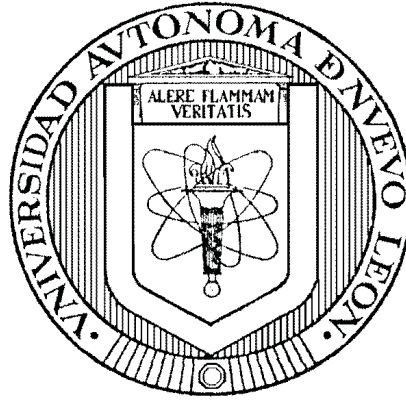


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EXPRESIONES ANALÍTICAS DE LA PARAMETRIZACIÓN DE
CONTROLADORES ESTABILIZANTES Y SENSIBILIDAD MEZCLADA

POR

ALFREDO BONILLA BARENCA

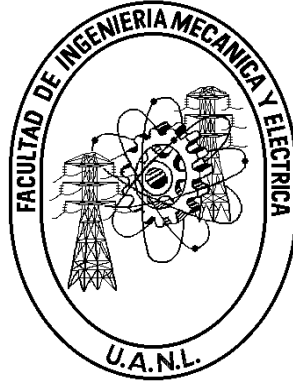
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DE 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EXPRESIONES ANALÍTICAS DE LA PARAMETRIZACIÓN DE
CONTROLADORES ESTABILIZANTES Y SENSIBILIDAD MEZCLADA

POR

ALFREDO BONILLA BARENCA

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DE 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "EXPRESIONES ANALÍTICAS DE LA PARAMETRIZACIÓN DE CONTROLADORES ESTABILIZANTES Y SENSIBILIDAD MEZCLADA" realizada por el alumno ALFREDO BONILLA BARENCA, matrícula número 1213348 sea aceptada por su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis



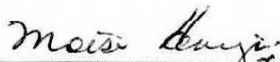
Asesor
Dr. René Galindo Orozco



Revisor:
Dr. Marco Tulio Mata Jiménez



Revisor:
Dr. Daniel Ulises Campos Delgado



Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Octubre de 2011

Dedicado con mucho cariño y afecto...

... a Dios

... a mis padres

...a mis hermanos

...a mis sobrinos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de tesis se logró gracias al apoyo de mucha gente, agradezco a todos ellos su ayuda. En especial a mis padres Asunción Barenca Antonio y Alfredo Bonilla Sánchez (Q.E.D.P), quienes con sus enseñanzas y consejos, son fuente invaluable de apoyo y motivación. A mis hermanos Irene, Socorro, Nancy, Miriam y Ángel, por su paciencia, interés en este trabajo, apoyo incondicional, siempre pendiente y la oportunidad de hacer este trabajo, a mis sobrinos Mariana y Enrique, por todo su cariño.

A mi abuela María por su cariño, apoyo y atención, a mis familiares.

A mis amigos Carlos, Edgar, Alma, Cutberto, Álvaro y demás compañeros, quienes me brindaron su apoyo y compartieron puntos de opinión, perspectivas y principalmente su amistad.

A mi asesor Dr. René Galindo Orozco, por sus enseñanzas, paciencia, siempre disponible, su apoyo y su amistad. Por sus valiosos consejos y las ideas propuestas para este trabajo.

Al comité de revisores: Dr. Marco Tulio Mata Jiménez y Dr. Daniel Ulises Campos Delgado, por sus valiosos comentarios y sugerencias que sirven de aprendizaje personal y profesional.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME), de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), por brindarme la oportunidad de prepararme mejor como profesionista y ser humano.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado como soporte para la realización de este trabajo.

RESUMEN

Publicación No. _____

Alfredo Bonilla Barenca, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2011

Profesor Asesor: Dr. René Galindo Orozco

Se presentan fórmulas explícitas para la parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros para modelos Euler-Lagrange (E-L) de sistemas completamente actuados con información sólo de las posiciones generalizadas. Se consideran sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), estrictamente propios, cuadrados de parámetros concentrados y Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) con una realización estabilizable.

Se considera que la planta es fuertemente estabilizable. Se proponen factorizaciones coprimas derecha e izquierda de la matriz de funciones de transferencia en términos de la realización en espacio de estado, se resuelven las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha, y los controladores estabilizantes se obtienen usando la parametrización de Youla. Se dan condiciones para obtener estabilidad fuerte y se fijan los parámetros libres de los controladores estabilizantes, resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada para este tipo de sistemas, se aplican a un sistema de amortiguamiento de medio carro y a un robot planar rotacional de dos grados de libertad, obteniéndose un mejor desempeño en la configuración de controlador de dos parámetros con respecto a la configuración de un parámetro, menos oscilaciones y menos sobrepasos en la configuración de dos parámetros, menor tiempo de establecimiento y buena atenuación de las perturbaciones.

Se aplican los resultados de [11] a una máquina síncrona con la finalidad de mostrar las dificultades que se presentan en la aplicación de controladores parametrizados a partir de sus factorizaciones

coprimas partiendo de la forma del modelo linealizado de un sistema E-L, iniciando con la problemática de llevar un modelo linealizado a la forma de sistemas (E-L) y los problemas que se presentan en la regulación debido a la forma de la matriz del numerador.

Índice General

Resumen	v
Índice General	vii
Índice de Figuras	ix
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	4
1.2. Organización de la tesis	5
2. Parametrización de la familia de todos los controladores estabilizantes a partir de las factorizaciones coprinas	6
2.1. Introducción	6
2.2. Doble factorización coprima	7
2.3. Resultados	8
2.4. Parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros	11
2.5. Resultados	13
2.6. Conclusiones	14
3. Controlador estabilizante sintonizado para resolver un problema de sensibilidad mezclada	16
3.1. Introducción	16
3.2. Propiedad de entrelazamiento par (<i>p.e.p.</i>)	17
3.3. Propiedades de retroalimentación	18
3.4. Estabilidad Robusta	21

3.5. Desempeño robusto	22
3.6. Sensibilidad mezclada	23
3.7. Resultados	25
3.8. Conclusiones	27
4. Aplicaciones	28
4.1. Introducción	28
4.2. La máquina síncrona	29
4.2.1. Aplicación	31
4.3. Sistema de amortiguamiento de medio carro	37
4.4. Robot planar rotacional	51
4.5. Conclusiones	57
5. Conclusiones	59
5.1. Contribuciones	60
5.2. Trabajos futuros	61
Bibliografía	63
A. Analytic expression of the doubly coprime factorisation for square systems and mixed sensitivity.	65
B. Expresión analítica de la doble factorización coprima para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada.	66

Índice de figuras

2.1. Representación de la transformación bilineal	9
2.2. Esquema general de retroalimentación	12
2.3. Sistema retroalimentado con controlador de dos parámetros	13
2.4. Sistema retroalimentado con controlador de un parámetro.	13
3.1. Sistema con perturbación multiplicativa a la salida	22
3.2. Función de intersección para la configuración de un parámetro	24
3.3. Función de intersección para la configuración de dos parámetros	26
4.1. Rotor de polos no salientes	29
4.2. Rotor de polos salientes	30
4.3. Respuesta de la máquina síncrona transformada en lazo abierto	34
4.4. Respuesta de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de la máquina síncrona transformada en lazo abierto con una entrada escalón unitario en cada entrada	34
4.5. Respuesta de la ecuación diofantina de la máquina síncrona transformada a un escalón unitario en cada una de sus entradas	35
4.6. Máquina síncrona con controlador en configuración de un parámetro	35
4.7. Máquina síncrona con controlador en configuración de dos parámetros	36
4.8. Sistema de amortiguamiento de medio carro	37
4.9. Respuesta de la planta y factorizaciones coprimas del sistema de amortiguamiento en lazo abierto con un escalón unitario en cada una de sus entradas	41
4.10. Respuesta de las ecuaciones diofantinas en el sistema de amortiguamiento de medio carro a un escalón unitario donde se obtiene la identidad, lo cual indica que se resuelve correctamente la ecuación	42
4.11. Salidas del sistema de amortiguamiento con controlador de un parámetro	45

4.12. Ley de control del sistema de amortiguamiento con controlador de un parámetro . . .	45
4.13. Salidas del sistema de amortiguamiento con controlador de dos parámetros	46
4.14. Ley de control del sistema de amortiguamiento con controlador de dos parámetros . .	46
4.15. Posiciones relativas en configuración de un parámetro de [1]	47
4.16. Posiciones relativas en configuración de dos parámetros de [1]	47
4.17. Normas infinito de las funciones de sensibilidad	48
4.18. Valores singulares de $T_o(s)$ al variar ω_h y $a = 2$	49
4.19. Valores singulares de $S_o(s)$ al variar ω_h y $a = 2$	49
4.20. Valores singulares de $T_o(s)$ al variar a y $\omega_h = 100$	50
4.21. Valores singulares de $S_o(s)$ al variar a y $\omega_h = 100$	50
4.22. Descripción coordenada de robot planar con dos grados de libertad [?]	51
4.23. Respuesta de la planta y las factorizaciones coprimas del robot planar en lazo abierto con un escalón unitario en cada entrada	54
4.24. Respuesta de las ecuaciones diofantinas del robot planar a un escalón unitario	55
4.25. Respuesta de robot planar en configuración de un parámetro	56
4.26. Respuesta de robot planar en configuración de dos parámetros	56
4.27. Ley de control del robot planar en configuración de un parámetro	57
4.28. Ley de control del robot planar en configuración de dos parámetros	57

Capítulo 1

Introducción

La formulación de la doble factorización coprima dada por [6] es una solución de la doble factorización coprima a partir del espacio de estados las cuales pueden dar expresiones sencillas o complejas dependiendo de la selección de las matrices $L \in \mathcal{R}$ y $F \in \mathcal{R}$ propuestas tal que $(A - BL)$ y $(A - FC)$ sean Hurwitz. En este trabajo se proponen factorizaciones sencillas las cuales no dependen de una selección de matrices.

La parametrización de controladores estabilizantes da una solución al problema de síntesis de controladores lineales invariantes en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés) como los propuestos por [8] y [9], los controladores estabilizan una planta dada y los problemas de desempeño pueden ser corregidos por medio de la correcta elección de los parámetros libres de los controladores, los cuales pueden ser parametrizados a partir de las factorizaciones coprimas de la planta.

Una fórmula explícita para la parametrización de todos los controladores estabilizantes para una planta ideal suponiendo información completa del estado y una matriz de entrada no singular es dada por [4], primero se obtienen las factorizaciones coprimas izquierda y derecha [7] de la función de transferencia de la planta en términos de la realización en espacio de estados, entonces, las ecuaciones diofantinas [9] son resueltas, y finalmente se obtiene la familia de controladores estabilizantes.

Un criterio de sensibilidad mezclada (ver el libro [9]) incluye criterios de desempeño y de estabilidad para una planta dada, este criterio es modificado en [2] donde se hacen aproximaciones en altas y bajas frecuencias de las funciones a minimizar, las cuales, de acuerdo a las características del modelo de incertidumbre utilizado (modelo de incertidumbre multiplicativo) son la función de sensibilidad $S(s)$ y la función de sensibilidad complementaria $T(s)$, con lo que se obtienen dos líneas rectas de sus normas $-\infty$ con respecto al parámetro libre del controlador, estas líneas rectas tienen una solución en el punto de cruce dado y que están sujetas a $I = S(s) + T(s)$. La motivación de utilizar la aproximación propuesta en [2] es que se pueden obtener fórmulas sencillas, lo cual no es posible con la propuesta en [9]. El modelo de incertidumbre utilizado para la solución del problema de sensibilidad mezclada es un modelo multiplicativo a la salida del cual se obtienen las funciones de sensibilidad utilizadas en el criterio a minimizar.

En [1] proponen la parametrización de controladores estabilizantes para plantas con información completa del estado y fijan el parámetro libre del controlador resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, parten de una realización en espacio de estados similar a la de sistemas Euler-Lagrange linealizados; además proponen una transformación con la cual resuelven problemas de pertenencia al conjunto de funciones racionales, propias y estables \mathcal{RH}_∞ y así obtienen controladores estables para las diferentes configuraciones de uno y dos parámetros. A diferencia de [1] en esta tesis se supone sólo información de las posiciones generalizadas del sistema.

Existen diferentes técnicas para modelar sistemas físicos que describen su dinámica y diferentes características del sistema, una técnica muy conocida es la de modelado con leyes de movimiento de Euler-Lagrange. En esta tesis se aprovecha la característica de la forma ó estructura de la realización en espacio de estados de los sistemas Euler-Lagrange linealizados, suponiendo que se tienen disponibles las mediciones de las posiciones, se obtiene cierta forma (que es mostrada más adelante) para la matriz C de la salida de la representación en espacio de estados del sistema.

Debido a sus dinámicas cambiantes, a las incertidumbres y a las perturbaciones, el desempeño de

la máquina síncrona se deteriora, por lo cual ha sido foco de investigación y de aplicación de diferentes técnicas de control, lo que la hace una interesante oportunidad para la aplicación del desarrollo de este trabajo, el esquema clásico de control es un estabilizador de potencia (PSS por sus siglas en inglés) combinado con un controlador de voltaje de excitación (AVR por sus siglas en inglés), estos controladores dan respuestas inadecuadas ante variaciones en la referencia u oscilaciones locales, produciendo a menudo pérdida de estabilidad.

El sistema de amortiguamiento de medio carro es un sistema no lineal modelado por leyes de movimiento Euler-Lagrange y linealizado en un punto de operación, que es utilizado como planta nominal para el diseño de controladores.

Se proponen fórmulas explícitas de la doble factorización coprima sin el inconveniente de las matrices L y F que se proponen en [6], la cual nos proporciona la representación de la función de transferencia de la planta dada por un denominador y un numerador que no tienen polos y ceros inestables en común, las soluciones de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha. Así como de la parametrización de controladores estabilizantes de sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), cuadrados, estrictamente propios con parámetros concentrados y lineales invariantes en el tiempo con una realización estabilizable y detectable y la planta es fuertemente estabilizable.

Además se sintonizan los controladores estabilizantes resolviendo un problema de sensibilidad mezclada en las diferentes configuraciones de uno y dos parámetros, con lo cual se procura preservar el desempeño ante perturbaciones de bajas frecuencias en la salida ([5], [18]) y estabilidad ante perturbaciones de altas frecuencias que pueden ser introducidas por el sistema de medición, así como compensar dinámicas no modeladas y variaciones en parámetros debidas a condiciones ambientales o por envejecimiento.

1.1. Objetivos

El propósito de este trabajo es diseñar un controlador \mathcal{H}_∞ para un modelo lineal con la estructura de la representación en espacio de estados de sistemas Euler-Lagrange linealizados con información disponible solamente de las posiciones, utilizando técnicas de control robusto de sensibilidad mezclada y aplicarlo a diferentes modelos mostrando la facilidad con la que pueden ser obtenidas las factorizaciones coprimas así como las soluciones de sus ecuaciones diofantinas y expresiones analíticas para fijar los parámetros libres de los controladores en las configuraciones de uno y dos parámetros.

Objetivos específicos:

- Obtener expresiones explícitas y analíticas de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), cuadrados, estrictamente propios con parámetros concentrados y lineales invariantes en el tiempo con una realización estabilizable y detectable, se considera que la dimensión del estado n es par, la dimensión de la entrada m es la mitad del estado, $n = 2m$, y la planta es fuertemente estabilizable.
- Obtener las soluciones de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha de $P(s)$.
- Parametrizar la familia de controladores estabilizantes [5] de $P(s)$ a partir de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha y de las soluciones de las ecuaciones diofantinas [6].
- Resolver un criterio de sensibilidad mezclada en las configuraciones de uno y dos parámetros.
- Aplicar los resultados obtenidos a la máquina síncrona y al sistema de amortiguamiento de medio carro [1]

Los objetivos anteriores resumen la contribución realizada en esta tesis.

1.2. Organización de la tesis

La tesis esta estructurada de la siguiente manera,

En el Capítulo 2, se da una descripción de la obtención de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de una planta, así como la obtención de las soluciones de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha que pertenecen al conjunto de funciones racionales, propias y estables \mathcal{RH}_∞ , y finalmente la parametrización de controladores estabilizantes, que son los resultados de este trabajo en esa área.

En el Capítulo 3, se menciona la propiedad de entrelazamiento par que da condiciones para determinar si existe un controlador estable dentro de la familia de controladores estabilizantes de una planta, además se dan ciertas propiedades del lazo de retroalimentación que sirven de base para definir las funciones de sensibilidad, también se dan condiciones para asegurar estabilidad robusta y desempeño robusto los cuales son el objetivo al resolver un problema de sensibilidad mezclada, finalmente se da una descripción de la solución del problema de sensibilidad mezclada y el criterio utilizado para el problema de sensibilidad mezclada utilizado, y los resultados de este trabajo en este tema.

En el Capítulo 4, se da una descripción breve del funcionamiento de la máquina síncrona, también se da una descripción del modelo del sistema de amortiguamiento de medio carro, a estos modelos se aplican los resultados obtenidos en este trabajo.

Por último en el Capítulo 5 se dan las conclusiones y trabajos que pudieran realizarse en el futuro.

Capítulo 2

Parametrización de la familia de todos los controladores estabilizantes a partir de las factorizaciones coprinas

2.1. Introducción

La formulación de la parametrización de la familia de controladores estabilizantes es dada en [5] y [8], la cual es parametrizada a partir de las factorizaciones coprinas de una planta dada.

En [6] se presentan fórmulas explícitas de las factorizaciones coprinas izquierda y derecha y las soluciones de las ecuaciones diofantinas, donde la simplicidad de estas depende de una correcta elección de matrices para la solución, lo cual no sucede con las propuestas en este trabajo. [9] presenta la parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros.

[1] y [11] presentan fórmulas explícitas de la factorización coprime izquierda y derecha de la planta (E-L) con información completa del estado, así como de las soluciones de las ecuaciones diofantinas y la parametrización de la familia de controladores estabilizantes, en este trabajo se propone obtener estos resultados reduciendo la cantidad de información necesaria para la retroalimentación utilizando sólo la información de las posiciones del sistema.

2.2. Doble factorización coprime

La factorización coprime es otra forma de representar una planta dada en una realización mínima, compuesta por dos matrices, siendo una el denominador y la otra el numerador de la planta [5].

La factorización coprime derecha de una planta está dada en [5],

$$P(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (2.2.1)$$

y la factorización coprime izquierda

$$P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.2.2)$$

donde: $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ son los denominadores de la planta, estas funciones deben pertenecer al conjunto de funciones racionales propias y estables (\mathcal{RH}_∞). Mientras tanto, $N(s)$, $\tilde{N}(s)$ son los numeradores de las plantas, y deben pertenecer a \mathcal{RH}_∞ .

La coprimicidad nos indica que debe ser una realización mínima (no deben existir polos y ceros inestables en común entre el numerador y denominador de las factorizaciones coprimas).

Por otro lado la factorización es coprime si existen funciones $X(s), Y(s)$ y $\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ que pertenecen al conjunto de funciones propias y estables tales que resuelven la identidad de Bezout o ecuaciones diofantinas derecha e izquierda,

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ D(s) & \tilde{X}(s) \end{bmatrix} = I_{2m} \quad (2.2.3)$$

2.3. Resultados

Considere una planta en su representación en espacio de estados,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

donde,

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Su realización se supone que es estabilizable y detectable, la dimensión del estado es par ($n = 2m$) donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada necesaria en la partición de las matrices para la correspondencia en dimensiones de las operaciones, así como que A_{12} , B_m , C_{11} , sean cuadrados e invertibles y se supone que la planta es fuertemente estabilizable.

La estructura de (2.3.2) es un caso general, en el cual también se incluye la forma de los sistemas modelados por las ecuaciones de movimiento de E-L en donde A_{12} es una matriz identidad de tamaño m , dicha estructura también puede ser obtenida en algunos casos modelando el sistema por medio de la técnica Bond Graph; donde la matriz de salidas (C) sólo considera información de posiciones, siendo de esta estructura de la que se parte para el desarrollo de la técnica.

Dada su representación en espacio de estados, se obtiene la matriz de funciones de transferencia donde I_n es una matriz identidad de tamaño n .

$$P(s) = C (sI_n - A) B\tag{2.3.3}$$

Aplicando la transformación bilineal (Figura 2.1) utilizada en [5],

$$s = \frac{1}{\lambda} - a \quad (2.3.4)$$

la cual simplifica la factorización de $P(s)$ y la solución de la ecuación diofantina en el anillo de los polinomios en λ y haciendo que las factorizaciones coprimas izquierda, derecha y la solución de las ecuaciones diofantinas en $s \in \mathcal{RH}_\infty$

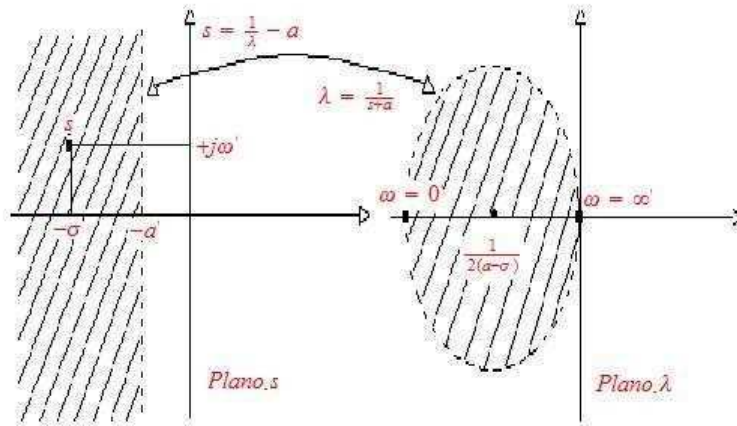


Figura 2.1: Representación de la transformación bilineal

Aplicando (2.3.4) a (2.3.3),

$$P(\lambda) = C \begin{bmatrix} (\frac{1}{\lambda} - a) I_m & -A_{12} \\ -A_{21} & (\frac{1}{\lambda} - a) I_m - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} B \quad (2.3.5)$$

Utilizando la fórmula de inversión de matrices a bloques (2.3.7) utilizada en [1], del lema de inversión de matrices, donde Φ es llamado el *complemento de Schur*,

$$(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21})^{-1} = N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} \quad (2.3.6)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1} \\ -\Phi^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

dada la estructura de las matrices C y B no se requiere el cálculo de todos los términos de 2.3.7, donde $*$ denota cualquier valor finito, y N_{11} y $\Phi := N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}$ son matrices no singulares. Entonces,

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & \lambda^2 A_{12} (\lambda^2 (a^2 I_m + a A_{22} - A_{21} A_{12}) - \lambda (2a I_m + A_{22}) + I_m)^{-1} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

donde,

$$\Gamma(\lambda) := \lambda^2 (a^2 I_m + a A_{22} - A_{21} A_{12}) - \lambda (2a I_m + A_{22}) + I_m \quad (2.3.9)$$

Si $0 < a \in \mathcal{R}$, $B_m \in \mathcal{R}^{m \times m}$ y A_{12} son matrices no singulares y regresando a s ,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - s A_{22} - A_{21} A_{12}) \quad (2.3.10)$$

$$P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (2.3.11)$$

Si C_{11} , A_{12} y B_m son matrices no singulares una solución de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha sobre \mathcal{RH}_∞ de (2.3.11) es,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} B_m \\ N(s) &= \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Dadas las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de la planta, se presenta una solución de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha $\in \mathcal{RH}_\infty$, resolviendo las ecuaciones diofantinas en lambda de forma algebraica proponiendo polinomios,

$$\alpha = a^2 I_m + a A_{22} - A_{21} A_{12} \quad (2.3.13)$$

$$\beta = 2a I_m + A_{22} \quad (2.3.14)$$

$$I_m = \tilde{N}(\lambda) \tilde{X}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda) \tilde{Y}(\lambda) \quad (2.3.15)$$

$$I_m = (\lambda^2 B_m) (B_m^{-1} (\tilde{X}_a + \tilde{X}_b)) + ((\lambda^2 \alpha - \lambda \beta + I_m) C_{11}) (C_{11} (\tilde{Y}_a \lambda + \tilde{Y}_b)) \quad (2.3.16)$$

$$I_m = X(s) N(s) + Y(s) D(s) \quad (2.3.17)$$

$$I_m = ((X_a \lambda + X_b) C_{11}^{-1}) (C_{11} \lambda^2) + ((Y_a \lambda + Y_b) B_m) (B_m (\lambda^2 \alpha - \lambda \beta + I_m)) \quad (2.3.18)$$

e igualando términos y regresando a s se obtiene,

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_1 s + A_{21} A_{12} Y_0 + a^3 I_m) \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + Y_0) \\
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_1 s + Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_0)
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

donde,

$$\begin{aligned}
Y_0 &: = A_{22} + 3a I_m \\
X_1 &: = Y_0 A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

lo cual da una solución a la doble factorización coprima dada en la ecuación (2.2.3) $\in \mathcal{RH}_\infty$.

Siendo así las fórmulas de las factorizaciones y las soluciones de las ecuaciones diofantinas unos de los principales resultados de este trabajo.

2.4. Parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros

La parametrización de todos los controladores estabilizantes asegura la estabilidad interna del sistema de control en lazo cerrado bajo la suposición de que el sistema es detectable y estabilizable, y entrega expresiones que caracterizan las relaciones entrada salida, lo que es especialmente ventajoso para resolver problemas de desempeño.

Todos los controladores que estabilizan a la planta [9] pueden ser derivados de su factorizaciones coprimas.

Suponga que $(N(s), D(s)), (\tilde{D}(s), \tilde{N}(s))$ son cualquier factorización coprima derecha e izquierda de la planta sobre \mathcal{RH}_∞ y matrices $X(s), Y(s), \tilde{X}(s), \tilde{Y}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ tales que resuelvan (2.2.3)

entonces,

$$K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) \quad (2.4.1)$$

donde,

$$\tilde{D}_k : = Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \quad (2.4.2)$$

$$\tilde{N}_k : = X(s) + R(s)\tilde{D}(s)$$

Siendo $R(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ el parámetro libre que satisface $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$.

