



Estructura de Sistemas Socioeconómicos:

DESIGUALDAD Y CICLOS

Presentación de Anteproyecto para Tesis como requisito para Titulación.

Autor: Álvaro Martínez Barrón

Matrícula: 1719553

Asesor: Dr. Jorge Valero Gil

Firma del Asesor

Índice Universal

Índice.....	1
Introducción.....	2
 Capítulo I	
Origen y antecedentes.....	3
Datos.....	6
 Capítulo II	
Elección de filtro.....	7
Funcionamiento del filtro Baxter- King	10
Criterio para elección del filtro.....	11
Caracterización del ciclo económico	13
 Capítulo III	
Validación de características del ciclo	15
Procedimiento de verificación de validación del ciclo.....	17
Condiciones suficientes y necesarias para prueba de estacionariedad	17
 Capítulo IV	
Medición de características del ciclo económico.....	19
Medición de desigualdad	20
Relación entre ciclo económico y ciclo de desigualdad	21
 Capítulo V	
Resultados	22
Conclusiones	25
 Apéndice	
Bibliografía preliminar	27

Introducción

El presente anteproyecto basa su importancia en observar que históricamente uno de los retos para la macroeconomía ha sido descifrar como ésta es afectada por cómo se asignan recursos entre agentes económicos, considerando que son necesarias nuevas aportaciones empíricas para aportar nuevos lineamientos a futuros modelos económicos; de esta forma sería posible observar cómo se asignan recursos, a través de su medición con índices de desigualdad, a lo largo del ciclo económico. Asimismo, es necesario poner a prueba si existe un efecto significativo sobre agregados macroeconómicos al segmentar al agente económico con distintas asignaciones de recursos.

Para lograr esto es necesario cumplir con tres objetivos específicos, el primero consiste en obtener una caracterización del ciclo económico real mexicano, así como de una medida específica de desigualdad de ingresos, tras esto se buscará la existencia de una relación entre el ciclo económico y el ciclo de desigualdad, posteriormente se procederá a observar si existe heterogeneidad entre cómo se distribuyen los ingresos en la población mexicana y ciclos económicos agregados, así como si existen diferencias en distribución dentro de cada estrato socioeconómico. En base a esto consideramos que la hipótesis a considerar es si existe una relación contracíclica entre el ciclo económico y el ciclo de desigualdad y si este es significativo y de igual magnitud para toda la población mexicana. Considerando los objetivos y la hipótesis, estructuramos el presente anteproyecto a través de cinco capítulos.

En el Capítulo I, presentamos de forma histórica como surgieron y en qué han consistido los actuales modelos macroeconómicos que consideran una relación entre producción y desigualdad, además se presenta un apartado en donde detallamos los datos que se usaron para la presente investigación.

En el Capítulo II, explicamos en que consisten las características del ciclo económico mexicano y elegimos un filtro para definir el ciclo económico aunado a una explicación del funcionamiento de este. Tras esto, en el Capítulo III, procedemos a validar estadísticamente el ciclo económico y probar su estacionariedad, incluyendo así el proceso que se utilizó-

En el Capítulo IV sugerimos una medición específica para la desigualdad y para el ciclo económico y presentamos la relación entre el ciclo económico y el ciclo de desigualdad.

En el Capítulo V presentamos los resultados de la investigación y explicamos las conclusiones a las que se llega. Además, se incluye un Apéndice donde explicamos cómo estimamos los parámetros característicos al ciclo económico a través de procedimientos específicos, en donde se explican los mismos a través de su derivación y posterior cálculo.

Las limitaciones del presente anteproyecto consisten en la distinción entre cómo son generadas las fases recesivas y las fases expansivas en un ciclo económico agregado, así como comprender qué factores, además del ingreso per cápita, podrían ser útiles para explicar una posible diferenciación en asignaciones de recursos entre la población mexicana.

Capítulo I.

Origen y antecedentes

Esta investigación basa sus ideas en una teoría llamada *teoría del shock*, cuyos fundamentos son neokeynesianos, que a diferencia del keynesianismo¹ clásico que explica movimientos en un ciclo económico en base a oscilaciones en demanda agregada, la teoría del shock basa su teoría en shocks aleatorios de innovación.

Siendo así, hay dos acepciones del ciclo, una basada en shocks cortos y simétricos, presentada por *Costas y Smith (1998)*, quienes llegan a un modelo de cambio de régimen en donde pueden existir equilibrios múltiples en alzas y bajas, siendo empíricamente presentado por *Kydland y Prescott (1998)* y traído a nivel conceptual por *Lucas (1977)*².

¹ Teoría económica basada en ideas de John Maynard Keynes (1883-1946), economista británico, cuya teoría explicaba que un aumento en gasto público podría reactivar la economía ante caídas severas en la producción, estas ideas se concretaron en políticas como el *New Deal* implementada durante la crisis de 1929 en Estados Unidos.

² Para Lucas (1977) las regularidades del ciclo eran vistas como sincronizaciones de las desviaciones de la tendencia en diferentes series agregadas de tiempo; asimismo define el ciclo como “movimientos alrededor de la tendencia en producto interno bruto”.

Del otro lado, existe una hipótesis de shocks aleatorios e infrecuentes que fue introducida de forma teórica por *Kim y Nelson (1999)*, *Friedman (1993)* y *Schultze (1964)*, y de forma empírica por *Sichel (1993)*. *Sichel* nota que existe una asimetría debido a los distintos niveles de profundidad y de inclinación del ciclo económico a través del tiempo; cabe destacar que dentro de esta vertiente se concluye que existe solo un equilibrio en el largo plazo.

A pesar de las polarizaciones de factores explicativos que caracterizan al ciclo, ambos enfoques definen ciclo como una serie temporal de desviaciones de la tendencia del producto, tomando como variable base al Producto Interno Bruto. Algo inherente del ciclo económico son sus fases, por ejemplo, para *Burns y Mitchell (1946)*, un ciclo básico está formado de dos fases, expansión y recesión³.

Desde 1930 se investiga una relación entre macroeconomía y desigualdad, en donde una es función de la otra y viceversa, pues choques en variables macroeconómicas pueden afectar la desigualdad de recursos, así como cierta asignación de recursos del producto entre agentes económicos puede afectar a los agregados macroeconómicos. El *modelo IS-LM*⁴ con principios keynesianos incluye agregados macroeconómicos que ignoran un efecto distributivo o de desigualdad de recursos. De 1970 a 1990 la macroeconomía desarrolló modelos de ciclos económicos reales con fundamentos neokeynesianos, basados sobre una idea de agentes homogéneos, o bien, representativos. No incluían impactos distributivos en su diseño, ignorando así factores empíricos entre ellos que el impacto durante las recesiones recae más sobre los estratos de menor ingreso, así como los efectos de estas sobre el bienestar; Por ejemplo, *Krueger, Mitman y Perri (2016)* encuentran que, ante un gran choque agregado, la población de ingresos bajos ajusta dramáticamente su consumo, siendo consistente con los efectos agregados observados sobre el consumo durante el *crack* de 1929.

-De 1990 a 2008 se comenzó a incorporar el concepto de heterogeneidad de los agentes económicos, describiendo a los mismos en base a su ingreso y su riqueza; representando

³ Burns y Mitchell (1946) reconocen que una transición de fases se da cuando los indicadores económicos se mueven todos juntos, en una expansión se ven aumentos en producción, empleo y caídas en desempleo; en una recesión, estos indicadores van en sentido contrario al menos por medio año.

⁴ Este modelo fue presentado por primera vez por J.R. Hicks (1937) siendo pionero en describir un dinamismo en economía agregada. Explicando así cambios en el coste del dinero en base a los cambios en el mercado del consumo y del mercado del dinero internos.

así a la asignación de ingresos con una distribución que iba cambiando a lo largo del tiempo conforme respondía a choques macroeconómicos y a políticas públicas. Hay que considerar que *Lucas (2003)* llega a la conclusión de que la inclusión de heterogeneidad en los agentes carece de efectos significativos en agregados macroeconómicos. Además, *Deaton (2016)* menciona que estos son independientes de cómo se asignen los recursos, dudando de este modo que al incluir heterogeneidad en agentes económicos haya un efecto significativo sobre los agregados macroeconómicos.

