salida. La convergencia y eficacia del observador adaptable no son garantizadas en falta de alguna de las condiciones indicadas anteriormente, tal como ausencia de la condición de excitación persistente, o en la falta de información del valor de los parámetros que aquí se supusieron conocidos, por citar algunos.

En cuanto al controlador, su desempeño está en función de la calidad de estimación de los estados y parámetro del sistema. Además, en este trabajo se ha considerado que los sistemas caóticos clase P tienen grado relativo pleno. Bajo estas condiciones, se ha mostrado que el esquema completo controlador-observador en lazo cerrado es globalmente asintóticamente estable. Las simulaciones en software y los resultados experimentales muestran un buen

desempeño obtenido para el sistema estudiado de clase P en lazo cerrado. Sin embargo, la implementación física del controlador depende en gran manera de la dinámica de la señal de referencia elegida, puesto que, ésta podría requerir que la señal de control y/o los estados excedan sus cotas físicas de amplitud y/o frecuencia.

Con respecto a las contribuciones en este trabajo, es posible mencionar que se propone una solución al problema de supresión de caos en los sistemas clase P. Además, para estabilización en el origen y el seguimiento a una señal de referencia mediante leyes de control no lineal por retroalimentación de estados. Por otro lado, en cuanto a trabajos futuros relacionados con la estrategia de control propuesta para la clase de sistemas caóticos estudiados, es posible mencionar lo siguiente:

En el diseño del esquema controlador-observador adaptable no se consideraron restricciones de los estados ni de la señal de control, sin embargo en la práctica, tanto los estados como la entrada de un sistema tienen restricciones físicas, tales como cotas en amplitud y/o en frecuencia.

Por otra parte, en este estudio se hizo la suposición de que la planta sólo tenía un parámetro desconocido. Sin embargo, no siempre es posible satisfacer esta suposición puesto que los sistemas están formados por elementos físicos cuyo valor está sujeto a incertidumbres.

Entonces, se pretende incluir, en estudios posteriores, el caso en el que hay restricciones en amplitud y frecuencia para las variables de estados y entrada, con la finalidad de garantizar la aplicabilidad física de las estrategias de control, al tomar en cuenta las limitaciones de la planta y del controlador. Adicionalmente, se considerará la presencia, y relevancia, de incertidumbre en el modelo de los sistemas a considerar, con el fin de incluir características en el esquema de control que disminuyan o eliminen su vulnerabilidad ante esto. Además de estas situaciones, seguramente hay más casos por considerar en el estudio de control de caos, los cuales serán abordados en la medida en que se tenga conocimiento de ellos, y conforme sean relevantes para los propósitos de los trabajos de investigación futuros.

Apéndice A

Bases de geometría diferencial

A.1 Difeomorfismos

Sea p un punto en E^n , el espacio Euclidiano n -dimensional, y U una vecindad de p . Sea $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ un mapeo uno a uno y biyectivo. Si $\varphi(x)$ y $\varphi^{-1}(x)$ son mapeos continuamente diferenciables C^∞ (mapeos suaves), φ es llamado un difeomorfismo. Si $\varphi(x)$ y $\varphi^{-1}(x)$ están definidos en \mathbb{R}^n y son mapeos suaves, φ es llamado un difeomorfismo global.

Ahora considérese un resultado conocido del cálculo que provee condiciones suficientes para que un mapeo sea un difeomorfismo.

Teorema A.1.1. (*Función Inversa*) Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo suave. Si la matriz Jacobiana

$$\frac{d\varphi}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

es no singular en algún punto $p \in U$ entonces existe una vecindad $V \subset U$ de p tal que $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ es un difeomorfismo.

El diferencial de una función suave $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está definida en coordenadas locales como

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n$$

y también es denotado como un vector gradiente fila

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n \right]$$

Dados r funciones suaves $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ en $U \subset \mathbb{R}^n$, el $\text{rango}\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_r\} = r$ en $p \in U$ ($U \in \mathbb{R}^n$)

es equivalente a

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = r$$

para $x = p$ ($\forall x \in U$). El teorema de la función inversa puede también ser enunciado como sigue.

Teorema A.1.2. *Si $\text{rango}\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_n\} = n$ en algún punto $p \in U$, un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces existe una vecindad $V \subset U$ de p tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(V)$ es un difeomorfismo.*

A.2 Campos vectoriales

Sea $\mathcal{C}^\infty(p)$ el conjunto de todas las funciones \mathcal{C}^∞ definidas en U , una vecindad de p . Ellas forman un álgebra sobre el campo \mathbb{R} . Un vector tangente v en p tiene las tres propiedades:

1. mapea $\mathcal{C}^\infty(p)$ en \mathbb{R}^n ;
2. es un operador lineal, esto es, $v(a_1 h_1 + a_2 h_2) = a_1 v(h_1) + a_2 v(h_2)$, $\forall h_i \in \mathcal{C}^\infty(p)$, $a_i \in \mathbb{R}$;
3. satisface la regla de Leibniz $v(h_1 h_2) = v(h_1) h_2 + h_1 v(h_2)$.

Si (U, φ) es una vecindad coordenada y $x_1(p), \dots, x_n(p)$ son coordenadas locales, un vector puede expresarse como

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

con $v_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, las componentes de v con respecto a $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ lo cual es una base para el espacio vectorial sobre \mathbb{R} que consiste de todos los vectores tangentes v en p .

Un campo vectorial f en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función que asigna a cada punto $p \in U$ un vector f_p .