El sistema está bien definido si,

$$\det(I + P(s)K(s)) \neq 0 \quad \forall s$$

Dada una planta P y una entrada externa y_d , entonces el esquema de retroalimentación más general es,

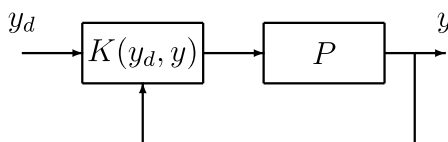


Figura 2.2: Esquema general de retroalimentación

$$u = K(y_d, y)$$

Así, el esquema lineal invariante en el tiempo más general es la configuración retroalimentada con controlador de dos parámetros mostrada en la Figura 2.3,

$$u = \begin{bmatrix} K_r(s) & -K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ y \end{bmatrix}$$

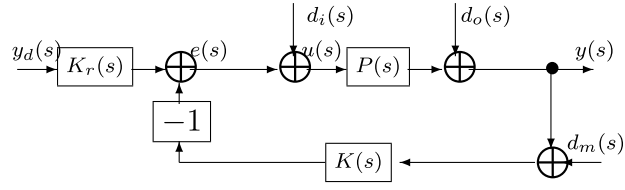


Figura 2.3: Sistema retroalimentado con controlador de dos parámetros

Si $K(s) = K_r(s)$ entonces $u = K(s)(y_d - y)$, obteniéndose la configuración retroalimentada con controlador de un parámetro mostrada en la Figura 2.4 ,

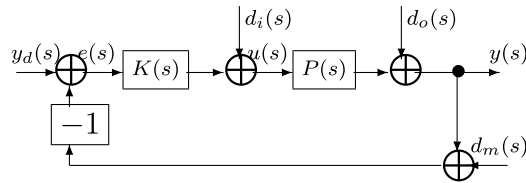


Figura 2.4: Sistema retroalimentado con controlador de un parámetro.

2.5. Resultados

Sea $P(s)$ una planta dada, suponga que $(N(s), D(s))$, $(\tilde{D}(s), \tilde{N}(s))$ son cualquier factorización coprima izquierda y derecha de $P(s)$ sobre \mathcal{RH}_∞ y que $X(s), Y(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ satisfacen la ecuación (2.2.3), entonces el conjunto de todos los controladores de dos parámetros que estabilizan la planta está dado por [9],

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K(s) & K_r(s) \end{bmatrix} &= \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} \tilde{N}_k(s) & Q(s) \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_k(s) &= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

donde $Q(s), R(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ son arbitrarios, satisfaciendo,

$$\det \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right) \neq 0 \forall s \in \mathbb{C}$$

y las expresiones analíticas son,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(s) & : = \frac{1}{s+a} \left(sI_m + Y_0 - \frac{1}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) & : = \frac{1}{s+a} [X_1 s + Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \end{aligned}$$

El controlador de un parámetro de la Figura 2.4, $K(s)$, también está en (2.5.1).

Los problemas relacionados con estabilización son iguales en ambos sistemas, mientras que los problemas relacionados con regulación y desacoplo se simplifican con el controlador de dos parámetros.

2.6. Conclusiones

En este capítulo se dieron fórmulas explícitas para las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de una planta, dadas por $\tilde{D}(s) = \Gamma(s) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$, $\tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} B_m$ y $N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12}$, $D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s)$, así como las soluciones de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha, dadas por $\tilde{X}(s) = \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_1 s + A_{21} A_{12} Y_0 + a^3 I_m)$, $\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (sI_m + Y_0)$ y $X(s) = \frac{1}{s+a} (X_1 s + Y_0 A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$, $Y(s) = \frac{1}{s+a} (sI_m + Y_0)$, siendo estos unos de los principales resultados de este trabajo, con los cuales se parametrizó la familia de controladores estabilizantes de la planta [9].

En el capítulo siguiente se dan las condiciones para la existencia de controladores estables dentro de la familia de controladores estabilizantes de una planta por medio de la propiedad de entrelazamiento par.

Se dan algunas propiedades del esquema de retroalimentación necesarias para la definición de las

funciones a minimizar utilizadas en el problema de sensibilidad mezclada, así como definiciones de estabilidad robusta y desempeño robusto los cuales son los objetivos para el criterio de sensibilidad mezclada.

Finalmente se menciona el criterio de sensibilidad mezclada propuesto en [9] y el modificado utilizado en esta tesis propuesto en [3].

Capítulo 3

Controlador estabilizante sintonizado para resolver un problema de sensibilidad mezclada

3.1. Introducción

La propiedad de entrelazamiento par [5] da la condición para determinar la existencia de controladores estables dentro de la familia de controladores estabilizantes parametrizados en el capítulo anterior [8], que es de mucho interés por razones prácticas como rompimiento de lazo o minimizar errores numéricos.

Las propiedades de retroalimentación como lo son las matrices de funciones de transferencia de sensibilidad y sensibilidad complementaria [5], son necesarias para el análisis y la solución de un problema de sensibilidad mezclada.

La estabilidad robusta preserva la estabilidad del sistema ante perturbaciones externas, que pueden ser introducidas por el sistema de medición y desempeño robusto busca preservar desempeño ante perturbaciones a la salida manteniendo la salida lo mas cercano a la referencia, las cuales son comúnmente de baja frecuencia a la salida de la planta [5].

[3] presenta el criterio de sensibilidad mezclada utilizado en este trabajo, en el cual se tienen aproximaciones en bajas y altas de las funciones de sensibilidad que son incluidas en el criterio. De esta manera es como se pueden obtener fórmulas explícitas para la sintonización de los controladores.

Finalmente utilizando el criterio propuesto en [3], son sintonizando los parámetros libres de los controladores estabilizantes como se propone en [1] resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, sin los problemas de la selección de matrices propuestas por [6] y al sólo utilizar retroalimentación de las posiciones, se reduce el esfuerzo computacional en comparación con los controladores propuestos en [3] y [11].

3.2. Propiedad de entrelazamiento par (*p.e.p.*)

El problema de estabilización fuerte fue estudiado en [16] para plantas con una entrada y una salida y [9] extendió estos resultados a plantas MEMS, dando la siguiente propiedad de entrelazamiento par (*p.e.p.*):

La planta $P(s)$ es fuertemente estabilizable, es decir, existe un controlador estable dentro de la familia de controladores estabilizantes de la planta \iff el número de polos reales e inestables de $P(s)$ entre cada par de ceros de transmisión reales e inestables de $P(s)$ (incluyendo los ceros al infinito) es par [16]. El problema de estabilización fuerte es importante por razones prácticas como rompimiento de lazo y la minimización de errores numéricos.

Por lo tanto, si el sistema cumple con la *p.e.p.* y sí $R(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ y $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ son parámetros libres. Sea $B_m, C_{11} \in \mathcal{R}^{m \times m}$ matrices no singulares, $0 < a \in \mathcal{R}$, y (2.3.10), sustituyendo directamente (2.3.12) y (2.3.19) en (2.5.1), entonces, existen controladores estables $K(s)$ y $K_r(s)$ dentro de las familias de controladores estabilizantes dadas por la ecuación (2.5.1). Si $\det(\tilde{D}_k(s))$ es un polinomio Hurwitz entonces los polinomios de,

$$\det(s^2 I_m + (a I_m + Y_0) s + a Y_0 - R(s)) \quad (3.2.1)$$

son Hurwitz.

3.3. Propiedades de retroalimentación

En esta sección veremos algunas propiedades de los sistemas en lazo cerrado [5] y [15], las cuales son utilizadas para el análisis y la solución de un problema de sensibilidad mezclada con el cual se fijan los parámetros libres del controlador de la familia de controladores que estabilizan la planta de diseño.

Considere el esquema de control de la Figura 2.4, se definen las matrices de funciones de transferencia de lazo abierto a la entrada y a la salida,

$$L_i = KP, L_o = PK \quad (3.3.1)$$

la primera se obtiene abriendo el lazo a la entrada de la planta, mientras que la segunda se obtiene abriendo el lazo a la salida de la planta.

Las matrices de sensibilidad a la entrada y a la salida están dadas por,

$$S_i = (I + L_i)^{-1} \quad (3.3.2)$$

$$S_o = (I + L_o)^{-1}$$

las matrices de sensibilidad complementarias están dadas por,

$$T_i = I - S_i \quad (3.3.3)$$

$$T_o = I - S_o$$

Estas funciones de sensibilidad están incluidas en todas las funciones de transferencia del sistema

en lazo cerrado,

$$\begin{aligned}
 y &= T_o(y_d - n) + S_o P d_i + S_o d_o \\
 e &= y_d - y \\
 e &= K S_o(y_d - d_o) + S_o d_m - S_o P d_i \\
 u &= K S_o(y_d - d_m) - K S_o d_o - T_i d_i \\
 u_p &= K S_o(y_d - n) - K S_o d + S_i d_i
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

y su representación matricial es,

$$\begin{bmatrix} e \\ u \\ y \\ u_p \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} y_d \\ d_i \\ d_m \\ d_o \end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

El sistema en lazo cerrado mostrado en la Figura 2.4 es internamente estable sí y sólo sí,

$$H(s) \in \mathcal{RH}_\infty \tag{3.3.6}$$

y si $K(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ entonces,

$$H(s) \in \mathcal{RH}_\infty \iff S_o(s) P(s) = P(s) S_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$$

Suponga que $P(s)$ y $K(s)$ están descritos por ecuaciones en espacio de estados de la forma,

$$\begin{aligned}
 P(t) &: \begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) = C_p x(t) \end{cases} \\
 K(t) &: \begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k x(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k x(t) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

que las tripletas (A_p, B_p, C_p) y (A_k, B_k, C_k) son estables y detectables y que el sistema está bien definido, entonces el sistemas de la Figura 2.4 es internamente estable, si $S_o(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ (solo se requiere la estabilidad de la sensibilidad si $P, K \in \mathcal{RH}_\infty \iff H(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ (ver [9]), la estabilidad interna de un sistema de control requiere que todas las funciones de transferencia sean estables, esto

garantiza que todas las señales sean acotadas. Por otro lado, la función de sensibilidad complementaria a la salida, se puede expresar en términos de las funciones de sensibilidad,

$$\begin{aligned} y &= T_o(s) r = S_o(s) P(s) K(s) y_d \\ y &= P(s) S_i(s) K(s) y_d \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

y utilizando la parametrización de Youla y la doble factorización coprima dada por (2.2.3) (función afín del parámetro libre del controlador),

$$\begin{aligned} S_i(s) &= (I + K(s) P(s))^{-1} \\ &= \left(I + \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right)^{-1} \left(X(s) + R(s) \tilde{D}(s) \right) P(s) \right)^{-1} \\ &= \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) + \left(X(s) + R(s) \tilde{D}(s) \right) P(s) \right)^{-1} \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right) \\ &= (Y(s) + X(s) P(s))^{-1} \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right) \\ Y(s) + X(s) P(s) &= Y(s) + X(s) N(s) D^{-1}(s) \\ &= (Y(s) D(s) + X(s) N(s)) D^{-1}(s) = D^{-1}(s) \\ S_i(s) &= D(s) \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

por lo tanto de (3.3.8), sustituyendo (2.2.1) y (2.4.2),

$$\begin{aligned} y &= P(s) D(s) \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right) K(s) y_d \\ &= N(s) D^{-1}(s) D(s) \left(Y(s) - R(s) \tilde{N}(s) \right) K(s) y_d \\ &= N(s) \tilde{N}_k(s) y_d \\ T_o(s) &= N(s) \tilde{N}_k(s) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

y para la configuración retroalimentada con controlador de dos parámetros es,

$$\begin{aligned}
y &= (I + P(s)K(s))^{-1}P(s)K_r(s) & (3.3.11) \\
&= P(s)(I + K(s)P(s))^{-1}K_r(s)y_d \\
&= P(s)\left(I + \left(Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)\right)^{-1}\left(X(s) + R(s)\tilde{D}(s)P(s)\right)\right)^{-1}K_r(s)y_d \\
&= P(s)\left(Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) + \left(X(s) + R(s)\tilde{D}(s)P(s)\right)^{-1}\left(Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)\right)\right)K_r(s)y_d \\
&= P(s)D(s)Q(s)y_d \\
&= N(s)Q(s)y_d
\end{aligned}$$

$$T_o(s) = N(s)Q(s)$$

Las ecuaciones (3.3.10) y (3.3.11) nos dan las matrices de funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado, donde se observa que la salida del sistema sólo depende de $N(s)$ y $N_k(s)$, para la configuración con controlador de un parámetro y para la configuración de dos parámetros solo depende de $N(s)$ y $Q(s)$.

3.4. Estabilidad Robusta

Se tiene estabilidad robusta si se garantiza estabilidad ante incertidumbres si se tiene alguna información espectral de la misma,

$$\begin{aligned}
\|\Delta(s)\|_\infty &\leq \delta < \infty & (3.4.1) \\
\left\|\frac{1}{\delta}\Delta(s)\right\|_\infty &\leq 1 \\
\left\|W_1(s)\tilde{\Delta}(s)W_2(s)\right\|_\infty &\leq 1
\end{aligned}$$

donde $\left\|\tilde{\Delta}(s)\right\|_\infty \leq 1$ y $W_1(s), W_2(s)$, representadas en la Figura 3.1, son funciones de peso pasa bajas y pasa altas respectivamente, de fase mínima y estables. Entonces del Teorema de pequeñas ganancias [5] para garantizar estabilidad robusta con un modelo de incertidumbre multiplicativo a la

salida se requiere que,

$$\|W_2(s) T_{u\Delta y\Delta}(s) W_1(s)\|_\infty \leq 1 \quad (3.4.2)$$

donde $T_{u\Delta y\Delta}(s)$ es la matriz de funciones de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre.

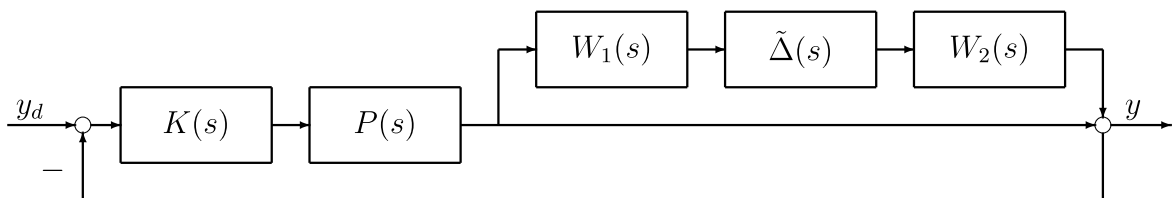


Figura 3.1: Sistema con perturbación multiplicativa a la salida

3.5. Desempeño robusto

El propósito de tener desempeño robusto es reducir el error en la salida de la planta tanto como sea posible, suponga que las perturbaciones externas a la salida son generalmente de bajas frecuencias ([5] y [18]) y que se dispone de alguna información espectral de las perturbaciones,

$$\begin{aligned} \|d(s)\|_\infty &\leq \delta < \infty & (3.5.1) \\ \left\| \frac{1}{\delta} d(s) \right\|_\infty &\leq 1 \\ \left\| W_3(s) \tilde{d}(s) \right\|_\infty &\leq 1 \end{aligned}$$

donde $\left\| \tilde{d}(s) \right\|_\infty \leq 1$ y $W_3(s)$ es una función de peso de bajas frecuencias de fase mínima y estable. El criterio de desempeño nominal es ,

$$\|W_3(s) T_{yd}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (3.5.2)$$

donde T_{yd} es la función de transferencia de la perturbación a la salida. En particular, si $d(s)$ es la perturbación a la salida $d_o(s)$,

$$\|W_3(s) S_o(s)\|_\infty \leq 1 \quad (3.5.3)$$

3.6. Sensibilidad mezclada

La sensibilidad mezclada involucra dos o más criterios a minimizar, con los cuales se pretende preservar ciertas características del sistema aún en presencia de perturbaciones externas e incertidumbres. En esta sección se muestra el criterio de sensibilidad mezclada general e inmediatamente después el criterio utilizado en este trabajo.[3]

Si se desea atenuar los efectos de $\|d_o(t)\|_2$ sobre $\|y(t)\|_2$ y limitar la magnitud de $\|u(t)\|_2$ en cierta banda de frecuencias, se requiere minimizar el criterio,

$$J_1 = \left\| \left[\begin{array}{c} W_3(s) S_o(s) \\ W_1(s) T_o(s) \end{array} \right] \right\|_{\infty} \quad (3.6.1)$$

donde $S_o(s)$ es la función de sensibilidad a la salida y $T_o(s)$ es la función de sensibilidad de la salida de la incertidumbre a la entrada de la incertidumbre en un esquema de incertidumbre multiplicativa a la salida ($P_{\Delta} = (I + W_2\Delta W_1)P$ ver Figura 3.1) que es igual a la función de sensibilidad complementaria de la planta.

Este criterio es modificado por [3],

$$J_2 = \left\| \left[\begin{array}{c} S_{ol} \\ T_{oh} \end{array} \right] \right\|_{\infty} \quad (3.6.2)$$

donde S_{ol} es la función de sensibilidad aproximada en bajas frecuencias, esto pensando en desempeño y que las perturbaciones a la salida de la planta son de bajas frecuencias y T_{oh} es la función de sensibilidad complementaria aproximada en altas frecuencias pensando en preservar estabilidad ante perturbaciones de altas frecuencias que podrían ser introducidas por las mediciones o ante incertidumbres multiplicativas a la salida cuya norma $-\infty$ sea “grande” en altas frecuencias.

El criterio involucra la minimización simultánea de $\|S_{ol}\|_\infty$ y $\|T_{oh}\|_\infty$, donde $K(s)$ es un controlador estabilizante y basándose en la relación entre la función de sensibilidad y sensibilidad complementaria ($S + T = I$) se supone una solución, esto es,

$$\begin{aligned} & \min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty & (3.6.3) \\ \text{sujeto a } & \|S_{ol}\|_\infty = \|T_{oh}\|_\infty \end{aligned}$$

La restricción algebraica $\|S_{ol}\|_\infty = \|T_{oh}\|_\infty$ tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas $\|S_{ol}\|_\infty$ y $\|T_{oh}\|_\infty$, en función del parámetro libre del controlador para el cual la norma- \mathcal{H}_∞ es la misma para las normas de las funciones de sensibilidad.

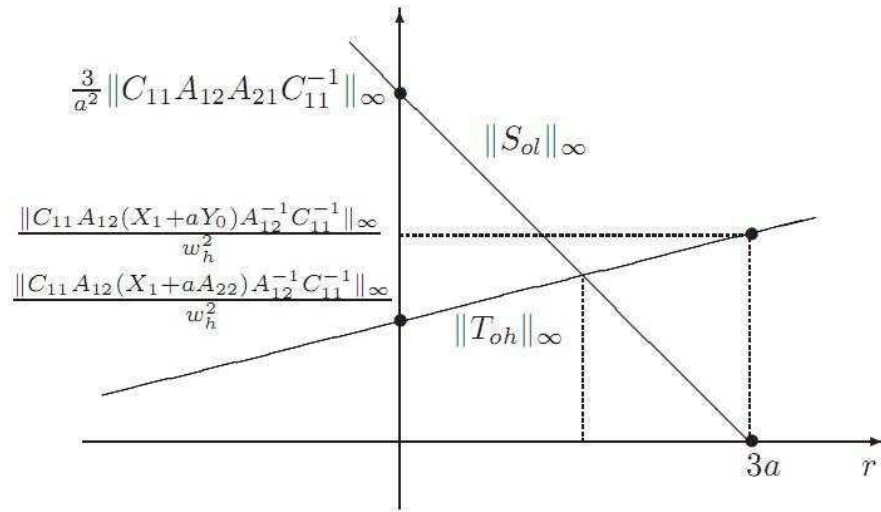


Figura 3.2: Función de intersección para la configuración de un parámetro

Así, se considera la minimización de norma \mathcal{H}_∞ de las aproximaciones de bajas frecuencias de la función de sensibilidad a la salida sujeta a la restricción que fija el mismo valor a las normas \mathcal{H}_∞ de las funciones de sensibilidad, se resuelve el problema fijando los parámetros libres de los controladores estabilizantes.

3.7. Resultados

La función de la entrada de la referencia $y_d(t)$ a la salida $y(t)$ está dada por (3.3.10),

$$T_o(s) = N(s) \tilde{N}_k(s) \quad (3.7.1)$$

en la configuración retroalimentada de un parámetro mostrada en la Figura 2.4, donde $N(s)$ y $\tilde{N}_k(s)$ están dadas por (2.3.12) y (2.4.2) respectivamente, a su vez $\tilde{N}_k(s)$ está en términos de $X(s)$ y $\tilde{D}(s)$ dados por (2.3.12) y (2.3.19), respectivamente. Las aproximaciones de altas y bajas frecuencias de $\Gamma(s)$ dadas por (2.3.10) son,

$$\begin{aligned} \Gamma_h &= I_m \\ \Gamma_l &= \frac{-1}{a^2} A_{21} A_{12} \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

para asegurar que $\|S_{ol}\|_\infty = 0$ para ciertos valores de $r \in \mathcal{R}$, entonces se propone,

$$R(s) = a(rI_m + A_{22}) \quad (3.7.3)$$

Así,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{\omega_h^2} \|C_{11} A_{12} (X_1 + a(rI_m + A_{22})) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (3.7.4)$$

donde $\omega_h > 0$ es una frecuencia fija en la banda de altas frecuencias de $P(s)$. Por otro lado la aproximación de bajas frecuencias de $T_o(s)$ es,

$$T_{ol} = I_m + \frac{3a - r}{a^3} C_{11} A_{12} A_{12} C_{11}^{-1} \quad (3.7.5)$$

Por lo tanto, dado que $a > 0$, la norma \mathcal{H}_∞ de $S_{ol} = I_m - T_{ol}$ es,

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{|3a - r|}{a^3} \|C_{11} A_{12} A_{12} C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (3.7.6)$$

La ecuación de restricción tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas de la Figura 3.2 esto es,

$$r = \frac{a(3\|C_{11} A_{12} A_{12} C_{11}^{-1}\|_\infty - a^2 b)}{a^3 m + \|C_{11} A_{12} A_{12} C_{11}^{-1}\|_\infty} \quad (3.7.7)$$

donde,

$$b : = \frac{1}{\omega_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_1 + aA_{22})A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty} \quad (3.7.8)$$

$$m : = \frac{1}{3a\omega_h^2} (\|C_{11}A_{12}(X_1 + aY_0)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty} - \omega_h^2 b)$$

Además de (3.3.11), $T_o(s) = N(s)Q(s)$ (ver [9]) en la configuración de dos parámetros. Se propone $Q(s)$ como,

$$Q(s) = qa^2 A_{12}^{-1}C_{11}^{-1} \quad (3.7.9)$$

entonces las aproximación de altas y bajas frecuencias de $T_o(s)$ y $S_o(s)$ son,

$$\|T_{oh}\|_{\infty} = \frac{a^2}{\omega_h^2} |q| \quad (3.7.10)$$

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = |1 - q|$$

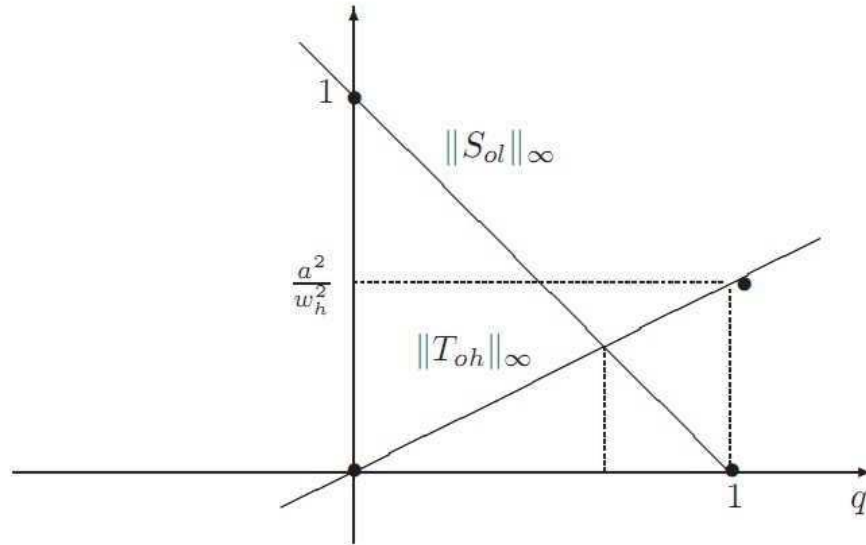


Figura 3.3: Función de intersección para la configuración de dos parámetros

Por lo tanto, $\|T_{oh}\|_{\infty} = \|S_{ol}\|_{\infty}$ tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas

rectas de la Fig 3.3,

$$q = \frac{\omega_h^2}{a^2 + \omega_h^2} \quad (3.7.11)$$

3.8. Conclusiones

Se dieron condiciones para la existencia de controladores estables dentro de la familia de controladores estabilizantes [5], lo cual es de especial interés para las implementaciones en caso de rompimiento de lazo o errores numéricos.

Además de algunas propiedades de retroalimentación donde se obtienen las funciones de sensibilidad a la salida de la planta y la función de sensibilidad complementaria [5], que son utilizadas en el criterio de sensibilidad mezclada propuesto por [3].

También las definiciones de estabilidad robusta y desempeño robusto los cuales fueron los objetivos a preservar en el criterio de sensibilidad mezclada en un esquema con incertidumbre multiplicativa a la salida.

Finalmente se dieron las soluciones a un problema de sensibilidad mezclada proponiendo $R(s) = a(rI_m + A_{22})$ con $r = a(3\|C_{11}A_{12}A_{12}C_{11}^{-1}\|_{\infty} - a^2b) / a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{12}C_{11}^{-1}\|_{\infty}$ y $Q(s) = qa^2A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}$ con $q = \omega_h^2 / a^2 + \omega_h^2$, siendo estos otros los resultados de este trabajo en ese tema y que no tienen el inconveniente de la utilización de la matriz de transformación propuesta en [1] para solucionar problemas de pertenencia a \mathcal{RH}_{∞} .

En el capítulo siguiente se presentan los sistemas a los que fueron aplicados los resultados de este trabajo, se da una descripción de la máquina síncrona [13] y las dificultades de la aplicación a sistemas con diferente estructura a la requerida para la técnica. Además se presenta la aplicación a un sistema de amortiguamiento de medio carro [1] y finalmente un ejemplo de simulación de un robot planar rotacional de dos grados de libertad, se dan conclusiones con respecto a las tres aplicaciones que ilustran más a fondo la utilización de la técnica.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Introducción

Como en todo desarrollo de herramientas, es importante la ilustración de su utilización así como de las ventajas y desventajas de cada una en aplicaciones, en este capítulo se aplican los resultados de [11] a una máquina síncrona, debido a que es un sistema muy importante en la generación de energía y por lo tanto de constante estudio, con el cual se abordan las dificultades, desde que el sistema no tenga la forma requerida (en la cual solo se logró llevarlo a la forma propuesta por [11]) y errores grandes en la regulación de la salida que están relacionados con la forma de la matriz A y se presenta al aplicar controladores parametrizados a partir de factorizaciones comprimidas partiendo de la realización de espacio de estados mostrado en el capítulo 2.