Tras la crisis financiera de las 2008 nuevas teorías han sido desarrolladas basadas en hojas de balance de hogares, así como en distintos patrones de consumo entre agentes económicos. *Auclert y Rognlie (2018)* proponen un modelo basado en esta idea, teniendo en cuenta impactos contemporáneos en modelos macroeconómicos distributivos. Una hipótesis interesante es planteada por *Gabaix, Lasry, Lions y Moll (2016)*, quienes explican que una diferencia en asignaciones de recursos se debe a efectos heterogéneos entre agentes económicos, diferencia que es explicada por dos factores: una existencia de emprendedores y administradores “super-estrella” que acentúan un sesgo en la cola superior de la distribución de ingresos y otra es un mayor efecto multiplicativo en agentes económicos de ingresos superiores. Esta relación explicaría un efecto contra cíclico entre producción agregada y distribución de ingresos, pues expansiones en producción agregada están asociadas a una disminución en la desigualdad de ingresos entre los individuos pertenecientes a la población de ingresos superiores. Es necesario recalcar que existen diferencias dentro de cada clase, *Benhabib, Bissin y Luo (2017)* observan que hay una mayor variación de desigualdad en la clase de ingresos bajos y una menor variación en la de ingresos altos; aceptando así que existe una mayor movilidad social de la clase de ingresos bajos a la de ingresos altos que de ingresos altos a ingresos bajos; esto es explicado por rendimientos heterogéneos y aleatorios en riqueza, y heterogeneidad en ahorros y en aversión al riesgo.

La motivación de esta tesis es, por ende, aportar hechos estilizados para México basados en datos heterogéneos, para comprender cómo afecta el ciclo económico la asignación de recursos; entendiendo por esto, la relación entre un ciclo económico agregado y las correspondientes asignaciones de recursos entre los distintos estratos socioeconómicos, así como dentro de ellos.

Datos

Se procede a encontrar datos para calibrar un ciclo económico para México, así como para calcular indicadores de desigualdad de tal forma que los resultados encontrados estén sustentados por observaciones retrospectivas que contribuyan a caracterizar los cálculos realizados.

Se obtienen datos del PIB en valores originales en millones de pesos, del Banco de Información Económica proporcionado por el *INEGI*⁵, y luego se procede a obtener el Índice Nacional de Precios al Consumidor (*INPC*) en base a la segunda quincena de julio de 2018; posteriormente se procede a indexar el *INPC*, a junio de 2013⁶, siendo — el horizonte a evaluar desde el primer trimestre de 1984 al cuarto trimestre de 2018.

Tras esto se procedió a obtener la sumatoria de los factores expansión por hogar en la Encuesta Nacional de Ingreso y Gasto de los Hogares (*ENIGH*), con la idea de contabilizar la población total en México para cada año, obteniendo así una serie del PIB real per cápita al dividir éste entre la población total. Por otra parte, se toma del Concentrado de Datos de la *ENIGH* el ingreso del hogar, sumando gasto monetario y no monetario.

Posteriormente se procede a obtener el ingreso real por hogar dividiendo el ingreso del hogar por el *INPC* indexado a junio de 2013 registrado en cada III Trimestre del año, que es cuando se lleva a cabo esta encuesta. Para obtener una medida per cápita, se divide este ingreso entre el tamaño del hogar; para en un cálculo posterior obtener un índice de desigualdad, tomando las encuestas *ENIGH* que datan de 1984 a 2018.

Datos Agregados y Microdatos

Es necesario precisar el proceso de generación de datos de las series agregadas del *Banco de Información Económica* y los paneles de datos de la *ENIGH*. Según el *Sistema de Cuentas Nacionales* la serie del Producto Interno Bruto es generada a través del método de la

⁵ Datos obtenidos para la presente investigación pueden ser consultados en la siguiente liga: <https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/2019>

⁶ Se procede a indexar a junio de 2013 para que sean comparables valores reales tanto para el ciclo que esta indexado a precios de 2013 como los datos a calcular de la *ENIGH* que son deflactados por el *INPC* (base junio 2013=1) obteniendo ingresos reales y comparables con los datos generados para el PIB.

producción, que consiste en estimar el valor bruto de la producción y el consumo intermedio y por diferencia se obtiene el valor agregado bruto, a precios corrientes, para su posterior deflación a fin de obtener valores reales. Por otro lado, los datos por hogar se obtienen a través de encuestas en donde se recopila el gasto corriente por hogar cada dos años; el gasto corriente monetario representa los gastos realizados regularmente en el hogar para la canasta de consumo, y se obtiene como la suma del gasto corriente monetario y no monetario. Por último, se sabe que la *ENIGH* establece que el gasto corriente no monetario es igual al ingreso corriente no monetario; esto debido a que existe una estrecha relación entre los gastos y los ingresos de los hogares, por esto para cada valor estimado del gasto corriente no monetario debe existir una contrapartida del ingreso corriente no monetario, esto es, un valor correspondiente que garantice el balance al interior del hogar.

Capítulo II.

Elección de filtro.

Para hacerlo se obtiene la ganancia relativa a la tendencia y los ciclos por período, tomando como corte óptimo el período en el cual se cumple un primer ciclo, esto es, cuando la función cíclica alcanza un mínimo y un máximo local⁷. En el Cuadro I observamos el valor del corte óptimo para cada metodología propuesta.

Cuadro 1. Corte óptimo de frecuencia según cada metodología

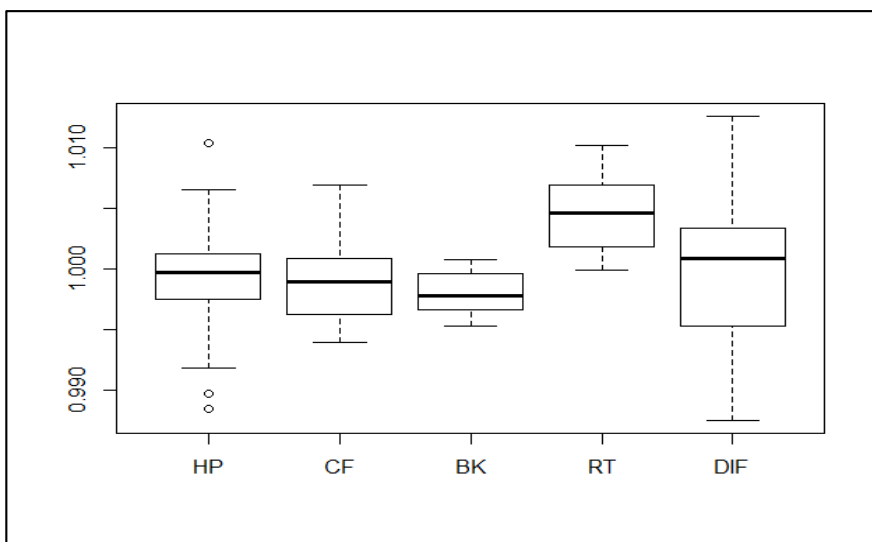
Metodología	Corte óptimo
<i>Hodrick-Prescott</i>	47 trimestres
<i>Christiano-Fitzgerald</i>	47 trimestres
<i>Baxter-King</i>	46 trimestres
<i>Regresión Trigonométrica</i>	47 trimestres
<i>Diferencias</i>	34 trimestres

⁷ Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$ y sea $P = (x_0, f(x_0))$ un punto perteneciente a la gráfica de la función. Se dice que P es un máximo local de f si existe un entorno reducido con centro x_0 , donde $\forall x \in E(x_0) \subset A$ se cumple $f(x) \leq f(x_0)$, análogamente se dice que P es un mínimo local si dada la condición anterior $f(x) \geq f(x_0)$.

Se elige el mejor filtro en función de cual se pondera las frecuencias de forma que sean las frecuencias más bajas posibles a lo largo de los ciclos por período.

En la Figura 2 observamos que el filtro con menor variabilidad entre frecuencias, así como el de menor mediana es el filtro *Baxter-King*.