Si (U, φ) es una vecindad coordenada y $x_1(p), \dots, x_n(p), p \in U$, son coordenadas locales, un campo vectorial suave es expresado como

$$f = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

con $f_i \in \mathcal{C}^\infty(p)$ dependientes de las coordenadas locales elegidas. Un campo vectorial puede expresarse como un vector columna

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

Un sistema dinámico es un mapeo $\mathcal{C}^1 \phi_t(p) : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ donde U es un conjunto abierto en un espacio Euclidiano que satisface:

1. $\phi_0(p) = p$
2. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$

con $\phi_t(p)$ mapeando $U \rightarrow U$. Esta definición implica que el mapeo $\phi_t(p)$ tiene un inverso \mathcal{C}^1 $\phi_{-t}(p)$. Un sistema dinámico define un campo vectorial

$$f(p) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(p) \right|_{t=0}$$

el cual es el vector tangente a la curva $t \rightarrow \phi_t(p)$ en $t = 0$. Dados (U, φ) , la curva $t \rightarrow \phi_t(p)$ puede expresarse como $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$ y

$$\begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_n(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Entonces $x_1(t), \dots, x_n(t)$ es la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales $x(0)$ dada por $\dot{x} = f(x)$. Un campo vectorial es completo si las soluciones a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ pueden estar definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

A.3 Derivadas Lie

Si f es un campo vectorial suave en U y h una función suave en U entonces $f(h)$ es la función suave en U definida por

$$f(h)(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) (p).$$

Un campo vectorial puede ser interpretado como un operador que mapea la función h en la función $f(h)$. La función $f(h)$ es llamada la derivada Lie de la función h a lo largo del campo vectorial f ; es usualmente denotado como $L_f h$. Derivadas Lie repetitivas a lo largo del mismo campo vectorial f son denotadas como $L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h)$, $L_f^1 h = L_f h$, $L_f^0 h = h$.

La derivada Lie $L_f h$ de una función suave h a lo largo de un campo vectorial f es también denotado por $\langle dh, f \rangle$. El conjunto de todos los campos vectoriales \mathcal{C}^∞ en U es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sobre $\mathcal{C}^\infty(p)$, i.e.

$$L_{\alpha f_1 + \beta f_2} h = \alpha L_{f_1} h + \beta L_{f_2} h$$

donde $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(p)$.

Apéndice B

Implementación del sistema mediante circuitos electrónicos

B.1 Configuraciones con Amplificadores Operacionales

El primer paso en el diseño del circuito electrónico es representar el sistema (5.4.1) como un diagrama de bloques, ver Figura B.1a, de esta manera es fácil identificar las configuraciones requeridas para reproducir las dinámicas del sistema. La Figura B.1b muestra las configura-

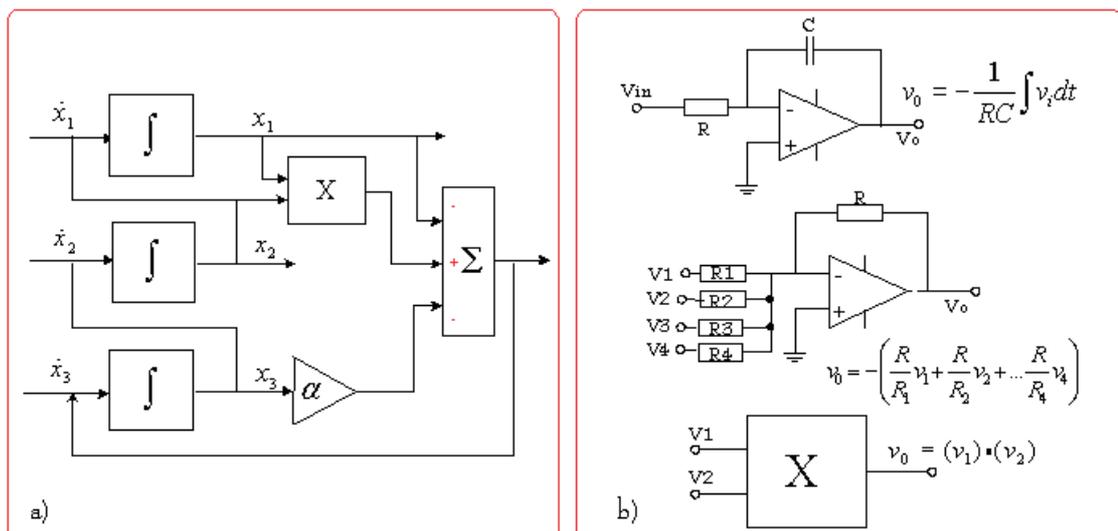


Figura B.1: a) Diagrama de Bloques para sistemas dinámicos. b) Configuraciones integrador sumador utilizando Op-amp.

ciones convencionales Op-amp para realizar operaciones analógicas como suma, integración y

multiplicación. Estas operaciones son requeridas para la implementación del sistema (5.4.1). Luego, es necesario calcular las ganancias de las configuraciones integrador sumador.

B.2 Verificación del Modelo (6.2.1)

Al realizar el análisis del diagrama de la figura 6.1 mediante las leyes de Kirchoff se obtiene lo siguiente:

Aplicando la ley de las corrientes de Kirchoff en el nodo P,

$$\frac{x_1 - 0}{R_1} + \frac{\alpha x_3 - 0}{R_3} - \frac{(x_1 x_2 - 0)}{R_{11}} + \frac{\dot{x}_3 - 0}{R_2} + \frac{-u - 0}{R_0} = 0$$

al despejar \dot{x}_3 se obtiene,

$$\dot{x}_3 = R_2 \left[-\frac{\alpha x_3}{R_3} - \frac{x_1}{R_1} + \frac{x_1 x_2}{R_{11}} + \frac{u}{R_0} \right]$$

El arreglo con los Op-Amp 1B, 2A y 1C, es la versión integral de la ecuación $\dot{x}_2 = \frac{R_4 R_6}{R_5 R_7 C_1 C_2} x_3$, y la configuración en el Op-Amp 1D, es la versión integral de la ecuación $\dot{x}_1 = \frac{1}{R_8 C_3} x_2$.

Entonces, estas ecuaciones generan el modelo en espacio de estados dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 \\ \dot{x}_2 = bx_3 \\ \dot{x}_3 = -c\alpha x_3 - dx_1 + ex_1 x_2 + u \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

donde $a = \frac{1}{R_8 C_3}$, $b = \frac{R_6}{R_4 R_5 R_7 C_1 C_2}$, $c = \frac{R_2 R_6}{R_3 R_5}$, $d = \frac{R_2}{R_1}$, $e = \frac{R_2(R_9 + R_{10})}{R_{11}}$, y $\alpha = \frac{1}{R_4 C_1}$. x_1 , x_2 , y x_3 son voltajes.