Se aplican los resultados de esta tesis al sistema de amortiguamiento de medio carro lineal [1] obteniendo buenos resultados en la atenuación de las perturbaciones así como de estabilidad. Los resultados también son aplicados al modelo no lineal de un robot planar rotacional de dos grados de libertad con los cuales se observan también buenos resultados en la regulación, así como la preservación de la estabilidad en el sistema.

En estas aplicaciones es mostrada la facilidad con las que son obtenidas las factorizaciones coprimas de las plantas, así como de las soluciones de las ecuaciones diofantinas [6] con sólo información de las posiciones generalizadas que dan cierta forma a la matriz C de la salida de la planta a diferencia de información completa del estado propuesto en [1] y [11], la parametrización de la familia de controladores estabilizantes [8], y la obtención de un controlador estabilizante estable, resolviendo un problema de sensibilidad mezclada [3], procurando preservar estabilidad robusta ante perturbaciones de alta frecuencia y desempeño robusto ante perturbaciones de baja frecuencia a la salida.

4.2. La máquina síncrona

La máquina síncrona es uno de los principales sistemas de conversión de energía mecánica a eléctrica utilizado en la mayor parte de fuentes de generación de energía en el mundo. La máquina síncrona se construyen generalmente con un estator trifásico sin salientes, un rotor con salientes y una sola fase excitada por medio de una corriente continua.

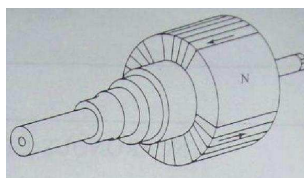


Figura 4.1: Rotor de polos no salientes

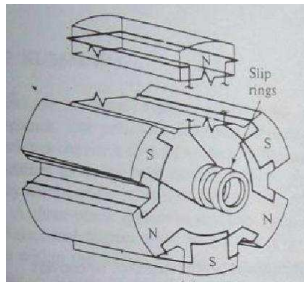


Figura 4.2: Rotor de polos salientes

Al estator polifásico se le conoce como inducido y al rotor como inductor. Estos devanados están acoplados magnéticamente. El acoplamiento de estos devanados está dado en función de la posición del rotor [13]. Para la representación matemática de la máquina síncrona son necesarias ciertas transformaciones para su simplificación (Transformaciones de Park [10]) de esta manera se obtiene un modelo simplificado de la máquina síncrona que es utilizado para el diseño de controladores.

El rotor o inductor de un generador síncrono es en esencia un electroimán, por el cual se hace circular una corriente continua que induce una corriente en los devanados del inducido, los cuales están separados 120° mecánicos cada uno, la frecuencia eléctrica se produce y se sincroniza con la tasa mecánica de rotación del generador, donde ω^r es la velocidad de sincronismo que es igual a la velocidad con la que gira el rotor, n el número de pares de polos y ω la frecuencia del campo eléctrico en rad/seg,

$$\omega^r = \frac{\omega}{n}$$

El modelo de la máquina síncrona consta de 3 puertos eléctricos (hablando del modelo en coordenadas $d-q$, v_d , v_q , v_f), más una mecánica, siendo esta representación uno de los modelos para diseño,

por su simplicidad, (ver [13]),

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ -v_f \\ T_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R - L_d p & \omega_o L_q & -kM_f p & L_q i_{qo} \\ -\omega_o L_d & R - L_q & -\omega_o kM_f & -L_d i_{do} \\ -kM_f & 0 & R_f - L_f p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{kM_f i_{qo}}{3} & -D - Jp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

donde, $p = d/dt$ es el operador de derivada; v_d, v_q y v_f son el voltaje del devanado del eje directo del estator, el voltaje del eje en cuadratura del estator y el voltaje de campo del generador, respectivamente; T_m es el par mecánico de entrada al generador; ω_o es la frecuencia del campo eléctrico en el punto de operación, R y R_f son las resistencias de los devanados del estator y el rotor, respectivamente; $k = 3/2$; L_d y L_q son las inductancias propias de los devanados de los ejes directo y en cuadratura del estator, respectivamente; i_d e i_q , son las corrientes del eje directo y en cuadratura, respectivamente; J es la constante de inercia; M es la inductancia mutua, i_f es la corriente del inductor y D es la constante de fricción viscosa.

4.2.1. Aplicación

Se considera,

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_f \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_f(R+R_L)}{F} & \frac{L_f L_q \omega_o}{F} & -\frac{kM_f R_f}{F} & \frac{L_f L_q}{F} i_{qo} \\ \frac{L_d \omega_o}{L_q} & -\frac{1}{L_q} (R + R_L) & \frac{kM_f \omega_o}{L_q} & \frac{L_d}{L_q} i_{do} \\ -\frac{kM_f (R+R_L)}{F} & -\frac{kM_f L_q \omega_o}{F} & \frac{L_d R_f}{F} & -\frac{kM_f L_q}{F} i_{qo} \\ 0 & 0 & -\frac{kM_f}{3J} i_{qo} & -\frac{1}{J} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{kM_f}{F} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{L_d}{F} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ T_m \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

el modelo linealizado en $i_{do} = i_{qo} = \cos(45)$, $i_{fo} = 0.9A$, $\omega_o = 60Hz$, donde $R_L = 20ohm$, representa una carga puramente resistiva, $F = k^2 M_f^2 - L_d L_f$ y los parámetros $R = 0.6ohm$, $M = 0.54H$, $J = 0.097kgm^2$, $D = 0.06kg/ms$, $R_f = 81ohm$, $i_f = 0.9A$, $L_f = 6H$ y $k = 3/2$ y la referencia del sistema $x_d = [i_{do} \ i_{qo} \ i_{fo} \ \omega_o]^T$, el cual es seleccionado como el punto en el que es linealizado el modelo dado que el lazo abierto se comporta en forma inestable, que es de interés para probar los controladores estabilizantes propuestos en [11]. Además, se propone una transformación

para llevar el modelo a la forma de la representación en variables de estado utilizada en [11] que difiere de la forma (2.3.2) ya que en [11] se utiliza información completa del estado. Suponga [11] con,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Se propone la matriz T para llevar el modelo a la forma de [11] considerando información completa del estado en el sistema transformado.

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

$$T_{11}B_1 + T_{12}B_2 = 0$$

$$T_{12} = -T_{11}B_1B_2^{-1}$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

$$\bar{A}_{11} = 0 \quad (4.2.6)$$

$$= (T_{11}A_{11} + T_{12}A_{21})(T_{11}^{-1} + T_{11}^{-1}T_{12}\Phi^{-1}T_{21}T_{11}) - (T_{11}A_{12} + T_{12}A_{22})\Phi^{-1}T_{21}T_{11}^{-1}$$

$$= (A_{11} - B_1B_2^{-1}A_{21})(I - B_1B_2^{-1}\Phi^{-1}T_{21}) - (A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})\Phi^{-1}T_{21}$$

$$M := A_{11} - B_1B_2^{-1}A_{21}$$

$$\bar{A} = M - MB_1B_2^{-1}\Phi^{-1}T_{21} - (A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})\Phi^{-1}T_{21}$$

$$\Phi^{-1}T_{21} = (MB_1B_2^{-1} + A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})^{-1}M$$

Si $T_{22} = I$ entonces,

$$\Phi = I + T_{21}B_1B_2^{-1} \quad (4.2.7)$$

$$T_{21} = (I + T_{21}B_1B_2^{-1})(MB_1B_2^{-1} + A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})^{-1}M$$

$$= (MB_1B_2^{-1} + A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})^{-1}M(I - B_1B_2^{-1}(MB_1B_2^{-1} + A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})^{-1}M)^{-1}$$

donde,

$$V = (MB_1B_2^{-1} + A_{12} - B_1B_2^{-1}A_{22})^{-1} \quad (4.2.8)$$

$$T = \begin{bmatrix} I_m & -B_1 B_2^{-1} \\ VM (I_m - B_1 B_2^{-1} VM)^{-1} & I_m \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Entonces el modelo de la máquina síncrona transformado y considerando retroalimentación completa del estado en el sistema transformado es,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.7 \\ 0 & 0 & 5080.80 & 0.70 \\ -84.63 & 177.53 & 335.30 & -0.13 \\ 608560 & -1276200 & 5430800 & 136.65 \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.106 & 0 \\ -761.61 & 10.30 \end{bmatrix}$$

El sistema cuenta con cuatro polos y cuatro ceros de transmisión que se encuentran en 914 , $-220 \pm 354i$ y -0.62 , por lo tanto el sistema cumple con la propiedad de entrelazamiento par y por lo tanto se pueden encontrar controladores estables dentro de la familia de controladores estabilizantes, la planta es controlable y observable, por lo tanto es una realización mínima. La aplicación de los resultados propuestos en [11] es para ilustrar la dificultad de aplicar estos controladores que son parametrizados a partir de la particularidad de la forma de los modelos Euler-Lagrange a sistemas como la máquina síncrona, que no son modelados originalmente bajo esta técnica, de los resultados de [11] se obtienen controladores estables resolviendo un problema de sensibilidad mezclada con $a = 35$ y $\omega_h = 500rad/s$.

En la Figuras 4.3 y 4.4 se muestran las simulaciones hechas en Matlab-Simulink de la planta y de las factorizaciones coprimas del sistema en lazo abierto ante un escalón unitario en la entrada del par mecánico y el voltaje del inductor, en las cuales se puede observar que el sistema es inestable y las factorizaciones representan la planta,

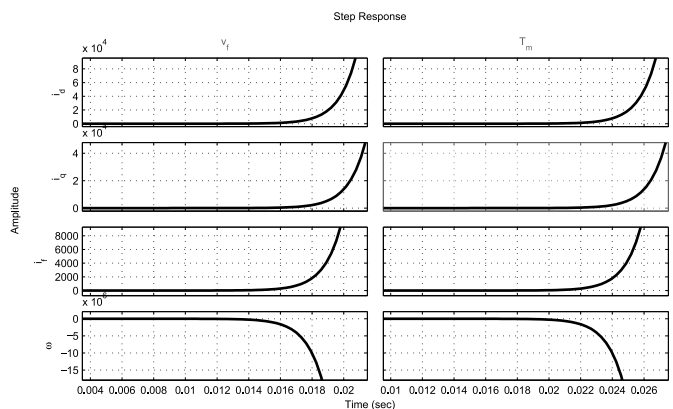


Figura 4.3: Respuesta de la máquina síncrona transformada en lazo abierto

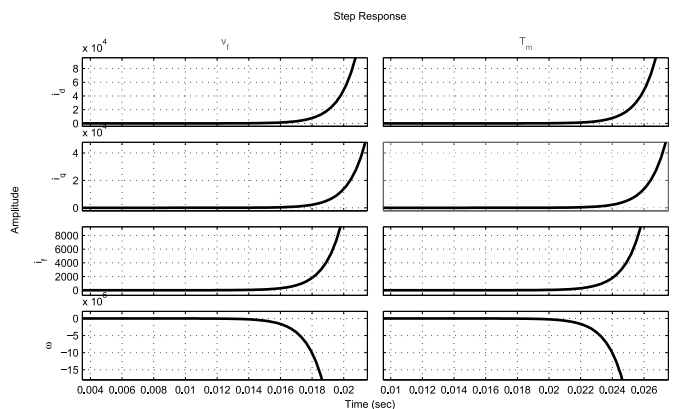


Figura 4.4: Respuesta de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de la máquina síncrona transformada en lazo abierto con una entrada escalón unitario en cada entrada

La siguiente figura muestra la respuesta de la ecuación diofantina a un escalón unitario con la cual se observa que se resuelve correctamente la ecuación, obteniéndose la identidad como resultado,

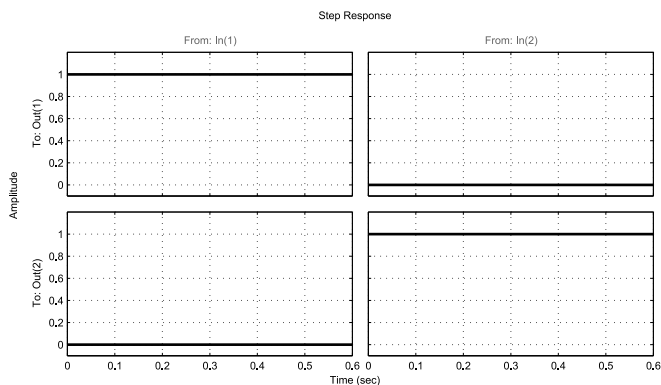


Figura 4.5: Respuesta de la ecuación diofantina de la máquina síncrona transformada a un escalón unitario en cada una de sus entradas

Y en las Figuras 4.6 y 4.7 se muestran las simulaciones (utilizando como entradas el par mecánico y el voltaje del inductor) hechas en Matlab-Simulink de los estados del sistema en configuración de uno y dos parámetros a la salida de la planta transformada (con la transformación (4.2.9) propuesta en este trabajo) donde $x_1 = i_d$, $x_2 = i_q$, $x_3 = i_f$, $x_4 = \omega$, siendo las referencias los valores en el cual fue linealizada la planta,

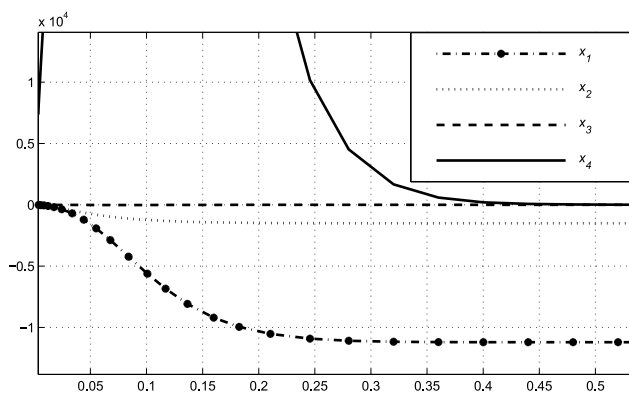


Figura 4.6: Máquina síncrona con controlador en configuración de un parámetro

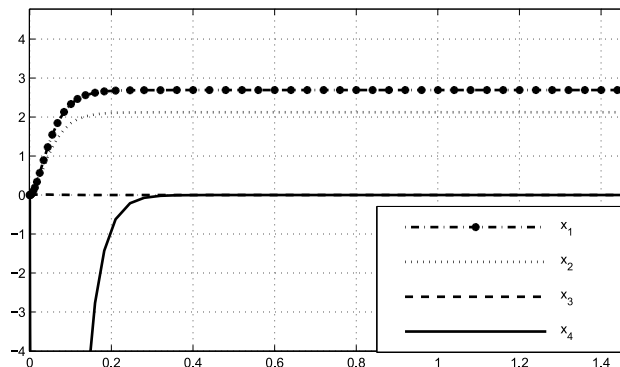


Figura 4.7: Máquina síncrona con controlador en configuración de dos parámetros

En estas figuras es importante notar que el controlador estabiliza la planta, sin embargo los estados x_3 y x_4 siempre convergen a cero, siendo éste el motivo por lo cual se tienen grandes errores en la regulación de la salida, este comportamiento en lazo cerrado es asignado por el controlador teniendo origen en la forma de las factorizaciones de la planta, esta característica se puede ver en las funciones de sensibilidad (3.3.10) y (3.3.11), analizadas en estado estacionario donde, en este caso particular,

$$N(s) = \frac{1}{s^2 + 70s + 1225} \begin{bmatrix} 0 & -0.707 \\ 5081 & 0.707 \\ s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

que implica,

$$N(0) = \frac{1}{1225} \begin{bmatrix} 0 & -0.707 \\ 5081 & 0.707 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

esto muestra la asignación de esta dinámica al sistema en lazo cerrado. Además, la forma de la matriz produce un mal condicionamiento y, aún cuando se haga un análisis en estado estacionario para

agregar una matriz de compensación constante y tratar de corregir el error en estado estacionario, esto no será posible. Además, la matriz de transformación para llevar el sistema a la forma deseada, no permite linealizar la planta en todo su rango de operación debido a la inversa de la transformación propuesta (4.2.9) para este caso en particular.

Se logra estabilidad en el sistema en lazo cerrado para el sistema transformado, además de que el controlador de un parámetro (Figura 4.6) tiene un mayor sobrepaso que el de dos parámetros (Figura 4.7).

Como se observó, si el sistema no cumple con la forma propuesta (2.3.2), es difícil llevarlo a la forma, además, debido a la forma de la matriz A , se presentan problemas de regulación; el que tenga menos sobrepaso la configuración de controlador de dos parámetros es debido a que se tienen dos parámetros libres, con lo cual se simplifica la solución de problemas de regulación, que en este caso no fue posible.

4.3. Sistema de amortiguamiento de medio carro

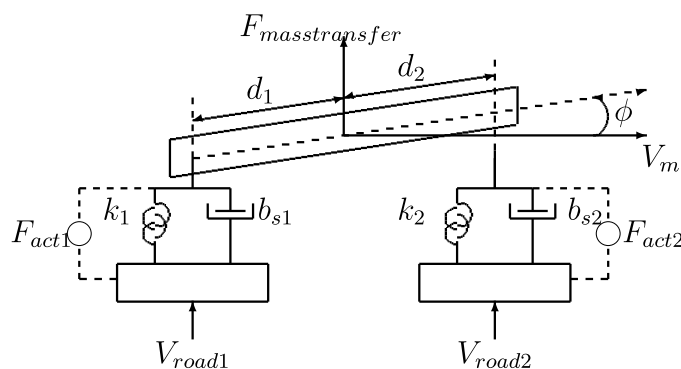


Figura 4.8: Sistema de amortiguamiento de medio carro

El modelo linealizado del sistema de amortiguamiento de medio carro está representado por [1],

[17],

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} u(t) + Hd(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

donde,

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & \frac{1}{J}d_1 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{J}d_2 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -d_1k_1 & -d_2k_2 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{(b_{s2}+b_{s1})}{m} & -\frac{(d_2b_{s2}-d_1b_{s1})}{J} \\ -\frac{(d_2b_{s2}-d_1b_{s1})}{m} & -\frac{(d_1^2b_{s1}+d_2^2b_{s2})}{J} \end{bmatrix} \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_{s1} & 1 & b_{s2} \\ -d_1b_{s1} & 0 & d_2b_{s2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

siendo m y J la masa y el momento de inercia del cuerpo del vehículo, respectivamente; d_2 y d_1 las distancias entre las suspensión delantera y trasera al centro de masas del vehículo (CM), respectivamente; k_1 y k_2 los coeficientes de elasticidad de la suspensión delantera y trasera, respectivamente; y b_{s2} y b_{s1} los coeficientes de amortiguamiento de la suspensión delantera y trasera, respectivamente. En el modelo (4.3.1),

$$u(t) : = \begin{bmatrix} F_{act1} & F_{act2} \end{bmatrix}^T \quad (4.3.3)$$

$$d(t) : = \begin{bmatrix} V_{road1}(t) & F_{masstransfer}(t) & V_{road2}(t) \end{bmatrix}^T \quad (4.3.4)$$

donde $F_{masstransfer}(t)$ y $V_{roadi}(t)$, $i = 1, 2$, son entradas de perturbaciones externas medibles y no medibles y,

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_{rel1}(t) & x_{rel2}(t) & J\omega_j(t) & mV_m(t) \end{bmatrix}^T \quad (4.3.5)$$

siendo $x_{rel1}(t)$ y $x_{rel2}(t)$ las posiciones relativas de la suspensión delantera y trasera, respectivamente; y $V_m(t)$ y $\omega_j(t)$ la velocidad vertical y angular del cuerpo del vehículo en el CM. Observar que el modelo del sistema de amortiguamiento (4.3.1) está en la forma (2.3.2) y los bloques A_{12} , C_{11} y B_m

son matrices no singulares, y considerar los valores medios de los parámetros de la planta dados en la Tabla 1.

Parámetro	Valor	Unidad
m	1794.4	kg
J	3443.05	kg m ²
d_2	1.271	m
d_1	1.716	m
k_2	66824.4	N/m
k_1	18615	N/m
b_{s2}	1190	N s/m
b_{s1}	1000	N s/m

Los polos de la planta nominal $P(s)$ están ubicados en $-0.22 \pm 4.26i$ y $-1.08 \pm 3.67i$, por lo tanto son estables por lo que $P(s)$ satisface la propiedad de entrelazamiento par y así la planta es fuertemente estabilizable, la planta es controlable y observable entonces es una representación mínima. Consideramos los parámetros de control $a = 5$ y $\omega_h = 100 \text{ rad/s}$, para la configuración de controlador de un parámetro, y $a = 2$ y $\omega_h = 100 \text{ rad/s}$, para la configuración de controlador de dos parámetros, con los resultados obtenidos en el capítulo 2, se obtienen las factorizaciones coprime izquierda y derecha de la planta que son mostradas a continuación.

Las factorizaciones coprimas izquierda y derecha para la planta en la configuración de un parámetro de la Figura 2.4 son,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} -763.5s^2 - 1000s - 18615 & -1031s^2 - 1190s - 66820 \\ 1153s^2 + 1716s + 31940 & -1153s^2 - 1512s + 84930 \end{bmatrix} \quad (4.3.6) \\ \tilde{N}(s) &= \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1.716 & -1.271 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$N(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} -0.0005573 & 0.0004984 \\ -0.0005573 & -0.0003691 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

$$D(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} -0.425s^2 - 0.557s - 42.07 & 0.334s^2 + 0.498s - 11.72 \\ -0.574s^2 - 0.663s - 5.548 & -0.334s^2 - 0.439s - 3.675 \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuaciones diofantinas izquierda y derecha para la configuración de un parámetro queda,

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s + 5} \begin{bmatrix} 17.78s + 527.8 & 30.09s + 203.5 \\ -28.35s + 5.055 & -15.43s + 8.411 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s + 5} \begin{bmatrix} -0.0005573s - 0,007623 & 0.0004984s + 0.006738 \\ -0.0005573s - 0.007721 & -0.0003691s - 0.005048 \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s + 5} \begin{bmatrix} -24970s + 159200 & 5997s + 786900 \\ 31310s - 287800 & -150700s - 1290000 \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s + 5} \begin{bmatrix} -s - 13.68 & -s - 13.85 \\ 1.716s + 23.200 & -1.271s - 17.380 \end{bmatrix}$$

Además, las factorizaciones izquierda y derecha para la planta en la configuración de dos parámetros de la Figura 2.3 son,

$$\tilde{D}(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \begin{bmatrix} -763.5s^2 - 1000s - 18615 & -1031s^2 - 1190s - 66820 \\ 1153s^2 + 1716s + 31940 & -1153s^2 - 1512s + 84930 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1.716 & -1.271 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

$$N(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \begin{bmatrix} -0.0005573 & 0.0004984 \\ -0.0005573 & -0.0003691 \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

$$D(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \begin{bmatrix} -0.4255s^2 - 0.5573s - 42.07 & 0.3348s^2 + 0.4984s - 11.72 \\ -0.5745s^2 - 0.6632s - 5.548 & -0.3348s^2 - 0.4393s - 3.675 \end{bmatrix}$$

y las respuestas de la planta y las factorizaciones coprimas izquierda y derecha en configuración de controlador de uno y dos parámetros a un escalón unitario mostradas en la Figura 4.9,

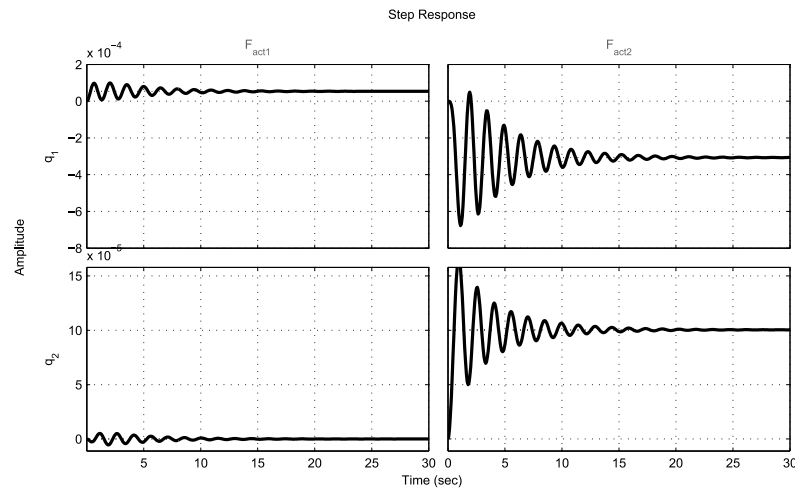


Figura 4.9: Respuesta de la planta y factorizaciones coprimas del sistema de amortiguamiento en lazo abierto con un escalón unitario en cada una de sus entradas

Las soluciones de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha para dos parámetros queda,

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 39.57s + 199 & 13.48s + 58.9 \\ 1.874s + 22.34 & 1.712s + 14.5 \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} -0.0005573s - 0.002607 & 0.0004984s + 0.002253 \\ -0.0005573s - 0.002705 & -0.0003691s - 0.001726 \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 14130s + 80970 & 60230s + 306100 \\ -25870s - 135200 & -91690s - 391200 \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} -s - 4.678 & -s - 4.855 \\ 1.716s + 7.757 & -1.271s - 5.943 \end{bmatrix}$$

y las respuestas de las ecuaciones diofantinas a un escalón unitario mostradas en la Figura 4.10 obteniéndose la identidad mostrando que las ecuaciones son resueltas correctamente y que las factorizaciones son coprimas.