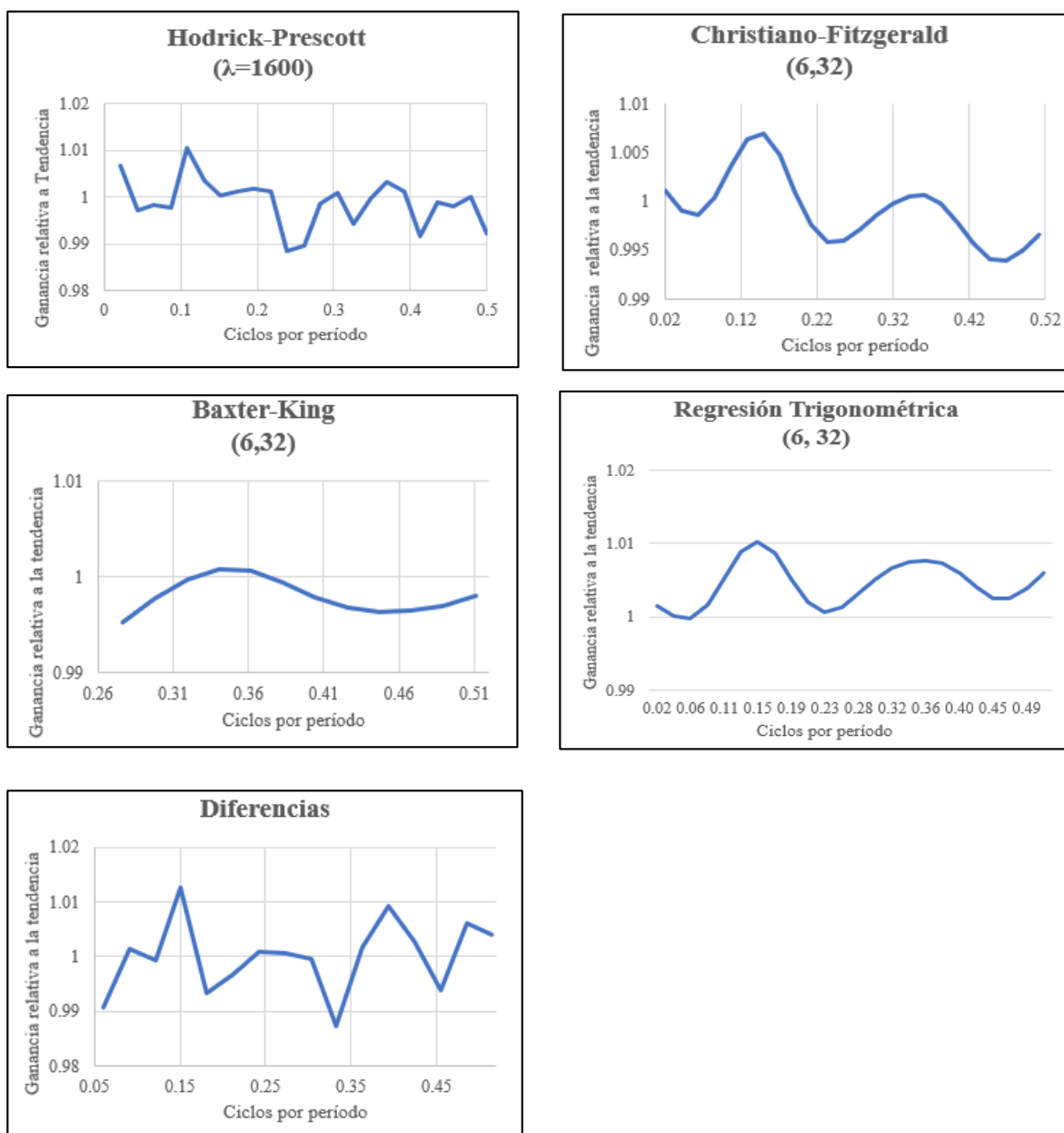
Figura 2. Diagrama de Cajas de Ganancias para cada Filtro.



Para evaluar la calidad de cada metodología de filtros de series temporales se procede a obtener una medida de ganancia en donde se calcula el cociente entre el valor de la serie observada en el período t y el valor generado a través de la tendencia para cada metodología; en cuanto al dominio, o bien las frecuencias, que en este caso representan los ciclos por período, se representa de forma ordinal cada período del ciclo, asignándole un valor, tras esto se procede a dividir cada uno por el corte óptimo de frecuencia. Se procede a graficar para así observar cual filtro da el menor peso por frecuencia a lo largo de los ciclos por período.

Tras una comparación, es posible observar en la Figura 3, que el filtro *Baxter-King* (BK) es el que genera las frecuencias más bajas en comparación a todas las demás metodologías consideradas.

Figura 3. Comparación de Filtros por Frecuencia



Funcionamiento de Filtro de Baxter-King.

Baxter y King (1999) analizan el efecto del filtro desde una perspectiva en donde el dominio son las frecuencias, obtienen la representación de *Crámer* de una serie de tiempo estacionaria de media-cero expresado en la ecuación (1):

$$(1) \quad y_t = \int_{-\pi}^{\pi} \xi(\omega) d\omega$$

Baxter y King (1999) expresan el componente cíclico de una serie de tiempo como en la ecuación (2).

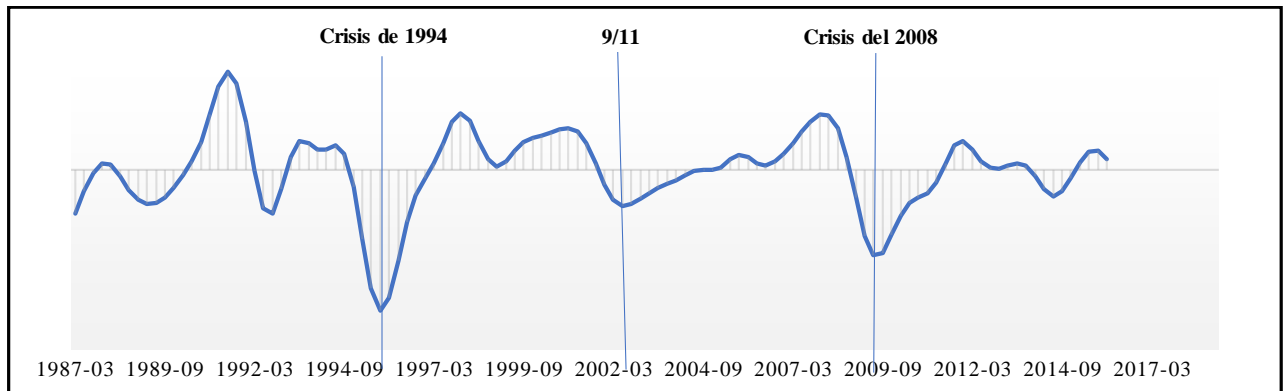
$$(2) \quad y_t^* = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\omega) \xi(\omega) d\omega$$

De esta forma la serie de tiempo es expresada como la integral de sus componentes en periodos aleatorios, generados por la función $\xi(\omega)$, en donde el valor esperado entre ambos es igual a cero, o bien, mutuamente ortogonal, y donde $\alpha(\omega)$ es igual a la ecuación (3)

$$(3) \quad \alpha(\omega) = \sum_{h=-K}^K a_h e^{-i\omega h}$$

que representa la función de frecuencia de respuesta del filtro lineal, indicando hasta donde y_t^* responde a y_t en una frecuencia ω , en el sentido de que $\alpha(\omega)$ es el peso alcanzado por el componente periódico $\xi(\omega)$. La Figura 4 representa el ciclo económico real para México obtenido a través del filtro propuesto.

Figura 4. Baxter King (6,32) (III:1987-IV:2015)



Criterio para elección del filtro.

Entendemos como ciclo las desviaciones del producto de su tendencia, el cual es visto en gran parte de la literatura de crecimiento económico como un concepto de estado-estacionario.