B.3 Equipo *dSPACE* para implementación física del esquema controlador-observador adaptable

El equipo de adquisición de datos y control *dSPACE* tiene las siguientes características técnicas. Se utilizó la tarjeta *dSPACE* modelo *DS1104*. Los requerimientos de la CPU mínimos para el correcto funcionamiento de la tarjeta son los siguientes:

- Procesador Pentium II de 450MHz.
- 128MB en RAM.
- El CPU debe ser capaz de alimentar a la tarjeta con los siguientes voltajes: +5V con 2.5A, +12V con 0.3A, -12V con 0.2A.

- Puerto paralelo y un puerto PCI (32 bit, 5V, 33MHz \pm 5%).
- Sistema Operativo *Windows 98*, *Windows Me*, *Windows NT 4.0*, *Windows 2000*, o *Windows XP*.

Los algoritmos de control fueron programados utilizando la version de *SIMULINK* en *MATLAB 6.1*. Los programas diseñados en este software deben ser compilados y convertidos a un formato adecuado para su ejecución en la *dSPACE* y su interfase con el usuario llamada *ControlDesk*. Para que esto pueda ser posible, el programa de *MATLAB SIMULINK* debe cumplir con varios requerimientos, de los cuales los más importantes son:

- Únicamente son permitidos pasos fijos de integración en la simulación del sistema.
- Es necesario que no existan líneas sin conectar.
- Solo se pueden trabajar arreglos numéricos de *MATLAB*.
- No se debe emplear el prefijo *DS_* en ninguna variable.
- No se puede emplear el *SIMULINK Accelerator* en las simulaciones.
- *S-Functions* deben estar codificadas en C.
- No se pueden emplear *M-functions*.

Las entradas y salidas de la tarjeta *dSPACE* tienen también sus límites, los cuales deben ser considerados y que son los que dictan el acondicionamiento que se requerirá hacer a las señales para poder utilizarlas. De entre ellos los más importantes son los siguientes:

- Solo pueden ser empleados, tanto a la salida como a la entrada, voltajes en un rango de -10V a 10V.
- La resistencia de entrada es de 100M Ω .
- La corriente a la salida está en un rango de -5mA y 5mA.
- La máxima velocidad de muestreo es de 50KHz.

Estos requerimientos de la tarjeta obligan a que se lleve a cabo el acondicionamiento de la señal, cuando las aplicaciones exceden el rango de voltaje de entrada y salida de la tarjeta. Para más detalles sobre los requerimientos de la tarjeta *dSPACE* véase [9], [10] y [11].

Apéndice C

Artículo Publicado

Durante el desarrollo de este trabajo se publicó un artículo, el cual fue presentado en el Congreso Anual de la Asociación Mexicana de Control Automático 2004.

Control Basado en Observadores Adaptables para una Clase de Sistemas Caóticos

Angel Rodríguez^{*,1} Jesús De León^{*,2} Ricardo Femat^{**,3}

* F.I.M.E., Universidad Autónoma de Nuevo León

Av. Pedro de Alba S/N Cd. Universitaria, C.P. 66450 San Nicolás de los Garza N.L., México.

** Instituto Potosino de Investigación Científica Y Tecnológica

Camino a la Presa San José 2025 Col. Lomas 4a. Secc. C.P. 78216 San Luis Potosí S.L.P., México.

¹jarl_angel@yahoo.com ²drjleon@hotmail.com ³rfemat@ipicyt.edu.mx

Resumen

En este trabajo se presenta una estrategia de control basada en observación adaptable para sistemas caóticos de dimensión finita de clase P . Primero, se diseña un observador adaptable que permita estimar tanto los estados no medibles como los parámetros desconocidos del sistema. Además, se considera una ley de control no lineal que depende de los estados y parámetros estimados obtenidos del observador. El esquema propuesto de control-observador se aplica en un sistema caótico de la clase P . Se presentan resultados en simulación, donde se muestra la eficiencia del esquema de control-observador propuesto.

obtenidos del esquema control-observador adaptable vía simulaciones.

En este trabajo se ha propuesto la aplicación de los resultados de otros trabajos [4, 5] con la finalidad de atacar este problema para sistemas caóticos clase P desde una perspectiva no lineal y adaptable a diferencia de otros trabajos, tales como [6], en el que se presenta un observador de estado no lineal para una clase de sistemas no lineales que tienen una no linealidad dependiente de la salida, y en el que se emplea una estrategia de control por retroalimentación de estado lineal basado en observadores para estabilizar esta clase de sistemas, la cual incluye los sistemas de Rössler y de Lorenz.

1. Introducción

El estudio de sistemas caóticos ha atraído la atención de muchos investigadores debido a su presencia en diferentes áreas del conocimiento. Además desde el punto de vista de control representa un tema interesante de estudio ya que el caos resulta en algunos casos indeseable debido a la presencia de oscilaciones irregulares que pueden causar daño a los sistemas físicos. Como resultado de ello se han realizado esfuerzos con el fin de resolver problemas para suprimir los efectos debidos a sistemas caóticos [1, 2, 3]. En la mayoría de los trabajos publicados en la literatura sobre control de sistemas caóticos, se asume que se dispone de toda la información de los estados para aplicar alguna estrategia de control, lo cual no es siempre el caso. En muchos sistemas prácticos, solo se dispone de información parcial de los estados. El problema se agudiza cuando, además de no conocer todos los estados, se desconocen algunos parámetros del sistema. Para evitar estas limitaciones, en este trabajo se propone un esquema de control basado en observadores adaptables, es decir, se estudia el problema de control de una clase sistemas caóticos donde parte de la información de los estados y parámetros del sistema no están disponibles. Primero, se propone un observador adaptable para estimar los estados y parámetros desconocidos. Luego, basados en los estados y parámetros estimados, se diseña un control no lineal por retroalimentación de estados para estabilizar los sistemas caóticos clase P . Se presenta un ejemplo donde se muestran los resultados

2. Sistemas caóticos de clase P

J.C. Sprott[7, 8, 9, 10] y J.M. Malasoma[11] encontraron seis sistemas caóticos disipativos de la forma $x^{(3)} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$, cada uno de ellos definidos por una función polinomial constituida por tres monomios y una única no linealidad del tipo cuadrática, estos sistemas presentan comportamiento caótico para varios conjuntos de valores de sus parámetros. Dos sistemas caóticos de este tipo están descritos por:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x - \dot{x}^2 = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x - x\dot{x} = 0 \tag{2}$$

los cuales en una representación en variables de estado ($x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, y $x_3 = \ddot{x}$) están constituidos por cinco monomios en su lado derecho, cuatro de los cinco coeficientes pueden ser ± 1 por normalización de cada una de las tres variables y el tiempo. De esta manera, todos los sistemas tienen un único parámetro de control independiente, el cual se elige como el coeficiente de amortiguamiento $\alpha > 0$. Los seis sistemas caóticos, que incluyen a (1) y (2), están representados por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_2^2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 1 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2^2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (8)$$