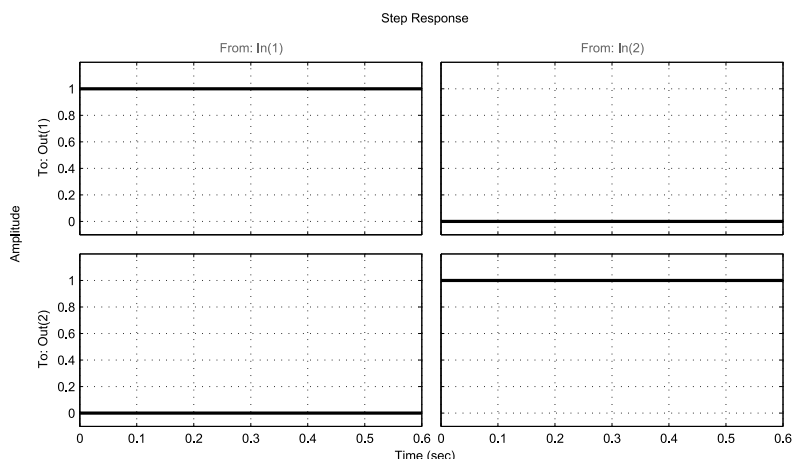


Figura 4.10: Respuesta de las ecuaciones diofantinas en el sistema de amortiguamiento de medio carro a un escalón unitario donde se obtiene la identidad, lo cual indica que se resuelve correctamente la ecuación

Como se observa los valores de $N(s)$ y $\tilde{Y}(s)$ son muy cercanos a cero y se debe al valor de A_{12} , sin embargo se tiene una buena representación de la planta con las factorizaciones y se resuelve la ecuación diofantina, este problema puede ser evitado ponderando la planta como:

$$\bar{P} = \rho N(s) D^{-1}(s) \quad (4.3.14)$$

$$\rho N(s) = f(s) A_{12}(\rho C_{11})$$

Se observa que el problema se puede resolver ponderando sólo la matriz de salida del sistema para este caso en particular, se diseña el controlador para la planta ponderada, y el controlador para la planta original en configuración de un parámetro es $\rho K(s)$ y para la configuración de dos parámetros $\rho \begin{bmatrix} K(s) & K_r(s) \end{bmatrix}$, donde $\rho \in \mathcal{R}$. De esta manera se resuelve el problema de valores cercanos a cero en $N(s)$ y $\tilde{Y}(s)$ y se obtienen los mismos resultados de desempeño que sin la ponderación, sin embargo podrían evitarse problemas numéricos.

Utilizando la parametrización de Youla podemos encontrar la familia de controladores estabilizantes de la planta y con el criterio de sensibilidad mezclada presentado en el Capítulo 3, fijar los

parámetros libres para cada configuración de controladores. Dados los resultados en el Capítulo 3, tenemos que el parámetro R se fija para la configuración de controladores de un parámetro como:

$$R = \begin{bmatrix} 68.79 & 0.29 \\ 0.56 & 67.82 \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

Mientras que los parámetros $R(s)$ y $Q(s)$ para la configuración del controlador de dos parámetros son,

$$R = \begin{bmatrix} 9.55 & 0.11 \\ 0.22 & 9.17 \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -3052.90 & -4121.80 \\ 4608.90 & -4608.90 \end{bmatrix}$$

El controlador de un parámetro está dado por:

$$\tilde{D}_k(s) = \frac{1}{s^4 + 37.37s^3 + 349.2s^2 + 3.868s + 0.01072} \quad (4.3.17)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4255s^4 - 12.2s^3 - 90.15s^2 - 199.1s - 1.101 \\ -0.5745s^4 - 16.38s^3 - 120.8s^2 - 266.6s - 1.487 \\ 0.3348s^4 + 9.66s^3 + 71.53s^2 + 158.2s + 0.8664 \\ -0.3348s^4 - 9.601s^3 - 70.94s^2 - 156.7s - 0.8664 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N}_k(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25}$$

$$\begin{bmatrix} -7.716 \times 10^4 s^2 - 3.397 \times 10^4 s - 4.753 \times 10^5 \\ 1.091 \times 10^5 s^2 - 1.544 \times 10^4 s + 7.171 \times 10^5 \\ -6.526 \times 10^4 s^2 + 7.346 \times 10^5 s - 6.374 \times 10^5 \\ -2.295 \times 10^5 s^2 - 2.147 \times 10^6 s - 7.2925 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

El controlador de dos parámetros resultante es,

$$\tilde{D}_k(s) = \frac{1}{s^4 + 13.37s^3 + 44.65s^2 + 0.01832s + 1.878 \times 10^{-6}} \quad (4.3.18)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4255s^4 - 4.543s^3 - 13.06s^2 - 11.36s - 0.002333 \\ -0.5745s^4 - 6.044s^3 - 17.28s^2 - 14.99s - 0.003149 \\ 0.3348s^4 + 3.634s^3 + 10.52s^2 + 9.181s + 0.001835 \\ -0.3348s^4 - 3.575s^3 - 10.28s^2 - 8.945s - 0.001835 \end{bmatrix}$$

$$N_k(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$$

$$\begin{bmatrix} 6969s^2 + 9.988 \times 10^4 s - 1.219 \times 10^4 \\ -1.547 \times 10^4 s^2 - 1.714 \times 10^5 s + 1.84 \times 10^4 \\ 5.024 \times 10^4 s^2 + 4.15 \times 10^5 s - 1.64 \times 10^4 \\ -1.025 \times 10^5 s^2 - 5.887 \times 10^5 s - 1.856 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} -3052.9 & -4121.8 \\ 4608.9 & -4608.9 \end{bmatrix}$$

De la simulación en Matlab-Simulink con,

$$d(t) = \begin{bmatrix} 0.1 \sin(300t) & 1 & 0.1 \sin(300t) \end{bmatrix}$$

donde la señal de perturbación es seleccionada con los mismos valores que en [1] para poder hacer una comparación de los resultados, al igual que la referencia,

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1.25 \end{bmatrix}^T$$

se obtienen las Figuras 4.11 y 4.12 correspondientes a la salida de la planta y la ley de control, respectivamente, para la configuración de un parámetro.

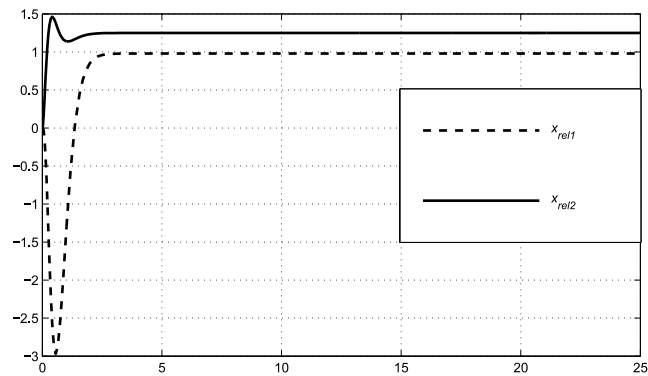


Figura 4.11: Salidas del sistema de amortiguamiento con controlador de un parámetro

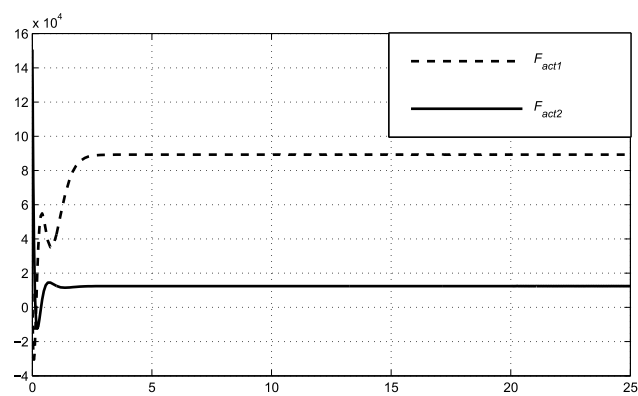


Figura 4.12: Ley de control del sistema de amortiguamiento con controlador de un parámetro

Las Figuras 4.13 y 4.14 muestran la salida de la planta y la ley de control, respectivamente, para la configuración de dos parámetros,

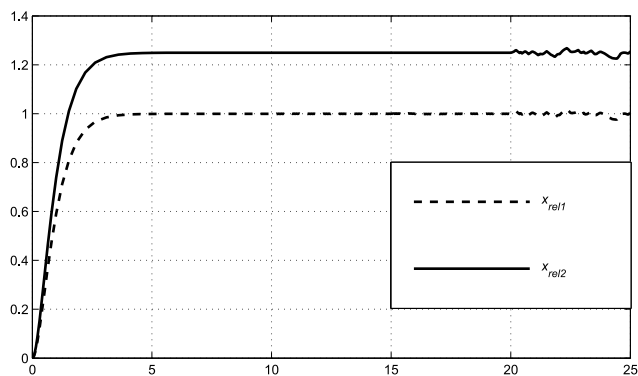


Figura 4.13: Salidas del sistema de amortiguamiento con controlador de dos parámetros

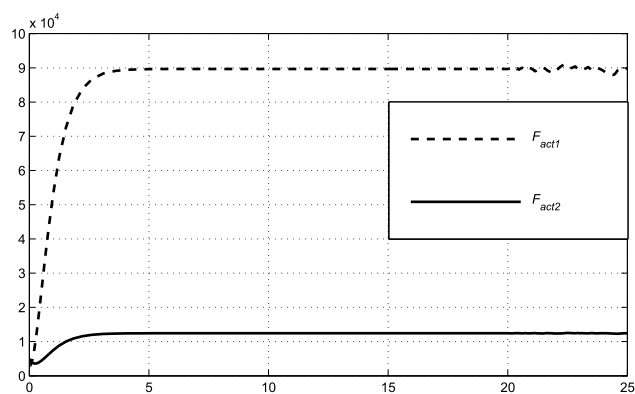


Figura 4.14: Ley de control del sistema de amortiguamiento con controlador de dos parámetros

En las Figuras 4.11 y 4.13 se observa que se tiene mejor desempeño en la configuración de dos parámetros con respecto a la de un parámetro en la cual se presenta un sobrepaso negativo, además, en ambas configuraciones las perturbaciones son atenuadas. Los resultados de [1] con información completa del estado son,

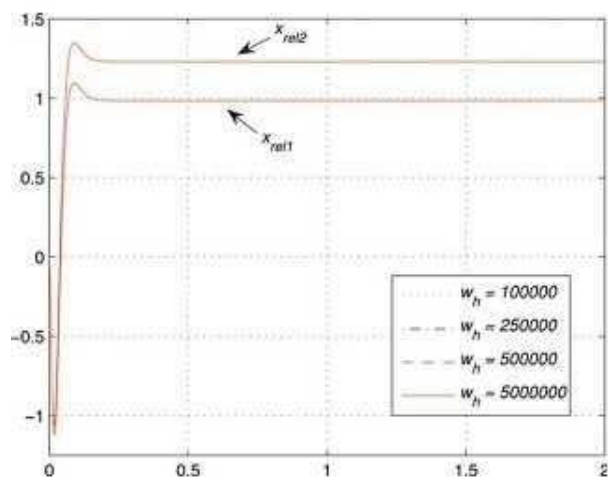


Figura 4.15: Posiciones relativas en configuración de un parámetro de [1]

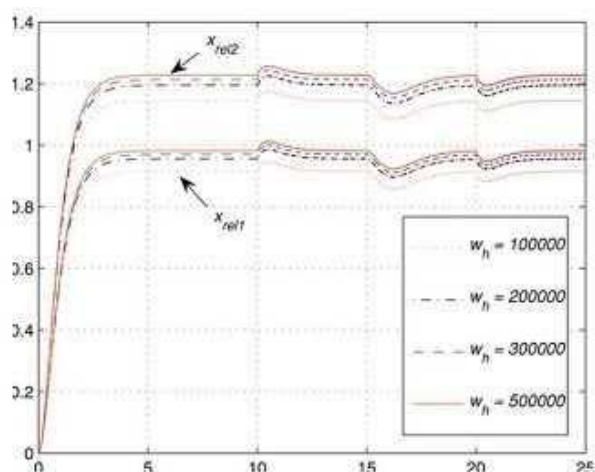


Figura 4.16: Posiciones relativas en configuración de dos parámetros de [1]

donde, en la configuración de un parámetro se tiene un sobrepaso negativo, sin embargo, en la configuración de un parámetro la atenuación es considerablemente mayor con los resultados de este trabajo y la ley de control de ambos trabajos son de magnitudes similares, teniendo un pico en la configuración de un parámetro.

Seleccionando $a = 10$ (parámetro introducido a partir de las factorizaciones coprimas, que es la asignación de los polos en lazo cerrado), la Figura 4.17, muestra que conforme ω_h se incrementa las normas infinito de las funciones de sensibilidad son reducidas; sin embargo, si $\omega_h < a$ entonces $\|S_{ol}\|_\infty$ y $\|T_{oh}\|_\infty$ incrementan su valor con lo cual se pierde el objetivo de la minimización de estas normas, sin embargo, se espera que $\omega_h \gg a$ dado que se interpreta como una frecuencia en la banda de altas frecuencias.

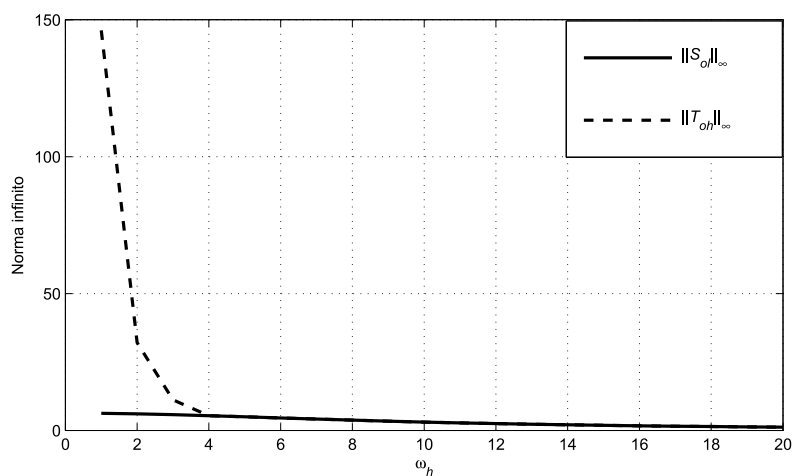


Figura 4.17: Normas infinito de las funciones de sensibilidad

Las gráficas de los valores singulares máximos de las funciones de sensibilidad $\bar{\sigma}(S_o(s))$ y $\bar{\sigma}(T_o(s))$ con respecto a la frecuencia de las Figuras 4.18 y 4.19 muestran que si ω_h toma valores grandes se puede corregir el valor en estado estacionario, ya que se tiene una atenuación mayor de las perturbaciones de bajas frecuencias a la salida del sistema y las frecuencias de corte de las funciones de sensibilidad no se mueven.

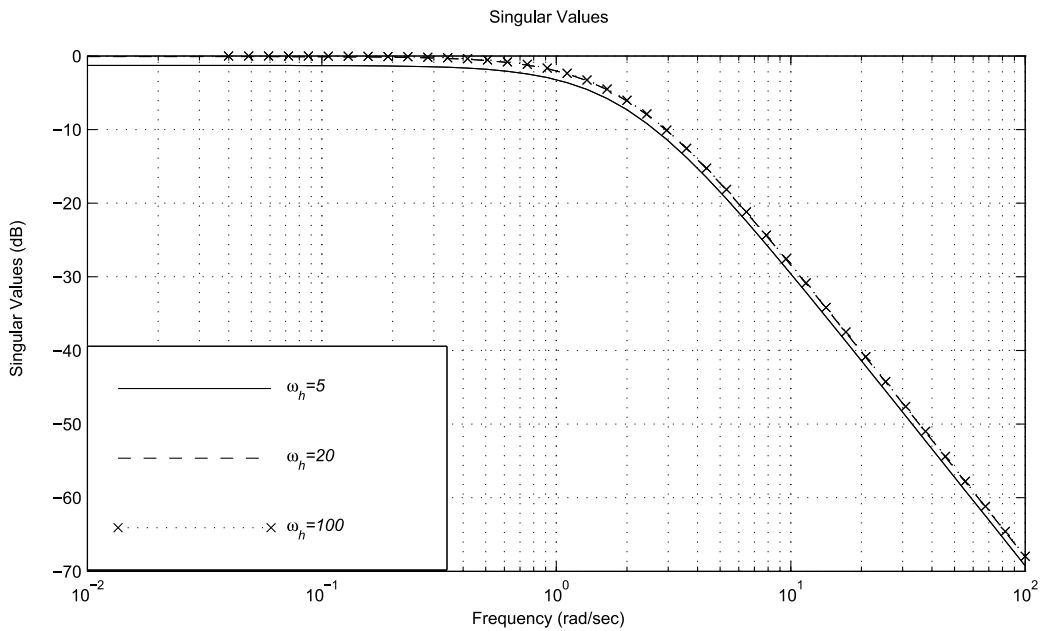


Figura 4.18: Valores singulares de $T_o(s)$ al variar ω_h y $a = 2$

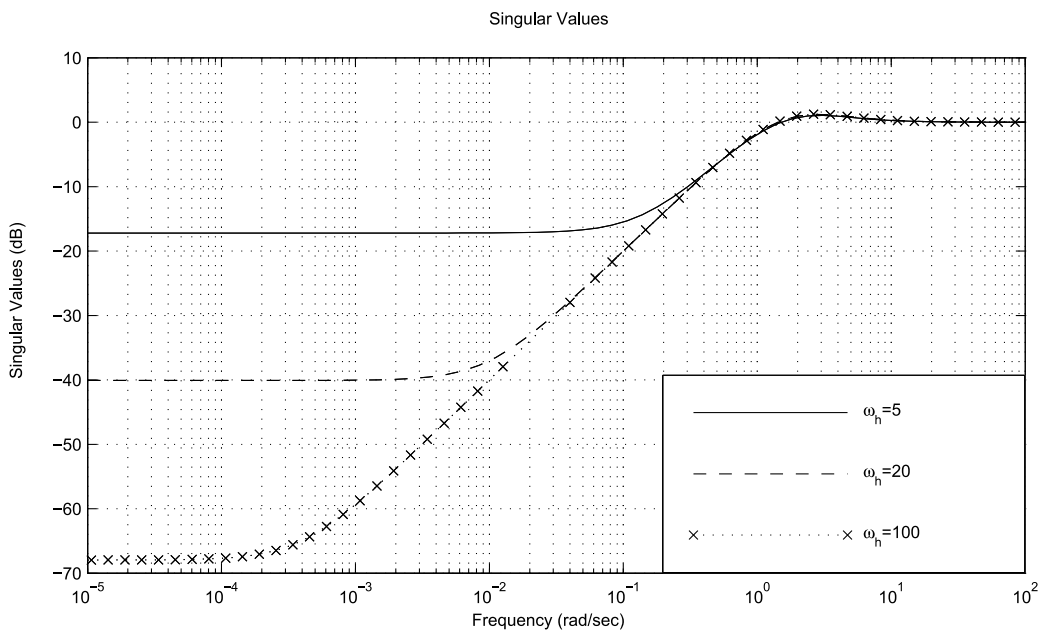


Figura 4.19: Valores singulares de $S_o(s)$ al variar ω_h y $a = 2$

De igual manera, las Figuras 4.21 y 4.20 muestran que conforme a toma valores grandes la atenuación de las perturbaciones de bajas frecuencias a la salida se deteriora (se debe a la proximidad de a con ω_h), sin embargo se incrementa el ancho de banda para la referencia. Esto se ve reflejado también en la magnitud de la entrada de la planta donde se incrementa la energía en el transitorio, obteniendo respuestas más rápidas.

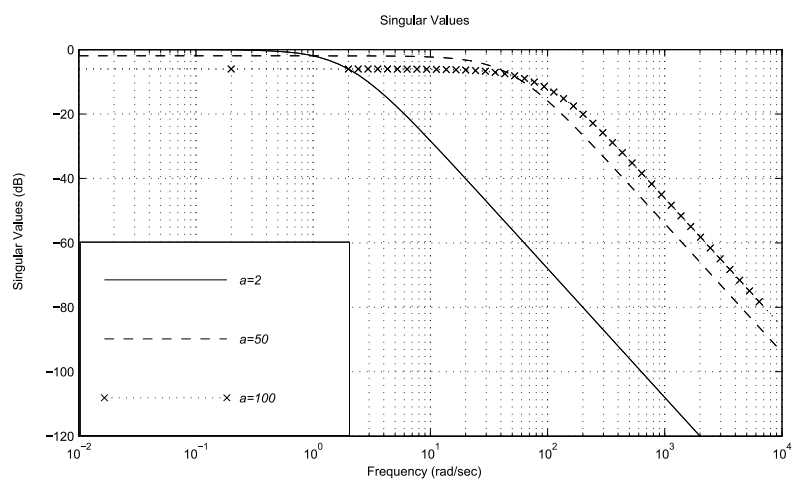


Figura 4.20: Valores singulares de $T_o(s)$ al variar a y $\omega_h = 100$

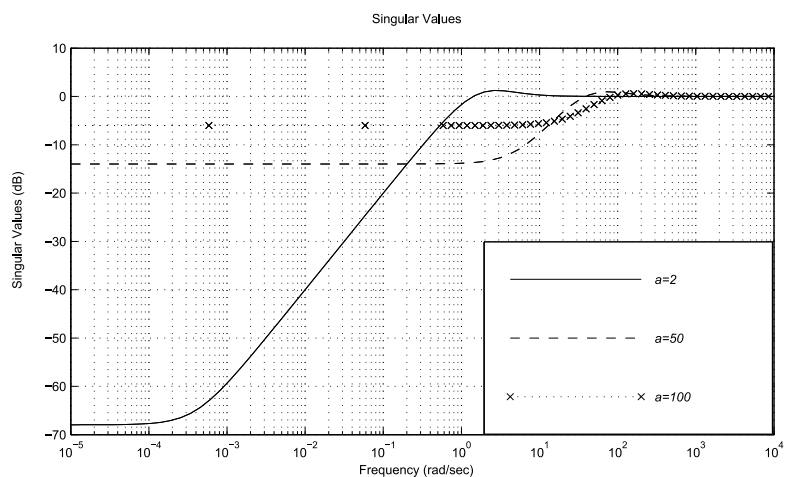


Figura 4.21: Valores singulares de $S_o(s)$ al variar a y $\omega_h = 100$

4.4. Robot planar rotacional

Considere el robot planar rotacional de dos grados de libertad mostrado en la Figura 4.22, donde $m_i, i = 1, 2$ las masas de los brazos, l_1 la longitud del brazo uno, $l_{ci}, i = 1, 2$ la distancia al centro de masas del brazo i , $I_i, i = 1, 2$ el momento de inercia de cada brazo y g la aceleración gravitacional [14].

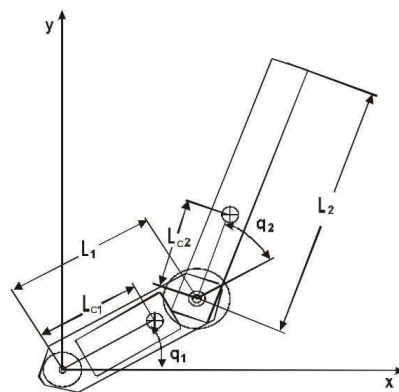


Figura 4.22: Descripción coordenada de robot planar con dos grados de libertad [?]

Las matrices de inercia $M(q(t))$, de Coriolis $C(q(t), \dot{q}(t))$ y de gravedad $G(q(t))$ de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para este robot son [14],

$$M(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 (\cos q_2(t)) & \theta_2 + \theta_3 (\cos q_2(t)) \\ \theta_2 + \theta_3 (\cos q_2(t)) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$C(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} -\theta_3 (\sin q_2(t)) \dot{q}_2(t) & -\theta_3 (\sin q_2(t)) (\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) \\ \theta_3 (\sin q_2(t)) \dot{q}_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

$$G(q(t)) = \begin{bmatrix} g\theta_4 \cos q_1(t) + g\theta_5 (\cos q_1(t) + \cos q_2(t)) \\ g\theta_5 (\cos q_1(t) + \cos q_2(t)) \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

donde $q_i, i = 1, 2$ son las uniones de las posiciones angulares, y,

$$\begin{aligned}
 \theta_1 & : = m_1 l_{cd}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\
 \theta_2 & : = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\
 \theta_3 & : = m_2 l_1 l_{c2} \\
 \theta_4 & : = m_1 l_{cd} + m_2 l_1 \\
 \theta_5 & : = m_2 l_{c2}
 \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Las ecuaciones dinámicas en espacio de estados están dadas por,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) & = f(x(t), u(t)) \\
 y(t) & = h(x(t), u(t)) \\
 f(x(t), u(t)) & : = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ M(x_1(t))^{-1} [u(t) - C_o(x_1(t), x_2(t)) x_2(t)] - G(x_1(t)) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

y los puntos de equilibrio están dados por,

$$\begin{aligned}
 u_{1e} & = \theta_4 g \cos(q_{1e}) + \theta_5 g \cos(q_{1e} + q_{2e}) \\
 u_{2e} & = \theta_5 g \cos(q_{1e} + q_{2e})
 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

donde $q_{ie}, u_{ie} \in \mathcal{R} \ i = 1, 2$ son los valores de los puntos y torques de equilibrio, respectivamente, la posición de equilibrio superior está dada por $q_{1e} = \pi/2, q_{2e} = 0, u_{ie} = 0, i = 1, 2$, la cual es inestable e importante para la prueba de estabilización. Los valores de los parámetros son [14] $l_1 = 0.450m, l_{cd} = 0.091m, l_{c2} = 0.048m, m_1 = 23.902kg, m_2 = 3.88kg, I_1 = 1.266kgm^2, I_2 = 0.093kgm^2$ y $g = 9.81m/s^2$.

Las matrices A y B en el modelo linealizado alrededor de la posición de equilibrio superior están

dadas por la forma general descrita en (2.3.2), donde, $A_{12} = I_m, A_{22} = 0$, y,

$$\begin{aligned} A_{21} &= \begin{bmatrix} 16.950 & -0.688 \\ -12.963 & 19.177 \end{bmatrix} \\ B_m &= \begin{bmatrix} 0.458 & -0.835 \\ -0.835 & 11.332 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

son matrices no singulares. La planta $P(s)$ tiene cuatro polos y cuatro ceros de transmisión y se encuentran en $-4.6101, -3.8568, 4.6101$ y 3.8568 , por lo que la planta es inestable y cumple la propiedad de entrelazamiento par, la planta es controlable y observable por lo que es una realización mínima.