Desde *Solow (1956)* es posible identificar un concepto clave para la definición de tendencia pues presenta un estado-estacionario como un escenario caracterizado por un crecimiento sostenido de producción per cápita, consumo, inversión, capital y salario real. En base a esta definición es menester una síntesis de criterios específicos para una acertada conceptualización de una tendencia. *Baxter y King (1999)* presentan seis criterios específicos:

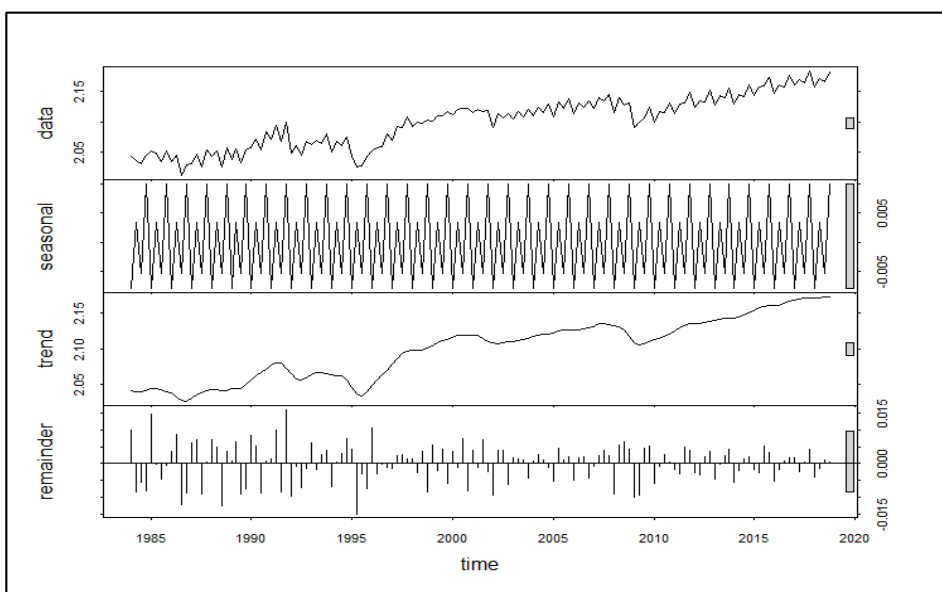
1. El filtro debe extraer un rango específico de período sin cambios en las propiedades del componente extraído⁸.
2. No debe alterar las relaciones temporales entre series a cualquier frecuencia.
3. El método debe ser una aproximación óptima al filtro de bandas.
4. El componente extraído debe ser una serie estacionaria.
5. Debe ser invariante en el tiempo.
6. El método debe ser operativo.

Se procedió a caracterizar un ciclo, implicando así una definición de tendencia. Tras proponer una fórmula para su cálculo, se procede a caracterizar el mismo en base a las medidas específicas del ciclo.

⁸ En otras palabras, sin cambios en el componente tendencial.

Se procede a llevar a cabo un proceso de desestacionalización⁹ que consiste en extraer un componente estacional de cierta serie de tiempo, en este caso el PIB real generado a través del índice propuesto¹⁰, esto para robustecer la estimación del ciclo económico. La descomposición de la serie puede ser consultada en la Figura 5.

Figura 5. Descomposición de la serie del Producto Interno Bruto Real (de 1984-I-201 -IV, precios junio de 2013)



Se confirma la existencia de un componente tendencial, así como de uno estacional, principalmente durante el último trimestre de cada año; por último, se observa que el error

⁹ Una serie de tiempo está compuesta por un factor estacional, que causa fluctuaciones en datos debido a efectos calendario; un factor tendencia, que en parte define un patrón lineal para cierta serie temporal; y, un residual o error. Formalmente, $Y_t = S_t * T_t * E_t$ en donde los componentes son el estacional, tendencial y error, respectivamente; el proceso de desestacionalización consiste en substraer S_t de cierta serie temporal.

¹⁰ Se procede a desestacionalizar la serie del PIB en valores originales (a precios de 2013) debido a que el INEGI proporciona datos desestacionalizados desde 1993, y para la presente investigación evaluamos desde 1984.

dista de seguir una distribución normal pues parece disminuir a lo largo del período de observación.

Tras esto se procede a calcular el logaritmo natural del PIB real tal como *Baxter y King (1999)* proponen, y a través de los filtros de, *Hodrick y Prescott (1997)*, *Christiano y Fitzgerald (1999)*, *Baxter y King (1995)*, Diferencias¹¹ y Regresión Trigonométrica, este último también presentado por *Christiano y Fitzgerald (1999)*.

Caracterización del ciclo económico:

Tras un análisis empírico, se observa que el ciclo económico mexicano sigue una función de distribución *Cauchy* que es igual a:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left[1 + \left(\frac{x - \theta}{\lambda} \right)^2 \right]} \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

Se procede a estimar los parámetros de λ y θ , que representan los parámetros de localización y escala, respectivamente¹²; el proceso de optimización para la estimación de estos parámetros es presentado en el Apéndice.

Para *Rothenberg, Fisher y Tilanus (1964)*, el beneficio de la estimación a través de máxima verosimilitud es la eficiencia asintótica. Al estimar el parámetro de escala encuentran que esta metodología es 19% más eficiente asintóticamente que la mediana muestral y un 12% más que la estimación a través de la media muestral truncada, este punto es validado por *Bai y Fu (1987)* quienes demuestran que es posible estimar estos parámetros a través del método de máxima verosimilitud a pesar de que las ecuaciones a optimizar tengan múltiples raíces

¹¹ Este filtro consiste en aplicar el operador de rezagos a cada observación de la serie de tiempo; $y_{t-1} = (1 - L)y_t$ en donde L representa al operador de rezagos.

¹² El parámetro de localización indica el cambio de los valores centrales de una distribución, donde estos pueden ser la media, mediana o la moda; por otro lado, el parámetro de escala indica que tan extendida se encuentra la función de distribución a lo largo de su rango.

probando así que el máximo global¹³ permanece como un estimador asintóticamente eficiente en el sentido de *Bahadur*¹⁴.

Tras esto se procede a estimar las características del ciclo económico real, inclinación y profundidad. Para validar estas características, se estima una función de densidad *Cauchy*, se calibra a partir de los parámetros estimados de la función de densidad original del ciclo económico.

Al generar 1000 observaciones aleatorias y volver a estimar las características, observamos que generan resultados similares. En la Figura 6 es posible observar la asimilación de la distribución del ciclo económico real con una función *Cauchy*, y como este dista de seguir una distribución normal.

A partir del Histograma de Frecuencias Relativas es posible observar como el ciclo económico real se ajusta de una forma convencional a una distribución *Cauchy*, por otra parte se observa como el ciclo económico real se ajusta uniformemente a la función de densidad acumulada, validando que esta es igual tanto empíricamente como teóricamente; además se observa que los cuantiles ajustados a la función de *Cauchy* se ajustan a la línea teórica de cuantiles, notamos la existencia de algunos *outliers*¹⁵, que posiblemente son generados por las oscilaciones del ciclo económico real durante las crisis económicas (lado izquierdo) y durante los *booms* económicos (lado derecho).