Estos sistemas se pueden agrupar en una clase de sistemas al usar C^k -equivalencias de campos vectoriales [12], esto es, $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{z} = g(z)$ son dos C^r ($r \geq 1$) campos vectoriales definidos en \mathbb{R}^n . Ellos son C^k -equivalentes ($k \leq r$) si existe un C^k -difeomorfismo H tal que mapea las orbitas $\phi_t(x)$ del primer sistema en las orbitas $\psi_t(x)$ del segundo sistema, preservando la orientación pero no necesariamente la parametrización por tiempo. Sea $\tau(x, t)$ una función creciente de t a lo largo de las orbitas, entonces los sistemas son C^k -equivalentes si $H \circ \phi_t(x) = \psi_{\tau(x, t)}(H(x))$. Si H preserva parametrización por tiempo, entonces los sistemas son C^k -conjugados. En este caso $\tau(x, t) \equiv t$ y $H \circ \phi_t(x) = \psi_t(H(x))$ [11]. Esta clase de sistemas se denota como clase P debido a que al menos una variable (x_1 ó x_2) satisface una ecuación $x^{(3)} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$ polinomial. Malasoma [11] mostró que los sistemas (3)-(8) son C^∞ -conjugados, con sus respectivos C^∞ -difeomorfismos y C^∞ -difeomorfismos inversos. Como la equivalencia es una relación transitiva, todos los miembros de la clase P son C^∞ -conjugados y además C^∞ -equivalentes. Vale la pena mencionar que en cada caso el C^∞ -difeomorfismo H y su inverso H^{-1} son polinomiales. Como las ecuaciones (1) y (2) son caóticas [8, 9], entonces todos los sistemas de la clase P son caóticos para el mismo rango $2,0168... < \alpha < 2,0577...$ del parámetro de control [11].

3. Diseño de un observador adaptable afín en el estado

En esta sección se presentan resultados relacionados con el diseño observadores adaptables para sistemas afines en el estado que dependen de parámetros desconocidos en una forma afín.

3.1. Observadores adaptables exponenciales para sistemas lineales variantes en el tiempo

En [4] se presenta el diseño de un observador adaptable para sistemas lineales variantes en el tiempo de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\theta \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

donde x, u, y denotan los vectores de estado, entrada y salida medible respectivamente, y θ algún vector de parámetros desconocidos. Se asume que $A, B, C,$ y Φ son matrices conocidas de dimensiones apropiadas, continuas y uniformemente acotadas en el tiempo. A partir de los resultados de [4], el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\hat{\theta}(t) \\ &\quad + [K(t) + \Lambda(t)\Gamma\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)][y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma\Lambda^T(t)C(t)\Sigma(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \end{aligned} \quad (10)$$

es un observador exponencial para el sistema (9), en el sentido que para cualquier conjunto de condiciones iniciales, el error de estimación $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ y $e_\theta = \hat{\theta}(t) - \theta$ decaen exponencialmente a cero, donde la ganancia Γ puede obtenerse de

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\Lambda^T(t)C^T(t)\Sigma(t)C(t)\Lambda(t)\Gamma(t) + \lambda\Gamma(t) \quad (11)$$

para $\lambda > 0$, y para Σ alguna matriz definida positiva acotada.

3.2. Observador adaptable para un sistema afín en el estado

Partiendo de los resultados de [5], donde se presenta el diseño de un observador de estado para los sistemas afines en el estado de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(u, y)x + \varphi(u, y) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (12)$$

donde las componentes de la matriz $A(u, y)$ y del vector $\Phi(u, y)$ son funciones continuas dependientes de u y y , uniformemente acotadas, un observador exponencial para el sistema (12) es dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + S^{-1}C^T\Sigma(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{y}} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (13)$$

donde S es la solución de la ecuación:

$$\dot{S} = -\rho S - A(u, y)^T S - SA(u, y) + C^T \Sigma C \quad (14)$$

para Σ alguna matriz definida positiva acotada, $S(0) > 0$, y alguna constante positiva ρ suficientemente grande.

Ahora bien, para diseñar un observador adaptable de un sistema afín en el estado y con parámetros desconocidos en forma afín, descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(u, y)x + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\theta \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (15)$$

donde las componentes de la matriz $A(u, y)$ y de los vectores $\varphi(u, y)$ y $\Phi(u, y)$ son funciones continuas dependientes de u y de y acotadas uniformemente, y θ algún vector de parámetros desconocidos, se harán las siguientes consideraciones. Asumiendo las mismas hipótesis de excitación sobre las entradas, establecidas en [4] y [5] para la estimación de estado, y por otro lado, tomando en cuenta que $K = S^{-1}C^T$ y S es la solución de (14), un observador adaptable para el sistema (15) está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) + \Phi(u, y)\hat{\theta} \\ &\quad + \{\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \\ &\quad + S_x^{-1} C^T\} \Sigma(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma(y - C\hat{x}) \quad (17)$$

$$\dot{\Lambda} = \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T C\} \Lambda + \Phi(u, y) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= -\rho_x S_x - A(u, y)^T S_x - S_x A(u, y) \\ &\quad + C^T \Sigma C \end{aligned} \quad (19)$$

$$\dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda, \quad (20)$$

donde $S_x(0) > 0$ y $S_\theta(0) > 0$, y ρ_x y ρ_θ son constantes positivas suficientemente grandes y Σ alguna matriz definida positiva acotada. La prueba de convergencia de este observador se presenta en el apéndice A.

