

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA  
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES NO LINEALES POR MEDIO DE LA FORMULACION  
HAMILTONIANA CON APLICACION AL GENERADOR SINCRONO

PRESENTA  
IVAN ERNESTO MACIAS CARDOSO

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DEL 2003

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA

DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES NO LINEALES POR MEDIO DE LA FORMULACION  
HAMILTONIANA CON APLICACION AL GENERADOR SINCRONO

P R E S E N T A

IVAN ERNESTO MACIAS CARDOSO

**TESIS**

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DEL 2003

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Departamento de Estudios de Postgrado**



**Diseño de Controladores No Lineales por Medio de la  
Formulación Hamiltoniana con Aplicación al  
Generador Síncrono**

**Presenta**

**Iván Ernesto Macías Cardoso**

**TESIS**

En opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad  
en Control

San Nicolás de los Garza, N.L.

Febrero 2003

**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**

**Departamento de Estudios de Postgrado**



**Diseño de Controladores No Lineales por Medio de la Formulación  
Hamiltoniana con Aplicación al Generador Síncrono**

**POR**

**Iván Ernesto Macías Cardoso**

**TESIS**

En opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad  
en Control

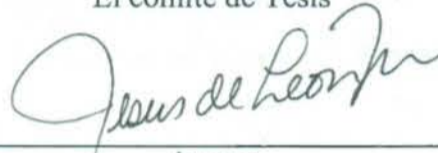
San Nicolás de los Garza, N.L.

Febrero 2003

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **“DISEÑO DE CONTROLADORES NO LINEALES POR MEDIO DE LA FORMULACION HAMILTONIANA CON APLICACION AL GENERADOR SINCRONO”** realizada por Iván Ernesto Macías Cardoso sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control.

El comité de Tesis



Asesor

Dr. Jesús de León Morales



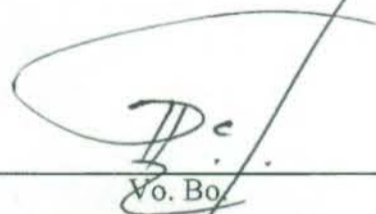
Coasesor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez



Coasesor

Dr. Aarón Sariñana Toledo



Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez

División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N. L.

## Dedicatoria

A mis padres

Arcelia Cardoso Sánchez

Ernesto Benjamín Macías Sánchez

A mi hermana

Eleonora Macías Cardoso

## Agradecimientos

A DIOS

A mis padres y hermana por su inigualable y constante apoyo.

Al Dr. Jesús de León Morales por su paciencia, apoyo y enseñanza tanto dentro como fuera del aula.

A todos mis maestros en el Doctorado de Ingeniería Eléctrica que fueron parte de mi formación, Dr. Joaquín Collado Moctezuma, Dr. Krishna Kumar Bosawon, Dr. Mikhail Basin por compartir su conocimiento y experiencia.

A mis sinodales Dr. Marco Tulio Mata Jiménez y Dr. Arón Sariñana Toledo por sus valiosos comentarios en torno a este proyecto de tesis.

A mis amigos y compañeros en el Doctorado de Ingeniería Eléctrica

A las personas que en algún momento formaron parte importante de mi vida y me apoyaron en la realización de este proyecto.

A CONACyT y todas las personas detrás de este programa de apoyo a estudiantes de postgrado.

## Resumen

Diseño de Controladores No Lineales por Medio de la Formulación Hamiltoniana con  
Aplicación al Generador Síncrono

Publicación No. \_\_\_\_\_

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Departamento de Estudios de Postgrado

Profesor Asesor: Jesús de León Morales

Agosto 2002

El control de excitación de plantas generadoras forma parte de una de las estrategias de control de generadores síncronos que han atraído la atención de investigadores e ingenieros en varios países. Esto es debido al desarrollo tecnológico adquirido dentro de la electrónica de potencia que ha permitido la implementación de diferentes tipos de controladores.

En este trabajo de tesis, se proponen una estrategia de control dentro de un enfoque relativamente nuevo basada en las técnicas de control no lineal utilizando la formulación hamiltoniana, la cual, es una técnica basada en la teoría de la mecánica clásica con algunas adecuaciones que permiten tratar el problema de control de excitación del generador síncrono considerando un modelo matemático basado en el gradiente de la función de energía del sistema. Esto permite mejorar el desempeño del generador. Por otro lado, se muestran esquemas de control diferentes a la técnica de control hamiltoniana en los cuales se observa una diferencia en el desempeño del generador.

Además se estudia un esquema de observación el cual es necesario para resolver la estimación del vector de estado. En cada capítulo se presentan resultados de simulación para mostrar el desempeño de los algoritmos de control aquí presentados.



# Índice

<b>ÍNDICE</b>	<b>VII</b>	
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>X</b>	
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>XI</b>	
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1	MÉTODOS DIRECTOS (UNA INTRODUCCIÓN PARA SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA).....	7
1.1.1	MÉTODO DEL PUNTO DE EQUILIBRIO MAS CERCANO.....	9
1.1.2	MÉTODO DE CONTROLAR EL P.E.I.....	11
1.2	FUNCIÓN DE ENERGÍA .....	13
1.3	ORGANIZACIÓN DE LA TESIS .....	14
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO DEL GENERADOR</b>	<b>16</b>
2.1	INTRODUCCIÓN .....	16
2.2	MODELO MATEMÁTICO DEL GENERADOR .....	17
2.3	CIRCUITOS MAGNÉTICOS .....	18
2.3.1	CIRCUITO SIMPLE .....	18
2.3.2	CIRCUITOS MAGNÉTICAMENTE ACOPLADOS .....	20
2.4	ECUACIONES BÁSICAS DE UNA MÁQUINA SÍNCRONA .....	22
2.4.1	ECUACIONES DEL CIRCUITO DEL ESTATOR .....	24
2.4.2	INDUCTANCIA PROPIA DEL ESTATOR .....	24
2.4.3	INDUCTANCIAS MUTUAS DEL ESTATOR.....	27
2.4.4	INDUCTANCIA MUTUA ENTRE LOS DEVANADOS DEL ROTOR Y DEL ESTATOR .....	28
2.4.5	ECUACIONES DEL CIRCUITO DEL ROTOR .....	30
2.5	TRANSFORMACIÓN DQ0 .....	31

2.6	ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.....	32
2.7	ECUACIÓN DE OSCILACIÓN.....	33
2.8	DEDUCCIÓN DETALLADA DEL MODELO DE 3ER. ORDEN.....	36
2.9	CONCLUSIONES.....	40
<b>CAPÍTULO 3 RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO</b>		<b>41</b>
3.1	INTRODUCCIÓN.....	41
3.2	LINEALIZACIÓN EXACTA VÍA RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO.....	45
3.3	APLICACIÓN AL GENERADOR SÍNCRONO.....	47
3.4	RESULTADOS DE SIMULACIÓN.....	50
3.4.1	SISTEMA EN LAZO ABIERTO.....	51
3.4.2	SISTEMA EN LAZO CERRADO.....	53
3.5	CONCLUSIONES.....	55
<b>CAPÍTULO 4 DISEÑO DE UN CONTROLADOR LGV</b>		<b>56</b>
4.1	INTRODUCCIÓN.....	56
4.2	INTRODUCCIÓN A LOS CONTROLADORES DEL TIPO LGV.....	56
4.3	CONTROLADORES DEL TIPO LGV.....	57
4.4	EXTENSIÓN DINÁMICA DEL CONTROL LGV.....	59
4.5	APLICACIÓN AL GENERADOR SÍNCRONO.....	60
4.6	DISEÑO DEL CONTROLADOR.....	62
4.7	RESULTADOS DE SIMULACIÓN.....	62
4.7.1	CONTROLADOR LGV ESTÁTICO.....	63
4.7.2	CONTROL LGV BASADO EN OBSERVADOR.....	65
4.8	CONCLUSIONES.....	67
<b>CAPÍTULO 5 CONTROLADOR HAMILTONIANO</b>		<b>68</b>
5.1	INTRODUCCIÓN.....	68
5.2	ENFOQUE DE PASIVIDAD.....	68

5.3	HAMILTONIANO .....	70
5.4	HAMILTONIANO DE UN SISTEMA DINÁMICO.....	72
5.5	ECUACIONES DE HAMILTON .....	74
5.6	DISEÑO DEL CONTROL .....	77
5.7	ESTIMACIÓN DE ESTADO NO-LINEAL .....	79
5.8	DISEÑO DE UN OBSERVADOR PARA SISTEMAS TRIANGULARES .....	81
5.8.1	ANÁLISIS DE LAZO CERRADO .....	83
5.9	APLICACIÓN AL GENERADOR SÍNCRONO.....	84
5.10	RESULTADOS DE SIMULACIÓN .....	87
5.10.1	CONTROLADOR HAMILTONIANO .....	87
5.10.2	CONTROLADOR HAMILTONIANO BASADO EN EL OBSERVADOR.....	90
5.11	CONCLUSIONES .....	92
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES</b>		<b>93</b>
6.1	CONCLUSIONES .....	93
6.2	RECOMENDACIONES.....	94
<b>APÉNDICE 1</b>		<b>96</b>
<b>APÉNDICE 2</b>		<b>102</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		<b>104</b>

## Índice de Figuras

Figura 1.1 Posición del punto de equilibrio estable $(\delta_s, 0)$ .....	8
Figura 1.2 El método del punto de equilibrio mas cercano da evaluaciones de estabilidad conservadoras para aquellas trayectorias que cruzan el límite de estabilidad $\partial A(\delta_s, 0)$ . 10	
Figura 1.3 El método del p.e.i. mas cercano utiliza superficie de energía constante que pasa por p.e.i. sobre el límite de estabilidad $\partial A(\delta_s, 0)$ . El área sombrada es el estimado de estabilidad.....	10
Figura 1.4 El método de controlar el p.e.i. utiliza la superficie de energía constante que pasa por el punto de equilibrio inestable.....	11
Figura 1.5 Comparación entre le método de p.e.i mas cercano y el método de controlar el P.E.I.....	12
Figura 2.1 Diagrama esquemático de una máquina síncrona.....	16
Figura 2.2 Circuitos del rotor y del estator de una máquina síncrona.....	17
Figura 2.3 Circuito magnético simple.....	19
Figura 2.4 Circuitos Magnéticamente Acoplados.....	20
Figura 2.5 Variación de la permeabilidad con respecto a la posición del rotor.....	24
Figura 2.6 fmm de la fase a y sus componentes.....	25
Figura 2.7 Variación de la autoinductancia de una fase del estator.....	26
Figura 2.8 Variación de la inductancia mutua entre los devanados del estator.....	28
Figura 2.9 Esquema de una máquina conectada a un bus infinito.....	40
Figura 3.1 Esquema de la Linealización exacta por retroalimentación de estado.....	45
Figura 3.2.- Ángulo de potencia en lazo abierto.....	51
Figura 3.3.- Velocidad Angular en lazo abierto.....	52
Figura 3.4.- Voltaje Interno en lazo abierto.....	52
Figura 3.5 Comportamiento del ángulo de carga en lazo cerrado.....	53
Figura 3.6.- Comportamiento de la velocidad angular del rotor en lazo cerrado.....	53
Figura 3.7.- Comportamiento del voltaje interno en lazo cerrado.....	54
Figura 3.8.-Desempeño del control por retroalimentación de estado.....	54
Figura 4.1 Comportamiento del ángulo de potencia en lazo cerrado.....	63

Figura 4.2 Comportamiento de la velocidad angular en lazo cerrado.....	63
Figura 4.3 Comportamiento del voltaje interno en lazo cerrado.....	64
Figura 4.4 Desempeño del control .....	64
Figura 4.5 Estimación del ángulo de potencia.....	65
Figura 4.6 Estimación de la velocidad angular .....	65
Figura 4.7 Estimación del Voltaje interno .....	66
Figura 4.8 Desempeño del control basado en el observador.....	66
Figura 5.1 Conexión de retroalimentación.....	68
Figura 5.2 Esquema de un observador .....	80
Figura 5.3 Comportamiento del sistema en lazo cerrado con el controlador Hamiltoniano .....	87
Figura 5.4 Comportamiento de la velocidad angular con el control Hamiltoniano .....	88
Figura 5.5 Voltaje interno con el control Hamiltoniano .....	88
Figura 5.6 Desempeño del control .....	89
Figura 5.7 Ángulo de potencia y su estimado .....	90
Figura 5.8 Velocidad angular y su estimado .....	90
Figura 5.9 Voltaje interno y su estimado .....	91
Figura 5.10 Desempeño del control basado en el observador.....	91

## Índice de Tablas

Tabla 1 Comparación entre la aproximación por métodos directos y en el dominio del tiempo.	4
Tabla 2.- Parámetros físicos del modelo de la máquina síncrona	50

## Capítulo 1 Introducción

Un sistema eléctrico de potencia consiste de unidades generadoras, líneas de transmisión, cargas, transformadores, compensadores, etc. En el ámbito de la planeación después de examinar la suficiencia de la capacidad de transmisión, entre otros aspectos, los encargados de planificar la generación y distribución de energía eléctrica invariablemente estudiarán la estabilidad del sistema para un conjunto de perturbaciones, tales como, fallas trifásicas ó monofásicas con el fin de verificar si la falla es liberada adecuadamente sin que el sistema pierda sincronismo.

Por naturaleza, un sistema eléctrico de potencia experimenta continuamente perturbaciones. Estas perturbaciones se pueden clasificar en *eventos de perturbación* y *perturbaciones de carga*. Los eventos de perturbación incluyen desconexión de generadores del sistema eléctrico, cortos circuitos originados por diferentes causas, entre ellas, descargas atmosféricas, cambios notables y repentinos en la carga o la combinación de los eventos mencionados. Estas perturbaciones, comúnmente se refieren a cambios en la configuración del sistema de potencia. Por otro lado, las perturbaciones de carga se refieren a pequeñas fluctuaciones aleatorias en la demanda, bajo las cuáles la configuración del sistema generalmente permanece sin cambios. Además, si se considera también la tendencia hacia la utilización plena de los sistemas de generación y transmisión, los efectos de estas perturbaciones aparecen con mas frecuencia incidiendo en la seguridad de operación de los sistemas eléctricos de potencia.

El análisis de estabilidad en sistemas de potencia se relaciona principalmente con la respuesta dinámica a perturbaciones. Esto es debido a que la mayoría de las fallas que se presentan en el sistema eléctrico afectan esta dinámica.

Mantener la estabilidad de un sistema eléctrico de potencia es un aspecto importante a considerar en el cual se incluye la estabilidad transitoria, variaciones de voltaje, entre otros. Además, de suficiente capacidad y energía disponibles, respuesta a los cambios de frecuencia de los gobernadores de las máquinas, en combinación con las características de carga que deben de ser tales que las variaciones de frecuencia se mantengan dentro de limites seguros.

Por conveniencia en el análisis y para tener una visión mas completa, el problema de estabilidad se divide en dos categorías, estabilidad transitoria y estabilidad dinámica o estabilidad de pequeña señal.

#### **Estabilidad transitoria**

Es la habilidad del sistema de potencia para mantener el sincronismo<sup>1</sup> cuando es sometido a perturbaciones transitorias severas. La respuesta resultante del sistema, involucra grandes variaciones del ángulo del rotor y es influenciado por la relación potencia-ángulo. La estabilidad depende tanto del punto de operación como de la severidad de la perturbación.

Las contingencias usualmente consideradas son cortos circuitos de diferentes tipos: fase a tierra, dos fases a tierra o trifásica que usualmente ocurren en la líneas de transmisión. Se supone que las fallas son liberadas por medio de la operación de protecciones que aíslan los elementos involucrados.

#### **Estabilidad dinámica (estabilidad de pequeña señal)**

Es la habilidad del sistema de potencia para mantener el sincronismo cuando es sometido a pequeñas perturbaciones, tales como, pequeñas variaciones en la carga ó en la generación que son resultado de su operación normal.

Las perturbaciones que aquí se consideran son lo suficientemente pequeñas como para permitir la linealización de las ecuaciones del sistema para propósitos de análisis.

El problema de inestabilidad que se podría originar dentro de la estabilidad dinámica se presenta de dos maneras:

1. Constante incremento en el ángulo del rotor debido a insuficiente torque mecánico en el primo motor (turbina) del generador.
2. Oscilaciones crecientes en el rotor debidas a la falta de torque de amortiguamiento.

El problema de estabilidad transitoria (que es el problemas que se estudiará en el diseño de controladores en este proyecto de tesis), se considera como una evolución a través de tres condiciones de operación, prefalla, falla y postfalla. El estado de prefalla

---

<sup>1</sup> Para la producción de un torque estable, en el eje del generador los campos magnéticos del rotor y del estator deben de girar a la misma velocidad, a esto se le llama velocidad síncrona. Se dice que un sistema de potencia está en sincronismo cuando la desviación de velocidad entre generadores es pequeña.

es la condición de estado estable del sistema. Si ocurre una falla (por ejemplo, un corto circuito), el sistema está entonces en la condición de falla, justo antes de que sea liberada por el sistema de protección. Una vez liberada la falla, el análisis de estabilidad consiste en verificar si la trayectoria de postfalla del sistema de potencia converge o no a una condición aceptable de estado estable, a medida que el tiempo transcurre.

Hoy en día, los análisis de estabilidad transitoria son desarrollados exclusivamente por medio de integraciones numéricas para calcular el comportamiento del sistema en relación a una perturbación dada. Al examinar el comportamiento del sistema de esta forma se determina si la estabilidad es alcanzada o no. Esta aproximación en el dominio del tiempo tiene varias ventajas [6]:

1. Es posible aplicarla para cualquier nivel de detalle de modelos en sistemas de potencia.
2. Toda la información de las variables de estado durante el transitorio, así como en estado estable, están disponibles.
3. Los resultados de simulaciones pueden ser interpretados directamente por los operadores.

Las principales desventajas de ésta práctica son:

1. Se requiere de largos períodos de tiempo para la integración numérica, lo cual no permite aplicaciones en tiempo real.
2. No provee información acerca del grado de estabilidad (cuando el sistema es estable), o inestabilidad (cuando el sistema es inestable).
3. No provee información acerca de que acciones de control preventivo se deben de tomar en caso de que el sistema sea considerado inestable.

Comúnmente se estudian varios casos de estabilidad para examinar los efectos de diferentes localizaciones y tipos de falla, varias condiciones de operación, diferentes topologías de la red y estrategias de control.

Otra alternativa para el análisis de estabilidad transitoria, es la aproximación por medio de funciones de energía, llamada también métodos directos. Esta técnica fue originalmente propuesta por Mangusson a finales de los 40's, seguido en los 50's por Aylett y en los 60's por Gless y El-Abiad y Nagappan [6]. En contraste con la aproximación en el dominio del tiempo, los métodos directos determinan la estabilidad



del sistema basados directamente en las funciones de energía. Estos métodos determinan si el sistema permanecerá o no estable una vez que la falla es liberada al comparar la energía del sistema, con el valor de energía crítica. Este método no solo evita el consumo de tiempo para encontrar las soluciones que en la aproximación en el dominio del tiempo son hechas paso a paso en un intervalo de tiempo, sino que también proveen una medida del grado de estabilidad del sistema cuando se analiza la región de estabilidad del sistema. A continuación se presenta una tabla comparativa que resume las ventajas y desventajas entre las dos aproximaciones

	<b>Aproximación en el dominio del tiempo.</b>	<b>Métodos Directos (Basado en Funciones de Energía).</b>
<b>Ventajas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicable a modelos de estabilidad generales de sistemas de potencia.</li> <li>• Provee la respuesta en el tiempo de todas las variables de estado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Disminución considerable del tiempo de cálculo</li> <li>• Medida del grado de estabilidad e inestabilidad.</li> <li>• Provee información útil relacionada con las acciones de control preventivo.</li> </ul>
<b>Desventajas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiempo de cálculo elevado.</li> <li>• No existe medida acerca del grado de estabilidad del sistema.</li> <li>• No existe información útil relacionada con las acciones de control preventivo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solamente aplicable a modelos de sistemas de potencia a los que se les puedan deducir funciones de energía.</li> <li>• No provee la respuesta en el tiempo de ninguna de las variables del sistema de postfalla.</li> </ul>

Tabla 1 Comparación entre la aproximación por métodos directos y en el dominio del tiempo.

### Planteamiento del problema

Sea

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.1)$$

el modelo de un sistema de potencia bajo estudio, donde el vector de estados  $x(t)$  pertenece al espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$  y la función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface las condiciones para existencia y unicidad de las soluciones. La solución de (1.1) que comienza en  $t = 0$  es llamada trayectoria del sistema, denotada por  $\Phi(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

El problema de estabilidad de sistemas de potencia debido a un evento de perturbación puede ser expresado por medio de la siguiente formulación matemática. En el régimen de prefalla el sistema se encuentra en un punto de equilibrio<sup>2</sup> conocido, digamos  $x_e$ . En algún tiempo  $t_f$ , el sistema experimenta una falla e ingresamos a la estructura del sistema de falla, en el tiempo  $t_{cl}$ <sup>3</sup> la falla es liberada, ocasionando un cambio estructural en el sistema. Suponga que la duración de la falla está limitada al intervalo de tiempo  $[t_f, t_{cl}]$ . Durante este intervalo de tiempo, el sistema es descrito por la dinámica de falla dada por

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)), \quad t_f \leq t < t_{cl} \quad (1.2)$$

donde  $x(t)$  es el vector de estado del sistema en el tiempo  $t$ . En algunos casos el sistema de falla puede involucrar la descripción de más de una acción, como relevadores o interruptores de potencia. En estos casos, la dinámica de falla es descrita por varios conjuntos de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_F^1(x(t)), & t_f \leq t < t_{F,1} \\ \dot{x}(t) &= f_F^2(x(t)), & t_{F,1} \leq t < t_{F,2} \\ &\vdots \\ \dot{x}(t) &= f_F^k(x(t)), & t_{F,k} \leq t < t_{cl}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> Ver apéndice 1 en él se encontrará la definición de punto de equilibrio y otras definiciones concernientes a este capítulo.

<sup>3</sup>  $t_{cl}$ : Tiempo de liberación crítico.

El número de conjuntos de ecuaciones corresponde al número de acciones causadas por relevadores o interruptores de potencia. Suponga que la falla es liberada en el tiempo  $t_{cl}$  y el sistema de ahora en adelante está descrito por la dinámica de postfalla

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t_{cl} \leq t < \infty. \quad (1.3)$$

Ahora suponga que el sistema (1.3) tiene un punto de equilibrio  $x_s$  asintóticamente estable (diferente a  $x_e$  el punto de equilibrio de prefalla), el cual satisface las condiciones de operación. Considerando lo anteriormente mencionado, se puede decir que el problema fundamental de estabilidad transitoria es como sigue:

*Iniciando desde el estado inicial de postfalla  $x(t_{cl})$ , el sistema de postfalla converge a la condición de estado estable?* En otras palabras, el análisis de estabilidad del sistema de potencia determina si el punto inicial del sistema de postfalla está localizado dentro de la región de atracción de un punto de equilibrio estable aceptable.

Aquí cabe aclarar que el objetivo de esta tesis no es obtener la región de atracción para el sistema de potencia que se estudiará, sino analizar y diseñar controladores que estabilicen al sistema en base a funciones de energía en utilizando específicamente la formulación Hamiltoniana. En dado caso, lo que si se hará será verificar la estabilidad del sistema por medio de los métodos de Lyapunov.

Como se mencionó anteriormente, el método mas popular para analizar la estabilidad transitoria es calcular el comportamiento de postfalla por medio de integraciones numéricas. Por otro lado, en los métodos basados en funciones de energía, primero se supone que el sistema de postfalla tiene un punto de equilibrio estable  $x_s$ , el cual satisface las condiciones de operación del sistema de potencia para un estado estable aceptable. En pocas palabras, si el punto inicial de la trayectoria de postfalla se encuentra dentro de la región de atracción del sistema de postfalla, el sistema será estable y el controlador hará que el sistema llegue al punto de equilibrio estable en un tiempo menor al de su respuesta natural, esto sin hacer ninguna integración numérica para identificar su trayectoria.

### 1.1 Métodos directos (una introducción para sistemas eléctricos de potencia)

La base de la evaluación de estabilidad que ofrecen los métodos directos para un sistema de postfalla es el conocimiento de la región de atracción: *si la condición inicial del sistema de postfalla se sitúa dentro de la región de estabilidad del punto de equilibrio estable deseado, entonces, se puede asegurar sin ninguna integración numérica que la trayectoria de postfalla convergerá al punto de equilibrio estable deseado.* A partir, del criterio de áreas iguales<sup>4</sup> es posible obtener una expresión matemática que represente la energía del sistema, esto se demuestra en [7].

Considere un sistema de una máquina conectada a un bus infinito, descrita por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= P_m - (D\omega + P_0 \sin \delta)\end{aligned}$$

dónde:

$\delta$ = Posición angular del rotor	$D$ = Factor de amortiguamiento
$\omega$ = Velocidad angular del rotor	$M$ = Constante de inercia
$P_m$ = Potencia Mecánica	$-(D\omega + P_0 \sin \delta)$ = Potencia eléctrica

Existen tres puntos de equilibrio dentro del rango de  $\{(\delta, \omega) = -\pi < \delta < \pi, \omega = 0\}$ , y ellos son  $(\delta_s, 0) = (\arcsin(P_m/P_0), 0)$  el cual es un punto de equilibrio estable, y  $(\delta_1, 0) = (\pi - \arcsin(P_m/P_0), 0)$ ,  $(\delta_2, 0) = (-\pi - \arcsin(P_m/P_0), 0)$  son puntos de equilibrio inestables. Por otro lado, si se considera la siguiente función, a la que llamaremos función de energía

$$E(\delta, \omega) = \frac{1}{2}M\omega^2 - P_m\delta - P_0 \cos \delta$$

<sup>4</sup> Ver apéndice 1

Esta función puede ser dividida en energía cinética  $K(\omega)$  y energía potencial  $U(\omega)$ , de modo que

$$E(\delta, \omega) = K(\omega) + U(\delta)$$

donde  $K(\omega) = \frac{1}{2}M\omega^2$  y  $U(\delta) = -P_m\delta - P_0 \cos \delta$ .

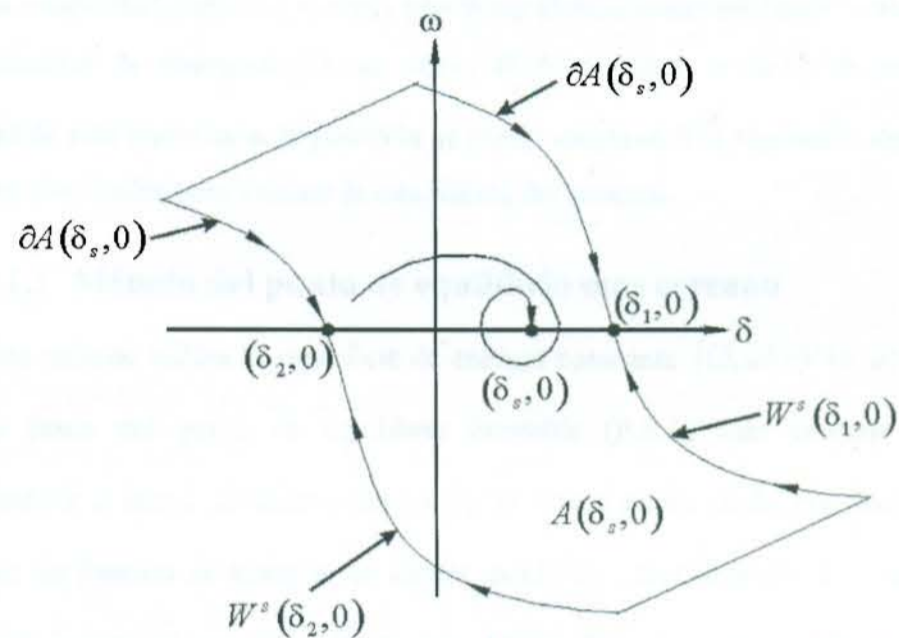


Figura 1.1 Posición del punto de equilibrio estable  $(\delta_s, 0)$ .

El sistema es de dimensión 2, por lo tanto, la región de estabilidad de  $(\delta_s, 0)$ ;  $A(\delta_s, 0)$ , y el límite de estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$  está compuesto por la variedad estable del punto de equilibrio inestable  $(\delta_1, 0)$  y la variedad estable del punto de equilibrio inestable  $(\delta_2, 0)$  (ver Figura 1.1). El punto de equilibrio inestable  $(\delta_1, 0)$  tiene el mas bajo valor de la función de energía entre todos los puntos de equilibrio inestable sobre el límite estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$ . Es por eso que a  $(\delta_1, 0)$  se le llama el punto de equilibrio inestable mas cercano de  $(\delta_s, 0)$  con respecto a la función de energía  $U(\delta)$ . Es posible observar que la intersección entre  $A(\delta_s, 0)$  y el espacio ángulo  $\{(\delta, \omega) : \delta = R, \omega = 0\}$  es  $A_\delta \triangleq \{(\delta, \omega) : \delta \in [\delta_2, \delta_1], \omega = 0\}$ .