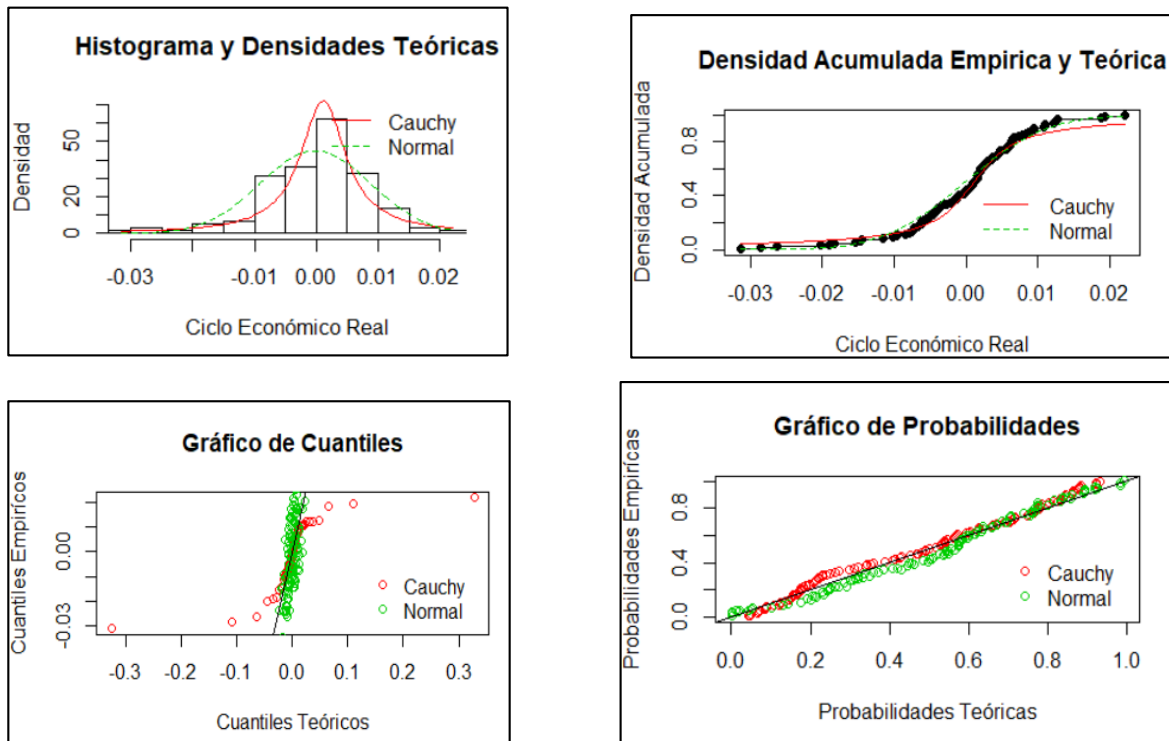
Por último, se observa como la función *Cauchy* se ajusta de forma uniforme a la línea de 90 grados en el Gráfico de Probabilidades, validándose que las probabilidades empíricas y teóricas son similares.

¹³ $x_0 \in X$ es un máximo global de la función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si $\forall x \in X f(x_0) \geq f(x)$.

¹⁴ Este criterio permite garantizar que la estimación realizada a través de máxima verosimilitud alcanza asintóticamente el máximo global de forma óptima, para más información ver *Bahadur (1967)*.

¹⁵ Definimos *outliers* como un conjunto de valores expresados en datos que son muy diferentes de los otros valores observados, lo que los convierte en valores excepcionalmente lejanos del centro.

Figura 6. Distribución del Ciclo Económico Real.



Capítulo III

Validación de características del ciclo.

Se encuentra que el ciclo económico real mexicano es asimétrico y susceptible a shocks aleatorios e infrecuentes, tal y como *Kim y Nelson (1999)*, *Friedman (1993)* y *Schultze (1964)* describen teóricamente, pues observamos que su distribución se aleja de un comportamiento normalizado a uno basado en valores extremos, como validamos al estimar una distribución *Cauchy*.

Para *Sichel (1993)* las medidas características de un ciclo, inclinación y profundidad deben ser validadas estadísticamente. En su investigación él lo hace a través del método propuesto por *Newey y West (1987)* que consiste en estandarizar las cifras del ciclo para después estimar las características, su error estándar y su *p-value* de forma asintótica. Sin embargo, en la

presente investigación conocemos la distribución de las cifras del ciclo, así como una estimación de los parámetros correspondientes a función de densidad de probabilidad, en este caso *Cauchy*. Es por esto por lo que se estiman las características del ciclo simulado y se comparan con la de los datos originales para observar si en efecto son similares.

Posteriormente se procede a hacer una prueba estadística llamada *Kolmogorov-Smirnov*, con el objeto de verificar si en efecto la simulación y los datos provienen de la misma distribución, en la cual se encuentra evidencia para aceptar la hipótesis nula.

Tras esto, se realiza la prueba *Kolmogorov-Smirnov*¹⁶ presentada en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Estadístico Kolmogorov-Smirnov y Región de Rechazo*

Hipótesis Nula	Estadístico	Región de Rechazo
Los datos analizados siguen una distribución M	$D = \sup_{1 \leq i \leq n} F_n(c_i) - F_0(c_i) $	$RR: \{D > D_\alpha\}$

*En este caso el estadístico Kolmogorov-Smirnov sigue una distribución Cauchy.

El objetivo es validar que ambas muestras del ciclo económico vengan de la misma función de densidad de probabilidad, siendo esta la hipótesis nula. Se encuentra que en efecto ambas provienen de la función *Cauchy*, como se observa en el Cuadro 3, pues se carece de suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula.

Cuadro 3. Resultados de Prueba Kolmogorov-Smirnov

Valor de Estadístico	<i>p-value</i>	Resultado
0.093	0.32	No se rechaza que provienen de la misma función de densidad Cauchy

¹⁶ Este estadístico fue calculado a nivel conceptual por *Kolmogorov (1933)* mientras que su distribución fue estimada por *Smirnov (1948)*.

Procedimiento de verificación de validación del ciclo.

Cabe destacar que para *Sichel (1993)* el componente cíclico debe ser estacionario, para poder garantizar una estimación insesgada de las características del ciclo. Para verificar esto se hace una prueba *Dickey-Fuller (Said y Dickey (1984))* incluyendo los rezagos en la prueba según los criterios de *Akaike, Schwartz y Bayesiano*. Observamos el resumen de esta prueba en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Estadísticos Dickey-Fuller y Región de Rechazo

Parámetro	Estadístico	Región de Rechazo*
Rezago	$DF_{\hat{\theta}_1} = \frac{\hat{\theta}_1}{SE(\hat{\theta}_1)}$	$RR: \{DF_{\hat{\theta}_1} < DF_{1-\alpha}\}$

*Cabe destacar que para esta prueba se toman niveles de confianza al 90%, 95% y 99%; asimismo se toma como referencia el valor de la distribución Dickey-Fuller y del estadístico.

Condiciones necesarias y suficientes para una prueba de estacionariedad:

Una serie de tiempo es estacionaria si cumple con las siguientes condiciones:

$$E(X_t) = \mu \quad \forall t$$

$$E[(X_t - \bar{X})^2] = \sigma^2 \quad \forall t$$

La función de auto covarianza entre X_{t_1} y X_{t_2} solo depende en el intervalo t_1 y t_2

Para realizar una prueba de estacionariedad es necesario determinar un criterio óptimo de rezagos en la prueba; se proponen el criterio de Akaike (*AIC*) así como el criterio de Bayes (*BIC*) y el de Hannan-Quinn (*HQC*) para la selección óptima de rezagos los cuales vienen dados por las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$AIC = \ln \ln (\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$$

$$BIC = \ln \ln (\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{T} \ln(T)$$

$$HQC = T \ln \left(\frac{RSS}{T} \right) + 2k \ln(\ln(T))$$

En donde $\hat{\sigma}^2$ es un estimador de la varianza residual, k es el número de parámetros del modelo, T es el tamaño de la muestra y RSS es la sumatoria de cuadrados de los residuales; cabe destacar que se toma el valor mínimo generado por las ecuaciones anteriores para un determinado número de rezagos a evaluar.

Por otra parte, para garantizar estacionariedad en el ciclo económico, o bien que propiedades estadísticas del ciclo, como media y varianza, sean las mismas en el futuro que en el presente; es aplicable una prueba llamada *Dickey-Fuller Aumentada* presentada por *Said y Dickey (1984)*; esta prueba consiste en verificar si tanto el primer como el segundo momento de la serie temporal dependen del tiempo; básicamente se selecciona un modelo en base a un criterio óptimo, seguido de esto se estima el modelo a través del estimador de mínimos cuadrados; por último se calcula el estadístico *Dickey-Fuller*.

Encontramos que el ciclo económico y de desigualdad sí presentan inclinación y profundidad, características, que, en efecto, lo distan de un comportamiento simétrico, validamos la relación procíclica a través de las características de los ciclos, ya que se asemejan significativamente en la duración de las fases recesivas. Adicionalmente se observa que el ciclo de desigualdad, a diferencia del ciclo económico, opera por encima de su tendencia abriendo una mayor brecha entre ella y el ciclo, mostrando que en el período observado en promedio hay mayores expansiones de desigualdad que caídas en esta.