Sea el parámetro $a = 10$ y $\omega_h = 100 \text{ rad/s}$ para las configuraciones de uno y dos parámetros, las factorizaciones coprimas izquierda y derecha quedan,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \frac{1}{s^2 + 20s + 100} \begin{bmatrix} s^2 - 16.95 & 0.6888 \\ 12.96 & s^2 - 19.18 \end{bmatrix} \\ \tilde{N}(s) &= \frac{1}{s^2 + 20s + 100} \begin{bmatrix} 0.4586 & -0.8356 \\ -0.8356 & 11.33 \end{bmatrix} \\ N(s) &= \frac{1}{s^2 + 20s + 100} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D(s) &= \frac{1}{s^2 + 20s + 100} \begin{bmatrix} 2.519s^2 - 40.29 & 0.1857s^2 - 1.827 \\ 0.1857s^2 - 1.827 & 0.1019s^2 - 1.827 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Las respuestas de la planta y las factorizaciones coprimas a un escalón unitario, se muestra en la Figura 4.23, observándose que el sistema es inestable en el punto de operación linealizado lo cual lo hace de interés para la aplicación del controladores estabilizantes.

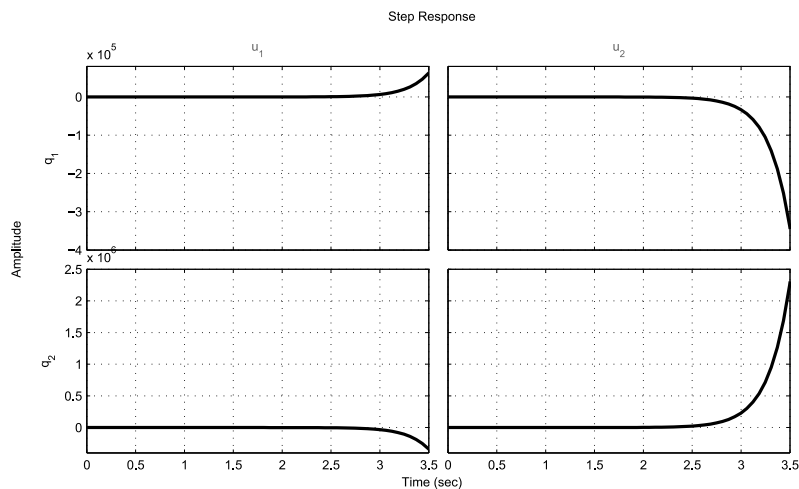


Figura 4.23: Respuesta de la planta y las factorizaciones coprimas del robot planar en lazo abierto con un escalón unitario en cada entrada

Y las soluciones de las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha para las configuraciones de uno y dos parámetros quedan,

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s+10} \begin{bmatrix} 796s + 3728 & 57.55s + 240.6 \\ 57.55s + 240.6 & 32.41s + 156.7 \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s+10} \begin{bmatrix} s+30 & 0 \\ 0 & s+30 \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+10} \begin{bmatrix} 317s + 1509 & -0.6888s - 20.66 \\ -12.96s - 388.9 & 319.2s + 1575 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+10} \begin{bmatrix} 0.4586s + 13.76 & -0.8356s - 25.07 \\ -0.8356s - 25.07 & 11.33s + 340 \end{bmatrix}$$

Las respuestas de las ecuaciones diofantinas con sus soluciones a un escalón unitario obteniendo una identidad mostrando que se satisface la ecuación, en la Figura 4.24, con lo cual se comprueba que las factorizaciones son coprimas.

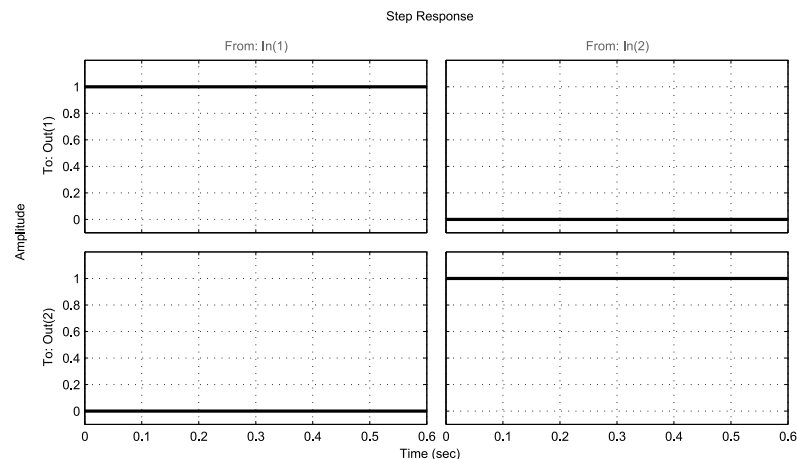


Figura 4.24: Respuesta de las ecuaciones diofantinas del robot planar a un escalón unitario

Se propone para obtener controladores estables, los parámetros libres $R(s)$ y $Q(s)$, resolviendo el problema de control de regulación y de sensibilidad mezclada del capítulo 2 para una entrada de referencia constante para los controladores de uno y dos parámetros dados por la ecuación (2.5.1) con perturbaciones [1] $d_0 = 0.5 \sin(1)$ siendo de baja frecuencia aplicada en q_1 y q_2 y $d_m = 0.5 \sin(1000)$ es de alta frecuencia que podría ser introducido por el sistema de medición (ver Figuras 2.3 y 2.4) y $y_d = [\pi/2 \ 0]^T$, para estos objetivos de control los parámetros libres fueron fijados con los resultados del capítulo 3 como,

$$R(s) = \begin{bmatrix} 299.4145 & 0 \\ 0 & 299.4145 \end{bmatrix}$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 99.9722 & 0 \\ 0 & 99.9722 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 4.25 y 4.26 es visible el mejor desempeño del controlador de dos parámetros Figura 4.26 con respecto al de un parámetro Figura 4.25, ya que el de un parámetro presenta un sobrepaso en el control del eslabón uno, además se logra la atenuación de las perturbaciones como se esperaba.

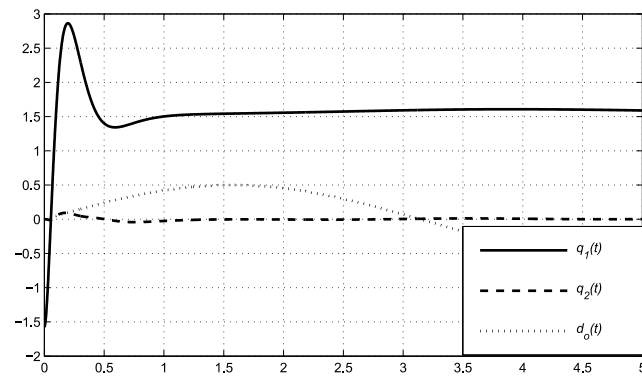


Figura 4.25: Respuesta de robot planar en configuración de un parámetro

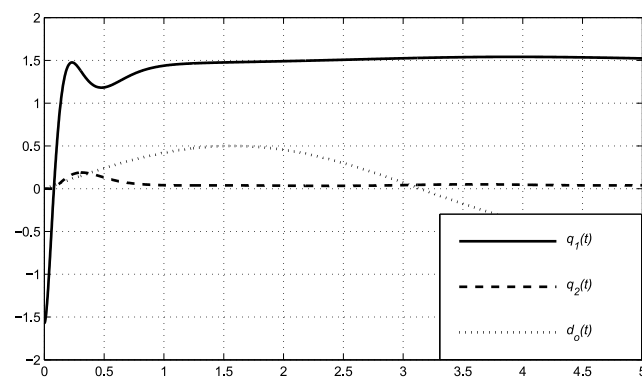


Figura 4.26: Respuesta de robot planar en configuración de dos parámetros

Las Figuras 4.27 y 4.28 muestran las leyes de control de las configuraciones de uno y dos parámetros,

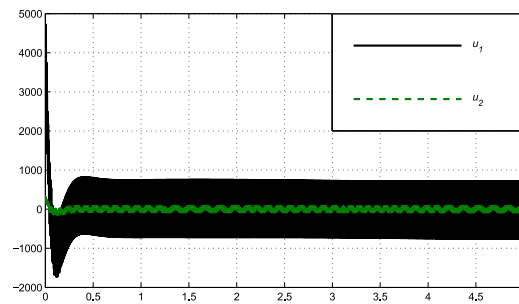


Figura 4.27: Ley de control del robot planar en configuración de un parámetro

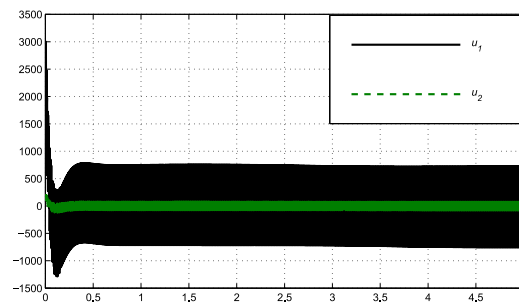


Figura 4.28: Ley de control del robot planar en configuración de dos parámetros

Como se puede observar la magnitud de las leyes de control son grandes y existe un rizado el cual es debido a las perturbaciones, sin embargo se ve una buena atenuación de ellas a la salida de la planta, los resultados son comparables con los obtenidos en [3] y [11] pero con la ventaja que no se necesita información completa del estado.

4.5. Conclusiones

En este capítulo se trató de ilustrar la facilidad con que pueden ser obtenidas las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de la planta, así como las soluciones de las ecuaciones diofantinas y

la parametrización de la familia de controladores estabilizantes para los sistemas con las características de la ecuación (2.3.2); y la sintonización del controlador estabilizante estable con las fórmulas propuestas para los parámetros libres de los controladores en configuración de uno y dos parámetros. Los resultados de este trabajo presentan leyes de control similares que las de [1]; sin embargo no se requiere información completa del estado.

Además se mostraron en la aplicación de la máquina síncrona las dificultades de la implementación a sistemas con una realización en espacio de estados diferente, tanto para llevarlo a la forma requerida en este trabajo por lo que para este ejemplo se aplicaron los resultados de [11], así como los problemas de regulación que provienen de la forma requerida de la matriz A .

En la aplicación del sistema de amortiguamiento de medio carro y del Robot planar rotacional de dos grados de libertad los resultados son satisfactorios obteniéndose una buena atenuación de las perturbaciones y un error en estado estacionario muy pequeño que puede ser corregido incrementando el valor de ω_h . Siendo las leyes de control similares en amplitud que en el de [1].

Capítulo 5

Conclusiones

Los controladores que son parametrizados a partir de la característica que presentan los modelos Euler-Lagrange linealizados pueden presentar ciertas dificultades al aplicarlos a otro tipo de sistemas como lo es el encontrar una transformación que pueda llevarlos a la forma requerida, los problemas de regulación que se presentan por la forma de $N(s)$ de la factorización coprima, sin embargo este tipo de controladores tiene un buen desempeño como era de esperarse en los sistemas que son Euler-Lagrange. Los controladores propuestos no requieren información completa del estado como en [1] y sólo se ocupan las posiciones del sistema a controlar.

Conforme se incrementa el parámetro a se deteriora la atenuación de las perturbaciones de bajas frecuencias, sin embargo el ancho de banda se incrementa, por otro lado al incrementar el parámetro ω_h se mejora la atenuación de perturbaciones de bajas frecuencias a la salida y no se modifica el ancho de banda.

Los controladores propuestos tienen leyes de control similares a las de [1], sin embargo no se requiere información completa del estado, ni la transformación propuesta en [1] para resolver problemas de pertenencias a \mathcal{RH}_∞ reduciéndose el esfuerzo computacional.

5.1. Contribuciones

Se consideraron sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), cuadrados, estrictamente propios, de parámetros concentrados y lineales invariantes en el tiempo con una realización estabilizable y detectable, la dimensión del estado n es par, la dimensión de la entrada m es la mitad del estado, $n = 2m$, y la planta es fuertemente estabilizable. Particularmente sistemas E-L completamente actuados.

En este trabajo se diseñaron controladores robustos \mathcal{H}_∞ que preservan la estabilidad y el desempeño de la planta considerando perturbaciones acotadas de altas altas frecuencias introducidas por el sistema de medición y bajas frecuencias en la salida del sistema. Se dan fórmulas explícitas de las factorizaciones coprimas izquierda y derecha de una planta con las características de un modelo Euler-Lagrange linealizado en espacio de estados teniendo disponibles sólo las posiciones obteniéndose una buena representación de la planta a partir de las factorizaciones, además que cada término de la factorización pertenece al conjunto \mathcal{RH}_∞ . Una vez obtenidas las factorizaciones se resuelven las ecuaciones diofantinas izquierda y derecha, asegurando así la coprimicidad de ambas y dando expresiones analíticas de ellas.

Una vez obtenidas las factorizaciones de la planta, así como las soluciones de las ecuaciones diofantinas se puede parametrizar la familia de controladores estabilizantes, y obtener fórmulas analíticas de la parametrización de controladores estabilizantes de la planta a partir de sus factorizaciones y de las soluciones de las ecuaciones diofantinas.

Ya parametrizada la familia de controladores que estabilizan las planta se busca fijar los parámetros libres resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, procurando mantener estabilidad ante incertidumbres de alta frecuencia en la medición y desempeño ante perturbaciones de baja frecuencia a la salida.

Se aplicó a la máquina síncrona un desarrollo similar con información completa del estado para

ilustrar las dificultades que se tienen al utilizar este tipo de controladores que son parametrizados a partir de esa estructura en el espacio de estados, la dificultad de llevar el sistema a la forma propuesta, el problema de no poder linealizar el sistema en todos los puntos de operación dado que la transformación no lo permite, la dificultad para poder regular las salidas, teniendo así grandes errores en estado estacionario, sin embargo si se puede estabilizar la planta.

Los resultados de esta tesis se aplicaron en el sistema de amortiguamiento de medio carro, en donde se observó que se mantiene la estabilidad del sistema ante las perturbaciones, así como un buen desempeño, teniendo errores pequeños en estado estacionario, como se puede observar en los modelos Euler-Lagrange, el término A_1^2 es una identidad de tamaño m , sin embargo en el desarrollo de este trabajo el termino puede ser diferente, pero no singular, la razón es que mediante otras técnicas de modelado pueden obtenerse modelos que cumplan con las características mostradas en este trabajo, y dando como ejemplo el sistema de amortiguamiento, el cual es modelado por medio de la técnica Bond-Graph en donde ese término es diferente al del modelo E-L, el cual queda incluido dentro de la forma requerida en este trabajo.

Finalmente se aplican los resultados al robot planar rotacional de dos grados de libertad, en el cual es mostrada la facilidad con la que se pueden obtener las factorizaciones coprimas, las soluciones de las ecuaciones diofantinas y la parametrización de la familia de controladores que estabilizan la planta, en donde se obtienen resultados similares que los propuestos [1] sin embargo no se requiere información completa del estado, ni la transformación para hacer que ciertos términos pertenezcan a \mathcal{RH}_∞ reduciendo así el esfuerzo computacional.

5.2. Trabajos futuros

- Aplicación de los resultados en una implementación física.

- Extensión de los resultados de las factorizaciones coprimas sobre la parametrización de controladores estabilizantes con información de salida y sensibilidad mezclada a sistemas que no tengan la estructura de los sistemas propuesta en este trabajo.
- Resolver otros problemas de control fijando los parámetros libres de los controladores.
- Optimizar el desempeño del sistema en lazo cerrado minimizando otros criterios diferentes al criterio de sensibilidad mezclada considerado.

Bibliografía

- [1] R. Galindo, “Parameterization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity”, (J. Systems and Control Engineering), 2009, 223 (I7), 957-971.
- [2] R. Galindo, “Tuning of a non-conventional mixed sensitivity \mathcal{H}_∞ control”, en Emerging technologies, robotics and control systems, 2nd edition (International SAR); también en Int. J. Fact. Automn, Robotics and Soft Computing, 2008, 2, 141–149 and 15–23.
- [3] R. Galindo, M. Malabre y V. Kučera, “Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ Control for LTI systems”, IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1331-1336, 2004.
- [4] Galindo, R., Sanchez-Orta, A. E., y Herrera, A. “Stabilizing controllers for a class of linear MIMO systems”, Instrumn, Syst. and Automn Soc., 2002, 119–128.
- [5] Zhou, K., Doyle, J. C., y Glover, K., Robust and optimal control, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [6] Nett, C. N., Jacobson, C. A., y Balas, M. J., “Connection between state-space and doubly coprime fractional representations”, IEEE Trans. Autom. Control, 1984, 29(9), 831–832.
- [7] Desoer, C. A., Liu, R., Murray, J., y Sacks, R., “Feedback system design: the fractional representation approach to analysis and synthesis”, IEEE Trans. Autom. Control, 1980, 399–412.
- [8] Youla, D. C., Jabr, H. A., y Bongiorno, J. J., “Modern wiener-hopf design of optimal controllers—part II: The multivariable case”, IEEE Trans. Autom. Control, 1976, 319–338.

- [9] Vidyasagar, M., Control system synthesis: a factorization approach, 1985 (The MIT Press, Cambridge, Massachusetts).
- [10] Meisel J., Principios de conversión de energía electromecánica, Mc. Graw Hill, 1969.
- [11] R. Galindo, L. Carrasco, A. Bonilla, y C. D. Conejo, “Analytic expression of the doubly coprime factorization for square systems and mixed sensitivity”, sometido a la International Journal of Systems Science, 2011, TSYS-2011-0065.R2.
- [12] A. Bonilla, R. Galindo, “Expresión analítica de la doble factorización coprima para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada”, aceptado en la AMCA2011, 2011, 67.
- [13] P. M. Anderson, “Power System Control and Stability”, The IOWA State University Press, 1977.
- [14] R. Kelly y V. Santibañez, Control de Movimientos de Robots Manipuladores, Pearson Prentice Hall, 2003.
- [15] Glover K. y McFarlane D., “Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Description with \mathcal{H}_∞ -bounded Uncertainty”, IEEE Trans. on Auto. Control, vol. 34, pp. 821-830, 1989.
- [16] Youla D. C., Bongiorno J. J. y Lu C. N., “Single-loop feedback stabilization of linear multi-variable dynamical plants”, Automatica, pp. 159-173, (1974).
- [17] Daunphin-Tanguy, G., Rahmani, A., y Sueur, C. “Bond graphaided design of controlled systems. Simulation Practice and Theory”, Int. J. Fed. Eur. Simulation Soc., 7, 493-513, 1999.
- [18] R. Galindo, “Revisión de una nueva técnica de control robusto y sensibilidad mezclada”, Ciencia UANL, 2009, Vol 12, no.3, 263-272.

Apéndice A

Analytic expression of the doubly coprime factorisation for square systems and mixed sensitivity.

Sometido a la Int. J. of System Science.

Analytic expression of the doubly coprime factorisation for square systems and mixed sensitivity

R. Galindo^{a*}, L. Carrazco^a, A. Bonilla^a, and C. D. Conejo^a

^a*Av. Universidad s/n, 66450 San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, Mexico; Faculty of Electrical and Mechanical Engineering, Autonomous University of Nuevo Leon*

(v3.3 released February 2011)

An explicit formula of the doubly coprime factorisation for square systems is presented. Multi Input Multi Output (MIMO), strictly proper, lumped and Linear Time Invariant (LTI) systems with a stabilizable and detectable realization are considered. It is assumed that the state dimension is even, the input dimension is half the state dimension, and the plant is strongly stabilizable. Right and left coprime factorisations of the transfer function in terms of the state space realization are proposed, right and left Diophantine equations are solved, and the stabilizing controllers are gotten using Youla parametrisation. Conditions to get strong stability are given and the free parameters of the stabilizing controllers are fixed solving a regulation, a constant disturbance and a mixed sensitivity, problems. The results are illustrated through simulation examples of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot and of a chain of integrators.

Keywords: doubly coprime factorisation; Bezout identity; mixed sensitivity; one and two parameter stabilizing controllers; Youla parametrisation; strong stabilization

1. Introduction

The main purpose is to give an explicit formula for the doubly coprime factorisation for square systems, *i.e.*, the output dimension is equal to the input dimension, and to fix their free control parameters solving a mixed sensitivity problem, that is, solving simultaneously robust stability and robust performance (see the book of Zhou et al. (1996)). MIMO, strictly proper, lumped and LTI systems with a stabilizable and detectable realization are considered. It is assumed that the plant satisfies the parity interlacing property to assure that a stable controller exist among the set of stabilizing controllers, *i.e.*, that plant is strongly stabilizable. A stable controller is important for practical interest as loop breaking, failure or to minimize numerical errors.

Mixed sensitivity control Zhou et al. (1996) is a closed loop design method based on the minimization of the \mathcal{H}_∞ -norm of the output sensitivity function, improving the regulation and the attenuation of output additive disturbances, and on the minimization of the \mathcal{H}_∞ -norm of the transfer function from the output to the input of the uncertainty, preserving stability under uncertainties. The method is based on which usually the disturbances are of low frequencies and on which the mathematical models are more exact and accurate in low frequencies, neglecting generally the high frequency dynamics.

*Corresponding author. Email: rgalindo@gama.fime.uanl.mx

The parametrisation of all stabilizing controllers gives a solution to the synthesis problem of LTI controllers as proposed by Desoer et al. (1980), Kučera (1979), Vidyasagar (1985) and Youla et al. (1976). The controllers stabilize a given plant and the performance problems can be solved by means of the correct election of their free parameters. There are few algorithms to get analytic expressions of the stabilizing controllers. Explicit formulas for a doubly coprime fractional representation are given in Nett et al. (1984). These formulas provide a connection between state space methods and factorisation theory. First the plant is stabilized by static estimated state feedback and then the Bezout identity is solved. The computer algorithms of Chiang et al. (1992) that use these formulas can produce high order controllers. This solution has been used in the \mathcal{H}_∞ strong stabilization problem in Campos et al. (2001) and Zeren et al. (1999). In section IV algebraic results are applied on a plant in terms of its state space realization. First, right and left coprime factorisations (r.c.f. and l.c.f., respectively) of the transfer function over the set of proper and stable rational functions are gotten, as has been done by Desoer et al. (1980). Then, the Diophantine equations (see the book of Vidyasagar (1985)) are solved and finally the family of all stabilizing controllers is available through Youla parametrisation as proposed by Kučera (1979) and Youla et al. (1976). The proposed solution to the doubly coprime factorisation and of the parametrisation of all stabilizing controllers for strictly proper and full state information systems, respectively, of Section IV, are less complex with respect to the ones of Galindo (2009). The change of coordinates used in Galindo (2009) to assure that the factorisations belong to the set of proper and stable rational functions, is not needed for the proposed factorisations, diminishing the control parameter and the computational effort. Also, the full state information assumption of Galindo (2009) is relaxed in Section IV, considering strictly proper plants.

The strong stabilization and the parametrisation of all one and two parameter stabilizing controllers are reviewed in Section II. The considered class of systems is given in Section III. The main results are presented in Section IV. Also, the free parameters of the stabilizing controllers are fixed solving a regulation, a rejection of constant disturbance, and a mixed sensitivity problems, as have been done by Galindo (2008). In all the cases explicit formulas for the free parameters are presented. The results are illustrated by simulation examples of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot and of a chain of integrators in Section V.

Notation. $\mathfrak{R}(s)$ denotes the set of all rational functions of the complex variable s with real coefficients; \mathfrak{RH}_∞ the set of proper stable rational functions; \mathfrak{R} the set of real numbers; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ and $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ are the asymptotic approximations of a matrix $A(s) \in \mathfrak{R}(s)$, in low and high frequencies, respectively; and I_p the identity matrix of dimension p by p .

2. Background

The strong stabilization problem was tackled by Youla et al. (1974) for single input single output plants and Vidyasagar (1985) extended this result to MIMO plants, given the following parity interlacing property (p.i.p.),

Theorem 2.1: *A given plant $P(s)$ is strongly stabilizable if the number of poles of $P(s)$ (counted according to their McMillan degrees) between any pair of real blocking zeros, including the infinite, in the right half plane, is even.*

The strong stabilization problem is important for practical interest, as loop breaking, failures or to minimize numerical errors.

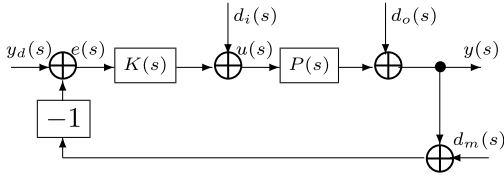


Figure 1. Feedback system with one-parameter controller.

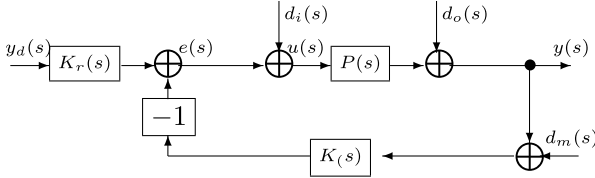


Figure 2. Feedback system with two-parameter controller.

One-parameter control configuration is shown in Fig. 1, where $P(s)$ represents the plant; $K(s)$ the controller; $u(s)$ and $y(s)$ are the plant input and output, respectively; $y_d(s)$ is the reference input; $e(s)$ is the error signal; and, $d_i(s)$, $d_o(s)$ and $d_m(s)$ are external disturbances at the input, the output and the measurement of the plant, respectively. It is assumed in what follows that the \mathcal{H}_2 norm of the disturbances are bounded. The control law $u(s)$ is generated only by the difference between the reference input $y_d(s)$ and the plant output $y(s)$, which is the error signal $e(s) = y_d(s) - y(s)$, being $u(s) = K(s)e(s)$. The parametrisation of all stabilizing controllers of one parameter as proposed by Desoer et al. (1980), Kučera (1979), Vidyasagar (1985) and Youla et al. (1976), is given by,

Theorem 2.2: Suppose $P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$ and $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ in the feedback configuration of Fig. 1. Let $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$ and $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ be any right and any left coprime factorisations of $P(s)$ with $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ and $\tilde{N}(s)$ belonging to \mathfrak{RH}_∞ . Then, the set of all controllers that stabilizes $P(s)$ is given by,

$$\begin{aligned} K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

where $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ is the free parameter satisfying $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, and $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ are the solution of the Diophantine equation,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2)$$

One version of the two-parameter control configuration is shown in Fig. 2 (see Horowitz (1963) and Vidyasagar (1985)). In contrast with the one-parameter controller, $u(s)$ is generated by two different independent signals, being $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$. If $K_r(s) = K(s)$, then the standard feedback configuration of Fig. 1 is gotten. The parametrisation of all two-parameter stabilizing controllers as proposed by Vidyasagar (1985), is given by,

Theorem 2.3: Suppose $K_r(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$, $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ in the feedback configuration of Fig. 2 and let $P(s)$, $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ and $R(s)$ be as in Theorem 2.2. Then, the set of all

controllers that stabilize $P(s)$ is given by,

$$[K_r(s) \ K(s)] = \tilde{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \ \tilde{N}_k(s)] \quad (3)$$

where $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ is another free parameter, $\tilde{N}_k(s) = X(s) + R(s)\tilde{D}(s)$ and $\tilde{D}_k(s) = Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)$.