1. El límite de esta región unidimensional  $A_\delta$  está compuesto de dos puntos  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , donde  $(\delta_1, 0)$  y  $(\delta_2, 0)$  son los puntos de equilibrio inestable sobre el límite de estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$
2. Estos dos puntos  $\delta_1, \delta_2$  son el máximo local de la función de energía potencial.

La estabilidad para este sistema puede ser directamente evaluada tomando como base la función de energía  $U(\delta)$ , es decir, si  $\delta$  comienza a decrecer, entonces la estabilidad de esta trayectoria de postfalla se puede asegurar. Los siguientes dos métodos pueden ser empleados para evaluar la estabilidad del sistema.

### 1.1.1 Método del punto de equilibrio mas cercano

Este método utiliza la superficie de energía constante  $\{(\delta, \omega) : V(\delta, \omega) = U(\delta_1)\}$  que pasa cerca del punto de equilibrio inestable (P.E.I.) mas cercano  $(\delta_1, 0)$  y aproximándose al límite de estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$ . Si un estado dado, por decir  $(\delta_{cl}, \omega_{cl})$ , cuyo valor de función de energía es menor que  $U(\delta_1)$ , entonces  $(\delta_{cl}, \omega_{cl})$  se cataloga dentro de la región de atracción  $(\delta_s, 0)$  (ver Figura 1.2). Así, uno puede aseverar, sin ninguna integración numérica, que la trayectoria resultante coincidirá con  $(\delta_s, 0)$ . Este método aunque muy simple, proporciona evaluaciones de estabilidad conservadoras; especialmente para aquellas trayectorias de falla que cruzan el límite de estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$  a través de la variedad estable  $W^s(\delta_2, 0)$  (ver Figura 1.2). Por ejemplo la trayectoria de postfalla que comienza en el punto P, la cual converge dentro de la región de estabilidad  $A(\delta_s, 0)$ , se clasifica como inestable por el método del punto de equilibrio mas cercano mientras que de hecho la trayectoria resultante convergerá a  $(\delta_s, 0)$  y por lo tanto es estable (ver Figura 1.3).

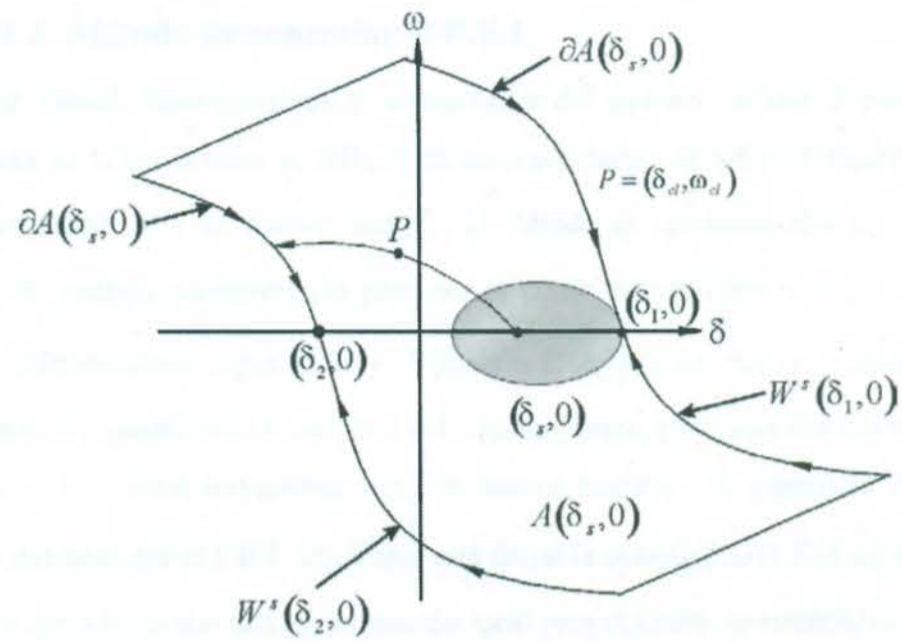


Figura 1.2 El método del punto de equilibrio más cercano da evaluaciones de estabilidad conservadoras para aquellas trayectorias que cruzan el límite de estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$ .

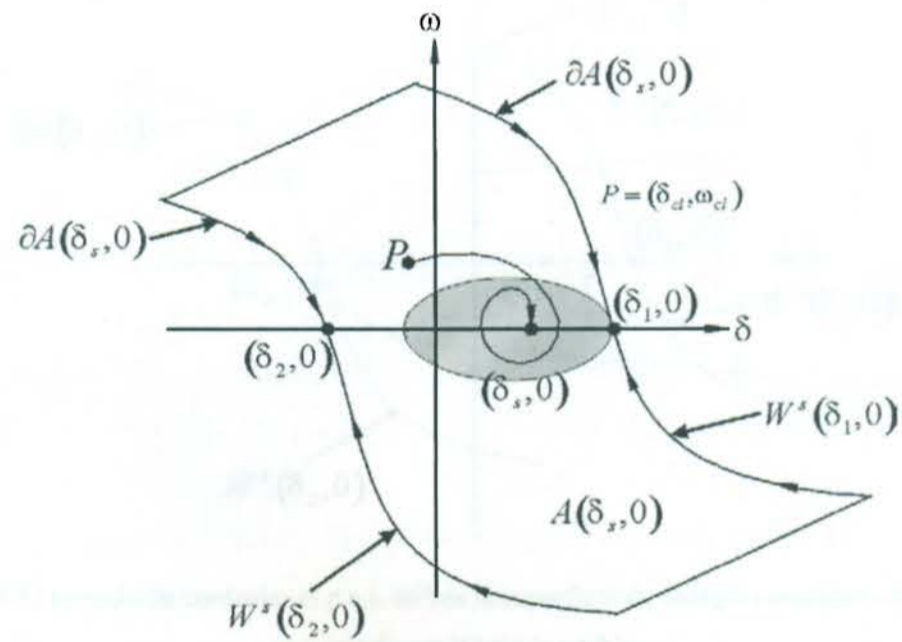


Figura 1.3 El método del p.e.i. más cercano utiliza superficie de energía constante que pasa por p.e.i. sobre el límite de estabilidad  $\partial A(\delta_s, 0)$ . El área sombreada es el estimado de estabilidad.

### 1.1.2 Método de controlar el P.E.I.

Este método intenta reducir lo conservador del método anterior al considerar la dependencia de la trayectoria de falla. Para las trayectorias de falla  $(\delta(t), \omega(t))$  en las que la trayectoria  $\delta(t)$  se mueve hacia  $\delta_1$ , el método de controlar el P.E.I. utiliza la superficie de energía constante que pasa por el punto de equilibrio inestable  $(\delta_1, 0)$ , la cual está definida como sigue  $\{(\delta, \omega) : E(\delta, \omega) = U(\delta_1)\}$  y es una aproximación local para el límite de estabilidad de interés. De la misma forma, para aquellas trayectorias de falla  $(\delta(t), \omega(t))$  cuya trayectoria  $\delta(t)$  se mueve hacia  $\delta_2$ , la superficie de energía constante que pasa por el P.E.I.  $(\delta_2, 0)$  que está definida como  $\{(\delta, \omega) : E(\delta, \omega) = U(\delta_2)\}$ , también es escogida como una aproximación local para el límite de estabilidad de interés (ver Figura 1.4).

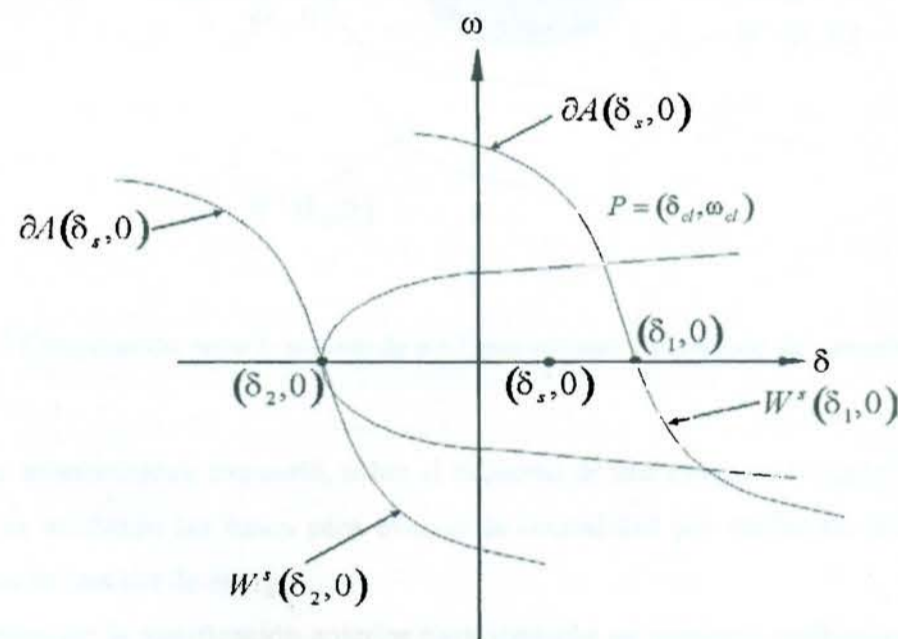


Figura 1.4 El método de controlar el p.e.i. utiliza la superficie de energía constante que pasa por el punto de equilibrio inestable.

Por lo tanto, para cada trayectoria de falla, le corresponde un único punto de equilibrio inestable para el cual la variedad estable constituye el límite de estabilidad de interés.



Este método aunque un poco más complicado que el anterior, ofrece una evaluación de estabilidad más precisa y menos conservadora que el método del punto del P.E.I. más cercano. Por ejemplo, para una trayectoria de postfalla que inicie desde el estado  $(\bar{\delta}, \bar{\omega})$ , el cual está dentro de la región de estabilidad  $A(\delta_s, 0)$  se clasifica correctamente como estable por el método de controlar el P.E.I. mientras que por el método del P.E.I. más cercano se clasifica como inestable, (ver Figura 1.5)

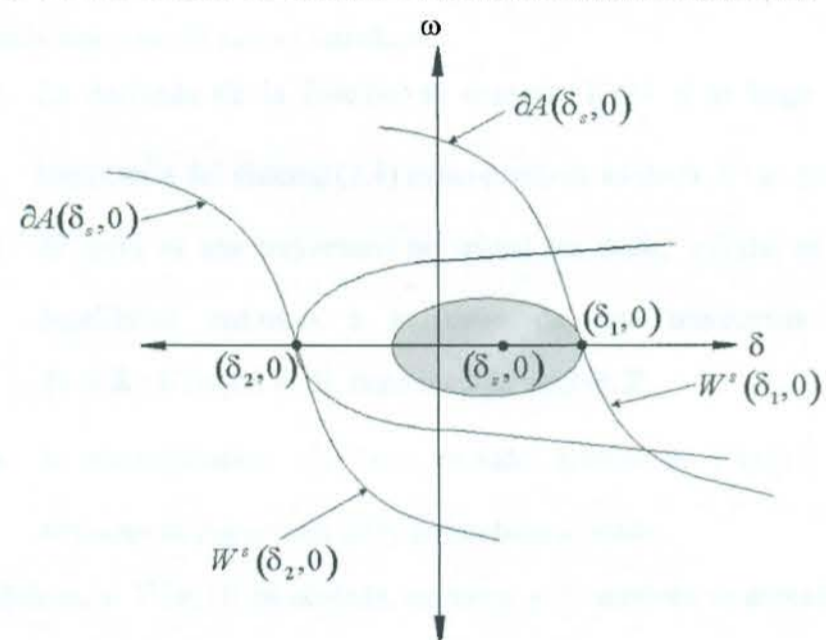


Figura 1.5 Comparación entre el método de p.e.i más cercano y el método de controlar el P.E.I.

Lo anteriormente expuesto, sobre el esquema de una máquina conectada a un bus infinito, ha mostrado las bases para evaluar la estabilidad por medio de dos métodos basados en la función de energía.

Extender la justificación anterior para sistemas de potencia multimáquina no es fácil y a esto se debe principalmente a la dificultad de emplear las técnicas de evaluación de estabilidad por medio de los métodos. Ahora se presentarán los fundamentos teóricos relacionados con la función de energía.

## 1.2 Función de energía

En esta sección se revisarán algunos resultados analíticos relacionados con la teoría de la función de energía.

Se dice que una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de energía para el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.4)$$

si las siguientes tres condiciones se satisfacen

1. La derivada de la función de energía  $V(x)$  a lo largo de cualquier trayectoria del sistema (1.4) es no-positiva, es decir,  $\dot{V}(x) \leq 0$ .
2. Si  $x(t)$  es una trayectoria no trivial (es decir,  $x(t)$  no es un punto de equilibrio), entonces a lo largo de esta trayectoria el conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(x(t)) = 0\}$  tiene medida cero en  $\mathbb{R}$ .
3. Si una trayectoria  $x(t)$  tiene un valor acotado de  $V(x(t))$  para  $t \in \mathbb{R}^+$ , entonces la trayectoria  $x(t)$  es también acotada.

En pocas palabras, si  $V(x(t))$  es acotada, entonces  $x(t)$  también es acotada.

La propiedad 1 indica que la energía es no-increciente a lo largo de las trayectorias del sistema, pero no implica que la energía es estrictamente decreciente a lo largo de su trayectoria. Existe también un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  tal que  $\dot{V}(x(t)) = 0$  para  $t \in [t_1, t_2]$ . Las propiedades 1 y 2 en conjunto implican que la energía es estrictamente decreciente a lo largo de cualquier trayectoria del sistema. La propiedad 3 establece que, a lo largo de cualquier trayectoria del sistema, la función de energía es un mapeo propio<sup>5</sup> pero su energía no necesita ser un mapeo propio para todo el espacio de estado. Una función de energía no es una función de Lyapunov.

---

<sup>5</sup> Se dice que  $f : x \rightarrow y$  es un *mapeo propio* si para cada conjunto compacto  $D$  en  $y$ , el conjunto  $f^{-1}(D)$  es compacto en  $x$ .

En general, los comportamientos de las trayectorias de los sistemas dinámicos no lineales pueden ser muy complicados, a menos que el sistema dinámico esencial tenga alguna propiedad especial.

Hasta aquí ya se ha planteado el problema a resolver, antecedentes acerca de cómo se ha tratado este problema anteriormente y se ha visto también el planteamiento del esquema sobre el cual se tratará el problema de control de un sistema de potencia. Lo que a continuación veremos será el desarrollo propuesto para la solución de este problema.

### **1.3 Organización de la Tesis**

Esta tesis está organizada en seis capítulos.

- ✓ El primer capítulo es una introducción al tema de este proyecto de tesis, en él se establece y define el problema de estabilidad transitoria de sistemas de potencia, se incluyen también algunas referencias y comentarios acerca de cómo se ha venido tratando este problema en la industria eléctrica y desde el punto de vista de la teoría de control esto último con referencia a las técnicas aquí propuestas, estableciendo también las diferencias existentes en las distintas maneras de resolver el problema de estabilidad de sistemas eléctricos de potencia.
- ✓ Para iniciar con este estudio, en el capítulo 2 se desarrollará la representación matemática de una máquina síncrona, ya que como sabemos, nuestro interés es mantener en sincronía a varias máquinas interconectadas, y la representación matemática seleccionada es un punto importante para estudios de estabilidad. Al final se deducirá el modelo matemático que será empleado en el diseño de diferentes técnicas de control y se comentarán algunas conclusiones.
- ✓ Después de estudiar a la máquina síncrona, en el capítulo 3 se dará un punto de vista geométrico en el diseño de controladores retroalimentados, se verá su desempeño con respecto al sistema de lazo abierto, para esto se iniciará con una breve introducción de esta clase de controladores y algunas definiciones necesarias, continuando con los resultados de simulación.

- ✓ En el capítulo 4, iniciaremos con el diseño de controladores basados en funciones de energía, en específico, el diseño de controladores tipo  $L_gV$  (estos controladores utilizan la función de Lyapunov como base para estabilizar el sistema). Después se comentará acerca del tema de pasividad de sistemas dinámicos, para luego continuar con algunas definiciones y análisis de los controladores tipo  $L_gV$ . Finalmente se presentarán resultados de simulación ejemplificando la discusión de los controladores mencionados.
- ✓ En el capítulo 5 se presenta el esquema de sistemas Hamiltonianos,. El capítulo inicia con una introducción a este tipo de sistemas. Se verá la deducción de un sistema Hamiltoniano generalizado y el diseño de controladores y observadores para esta clase de sistemas.
- ✓ Finalmente, en el capítulo 6, se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis, así como algunas recomendaciones para quienes deseen continuar con esta investigación. Para cerrar el capítulo proponen algunos trabajos futuros.

## Capítulo 2 Modelo Matemático del Generador

### 2.1 Introducción

Para cualquier estudio de la dinámica de un sistema eléctrico de potencia es preciso escoger un modelo matemático apropiado [13]. En la selección del modelo matemático se debe de considerar tanto el problema a resolver así como las facilidades computacionales y técnicas de control disponibles. Partiendo que el generador síncrono es el principal elemento de estudio dentro del problema de estabilidad de un sistema eléctrico de potencia, es importante entender sus características y modelar adecuadamente su desempeño dinámico. El problema consiste básicamente en mantener en sincronía varios generadores interconectadas.

En este capítulo, se describirá el desarrollo del modelo matemático de una máquina síncrona que es el protagonista dentro de los estudios de estabilidad en sistemas de potencia.

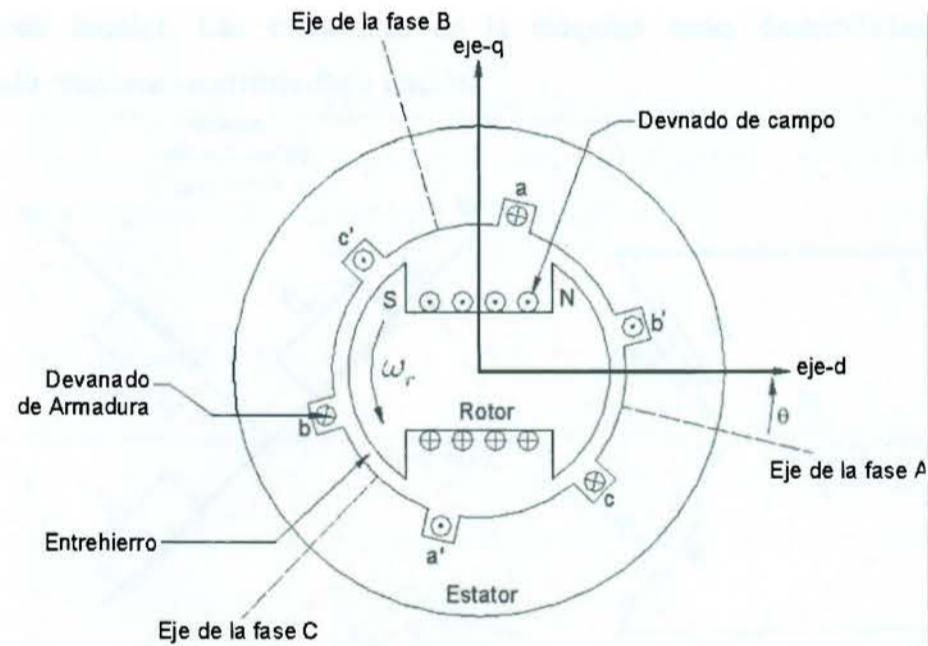


Figura 2.1 Diagrama esquemático de una máquina síncrona

## 2.2 Modelo matemático del Generador

Para el desarrollo de las ecuaciones de la máquina síncrona se hacen las siguientes hipótesis:

- Los devanados del estator están sinusoidalmente distribuidos a lo largo del entrehierro en lo que se refiere a los efectos mutuos con el rotor.
- Las ranuras del estator causan variaciones no apreciables de las inductancias y la posición del rotor.
- El efecto de histéresis magnética se desprecia.
- Los efectos de saturación magnética se desprecian.

Las suposiciones a), b) y c) son razonables. La razón principal por lo que se consideran estas suposiciones, es debido a la comparación de los desempeños calculados basándose en estas suposiciones en comparación con los desempeños medidos en la actualidad. La suposición d) se hace por conveniencia de análisis. Se desprecia la saturación magnética debido a que de esta forma se trata solamente con circuitos magnéticos lineales. Las ecuaciones de la máquina serán desarrolladas primero asumiendo relaciones corriente-flujo lineales.

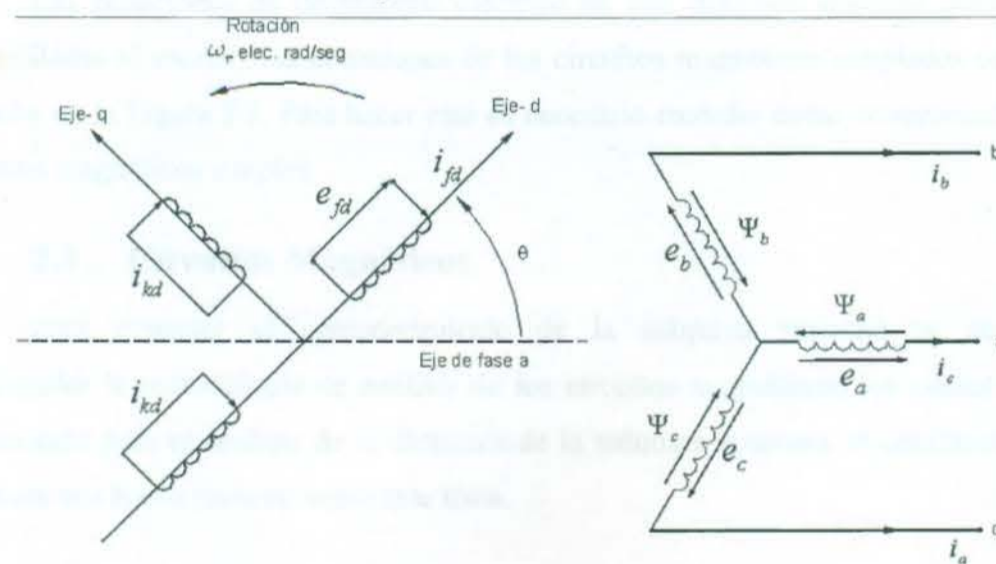


Figura 2.2 Circuitos del rotor y del estator de una máquina síncrona

La Figura 2.2 muestra los circuitos relacionados en el análisis de la máquina síncrona. Los circuitos del estator están formados por devanados de armadura trifásicos

asimismo los devanados del rotor son formados por devanados amortiguadores y devanados de campo, los cuales están conectados a una fuente de corriente directa. Para propósitos de análisis, se asume que las corrientes en los devanados amortiguadores fluyen a través de dos conjuntos de circuitos cerrados: un conjunto cuyo flujo está alineado con el devanado de campo a lo largo del eje-d y el otro conjunto que está alineado con el eje-q. Para estudios de estabilidad de sistemas de potencia, pocas veces es necesario representar más de dos o tres circuitos en cada eje. Por simplicidad, en la Figura 2.2 solo se considerará un devanado amortiguador en cada eje y se escribirán las ecuaciones de la máquina sobre esta suposición. Sin embargo, implícitamente se considera un número arbitrario de circuitos amortiguadores denotándolos por el subíndice  $k$

En la Figura 2.2,  $\theta$  está definido como el ángulo que indica la rotación en el *eje-d* del devanado de la fase  $a$ . Debido a que el rotor está girando con respecto al estator, al ángulo  $\theta$  es continuamente creciente y está relacionado con la velocidad angular del rotor  $\omega_r$  y el tiempo  $t$  por la siguiente relación

$$\theta = \omega_r t \quad (2.1)$$

Las ecuaciones de desempeño eléctrico de una máquina síncrona pueden ser desarrolladas al escribir las ecuaciones de los circuitos magnéticos acoplados como se describe en la Figura 2.2. Para hacer esto es necesario recordar como se representan los circuitos magnéticos simples.

### 2.3 Circuitos Magnéticos

Para entender el comportamiento de la máquina síncrona es necesario comprender la metodología de análisis de los circuitos magnéticos, los cuales son el fundamento para el análisis de la dinámica de la máquina síncrona. A continuación se mostrará una breve revisión sobre este tema.

#### 2.3.1 Circuito simple

Considere el circuito de la Figura 2.3. Se puede observar que la bobina tiene  $N$  vueltas y cuenta con una resistencia  $r$  conectada en serie con la bobina. Se asume que

tiene una relación lineal de fuerza magnetomotriz (fmm). De acuerdo con la Ley de Faraday, el voltaje inducido  $e_i$  es

$$e_i = \frac{d\psi}{dt} \quad (2.2)$$

donde  $\psi$  es el valor instantáneo del encañamiento de flujo con respecto al tiempo. El voltaje en terminales está dado por

$$e_1 = \frac{d\psi}{dt} + ri \quad (2.3)$$

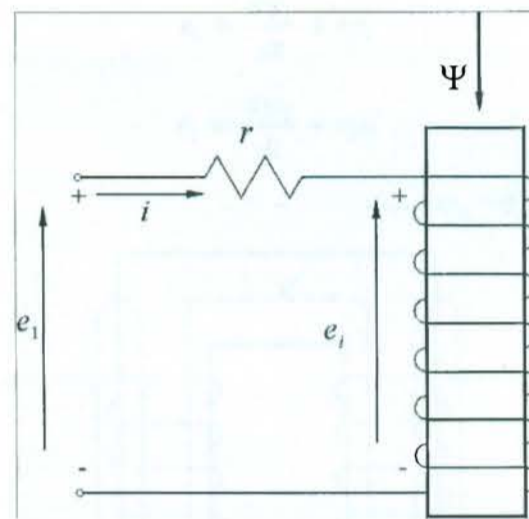


Figura 2.3 Circuito magnético simple.

El encañamiento de flujo puede ser expresado en términos de la inductancia  $L$  del circuito

$$\psi = Li \quad (2.4)$$

La inductancia, por definición, es igual al encañamiento de flujo por unidad de corriente. Por lo tanto

$$L = N \frac{\psi}{i} = N^2 P \quad (2.5)$$

donde

$P$  = Permeabilidad de la trayectoria magnética

$\psi$  = Flujo =  $(MMF) P = NiP$



### 2.3.2 Circuitos magnéticamente acoplados

Consideremos el circuito de la Figura 2.4, el cual contiene dos devanados magnéticamente acoplados. Estos devanados tienen un número de vueltas  $N_1$  y  $N_2$ , y resistencias  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. Se asume que la trayectoria magnética tiene una relación flujo-fmm lineal. Las corrientes de los devanados  $i_1$  e  $i_2$  son considerados positivos en los devanados como se muestra en la Figura 2.4. Los voltajes en terminales son

$$e_1 = \frac{d\psi_1}{dt} + r_1 i_1 \quad (2.6)$$

$$e_2 = \frac{d\psi_2}{dt} + r_2 i_2 \quad (2.7)$$

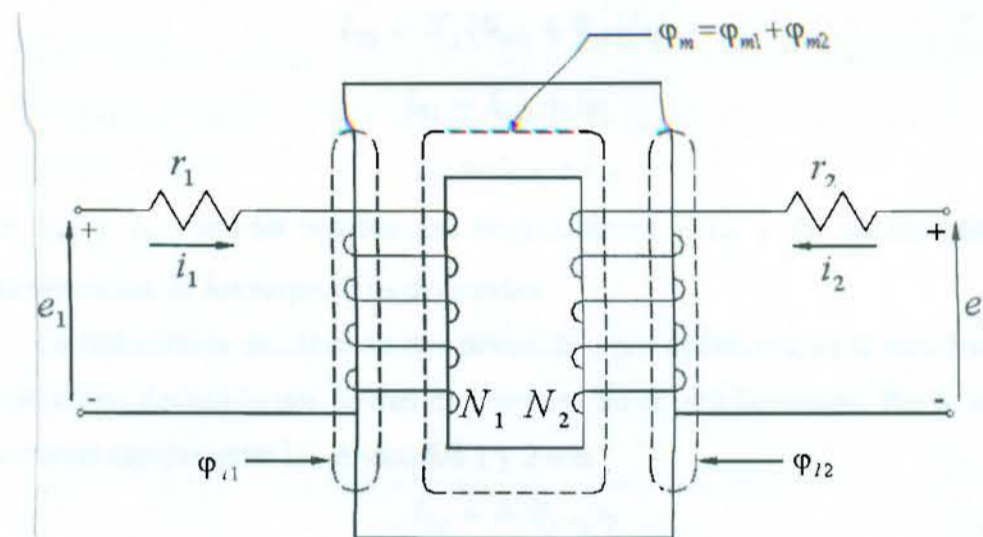


Figura 2.4 Circuitos Magnéticamente Acoplados

El campo magnético está definido por las corrientes en ambos devanados. Por lo tanto,  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son los encadenamientos de flujo con sus respectivos devanados producidos por el efecto total de ambas corrientes. Así tenemos que

$$\psi_1 = N_1(\Phi_{m1} + \Phi_{i1}) + N_1\Phi_{m2} \quad (2.8)$$

$$\psi_2 = N_2(\Phi_{m2} + \Phi_{i2}) + N_2\Phi_{m1} \quad (2.9)$$

donde

$\Phi_{m1}$  = Encadenamiento de flujo mutuo de los dos devanados debido a la corriente del devanado 1.