4. Observador adaptable para los sistemas caóticos clase P

Considérese un sistema caótico clase P de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (21)$$

donde x es el vector de estados, y es la salida medible, y α es un parámetro desconocido que satisface $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$. Mediante un cambio de coordenadas se puede transformar el sistema (21) en un sistema afín en el estado de la forma (15), para el cual es posible diseñar un observador adaptable de la forma (16)-(20), esto es, al aplicar un C^∞ -difeomorfismo $z = H(x)$ al sistema (21) se le transforma en el sistema (15), y entonces se diseña el observador adaptable para estimar los estados y el parámetro del sistema transformado $\dot{z} = \tilde{f}(z, \alpha)$. Para obtener los estimados en las coordenadas originales del sistema, es necesario aplicar el correspondiente C^∞ -difeomorfismo inverso $x = H^{-1}(z)$.

5. Control para los sistemas caóticos clase P

En esta sección se diseñará un control por retroalimentación de estados para la estabilización asintótica de los sistemas caóticos de clase P . Para ello, considere un sistema caótico de clase P representado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha) + g(x, \alpha)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (22)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ son las variables de estado, entrada y salida a controlar del sistema respectivamente, y α es un parámetro constante y desconocido que satisface $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$. Asumiendo que el sistema es de grado relativo $\rho = n$, se aplicará una ley de control u de retroalimentación de estado dada por:

$$u = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} v \quad (23)$$

donde

$$v = (-k_1 y - k_2 y^{(1)} - \dots - k_\rho y^{(\rho-1)})$$

los valores de las constantes k_i ($i = \{1, 2, \dots, \rho\}$) deben ser tales que $s^\rho + k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1$ sea un polinomio Hurwitz.

En el caso en que $\rho < n$, es necesario considerar que el sistema (22) sea de fase mínima. Sin embargo, en este trabajo solo se consideran sistemas de grado relativo $\rho = n$.

Un análisis de la estabilidad del sistema en lazo cerrado, es decir, del esquema de control-observador en lazo cerrado con el sistema no será presentado en este trabajo. Sin embargo, un resultado interesante que se puede aplicar es el hecho de que un observador adaptable representado por (16)-(20) se puede transformar, mediante un cambio de variable, en un sistema afín en el estado. Partiendo de este hecho, algunos resultados existentes sobre la estabilidad de un sistema en lazo cerrado usando una ley de control más un observador afín en el estado pueden ser aplicados.

6. Aplicación del esquema de control-observador

En esta sección consideraremos un sistema caótico descrito por (4) asumiendo que el parámetro α es constante y desconocido tal que $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$. Sea $y = x_1$ la variable del sistema a controlar y se asume que el sistema está controlado por una entrada u de tal modo que el sistema (4) está descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (24)$$

Por otra parte, la única información de que se dispone es la componente del vector de estados x_2 , la cual es medible.

Para aplicar el esquema control-observador propuesto a este sistema resultante se procede de la siguiente forma. Para el diseño del observador es necesario transformar el sistema (24) en la forma afín en el estado (15) mediante el siguiente C^∞ -difeomorfismo H :

$$\begin{cases} z_1 = x_2 \\ z_2 = \alpha x_2 + x_3 \\ z_3 = x_1 \end{cases} \quad (25)$$

Como consecuencia de esta transformación se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_3 + z_1 z_3 + u \\ \dot{z}_3 = z_1 \end{cases} \quad (26)$$

con $\theta = \alpha$ y $y = z_1$, para el cual es posible diseñar el observador adaptable (16)-(20).

Por otra parte, para el diseño del control se puede apreciar directamente que el sistema (24) tiene la forma (22), donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

el cual es de grado relativo $\rho = n = 3$. Entonces la ley de control u que estabiliza al sistema (24) está dada por:

$$u = \alpha x_3 + x_1 - x_1 x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 \quad (28)$$

Puesto que está ley de control no es posible de aplicar directamente, ya que no se dispone de todas las componentes del vector de estados ni del parámetro, entonces sustituiremos éstas por sus valores estimados proporcionados por el observador, esto es:

$$u = \hat{\alpha} \hat{x}_3 + \hat{x}_1 - \hat{x}_1 \hat{x}_2 - k_1 \hat{x}_1 - k_2 \hat{x}_2 - k_3 \hat{x}_3 \quad (29)$$

6.1. Resultados en simulación

Con el propósito de ilustrar la eficiencia del esquema de control-observador propuesto, a continuación se presentan los resultados obtenidos. Para tal efecto el control u fue aplicado en $t = 25$ para mostrar la diferencia entre las trayectorias de estado libres ($u = 0$) y las trayectorias de estado bajo la acción del control. Los valores numéricos considerados en la simulación se encuentran en el apéndice B.

En la figura 1 se muestra el parámetro α y su estimado, en la figura 2 se muestran los errores de estimación de los estados y del parámetro α . Como se puede ver, los errores de estimación tienden hacia cero mostrando con ello el buen desempeño del observador. En las figuras 3 a 5 se muestran los resultados obtenidos al aplicar la ley de control que estabiliza asintóticamente a los estados del sistema (24) después de $t = 25$. La figura 6 muestra la señal de control u aplicada en $t = 25$. Vale la pena mencionar que la ley de control utiliza los valores estimados proporcionados por el observador.

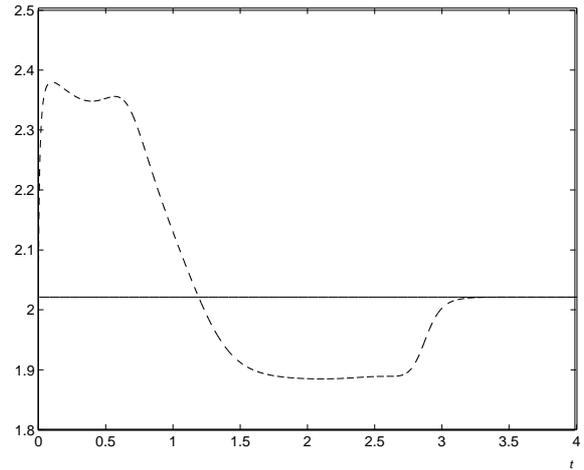


Figura 1: Parámetro α y su estimado (línea punteada) vs tiempo (t).