The roll of $K(s)$ in Fig. 1 is to guarantee internal stability and to improve the performance; while, in Fig. 2 the controller $K_r(s)$ is used to improve the regulation or tracking and the controller $K(s)$ satisfies closed loop requirements. If $K_r(s)$ is unstable, its output grows without bounded, an alternative is to get a common coprime denominator, $\tilde{D}_k(s)$, of both controllers (see Vidyasagar (1985)), that is, $K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s)$ and $K_r(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_{kr}(s)$.

In Section IV an analytic solution of the doubly coprime factorisation and of the parametrisation of all stabilizing controllers for strictly proper and full state information systems, respectively, are presented for the class of systems given in the following section.

3. System description

Consider a causal, linear, time invariant realization (F, G, H) of a system. For proper plants, quadruples into and extended triples can be transformed, following a classical trick as presented by Basile et al. (1992). Also, using the work of Gilbert (1963) and Kalman (1963), (F, G, H) can be decomposed by a change of basis into controllable and observable, controllable and unobservable, uncontrollable and observable, and neither controllable nor observable, realizations. Suppose that (F, G, H) is a stabilizable and detectable realization, that is, the uncontrollable subsystem is stable. Let consider in what follows the realization of the controllable and observable subsystem, *i.e.*, the minimal realization. Moreover, since all the entries of $u(t)$ are linearly independent, without loss of generality, a change of basis can be selected, getting the realization $(A, [0 \ B_m^T]^T, C)$ of the controllable and observable subsystem in new coordinates, where $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix. Also, it is assumed that the dimension of the plant state n is even, the dimension of the plant input $m = n/2$, the dimension of the plant output $p = m$, and that $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ is partitioned accordingly to the block partition of $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, where $A_{11} = 0$, A_{12} is a non-singular matrix, and either C_{11} or C_{12} is a non-singular matrix, that is,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \\ C &= [C_{11} \ C_{12}] \end{aligned} \quad (4)$$

As shown by Galindo (2009), the full state information and fully actuated Euler-Lagrange formulation,

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C_o(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + G(q(t)) = u(t) \quad (5)$$

is a class of non-linear dynamic systems that has a linearized realization of the form (4), where $M(q(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ denotes the inertia, $C(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ the centripetal-Coriolis, $G(q(t)) \in \mathfrak{R}^m$ the gravitational forces, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ the generalized forces and $q(t) \in \mathfrak{R}^m$, $\dot{q}(t) \in \mathfrak{R}^m$ and $\ddot{q}(t) \in \mathfrak{R}^m$ the generalized coordinates of position, velocity and acceleration, respectively.

The structure of the state space realization given by (4) is required for the proposed factorisations and for the main results presented in the next section.

4. Stabilizing controllers and doubly coprime factorisation

First, full state information systems are considered to get left and right coprime factorisations of the plant and an analytic solution of the Diophantine equation in,

Lemma 4.1: *Consider the state space realization given by Eq. (4) satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension. Then, proposed left and right coprime factorisations, l.c.f. and r.c.f., respectively, of the transfer function $(sI_n - A)^{-1}B$ over \mathfrak{RH}_∞ are,*

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ sB_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \\ sI_m \end{bmatrix}, \quad D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (7)$$

respectively, where $0 < a \in \mathfrak{R}$, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and A_{12} are non-singular matrices and,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12}) \quad (8)$$

Also, an analytic solution to the Diophantine Eq. (2) for the r.c.f. of Eq. (7) over \mathfrak{RH}_∞ is,

$$\begin{aligned} X(s) &= [a^2A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M] \\ Y(s) &= B_m \end{aligned} \quad (9)$$

where $M := 2aI_m + A_{22}$.

Proof: Multiplying $(sI_n - A)^{-1}$ by B and using (see Zhou et al. (1996)),

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & -N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1} \\ * & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

where $*$ denotes any finite value, and N_{11} and $\Phi := N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}$ are non-singular matrices. Then,

$$(sI_n - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2}A_{12}\Gamma^{-1}(s)B_m \\ \frac{s}{(s+a)^2}\Gamma^{-1}(s)B_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

Consider the bilinear transformation used in Doyle et al. (1992) and Zhou et al. (1996), $s = (1/\lambda) - a$, that simplifies the factorisation of $P(s)$ and the solution of the Diophantine equation in the ring of polynomials in λ , also, the solution in s belongs to \mathfrak{RH}_∞ . So,

$$(sI_n - A)^{-1}B \Big|_{s=\frac{1}{\lambda}-a} = \begin{bmatrix} \lambda^2A_{12}\Gamma^{-1}(\lambda)B_m \\ \lambda(1-a\lambda)\Gamma^{-1}(\lambda)B_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

where $\Gamma(\lambda) := \lambda^2(a^2I_m + aA_{22} - A_{21}A_{12}) - \lambda M + I_m$. Hence, proposed l.c.f. and r.c.f. of Eq.

(12) are,

$$\tilde{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Gamma(\lambda)A_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma(\lambda) \end{bmatrix}, \tilde{N}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 B_m \\ \lambda(1-a\lambda) B_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 A_{12} \\ \lambda(1-a\lambda) I_m \end{bmatrix}, D(\lambda) = B_m^{-1} \Gamma(\lambda) \quad (14)$$

respectively. So, an analytic solution to $X(\lambda)N(\lambda) + Y(\lambda)D(\lambda) = I_m$ for Eq. (14) is,

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} \quad M] \\ Y(\lambda) &= B_m \end{aligned} \quad (15)$$

Since $\tilde{D}(\lambda)$, $\tilde{N}(\lambda)$, $N(\lambda)$ and $D(\lambda)$ are polynomials in λ , then $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $N(s)$ and $D(s)$ belongs to \mathfrak{RH}_∞ . Applying $\lambda = 1/(s+a)$ to Eq. (13), Eq. (14) and Eq. (15), the results of Eq. (6), Eq. (7) and Eq. (9) follow. \square

The results of Lemma 4.1 are less complex with respect to the ones of Galindo (2009). In the proof of Lemma 4.1 the plant $P(s)$ is inverted before the bilinear transformation $s = (1/\lambda) - a$, is applied. So, the factorisations belong to \mathfrak{RH}_∞ and the change of coordinates used in Galindo (2009) is not needed, diminishing the control parameter and the computational effort for the factorisations of Lemma 4.1.

If A_{11} in the state matrix A is not zero and is not a diagonal matrix, then Φ in (10) will has a term $sI_m - A_{11}$ that prohibits getting the l.c.f. of $P(s)$.

Based on Lemma 4.1 the parametrisation of all one and two parameter stabilizing controllers is given by,

Theorem 4.2: *Consider the state space realization given by Eq. (4) in the feedback configurations of Figures 1 and 2, satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension. Then, the sets of all one and two parameter controllers that stabilize Eq. (4) are,*

$$K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s) \tilde{N}_k(s) \quad (16)$$

and

$$[K_r(s) \quad K(s)] = \tilde{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \quad \tilde{N}_k(s)] \quad (17)$$

respectively, where

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(s) &= \left(I_m - \frac{1}{(s+a)^2} (R_1(s) + sR_2(s)) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) &= \\ & [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} + R_1(s) \Gamma(s) A_{12}^{-1} \quad M + R_2(s) \Gamma(s)] \\ Q(s) &= [Q_1(s) \quad Q_2(s)] \end{aligned} \quad (18)$$

being $R_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfying $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ and $Q_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$, $i = 1, 2$, free parameters, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ a non-singular matrix, $0 < a \in \mathfrak{R}$ $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2) (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12})$, $i = 1, 2$, and $M := 2aI_m + A_{22}$.

Moreover, suppose that $(sI_n - A)^{-1} B$ satisfies the p.i.p. and,

$$\det (s^2 I_m + s(2aI_m - R_2(s)) + a^2 I_m - R_1(s)) \quad (19)$$

is a Hurwitz polynomial, then Eq. (16) and Eq. (17) are stable, i.e., the controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ belongs to \mathfrak{RH}_∞ .

Proof: Let $R(s) := [R_1(s) \ R_2(s)] \in \mathfrak{RH}_\infty$. The results of Eq. (16) and Eq. (17) follow directly from Eq. (1) and Eq. (3) replacing Eq. (6), Eq. (7) and Eq. (9). Since $(sI_n - A)^{-1} B$ satisfies the p.i.p. then, there are stable controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ into the family of stabilizing controllers given by Eq. (16) and Eq. (17). If $\det(\tilde{D}_k(s))$ is a Hurwitz polynomial then $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Since $s = -a$ is a stable pole and B_m is a non-singular matrix, $K(s)$ and $K_r(s)$ are stable if (19) is a Hurwitz polynomial. \square

The stability of the one and two parameter controllers depends on a and $R_i(s)$, $i = 1, 2$. In particular if $R_i(s)$, $i = 1, 2$ are $r_i I_m$ where $r_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, then, (19) is a Hurwitz polynomial if,

$$r_1 < a^2 \text{ and } r_2 < 2a \quad (20)$$

If the state is measured or estimated $\tilde{N}(s)$ is a large matrix of dimension $n \times m$, then, $\tilde{N}(s)$ does not have a right inverse and hence the left Diophantine equation $\tilde{N}(\lambda) \tilde{X}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda) \tilde{Y}(\lambda) = I$ does not have a solution. However, as will be shown in the following, for square systems this Diophantine equation has a solution arriving to a solution to the doubly coprime factorisation or Bezout identity.

Two cases are considered for the state space realization given by Eq. (4), when either C_{11} or C_{12} is a non-singular matrix. Since the high frequency approximation of the plant $P(s) = C(sI_n - A)^{-1} B$ is $P_h = (1/w_h) CB$ where w_h is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of $P(s)$, if $C_{11} = 0$ and C_{12} is a non-singular matrix, then $P_h = (1/w_h) C_{12} B_m$, while if $C_{12} = 0$ and C_{11} is a non-singular matrix, then $P_h = 0$. In the first case $P_h = (1/w_h) C_{12} B_m$ is a non-singular matrix that is equivalent to the relative degree equal to 1 or the orders of the zeros at infinity are all equal to 1. Roughly speaking the system behaves as several independent first order SISO systems (indeed in this case the system is row by row decouplable).

A solution to the doubly coprime factorisation is proposed by,

Lemma 4.3: Consider the state space realization given by Eq. (4) satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension, and the doubly coprime factorisation or Bezout identity given by,

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ D(s) & -\tilde{X}(s) \end{bmatrix} = I_{2m} \quad (21)$$

Suppose that $0 < a \in \mathfrak{R}$, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and A_{12} are non-singular matrices, and $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2) (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12})$. If $C_{12} = 0$ and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, a solution of the doubly coprime factorisation over \mathfrak{RH}_∞ is,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}, & \tilde{N}(s) &= \frac{1}{(s+a)^2} B_m \\ N(s) &= \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12}, & D(s) &= B_m^{-1} \Gamma(s) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) B_m \\
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_d s + A_{21} A_{12} Y_d + a^3 I_m) \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + Y_d)
\end{aligned} \tag{23}$$

where $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ and $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. If $C_{11} = 0$, and A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices, a solution of the doubly coprime factorisation over \mathfrak{RH}_∞ is,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(s) &= \Gamma(s) C_{12}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{s}{(s+a)^2} B_m \\
N(s) &= \frac{s}{(s+a)^2} C_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s)
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) C_{12}^{-1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_r) B_m \\
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{12} (s I_m + Y_r)
\end{aligned} \tag{25}$$

where $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$ and $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$.

Proof: If $C_{12} = 0$ and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, from Eq. (11),

$$P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \tag{26}$$

Since by assumption C_{11} and A_{12} are non-singular matrices, then, the results of Eq. (22) follow. Let,

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + X_0) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty \\
Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty \\
\tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty \\
\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + \tilde{Y}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty
\end{aligned} \tag{27}$$

where $X_d, X_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_0, Y_d$ and \tilde{Y}_0 are constant matrices that can be determined algebraically equating terms from the cubic polynomials of the Diophantine equations. Hence, the Diophantine equations $X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m$ and $\tilde{N}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I_m$ for Eq. (22) are,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s+a)^3} (X_d s + X_0) + \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) \Gamma(s) &= I_m \text{ and} \\
\frac{1}{(s+a)^3} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) + \frac{1}{s+a} \Gamma(s) (s I_m + \tilde{Y}_0) &= I_m
\end{aligned} \tag{28}$$

respectively. Then, analytic solutions to the Diophantine equations are,

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_0 &= Y_d, \quad \tilde{X}_1 = X_d \\
X_0 &= Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m \\
\tilde{X}_0 &= A_{21} A_{12} \tilde{Y}_0 + a^3 I_m
\end{aligned} \tag{29}$$

where $Y_d A_{22} = A_{22} \tilde{Y}_0$ is used. So, from Eq. (27) the result of Eq. (23) follows. If $C_{11} = 0$, and

A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices, from Eq. (11),

$$P(s) = \frac{s}{(s+a)^2} C_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (30)$$

Hence, the results (24) and (25) follows analogously letting $X(s) = (1/(s+a))(X_r s + X_0) C_{12}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty$, $Y(s) = (1/(s+a))(sI_m + Y_r) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty$, $\tilde{X}(s) = (1/(s+a)) B_m^{-1}(X_r s + X_0) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $\tilde{Y}(s) = (1/(s+a)) C_{12}(sI_m + Y_r) \in \mathfrak{RH}_\infty$ where $X_0 = Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$. \square

In the proof of Lemma 4.3 the Diophantine equations are solved directly in \mathfrak{RH}_∞ without the bilinear transformation $\lambda = 1/(s+a)$, since the solutions in the ring of polynomials in λ are more involved.

Based on Lemma 4.3 the parametrisation of all one and two parameter stabilizing controllers is given by,

Theorem 4.4: Consider the state space realization given by Eq. (4) in the feedback configurations of Figures 1 and 2, satisfying $n = 2m$ where n is the state dimension and m is the input dimension. Then, the sets of all one and two parameter controllers that stabilize Eq. (4) are,

$$K(s) = \hat{D}_k^{-1}(s) \hat{N}_k(s) \quad (31)$$

and

$$[K_r(s) K(s)] = \hat{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \hat{N}_k(s)] \quad (32)$$

respectively, where $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfying $\det(\hat{D}_k(s)) \neq 0$ and $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ are free parameters. Let $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ be a non-singular matrix, $0 < a \in \mathfrak{R}$, and $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2 I_m - sA_{22} - A_{21} A_{12})$. If $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ and A_{12} are non-singular matrices,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= \left(sI_m + Y_d - \frac{1}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

where $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ and $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. If $C_{11} = 0$, and A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= \left(sI_m + Y_r - \frac{s}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] C_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

where $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$ and $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$.

Moreover, suppose that $P(s) = (sI_n - A)^{-1} B$ satisfies the p.i.p. and,

$$\begin{aligned} &\det \left(s^2 I_m + (aI_m + Y_d) s + aY_d - R(s) \right), \text{ and} \\ &\det \left(s^2 I_m + (aI_m + Y_r - R(s)) s + aY_r \right), \end{aligned} \quad (35)$$

are Hurwitz polynomials, then Eq. (31) and Eq. (32) are stable, i.e., the controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ belongs to \mathfrak{RH}_∞ , respectively.

Proof: Let,

$$\hat{D}_k(s) := (s + a) \tilde{D}_k(s), \text{ and } \hat{N}_k(s) := (s + a) \tilde{N}_k(s) \quad (36)$$

then, the results of Eq. (31) and Eq. (32) follow directly from Eq. (1) and Eq. (3) replacing Eq. (22), Eq. (23) and (25). Since $P(s)$ satisfies the p.i.p. then, there are stable controllers $K(s)$ and $K_r(s)$ into the families of stabilizing controllers given by Eq. (31) and Eq. (32). If $\det(\tilde{D}_k(s))$ is a Hurwitz polynomial then $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ and $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Since $s = -a$ is a stable pole and B_m is a non-singular matrix, $K(s)$ and $K_r(s)$ are stable if the polynomials of Eq. (35) are Hurwitz. \square

As shown by Eq. (35) of Theorem 4.4 the stability of the stabilizing controllers can be accomplished selecting a and $R(s)$ if $C_{12} = 0$, however it can be a more difficult task if $C_{11} = 0$. So, if $K_r(s)$ is unstable in the feedback configuration with two-parameter controller, it must be implemented getting a common coprime denominator, $\tilde{D}_k(s)$, of both controllers.

4.1. Regulation control problem

The regulation control problem is to keep $y(t)$ close to a given $y_d(t) = k \in \mathfrak{R}$. The following corollaries propose a solution to this problem.

Corollary 4.5: Consider a one parameter stabilizing controller in the feedback configuration of Fig. 1. Let the reference input of position be a constant value and the reference input of velocity be zero. Under the assumptions and definitions of Theorem 4.2, free parameters of Eq. (16), solving the regulation control problem, are,

$$\begin{aligned} R_{1l} &= a^2 I_m \\ R_{2l} &= a^2 M A_{12}^{-1} A_{21}^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

being A_{12} and A_{21} non-singular matrices and $M := 2aI_m + A_{22}$, while under the assumptions and definitions of Theorem 4.4, if $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, a free parameter of Eq. (31) solving the regulation control problem is,

$$R_l = aY_d \quad (38)$$

where $Y_d := A_{22} + 3aI_m$.

Proof: From Fig. 1, $e(s) := y_d(s) - y(s)$ and $y(s) = (I + P(s)K(s))^{-1} P(s)K(s)r(s)$. Therefore, using the identity $(I + P(s)K(s))^{-1} P(s) = N(s) \tilde{D}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)) of the parametrisation of all stabilizing controllers,

$$e(s) = \left(I - N(s) \tilde{N}_k(s) \right) y_d(s) \quad (39)$$

and $N(s) \tilde{N}_k(s) = I$ achieves $e(s) = 0$. Analysing at low frequencies, using classical asymptotic Bode approximations of a matrix,

$$N_l \tilde{N}_{kl} = I \quad (40)$$

From Lemma 4.1, $N_l = (1/a^2) [A_{12} \ 0]^T$, and from Theorem 4.2, $\Gamma_l = (-1/a^2) A_{21}A_{12}$ and $\tilde{N}_{kl} = [a^2 A_{12}^{-1} + A_{21} - (1/a^2) R_l A_{21} \ M - (1/a^2) R_{2l} A_{21} A_{12}]$. Note that N_l is full column rank, so, multiplying Eq. (40) from the left by $a^2 [A_{12}^{-1} \ 0]$,

$$\tilde{N}_{kl} = [a^2 A_{12}^{-1} \ 0] \quad (41)$$

and solving for R_l , the necessity of result of Eq. (37) is gotten. To prove the sufficiency, \tilde{N}_{kl} is given by Eq. (41) under Eq. (37), so, from Eq. (41) and Eq. (39),

$$e_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} y_d \quad (42)$$

Since $x(t) = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$, and the reference input of position is a constant value, then $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ when $q(t)$ achieves the steady state. So, without loss of generality the reference input of velocity can be zero and the solution regulates the position subsystem. On the other hand, from Lemma 4.3, if $C_{12} = 0$, then $N_l = (1/a^2) C_{11}A_{12}$, from Theorem 4.4, $\tilde{N}_{kl} = (1/a) \hat{N}_{kl} = (1/a) [Y_d A_{21} + a^3 A_{12}^{-1} - (1/a) R_l A_{21}] C_{11}^{-1}$, and from (40) the necessary and sufficient condition of the result (38), is gotten. \square

The transfer function from $y_d(t)$ to $e(t)$ is equal to the transfer function from $d_o(t)$ to $y(t)$. So, if the free parameters are fixed using the results of Corollary 4.5 and this disturbance is constant, then, there are any effects at $y(t)$ in low frequencies, that is, the disturbance is rejected at $y(t)$.

If $C_{11} = 0$, then, from Lemma 4.3, $N_l = 0$, and from Eq. (40), the regulation control problem does not have a solution. Alternatively, if $N(s)$ is approximated in low frequencies to $N_l = (w_l/a^2) C_{12}$, where w_l is a fixed frequency in the low frequency bandwidth of $P(s)$, then a free parameter R_l can be determined such that Eq. (40) is satisfied, but the transfer function from $y_d(t)$ to $y(t)$, that is, $N(s)\tilde{N}_k(s)$ still have a zero at the origin that prohibit the regulation. Also, this free parameter has a high value as $w_l \rightarrow 0$, that become into numerical problems. So, in this case external loops including integrators must be added. As it will be shown, the same problem arises for the feedback configuration of two-parameter.

Corollary 4.6: *Consider a two-parameter stabilizing controller in the feedback configuration of Fig. 2. Let the reference input of position be a constant value and the reference input of velocity be zero. Under the assumptions and definitions of Theorem 4.2, a free parameter of Eq. (17), solving the regulation control problem, is,*

$$Q_l = [a^2 A_{12}^{-1} \ 0] \quad (43)$$

while under the assumptions and definitions of Theorem 4.4, if $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, a free parameter of Eq. (31) solving the regulation control problem is,

$$Q_l = a^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \quad (44)$$

Proof: From Fig. 2, $\epsilon(s) := y_d(s) - y(s)$. So, $y(s) = (I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s)K_r(s)y_d(s)$. Therefore, using the identity $(I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s) = N(s)\tilde{D}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)) of the parametrisation of all stabilizing controllers, $y(s) = N(s)Q(s)y_d(s)$. Thus,

$$\epsilon(s) = (I_n - N(s)Q(s))y_d(s) \quad (45)$$

and $N(s)Q(s) = I_n$ achieves $\epsilon(s) = 0$. Analysing at low frequencies, using the classical asymptotic Bode approximations of a matrix,

$$N_l Q_l = I_n \quad (46)$$

From Theorem 4.2, $N_l = (1/a^2) [A_{12} \ 0]^T$, and $Q_l = [Q_{1l} \ Q_{2l}]$. Multiplying Eq. (46) from the left by $a^2 [A_{12}^{-1} \ 0]$, the free parameter Q_l , Eq. (43), is obtained, proving the necessity of the result. To prove the sufficiency, using N_l , Q_l and Eq. (43), from Eq. (45), $\epsilon_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} y_{dl}$. Since $x(t) = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$, the reference input of position is a constant value and the reference input of velocity is zero, then, the solution regulates the position subsystem. On the other hand, from Lemma 4.3, if $C_{12} = 0$, then, $N_l = (1/a^2) C_{11} A_{12}$, and from Eq. (46), the necessary and sufficient conditions of the result (44) are gotten. \square

4.2. Rejection of constant disturbance

The problem of rejection of constant disturbance at the plant input, is tackled. The free parameters of the stabilizing controllers are fixed such that this disturbance does not have any effect in low frequencies over the output.

Corollary 4.7: *Consider the feedback configurations of Figures 1 and 2. Suppose that $d_i(t)$ is $k_{di} \in \mathfrak{R}, \forall t$. Then, the free parameter $R_1(s)$ of Eq. (16) and Eq. (17) of Theorem 4.2 that solves the problem of rejection of constant disturbance at the plant input is,*

$$R_{1l} = a^2 I_m \quad (47)$$

and, under the assumptions and definitions of Theorem 4.4, if $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, the free parameter $R(s)$ of Eq. (31) and Eq. (32) that solves the problem of rejection of constant disturbance at the plant input is,

$$R_l = a Y_d \quad (48)$$

where $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. If $C_{11} = 0$, and A_{21} and $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ are non-singular matrices, the problem of rejection of constant disturbance at the plant input is solved $\forall R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$.

Proof: The transfer functions from $d_i(t)$ to $y(t)$ in the feedback configurations of Figures 1 and 2 are $(I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s)$ in both configurations. Therefore, using the identity $(I_n + P(s)K(s))^{-1} P(s) = N(s) \tilde{D}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)) of the parametrisation of all stabilizing controllers, and analysing at low frequencies, using the classical asymptotic Bode approximations of a matrix, if,

$$N_l \tilde{D}_{kl} = 0 \quad (49)$$

then, the constant disturbance is rejected at the output. From Theorem 4.2, $N_l = (1/a^2) [A_{12} \ 0]^T$ and $\tilde{D}_{kl} = (I_m - (1/a^2) R_{1l}) B_m$, so, the result (47) follows directly from (49). If $C_{12} = 0$, from Lemma 4.3 and Theorem 4.4, $N_l = (1/a^2) C_{11} A_{12}$ and $\tilde{D}_{kl} = (1/a) \hat{D}_{kl} = (1/a) (Y_d - (1/a) R_l) B_m$, hence, from Eq. (49), the result (48), is gotten, while if $C_{11} = 0$, from Lemma 4.3 and Theorem 4.4, $N_l = 0$ and Eq. (49) is satisfied $\forall R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. \square

4.3. Mixed sensitivity problem

The minimization of the \mathcal{H}_∞ -norm of a low frequency approximation of the output sensitivity function $\|S_{ol}\|_\infty$ subject to an algebraic equation of restriction that assigns the same value to the \mathcal{H}_∞ -norms of the low and high frequency approximations of the output sensitivity function and of the transfer function from the output to the input of the uncertainty $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, respectively, is considered (see the work of Galindo (2008)). This mixed sensitivity problem involves the simultaneous minimization of $\|S_{ol}\|_\infty$ and of $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, that is, $\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty$ subject to $\|S_{ol}\|_\infty = \|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$. So, one part of the problem consists of solving the algebraic equation,

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (50)$$

For output multiplicative Δ models, $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$ becomes $T_o(s) := S_o(s)P(s)K(s)$. Also, for strictly proper plants $T_{oh} \cong L_{oh}$.