$\Phi_{l1}$  = Perdida en el encadenamiento de flujo debido al devanado 1 solamente.

$\Phi_{m2}$  = Encadenamiento de flujo mutuo de los dos devanados debido a la corriente del devanado 2.

$\Phi_{l2}$  = Perdida en el encadenamiento de flujo debido al devanado 2 solamente.

Los encadenamientos de flujo pueden ser expresados en términos de inductancia propia o inductancia mutua cuyas expresiones son dadas abajo.

La inductancia propia, por definición, es el encadenamiento de flujo por unidad de corriente, en el mismo devanado. De acuerdo con la definición la inductancia propia para el devanado 1 y 2 tenemos que

$$L_{11} = N_1 (\Phi_{m1} + \Phi_{l1}) / i_1 \quad (2.10)$$

$$L_{22} = N_2 (\Phi_{m2} + \Phi_{l2}) / i_2 \quad (2.11)$$

$$L_{11} = L_{m1} + L_{l1} \quad (2.12)$$

$$L_{22} = L_{m2} + L_{l2} \quad (2.13)$$

donde  $L_{m1}$  y  $L_{m2}$  son las inductancias magnetizantes, y  $L_{l1}$  y  $L_{l2}$  las inductancias de encadenamiento, de los respectivos devanados.

La inductancia mutua entre dos devanados, por definición, es el encadenamiento de flujo en un devanado por unidad de corriente en el otro devanado. Por lo tanto, las inductancias mutuas entre los devanados 1 y 2 son

$$L_{12} = N_1 \Phi_{m2} / i_2 \quad (2.14)$$

y

$$L_{21} = N_2 \Phi_{m1} / i_1 \quad (2.15)$$

Si  $P$  es la permeabilidad del la trayectoria del flujo mutuo

$$\Phi_{m1} = N_1 i_1 P \quad (2.16)$$

$$\Phi_{m2} = N_2 i_2 P \quad (2.17)$$

de las ecuaciones (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) se ve que

$$L_{12} = L_{21} = N_1 N_2 P \quad (2.18)$$

Al sustituir las ecuaciones desde la (2.12) a la (2.15) en las ecuaciones (2.8) y (2.9) dan las siguientes expresiones para los devanados de encadenamiento de flujo 1 y 2 de la inductancia mutua y la inductancia propia

$$\psi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (2.19)$$

$$\psi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad (2.20)$$

En las ecuaciones anteriores, es importante diferenciar entre los encadenamientos de flujo mutuo y flujo propio mediante el uso de un signo algebraico apropiado para la inductancia mutua. La inductancia mutua es positiva si existen corrientes positivas en los dos devanados que producen flujos mutuos y flujos propios en la misma dirección, de otra forma es negativo.

Relacionando las ecuaciones de voltaje (2.6) y (2.7) junto con las ecuaciones de encadenamiento de flujo (2.19) y (2.20) dan por resultado las ecuaciones de desempeño de los circuitos acoplados estáticos lineales de la Figura 2.4. Para esta representación, la inductancia mutua y la inductancia propia son usadas como parámetros. Una inductancia representa la proporción entre el encadenamiento de flujo y una corriente. Como se vio en las ecuaciones (2.5) y (2.18) una inductancia es directamente proporcional a la permeabilidad de la trayectoria de flujo asociado.

Hasta aquí se han revisado las ecuaciones que describen matemáticamente las relaciones entre voltaje, corriente, flujo magnético e inductancia para circuitos magnéticos simples; en la sección siguiente emplearemos esos conceptos para desarrollar las ecuaciones dinámicas de una máquina síncrona.

#### 2.4 Ecuaciones Básicas de una Máquina Síncrona

La forma general de las ecuaciones obtenidas en la sección previa se aplica a los circuitos acoplados de la Figura 2.2. Sin embargo, usaremos la convención para las polaridades para el generador tal que la dirección positiva de la corriente del devanado del estator se asumirá ser hacia afuera de la máquina. La dirección positiva de las corrientes de campo y devanados amortiguadores se asumirá hacia adentro de la máquina.

Además del gran número de circuitos envueltos, el hecho de que las inductancias propias e inductancias mutuas del devanado del rotor varíen con la posición del rotor, complica la deducción de las ecuaciones de la máquina síncrona. Las variaciones en las inductancias son causadas por las variaciones en la permeabilidad en el flujo magnético debido a la no uniformidad del entrehierro. Este fenómeno es más evidente en la

máquina de polos salientes en la cual la permeabilidad de los dos ejes es significativamente diferente. Aún en una máquina de rotor circular existen diferencias en los dos ejes debido principalmente al gran número de ranuras asociadas al devanado de campo.

El flujo producido por el devanado del estator sigue una trayectoria a través del núcleo del estator, por el entrehierro y por el núcleo del rotor regresando de nuevo a través del entrehierro. Las variaciones en la permeabilidad de esta trayectoria como una función de la posición del rotor pueden ser aproximadas por

$$P = P_0 + P_2 \cos 2\alpha \quad (2.21)$$

En la ecuación anterior,  $\alpha$  es la distancia angular del eje-d a lo largo de la periferia como se muestra en la Figura 2.5.

La notación a utilizar para la deducción de las ecuaciones de la máquina síncrona para el estator y el rotor es la siguiente:

$e_a, e_b, e_c$  = Voltajes instantáneos del estator de fase a neutro.

$i_a, i_b, i_c$  = Corrientes instantáneas del estator en las fases a, b, c.

$e_{fd}$  = Voltaje de campo

$i_{fd}, i_{kd}, i_{kq}$  = Corrientes de los circuitos de campo y amortiguadores.

$R_{fd}, R_{kd}, R_{kq}$  = Resistencias del circuito del rotor.

$l_{aa}, l_{bb}, l_{cc}$  = Inductancias propias del devanado del estator.

$l_{ab}, l_{bc}, l_{ca}$  = Inductancias mutuas entre los devanados del estator.

$l_{afd}, l_{akd}, l_{akq}$  = Inductancias mutuas entre los devanados del rotor y del estator.

$l_{ffd}, l_{kkd}, l_{kkq}$  = Inductancias propias de los circuitos del rotor.

$R_a$  = Resistencia de armadura por fase

$p$  = Operador diferencial  $d/dt$ .

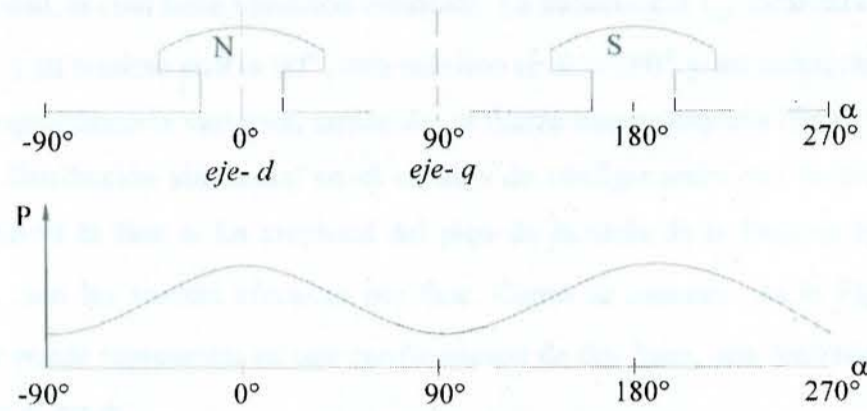


Figura 2.5 Variación de la permeabilidad con respecto a la posición del rotor.

### 2.4.1 Ecuaciones del circuito del estator

Las ecuaciones de voltaje de las tres fases son

$$e_a = \frac{d\Psi_a}{dt} - R_a i_a = p \Psi_a - R_a i_a \quad (2.22)$$

$$e_b = p \Psi_b - R_a i_b \quad (2.23)$$

$$e_c = p \Psi_c - R_a i_c \quad (2.24)$$

El encadenamiento de flujo en el devanado de la fase a está dado por

$$\Psi_a = -l_{aa} i_a - l_{ab} i_b - l_{ac} i_c + l_{afd} i_{fd} + l_{akd} i_{kd} + l_{akq} i_{kq} \quad (2.25)$$

Las expresiones para los encadenamientos de flujo de las fases b y c son de forma semejante. Las unidades usadas son webers, henrys y amperes. El signo negativo asociado con el devanado del estator es debido a la convención asumida en párrafos anteriores.

Como se mostró anteriormente, todas las inductancias en la ecuación (2.25) son función de la posición del rotor, y por lo tanto varían con el tiempo.

### 2.4.2 Inductancia propia del estator

La inductancia propia  $l_{aa}$  es igual a la proporción del encadenamiento de flujo del devanado de la fase a con respecto a la corriente  $i_a$ , con las corrientes en todos los demás circuitos igual a cero. La inductancia es directamente proporcional a la

permeabilidad, la cual tiene variación armónica. La inductancia  $l_{aa}$  alcanzará su máximo en  $\theta = 0^\circ$  y su mínimo en  $\theta = 90^\circ$ , otro máximo en  $\theta = 180^\circ$  y así sucesivamente.

Despreciando la variación armónica, la fuerza magnetomotriz (fmm) de la fase a tiene una distribución sinusoidal en el espacio de configuración con su pico centrado sobre el eje de la fase a. La amplitud del pico de la onda de la fmm es igual a  $N_a i_a$ , donde  $N_a$  son las vueltas efectivas por fase. Como se muestra en la Figura 2.6, lo anterior se puede representar en una configuración de dos fmm, una centrada en el eje-d y la otra en el eje-q.

Los valores pico de las dos componentes de onda son

$$MMF_{ad} = N_a i_a \cos \theta \quad (2.26)$$

$$MMF_{aq} = N_a i_a \cos(\theta + 90^\circ) = -N_a i_a \sin \theta \quad (2.27)$$

La razón para resolver la fmm mediante las componentes de los ejes d-q es por que cada uno de ellos actúa específicamente sobre la geometría del entrehierro de la configuración definida. Los flujos del entrehierro por polo a lo largo de los dos ejes son

$$\Phi_{gad} = (N_a i_a \cos \theta) P_d \quad (2.28)$$

$$\Phi_{gaq} = (-N_a i_a \sin \theta) P_q \quad (2.29)$$

$P_d$  y  $P_q$  son los coeficientes de permeabilidad de los ejes  $d$  y  $q$ , respectivamente. Además de la permeabilidad actual, estas ecuaciones incluyen factores que relacionan el flujo por polo con el valor pico de la fmm.

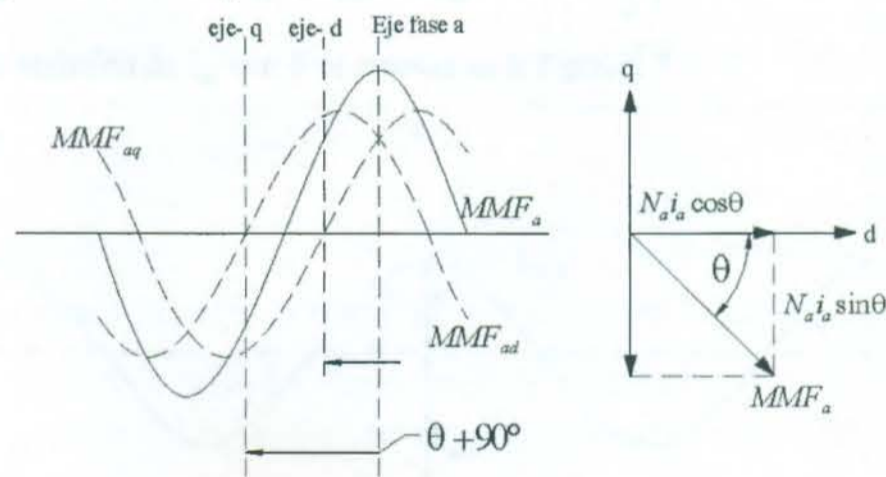


Figura 2.6 fmm de la fase a y sus componentes

El encadenamiento de flujo total en el entrehierro de la fase a es

$$\begin{aligned}
 \Phi_{gaa} &= \Phi_{gad} \cos \theta - \Phi_{gaq} \sin \theta \\
 &= N_a i_a (P_d \cos^2 \theta + P_q \sin^2 \theta) \\
 &= N_a i_a \left( \frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta \right)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

La inductancia propia  $l_{gaa}$  de la fase a debido al flujo del entrehierro es

$$\begin{aligned}
 l_{gaa} &= \frac{N_a \Phi_{gaa}}{i_a} \\
 &= N_a^2 \left( \frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta \right) \\
 &= L_{g0} + L_{aa2} \cos 2\theta
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

La inductancia propia total  $l_{aa}$  se obtiene al sumar a las ecuaciones anteriores las pérdidas de inductancia  $L_{al}$ , las cuales representan el flujo que no cruza el entrehierro

$$\begin{aligned}
 l_{aa} &= L_{al} + l_{gaa} \\
 &= L_{al} + L_{g0} + L_{aa2} \cos 2\theta \\
 &= L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Puesto que los devanados de las fases b y c son idénticos a los de la fase a y están desfasados de esta por  $120^\circ$  y  $240^\circ$  respectivamente, se obtiene

$$l_{bb} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{2.33}$$

$$l_{cc} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{2.34}$$

La variación de  $l_{aa}$  con  $\theta$  se muestra en la Figura 2.7

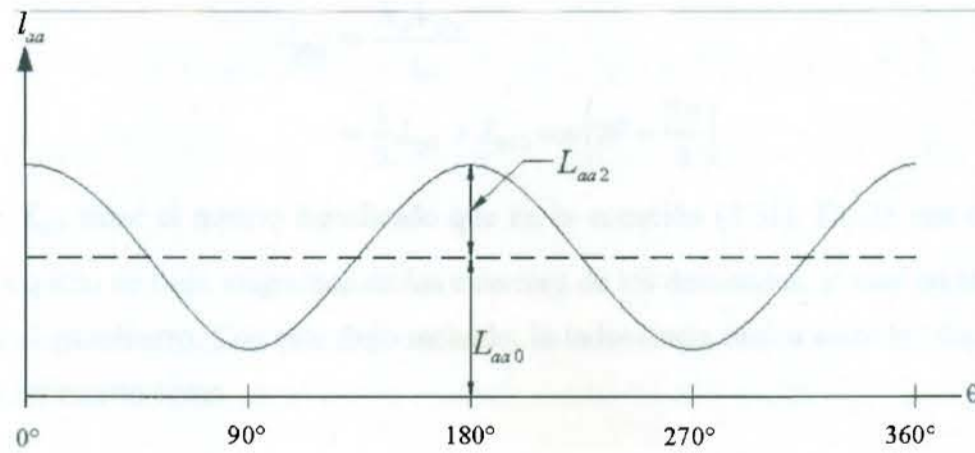


Figura 2.7 Variación de la autoinductancia de una fase del estator

En un buen diseño de una máquina síncrona en la cual los devanados del rotor y del estator producen flujo magnético y fmm muy similares a formas de onda sinusoidalmente distribuidas, los términos armónicos de orden superior son despreciables.

### 2.4.3 Inductancias mutuas del estator

La inductancia mutua entre dos devanados cualesquiera del estator también muestra una variación armónica de segundo orden debido a la forma del rotor. Este valor de inductancia es siempre negativo y alcanza su máximo (en valor absoluto) cuando los polos norte y sur son equidistantes de los centros de los dos devanados de interés. Por ejemplo,  $l_{ab}$  alcanza su valor máximo cuando  $\theta = -30^\circ$  o  $\theta = 150^\circ$ .

La inductancia mutua  $l_{ab}$  se puede calcular evaluando el flujo magnético del entrehierro  $\Phi_{gba}$  con encadenamiento en la fase b cuando solo la fase a está excitada. Como lo que deseamos es encontrar el encadenamiento de flujo en la fase b debido a la fmm de la fase a,  $\theta$  es remplazado por  $\theta - 2\pi/3$  en la (2.30)

$$\begin{aligned}\Phi_{gba} &= \Phi_{gad} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \Phi_{gaq} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= N_a i_a \left( P_d \cos\theta \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + P_q \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ &= N_a i_a \left( \frac{P_d + P_q}{4} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right)\end{aligned}\quad (2.35)$$

La inductancia mutua entre las fases a y b debido al flujo del entrehierro es

$$\begin{aligned}l_{gba} &= \frac{N_a \Phi_{gba}}{i_a} \\ &= \frac{1}{2} L_{g0} + L_{ab2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}\quad (2.36)$$

donde  $L_{g0}$  tiene el mismo significado que en la ecuación (2.31). Existe una cantidad muy pequeña de flujo magnético en los extremos de los devanados, el cual no alcanza a cruzar el entrehierro. Con este flujo incluido, la inductancia mutua entre las fases a y b puede ser escrito como



$$\begin{aligned}
 l_{ab} = l_{ba} &= L_{ab0} + L_{ab2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= -L_{ab0} - L_{ab2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

similarmente

$$l_{bc} = l_{cb} = -L_{ab0} - L_{ab2} \cos(2\theta - \pi) \tag{2.38}$$

$$l_{ca} = l_{ac} = -L_{ab0} - L_{ab2} \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \tag{2.39}$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se puede ver fácilmente que  $L_{ab2} = L_{aa2}$ . Este resultado era de esperarse debido a que la variación en la permeabilidad produce el término de la segunda armónica tanto en la inductancia propia como en la inductancia mutua. También se puede ver que  $L_{ab0}$  es aproximadamente igual a  $L_{aa0}/2$ .

La variación de la inductancia mutua entre las fases a y b como una función de  $\theta$  es ilustrada en la siguiente figura

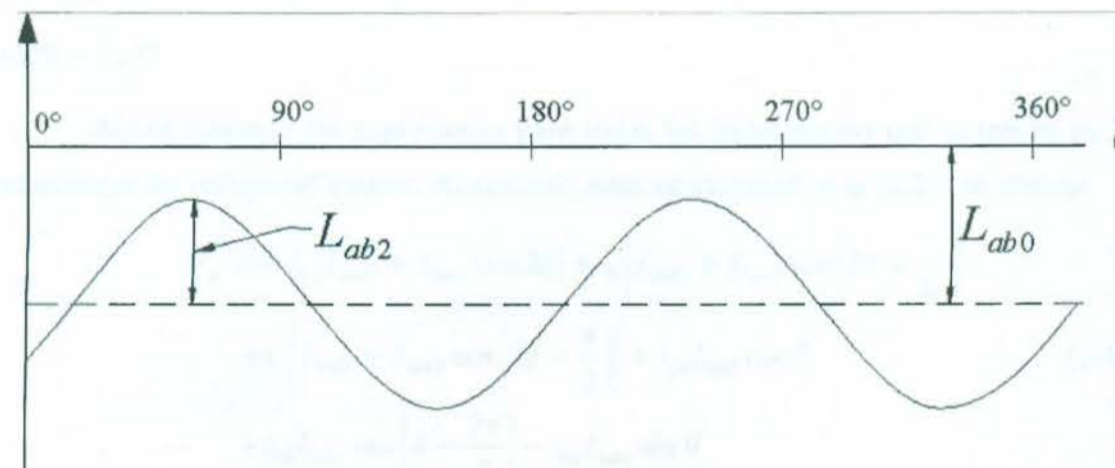


Figura 2.8 Variación de la inductancia mutua entre los devanados del estator.

#### 2.4.4 Inductancia mutua entre los devanados del rotor y del estator

Debido a que no se consideran las ranuras del estator, las variaciones en el entrehierro son despreciadas y los circuitos del rotor experimentan una permeabilidad constante. Por lo tanto, la situación en este caso no es de variación de permeabilidad,

sino que la variación en la inductancia mutua es causada por el movimiento relativo entre los devanados mismos.

Cuando el devanado del rotor está alineado con el devanado del estator, el encadenamiento de flujo y la inductancia mutua es máximo. Cuando los dos devanados son desplazados  $90^\circ$ , no se produce ningún encadenamiento de flujo entre los dos circuitos y de la inductancia mutua es cero.

Con una distribución sinusoidal de la fmm y las ondas de flujo

$$l_{afd} = L_{afd} \cos \theta \quad (2.40)$$

$$l_{akd} = L_{akd} \cos \theta \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} l_{akq} &= L_{akq} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -L_{akq} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para considerar la inductancia mutua entre el devanado de la fase b y los circuitos del rotor,  $\theta$  es reemplazado por  $\theta - 2\pi/3$ ; para la fase c,  $\theta$  es reemplazado por  $\theta + 2\pi/3$ .

Ahora tenemos las expresiones para todas las inductancias que aparecen en las ecuaciones de voltaje del estator. Al sustituir estas ecuaciones en la (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi_a &= -i_a [L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta] + i_b \left[ L_{ab0} + L_{aa2} \cos \left( 2\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &\quad + i_c \left[ L_{ab0} + L_{aa2} \cos \left( 2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \right] + i_{fd} L_{afd} \cos \theta \\ &\quad + i_{kd} L_{akd} \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) - i_{kq} L_{akq} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.43)$$

similarmente,

$$\begin{aligned} \Psi_b &= -i_a \left[ L_{ab0} + L_{aa2} \cos \left( 2\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] - i_b \left[ L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2 \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &\quad + i_c [L_{ab0} + L_{aa2} \cos (2\hat{\theta} - \pi)] + i_{fd} L_{afd} \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &\quad + i_{kd} L_{akd} \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) - i_{kq} L_{akq} \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_c = & -i_n \left[ L_{ab0} + L_{aa2} \cos \left( 2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \right] + i_b \left[ L_{ab0} + L_{aa2} \cos (2\theta - \pi) \right] \\ & - i_c \left[ L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2 \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + i_{fd} L_{afd} \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ & + i_{kd} L_{akd} \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) - i_{kq} L_{akq} \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

#### 2.4.5 Ecuaciones del circuito del rotor

Las ecuaciones del circuito de voltaje del rotor son

$$e_{fd} = p\Psi_{fd} + R_{fd}i_{fd} \quad (2.46)$$

$$0 = p\Psi_{kd} + R_{kd}i_{kd} \quad (2.47)$$

$$0 = p\Psi_{kq} + R_{kq}i_{kq} \quad (2.48)$$

El circuito del rotor tiene una permeabilidad constante debido a la estructura cilíndrica del estator. Por lo tanto, las inductancias propias del rotor y las inductancias mutuas entre cada una no varían con la posición del rotor. Solamente las inductancias del rotor al estator varían periódicamente con  $\theta$  como está dado en la (2.40), (2.41) y (2.42).

Los encadenamientos de flujo del rotor se expresan como sigue

$$\begin{aligned} \Psi_{fd} = & L_{ffd}i_{fd} + L_{fkd}i_{kd} \\ & - L_{afd} \left[ i_n \cos \theta + i_b \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{kd} = & L_{fkd}i_{fd} + L_{kkd}i_{kd} \\ & - L_{akd} \left[ i_c \cos \theta + i_b \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_n \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\Psi_{kq} = L_{kkq}i_{kq} + L_{akq} \left[ i_n \sin \theta + i_b \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (2.51)$$

Hasta aquí, se han definido las ecuaciones que describen para cada una las fases los voltajes del estator, los flujos magnéticos en el estator, las inductancias propias y mutuas del estator, así como también, las inductancias mutuas entre el rotor y el estator y finalmente las ecuaciones de voltaje en el rotor y sus inductancias mutuas, como veremos en la sección siguiente, trabajar con estas ecuaciones resulta un tanto complicado debido a que estas ecuaciones dependen de la variación del ángulo  $\theta$  quien

a su vez depende del tiempo, dando como resultado una ecuación diferencial variante con el tiempo y esto complica el análisis de la máquina síncrona. Sin embargo, esta dificultad puede evitarse mediante la transformación dq0, conocida también como la transformación de PARK.

## 2.5 Transformación dq0

La máquina síncrona consiste de tres devanados de fase en el estator y tres devanados en el rotor, un devanado de campo a lo largo del eje de directa (d), dos devanados amortiguadores uno en el eje de directa (d) y el otro en el eje de cuadratura (q), ver Figura 2.2.

Las ecuaciones (2.22) a (2.24) y las (2.43) a (2.45) asociadas con el circuito del estator, junto con las ecuaciones (2.46) (2.51) asociadas con el circuito del rotor, describen completamente el desempeño eléctrico de una máquina síncrona. Sin embargo, estas ecuaciones contienen términos de inductancias que varían con respecto al ángulo  $\theta$  el cual a su vez varía con el tiempo lo que indica que las ecuaciones diferenciales involucran coeficientes variantes en el tiempo complicando su solución.

Para simplificar el análisis y solución de las ecuaciones de la máquina síncrona es común utilizar la transformación dq0, esta transformación de coordenadas nos lleva de un plano de referencia variante con el tiempo a un plano de referencia fijo, el cual, convierte a los tres devanados del estator en dos devanados equivalentes ficticios, llamados eje-d y eje-q, los cuales se mueven en sincronía con el rotor. Después de la transformación, las ecuaciones diferenciales obtenidas tendrán coeficientes invariantes en el tiempo logrando así simplificar su análisis.

Se puede observar que de las ecuaciones (2.49) a (2.51) es posible obtener relaciones flujo-corriente para el rotor y el estator, la transformación de las corrientes de fase del estator a las nuevas variables es como sigue

$$i_d = k_d \left[ i_a \cos \theta + i_b \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (2.52)$$

$$i_q = -k_q \left[ i_a \sin \theta + i_b \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (2.53)$$

Las constantes  $k_d$  y  $k_q$  son escogidas arbitrariamente y sus valores son comúnmente tomados como  $\frac{2}{3}$ .

Puesto que las dos componentes de corriente  $i_d$  e  $i_q$  juntas producen un campo idéntico al producido por el conjunto de corrientes de fase original, la tercer componente no debe de producir ningún campo en el entrehierro, por lo tanto, se considera la corriente de secuencia cero  $i_0$  asociada a las componentes simétricas

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c) \quad (2.54)$$

Bajo condiciones balanceadas  $i_a + i_b + i_c = 0$ , por lo tanto  $i_0 = 0$ .

La transformación de las variables de fase abc a las variables dq0 puede ser escrita en la siguiente forma matricial

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Las transformación inversa está dada por

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

La transformación anterior también aplica a los voltajes y encadenamientos de flujo del estator.

## 2.6 Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento de la máquina síncrona son de vital importancia en el estudio de estabilidad de sistemas de potencia ya que describen el efecto de desbalance entre los torques mecánico y electromagnético de máquinas individuales.

## 2.7 Ecuación de Oscilación

El torque neto que existe cuando hay desbalance entre los torques que actúan en el rotor es

$$T_a = T_m - T_e \quad (2.57)$$

donde

$T_a$  = El torque de aceleración,  $(N \cdot m)$

$T_m$  = Torque mecánico,  $(N \cdot m)$

$T_e$  = Torque electromagnético,  $(N \cdot m)$

La inercia combinada del generador y la turbina causa una aceleración o desaceleración debido al desbalance de los torques aplicados. Por lo tanto la ecuación de movimiento es

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_a = T_m - T_e \quad (2.58)$$

donde:

$J$  = Momento de inercia combinado del generador y la turbina,  $(kg \cdot m^2)$ .

$\omega_m$  = Velocidad angular del rotor,  $(rad/seg)$ .

$t$  = Tiempo, (seg).

La ecuación anterior puede ser normalizada en términos de la constante de inercia, en por unidad, definida como la energía cinética en watts-segundo, dividiendo la velocidad síncrona por los  $VA_{base}$ . Usando  $\omega_{0m}$  para denotar la velocidad angular síncrona en radianes por segundo mecánicos, la constante de inercia  $J$  en términos de  $H$  es

$$H = \frac{1}{2} \frac{J\omega_{0m}^2}{VA_{base}} \quad (2.59)$$

$$J = \frac{2H}{\omega_{0m}^2} VA_{base} \quad (2.60)$$

sustituyendo en la (2.58)

$$\frac{2H}{\omega_{0m}^2} VA_{base} \frac{d\omega}{dt} = T_m - T_e \quad (2.61)$$

reordenando, se tiene

$$2H \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_m}{\omega_{0m}} \right) = \frac{T_m - T_e}{VA_{base}/\omega_{0m}} \quad (2.62)$$

Considerando que  $T_{base} = VA_{base}/\omega_{0m}$ , la ecuación de movimiento es

$$2H \frac{d\omega_r}{dt} = T_m - T_e \quad (2.63)$$

$$\omega_r = \frac{\omega_m}{\omega_{0m}} = \frac{\omega_r/p_f}{\omega_0/p_f} = \frac{\omega_r}{\omega_0} \quad (2.64)$$

donde  $\omega_r$  es la velocidad angular del rotor en grados eléctricos *rad/seg*.