La prueba *Dickey-Fuller Aumentada* se realiza estimando un modelo para observar si el rezago del ciclo económico afecta a sus diferencias, de ser así estaríamos a favor de que existe una raíz unitaria y que el proceso carece de estacionariedad, así como a su región de rechazo, partiendo de que la hipótesis nula de no estacionariedad o bien que existe una raíz unitaria en el proceso temporal a evaluar. Primero en base a un criterio de selección de rezagos óptimo se evalúa este modelo:

$$\Delta c_t = \theta_1 c_{t-1} + \sum_{i=1}^{k^*} \Delta c_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{en donde } \varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

De esta forma se evalúa la serie y se toma k^* según cada criterio propuesto. Acto seguido, se evalúa a través de una prueba-Z estandarizada con objeto de verificar si existe un efecto significativo del primer rezago del ciclo esto indica si es o no una serie estacionaria.

Capítulo IV

Medición de características del ciclo económico.

Se toman dos medidas propuestas por *Sichel (1993)* para definir si hay asimetría en el ciclo, habiendo *profundidad* si en la serie hay puntos más bajos por debajo de la tendencia que puntos por encima de la misma; e *inclinación*, definida como una situación en donde en un ciclo las contracciones son más escarpadas que las expansiones, o bien que duran un período mayor. En cuanto a las características del ciclo, *Sichel (1993)* retrata de forma estadística que, si una serie de tiempo presenta *inclinación*, entonces sus primeras diferencias deberían estar sesgadas de forma negativa; esto implica que las caídas en el ciclo deberían ser más largas y menos frecuentes que las expansiones moderadas en las series, por otro lado, si una serie temporal presenta *profundidad* entonces esta debe estar sesgada de forma negativa relativamente a la media, lo cual implica que, en promedio, se presentan en mayor frecuencia oscilaciones recesivas; el motivo de estimar estas características es poder tener una medición objetiva del ciclo económico con respecto al comportamiento observado. En la medición de *profundidad*, para observar si en promedio es mayor la frecuencia de fases recesivas, se toma como medida el coeficiente de asimetría que viene dado por:

$$D(c) = \frac{\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (c_t - \underline{c})^3 \right]}{\sigma(c)^3}$$

En donde \underline{c} es la media del componente cíclico c_t , $\sigma(c)$ es la desviación estándar del ciclo, y T es el tamaño de la muestra.

Para la medición de *inclinación* se calcula el coeficiente de asimetría para las primeras diferencias del ciclo ($PDD(\Delta c_t)$), de tal forma que:

$$PDD(\Delta c_t) = \frac{\left[\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (\Delta c_t - \underline{\Delta c})^3 \right]}{\sigma(\Delta c)^3}$$

En donde $\underline{\Delta c}$ es la media de las primeras diferencias del ciclo Δc_t , $\sigma(\Delta c)$ es la desviación estándar de las primeras diferencias del ciclo, y T es el tamaño de la muestra.

Medición de Desigualdad.

Para tener una medición específica y que cumpla criterios descritos anteriormente como índice de desigualdad, se propone una medida construida por *Atkinson (1970)* quien propone estimar un índice de desigualdad de tal forma que:

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\sum_{i=1}^N y_i^{1-\varepsilon}}{N} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon: \varepsilon \in (0, \infty)$$

En donde y_i es el ingreso individual ($i=1, 2, \dots, N$), μ es el ingreso medio asimismo ε es un parámetro controlado que pondera ingresos, de tal forma que mide una aversión a la desigualdad.

Se calcula el Índice de *Atkinson*¹⁷ calibrado para distintos valores de ε , así como el coeficiente de Gini, lo cual se hace a partir de las muestras de ingreso obtenidas del *ENIGH*.

Acto seguido se obtiene el ciclo de desigualdad a través del filtro *Baxter-King* para cada medida de desigualdad propuesta. Obteniendo una comparación de características del ciclo económico real con el ciclo de desigualdad para cada medida propuesta, observando que sus características son similares.

Asimismo, el *coeficiente de Gini* es estimado de la siguiente forma:

$$G = \left| 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} + y_k) \right|$$

¹⁷ En el Apéndice se discute la forma en que se mide la desigualdad utilizando tanto el índice de desigualdad de *Atkinson* como el coeficiente de *Gini*.

En donde x representa la proporción acumulada de la variable población mientras que y representa la proporción acumulada de la variable ingreso.

Relación entre ciclo económico y ciclo de desigualdad.

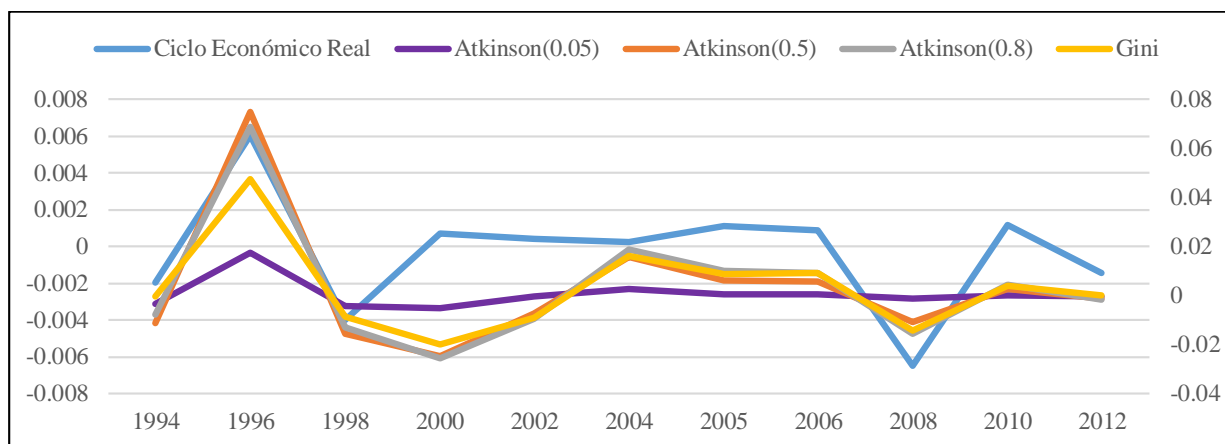
Con el objeto de encontrar si existe una relación entre los ciclos del PIB real y de desigualdad, se procede a estimar el coeficiente de correlación de *Pearson* entre el ciclo de desigualdad y el ciclo económico. Encontrando una correlación positiva significativa, esto traduce que existe una relación procíclica en México, cuando se expande la economía la desigualdad de ingresos aumenta y cuando cae en recesión esta disminuye.

El Cuadro 6 muestra esta estimación, así como su respectivo *p-value*. Cabe destacar que se realizó este ejercicio, retirando años en donde se presenciaron efectos de crisis económicas, siendo estas: crisis de 1994, crisis de 2001 (caída de *World Trade Center* en Nueva York, EE. UU) y crisis hipotecaria del 2008; se encuentra que no existen diferencias significativas en la relación entre los ciclos del PIB real y los indicadores de desigualdad de ingresos.

Cuadro 6. Correlación de Ciclos de Desigualdad con PIB Real

Índice	Correlación	<i>p-value</i>	Relación (PIB real)
<i>Atkinson</i> ($\varepsilon=0.05$)	0.7	0.01	<i>Procíclico</i>
<i>Atkinson</i> ($\varepsilon=0.5$)	0.73	0.01	<i>Procíclico</i>
<i>Atkinson</i> ($\varepsilon=0.8$)	0.74	0.008	<i>Procíclico</i>
<i>Gini</i>	0.73	0.01	<i>Procíclico</i>

En la Figura 7 es posible observar esta relación entre ciclos. Asimismo, se obtiene el ciclo económico generado a través de microdatos y se comparan con el ciclo obtenido de forma agregada, rechazando la hipótesis de una correlación significativa.

Figura 7. Relación de Ciclos de Desigualdad con Ciclo de PIB Real (1994-2012)

*Eje secundario (Derecha) retrata Atkinson (0.05) y Gini.

Se obtiene que los ciclos de desigualdad, medido con el índice de Atkinson, para el decil II y el decil X tienen una correlación positiva significativa con el ciclo del PIB real, el Cuadro 7 resume esta relación, de la misma forma es posible observar esta relación en la Figura 9 en Anexos. Por otro lado, se encuentra una correlación positiva significativa entre los ciclos de desigualdad de estos deciles con el índice de Atkinson.