This mixed sensitivity problem is solved fixing the free parameters of the stabilizing controllers, when the reference input of velocity is zero. An exact solution to (50) for full state information systems, is proposed by,

Theorem 4.8: Consider state space realization given by Eq. (4) of the plant $(sI_n - A)^{-1}B$ in the schemes of Figures 1 and 2. Suppose that $K(s)$ and $K_r(s)$ are given by Theorem 4.2. Let the state reference input be $y_d(t) = [y_{d1}(t) \ 0]^T$, the free parameter $R_1(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ be rI_m , $R_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$, $Q_1(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ be qA_{12}^{-1} and $Q_2(s) = 0 \in \mathfrak{RH}_\infty$. Then, the optimal values of r and q for an output multiplicative uncertainty model are,

$$r = \frac{a^2 (\|A_{12}A_{21}\|_\infty - a^2b)}{a^4m + \|A_{12}A_{21}\|_\infty} \quad (51)$$

and,

$$q = \frac{a^2w_h}{a^2\|A_{12}^{-1}\|_\infty + w_h} \quad (52)$$

respectively, where,

$$\begin{aligned} b &:= \frac{1}{w_h} \|a^2A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty \\ m &:= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{w_h} \|2a^2A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty - b \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Proof: The transfer function from the reference input $y_d(t)$ to the output $y(t)$ is given by $T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)), in the one-parameter feedback configuration shown in Fig. 1 where $N(s)$ and $\tilde{N}_k(s)$ are given by Eq. (7) and Eq. (18), respectively. Since $R_1(s)$ is rI_m , $R_2(s) = 0$, and $\Gamma_h = I_m$, then,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_h}A_{12} \\ I_m \end{bmatrix} [(a^2 + r)A_{12}^{-1} + A_{21} \ M] \quad (54)$$

where w_h is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of $P(s)$ and $M = 2aI_m + A_{22}$.

So, T_{oh} can be approximated in high frequencies to,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (a^2 + r) A_{12}^{-1} + A_{21} & M \end{bmatrix} \quad (55)$$

On the other hand, since $R_1(s)$ is rI_m , $R_2(s) = 0$, and from Eq. (8) $\Gamma_l = (-1/a^2) A_{21}A_{12}$, then, the low frequency approximation of $T_o(s)$ is,

$$T_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} A_{12} \\ 0 \end{bmatrix} [a^2 A_{12}^{-1} + (1 - \frac{r}{a^2}) A_{21} \quad M] \quad (56)$$

Thus the output sensitivity function $S_{ol} = I_n - T_{ol}$ is,

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} A_{12} (\frac{r}{a^2} - 1) A_{21} & \frac{-1}{a^2} A_{12} M \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (57)$$

The reference input is $y_d(t) = [y_{d1}(t) \ 0]^T$, then the elements (2, 1) of Eq. (55) and (1, 1) of Eq. (57), respectively, are considered in order to solve (50), that is,

$$\begin{aligned} \|T_{oh(2,1)}\|_\infty &= \frac{1}{w_h} \|(a^2 + r) A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty \\ \|S_{ol(1,1)}\|_\infty &= \frac{1}{a^2} \left| \frac{r}{a^2} - 1 \right| \|A_{12}A_{21}\|_\infty \end{aligned} \quad (58)$$

where $w_h > 0$. It is considered that $a > 0$, then the equation of restriction $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines of Fig. 3, that is, from Fig. 3,

$$mr + b = \frac{-1}{a^4} \|A_{12}A_{21}\|_\infty r + \frac{1}{a^2} \|A_{12}A_{21}\|_\infty \quad (59)$$

this implies the result (51). Also, $T_o(s) = N(s)Q(s)$ (see Vidyasagar (1985)) in the two-parameter feedback configuration shown in Fig. 2. Since $Q_1(s)$ is qI_m and $Q_2(s) = 0$, then, from (7) the high and low frequency approximations of $T_o(s)$ and $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ are,

$$T_{oh} = \frac{1}{w_h} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ qA_{12}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

and

$$S_{ol} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{q}{a^2}) I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (61)$$

respectively. Thus,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{w_h} |q| \|A_{12}^{-1}\|_\infty, \quad \|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \left| 1 - \frac{q}{a^2} \right| \quad (62)$$

So, $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines

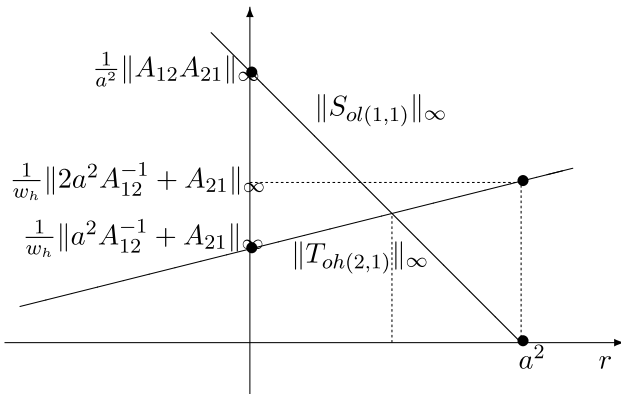


Figure 3. Intersection function for one parameter configuration

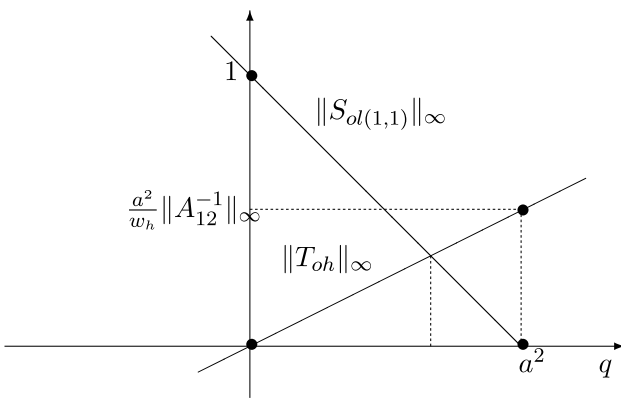


Figure 4. Intersection function for two parameter configuration

of Fig. 4, *i.e.*, from Fig. 4,

$$\frac{1}{w_h} \|A_{12}^{-1}\|_{\infty} q = \frac{-1}{a^2} q + 1 \quad (63)$$

that implies the result (52). \square

Theorem 4.8 shows that the tuning of the parameter is more complex for the one-parameter configuration and numerical errors increase the dimension of the controller.

In Theorem 4.8, $R_1(s)$ is rI_m , of course, another selections can be done, for instance if $A_{12} = I_m$, A_{21} is a non-singular matrix and $R_1(s)$ be $rA_{21}^{-1} + a^2I_m$, then $\|S_{ol(1,1)}\|_{\infty}$ in (58) will not be in terms of $\|A_{21}\|_{\infty}$ that is desired for some applications, assuring that the stationary state error converge to zero. On the other hand, if a feedback linearization is applied to a non-linear system or if a change of coordinates is applied getting the Brunousky canonical form, then, the design system is a chain of integrators that has $A_{21} = 0$. So, the selection of $R_1(s)$ in Theorem 4.8, allows to solve the mixed sensitivity problem for a chain of integrators. Although the solution is not unique, the proposed solution assures that a cross point exist in Figures 3 and 4, since $\|S_{ol(1,1)}\|_{\infty}$ reach its minimum value as r increase. Also, for the proposed r and q ,

$\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ and $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol(1,1)}\|_\infty$, respectively, that as will be shown, can be simultaneously minimized by the appropriate choice of the control parameters a and w_h .

From (51) and (58),

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \frac{(b + a^2 m) \|A_{12} A_{21}\|_\infty}{a^4 m + \|A_{12} A_{21}\|_\infty} \quad (64)$$

So, from (53),

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \frac{\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty \|A_{12} A_{21}\|_\infty}{a^2 (\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty - \|a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty) + \|A_{12} A_{21}\|_\infty w_h} \quad (65)$$

in the one-parameter feedback configuration. Also, from (52) and (62),

$$\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = \frac{a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty}{a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty + w_h} \quad (66)$$

in the two-parameter feedback configuration. If $w_h \gg a^2 (\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty - \|a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty) / \|A_{12} A_{21}\|_\infty$, then, from (65) both $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty$ and $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ tend to $\|2a^2 A_{12}^{-1} + A_{21}\|_\infty / w_h$ in the feedback configuration of Fig. 1. Also, if $w_h \gg a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty$, then from (66) both $\|T_{oh}\|_\infty$ and $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty$ tend to $a^2 \|A_{12}^{-1}\|_\infty / w_h$ in the feedback configuration of Fig. 2. However, if $w_h \rightarrow \infty$, then $b \rightarrow 0$ and $m \rightarrow 0$, so, $r \rightarrow a^2$ and from Theorem 4.2, if $r \rightarrow a^2$, the controllers becomes unstable. Therefore, for small enough a such that the stability of the controllers is preserved, the mixed sensitivity problem is solved increasing w_h .

An exact solution to (50) for strictly proper systems, is proposed by,

Theorem 4.9: Consider state space realization given by Eq. (4) of the plant $C(sI_n - A)^{-1}B$ in the feedback configurations of Figures 1 and 2. Suppose that $K(s)$ and $K_r(s)$ are given by Theorem 4.4. If $C_{12} = 0$, and $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ is a non-singular matrix, let the free parameter $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ be $a(rI_m + A_{22})$, and $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ be $qa^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$. Then, the optimal values of r and q for an output multiplicative uncertainty model are,

$$r = \frac{a (3 \|C_{11} A_{12} A_{21} C_{11}^{-1}\|_\infty - a^2 b)}{a^3 m + \|C_{11} A_{12} A_{21} C_{11}^{-1}\|_\infty} \quad (67)$$

and,

$$q = \frac{w_h^2}{a^2 + w_h^2} \quad (68)$$

respectively, where,

$$\begin{aligned} b &:= \frac{1}{w_h^2} \|C_{11} A_{12} (X_d + a A_{22}) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}\|_\infty \\ m &:= \frac{1}{3aw_h^2} (\|C_{11} A_{12} (X_d + a Y_d) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}\|_\infty - w_h^2 b) \end{aligned} \quad (69)$$

being $Y_d := A_{22} + 3aI_m$ and $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$.

Proof: The transfer function from the reference input $y_d(t)$ to the output $y(t)$ is given by $T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s)$ (see Vidyasagar (1985)), in the one-parameter feedback configuration shown in Fig. 1 where $N(s)$ and $\tilde{N}_k(s)$ are given by (22) and (34), respectively. The high and low frequency approximations of $\Gamma(s)$ are $\Gamma_h = I_m$ and $\Gamma_l = (-1/a^2)A_{21}A_{12}$, respectively. To assure that $\|S_{ol}\|_\infty = 0$ for certain value of r , if $C_{12} = 0$, then $R(s)$ is proposed to be $a(rI_m + A_{22})$, so,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_d + a(rI_m + A_{22}))A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (70)$$

where $w_h > 0$ is a fixed frequency in the high frequency bandwidth of $P(s)$. On the other hand, the low frequency approximation of $T_o(s)$ is,

$$T_{ol} = I_m + \frac{3a-r}{a^3}C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1} \quad (71)$$

Thus, since $a > 0$, the \mathcal{H}_∞ -norm of $S_{ol} = I_m - T_{ol}$ is,

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{|r-3a|}{a^3} \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (72)$$

The equation of restriction $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines of Fig. 5, that is, from Fig. 5,

$$mr + b = \left(\frac{-1}{a^3}r + \frac{3}{a^2}\right) \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (73)$$

this implies the result (67). Also, $T_o(s) = N(s)Q(s)$ (see Vidyasagar (1985)) in the two-parameter feedback configuration shown in Fig. 2. If $C_{12} = 0$, then $Q(s)$ is $qa^2A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}$, so, from (22), the \mathcal{H}_∞ -norms of the high and low frequency approximations of $T_o(s)$ and $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ are,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{a^2}{w_h^2}|q| \quad \text{and} \quad \|S_{ol}\|_\infty = |1-q| \quad (74)$$

respectively. Hence, $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$ has a solution in the intersection point of the two straight lines of Fig. 6, *i.e.*, from Fig. 6,

$$\frac{a^2}{w_h^2}q = -q + 1 \quad (75)$$

that implies the result (68). □

If $C_{12} = 0$, from (67) and (72),

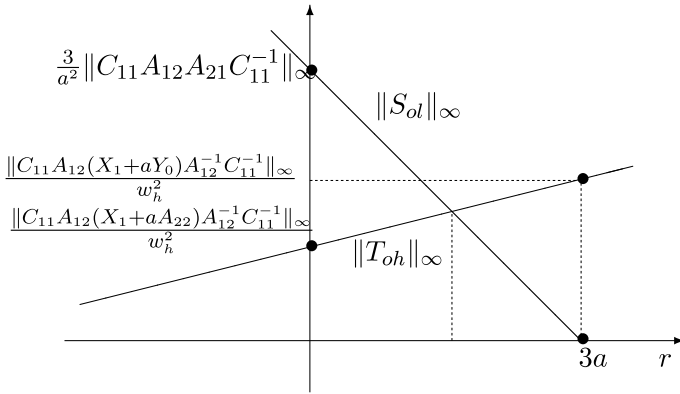


Figure 5. Intersection function for one parameter configuration

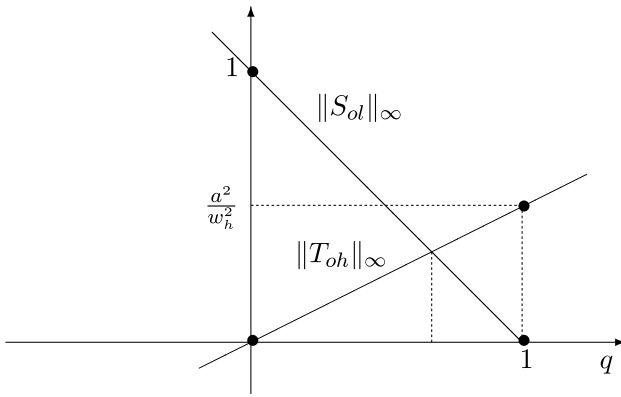


Figure 6. Intersection function for two parameter configuration

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \frac{(b + 3am) \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_{\infty}}{a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_{\infty}} \quad (76)$$

in the one-parameter feedback configuration. Also, from (68) and (74),

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \frac{a^2}{a^2 + w_h^2} \quad (77)$$

in the two-parameter feedback configuration. If $w_h \rightarrow \infty$, then, from (69), $m \rightarrow 0$ and $b \rightarrow 0$, so, from (76) both $\|T_{oh}\|_{\infty}$ and $\|S_{ol}\|_{\infty}$ tend to zero in the feedback configuration of Fig. 1. Also, if $w_h \gg a^2$, then from (77) both $\|T_{oh}\|_{\infty}$ and $\|S_{ol}\|_{\infty}$ tend to a^2/w_h^2 in the feedback configuration of Fig. 2. However, if $b \rightarrow 0$ and $m \rightarrow 0$, then $r \rightarrow 3a$ and from (35), if $r \rightarrow 3a$, the controllers becomes unstable. Therefore, for small enough a such that the stability of the controllers is preserved, the mixed sensitivity problem is solved increasing w_h .

As for the regulation problem, if $C_{11} = 0$, then from Lemma 4.3, $N_l = 0$ and this mixed sensitivity problem does not have a solution.

The results are illustrated by simulation examples of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot and of a chain of integrators in the next section.

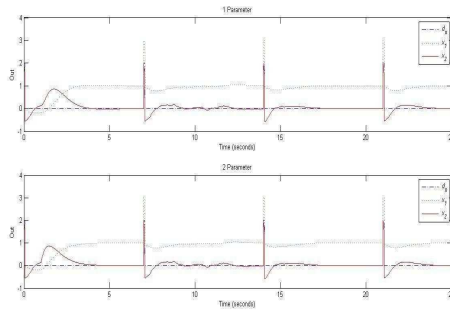


Figure 7. Step response for one and two parameter controllers under $d_o(t)$ and $d_m(t)$

5. Examples

5.1. Chain of integrators

Consider the chain of integrators,

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \quad (78)$$

The A and B matrices in the linearized model are given by Eq. (4), where $A_{11} = 0$, $A_{12} = 1$, $A_{22} = 0$ and,

$$A_{21} = 0, \quad B_m = 1 \quad (79)$$

where it is assumed that the state is measurable or can be estimated. The unstable plant $P(s)$ satisfies the p.i.p.. Let the control parameters $a = 2$ and $w_h = 1000$. Based on Eq. (51) and Eq. (52) from Theorem 4.8, the free parameters that solve the mixed sensitivity problem for the one and two parameter feedback configurations are,

$$r = -4 \quad \text{and} \quad q = 3.9683 \quad (80)$$

respectively. Since $A_{21} = 0$ and the plant is a chain of integrators, then from (58), $\|S_{ol(1,1)}\|_\infty = 0$, $\forall r$, and from Eq. (51) $r = -a^2$, $\forall w_h$, implying that $\|T_{oh(2,1)}\|_\infty = 0$. The regulation control problem is solved in spite of the different value given by Corollary 4.5, that is, from Corollary 4.5, $r = a^2$, that is the same value given by Corollary 4.7 for rejection of constant disturbance at the input of the plant.

Using MatLab-Simulink the outputs are shown in Figures 7 and 8. These were realized using the one and two parameter stabilizing controllers given by Eq. (16) and by Eq. (17) of Theorem 4.2, for the chain of integrators in the feedback configurations of Figures 1 and 2 with the free parameter of Eq. (80), the reference input $y_d(t) = [1 \ 0]^T$ and the initial condition $x(0) = 0$, under the additive disturbances at the measure $d_m(t) = 0.2 \sin(1000t)$, and at the output $d_o(t)$ as shown by Fig. 7.

Figures 7 and 8 show that the mixed sensitivity problem is solved and the stabilization of the plant is accomplished, thanks to the control parameter of the stabilizing controllers. As expected the disturbance at the output $d_o(t)$ is attenuated, and a small value of the stationary state error is having. The disturbance at the measure $d_m(t)$ has a frequency bigger than w_h , so, it is attenuated at the regulated output and remains as very small oscillations that are bigger in the plant input as shown by Fig. 8. For this example the performance is almost the same in the

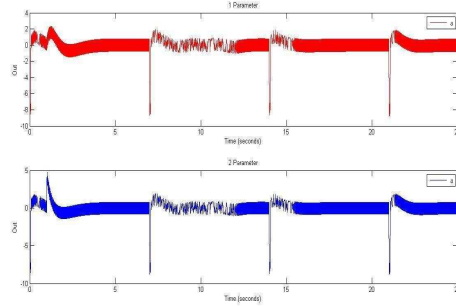


Figure 8. Plant input $u(t)$ for one and two parameter controllers under $d_o(t)$ and $d_m(t)$

one or two parameter feedback configurations. A small time response and a smooth response can be achieved, increasing the value of a , of course it increase the magnitude of the plant input.

5.2. Planar rotational robot

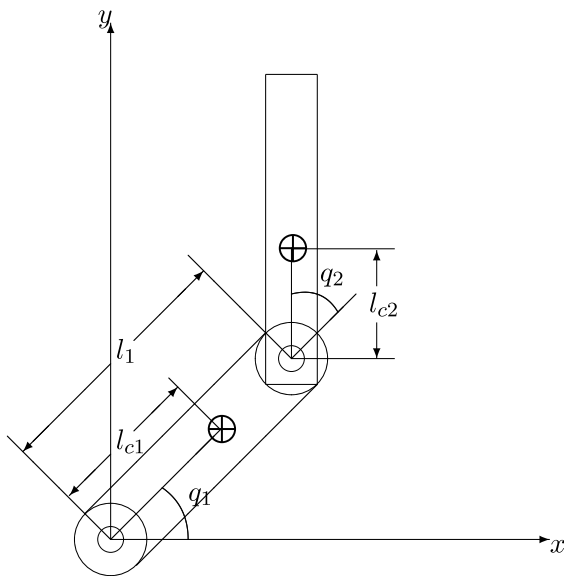


Figure 9. Coordinate description of the robot with 2 degrees of freedom

Consider the two degrees-of-freedom (d.o.f.) planar rotational robot shown in Fig. 9. Eq. (5) gives the Euler-Lagrange equations of motion for this robot, where $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$,

$$M(q(t)) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3(\cos q_2(t)) & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$C(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} -\theta_3(\sin q_2(t))\dot{q}_2(t) - \theta_3(\sin q_2(t))(\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) \\ \theta_3(\sin q_2(t))\dot{q}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$G(q(t)) = \begin{bmatrix} g\theta_4 \cos q_1(t) + g\theta_5 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ g\theta_5 \cos(q_1(t) + q_2(t)) \end{bmatrix} \quad (83)$$

being $q_i(t)$, $i = 1, 2$ the joint angular positions, $\theta_1 := m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1$, $\theta_2 := m_2 l_{c2}^2 + I_2$, $\theta_3 := m_2 l_1 l_{c2}$, $\theta_4 := m_1 l_{c1} + m_2 l_1$, $\theta_5 := m_2 l_{c2}$, where m_i , $i = 1, 2$ are the total mass of link i , l_1 is the length of link one, l_{ci} , $i = 1, 2$ are the distance to the centre of mass of link i , I_i , $i = 1, 2$ are the moment of inertia of link i , and g is the acceleration of gravity.

The top balancing position is at the upright position with $q_{1e} = \pi/2$, $q_{2e} = 0$, $u_{ie} = 0$, $i = 1, 2$. The parameter values are given by Kelly et al. (2003), *i.e.*, $l_1 = 0.450$ m, $l_{c1} = 0.091$ m, $l_{c2} = 0.048$ m, $m_1 = 23.902$ kg, $m_2 = 3.88$ kg, $I_1 = 1.266$ kg m², $I_2 = 0.093$ kg m² and $g = 9.81$ m/s².

The A and B matrices in the linearized model are given by Eq. (4), where $A_{11} = 0$, $A_{12} = I_m$, $A_{22} = 0$ and,

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 16.950 & -0.688 \\ -12.963 & 19.177 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0.458 & -0.835 \\ -0.835 & 11.332 \end{bmatrix}$$

are non-singular matrices. The poles of $P(s)$ are at -4.6101 , -3.8568 , 4.6101 and 3.8568 , and $P(s)$ has any transmission zeros, so the unstable plant $P(s)$ satisfies the p.i.p.

Suppose that the state is measurable or can be estimated. Let the control parameter be $a = 2$ and $w_h = 300$, getting stable controllers. Eq. (37) of Corollary 4.5 and Eq. (43) of Corollary 4.6 give the free parameters that solve the regulation control problem for a constant reference input in the one and two parameter feedback configurations, respectively. Also, Eq. (51) and Eq. (52) of Theorem 4.8 give the free parameters that solve the mixed sensitivity problem. The linear and non-linear models of the robot are stabilized, however, the performance of the non-linear model is ameliorated in the feedback configurations of Figures 1 and 2. So, in order to improve the performance, compensating the fast dynamics of the non-linear model, the control parameter must be increased to $a = 4$ and $w_h = 600$. The small gain Theorem (see Zhou et al. (1996)) for an output multiplicative uncertainty model is $\|T_o(s)\|_\infty \gamma(\Delta) < 1$, where $\gamma(\Delta)$ is the finite gain of the non-linear uncertainty Δ . Thus, stability is guaranteed under Δ , minimizing $\|T_o(s)\|_\infty$ as is done increasing the values of the control parameter a and w_h , setting the non-linear uncertainties under the set of allowable uncertainties. Using MatLab-Simulink the outputs are shown in Figures 10 and 11 for the regulation control problem and in Figures 12 and 13 for the mixed sensitivity problem. These were realized using the one and two parameter stabilizing controllers given by Eq. (16) and by Eq. (17) of Theorem 4.2, for the non-linear model of the two d.o.f. planar rotational robot, in the feedback configurations of Figures 1 and 2. The reference input is $y_d(t) = [\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ and the initial condition $x(0) = [-\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, under the additive disturbances at the measure $d_m(t) = 0.1 \sin(1000t)$, and at the output $d_o(t) = 0.1$ for $t > 6$.

Figures 10 and 12 show that the regulation and mixed sensitivity problems are solved stabilizing the non-linear model of the robot, in spite of the disturbances and uncertainties that are attenuated at the regulated output. As expected the disturbance at the output $d_o(t)$ is well attenuated for the regulation problem (see Fig. 10), and generates a small stationary state error

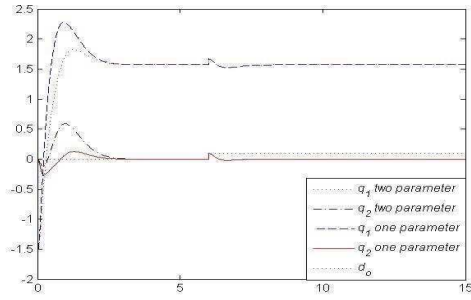


Figure 10. Step response for one and two parameter controllers, under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

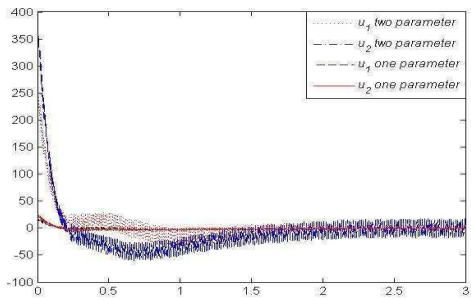


Figure 11. Plant input $u(t)$ for one and two parameter controllers under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

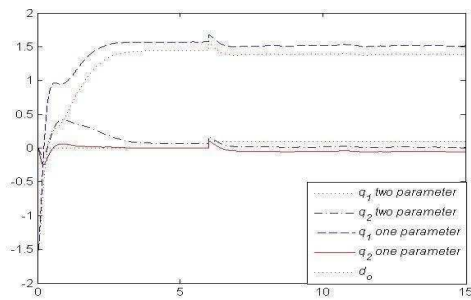


Figure 12. Step response for one and two parameter controllers, under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

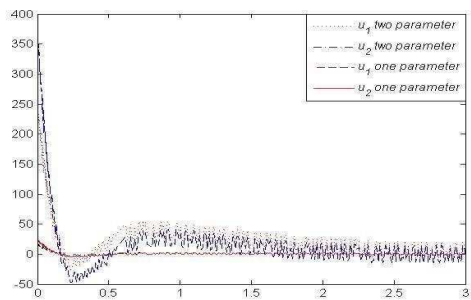


Figure 13. Plant input $u(t)$ for one and two parameter controllers under $d_0(t)$ and $d_m(t)$

for the mixed sensitivity problem (see Fig. 12), while the disturbance at the measurement $d_m(t)$ is well attenuated in Fig. 13 than in Fig. 11. In both problems, as shown by Figures 11 and 13 the magnitude of the plant input is smaller for the two-parameter feedback configuration than for the one-parameter feedback configuration. Figures 10 and 12 show that the overshoot of $q_1(t)$ and $q_2(t)$ are smaller and bigger, respectively, for the two-parameter feedback configuration than for the one-parameter feedback configuration. The stationary state error of Fig. 12 can be diminished as w_h increase, the price to pay is a small high frequency bandwidth for attenuation of $d_m(t)$. Also, the magnitude of the plant input can be diminished, as the value of a decrease, but the time response, and the set of allowable uncertainties are diminished.