Si  $\delta$  es la posición angular del rotor en radianes eléctricos con respecto a una referencia de rotación síncrona y  $\delta_0$  es su valor en  $t = 0$

$$\delta = \omega_r t - \omega_0 t + \delta_0 \quad (2.65)$$

Se calcula la derivada con respecto al tiempo

$$\frac{d\delta}{dt} \approx \omega_r - \omega_0 = \Delta\omega_r \quad (2.66)$$

Ahora se calcula su segunda derivada y relacionando la ecuación (2.64) lo que da lugar a

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} &= \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{d\Delta\omega_r}{dt} \\ &= \omega_0 \frac{d\bar{\omega}_r}{dt} = \omega_0 \frac{d\Delta\bar{\omega}_r}{dt} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Sustituyendo  $d\bar{\omega}_r/dt$  dada por la ecuación anterior en la (2.63) se obtiene

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m - T_e \quad (2.68)$$

En general, se desea incluir una componente de torque de amortiguamiento no considerada durante la deducción. Para lograr esto, se añade un término proporcional a la desviación de velocidad en la ecuación anterior obteniendo

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m - T_e - \frac{K_D}{\omega_0} \frac{d\delta}{dt} \quad (2.69)$$

La (2.69) representa la ecuación de movimiento de una máquina síncrona. Esta ecuación es comúnmente llamada ecuación de oscilación, ya que representa la oscilación en el ángulo del rotor durante disturbios.

Escribiendo la (2.69) en variables de estado resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -D\omega + (P_m - P_e)\left(\frac{\omega_e}{2H}\right) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$



## 2.8 Deducción detallada del modelo de 3er. Orden

Se ha deducido la ecuación que describe el comportamiento mecánico de la máquina síncrona y también el comportamiento eléctrico, lo que resta es obtener un modelo que relacione ambas partes, es decir, la parte mecánica y la parte eléctrica. El objetivo que se busca al obtener un modelo que relacione las partes mecánica y eléctrica de la máquina síncrona es diseñar un controlador que regule el voltaje en terminales de la máquina, y debemos de considerar la parte mecánica, ya que ésta influye de manera directa en este aspecto. Si se considera lo mencionado en la introducción acerca del criterio de áreas iguales, notaremos como se ve afectada la potencia eléctrica en las diferentes condiciones del sistema de potencia, afectando a su vez, el voltaje en terminales.

El comportamiento de las variables eléctricas del generador queda definido por las ecuaciones de voltaje y encadenamientos de flujo que relacionan a los devanados. Las ecuaciones de voltaje de los devanados del estator, con referencia a las fases (a, b, c) se expresan en función de las inductancias que varían con la posición del rotor. Cambiando la referencia de las ecuaciones del estator, de las fases (a, b, c), a los ejes (d, q, 0) del rotor. se logra expresar estas ecuaciones en función de inductancias invariantes en el tiempo.

La transformación de coordenadas se realiza mediante la transformación de Park, llevando de un marco de referencia a otro.

En la deducción de este modelo se desprecian los efectos de los devanados *amortiguadores* en el comportamiento del generador. En las ecuaciones del modelo completo se hacen cero las corrientes y encadenamientos de flujo en los devanados *kd* y

Por lo tanto el sistema se reduce a

$$0 = -r_g I_g - \frac{d\Psi_g}{dt} \quad (2.74)$$

$$\Psi_d = L_d I_d + L_{md} I_f \quad (2.75)$$

$$\Psi_d = L_d I_d + L_{md} I_f \quad (2.76)$$

$$\Psi_f = L_{md} I_d + L_f I_f \quad (2.77)$$

$$\Psi_g = -L_{mq} I_q + L_g I_g \quad (2.78)$$

$$P = V_d I_d + V_q I_q \quad (2.79)$$

$$T_e = (L_d - L_q) I_d I_q + L_{md} I_f I_q + L_{mq} I_g I_d \quad (2.80)$$

$$\frac{2h}{\omega_0} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = T_m - T_e \quad (2.81)$$

Como el objetivo es expresar las ecuaciones de voltajes del estator en función de todos los encadenamientos de flujo y de las corrientes del estator, de (2.77) deducimos

$$I_f = (\Psi_f - L_{md} I_d) \frac{1}{L_f} \quad (2.82)$$

sustituyendo (2.82) en (2.75) y se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi_d &= L_d I_d + L_{md} \left( \frac{1}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d) \right) \\ &= L_d I_d + L_{md} \left( \frac{\Psi_f}{L_f} - \frac{L_{md} I_d}{L_f} \right) \\ &= L_d I_d + \frac{L_{md} \Psi_f}{L_f} - \frac{L_{md}^2 I_d}{L_f} = \left( L_d - \frac{L_{md}^2}{L_f} \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

se define la siguiente expresión

$$L'_d \triangleq L_d - \frac{L_{md}^2}{L_f} \quad (2.84)$$

se expresa a  $\Psi_d$  en términos de  $L'_d$  teniendo así que

$$\Psi_d = L'_d I_d + \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.85)$$

se sustituye (2.85) en (2.71) se obtiene

$$V_q = -rI_q + \omega L'_d I_d + \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.86)$$

Se define la reactancia transitoria  $x'_d$  y una variable proporcional a los encadenamientos de flujo del campo referida al estator

$$x'_d \triangleq \omega L'_d \quad (2.87)$$

$$E'_q \triangleq \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \quad (2.88)$$

dando como resultando que

$$V_q = -rI_q + X'_d I_d + E'_q \quad (2.89)$$

$V_q$  es una componente del voltaje del estator y  $E'_q$  es un voltaje interno del generador referido al estator.

Considerando la ecuación (2.73)

$$\frac{d\Psi_f}{dt} = -V_f - r_f I_f \quad (2.90)$$

sustituyendo (2.82) en (2.90), se obtiene un representación de la dinámica de los encadenamientos de flujo del devanado de campo

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_f}{dt} &= -V_f - r_f \left( \frac{1}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d) \right) \\ &= -V_f - \frac{r_f}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Para referir la (2.91) al estator se multiplica por  $\omega \left( \frac{L_{md}}{L_f} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_f}{dt} \omega \left( \frac{L_{md}}{L_f} \right) &= -V_f \omega \left( \frac{L_{md}}{L_f} \right) - \frac{r_f}{L_f} (\Psi_f - L_{md} I_d) \omega \left( \frac{L_{md}}{L_f} \right) \\ &= -\frac{r_f}{L_f} \left( \omega \frac{L_{md}}{L_f} V_f + \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f - \omega \frac{L_{md}}{L_f} I_d \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Se define un variable proporcional a la corriente de campo en estado estable con referencia al estator

$$E_{fd} \triangleq \omega \frac{L_{md}}{L_f} V_f \quad (2.93)$$

escribiendo las relaciones de inductancia resistencia en términos de constantes de tiempo, esto es

$$T'_{do} = \frac{L_f}{r_f}$$

Se utiliza la relación entre reactancias en el eje de directa

$$X_d - X'_d = \omega \frac{L_{md}^2}{L_f}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dE'_q}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f \right) \\ &= \frac{r_f}{L_f} \left( \omega \frac{L_{md}}{L_f} V_f + \omega \frac{L_{md}}{L_f} \Psi_f - \omega \frac{L_{md}^2}{L_f} I_d \right) \end{aligned}$$

entonces se sustituyen todas las relaciones anteriores y se obtiene la dinámica del voltaje interno transitorio en el eje de directa

$$E'_q = \frac{1}{T'_{do}} (E_{fd} + E'_q - (X_q - X'_q) I_q) \quad (2.94)$$

El modelo de la máquina síncrona de tercer orden en espacio de estado resulta

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{\omega_n}{2H(X'_d - X_\ell)} E'_q \sin(\delta) - D\omega + P \\ \dot{E}'_q &= \frac{(X_d - X'_d)}{T'_{do}(X'_d - X_\ell)} \cos(\delta) + \frac{X'_d - X_\ell}{T'_{do}(X'_d - X_\ell)} \frac{E'_q}{T'_q} + \frac{E_{fd}}{T'_{do}} + u \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde

$X'_d$ = Reactancia Transitoria	$P$ = Potencia mecánica
$X_\ell$ = Reactancia de la línea	$T'_{do}$ = Constante de tiempo
$E'_q$ = Voltaje interno del generador	$E_{fd}$ = Voltaje de Campo
$D$ = Terminio de amortiguamiento	

Este modelo será el que se estudiará durante todo este trabajo y representa a una máquina conectada a un bus infinito.

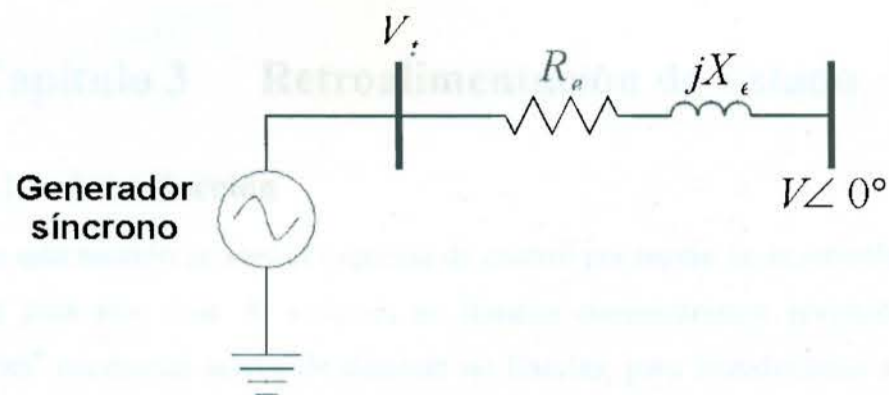


Figura 2.9 Esquema de una máquina conectada a un bus infinito.

## 2.9 Conclusiones

En este capítulo, se desarrollaron las ecuaciones de voltaje y encadenamientos de flujo que relacionan a los devanados, posteriormente se presentó la transformación de Park que es útil para pasar del esquema de referencia en fases  $abc$  a la referencia  $dq0$ . Se presentaron las ecuaciones del movimiento de la máquina síncrona y con ellas se dedujo el modelo matemático de tercer orden, el cual será utilizado a lo largo de este trabajo de tesis.

## Capítulo 3 Retroalimentación de Estado

### 3.1 Introducción

En esta sección se verá el esquema de control por medio de la retroalimentación de estado para una clase de sistemas no lineales comenzaremos revisando algunas definiciones<sup>6</sup> necesarias acerca de sistemas no lineales, para introducirnos a lo que se refiere al esquema de control por retroalimentación de estado.

#### Retroalimentación estática de estado

Si el valor del control en el tiempo  $t$  depende solamente de los valores del vector de estado  $x$  y de la entrada de referencia externa en el mismo instante de tiempo el control se dice ser Modo de control por retroalimentación estática de estado.

Por ejemplo sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ u &= \gamma(t, x)\end{aligned}$$

la ley de control  $u = \gamma(t, x)$  es llamada retroalimentación estática de estado.

#### Retroalimentación dinámica de estado

Si el control depende además de un conjunto de variables de estado adicionales, es decir, si este sistema es por si mismo la salida de un sistema dinámico apropiado teniendo sus propios estados internos manejados por  $x$  o por una entrada de referencia externa, se dice que es un Modo de control por retroalimentación dinámica de estado

Ahora, sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ u &= \gamma(t, x, z)\end{aligned}$$

donde  $z$  es la solución de un sistema dinámico manejado por  $x$ ; es decir,

$$\dot{z} = g(t, x, z)$$

entonces la ley de control  $u = \gamma(t, x, z)$  es llamada retroalimentación dinámica de estado.

---

<sup>6</sup> Ver apéndice 1 para otras definiciones indispensables para la comprensión de este capítulo.

### Difeomorfismo

Un mapeo  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un Difeomorfismo sobre  $D$  si es invertible sobre  $D$ ; esto es, existe una función tal que  $T^{-1}(T(x)) = x$  para toda  $x \in D$ , y ambos  $T(x)$  y  $T^{-1}(x)$  son continuamente diferenciables. Si la matriz Jacobiana  $[\partial T/\partial x]$  es no singular en un punto  $x_0 \in D$ , entonces por el teorema de la función inversa<sup>7</sup> existe una vecindad  $N$  de  $x_0$  tal que  $T$  está restringida en  $N$  y es un Difeomorfismo local sobre  $N$ . Por otro lado,  $T$  se dice ser un Difeomorfismo global si es un difeomorfismo en  $\mathbb{R}^n$  y  $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .  $T$  es un Difeomorfismo global si y solo si cumple con las siguientes propiedades

1.  $[\partial T/\partial x]$  es no singular para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $T$  es propia, esto es,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|T(x)\| = \infty$ .

### Distribución

Sean  $f_1, f_2, \dots, f_k$  campos vectores sobre  $D \subset \mathbb{R}^n$ . En cualquier punto fijo  $x \in D$   $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , se asigna un subespacio  $\Delta(x)$ . Se referirá a esta asignación por

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\},$$

la cual llamaremos una distribución. En otras palabras,  $\Delta$  es la colección de todos los espacios vectores  $\Delta(x)$  para todo  $x \in D$ .

### Distribución involutiva

Una distribución  $\Delta$  es involutiva si

$$g_1 \in \Delta \text{ y } g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta.$$

Si  $\Delta$  es una distribución no singular sobre  $D$  generada por  $f_1, \dots, f_r$ , entonces se puede verificar que  $\Delta$  es involutiva si y solo si

---

<sup>7</sup> Ver apéndice 2

$$[f_i, f_j] \in \Delta \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq r$$

### Grado Relativo

Considere el sistema no-lineal de una entrada una salida (SISO)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.1)$$

$$y = h(x) \quad (3.2)$$

Se dice que (3.1) (3.2) tienen *grado relativo*  $r$  en el punto  $x_0$  si

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \text{ para toda } x \text{ en una vecindad de } x_0 \text{ y toda } k < r - 1 \quad (3.3)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0 \quad (3.4)$$

El grado relativo para un sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

queda determinado por

- i.  $CA^k B = 0$  para toda  $k < r - 1$ .
- ii.  $CA^{r-1} B \neq 0$ .

Aquí  $f(x) = Ax$ ,  $g(x) = B$ ,  $h(x) = Cx$ .

El entero  $r$  que satisface estas condiciones es exactamente igual a la diferencia entre el grado del polinomio del denominador y el grado del polinomio del numerador de la función de transferencia

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

### Lema 3.1

Los vectores renglón  $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$  son linealmente independientes.

Este lema muestra que necesariamente con  $r \leq n$  y las  $r$  funciones  $h(x^0)$ ,  $L_f h(x^0), \dots, L_f^{r-1} h(x^0)$  califican como un conjunto parcial de nuevas funciones coordenadas alrededor del punto  $x^0$ . La suposición de estas nuevas coordenadas implica una estructura particularmente simple en las ecuaciones que describirán al sistema.

### Lema 3.2



Sea  $\phi$  una función valuada real y  $f, g$  campos vectores, todos definidos en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, para cualquier  $s, k, r > 0$

$$\langle dL_f^s \phi(x), ad_f^{k+r} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_f^{r-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x), ad_f^k g(x) \rangle \quad (3.5)$$

Como consecuencia los dos conjuntos de ecuaciones

$$L_g \phi(x) = L_g L_f \phi(x) = \dots = L_g L_f^k \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U \quad (3.6)$$

$$L_g \phi(x) = L_{ad_f g} \phi(x) = \dots = L_{ad_f^k g} \phi(x) = 0 \quad \forall x \in U \quad (3.7)$$

son equivalentes.

Si  $r$  es estrictamente menor que  $n$ , entonces siempre es posible encontrar  $n - r$  funciones  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  tal que el mapeo

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \dots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

tiene matriz jacobiana la cual es no singular en  $x_0$  y por lo tanto califica como una transformación de coordenadas local en una vecindad de  $x_0$ . El valor en  $x_0$  de estas funciones adicionales puede ser fijado arbitrariamente. Además. Siempre es posible escoger  $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  de tal forma que  $L_g \phi_i(x) = 0$  para toda  $r+1 \leq i \leq n$  y toda  $x$  alrededor de  $x_0$ .

La descripción del sistema en las nuevas coordenadas  $z_i = \phi_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$  será como sigue

$$\dot{z}_1 = L_f h(x(t)) = z_2(t)$$

$$\dot{z}_2 = L_f^1 h(x(t)) = z_3(t)$$

...

$$\dot{z}_{r-1} = L_f^{r-1} h(x(t)) = z_r(t)$$

$$\dot{z}_r = L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^r h(x(t)) u(t)$$

### 3.2 Linealización exacta vía retroalimentación de estado

En un sistema SISO, la estructura mas conveniente para un control vía retroalimentación estática de estado es aquel en el cual la variable de entrada es de la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.8)$$

donde  $v$  es la entrada externa (ver Figura 3.1). La composición de este control queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

permitiendo una representación en lazo cerrado caracterizado por una estructura similar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Las funciones  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  que caracterizan el control de (3.8) están definidas en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .  $\beta(x)$  se asume diferente de cero para toda  $x$  en este conjunto ya que de lo contrario no se puede definir la entrada  $v$ .

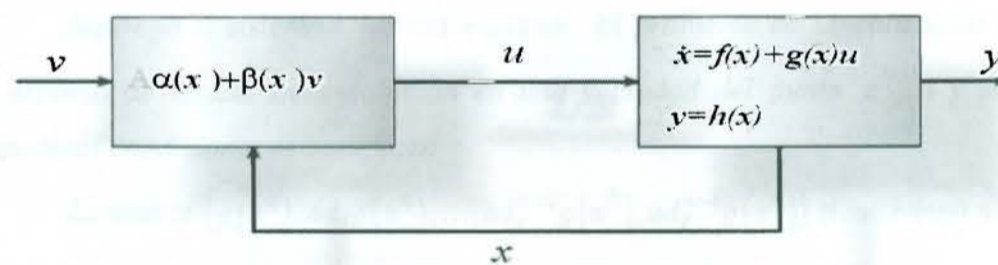


Figura 3.1 Esquema de la Linealización exacta por retroalimentación de estado.

Cualquier sistema no-lineal con grado relativo  $n$  en algún punto  $x_0$  puede ser transformado en un sistema, el cual, en una vecindad de  $z^0 = \Phi(x_0)$  es lineal y controlable.

Sobre el sistema linealizado entonces obtenido, podemos seleccionar la ley de control por retroalimentación de estado  $v = kz$ , donde  $k = c_0, \dots, c_{n-1}$ , puede ser seleccionado, para asignar un conjunto de valores característicos, o satisfacer un criterio

óptimo. Recordemos que las  $z_i$ 's son funciones de  $x$  y la retroalimentación de estado que se está considerando puede ser escrita como

$$v = c_0 h(x) + c_1 L_f h(x) + \dots + c_{n-1} L_f^{n-1} h(x) \quad (3.9)$$

es decir, en la forma de una retroalimentación de estado procedente de la descripción del sistema en las variables originales del vector de estado  $x$ .

Con  $v$  definida de esta manera se obtiene la siguiente retroalimentación de estado

$$u = \frac{-L_f^n h(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i L_f^i h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}$$

La característica básica del sistema que hace posible el cambio a un sistema lineal y controlable es la existencia de una salida  $h(x)$  para la cual el sistema tiene grado relativo igual a  $n$  (en  $x^0$ ). El grado relativo es invariante bajo transformación de coordenadas ó retroalimentación estática de estado. De hecho las condiciones de (3.3) y (3.4) son independientes de cualquier cambio de coordenadas local.

### Teorema 3.1

Suponga el sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ . El problema de Linealización exacta en el espacio de estado tiene solución en una vecindad del punto  $x^0$  si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen

La matriz  $(g(x^0), ad_f g(x^0), \dots, ad_f^{n-2} g(x^0), ad_f^{n-1} g(x^0))$  tiene rango  $n$ .

La distribución  $D = \text{Span}_{n-2} \{g, ad_f g \dots ad_f^{n-2} g\}$  es involutiva y de rango constante.

La interpretación de la condición (i) del teorema 2.1 es como sigue. Suponga que el campo vector  $f(x)$  tiene un punto de equilibrio en  $x^0$  es decir,  $f(0) = 0$  y considere para  $f(x)$  una expansión de la forma

$$f(x) = Ax + f_2(x) \text{ con } A = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \text{ y } \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

y sea  $g(x)$  una expansión de la forma

$$g(x) = B + g_1(x) \text{ con } B = g(0)$$

Esto caracteriza la aproximación lineal del sistema en  $x = 0$ , la cual está definida como  $\dot{x} = Ax + Bu$ . El campo vector  $ad_f^k g(x)$  puede ser expandido de la siguiente forma

$$ad_f^k g(x) = (-1)^k A^k B + p_k(x)$$

donde  $p_k(x)$  es una función tal que  $p_k(0) = 0$ . De aquí se puede observar que la condición (i) del Teorema 2.1 es equivalente a la condición

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

es decir, se concluye que la controlabilidad de la aproximación lineal del sistema al punto  $x = x^0$  es una condición necesaria para la solución del problema de Linealización exacta del espacio de estado.

### 3.3 Aplicación al generador síncrono

La ecuación de estado que describe la dinámica de una máquina síncrona conectada a un bus infinito a través de una línea de transmisión (sistema máquina-bus infinito), es

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b_1 x_3 \sin(x_1) - D x_2 + P \\ \dot{x}_3 = b_3 \cos(x_1) - b_4 x_3 + E + u \end{cases} \quad (3.10)$$

las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  representan

$x_1 =$  Ángulo de la carga,

$x_2 =$  Desviación de la velocidad del eje de la turbina del generador con respecto a la velocidad síncrona,

$x_3 =$  Voltaje interno del eje de directa.

$P$  y  $E$  son entradas constantes que representan la potencia mecánica suministrada al eje por la turbina y el voltaje de campo suministrado por el sistema de excitación. Los parámetros  $b_1, b_2, b_3, P$  y  $E$  son estrictamente positivos. Finalmente  $u$  es la entrada de control que representa el voltaje de excitación del devanado de campo.

Los puntos de equilibrio del sistema están dados por:  $x_e = [x_{1e}, 0, x_{3e}]^T$  donde  $x_{1e}$  y  $x_{3e}$  se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} b_1 x_3 \operatorname{sen}(x_{1e}) &= P \\ -b_3 \cos(x_{1e}) + b_4 x_{3e} &= E \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considerando que  $x_e \in R$  donde  $R$  se define como

$$R \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in (0, \pi); x_3 > 0 \right\}$$

El sistema es de grado relativo 3 lo cual permitiría obtener el vector del difeomorfismo directamente.

La matriz para la condición (i) del Teorema 3.1 queda de la siguiente forma

$$\operatorname{Span} [g(x), \operatorname{ad}_f g(x), \operatorname{ad}_f^2 g(x)] = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \sin(x_1) \\ 0 & b_1 \sin(x_1) & \zeta \\ 1 & b_4 & b_4^2 \end{pmatrix}$$

$$\zeta = x_2 b_1 \cos(x_1) + D b_1 \sin(x_1) - b_1 b_4 \sin(x_1)$$

tiene rango completo  $\forall x_1 \in (0, \pi)$ .

Para la condición (ii) la matriz queda de la siguiente forma

$$D = \operatorname{Span}_{n-2} (g, \operatorname{ad}_f g) = \operatorname{Span}_{n-2} \begin{pmatrix} 0 & b_1 \sin(x_1) \\ 0 & -x_2 b_1 \cos(x_1) - D b_1 \sin(x_1) - b_1 b_4 \sin(x_1) \\ 1 & -b_4 \end{pmatrix}$$

es involutiva y de rango 2.

Debido a que el modelo cumple con las condiciones del Teorema 3.1 se puede realizar una transformación de coordenadas y diseñar el controlador linealizante. Una transformación de coordenadas está dada por

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T = (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x))^T \triangleq T(x)$$

siendo  $h(x) = x_1$  una función suave  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y cuya existencia es garantizada por las condiciones del teorema 3.1. La transformación queda determinada de la siguiente forma

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

El sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  expresado en coordenadas- $z$  es expresado como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -b_1 x_3 \cos(x_1) x_2 - Da + b_1 \sin(x_1) u \end{aligned} \quad (3.13)$$

con

$$a = (-b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P) - b_1 \sin(x_1)(b_3 \cos(x_1) - b_4 x_3 + E)$$

se aplica de manera directa el control linealizante y estabilizante

$$u = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} v \quad (3.14)$$

El control auxiliar  $v$  de la (3.14) se puede seleccionar de manera que tenga la estructura de un controlador proporcional  $v = \sum_{i=1}^n -k_i x_i$  escogiendo los valores de  $k$  tal que el polinomio característico del sistema resultante sea Hurwitz.

El controlador queda como sigue

$$u = -\frac{(-b_1 x_3 \cos(x_1) x_2 - D(-b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P))}{b_1 \sin(x_1)} - \frac{(b_1 \sin(x_1)(b_3 \cos(x_1) + b_4 x_3 - E))}{b_1 \sin(x_1)} + \frac{v}{b_1 \sin(x_1)}$$

y

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3$$

donde  $v$  está expresado en las nuevas coordenadas, y expresándola en coordenadas originales resulta como sigue

$$v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 (-b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P)$$

El sistema linealizado en lazo cerrado ya en coordenadas originales es obtenido por medio de la siguiente ecuación

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P \\ \frac{-b_1 x_2 \cos(x_1) + D(-b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P) + v}{b_1 \sin(x_1)} \end{bmatrix}$$

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 (-b_1 x_3 \sin(x_1) - Dx_2 + P)$$

### 3.4 Resultados de simulación

Los parámetros físicos del sistema están dados en la siguiente tabla, todos están dados en p.u. a excepción de  $T'_{do}$  y  $H$  que están dados en segundos

$X_q$	0.66	$X_d$	1.07
$X_d$	0.408	$H$	6.68
$T'_{do}$	5.4	$X_l$	0.415
$E_f$	1.3	$P_m$	1

Tabla 2.- Parámetros físicos del modelo de la máquina síncrona

$$b_1 = \frac{\omega_s}{2H(X'_d + X_l)} ; E = \frac{E_f}{T'_{do}}$$

$$b_3 = \frac{X_d - X'_d}{T'_{do}(X'_d + X_l)} ; P = \frac{\omega_s P_m}{2H}$$

$$h_4 = \frac{X_l + X'_d}{T'_{do}(X'_d + X_l)}$$

Los puntos de equilibrio del sistema están dados por

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \\ x_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 \\ 0 \\ 0.914 \end{bmatrix}$$

y las condiciones iniciales para la simulación son

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.08 \\ 0.01 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

En los resultados de simulación se observa en primera instancia el comportamiento en lazo abierto del generador (ver Figura 3.2, Figura 3.3 y Figura 3.4). En estas gráficas se ve como el sistema converge al punto de equilibrio; para cada una de las variables, el simular el comportamiento en lazo abierto del sistema nos da un punto de comparación entre la respuesta natural del sistema y su respuesta forzada al incluir el controlador, y así de esta forma verificar el desempeño del mismo.

Posteriormente en la Figura 3.5, Figura 3.6, Figura 3.7, y Figura 3.8, se observa el comportamiento en lazo cerrado, en el cual vemos que el tiempo de convergencia es mucho menor que el del sistema en lazo abierto.