Cuadro 7. Correlación de Deciles entre ellos y con PIB Real.

Decil	Correlación (PIB real)	<i>p-value</i> (PIB real)	Relación (PIB real)	Correlación (Atkinson)	<i>p-value</i> (Atkinson)	Relación (Atkinson)
II	0.67442548	0.0228366	<i>Procíclico</i>	0.81745693	0.02	<i>Procíclico</i>
X	0.66069152	0.02689388	<i>Procíclico</i>	0.81745693	0.02	<i>Procíclico</i>

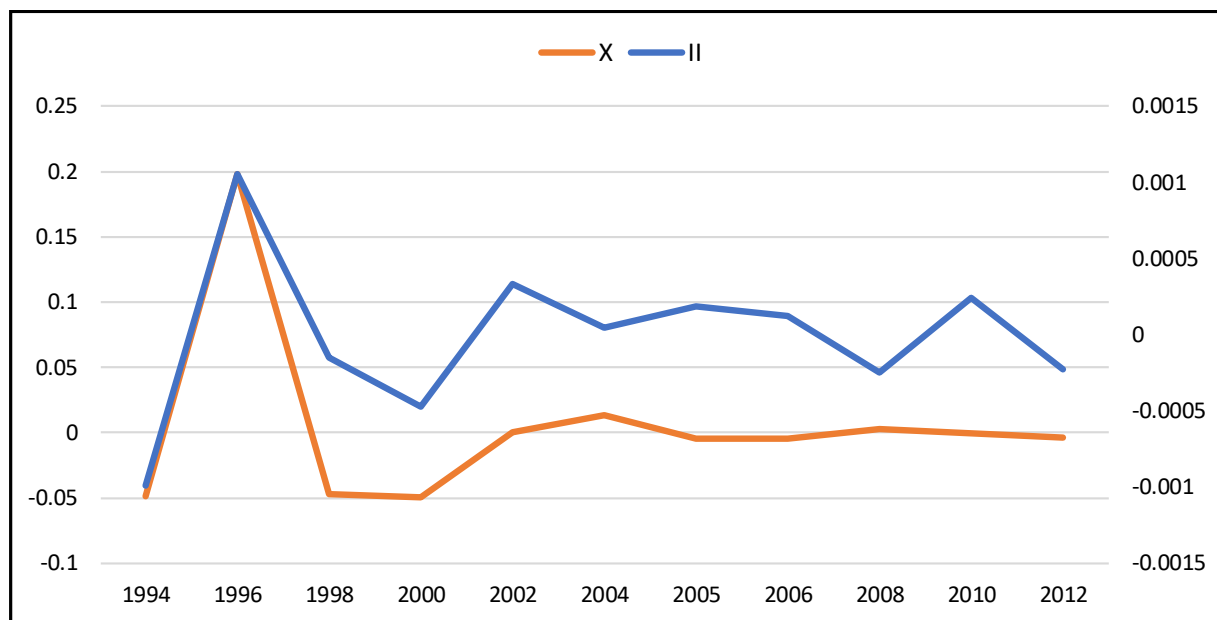
Capítulo V

Resultados

Con objeto de observar si existen diferencias de desigualdad de ingresos, así como si su ciclo particular de desigualdad se relaciona con el ciclo real del PIB, se dividen las muestras de ingreso de la *ENIGH* en deciles para cada año. Para esto, se utilizan dos índices de

desigualdad, el de Gini y el de Atkinson calibrado con $\varepsilon=0.5$, esto es, suponemos que la población es indiferente a como se distribuyen los ingresos entre ellos. Sin embargo, es posible observar la Figura 8 en Anexos, que el decil II percibe una mayor variabilidad en su ciclo de desigualdad que el decil X. Cabe destacar que se realiza el mismo ejercicio de retirar las crisis económicas para cada decil, sin encontrar relaciones significativas. Posteriormente se calcula el Índice de *Atkinson*¹⁸ calibrado para distintos valores de ε , así como el coeficiente de Gini, lo cual se hace a partir de las muestras de ingreso obtenidas del *ENIGH*. Acto seguido se obtiene el ciclo de desigualdad a través del filtro *Baxter-King* para cada medida de desigualdad propuesta. Obteniendo una comparación de características del ciclo económico real con el ciclo de desigualdad para cada medida propuesta, observamos que sus características son similares.

Figura 8. Relación de Ciclos de Desigualdad entre Deciles (1994-2012)



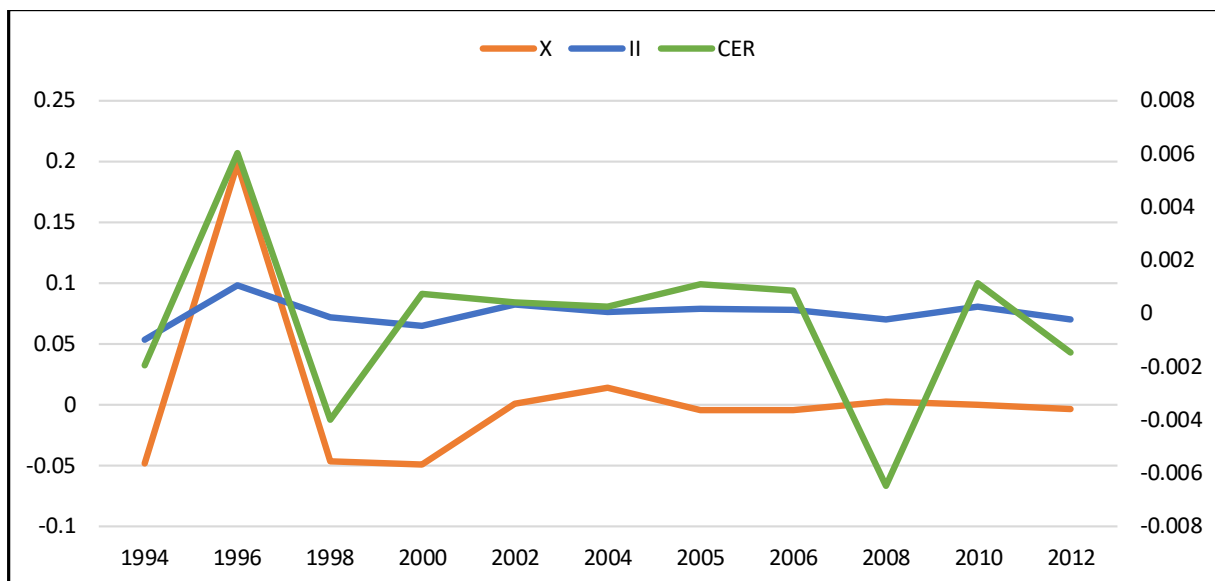
*Eje secundario (Derecha) para Decil II.

¹⁸ En el Apéndice se discute la forma en que se mide la desigualdad utilizando tanto el índice de desigualdad de *Atkinson* como el coeficiente de *Gini*. Tomando un punto de vista frecuencial, le damos peso a un método de estimación basado en este enfoque pues se cree que en este caso los índices de desigualdad varían de año a año mientras que los parámetros con los que están calculados se han mantenido en una condición homogénea.

Por otra parte, se encuentra un rechazo a la hipótesis inicial de una relación contra cíclica entre desigualdad y PIB real, siendo contraintuitivo, notamos que esta relación es procíclica y es robusta ante crisis económicas, en donde observamos una correlación positiva, esto es procíclica, entre los ciclos de desigualdad y los ciclos económicos, con una correlación de una cifra de .7 que es significativa a un 99% de confianza.

Asimismo, ratificamos que este efecto es significativo para la clase de ingresos bajos como para la clase de ingresos altos, sin notar diferencias significativas entre ellos, observamos que el decil II y X tienen una correlación positiva con el ciclo económico y el ciclo de desigualdad significativa a un 98% de confianza. Por otra parte, podemos afirmar que dentro de la clase de ingresos bajos existen diferencias, pues su ciclo de desigualdad varía de forma constante en el tiempo observado, tal como *Benhabib, Bissin y Luo (2017)* encontramos que existe una mayor movilidad social en los deciles más bajos de ingreso mientras que existe una menor movilidad en los deciles más altos; al observar la Figura 9, es posible observar cómo existe una mayor variabilidad en el decil II que en el X.