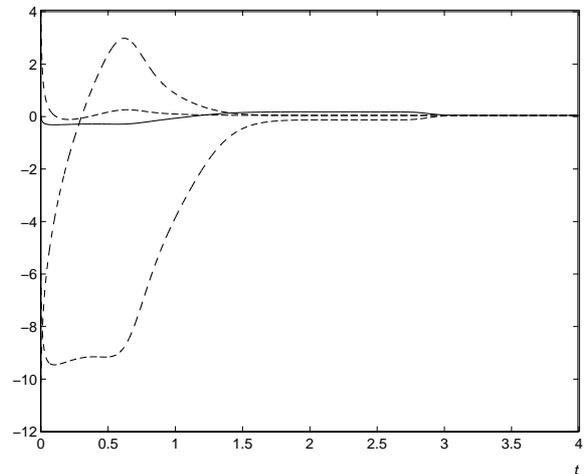


Figura 2: Errores de estimación de los estados (líneas punteadas) y del parámetro α (línea continua) vs tiempo (t).

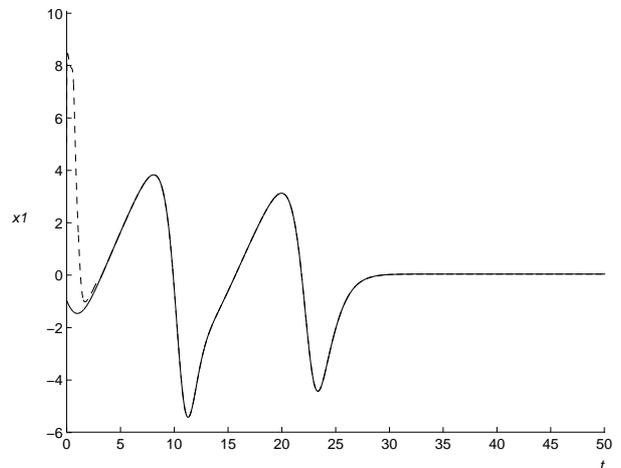


Figura 3: Estado x_1 y su estimado (línea punteada) vs tiempo (t).

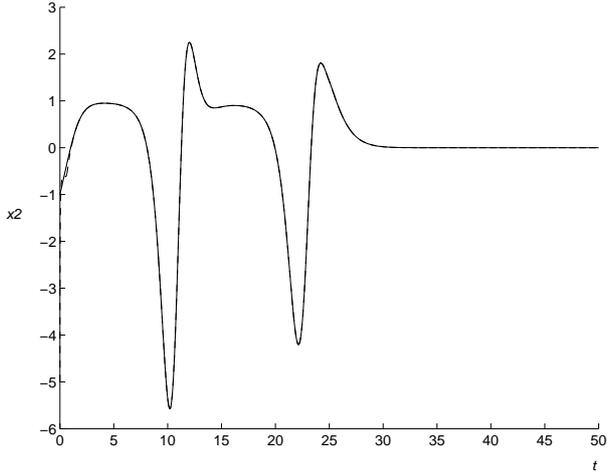


Figura 4: Estado x_2 y su estimado (línea punteada) vs tiempo (t).

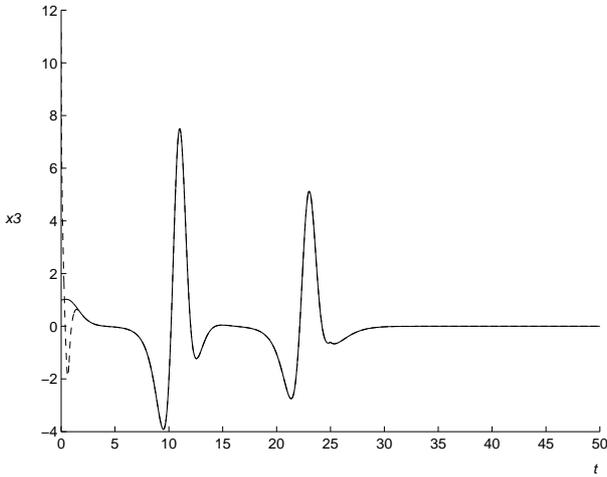


Figura 5: Estado x_3 y su estimado (línea punteada) vs tiempo (t).

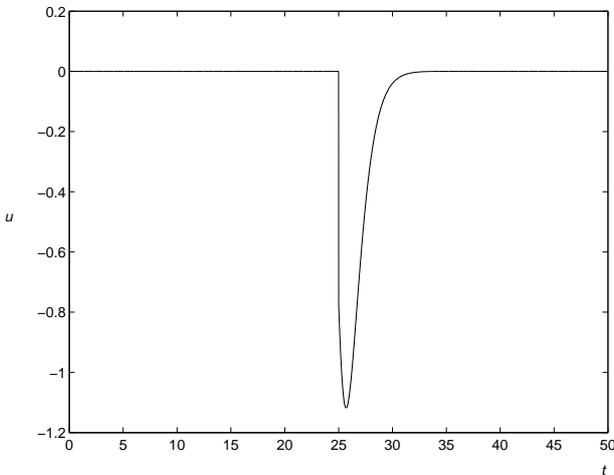


Figura 6: Señal de control u vs tiempo (aplicada en $t=25$).

7. Conclusiones

En este trabajo se presentó una estrategia de control estabilizante basada en observación adaptable para los sistemas caóticos de clase P . Un observador adaptable para una clase de sistemas afines en el estado ha sido presentado, el cual estima las componentes de vector de estado no medibles e identifica los parámetros desconocidos. Resultados en simulación, los cuales se han aplicado a una clase de sistema caóticos de clase P , se presentaron para mostrar la eficiencia del esquema de control basado en observación adaptable propuesto. Una extensión de este trabajo es considerar otras estrategias de control y establecer formalmente el análisis de estabilidad de lazo cerrado, que por razones de espacio no ha sido considerada en este trabajo.