### 3.4.1 Sistema en lazo abierto

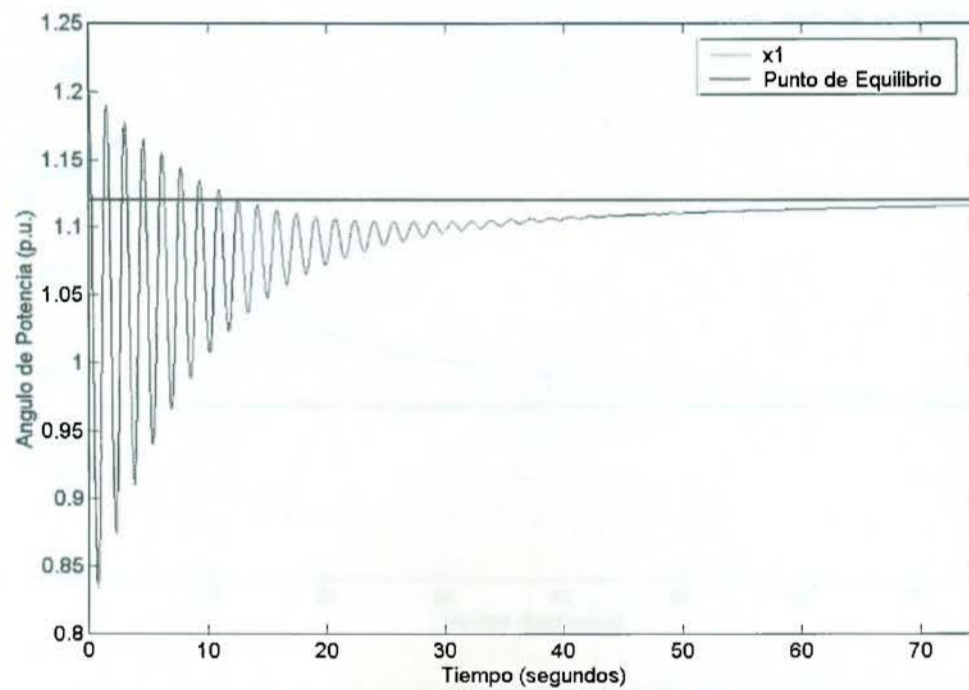


Figura 3.2.- Ángulo de potencia en lazo abierto



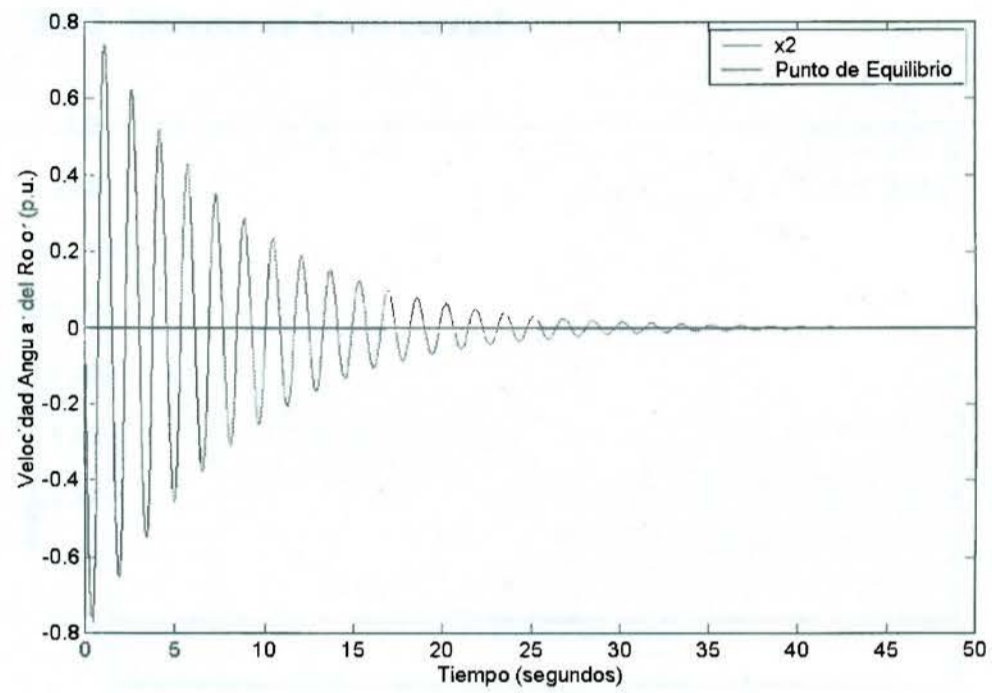


Figura 3.3.- Velocidad Angular en lazo abierto

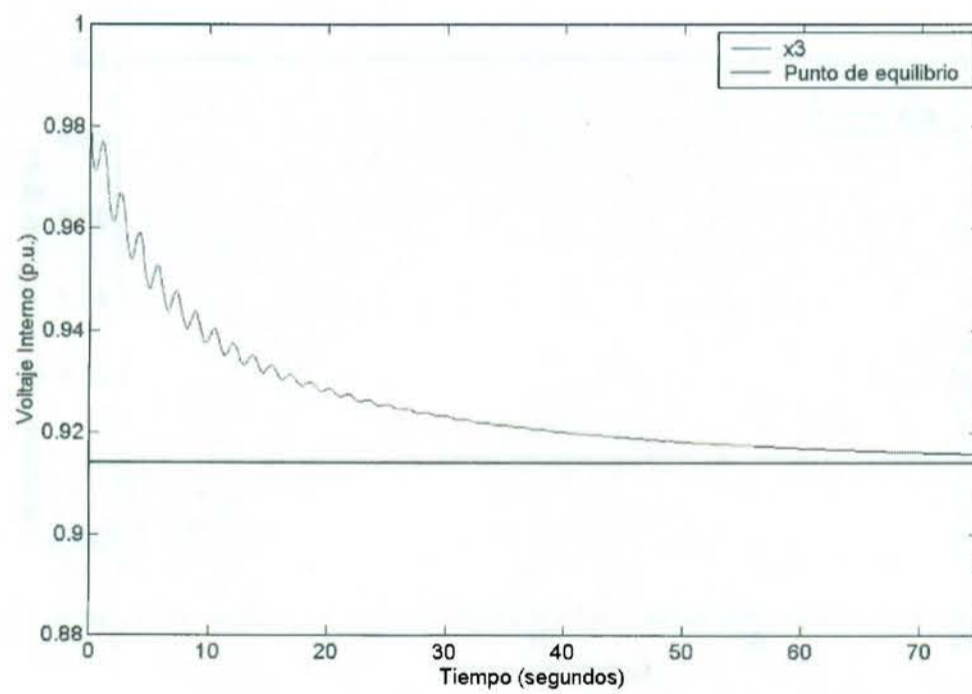


Figura 3.4.- Voltaje Interno en lazo abierto

### 3.4.2 Sistema en Lazo cerrado

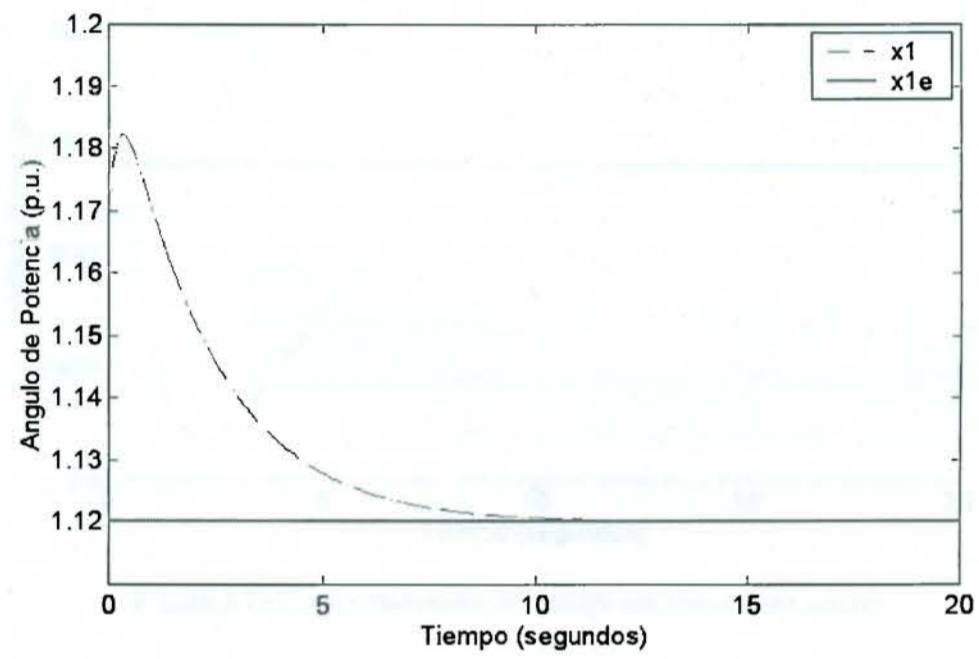


Figura 3.5 Comportamiento del ángulo de carga en lazo cerrado

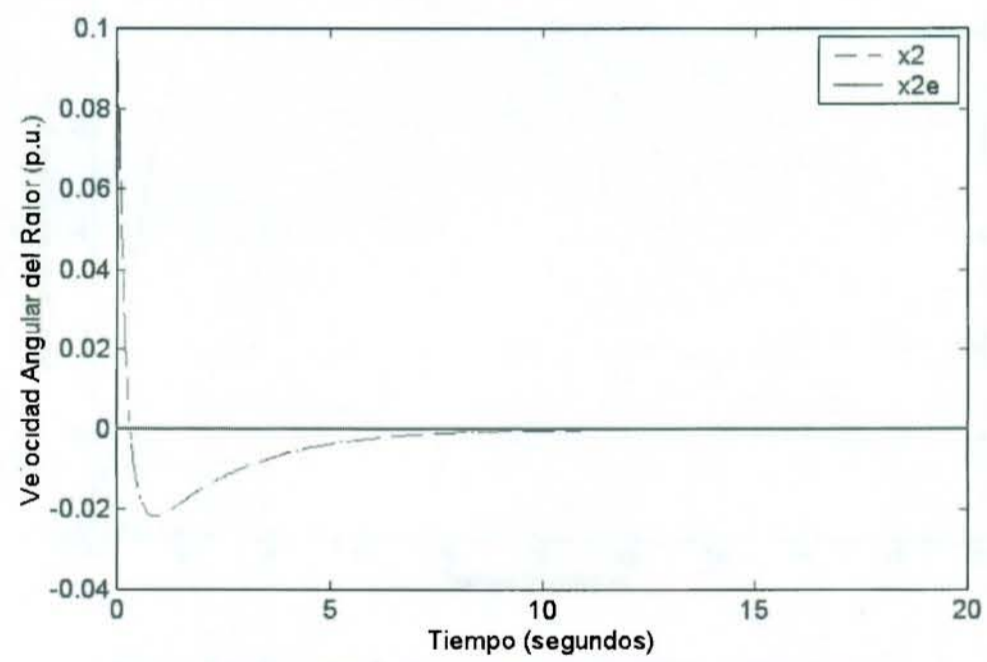


Figura 3.6.- Comportamiento de la velocidad angular del rotor en lazo cerrado

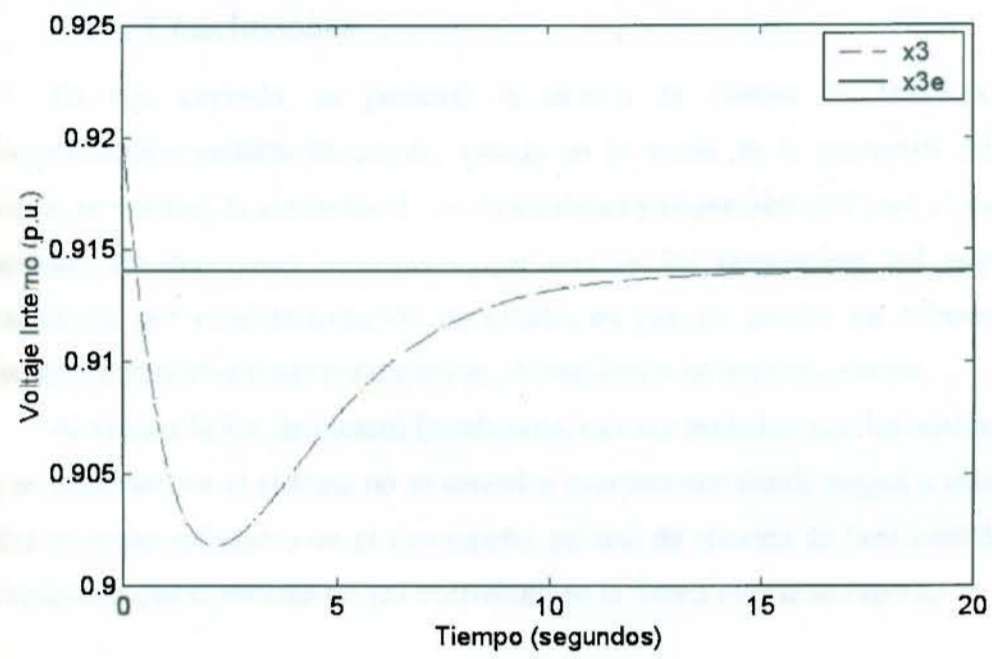


Figura 3.7.- Comportamiento del voltaje interno en lazo cerrado

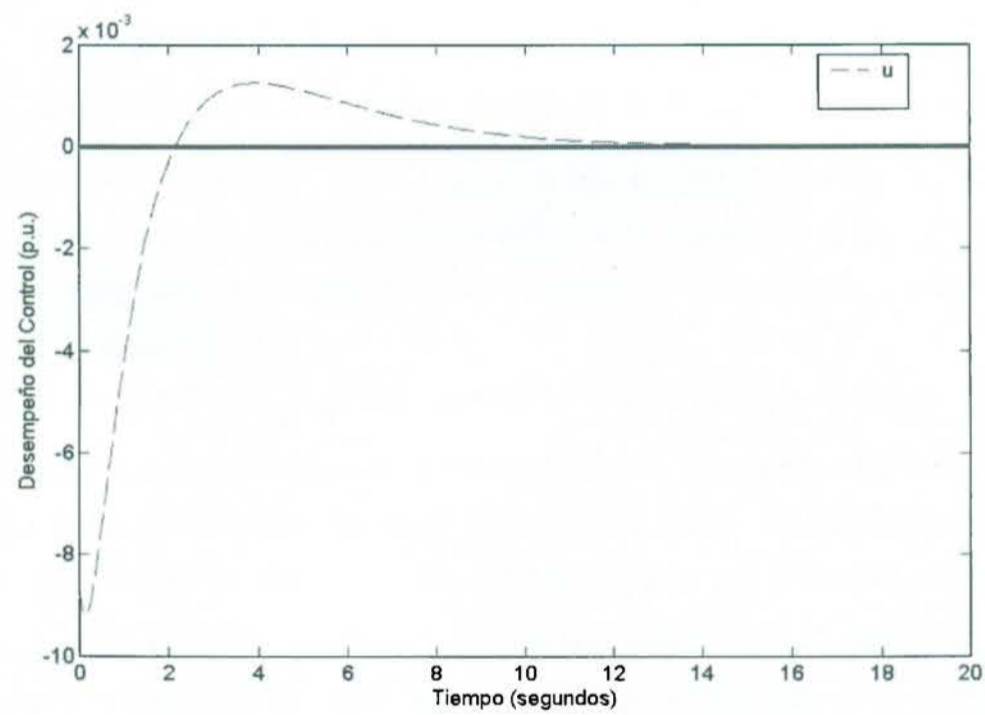


Figura 3.8.-Desempeño del control por retroalimentación de estado

### 3.5 Conclusiones

En este capítulo, se presentó la técnica de control de linealización por retroalimentación estática de estado, basada en la teoría de la geometría diferencial. Además, se verificó la condición de controlabilidad y observabilidad para el modelo del generador. Es importante mencionar, que una de las desventajas del esquema de linealización por retroalimentación de estado, es que no resulta ser robusto ante la presencia de perturbaciones paramétricas, lo cual limita su implementación.

Al aplicar la ley de control linealizante, es muy probable que las no-linealidades que se presentan en el sistema no se cancelen exactamente dando origen a residuos, los cuales se verán reflejados en el desempeño general de sistema de lazo cerrado, dando por resultado que el sistema no sea controlado en la forma en que se espera.

## Capítulo 4 Diseño de un Controlador LgV

### 4.1 Introducción

En este capítulo, se analizará desde una perspectiva diferente el diseño de controladores para una clase de sistemas no lineales. A partir, del esquema geométrico, se pasará al esquema de análisis de entrada-salida, es decir, mientras que en el control de linealización por retroalimentación de estado, se trató al sistema desde un punto de vista geométrico (apoyándose en la geometría diferencial), en este capítulo nos enfocaremos a su desempeño de entrada-salida para una clase de sistemas no lineales afines en la entrada, definiendo funciones de Lyapunov que permitan determinar si el sistema de lazo cerrado será estable o no, y en este caso particular utilizando la función de Lyapunov como base para diseñar un controlador que permita incrementar el amortiguamiento propio del sistema y así alcanzar la estabilidad asintótica.

### 4.2 Introducción a los controladores del tipo LgV

Los controladores  $L_gV$  surgen a través de la función de Lyapunov como un medio de proveer estabilidad asintótica a un sistema Lyapunov-estable o incrementar el amortiguamiento de un sistema asintóticamente estable. Este tipo de controladores ocupa un papel importante en el estudio de estabilidad por retroalimentación y estabilización de sistemas no-lineales.

El controlador  $L_gV$  en un esquema ligeramente diferente que permite trabajar con estabilización no global (local), y estabilización. La principal característica de este controlador es su efecto en el tamaño de la región de atracción o su estimado.

Por otro lado, los controladores  $L_gV$ , al igual que la mayoría de los controladores por retroalimentación de estado, son diseñados para mejorar el desempeño dinámico de un sistema alrededor de un punto de equilibrio dado y para esto es indispensable el conocimiento del punto de equilibrio. El asumir que se conoce el punto de equilibrio no es una suposición razonable en muchos problemas de control, tales como, estabilización de sistemas de potencia ya que los puntos de equilibrio o de operación de estos sistemas cambian debido a perturbaciones o fallas provocando que la configuración del sistema se

modifique y por consecuencia el punto de equilibrio, por lo cual, una solución es la construcción de observadores o estimadores de estado para poder hacer un seguimiento de los cambios en el punto de operación. A continuación revisaremos algunos conceptos sobre este tipo de controladores.

### 4.3 Controladores del tipo LgV

Consideremos un sistema no-lineal affine en la entrada, dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in \mathbb{R}^m$ . Se asume que el sistema tiene un solo punto de equilibrio  $x_e^0$  el cual opera en estado estable

$$f(x_e^0) = 0 \quad (4.2)$$

Se asume que  $x_e^0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.3)$$

Por lo tanto existe una función de Lyapunov  $V(x)$  que satisface en alguna vecindad  $D$  de  $x_e^0$

$$1. \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in \{D - x_e^0\} \quad (4.4)$$

$$2. \quad V(x_e^0) = 0 \quad (4.5)$$

$$3. \quad L_f V(x) \leq 0 \quad (4.6)$$

donde

$$L_f V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

es la derivada de Lie de  $V(x)$  a lo largo del campo vector  $f(x)$ .

*Bajo estas condiciones, una ley de control de la forma  $u = -k(L_g V(x))^T$ ,*

*$k > 0$  es llamada controlador  $L_g V$  y  $V(x)$  es llamada una función de control  $L_g V$  de Lyapunov.*

El sistema en lazo cerrado queda descrito por

$$\dot{x} = f(x) - kg(x)(L_g V(x))^T \quad (4.7)$$

Se asume también que la función de Lyapunov  $V(x)$  satisface condiciones de suavidad en algún dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  y  $V(x)$  es continua para toda  $x \in D$ .

$$\mathcal{L}_V(c_1) \supset \mathcal{L}(c_2) \leftrightarrow c_1 > c_2 \quad \forall c_1 : \mathcal{L}_V(c_1) \subset D$$

donde  $\mathcal{L}_V(c)$  es el interior de la superficie de nivel  $V(x) = c$ .

Una propiedad conocida de los controladores  $L_g V$  es que estos garantizan margen de ganancia infinita. También, un controlador  $L_g V$  no modifica la posición del punto de equilibrio ya que:

$$\left. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{x=x_c^o} = 0$$

lo cual implica que el control desaparece en  $x_c^o$ .

Como se mencionó anteriormente una propiedad muy útil de los controladores  $L_g V$  es el efecto que producen al ampliar el estimado de la región de atracción del equilibrio estable, obtenido con la misma función de Lyapunov. Antes de verificar esto se mostrarán algunas definiciones necesarias para comprender el lema que muestra esta propiedad de los controladores  $L_g V$ .

Sea  $\mathcal{N}_0$  el conjunto conexo mas grande que contiene al punto de equilibrio tal que  $L_g V(x) \leq 0$ . Entonces un estimado de la región de atracción de  $x_c^o$  puede ser obtenida como

$$\hat{\mathcal{R}}_0 = \mathcal{L}_V(\bar{a}_0)$$

donde  $\bar{a}_0 \triangleq \max a : \mathcal{L}_V(a) \subseteq \mathcal{N}_c$  y  $\mathcal{N}_c$  es el conjunto conexo mas grande que contiene al punto de equilibrio tal que  $L_f V(x) - k(L_g V(x))(L_g V(x))^T \leq 0$ . Note que  $\mathcal{L}_V(\bar{a}_0)$ ,  $\mathcal{L}_V(\bar{a}_c)$ ,  $\mathcal{N}_0$  y  $\mathcal{N}_c$  son conjuntos abiertos.

Sea  $\partial$  el límite de un conjunto. Los siguientes hechos resultan directamente de las definiciones anteriores y de la propiedad de la función de Lyapunov de ser una función suave.

**Hecho 1**

$$L_f V(x) = 0, \quad \forall x \in \partial \mathcal{N}_o$$

por otro lado

$$L_f V(x) - k(L_g V(x))(L_g V(x))^T = 0, \quad \forall x \in \partial \mathcal{N}_c$$

**Hecho 2**

$$\partial \hat{\mathcal{R}}_o \cap \partial \mathcal{N}_o \neq \emptyset$$

en otro caso

$$\partial \hat{\mathcal{R}}_o \cap \partial \mathcal{N}_c \neq \emptyset$$

**Hecho 3**

Si  $\mathcal{N}_c \supset \mathcal{N}_o \supset \mathcal{R}_o$  entonces  $\partial \hat{\mathcal{R}}_o \cap \partial \mathcal{N}_o \supseteq \partial \hat{\mathcal{R}}_o \cap \partial \mathcal{N}_c$ ,  $\partial \hat{\mathcal{R}}_o \cap \partial \mathcal{N}_c \neq \emptyset$

**Lema 4.1**

Sea  $V(x)$  un función de control de Lyapunov  $L_g V$  para el sistema en lazo abierto (4.3), que además satisface las suposiciones de suavidad hechas anteriormente en algún dominio  $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{R}_o$ , y considere el sistema de lazo cerrado (4.7). Entonces  $\mathcal{R}_c \supseteq \mathcal{R}_o$  si se asume además que  $L_g V(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \partial \mathcal{N}_o \cap \partial \hat{\mathcal{R}}_o$ , entonces  $\mathcal{R}_c \supset \mathcal{R}_o$ .

**4.4 Extensión Dinámica del control LgV**

Se asume que la ley de control es de la forma

$$u = -k(L_g V(x)) = \varphi(x) - \varphi(x_c^0) \quad (4.8)$$

En lugar de implementar la ley de control como en (4.8), es posible tomar el valor del equilibrio de la función  $\varphi(x)$  como un parámetro incierto  $\theta \triangleq \varphi(x_c^0)$ . Entonces un controlador equivalente con un mecanismo de adaptación para este parámetro incierto está estructurado de la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(\varphi(x) - \hat{\theta}) \quad (4.9)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = A(\varphi(x) - \hat{\theta}) \quad (4.10)$$



con  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $A = A^T > 0$ . Esta estructura de control será llamada como *controlador  $L_g V$  dinámico* a diferencia de la ley de control de (4.8), llamada *control  $L_g V$  estático*. Aunque la función de Lyapunov depende del punto de equilibrio no es necesario conocerlo ya que la función de Lyapunov puede ser calculada analíticamente en términos de un punto de equilibrio genérico, sin embargo, solamente en el caso de (4.8) es necesario conocer el punto de equilibrio, a diferencia de (4.9) y (4.10) en las que no es necesario conocerlo. Por lo tanto, el controlador  $L_g V$  dinámico no requiere el conocimiento del punto de operación haciendo posible su implementación directa en sistemas en donde el punto de operación se desconoce.

#### Hecho 4

Para cada punto de equilibrio del sistema de lazo abierto (4.3) le corresponde uno y solamente un punto de equilibrio del sistema de lazo cerrado de (4.9)-(4.10) y este punto de equilibrio es  $\left[ x_e^T \quad \varphi^T(x_e) \right]^T$ .

La posición del punto de equilibrio inicial es mantenida en una forma robusta, en el sentido de que esta es una propiedad estructural del esquema de control y por lo tanto no depende de los parámetros del controlador. Por otro lado, todo el equilibrio del sistema se mantiene no sólo en el punto de operación  $Sx_e^0$ .

### 4.5 Aplicación al generador síncrono

Consideramos de nuevo el mismo modelo de una máquina síncrona conectada a un bus infinito

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b_1 x_3 \sin(x_1) - D x_2 + P \\ \dot{x}_3 = b_3 \cos(x_1) - b_4 x_3 + E + u \end{cases} \quad (4.11)$$

Las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  representan respectivamente:

$x_1$  = Ángulo de la carga,

$x_2$  = Desviación de la velocidad del eje de la turbina del generador con respecto a la velocidad síncrona,

$x_3$  = Voltaje interno del eje de directa,

$P$  y  $E$  son entradas constantes que representan la potencia mecánica suministrada al eje por la turbina y el voltaje de campo suministrado por el sistema de excitación. Los parámetros  $b_1, b_2, b_4, P$  y  $E$  son estrictamente positivos. Finalmente  $u$  es la entrada de control que representa el voltaje de excitación del devanado de campo. Analizaremos primero el sistema no controlado ( $u = 0$ ).

Los puntos de equilibrio del sistema están dados por:  $x_e = [x_{1e}, 0, x_{3e}]^T$  donde  $x_{1e}$  y  $x_{3e}$  se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} b_1 x_3 \operatorname{sen}(x_{1e}) &= P \\ -b_{3e} \cos(x_{1e}) + b_4 x_{3e} &= E \end{aligned} \quad (4.12)$$

Considerando que  $x_e \in R$  donde  $R$  se define como:

$$R \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in (0, \pi); x_3 > 0 \right\}$$

Existen dos puntos de equilibrio dentro de esta región, uno asintóticamente estable y el otro inestable ( $x_e^s, x_e^u$ ), respectivamente. La estabilidad asintótica de  $x_e^s$  se demuestra mediante la siguiente función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} x_2^2 + b_1 x_3 (\cos x_{1e}^s - \cos x_1) \\ &\quad - P(x_1 - x_{1e}^s) + \frac{b_1 b_4}{2b_3} (x_3 - x_{3e}^s)^2 \end{aligned}$$

Esta función de Lyapunov es definida positiva y estrictamente creciente localmente dentro de la región considerada por  $D$ , quien está dado por

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid V(x) < V(x_e^u) \right\}$$

La derivada del tiempo con respecto a las trayectorias del sistema para el sistema no controlado es

$$\dot{V}(x) = -\frac{b_1}{t_3} (\varphi(x) - \varphi(x_e^s))^2$$

y queda demostrada la estabilidad del sistema de lazo abierto, donde

$$\varphi(x) \triangleq b_3 \cos x_1 - b_4 x_3$$

un estimado de la región de atracción del punto de equilibrio estable  $x_e^s$  está dado por  $D$ .

#### 4.6 Diseño del controlador

Se utilizará la función de Lyapunov obtenida en la sección previa como una función de control de Lyapunov. La derivada con respecto al tiempo de  $V(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema de lazo cerrado es

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + L_g V(x)u$$

Si se considera

$$u = -KL_g V(x); \quad K > 0$$

como la ley de control entonces

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) - K(L_g V(x))^2 \leq L_f V(x)$$

resultando que el amortiguamiento del sistema se incrementa.

Aplicando una ley de control tipo  $L_g V$  para el sistema (4.11) de la forma

$$u = -KL_g V(x) = K[\varphi(x) - \varphi(x_e^s)]; \quad K > 0 \quad (4.13)$$

$$\varphi(x) \hat{=} \dot{v}_3 \cos x_1 - b_4 x_3$$

nos referimos a la ley de control (4.13) como controlador  $L_g V$  estático.

Sustituyendo la ley de control en el sistema (4.11) queda

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -b_1 x_3 \sin(x_1) - D x_2 + P$$

$$\dot{x}_3 = b_3 \cos(x_1) - b_4 x_3 + E - K(b_3 \cos x_1 - b_4 x_3 - b_3 \cos x_{1e} - b_4 x_{3e})$$

#### 4.7 Resultados de Simulación

En las siguientes gráficas (Figura 4.1, Figura 4.2, Figura 4.3, Figura 4.4) es posible observar el comportamiento de las trayectorias del sistema al incluir la ley de control  $L_g V$ . Es fácil notar que el amortiguamiento se incrementa con respecto al sistema en lazo abierto haciendo que el sistema llegue en un tiempo mucho menor al punto de equilibrio. Mas adelante al incluir un observador de alta ganancia en el sistema (Figura 4.5, Figura 4.6, Figura 4.7, Figura 4.8) se tiene que el tiempo de convergencia se

ve retrasado, sin embargo, también el tiempo de convergencia es mucho menor al del sistema de lazo abierto, mejorando notablemente la respuesta del sistema.