Figura 9. Relación de Ciclos de Desigualdad de Deciles con Ciclo de PIB Real (1994-2012)



*Eje secundario (Derecha) para Decil II y Ciclo de PIB Real

Por otra parte, concluimos que el ciclo económico generado a través de Baxter King es estacionario, es posible observar esto en el Cuadro 8. Para la selección de rezagos óptimos en los modelos a probar se toma como referencia tanto el criterio de información de Akaike (AIC) como el criterio de información Bayesiano (BIC) así como el criterio de Hannan-Quinn (HQC) resumidos en el Cuadro 9.

Cuadro 8. Resultados de Prueba Dickey-Fuller Aumentada.

Nivel de Confianza	Región de Rechazo	Resultado
90%	{-4 < -1.62}	Estacionario
95%	{-4 < -1.95}	Estacionario
99%	{-4 < -2.58}	Estacionario

Cuadro 9. Selección de rezagos óptimos para prueba *Dickey-Fuller Aumentada*. *

<i>Criterio de Selección</i>	<i>Número de rezagos óptimos</i>
<i>Akaike (AIC)</i>	10
<i>Bayes (BIC)</i>	10
<i>Hannan-Quinn (HQC)</i>	10

*Elaboración propia en el programa estadístico R Studio

Conclusiones

Es posible concluir que existe una relación procíclica entre la producción y la desigualdad, cuando hay expansiones económicas la desigualdad aumenta y cuando hay recesión económica entonces la desigualdad disminuye.

Por otra parte, se concluye que cuando la desigualdad cambia el efecto sobre el ingreso real es distinto para las distintas clases sociales, comprobamos que es más probable que afecte a las clases sociales de bajos ingresos.

Se encuentra también que cuando hay cambios en el ingreso real de la población, es mas posible que una persona de la clase baja escale a una distinta posición social que una persona de clase alta.

Apéndice

A.1. Medicion y comentarios de índices de desigualdad:

El índice de Atkinson mide la desigualdad de ingresos en una determinada muestra de individuos pudiendo hacer una distinción en los grupos que la conforman, su parámetro ε , que puede tomar valores de cero a infinito, cuanto mayor sea éste se debe suponer una mayor aversión a la desigualdad; básicamente el índice de Atkinson da pie a que dada una cierta distribución de ingresos, habrá una proporción del ingreso que permitiría alcanzar el mismo nivel de bienestar social para todos los individuos considerados en la muestra.

Es calculado de la siguiente forma:

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\sum_{i=1}^N y_i^{1-\varepsilon}}{N} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon: \varepsilon \in (0, \infty)$$

A.2. Cálculo de parámetros para distribución Cauchy:

En base a n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n , la función de máxima verosimilitud es:

$$L(\theta, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

Al transformar esta función a logaritmos tendremos que:

$$\log L(\theta, \lambda) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i) = -n \log \pi - \sum_{i=1}^n \log \left[1 + \left[\frac{x - \theta}{\lambda} \right]^2 \right]$$

Se propone optimizar esta función de la forma $l = \operatorname{argmax}_{(\theta, \lambda)} \log \log L(\theta, \lambda)$ generando la siguiente matriz *hessiana*:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2l}{d\theta^2} & \frac{d^2l}{d\theta d\lambda} \\ \frac{d^2l}{d\lambda d\theta} & \frac{d^2l}{d\lambda^2} \end{bmatrix}$$

Encontramos que:

$$\frac{d^2l}{d\theta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - \theta)}{\lambda^2 + (x_i - \theta)^2} = 0$$

$$\frac{d^2l}{d\lambda^2} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda}{\lambda^2 + (x_i - \theta)^2} = 0$$

Cada una de estas ecuaciones es equivalente a una ecuación polinomial de grado $2n-1$.

Para optimizar estas ecuaciones se utiliza el método de optimización propuesto por *Nelder* y *Mead* (1965) para ecuaciones no lineales, obtenemos que $\theta = 0.00107558$ y

$\lambda = 0.004430314$, siendo estos los resultados obtenidos al maximizar la matriz hessiana.

Bibliografía preliminar

- Atkinson A. (1970). On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory* 2.pp. 244-263.
- Auclert A. y Rognlie M. (2018). Inequality and Aggregate Demand. NBER Working Paper (No. 24280).
- Bahadur R. (1967). An optimal property of the likelihood ratio statistic. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press. Vol. 1. pp. 13-26.
- Bai Z. y Fu. J. (1987). On the maximum-likelihood estimator for the location parameter of a Cauchy distribution. *Canadian Journal of Statistics*. Vol. 15. pp. 137-146
- Baxter M. y King R. (1995). Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. NBER. Working Paper (No. 5022).

- Benhabib J., Bisin A. y Luo M. (2019). Wealth distribution and social mobility in the US: A quantitative approach. *American Economic Review*. 109 (5), pp. 1623-47.
- Burns A. y Mitchell W. (1946.) Measuring Business Cycles. NBER. pp.56-114.
- Christiano L. y Fitzgerald T. (1999). The Band Pass Filter. NBER. Working Paper (No. 7527).
- Costas A. y Smith B. (1998). Financial Intermediation and regime switching in business cycles. *The American Economic Review* 88, pp. 516-536.
- Deaton A. (2016). Measuring and understanding Behavior, Welfare and Poverty. *American Economic Review*. Vol. 106, No.6, pp.1221-1243.
- Debraj R. (2002). Economía del Desarrollo. Antonio Bosch Editor.
- Friedman. M. (1993). The “plucking model” of business fluctuations revisited. *Economic Inquiry* 31, pp.171-177.
- Gabaix X., Lasry J., Lions P. y Moll B. (2016). The dynamics of inequality. *Econometrica*. Vol. 84, No.6, pp. 2071-2111.
- Hicks J. R. (1937). Mr. Keynes and the “Classics”; A Suggested Interpretation. *Econometrica*. Vol. 5, No. 2, pp. 147.159.
- Hodrick R. y Prescott E. (1997). U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*. Vol.29, No.1, pp. 1-16.
- Instituto Nacional de Geografía y Estadística (INEGI). (2019). Producto Interno Bruto a Precios de Mercado. Banco de Información Económica. Sistema de Cuentas Nacionales.
- Kim C. y Nelson C. (1999). Friedman’s plucking model of business fluctuations tests and estimates of permanent and transitory component. *Journal of Money, Credit and Banking* 31, pp. 317-334.
- Krueger D., Mitman K., Perri F. (2018). Macroeconomics and Household Heterogeneity.NBER Working Paper (No. 22319).
- Kydland F. y Prescott E. (1998). Business Cycles: Real Facts and a Monetary Myth. Quarterly Review from Federal Reserve Bank of Minneapolis, p.3.
- Kolmogorov A. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. G. Ist. Ital. Attuari. Vol.4. pp. 83-91
- Lucas R. (1977). Understanding business cycle. *Carnegie-Rochester Series on Public Policy* 5, 7-29.

- Lucas R. (2003). Macroeconomic Priorities. *The American Economic Review*. Volume 93, No. 1, pp. 1-14.
- Nelder J. y Mead R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*. Vol. 7. pp. 308-313.
- Newey W. y West K. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. (1987). *Econometrica*. Vol. 55, No.3, pp. 703-708.
- Rothenberg T., Fisher F., Tilanus C.B. (1964). A Note on Estimation from a Cauchy Sample. *Journal of the American Statistical Association*. Volume 59, pp. 460-463.
- Said E. y Dickey D. (1984). Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*. Vol.71, Issue 3, pp. 599-607.
- Schultze C. (1964). Short-run movements of income shares. *The Behavior of Income Shares: Selected Theoretical and Empirical Issues*. NBER.
- Sichel D. (1993). Business cycle asymmetry: a deeper look. *Economic Inquiry* 31, 224-236.
- Smirnov N. (1948). Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *Annals of Mathematical Statistics*. Vol 19. pp. 279-281.
- Solow R. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, No.1, pp. 65-94.