A. Convergencia del observador adaptable.

Definiendo $e_x := \hat{x} - x$ y $e_\theta := \hat{\theta} - \theta$, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \{A(u, y) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} e_x \\ &\quad + \Phi(u, y) \epsilon_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C e_x\end{aligned}$$

Sea $\epsilon_x = e_x - \Lambda e_\theta$, de modo que

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= \{A(u, y) - \Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ &\quad + \Phi(u, y) \epsilon_\theta - \dot{\Lambda} e_\theta - \Lambda \dot{e}_\theta\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo las expresiones correspondientes en la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ \dot{\epsilon}_\theta &= -S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)\end{aligned}$$

Para demostrar la convergencia del observador considere:

$$V(\epsilon_x, \epsilon_\theta) = \epsilon_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

como una función de Lyapunov. Entonces, la derivada en el tiempo de V está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \epsilon_x^T \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\}^T S_x \epsilon_x \\ &\quad + \epsilon_x^T S_x \{A(u, y) - S_x^{-1} C^T \Sigma C\} \epsilon_x \\ &\quad - (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T \{S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C\}^T S_\theta \epsilon_\theta \\ &\quad - \epsilon_\theta^T S_\theta \{S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma C\} (\epsilon_x + \Lambda \epsilon_\theta) \\ &\quad + \epsilon_x^T \dot{S}_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T \dot{S}_\theta \epsilon_\theta\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones apropiadas,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta \\ &\quad - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta \\ &\quad - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} & \{-\epsilon_x^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta \\ & - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \epsilon_x - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \epsilon_\theta\} \\ & = -(e_x + \Lambda \epsilon_\theta)^T C^T \Sigma C (e_x + \Lambda \epsilon_\theta) \leq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta$$

Finalmente, para $\rho = \min(\rho_x, \rho_\theta)$, se tiene

$$\dot{V}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho V(\epsilon_x, \epsilon_\theta)$$

En conclusión, ϵ_x y ϵ_θ convergen exponencialmente a cero con una razón dada por ρ .

B. Condiciones iniciales, valor de parámetro y constantes, y ganancias del observador, para las simulaciones

Los valores utilizados para la simulación son:

- Las condiciones iniciales del vector de estados: $x_1(0) = -1, x_2(0) = -1, x_3(0) = 1$.
- Las condiciones iniciales del observador adaptable: $\hat{z}_1(0) = -5, \hat{z}_2(0) = 1, \hat{z}_3(0) = 5$.
- La condición inicial del parámetro estimado fue elegido como: $\hat{\alpha}(0) = 2,03$.
- $S_x(0) = I, S_\theta(0) = I, \Lambda(0) = [10 \ 10 \ \dots \ 10]$ con dimensiones apropiadas.
- Ganancias arbitrarias: $\rho_x = \rho_\theta = 10$.
- El parámetro fue elegido: $\alpha = 2,02$.
- Las constantes k_i del polinomio $s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1$ elegidas $k_1 = 1, k_2 = 3$ y $k_3 = 3$, tales que las raíces del polinomio son colocados en $s_1 = -1, s_2 = -1$ y $s_3 = -1$.

Referencias

- [1] Ott E., C. Grebogi and J.A. Yorke, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett., Vol. 64, pp. 1196–1199, 1990.
- [2] Chen G. and X. Dong, *From chaos to order: methodologies, perspectives and applications*, Singapore: World Scientific, 1998.
- [3] Solak E., O. Morgul and U. Ersoy, *Observer-based control of a class of chaotic systems*, Phys. Lett. A, Vol. 279, pp. 47–55, 2001.

- [4] Zhang Q., *Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems*, IEEE Trans on Automatic Control, Vol. 47, pp. 525–529, 2002.
- [5] Hammouri H. and J. De-León, *Observers synthesis for state affine systems*, Proc. of the 29th IEEE Conf. Dec. and Control, Honolulu Hawaii, pp. 784–785, 1990.
- [6] Liao T.L., *Observer-based approach for controlling chaotic systems*, Physical Review E, Vol. 57, pp. 1604–1610, 1998.
- [7] Sprott J.C., *Some Simple Chaotic Flows*, Phys. Rev. E, Vol. 50, pp. 647–650, 1994.
- [8] Sprott J.C., *Simplest Dissipative Chaotic Flow*, Phys. Lett. A, Vol. 228, pp. 271–274, 1997.
- [9] Sprott J.C., *Some Simple Chaotic Jerk Functions*, Am. J. Phys., Vol. 65, pp. 537–543, 1997.
- [10] Sprott J.C. and S.J. Linz, *Algebraically Simple Chaotic Flows*, Int. J. Chaos Theory and Appl., Vol. 5, pp. 3–22, 2000.
- [11] Malasoma J.M., *A New Class of Minimal Chaotic Flows*, Phys. Lett. A, Vol. 305, pp. 52–58, 2002.
- [12] Wiggins S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

Glosario de Símbolos

\square	Fin de una prueba.
\dot{x}, \dot{y}	El punto es utilizado para denotar la derivada con respecto del tiempo, ejemplo $\dot{x} = x^{(1)} = dx/dt$
\hat{x}, \hat{z}	El circunflejo es utilizado para denotar la estimación de una variable mediante observadores.
A^T, x^T	La transpuesta de la matriz A y el vector x .
\mathbb{R}	El campo de los números reales.
\mathbb{C}	El campo de los números complejos.
$\text{rango}(A)$	El rango de la matriz A .
\triangleq	Igual por definición.
\approx	Aproximadamente igual.
\equiv	Idéntico.
$\text{dist}\{x, y\}$	La distancia entre los puntos x y y , en algún espacio definido.
$\inf x$	El <i>infimum</i> de x .
$\sup x$	El <i>supremum</i> de x .
$\ x\ $	Una norma de x .
$\lim_{a \rightarrow b} x$	El límite de x cuando a tiende a b .
\ln	Logaritmo natural (en base e) de x .
$\log x$	Logaritmo en base 10 de x .
$\dim X$	La dimensión del conjunto X .
\mathcal{C}^∞	El conjunto de la funciones continuamente diferenciables.
A^{-1}	Inversa de A .
j	Unidad de los números imaginarios, $j = \sqrt{-1}$.
$\partial F / \partial x$	Derivada parcial de la función F con respecto a la variable x .
$L_f h$	Derivada Lie de h a lo largo del campo vectorial f .
<i>Cursivas</i>	El uso de cursivas sirve para denotar términos en un idioma diferente al Español.
Negritas	El uso de negritas sirve para denotar términos técnicos.