#### 4.7.1 Controlador LgV estático

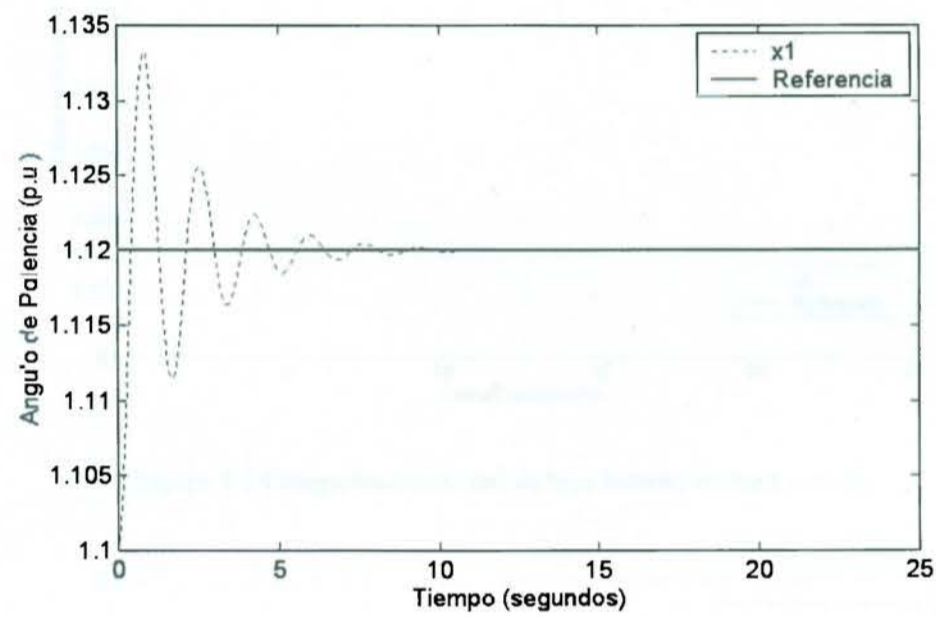


Figura 4.1 Comportamiento del ángulo de potencia en lazo cerrado

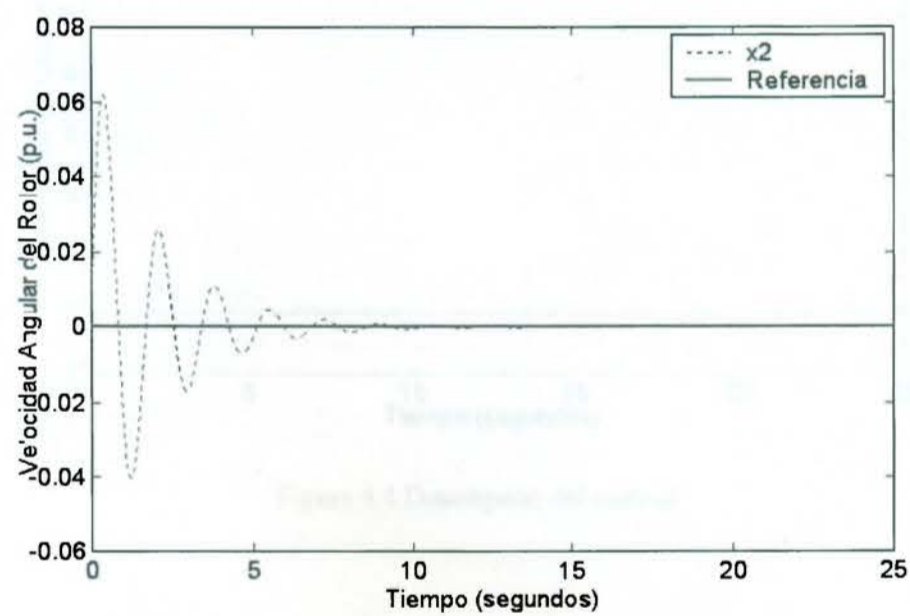


Figura 4.2 Comportamiento de la velocidad angular en lazo cerrado

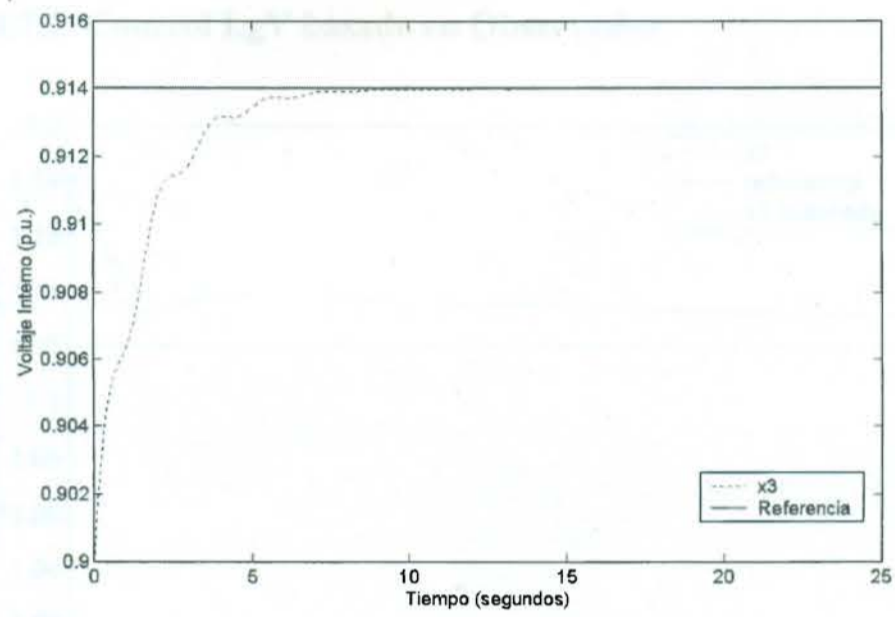


Figura 4.3 Comportamiento del voltaje interno en lazo cerrado

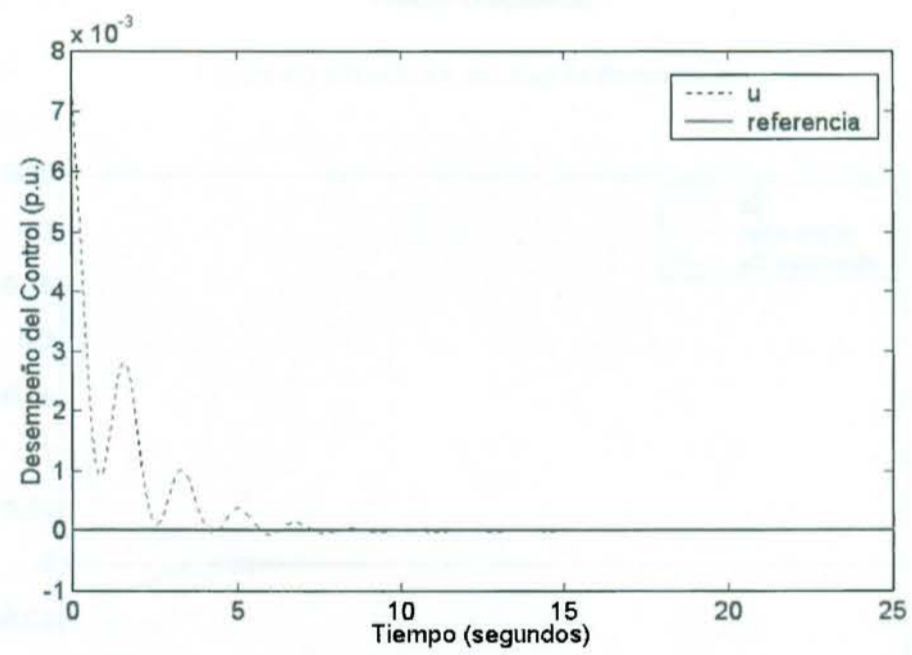


Figura 4.4 Desempeño del control

#### 4.7.2 Control LgV basado en Observador

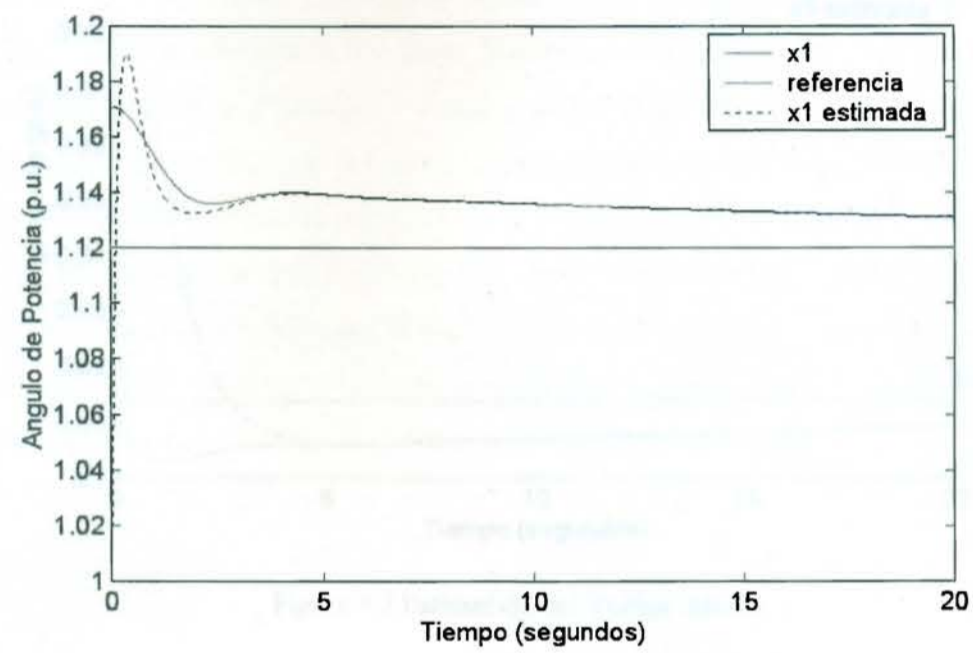


Figura 4.5 Estimación del ángulo de potencia

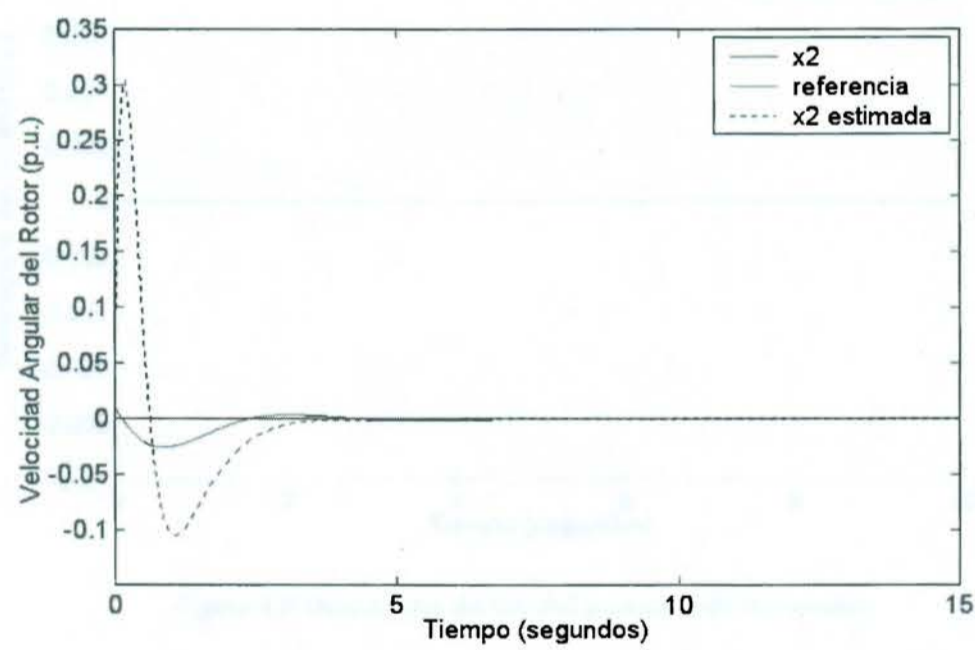


Figura 4.6 Estimación de la velocidad angular

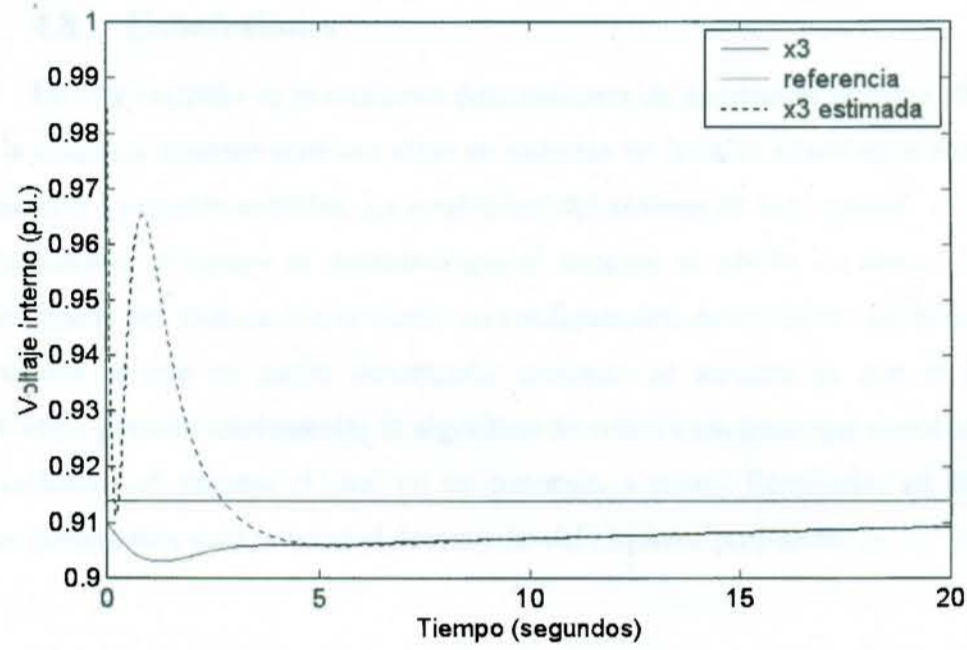


Figura 4.7 Estimación del Voltaje interno

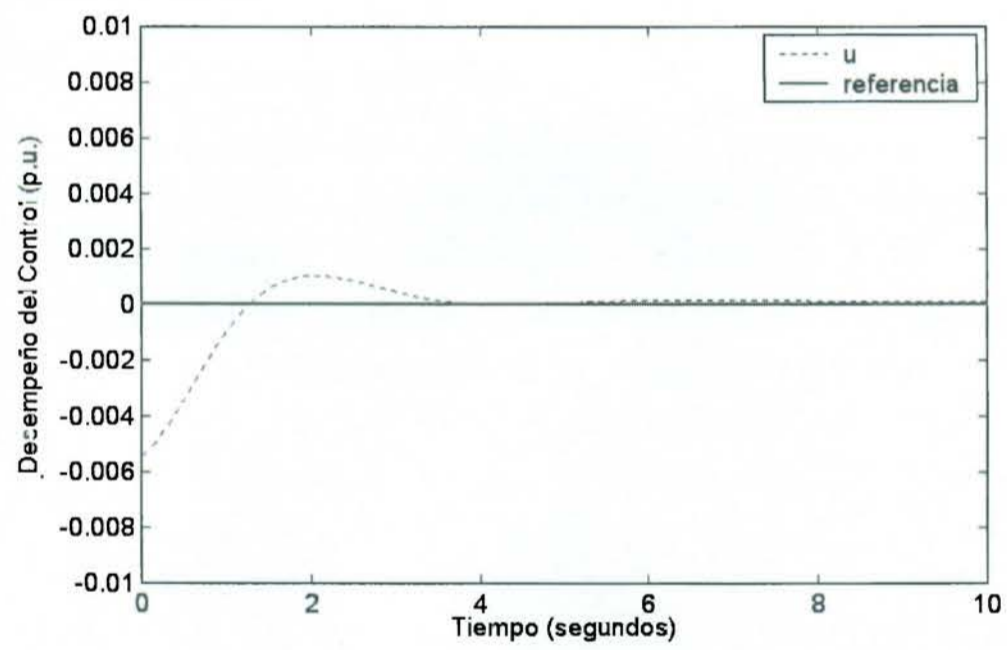


Figura 4.8 Desempeño del control basado en el observador

### 4.8 Conclusiones

En este capítulo se presentaron controladores de excitación basados en técnicas para la máquina síncrona para una clase de sistemas no lineales afines en la entrada, que además son Lyapunov estables. La estabilidad del sistema de lazo cerrado se demostró analíticamente, asimismo se demostró que el sistema no afecta las características de estado estable del sistema manteniendo su configuración de equilibrio sin alteración. El controlador provee un mejor desempeño dinámico al sistema ya que al incluir al observador, permite implementar el algoritmo de control sin tener que conocer el punto de equilibrio del sistema el cual no es conocido a priori. Resultados en simulación fueron presentados para mostrar el desempeño del esquema propuesto.

#### 4.2 Estrategia de control

La estrategia de control para el sistema de máquina síncrona se basa en el uso de un controlador de lazo cerrado que garantiza la estabilidad del sistema y el cumplimiento de los requisitos de desempeño. El controlador se diseña basándose en el modelo del sistema y en el uso de técnicas de control de sistemas no lineales afines en la entrada. El controlador se implementa en el sistema de control de la máquina síncrona y se evalúa su desempeño en términos de estabilidad y cumplimiento de los requisitos de desempeño.



Figura 4.1 Estructura de control de la máquina síncrona.



## Capítulo 5 Controlador Hamiltoniano

### 5.1 Introducción

En este capítulo se estudiará el sistema de potencia con el que se ha estado trabajando pero ahora desde el punto de vista de la formulación Hamiltoniana [1], [2], [9], [10], que como se verá es una forma diferente de estudiar a los sistemas no lineales. Para comenzar este capítulo se repasará el enfoque de pasividad ya que éste concepto será de mucha utilidad dentro de la formulación Hamiltoniana. Posteriormente se verán antecedentes de los sistemas Hamiltonianos. Se deducirá la forma canónica de esta clase de sistemas y se estudiarán sus propiedades. Se verá también el diseño de un controlador por medio de esta formulación, se incluye también el diseño de un observador para esta clase de sistemas. Finalmente se presentan resultados de simulación, en donde, se muestra el desempeño del controlador Hamiltoniano sin observador y el controlador basado en el observador.

### 5.2 Enfoque de pasividad

Un enfoque diferente para el análisis de sistemas retroalimentados es el enfoque de pasividad. Si en la conexión feedback de la figura ambos componentes  $H_1$  y  $H_2$  son pasivos en el sentido de que ellos no generan energía por si mismos, es entonces intuitivamente claro que el sistema retroalimentado será pasivo. Si uno de los dos componentes de la retroalimentación disipa energía, entonces el sistema disipará energía.

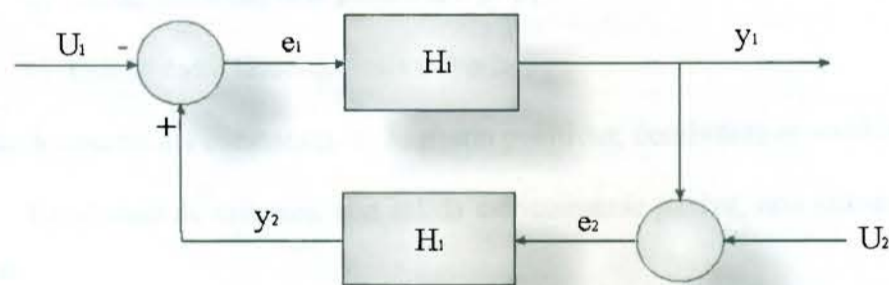


Figura 5.1 Conexión de retroalimentación.

Para ser más precisos en cuanto a esta idea de pasividad es necesario definir que se entiende por sistema pasivo.

Considere un sistema dinámico representado por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.1)$$

$$y = h(x, u) \quad (5.2)$$

donde  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz,  $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continuo,  $f(0,0) = 0$  y  $h(0,0) = 0$ . El sistema tiene el mismo número de entradas y de salidas.

#### Definición 5.1

El sistema (5.1), (5.2) se dice ser pasivo [1], si existe una función positiva semidefinida  $V(x)$  (llamada función de almacenamiento) tal que:

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + \varepsilon u^T u + \delta y^T y + \rho \psi(x), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (5.3)$$

donde  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\rho$  son constantes no-negativas, y  $\psi(x)$  es una función semidefinida positiva de  $x$  tal que:

$$\psi(x) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0 \quad (5.4)$$

para todas las soluciones de (5.1) y cualquier  $u(t)$  para la cual exista una solución. El término  $\rho\psi(x)$  es llamado índice de disipación. Además, el sistema se dice ser

Sin pérdidas, si con  $\varepsilon = \delta = \rho = 0$  y además (5.3) satisface la desigualdad siguiente

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \quad (5.5)$$

- a) Entrada estrictamente pasiva si  $\varepsilon > 0$ ;
- b) Salida estrictamente pasiva si  $\delta > 0$ ;
- c) Estado estrictamente pasivo si  $\rho > 0$ ;

Si más de una de las constantes  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\rho$  son positivas, combinamos nombres.

En el caso de sistemas con salida estrictamente pasiva, nos interesa la propiedad de que

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0 \quad (5.6)$$

para todas las soluciones de (5.1) cuando  $u = 0$ . De forma equivalente, la única solución de  $\dot{x} = f(x, 0)$  que puede permanecer idénticamente en  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x, 0) = 0\}$ , es la solución trivial,  $x(t) \equiv 0$ . Es importante observar que existe una diferencia entre la condición de (5.4) y la condición de (5.6), para la primera se requiere que (5.4) se mantenga para cualquier  $u$  mientras que (5.6) es válido solo para  $u = 0$ .

**Definición 5.2**

El sistema (5.1), (5.2) se dice ser estado cero observable si la única solución de  $\dot{x} = f(x, 0)$  que puede permanecer idénticamente en  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x, 0) = 0\}$ , es la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ .

**Lema 5.1**

Considere el sistema de (5.1), (5.2). Si el sistema es pasivo con una función de almacenamiento  $V(x)$  entonces el origen de  $\dot{x} = f(x, 0)$  es estable.

Si el sistema es de salida estrictamente pasiva, entonces es de ganancia finita  $\mathcal{L}_2$  estable.

Si el sistema es de salida estrictamente pasiva con una función  $V(x)$  de almacenamiento definida positiva y estado cero observable, entonces el origen de  $\dot{x} = f(x, 0)$  es asintóticamente estable.

Si el sistema es de estado estrictamente pasivo con una función de almacenamiento  $V(x)$  definida positiva, entonces el origen será globalmente asintóticamente estable.

Hasta aquí se ha definido lo que es un sistema pasivo, en las siguientes secciones se verá lo que es un sistema Hamiltoniano y se verá en que influye la pasividad en esta clase de sistemas.

### 5.3 Hamiltoniano

En la última década tanto los sistemas Euler-Lagrange como los sistemas Hamiltonianos han sido estudiados por varios investigadores y herramientas útiles para el análisis y síntesis de sistemas físicos han sido obtenidas [3]. Las características descubiertas mediante estas formulaciones representan explícitamente las propiedades

esenciales de pasividad de sistemas físicos, los cuales, pueden ser aplicados al diseño de sistemas de control. Estas formulaciones fueron originalmente estudiadas en la mecánica clásica y un gran número de herramientas ya han sido desarrolladas. Al comparar la formulación Hamiltoniana con la formulación Euler-Lagrange, la principal ventaja del primero es su estructura canónica y simetría perfecta.

Los sistemas Hamiltonianos generalizados han sido introducidos recientemente, en adición a los sistemas Hamiltonianos ordinarios [2], para el estudio de los sistemas electromecánicos y sistemas Hamiltonianos con una clase de restricciones no holonómicas. Los sistemas Hamiltonianos generalizados también muestran propiedades de pasividad al igual que los sistemas Euler-Lagrange y Hamiltoniano.

Una subclase de sistemas de control no lineal, la cual puede ser llamada sistemas de control no lineal mecánicos son aquellos cuya dinámica puede ser descrita por las ecuaciones del movimiento Euler-Lagrange ó Hamiltonianas. Se sabe ya que un gran número de sistemas físicos admiten, al menos parcialmente, la formulación representada por estas ecuaciones, las cuales pertenecen principalmente al esquema teórico de la física.

En términos generales un Hamiltoniano generalizado es un sistema no-lineal sin pérdidas provisto con entradas de control externas el cual está definido dentro de un esquema de espacio de estado tradicional. Sin embargo un sistema Hamiltoniano generalizado es identificado por una inclusión explícita de la contribución del gradiente de la energía total del sistema en las ecuaciones diferenciales que describan la evolución controlada del vector de estado. En general, los circuitos eléctricos no son considerados sistemas Hamiltonianos debido a la presencia de elementos resistivos y algunos elementos no disipativos, los cuales, sin embargo, afectan la estructura canónica fundamental de un sistema sin pérdidas.

Dentro de la formulación Hamiltoniana es posible lograr el modelado sistemático de redes incluyendo resistores, transformadores, diodos y switches, cosa que no es fácil y en algunos casos es imposible de lograr a través del formalismo Lagrangiano.

#### 5.4 Hamiltoniano de un sistema dinámico

El lagrangiano  $L$  para un sistema holonómico de  $n$  grados de libertad está definido en términos de variables independientes  $q_j$  y  $\dot{q}_j$  como:

$$L = (q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

y las ecuaciones del movimiento son las ecuaciones de Lagrange, un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

El momento conjugado generalizado  $p_j$  está definido como

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Existe un método para describir el comportamiento mecánico completo del sistema al tomar  $q_j$  y  $p_j$  como funciones del tiempo en vez de  $q_j$  y  $\dot{q}_j$  como se acaba de mostrar.

Remplazando la función Lagrangiana con una cantidad  $H$  (Hamiltoniano o función Hamiltoniana del sistema), por la siguiente relación

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (5.8)$$

En matemáticas a la relación descrita por (5.8) es llamada transformación de Legendre, y es un procedimiento para pasar de un conjunto de variables independientes a otro.

Para ilustrar la transformación de Legendre en forma apropiada para nuestro propósito, se considera una función  $f$  de variables  $x_j, y_j$ , y  $t$ :  $f = f(x_j, y_j, t)$ ,  $f$  es continua y dos veces diferenciable. La diferencial total es de la forma:

$$df = \sum_j (u_j dx_j + v_j dy_j) + \omega dt$$

con

$$u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad v_j = \frac{\partial f}{\partial y_j}, \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\partial f}{\partial t}$$

donde  $(u_j, x_j)$  y  $(v_j, y_j)$  son llamados par de variables conjugadas. Suponga ahora que deseamos construir una nueva función de la vieja función  $f$ , en la cual una variable independiente, por decir,  $x_j$ , es remplazada por su variable conjugada. Para obtener la nueva función se sustrae la función  $f$  del producto de este par de variables conjugadas

$$g = \sum_j u_j x_j - f \quad (5.9)$$

De la diferencial de  $g$  se obtiene:

$$dg = \sum_j (u_j dx_j + x_j du_j) - \sum_j (u_j dx_j + v_j dy_j) - \omega dt$$

o

$$dg = \sum_j (u_j du_j - v_j dy_j) - \omega dt$$

lo cual hace que se logre que ahora las variables independientes sean  $u_j$  y  $y_j$ ,

$$dg = \sum_j \left( \frac{\partial g}{\partial u_j} du_j + \frac{\partial g}{\partial y_j} dy_j \right) + \frac{\partial g}{\partial t} dt$$

Al comparar las dos expresiones para  $dg$  se obtiene

$$x_j = \frac{\partial g}{\partial u_j}, \quad v_j = -\frac{\partial g}{\partial y_j}, \quad \omega = -\frac{\partial g}{\partial t} \quad (5.10)$$

es decir, las cantidades  $x_j$  y  $v_j$  están ahora en función de las variables  $u_j$  y  $y_j$ , obtenidas por las relaciones anteriores. La transformación de la (5.9) de  $f$  en  $g(u_j, y_j)$ , es llamada la transformación de Legendre y  $g$  es llamada transformada de Legendre de  $f$  con respecto a la variable  $x$ .

Ahora se utilizará la transformación de Legendre para remplazar las  $q$ 's por  $p$ 's como variables independientes partiendo de las ecuaciones de Lagrange. En forma análoga, usaremos  $q$ 's en vez de  $x$ 's,  $\dot{q}$ 's en vez de  $y$ 's y el Lagrangiano en vez de  $f$ . De igual manera, el Hamiltoniano  $H$  remplazará a la función  $g$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

la cual es la función  $H$  introducida en la ec (5.8). En correspondencia a la ec. (5.10) resulta

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (5.11)$$

Aunque  $\dot{q}_j$  aparece explícitamente en la definición de la ecuación (5.8),  $H$  es una función de las coordenadas generalizadas  $q_j$ , del momento generalizado  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$  y del tiempo  $t$ .

Con esta transformación, las  $q$ 's y las  $p$ 's son ahora tratadas por igual  $H = H(q_j, p_j, t)$ . Hay dos cantidades por cada grado de libertad del sistema mecánico, las coordenadas generalizadas y el momento generalizado conjugado. Sólo con el espacio de configuración definido por las  $n$  variables independiente  $q$ , podemos imaginar un espacio de  $2n$  dimensiones definido por las  $2n$  variables  $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ . Por lo tanto, todo punto en este espacio representa la posición y el momento de todas las partículas en el sistema. A este espacio se llama espacio de fase. La descripción del comportamiento en este espacio es determinado por un nuevo conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones de Hamilton. En seguida se mostrará como obtener estas ecuaciones del movimiento.

### 5.5 Ecuaciones de Hamilton

Se toma la diferencial total del Hamiltoniano  $H = H(p, q, t)$ , obteniendo

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (5.12)$$

Similarmente se obtiene

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

de ecuación (5.8). El primer y cuarto término se cancelan entre sí por la definición  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ . Aplicando las ecuaciones de Lagrange al tercer término,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \left( \frac{d}{dt} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{dp_j}{dt}, \text{ se obtiene}$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (5.13)$$

Debido a que  $q$  y  $p$  son variables independientes, las variaciones  $dq$ ,  $dp$  y  $dt$  son mutuamente independientes, sus coeficientes tienen que ser iguales a las ecuaciones (5.12) y (5.13). Por lo tanto

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

o

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.15)$$

La principal ventaja de la ecuación (5.14) en comparación con la ecuación (5.7) es que la ecuación (5.14) constituye un sistema de control en el espacio de estado estándar de forma explícita e inmediata, con variables de estado  $(q, p)$  (en física llamadas usualmente variables de fase). Además las variables  $q$  y  $p$  son variables conjugadas y el Hamiltoniano  $H(q, p, u)$  puede ser relacionado directamente con la energía total del sistema.

Escribiendo el sistema (5.14) en una representación estándar:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde  $x \in \Xi$ , una variedad  $n$ -dimensional,  $u, y \in \mathbb{R}^m$ ,  $x = [x_1 \dots x_n]^T$  son las variables de energía, la función suave  $H(x_1 \dots x_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  representa la energía total almacenada ( $H(x)$  es la función Hamiltoniana),  $u, y$  la entrada y la salida respectivamente. La estructura de interconexión entre la entrada y la salida es



relacionada por la matriz de  $J(x)$ ,  $n \times n$  y la matriz de  $g(x)$ ,  $n \times m$ . La matriz  $J(x)$  es antisimétrica esto es,  $J(x) = -J^T(x) \forall x \in \Xi$ . En particular cuando  $n$  es par y

$$J(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

son válidos, el sistema de la ecuación (5.16) es llamado sistema Hamiltoniano.

El sistema Hamiltoniano generalizado satisface:

$$H(x(t_1)) = H(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t) dt \quad (5.18)$$

para cualquier  $x(t_0)$  y  $u(t)$ . Si  $H(x)$  es la cota inferior, entonces el mapeo entrada-salida  $u \mapsto y$  es pasivo, con función de almacenamiento  $H$ .

El balance de energía para el sistema (5.16) queda:

$$\frac{d}{dt} H = u^T y \quad (5.19)$$

con  $u^T y$  como la energía suministrada externamente al sistema. La disipación de energía se incluye al añadir elementos resistivos.

Considere en vez de  $g(x)u$  en la ecuación (5.16) el término:

$$\begin{bmatrix} g(x) & g_R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_R \end{bmatrix} = g(x)u + g_R(x)u_R$$

y correspondientemente en vez de  $y = g^T(x) \frac{\partial H(x)^T}{\partial x}$  el término:

$$\begin{bmatrix} y \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^T(x) \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \\ g_R^T(x) \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Aquí  $u_R$ ,  $y_R$  denota las variables de energía las cuales son modeladas con elementos resistivos

$$u_R = -S y_R$$

para alguna matriz simétrica no definida negativa  $S$ . La sustitución en uno de estos resultados, nos lleva al modelo de la forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \\ y = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (5.20)$$

donde

$$R(x) \triangleq g_R(x) S g_R^T(x)$$

la cual es una matriz simétrica no-negativa definida que depende suavemente de  $x$ , es decir

$$R(x) = R^T(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Xi$$

Para el sistema  $\Sigma$  dado por (5.20), el balance de potencia (5.19) se extiende a

$$\frac{d}{dt} H - \frac{\partial^T H(x)}{\partial x} R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + u^T y \quad (5.21)$$

donde el primer término del lado derecho representa la disipación de energía debida a los elementos resistivos en el sistema.

## 5.6 Diseño del Control

Considere el siguiente sistema no lineal multivariable  $\Sigma_{NL}$  expresado por las ecuaciones

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.22)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector del control y  $y \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salida.

Considerando el hecho de que la energía total del sistema puede ser considerada como una función de Lyapunov para el estudio de sistemas Hamiltonianos [3], se considera un sistema no lineal  $\Sigma_H$  el cual puede ser representado en una forma Hamiltoniana generalizada con términos disipativos

$$\Sigma_H : \begin{cases} \dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H^T}{\partial x} + g(x)u \\ y = g^T(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} \end{cases} \quad (5.23)$$

donde  $x, u, y$  son las variables de energía,  $H(x_1 \dots x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  representa la energía total almacenada. La estructura de interconexión es representada por la matriz antisimétrica de  $J(x)$   $n \times n$  y la matriz de  $g(x)$   $n \times m$ .

$$J(x) = -J^T(x), \quad \forall x \in M$$

$R(x)$  es una matriz simétrica que depende de  $x$ , es decir,

$$R(x) = R^T(x) \geq 0, \quad \forall x \in M$$

de (5.22) y (5.23) se obtiene el balance de energía

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} + u^T y$$

con  $u^T y$  la potencia suministrada externamente al sistema y  $-\frac{\partial H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H^T}{\partial x}$  representa la disipación de energía debida a los elementos resistivos.

Se asume que el Hamiltoniano generalizado tiene un mínimo local estricto.  $x^*$  es un punto de equilibrio estable de Lyapunov de la dinámica no-forzada.

**Definición.-**

El sistema (5.23) es llamado pasivo con respecto a la salida  $y = h(x)$  si existe una función suave no negativa  $H(x)$ , tal que  $H(0) = 0$  y la siguiente igualdad de disipación es válida a lo largo de las trayectorias de (5.23)

$$H(x(t)) - H(x(0)) \leq \int_0^t u(s) y(s) ds \quad (5.24)$$

Esta desigualdad se puede describir como sigue

$$\dot{H} \leq y^T(t) u(t) \quad (5.25)$$

Para hacer al punto de equilibrio asintóticamente estable consideramos la siguiente salida retroalimentada

$$u = -y \quad (5.26)$$

**Teorema 5.1**

Considere el sistema  $\Sigma_{NL}$  representado por la ecuación (5.22), el cual tiene un mínimo local estricto,  $x^*$ . Suponga la dinámica con salida estado cero detectable.

Entonces la retroalimentación  $u = -y$  hace al punto de equilibrio localmente asintóticamente estable.

### 5.7 Estimación de estado No-Lineal

El problema de estimación de estado ha sido uno de los principales temas de investigación en el estudio de sistemas dinámicos no-lineales. Esto es debido a que para algunos casos no se cuenta con la información completa de todas las componentes del vector de estado, complicando en consecuencia la implementación de los algoritmos de control.

Existen varias razones por las cuales se hace necesario la construcción de un observador, y éstas son motivadas principalmente por la necesidad de monitoreo, supervisión de procesos e implementación de algoritmos de control. La falta de información del vector de estado puede ser causada por aspectos físicos del sistema, es decir, debido a que no se pueda llevar a cabo la medición ó por aspectos económicos, haciendo referencia al elevado costo de equipo de medición sofisticado.

Tomando como base la propiedad de observabilidad es posible obtener ecuaciones que relacionan explícitamente el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida y de las entradas aplicadas al mismo durante un intervalo de tiempo, por medio de un sistema dinámico auxiliar denominado observador. Con este observador se calcula una estimación del estado en el tiempo actual en función del valor de las entradas y salidas en tiempos anteriores a este y esta estimación se obtiene en tiempo real, es decir, al conocer el valor de la entrada y la salida en un tiempo  $t-1$  estimamos el valor de  $t$ .

#### Definición 5.3

Considere un sistema dinámico:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u); & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.27)$$

A un sistema dinámico auxiliar cuyas entradas están constituidas por las entradas y las salidas del sistema a observar se le llama observador y la salida de este sistema dinámico auxiliar es el estado estimado u observado

$$\Omega : \begin{cases} \dot{z} = F(z, u); & \forall z \in \mathbb{R}^n \\ \dot{x} = H(u, y, z) \end{cases}$$

tal que  $\|e\| = \|x - \hat{x}\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

El problema de estimación de estado u de observabilidad se puede plantear básicamente como el problema de la falta de conocimiento o de medición del estado inicial. Se sabe bien ya, que cuando una ley de control es diseñada su aplicación está limitada por las componentes del vector de estado disponible. Para sistemas lineales, el diseño de estimadores de estado se resuelve tradicionalmente usando el observador de Luenberger o el filtro de Kalman. Además la propiedad de observabilidad para sistemas lineales no depende de la entrada aplicada al sistema. Por otro lado, a diferencia de los sistemas lineales, la propiedad de observabilidad para los sistemas no lineales sí depende de la entrada ya que existen algunos tipos de entrada para los cuales el sistema se vuelve no-observable, de ahí que el diseño de un observador depende en como la entrada actúa sobre el sistema además de la estructura del mismo. El problema de estimación de estado puede ser resuelto vía un cambio de coordenadas, el cual transforma el sistema no-lineal en otro sistema para el cual se puede construir un observador.

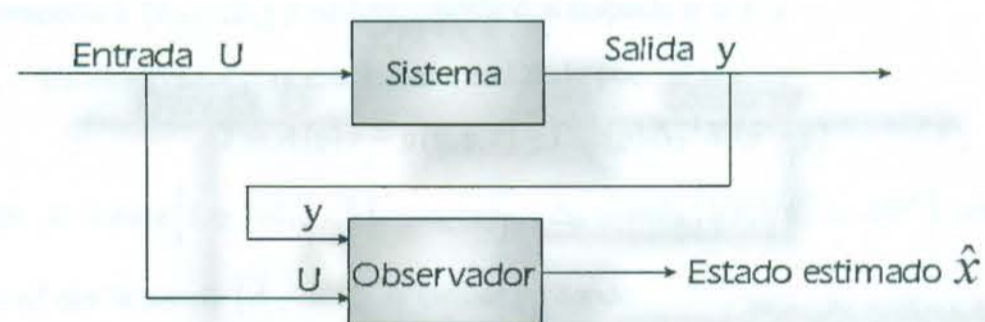


Figura 5.2 Esquema de un observador

Considere la clase de sistemas afine en el estado los cuales son representados como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y)x + g(u, x) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde la matriz  $A$  depende de la salida y  $g$  tiene forma triangular.

### 5.8 Diseño de un Observador para sistemas Triangulares

Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y)x + g(u, x) \\ y &= Cx = x_1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(y) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2(y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n-1}(y) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; g(u, y, x) = \begin{pmatrix} g_1(u, y) \\ g_2(u, y, x_2) \\ \vdots \\ g_n(u, y, x) \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$$

A continuación se considerarán las siguientes hipótesis

**A1)** Existen constantes positivas  $c_1, c_2, 0 < c_2 < \infty$  tal que para toda  $x \in \mathbb{R}^n$

$$0 < c_1 \leq |\alpha_i(y)| \leq c_2 \leq \infty, \quad i = 1, \dots, n-1$$

**A2)** Las funciones  $g_i(u, y, x_1, \dots, x_i), i = 1, \dots, n$  son globalmente Lipschitz con respecto a  $(x_1, \dots, x_i)$  y uniformemente con respecto a  $u$  y  $y$ .

Un observador para este sistema está dado por

$$\dot{z} = A(y)z + g(u, y, z) - \Gamma^{-1}(y)\Delta_\theta^{-1}K(\hat{y} - y) \quad (5.30)$$

donde  $\Gamma = \text{diag}\{1, \alpha_1(y), \dots, \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y)\}, \Delta_\theta = \text{diag}\{1/\theta, 1/\theta^2, \dots, 1/\theta^n\}$  con  $\theta > 0$ ,

$K$  es tal que la matriz  $(\bar{A} - KC)$  es estable en donde

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

por la hipótesis a), la matriz  $\Gamma$  es no singular.

**A3)** Se asume que  $\sup_{\theta \geq 1} \|\dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\| \leq L_2$  donde  $L_2$  es una constante positiva.

### Teorema 5.2

Asuma que el sistema (5.29) satisface las hipótesis **A1**, **A2** y **A3**. Entonces existe  $\theta_0$  tal que para toda  $\theta > \theta_0$ , el sistema (5.30) es un observador exponencial para el sistema (5.29). Además, la dinámica de este observador puede ser arbitrariamente rápida.

### Demostración

Definiendo la estimación del error como  $e = \hat{x} - x$  cuya dinámica está dada por

$$\dot{e} = (A(y) - \Gamma^{-1}(y)\Delta_\theta^{-1}KC)e + g(u, y, z) - g(u, y, x)$$

Considere una transformación de coordenadas de la forma  $\varepsilon = \Gamma(u, y)\Delta_\theta e$ , entonces resulta

$$\dot{\varepsilon} = \theta \{\bar{A} - KC\}\varepsilon + \{G(u, y, z) - G(u, y, x)\} + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon \quad (5.31)$$

con

$$\Gamma(y)\Delta_\theta \{g(u, y, z) - g(u, y, x)\} = G(u, y, z) - G(u, y, x);$$

$$\Gamma(y)\Delta_\theta A(y)(\Gamma(y)\Delta_\theta)^{-1} = \theta\bar{A};$$

$$C(\Gamma(y)\Delta_\theta)^{-1} = \theta C.$$

Sea  $V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon$  una función candidato de Lyapunov para el sistema (5.29)

donde  $P$  cumple con

$$P\{\bar{A} - KC\} + \{\bar{A} - KC\}^T P = -I$$

$$\|G(u, y, z) - G(u, y, x)\| \leq L_1 \|e\|$$

donde  $L_1$  es una constante de Lipschitz.

Tomando la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (5.29), se obtiene

$$\dot{V}(\varepsilon) = \varepsilon^T P \left\{ \theta [\bar{A} - KC]\varepsilon + G(u, y, z) - G(u, y, x) + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon \right\}$$

$$+ \left\{ \theta [\bar{A} - KC]\varepsilon + G(u, y, z) - G(u, y, x) + \dot{\Gamma}(y)\Gamma^{-1}(y)\varepsilon \right\}^T$$

reemplazando la hipótesis a3) y las expresiones adecuadas, resulta

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -\theta k \|\varepsilon\|_P^2 + L_1 \|\varepsilon\|_P^2 + L_2 \|\varepsilon\|_P^2$$

con  $\|\varepsilon\|_P^2 = \varepsilon^T P \varepsilon$ ,  $k$  una constante positiva.

Entonces tenemos

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -(\theta k - L_1 - L_2) \|\varepsilon\|_P^2 = -\delta V(\varepsilon)$$

para  $\delta = \theta k - L_1 - L_2 > 0$ , se obtiene  $\dot{V}(\varepsilon) \leq 0$  para  $\theta$  suficientemente grande.

### 5.8.1 Análisis de Lazo Cerrado

Considere el siguiente sistema aumentado  $\Sigma_A$

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + g(x) u(z) \\ \dot{e} = (A(y) - \Gamma^{-1}(y) \Delta_\theta^{-1} K C) e + g(u, y, z) - g(u, y, x) \end{cases}$$

Se estudiará la estabilidad del sistema anterior, el describiremos como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J(x) - R(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + g(x) u(z) + g(x) [u(z) - u(x)] \\ \dot{e} &= (A(y) - \Gamma^{-1}(y) \Delta_\theta^{-1} K C) e + g(u, y, z) - g(u, y, x) \end{aligned}$$

y reemplazando el control dado por (5.26) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J(x) - R(x) - g(x) g^T(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + g(x) [u(z) - u(x)] \\ \dot{e} &= (A(y) - \Gamma^{-1}(y) \Delta_\theta^{-1} K C) e + g(u, y, z) - g(u, y, x) \end{aligned}$$

Se propone una función candidato de Lyapunov

$$L(x, \varepsilon) = H(x) + V(\varepsilon)$$

con  $\varepsilon = \Gamma[u, y] \Delta_\theta e$  y tomando la derivada del tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema  $\Sigma_A$ , tenemos que



$$\begin{aligned}
\dot{L}(x, \varepsilon) &= \dot{H}(x) + \dot{V}(\varepsilon) \\
&\leq \frac{\partial H}{\partial x} (J(x) - R(x) - g(x)g^T(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} g(x)[u(z) - u(x)] \\
&\quad - (\theta k - L_1 - L_2) \|\varepsilon\|_P^2 \\
&\leq -\frac{\partial H}{\partial x} (R(x) + g(x)g^T(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} g(x)[u(z) - u(x)] - \delta V(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Por las hipótesis y por  $\alpha$  que es una constante que satisface  $1 > \alpha > 0$  y  $\|u(z) - u(x)\|^2 \leq k \|\varepsilon\|^2$ , para  $k > 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{L}(x, \varepsilon) &\leq -\frac{\partial H}{\partial x} (R(x) + g(x)g^T(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + \left\| \frac{\partial H}{\partial x} g(x) \right\| \|u(z) - u(x)\| - \delta V(\varepsilon) \\
&\quad - \frac{\partial H}{\partial x} (R(x) + g(x)g^T(x)) \frac{\partial H^T}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{2} \left\| g^T(x) \frac{\partial H^T}{\partial x} \right\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha^2} \|u(z) - u(x)\|^2 - \delta V(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\dot{L}(x, \varepsilon) = -\frac{dH}{dx} \left( R(x) + g(x)g^T(x) \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right) \frac{dH^T}{dx} - \left( \delta - \frac{k}{2\alpha^2} \right) V(\varepsilon)$$

Si  $\left( \delta - \frac{k}{2\alpha^2} \right) = -(\theta k - L_1 - L_2) - \frac{k}{2\alpha^2} > 0$  y usando el teorema de La Salle es posible probar la estabilidad del sistema.

### 5.9 Aplicación al generador síncrono

Consideramos de nuevo el mismo modelo de una máquina síncrona conectada a un bus infinito

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b_1 x_3 \sin(x_1) - D x_2 + P \\ \dot{x}_3 = b_3 \cos(x_1) - b_4 x_3 + E + u \end{cases} \quad (5.32)$$

Las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  representan respectivamente:

$x_1$  = Ángulo de la carga,

$x_2$  = Desviación de la velocidad del eje de la turbina del generador con respecto a la velocidad síncrona,

$x_3$  = Voltaje interno del eje de directa,

$P$  y  $E$  son entradas constantes que representan la potencia mecánica suministrada al eje por la turbina y el voltaje de campo suministrado por el sistema de excitación. Los parámetros  $b_1, b_2, b_4, P$  y  $E$  son estrictamente positivos. Finalmente  $u$  es la entrada de control que representa el voltaje de excitación del devanado de campo. Analizaremos primero el sistema no controlado ( $u = 0$ ).

Considere la siguiente función de energía

$$H = \frac{1}{2}x_2^2 + b_1x_3(\cos(x_{1e}) - \cos(x_1)) - P(x_1 - x_{1e}) + \frac{b_1b_4}{2b_2}(x_3 - x_{3e})^2$$

sea entonces su derivada con respecto a las trayectorias del sistema (5.32) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_1} &= b_1x_3 \sin(x_1) - P \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} &= x_2 \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} &= b_1(\cos(x_{1e}) - \cos(x_1)) + \frac{b_1b_4}{b_3}(x_3 - x_{3e})\end{aligned}$$

rescribiendo el sistema (5.32) en forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} - Dx_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{b_1}{b_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} + u\end{aligned}\tag{5.33}$$

El sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -D & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_1}{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

aquí el subsistema mecánico es representado por un sistema Hamiltoniano, el cual está acoplado a un sistema gradiente que representa al subsistema eléctrico. Escribiendo en forma compacta se obtiene

$$\dot{x} = (J - R)\nabla H^T + Bu\tag{5.34}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_1}{b_3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla H = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad J = -J^T$$

Para probar la estabilidad del sistema de lazo cerrado se considera la función Hamiltoniana cuya derivada a lo largo del sistema (5.32) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} (J - R) \nabla H^T + Bu \\ &= \nabla H J \nabla H^T - \nabla H R \nabla H^T + Bu \\ &= -\nabla H R \nabla H^T + Bu \end{aligned}$$

Seleccionando la ley de control de hace al sistema pasivo

$$u = -B^T \nabla H^T$$

resulta

$$\begin{aligned} \dot{H} &\leq -\nabla H R \nabla H^T + \nabla H B B^T \nabla H^T \\ &\leq -\nabla H (H - B B^T) \nabla H^T \leq 0 \end{aligned}$$

donde la ley de control expresada en coordenadas del sistema está dada como

$$u = -b_1 (\cos(x_{1e}) - \cos(x_1)) + \frac{b_1 b_4}{b_3} (x_3 - x_{3e})$$

es posible escribir  $u$  como

$$u = -(m_5 x_3 - m_6 \cos(x_1) + E)$$

siendo  $E$  la condición de equilibrio  $E = -b_{3e} \cos(x_{1e}) + b_4 x_{3e}$ .

### 5.10 Resultados de simulación

En esta sección se muestra el desempeño del controlador Hamiltoniano propuesto. El vector  $K$  que representa la ganancia del observador está valuado en  $K = (1, 4, 6)$ . Las condiciones iniciales del observador fueron:  $z_1 = 1, z_2 = 0.05, z_3 = 1, z_4 = 0.3$  la condición inicial para el vector de estado fue:  $x_1 = 1.1, x_2 = 0.01, x_3 = 0.98$ . En las figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, se puede apreciar como los valores convergen hacia los valores de equilibrio así como el control aplicado al sistema. En las figuras 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, se muestran las dinámicas de las diferentes variables del sistema y sus estimados, es posible observar claramente como las dinámicas de las variables estimadas convergen a las dinámicas reales.

#### 5.10.1 Controlador Hamiltoniano

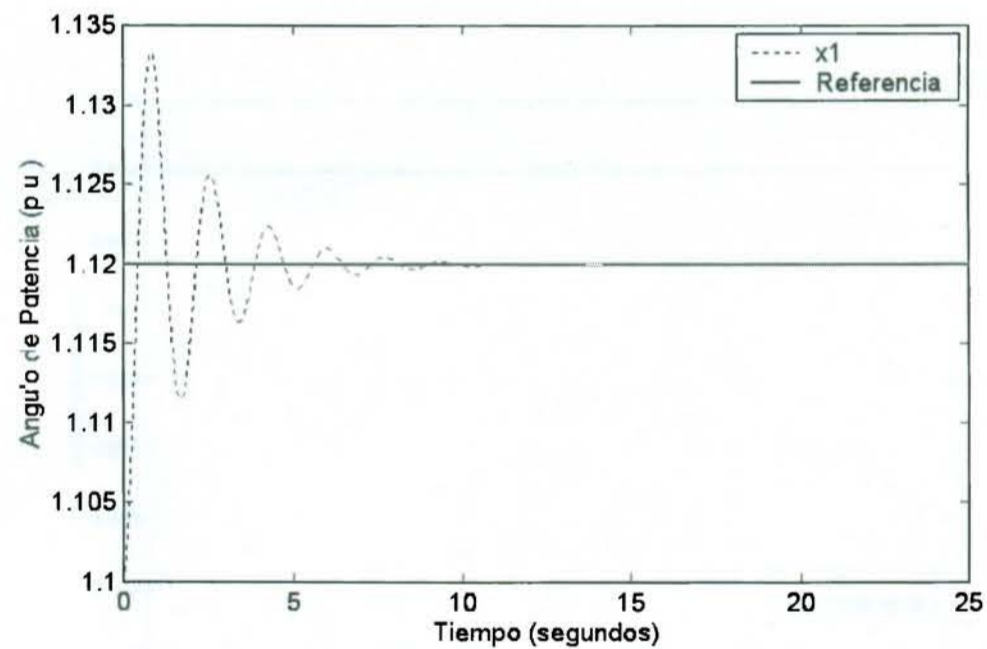


Figura 5.3 Comportamiento del sistema en lazo cerrado con el controlador Hamiltoniano