Bibliografía

- [1] V.V. Alekseev and A.Yu. Loskutov, *Controlling a system with a strange attractor by periodic parametric action*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **293** (1987), 1346–1348.
- [2] J. Alvarez-Gallegos, *Nonlinear regulation of a lorenz system by feedback linearization technique*, J. Dynam. Control (1994), no. 4, 277–298.
- [3] B.R. Andrievskii and A.L. Fradkov, *Control of chaos: Methods and applications. i. methods.*, Automation and Remote Control **64** (2003), no. 5, 673–713.
- [4] R. Bakker, R.J. De Korte, and J.C. Schouten, *Neural networks for prediction and control of chaotic fluidized bed hydrodynamics: A first step*, Fractals **5** (1997), 523–530.
- [5] M. Cartwright and J. Littlewood, *Some fixed point theorems*, Ann. of Math. **54** (1951), 1–37.
- [6] L. Chen, G. Chen, and Y.W. Lee, *Fuzzy modeling and adaptive control of uncertain chaotic systems*, Inf. Sci. **121** (1999), 27–37.
- [7] L.Q. Chen and Y.Z. Liu, *A modified exact linearization control for chaotic oscillators*, Nonlin. Dynam. **20** (1999), 309–317.
- [8] B.P. Demidovich, *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoychivosti (lectures of the mathematical theory of stability)*, Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1998.
- [9] dSPACE, *Experiment guide. for release 4.0*, dSPACE, 2003.
- [10] ———, *Implementation guide. for release 4.0*, dSPACE, 2003.
- [11] ———, *Installation and configuration. for release 4.0*, dSPACE, 2003.
- [12] A.L. Fradkov and A.Yu Pogromsky, *Introduction to control of oscillations and chaos*, Springer-Verlag, Singapore, 1998.
- [13] Besançon G., J. De-León, and O. Huerta, *On adaptive observers for state affine systems*, Internal Report - Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France. (2005).
- [14] J. Gleick, *Caos, la creación de una ciencia*, Seix Barral, España, 1988.
- [15] G. Grassi and S. Mascolo, *Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal*, IEEE Trans. Circ. Syst. I **44** (1997), 1011–1014.

- [16] W.H. Hai, Y.W. Duan, and L.X. Pan, *An analytical study for controlling unstable periodic motion in magneto-elastic chaos*, Phys. Lett. A **234** (1997), 198–204.
- [17] H. Hammouri and J. De-León, *Observers synthesis for state affine systems*, Proc. of the 29th IEEE Conf. Dec. and Control (1990), 784–785.
- [18] K. Hirasawa, J. Murata, and J.L. Hu, *Chaos control on universal learning networks*, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. C/Appl. Rev. **30** (2000), 95–104.
- [19] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic, New York, 1974.
- [20] H.K. Khalil, *Nonlinear systems analysis*, 2nd. ed., Prentice Hall, 1996.
- [21] T. Li and J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Am. Math. Monthly. **82** (1975), 985–992.
- [22] R. Lima and M. Pettini, *Suppression of chaos by resonant parametric perturbations*, Phys. Rev. A **41** (1990), 726–733.
- [23] N.A. Loiko, A.V. Naumenko, and S.I. Turovets, *Effect of the pyragas feedback on the dynamics of laser with modulation of losses*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **112** (1997), no. 4, 1516–1530.
- [24] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. **20** (1963), no. 2, 130–141.
- [25] J.M. Malasoma, *A new class of minimal chaotic flows*, Phys. Lett. A **305** (2002), 52–58.
- [26] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear control design: Geometric, adaptive, and robust*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1995.
- [27] S. Mascolo and G. Grassi, *Controlling chaos via backstepping design*, Phys. Rev. E **56** (1997), 6166–6169.
- [28] F.C. Moon, *Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers*, Wiley, New York, 1987.
- [29] O. Morgul and E. Solak, *On the synchronization of chaotic systems by using state observers*, Int J. Bifurcat. Chaos **7** (1997), 1307–1322.
- [30] A.V. Naumenko, N.A. Loiko, and S.I. Turovets, *Chaos control in external cavity laser diodes using electronic impulsive delayed feedback*, Int. J. Bifurcat. Chaos **8** (1998), 1791–1799.
- [31] Yu.I. Neimark and P.S. Landa, *Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniya (stochastic and chaotic oscillations)*, Nauka, Moscow, 1987.
- [32] H. Nijmeijer and I.M.Y. Mareels, *An observer looks at synchronization*, IEEE Trans. Circ. Syst. I **44** (1997), 882–890.
- [33] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990), 1196–1199.

- [34] K. Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170** (1992), 421–428.
- [35] Femat R., J. Alvarez Ramírez, and G. Fernández-Anaya, *Adaptive synchronization of high-order chaotic systems: A feedback with low order parametrization*, Physica D **130** (2000), 231–246.
- [36] O.E. Rössler, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A **57** (1976), 397–398.
- [37] ———, *Continuous chaos-four prototype equations*, Ann. New York Acad. Sci. **316** (1979), 376–392.
- [38] D. Ruelle and F. Takens, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20** (1971), no. 2, 167–192.
- [39] S. Smale, *Differential dynamical systems*, B. Am. Math. Society **73** (1963), 747–817.
- [40] J.C. Sprott, *Some simple chaotic flows*, Phys. Rev. E **50** (1994), 647–650.
- [41] ———, *Simplest dissipative chaotic flow*, Phys. Lett. A **228** (1997), 271–274.
- [42] ———, *Some simple chaotic jerk functions*, Am. J. Phys. **65** (1997), 537–543.
- [43] J.C. Sprott and S.J. Linz, *Algebraically simple chaotic flows*, Int. J. Chaos Theory and Appl. **5** (2000), 3–22.
- [44] S.H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, Addison-Wesley, 1994.
- [45] J.A.K. Suykens, J. Vandewalle, and L.O. Chua, *Nonlinear H-infinity synchronization of chaotic lur'e systems*, Int. J. Bifurcat. Chaos **7** (1997), 1323–1335.
- [46] K. Tanaka, T. Ikeda, and H.O. Wang, *A unified approach to controlling chaos via arm lmi-based fuzzy control system design*, IEEE Trans. Circ. Syst. I **45** (1998), 1021–1040.
- [47] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, 1990.
- [48] X.H. Yu, *Controlling chaos using input-output linearization approach*, Int. J. Bifurcat. Chaos **7** (1997), 1659–1664.
- [49] Q. Zhang, *Adaptive observers for mimo linear time-varying systems*, IEEE Trans on Automatic Control **47** (2002), no. 3, 525–529.