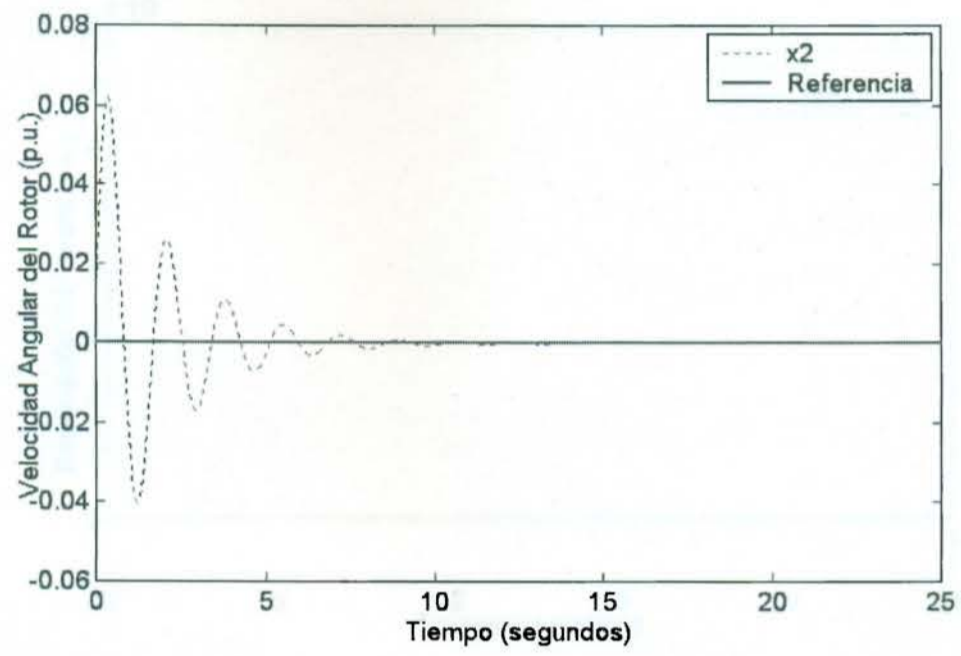


Figura 5.4 Comportamiento de la velocidad angular con el control Hamiltoniano

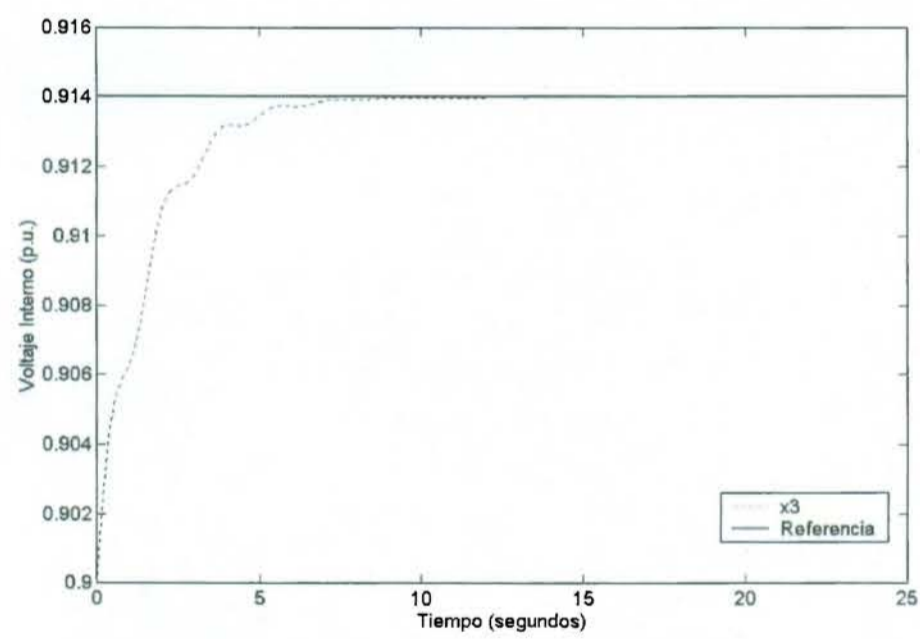


Figura 5.5 Voltaje interno con el control Hamiltoniano

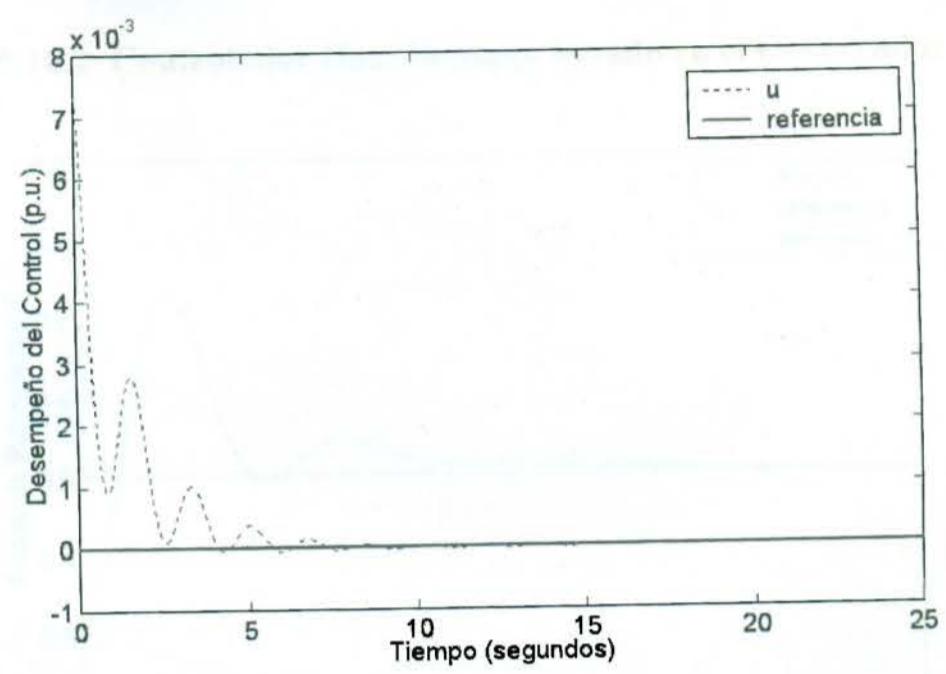


Figura 5.6 Desempeño del control

### 5.10.2 Controlador Hamiltoniano basado en el Observador

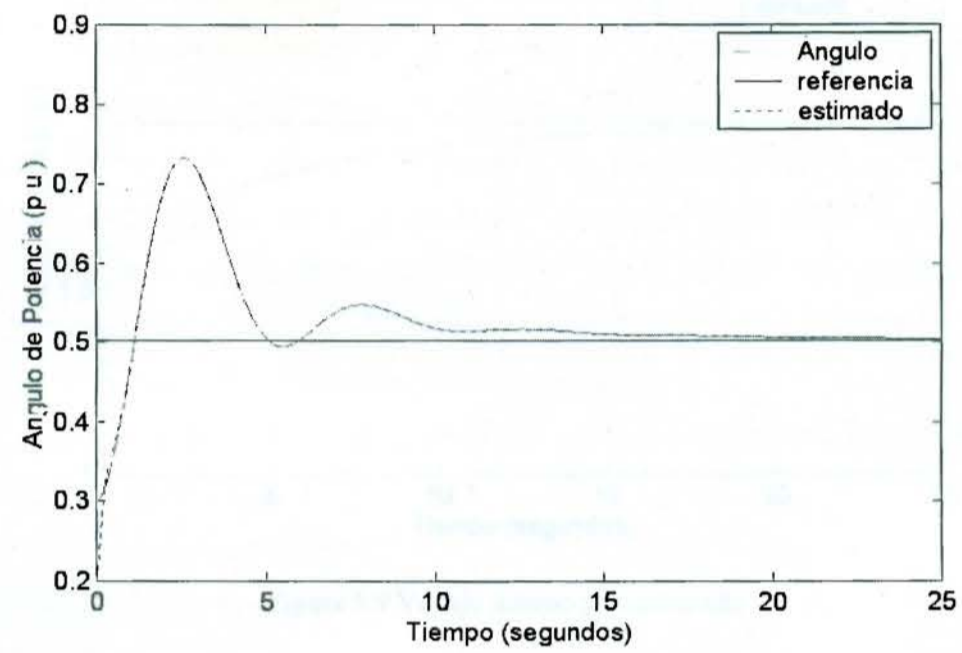


Figura 5.7 Angulo de potencia y su estimado

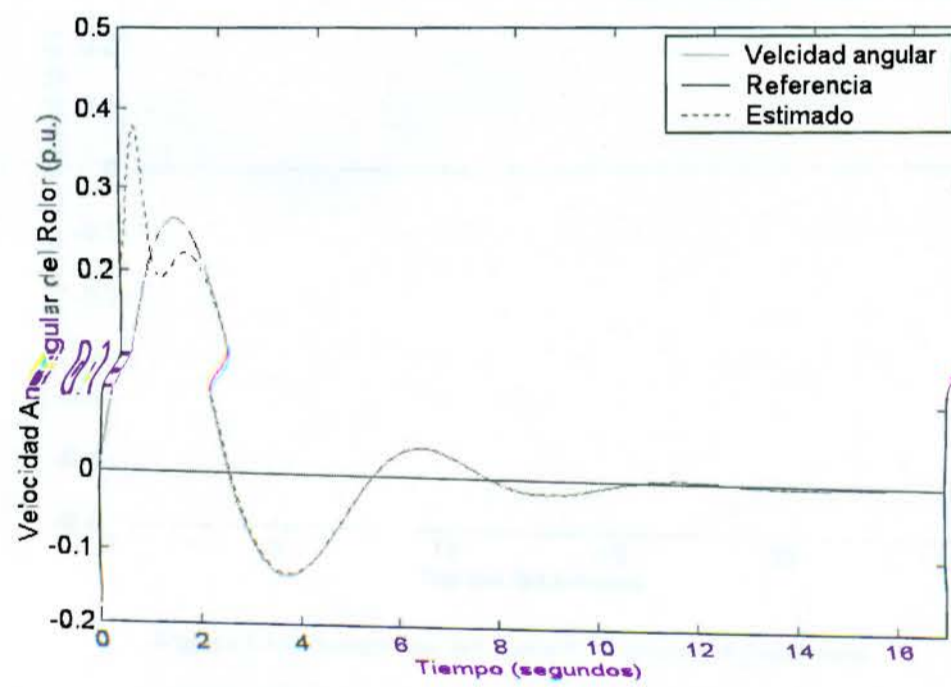


Figura 5.8 Velocidad angular y su estimado

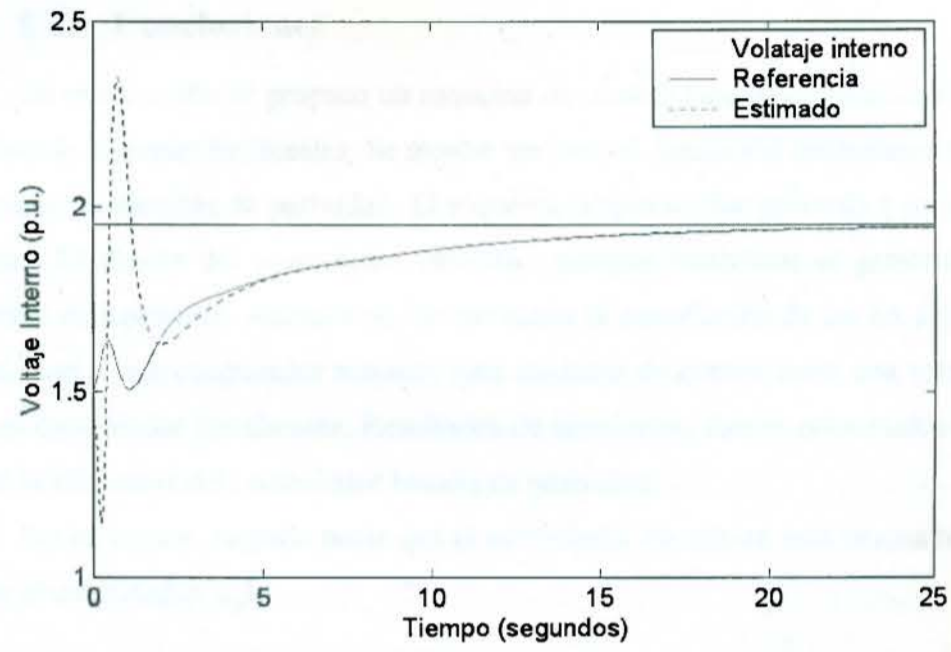


Figura 5.9 Voltaje interno y su estimado

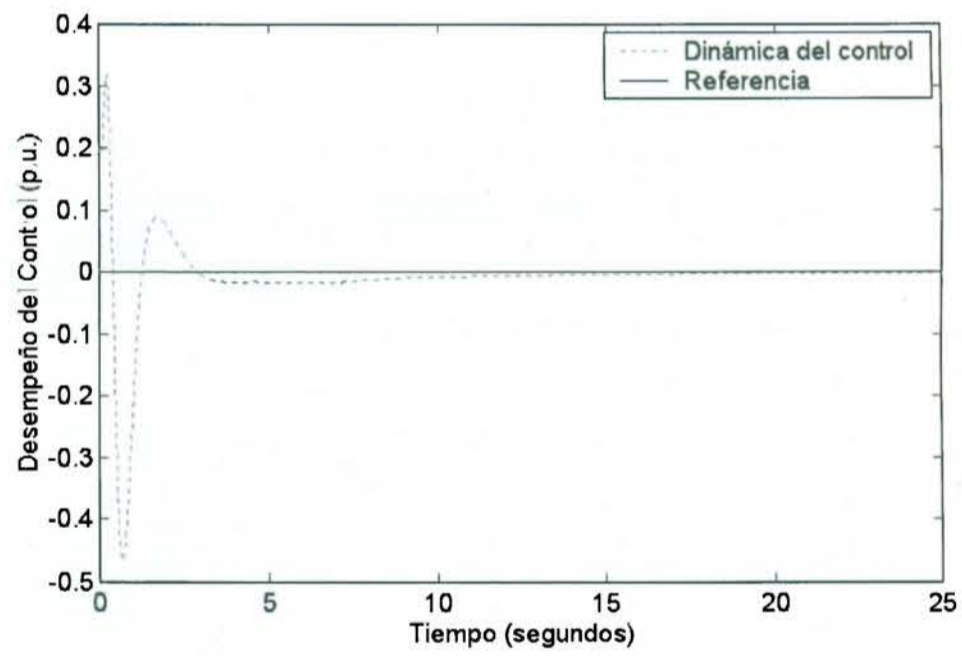


Figura 5.10 Desempeño del control basado en el observador



### 5.11 Conclusiones

En esta sección se propuso un esquema de control basado en un observador para una clase de sistemas no lineales. Se mostró también el diseño del controlador en el cual fue basado en técnicas de pasividad. El esquema propuesto fue aplicado a un generador síncrono. El diseño del controlador obtenido, permite estabilizar al generador en su condición de equilibrio. Además no fue necesaria la cancelación de las no linealidades lo cual hace a este controlador robusto. Este esquema de control tiene una ventaja clara sobre el controlador linealizante. Resultados de simulación fueron presentados donde se mostró la eficiencia del controlador basado en pasividad.

Por otra parte, se pudo notar que el controlador basado en esta técnica resulto ser similar al controlador  $L_gV$ .

## Capítulo 6 Conclusiones

### 6.1 Conclusiones

En este trabajo, se presentó un análisis sobre el comportamiento dinámico de un generador síncrono conectado a una barra infinita. Para ello, se desarrolló un modelo matemático tanto para la parte eléctrica como para la parte mecánica del generador. Haciendo uso de algunas hipótesis se logró deducir un modelo de tercer orden el cual fue considerado para el diseño de controladores y observadores no lineales.

Puesto que el objetivo de control del generador síncrono es mantener el ángulo del rotor dentro de un valor de referencia asociado al punto de equilibrio, se estudiaron diferentes estrategias de control. Las estrategias de control que se consideraron se basaron en: control por retroalimentación de estado, control LgV y control basado en pasividad.

Con respecto al control por retroalimentación de estado presentó un buen desempeño. Sin embargo, el principal inconveniente de ésta técnica de control, es su falta de robustez ante la presencia de incertidumbres en los parámetros, ya que la cancelación de las no linealidades resulta inadecuada, limitando su implementación.

Por otra parte, los controladores  $L_gV$  requieren de la existencia de una función de Lyapunov para su diseño. Partiendo del hecho de que la función de energía asociada al generador síncrono califica como función de Lyapunov, lo cual permite utilizar esta técnica. Por otro lado, el diseño de una ley de control Hamiltoniana basada en pasividad utiliza la función de energía. Como se pudo apreciar en este trabajo, la ley de control tipo LgV y la obtenida mediante las técnicas Hamiltonianas resultaron idénticas. Sin embargo, la principal característica de esta última es que las propiedades de robustez resultan inmediatas.

Resultados en simulación de estos tres controladores fueron presentados, haciendo la hipótesis de que se conoce el punto de equilibrio del sistema, el cual generalmente no se conoce. De las simulaciones se apreció que el control por retroalimentación de estado presentó oscilaciones y en cambio los otros dos controladores mostraron un mejor desempeño.

Sin embargo, para poder implementar los algoritmos de control propuestos se requieren del conocimiento de todas las variables de estado. Además puesto que los algoritmos de control requieren del conocimiento del punto de equilibrio, esto impide su implementación. Este problema fue resuelto mediante el uso de observadores no lineales que permitió la estimación tanto de las variables de estado no medibles así como del término que depende del punto de equilibrio. En este caso, se utilizó un observador de alta ganancia para sistemas no lineales en forma triangular. Resultados en simulación fueron presentados donde se mostró la convergencia del observador hacia las variables reales.

Un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado fue presentada donde el sistema compuesto por el controlador diseñado mediante las técnicas Hamiltonianas y un observador no lineal fueron considerados, para dicho estudio. Una prueba matemática fue presentada, donde condiciones suficientes fueron dadas para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Los algoritmos de control y observación propuestos fueron aplicados al modelo de tercer orden del generador síncrono donde, un estudio comparativo entre la ley de control basada en técnicas Hamiltonianas y en técnicas adaptables fue realizado. Los resultados de simulación mostraron que el control basado en observador propuesto tuvo un mejor desempeño que el control basado en técnicas adaptables.

## **6.2 Recomendaciones**

El diseño de estrategias de control y estimación de estado para el generador síncrono presentadas en este trabajo corresponden a sistemas con una sola entrada y una salida (SISO). Además, este estudio se realizó haciendo uso de funciones de energía. Una extensión de estos resultados al caso multimáquina queda como un problema abierto ya que la obtención de funciones de energía para sistemas multimáquina requiere de un gran esfuerzo que permita diseñar estrategias de control y de observación para sistemas multivariable.

Otro problema que quedó abierto, la determinación de la región de atracción que actualmente es considerado de manera conservadora para garantizar la estabilidad del sistema.

Otro problema que sería importante considerar es la utilización de modelos de orden superior del generador síncrono de tal manera que permitan el diseño de estrategias de control que tomen en cuenta el comportamiento dinámico del generador síncrono. Además, se debe de contemplar modelos del generador que incluyan a los otros elementos que intervienen dentro del funcionamiento tales como la turbina, el primo motor etc.

# Apéndice 1

## Preliminares matemáticos

A continuación revisaremos algunos conceptos relevantes de la teoría de sistemas dinámicos no lineales. Sea

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x)u \quad (1.1)$$

el modelo de un sistema de potencia bajo estudio, el vector de estados  $x(t)$  pertenece al espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$  y la función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones. La solución de (1.1) que comienza en  $t = 0$  es llamada trayectoria del sistema, denotada por  $\Phi(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  note que  $\Phi(x, 0) = x$ .

Los conceptos de punto de equilibrio estable y variedad estable son importantes en la teoría de sistemas dinámicos no lineales. Estos conceptos pueden ser encontrados en [1].

### Punto de equilibrio

Un vector de estado  $\hat{x}(t)$  es llamado punto de equilibrio del sistema (1.1) si  $f(\hat{x}) = 0$ .

### Punto regular

Se denota a  $E$  como el conjunto de todos los puntos de equilibrio del sistema. Un vector de estado  $x$  es llamado punto regular si no es un punto de equilibrio.

### Punto de equilibrio hiperbólico

Se dice que un punto de equilibrio de (1.1) es hiperbólico si el jacobiano de  $f(\cdot)$  evaluado en  $\hat{x}$  (el punto de equilibrio), denotado por  $J_f(x)$ , no tiene eigenvalores con parte real cero.

Un punto de equilibrio hiperbólico se dice ser asintóticamente estable si todos los eigenvalores de su correspondiente Jacobiano tienen parte real negativa, de lo contrario es un punto de equilibrio inestable.

### Variedad estable e inestable

Sea  $\hat{x}$  un punto de equilibrio hiperbólico. Sus variedades estable e inestable están definidas como sigue

$$W^s(x) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x, t) \rightarrow \hat{x} \text{ como } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(x) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x, t) \rightarrow \hat{x} \text{ como } t \rightarrow -\infty\}$$

Ambas variedades estable e inestable son conjuntos invariantes.

#### Conjunto invariante

Un conjunto  $M \in \mathbb{R}^n$  es llamado conjunto invariante de (1.1) si toda trayectoria que inicia en  $M$  permanece en  $M$  para todo  $t$ .

#### Punto de equilibrio globalmente estable

Para un punto de equilibrio asintóticamente estable, se puede demostrar que existe un número  $\delta < 0$  tal que  $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$  implica que  $\Phi(x_0, t) \rightarrow \hat{x}$  como  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\delta$  es arbitrariamente grande, entonces  $\hat{x}$  es llamado punto de equilibrio globalmente estable.

#### Región de atracción

La región de atracción de un punto de equilibrio estable está definida como

$$A(x_s) \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = x_s \right\}$$

Desde el punto de vista topológico la región de atracción es un conjunto invariante y conexo. El límite de la región de atracción es llamada límite de estabilidad de  $x_s$  y es denotada por  $\partial A(x_s)$ .

#### Conjunto conexo

Un conjunto  $M$  es conexo si cada par de puntos  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  se pueden unir con una línea poligonal, consistente en un número sucesivo de segmentos, que están contenidos por entero en  $M$ .

#### Conjunto límite

Un conjunto  $M$ , se dice ser conjunto límite si éste contiene a todos sus puntos límite.

#### Punto límite

Un punto  $p$  es un punto límite de un conjunto  $M$ , si toda vecindad de  $p$  contiene al menos un punto que pertenece a  $M$  y un punto que no pertenece a  $M$ .

#### Criterio de áreas iguales

El criterio de las áreas iguales está fundamentado en conceptos de energía acelerante y desacelerante del rotor del generador. Se utilizan las gráficas potencia ángulo ( $P_e - \delta$ ) en los diferentes estados de operación durante el período transitorio, para determinar si el sistema es estable o inestable.

Suponga que un generador en el que se desprecia el efecto de los polos salientes, se conecta a un bus infinito a través de una reactancia. La potencia eléctrica generada por la unidad, la característica de transferencia de potencia transitoria ( $P_e - \delta$ ) y la potencia mecánica se muestran en la figura A1. Antes de que ocurra cualquier perturbación, la unidad está operando a una potencia  $P_e = P_m = P_{m0}$  y a un ángulo de carga de  $\delta = \delta_0$ .

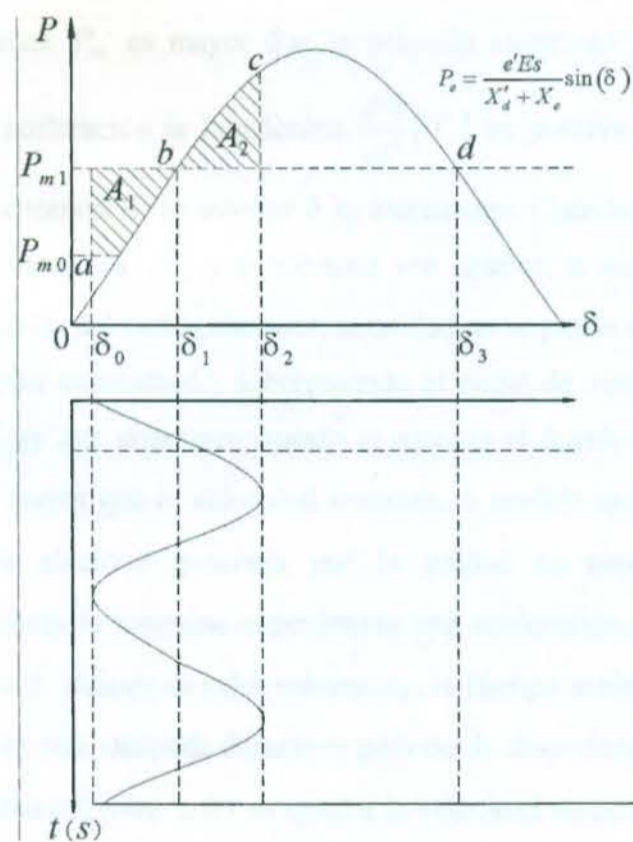


Figura A1 Respuesta a un cambio en la entrada mecánica

La ecuación de oscilación de la máquina síncrona y la desviación de la velocidad del rotor respecto a la velocidad síncrona están dadas por

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{\omega_0}{2H} (P_{mec} - P_e) \quad (1.2)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega(t) - \omega_0 \quad (1.3)$$

dónde  $\omega_0$  y  $f_0$ , son la velocidad y frecuencia síncrona (constante).

Estando en las condiciones iniciales de predisturbio, en potencia, ángulo y velocidad:  $P_e = P_{m0}$ ,  $\delta = \delta_0$ ,  $\omega(t) = \omega_{\text{sinc}}$ ; observe la figura A1.

Ahora suponga que ocurre un cambio de tipo escalón en la potencia mecánica incrementándose de  $P_{m0}$  a  $P_{m1}$ . Debido a que el rotor es una gran masa físicamente hablando, el ángulo  $\delta$  no puede cambiar instantáneamente. Así que,  $\delta(0^+) = \delta(0^-) = \delta_0$  y la potencia eléctrica en el instante de la perturbación,  $P_e(0^+) = P_e(0^-) = P_{m0}$ . Inmediatamente después del escalón de potencia, la potencia mecánica  $P_m$  es mayor que la potencia eléctrica  $P_e$ . De acuerdo con la ecuación (1.2), la aceleración de la máquina  $\frac{d^2\delta}{dt^2}(0^+)$  es positiva y el rotor comienza a acelerarse. A consecuencia de lo anterior  $\delta$  se incrementa. Cuando  $\delta$  alcanza la posición de  $\delta_1$ , la potencia mecánica  $P_{m1}$  y la eléctrica son iguales; la aceleración es cero. Sin embargo, por la inercia del turbogenerador, la unidad no se puede detener bruscamente y el ángulo  $\delta$  continúa aumentando, sobrepasando el punto de operación final de estado estable, punto *b*. Hay que notar que cuando se alcanza el ángulo  $\delta_1$ , la velocidad de la máquina  $\omega(t)$  es mayor que la velocidad síncrona. A medida que  $\delta$  aumenta más allá de  $\delta_1$ , la potencia eléctrica generada por la unidad es mayor que la potencia mecánica  $P_{m1}$ , y ahora la máquina experimenta una aceleración negativa, es decir, se desacelera. Cuando  $\delta$  alcanza su valor máximo  $\delta_2$ , la energía acelerante acumulada de la máquina, área  $A_1$  ha sido disipada durante el periodo de desaceleración, área  $A_2$ . En este instante, la velocidad del rotor  $\omega(t)$  es igual a la velocidad síncrona. Debido a que para la posición  $\delta_2$ , la potencia eléctrica  $P_e$  es mayor que la mecánica  $P_m$ , se presenta una fuerza restauradora que tiende a regresar el rotor a su punto de operación final de estado estable  $\delta_1$ . Suponiendo el caso de que no existe amortiguamiento el rotor oscilará entre los puntos a-c y c-a. Una observación importante es que si en la primera oscilación el ángulo máximo excediera  $\delta_3$ , entonces  $P_{m1}$  sería mayor que la potencia eléctrica y el



rotor se aceleraría nuevamente antes de haber disipado la energía acelerante inicial, causando un mayor incremento del ángulo  $\delta$  y la pérdida de estabilidad de la máquina. De lo anterior se concluye que un sistema será estable, si la energía acelerante es contrarrestada con una cantidad igual de energía desacelerante (energía negativa), antes que la máquina vuelva a acelerarse (energía positiva), de lo contrario será inestable.

En síntesis, el criterio de áreas iguales establece que la energía cinética añadida al rotor durante una falla, debe eliminarse después de ésta con el fin de restaurar la velocidad síncrona del rotor.

Si consideramos la siguiente figura, el área sombreada  $A_1$  es independiente del tiempo que se toma para librar la falla, sin embargo, si hay un retraso en la liberación de la falla, el ángulo  $\delta_c$  se incrementa; de la misma manera, el área  $A_1$  se incrementa y el criterio de áreas iguales requiere que el área  $A_2$  también se incremente para restaurar la velocidad síncrona del rotor en un ángulo mayor de máxima oscilación. Si el tiempo de liberación de la falla se retrasa prolongadamente de manera que el ángulo del rotor  $\delta$  oscile más allá del ángulo  $\delta_{max}$  en la figura, entonces, la velocidad del rotor en ese punto sobre la curva potencia ángulo está por encima de la velocidad síncrona cuando se encuentra nuevamente que la potencia de aceleración es positiva, es decir, se incrementa. Bajo la influencia de esta aceleración positiva, el ángulo  $\delta$  se incrementará sin límite y resultará una inestabilidad. Por lo tanto, hay un ángulo crítico para librar la falla con el fin de mantener la estabilidad. Este ángulo crítico llamado ángulo de liberación crítico  $\delta_{cr}$  se muestra en la figura. El tiempo crítico correspondiente para liberar la falla se llama tiempo de liberación crítico  $t_{cr}$ . Así el tiempo de liberación crítico es el tiempo máximo que transcurre desde que da inicio la falla hasta su aislamiento, de manera que el sistema de potencia es transitoriamente estable.

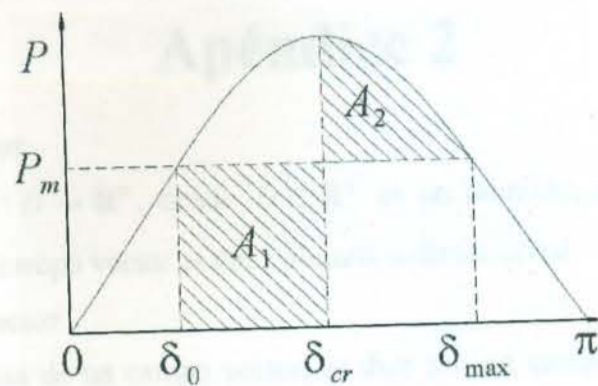


Figura A2 Curva potencia ángulo, mostrando el ángulo de liberación crítico.

## Apéndice 2

### Campo vector

Un mapeo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio, se dice ser un campo vector sobre  $D$ . Un campo vector es una columna n-dimensional.

### Campo covector

La transpuesta de un campo vector, se dice ser, un campo covector. Un campo covector es un renglón n-dimensional.

### Producto interior

Si  $f$  y  $w$  son, respectivamente, un campo vector y un campo covector en  $D$  entonces el producto interior denotado por  $\langle w, f \rangle$  está definido como:

$$\langle w, f \rangle = w(x) f(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) f_i(x)$$

### Diferencial

Sea  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ . la diferencial de  $h$  es un campo covector, definido por

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$$

### Derivada de Lie

Sea  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $f$  o a lo largo de  $f$ , denotada como  $L_f h$ , está definido por

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

### Paréntesis de Lie

Sean  $f$  y  $g$  dos campos vectores sobre  $D \subset \mathbb{R}^n$ . El paréntesis de Lie de  $f$  y  $g$ , denotado como  $[f, g]$ , es un tercer campo vector definido por

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

donde  $\left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]$  y  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]$  son matrices Jacobinas.

Algunas propiedades del paréntesis de Lie son:

- Bilinealidad

Sean  $f_1, f_2, g_1$  y  $g_2$  campos vectores y además  $r_1$  y  $r_2$  números reales.

Entonces

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]$$

➤ Anticonmutatividad

$$[f, g] = -[g, f]$$

➤ Identidad de Jacobi

$$L_{[f,g]}h(x) = L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x)$$

### Teorema de la función inversa

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo suave. Si la matriz Jacobina

$$\frac{d\varphi}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{bmatrix}$$

es no singular en algún punto  $p \in U$  entonces existe una vecindad  $V \subset U$  de  $p$  tal que  $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$  es un difeomorfismo.

## Bibliografía

- [1] Hassan Khalil, "Nonlinear systems", segunda edición, Prentice Hall, 1996.
- [2] Daizhan Cheng, Sarah Spuregeon, Jiaping Xiang, "On the development of generalizad Hamiltonian Realizations", IEEE 2000.
- [3] Bernhard M. J. Mashke, Romeo Ortega, Arjan ven der Schaft, "Energy-based Lyapunov Functions for forced Hamiltonian systems with dissipation", IEEE 1998.
- [4] Alexandre s. Bazanella, Petar V. Kokotovic, Aguinaldo S. Silva, "A dynamic extension for LgV controllers", IEEE, CDC, San Diego.
- [5] Alexandre s. Bazanella, Petar V. Kokotovic, Aguinaldo S. Silva, "Lyapunov Desing of excitation control for synchronous machines"
- [6] Hasiao-Dong chiang, Chia-Chi Chu, Gerry Cauley, "Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: Theory, applications, and perspective", Proceedings of IEEE, Vol. 83, No. 11, Moviembre 1995.
- [7] M. A. Pai, "Power System Stability" volume 3, North Holland Publishing company, 1981.
- [8] Yao Nan Yu, "Electric power systems dynamics", Academic Press, 1983.
- [9] Tai L. Chow, "Classical Mechanics", John Wiley & Sons, 1995.
- [10]H. Nijmeijer, A. J. Van der Schaft, "Non Linear Dynamical Control Systems", Springer Verlang, Octubre 1989.
- [11]Ricardo Marino, Patrizio Tomei,"Nonlinear Contro Design", Prentice Hall, 1995.
- [12]Alberto Isidori, "Nonlinear Control Systems", 3ra- edición, Springer Verlang, 1995.
- [13]P. Kundur, "Power System Stability and Control", Mc Graw Hill, Inc, 1993.
- [14]Florencio Aboytes García, Fernando Sánchez Tello, Rogelio Ramírez barradas, "Estabilidad Dinámica en Sistemas eléctricos de Potencia", CENACE-CFE, Mexico, Octubre 1991.
- [15]Kenji Fujimoto, Toshiharu Sugie, "Canonical transformations and stabilizations of generalizado Hamiltonian systems"