If the state is not measurable or cannot be estimated, and if $C_{12} = 0$, then, the free parameters that solve the mixed sensitivity problem are given by Eq. (67) and Eq. (68) of Theorem 4.9, for the one and two parameter feedback configurations, respectively. Let $a = 4$ and $w_h = 600$, using MatLab-Simulink the outputs are shown in Figures 14 and 15. These were realized using the one and two parameter stabilizing controllers given by Eq. (31) and by Eq. (32) of Theorem 4.4, for the non-linear model of the two d.o.f. planar rotational robot, in the feedback configurations of Figures 1 and 2. The reference input is $y_d(t) = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T$ and the initial condition $x(0) = [-\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, under $d_m(t) = 0.1 \sin(1000t)$ and $d_o(t) = 0.1$ for $t > 6$.

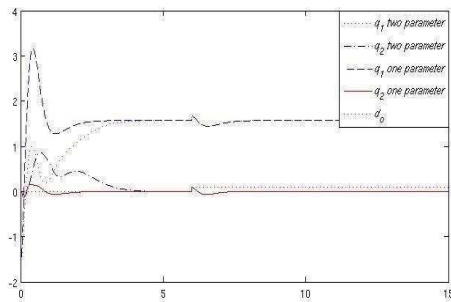


Figure 14. Step response for one and two parameter controllers, under $d_o(t)$ and $d_m(t)$

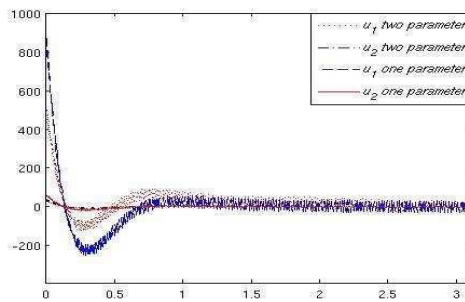


Figure 15. Step response for two parameter controller, under $d_o(t)$ and $d_m(t)$

Fig. 14 shows that the mixed sensitivity problem is solved and the stabilization of the plant is accomplished under the non-linear uncertainties of the robot. Also, the disturbances $d_o(t)$ and $d_m(t)$ are well attenuated at the regulated output $y(t)$, having a small stationary state error. In the one-parameter feedback configuration, the overshoot of $q_1(t)$ and $q_2(t)$ is bigger and lower, respectively, for almost the same time response, than in the two-parameter feedback

configuration. Figures 11, 13 and 15 show that the magnitude of the plant input $u(t)$ is bigger if $C_{12} = 0$ than for full state information.

6. Conclusions

MIMO, strictly proper, lumped, LTI and strongly stabilizable systems with a stabilizable and detectable realization are considered. In particular, fully actuated Euler-Lagrange systems expressed in state space equations are considered. The states are given by the generalized coordinates of position and velocity, this implies that the dimension of the state is even and the dimension of the input is half the dimension of the state. The used approach is to apply algebraic results on a plant in terms of its state space realization. Right and left coprime factorisations over the set of proper and stable rational functions are presented. Also, a solution to the doubly coprime factorisation for strictly proper systems, of the Diophantine equation for full state information systems, and analytic expression for the family of all one and two parameter stabilizing controllers, are proposed. Conditions to get stable controllers are given. Also, analytic expressions for the free parameters are presented, regulating the generalized coordinates of position, rejecting constant disturbance at the input of the plant and solving a mixed sensitivity criterion. The results show that the tuning of the parameter is more complex for the one-parameter configuration and numerical errors increase the dimension of the controller. Regulation and mixed sensitivity are accomplished stabilizing the system in spite of the disturbance and uncertainties that are attenuated, and a small value of the stationary state error is having, at the regulated output. The magnitude of the plant input is smaller for the two-parameter feedback configuration and for full state information than for the one-parameter configuration and when the state is not measurable or cannot be estimated.

References

- Basile G. and Marro G. (1992), *Controlled and Conditioned Invariants in Linear Systems Theory*, Prentice Hall.
- Campos-Delgado D. U. and Zhou K. (2001), " \mathcal{H}_∞ strong stabilization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, 1968–1972.
- Chiang R.Y. and Safonov M.G. (1992), *Matlab Robust Control Toolbox User's Guide*, version 2, Math Works Inc..
- Desoer C. A., Liu R., Murray J. and Saeks R. (1980), "Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 399–412.
- Doyle J. C., Francis B. A. and Tannenbaum A. R. (1992), *Feedback Control Theory*, McMillan.
- Galindo R. (2009), "Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, vol. 223 (I7), 957–971.
- Galindo R. (2008), "Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ control," in the book *Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*, second ed., International SAR, and also in *Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, vol. 2, 141–149 and 15–23.
- Gilbert E. (1963), "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems," *SIAM Journal of Control*, vol. 1, 128–151.
- Horowitz I. (1963), *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press.

- Kalman R.E. (1963), "Mathematical Description of Linear Systems," *SIAM Journal of Control*, vol. 1, 152–192.
- Kelly R. and Santibaez V. (2003), *Control de Movimientos de Robots Manipuladores*, Pearson Prentice Hall.
- Kučera V. (1979), *Discrete linear control, The polynomial equation approach*, Wiley, Chichester.
- Nett C. N., Jacobson C. A. and Balas M. J. (1984), "A connection between state-space and doubly coprime fractional representations," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 29, no. 9, 831–832.
- Vidyasagar M. (1985), *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Massachusetts: The MIT Press Cambridge.
- Youla D. C., Bongiorno J. J. and Lu C. N. (1974), "Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants," *Automatica*, 159–173.
- Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J. (1976), "Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 319–338.
- Zeren M. and Özbay H. (1999), "On the synthesis of stable \mathcal{H}_∞ controllers," *Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 2, 431–435.
- Zhou K., Doyle J. C. and Glover K. (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.

Apéndice B

Expresión analítica de la doble factorización coprima para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada.

Aceptado en la Asociación Mexicana de Control Automático (AMCA 2011)

Expresión analítica de la doble factorización coprime para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada

A. Bonilla, R. Galindo

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León

San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon 66450, Mexico

bbconcord@hotmail.com, rgalindo@gama.fime.uanl.mx

Teléfono: (52)-81-83294020 ext. 5773

Resumen—Se presenta una fórmula explícita de la doble factorización coprime para sistemas cuadrados. Se consideran sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), estrictamente propios, con parámetros concentrados y Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) con una realización estabilizable y detectable. Se asume que la dimensión del estado es par, la dimensión de la entrada es la mitad de la dimensión del estado, y la planta es fuertemente estabilizable. Se proponen factorizaciones coprimas derecha e izquierda de la función de transferencia en términos de su realización en espacio de estados, se resuelven ecuaciones Diophantinas derecha e izquierda, y se obtienen los controladores estabilizantes usando la parametrización de Youla. Se dan condiciones para obtener estabilidad fuerte y se fijan los parámetros libres de los controladores estabilizantes resolviendo un problema de sensibilidad mezclada. Se ilustran los resultados a través de un ejemplo de simulación de un sistema de amortiguamiento de medio carro.

Palabras clave: Doble factorización coprime, identidad de Bezout, sensibilidad mezclada, controladores estabilizantes de uno y dos parámetros, parametrización de Youla, estabilidad fuerte.

I. INTRODUCCIÓN

El propósito principal es dar una fórmula explícita de la doble factorización coprime para sistemas cuadrados, *i.e.*, la dimensión de la salida es igual a la dimensión de la entrada, y fijar sus parámetros libres resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, esto es, resolviendo simultáneamente estabilidad robusta y desempeño robusto (ver el libro de (Zhou K., Doyle J. C. y Glover K., 1996)). Se consideran sistemas MEMS, estrictamente propios, con parámetros concentrados y LIT con una realización estabilizable y detectable. Se asume que la planta satisface la propiedad de entrelazamiento par (p.e.p.) para asegurar que existe un controlador estable dentro del conjunto de controladores estabilizantes, *i.e.*, esa planta es fuertemente estabilizable. Un controlador estable es importante por razones prácticas como rompimiento de lazo, fallas o para minimizar errores numéricos.

El control de sensibilidad mezclada (Zhou K., Doyle J. C. y Glover K., 1996) es un método de diseño de lazo cerrado basado en la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de la

función de sensibilidad a la salida, mejorando la regulación y la atenuación de perturbaciones aditivas a la salida, y en la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre, preservando estabilidad bajo incertidumbres. El método está basado en que usualmente las perturbaciones son de bajas frecuencias y en que los modelos matemáticos son más exactos y precisos en bajas frecuencias, despreciando generalmente las dinámicas de altas frecuencias.

La parametrización de todos los controladores estabilizantes da una solución al problema de síntesis de controladores LIT como lo proponen, (Vidyasagar M., 1985) (Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saeks R., 1980), (Kučera V., 1979) y (Youla D. C., Jabr H. A. y Bongiorno J. J., 1976). Los controladores estabilizan a una planta dada y los problemas de desempeño pueden resolverse por medio de la selección correcta de sus parámetros libres. Hay pocos algoritmos para obtener expresiones analíticas de los controladores estabilizantes. Fórmulas explícitas para la doble representación fraccional coprime están dadas en (Nett C. N., Jacobson C. A. y Balas M. J., 1984). Primero se estabiliza a la planta por retroalimentación estática del estado estimado y entonces se resuelve la identidad de Bezout. Los algoritmos computacionales de (R.Y. Chiang y M.G. Safonov, 1992) que usan estas fórmulas pueden producir controladores de alto orden. Esta solución ha sido utilizada el problema de estabilidad fuerte \mathcal{H}_∞ en (Campos-Delgado D. U. y Zhou K., 2001) y (Zeren M. y Özbay H., 1999). En la sección IV se aplican resultados algebraicos sobre una planta en términos de su realización en espacio de estado. Primero, se obtienen factorizaciones coprimas derecha e izquierda (*f.c.d.* y *f.c.i.*, respectivamente) de la función de transferencia sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables \mathcal{RH}_∞ , como ha sido hecho por (Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saeks R., 1980). Entonces, se resuelven las ecuaciones Diophantinas (ver el libro de (Vidyasagar M., 1985)) y finalmente se dispone de la familia de controladores estabilizantes a través de la parametrización de Youla como lo proponen (Kučera V., 1979) y (Youla D. C., Jabr H. A. y Bongiorno J.

J., 1976). La solución propuesta a la doble factorización coprima de la Section IV, es menos compleja con respecto a la de (Galindo R., 2009). No se requiere el cambio de coordenadas usado en (Galindo R., 2009) para asegurar que las factorizaciones pertenezcan a \mathfrak{RH}_∞ , para las factorizaciones propuestas, disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional. Además, se relaja la suposición de información completa del estado de (Galindo R., 2009) en la Sección IV, considerando plantas estrictamente propias.

Se revisa la estabilización fuerte y la parametrización de todos los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros en la Section II. Se da la clase de sistemas considerada en la Section III. Se presentan los resultados principales en la Section IV. Además, se fijan los parámetros libres de los controladores estabilizantes resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, como ha sido hecho por (Galindo R., 2008). Se presentan fórmulas explícitas para los parámetros libres. Se ilustran los resultados por un ejemplo de simulación de un sistema de amortiguamiento de medio carro en la Section V.

Notación. $\mathfrak{R}(s)$ y \mathfrak{RH}_∞ denotan los conjuntos de funciones racionales de la variable compleja s con coeficientes reales y de propias y estables, respectivamente; \mathfrak{R} el conjunto de los números reales; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ y $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ son las aproximaciones asintóticas de una matriz $A(s) \in \mathfrak{R}(s)$, en bajas y altas frecuencias, respectivamente; $e I_p$ la matriz identidad de dimensión $p \times p$.

II. ANTECEDENTES

El problema de estabilización fuerte ha sido atacado por (Youla D. C., Bongiorno J. J. y Lu C. N., 1974) para plantas con una entrada y una salida y (Vidyasagar M., 1985) extendió este resultado a plantas MEMS, dando la siguiente p.e.p.,

Teorema 1. Una planta dada $P(s)$ es fuertemente estabilizable si el número de polos de $P(s)$ (contados de acuerdo a su grado McMillan) entre cada par de ceros de transmisión reales, incluyendo el infinito, en el semiplano derecho, es par.

El problema de estabilidad fuerte es importante por razones prácticas, como rompimiento de lazo, fallas o para minimizar errores numéricos.

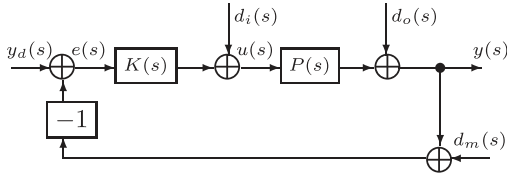


Figura 1. Sistema retroalimentado con un controlador de un parámetro.

Una configuración de un parámetro se muestra en la Fig. 1, donde $P(s)$ representa la planta; $K(s)$ el controlador; $u(s)$ y $y(s)$ son la entrada y salida de la planta, respectivamente; $y_d(s)$ es la entrada de referencia; $e(s)$ es la

señal de error; y , $d_i(s)$, $d_o(s)$ y $d_m(s)$ son perturbaciones externas a la entrada, la salida y la medición de la planta, respectivamente. En lo que sigue se asume que la norma \mathcal{H}_2 de las perturbaciones es acotada. La ley de control $u(s) = K(s)e(s)$ es generada únicamente por señal de error $e(s) = y_d(s) - y(s)$, donde $y_d(s)$ es la entrada de referencia. La parametrización de todos los controladores estabilizantes de un parámetro como lo proponen (Vidyasagar M., 1985), (Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Saks R., 1980), (Kučera V., 1979), y (Youla D. C., Jabr H. A. y Bongiorno J. J., 1976), está dada por,

Teorema 2. Suponga que $P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$ y $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ en la configuración retroalimentada de la Fig. 1. Sean $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$ y $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ cualesquier f.c.d. y f.c.i. de $P(s)$ con $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ y $\tilde{N}(s)$ perteneciendo a \mathfrak{RH}_∞ . Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan a $P(s)$ está dado por,

$$\begin{aligned} K(s) &= \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s) \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ es el parámetro libre satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, y $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son la solución de la ecuación Diophantina,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2)$$

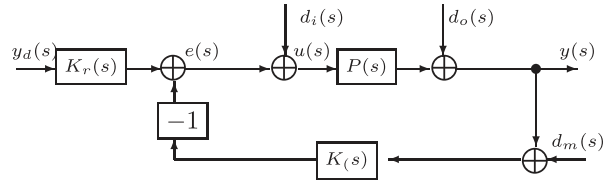


Figura 2. Sistema retroalimentado con controlador de dos parámetros.

Una versión de configuración de control de dos parámetros se muestra en la Fig. 2 (ver (Vidyasagar M., 1985) y (Horowitz I., 1963)). En contraste con el controlador de un parámetro, $u(s)$ es generado por dos señales independientes, siendo $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$. Si $K_r(s) = K(s)$, entonces se obtiene la configuración retroalimentada estándar de la Fig. 1. La parametrización de todos los controladores estabilizantes de dos parámetros como lo propone (Vidyasagar M., 1985), está dada por,

Teorema 3. Suponga que $K_r(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$, $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ en la configuración retroalimentada de la Fig. 2 y sean $P(s)$, $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ y $R(s)$ como en el Teorema 2. Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan a $P(s)$ está dado por,

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ es otro parámetro libre, $\tilde{N}_k(s) = X(s) + R(s)\tilde{D}(s)$ y $\tilde{D}_k(s) = Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)$.

El papel de $K(s)$ en la Fig. 1 es garantizar estabilidad y mejorar el desempeño; mientras que, en la Fig. 2 se utiliza el controlador $K_r(s)$ para mejorar el desempeño y el controlador $K(s)$ garantiza estabilidad. Si $K_r(s)$ es inestable, su salida crece sin límite, una alternativa es obtener un denominador coprimo común, $\tilde{D}_k(s)$, de ambos controladores (ver (Vidyasagar M., 1985)), ésto es, $K(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)\tilde{N}_k(s)$ y $K_r(s) = \tilde{D}_k^{-1}(s)Q(s)$.

En la Sección IV se presenta una solución analítica de la doble factorización coprima para sistemas estrictamente propios, para la clase de sistemas dada en la siguiente sección.

III. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

Considere una realización (F, G, H) causal, LIT, estabilizable y detectable de un sistema dado, ésto es, los subsistemas no controlable y no observable son estables. Considere en lo que sigue la realización del subsistema controlable y observable, *i.e.*, la realización mínima. Más aún, dado que todas las entradas de $u(t)$ son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad, un cambio de coordenadas puede seleccionarse, obteniendo la realización $(A, [0 \ B_m^T]^T, C)$ en nuevas coordenadas, donde $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular. Además, se asume que la dimensión del estado de la planta n es par, la dimensión de la entrada de la planta $m = n/2$, la dimensión de la salida de la planta $p = m$, y que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está particionada de acuerdo a la partición a bloques de $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, donde $A_{11} = 0$, A_{12} es una matriz no singular, y C_{11} o C_{12} es una matriz no singular, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix}$$

Como se muestra por (Galindo R., 2009), la formulación Euler-Lagrange con información completa del estado y completamente actuada,

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C_o(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + G(q(t)) = u(t) \quad (5)$$

es una clase de sistemas dinámicos no lineales que tiene una realización linealizada de la forma (4), donde $M(q(t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ denota la inercia, $C(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ las fuerzas de Coriolis-centrípetas, $G(q(t)) \in \mathbb{R}^m$ las fuerzas gravitacionales, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ las fuerzas generalizadas y $q(t) \in \mathbb{R}^m$, $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^m$ y $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^m$ las coordenadas generalizadas de posición, velocidad y aceleración, respectivamente.

La estructura de la realización en espacio de estado dada por (4) se requiere para las factorizaciones propuestas y para los resultados principales presentados en la siguiente sección.

IV. DOBLE FACTORIZACIÓN COPRIMA

Si el estado es medido o estimado $\tilde{N}(s)$ es una matriz larga de dimensión $n \times m$, entonces, $\tilde{N}(s)$ no tiene una inversa a la derecha y por lo tanto la ecuación Diophantine

izquierda $\tilde{N}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I$ no tiene una solución. Sin embargo, como se mostrará en lo que sigue, para sistemas cuadrados esta ecuación Diophantina tiene una solución y así la doble factorización coprima o identidad de Bezout también tiene una solución.

Se consideran dos casos para la realización en espacio de estado dada por la Eq. (4), cuando C_{11} o C_{12} es una matriz no singular. Dado que la aproximación de altas frecuencias de la planta $P(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ es $P_h = (1/w_h)CB$ donde w_h es una frecuencia fija en la banda de altas frecuencias de $P(s)$, si $C_{11} = 0$ y C_{12} es una matriz no singular, entonces $P_h = (1/w_h)C_{12}B_m$, mientras que si $C_{12} = 0$ y C_{11} es una matriz no singular, entonces $P_h = 0$. En el primer caso $P_h = (1/w_h)C_{12}B_m$ es una matriz no singular que es equivalente al grado relativo igual a 1 o los órdenes de los ceros en infinito son todos iguales a 1. El sistema se comporta a grosso modo como muchos sistemas independientes de primer orden con una entrada y una salida (de hecho en este caso el sistema es desacoplable renglón por renglón).

Una solución a la doble factorización coprima se propone por,

Lema 1. Considere la realización en espacio de estado dada por la Ec. (4) satisfaciendo $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada, y la doble factorización coprima o identidad de Bezout está dada por,

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ D(s) & -\tilde{X}(s) \end{bmatrix} = I_{2m} \quad (6)$$

Suponga que $0 < a \in \mathbb{R}$, $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y A_{12} son matrices no singulares, y $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12})$. Si $C_{12} = 0$ y $C_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular, una solución de la doble factorización coprima sobre $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ es,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2}B_m \\ N(s) &= \frac{1}{(s+a)^2}C_{11}A_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a}(X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a}(s I_m + Y_d) B_m \\ \tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_d s + A_{21} A_{12} Y_d + a^3 I_m) \\ \tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + Y_d) \end{aligned} \quad (8)$$

donde $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ y $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. Si $C_{11} = 0$, y A_{21} y $C_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices no singulares, una solución de la doble factorización coprima sobre $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ es,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s)C_{12}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{s}{(s+a)^2}B_m \\ N(s) &= \frac{s}{(s+a)^2}C_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a}(X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) C_{12}^{-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a}(s I_m + Y_r) B_m \\ \tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) \\ \tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{12} (s I_m + Y_r) \end{aligned} \quad (10)$$

donde $X_r := A_{22} - Y_r + 3aI_m$ y $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$.

Prueba. Multiplicando $(sI_n - A)^{-1}$ por B y usando (ver (Zhou K., Doyle J. C. y Glover K., 1996)),

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & -N_{11}^{-1} N_{12} \Phi^{-1} \\ * & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde $*$ denota cualesquier valor finito, y $N_{11} + \Phi := N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}$ son matrices no singulares. Entonces,

$$(sI_n - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)^2} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \\ \frac{s}{(s+a)^2} \Gamma^{-1}(s) B_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

Si $C_{12} = 0$ y $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular, de la Ec. (12),

$$P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (13)$$

Dado que por hipótesis C_{11} y A_{12} son matrices no singulares, entonces, se siguen los resultados de la Ec. (7). Sea,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + X_0) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a} (sI_m + Y_d) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty \\ \tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty \\ \tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (sI_m + \tilde{Y}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty \end{aligned} \quad (14)$$

donde $X_d, X_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_0, Y_d$ y \tilde{Y}_0 son matrices constantes que pueden determinarse algebraicamente igualando los términos de los polinomios cúbicos de las ecuaciones Diophantinas. Por lo tanto, las ecuaciones Diophantinas $X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m$ y $\tilde{X}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I_m$ para la Eq. (7) son,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+a)^3} (X_d s + X_0) + \frac{1}{s+a} (sI_m + Y_d) \Gamma(s) &= I_m \text{ y} \\ \frac{1}{(s+a)^3} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) + \frac{1}{s+a} \Gamma(s) (sI_m + \tilde{Y}_0) &= I_m \end{aligned} \quad (15)$$

respectivamente. Entonces, soluciones analíticas de la ecuación Diophantina son,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= Y_d, \quad \tilde{X}_1 = X_d \\ X_0 &= Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m \\ \tilde{X}_0 &= A_{21} A_{12} \tilde{Y}_0 + a^3 I_m \end{aligned} \quad (16)$$

donde se utiliza $Y_d A_{22} = A_{22} \tilde{Y}_0$. Así, de la Ec. (14) se sigue el resultado de la Ec. (8). Si $C_{11} = 0$, y A_{21} y $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ son matrices no singulares, de la Ec. (12),

$$P(s) = \frac{s}{(s+a)^2} C_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (17)$$

Por lo tanto, se siguen los resultados (9) y (10) análogamente haciendo $X(s) = (1/(s+a))(X_r s + X_0) C_{12}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty$, $Y(s) = (1/(s+a))(sI_m + Y_r) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty$, $\tilde{X}(s) = (1/(s+a)) B_m^{-1} (X_r s + X_0) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $\tilde{Y}(s) = (1/(s+a)) C_{12} (sI_m + Y_r) \in \mathfrak{RH}_\infty$ donde $X_0 = Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$. ■

En la prueba del Lema 1 se resuelven las ecuaciones Diophantinas directamente en \mathfrak{RH}_∞ sin la transformación bilineal $\lambda = 1/(s+a)$, usada en (Doyle J. C., Francis B. A. y Tannenbaum A. R., 1992) y (Zhou K., Doyle J. C.

y Glover K., 1996), dado que las soluciones en el anillo de los polinomios en λ son más intrincadas. Además, los resultados del Lema 1 son menos complejos con respecto a los de (Galindo R., 2009). En el Lema 1 las factorizaciones pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ y no se requiere el cambio de coordenadas utilizado en (Galindo R., 2009), disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional para las factorizaciones del Lema 1.

Basandose en el Lema 1 la parametrización de todos los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros está dada por,

Teorema 4. *Considere la realización en espacio de estado dada por la Ec. (4) en las configuraciones retroalimentadas de las Figuras 1 y 2, satisfaciendo $n = 2m$ donde n es la dimensión del estado y m es la dimensión de la entrada. Entonces, los conjuntos de todos los controladores de uno y dos parámetros que estabilizan a la Ec. (4) son,*

$$K(s) = \hat{D}_k^{-1}(s) \hat{N}_k(s) \quad (18)$$

y

$$[K_r(s) \quad K(s)] = \hat{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \quad \hat{N}_k(s)] \quad (19)$$

respectivamente, donde $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfaciendo $\det(\hat{D}_k(s)) \neq 0$ y $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son parámetros libres.

Sea $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ una matriz no singular, $0 < a \in \mathfrak{R}$, y $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2 I_m - s A_{22} - A_{21} A_{12})$. Si $C_{12} = 0$, y $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ y A_{12} son matrices no singulares,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= \left(sI_m + Y_d - \frac{1}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

donde $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ y $Y_d := A_{22} + 3a I_m$. Si $C_{11} = 0$, y A_{21} y $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ son matrices no singulares,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= \left(sI_m + Y_r - \frac{s}{s+a} R(s) \right) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] C_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

donde $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$ y $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$.

Más aún, suponga que $P(s) = (sI_n - A)^{-1} B$ satisface la p.e.p. y,

$$\begin{aligned} \det(s^2 I_m + (aI_m + Y_d)s + aY_d - R(s)), \text{ y} \\ \det(s^2 I_m + (aI_m + Y_r - R(s))s + aY_r), \end{aligned} \quad (22)$$

son polinomios Hurwitz, entonces Ec. (18) y Ec. (19) son estables, i.e., los controladores $K(s)$ y $K_r(s)$ pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ , respectivamente.

Prueba. Sea,

$$\hat{D}_k(s) := (s+a) \tilde{D}_k(s), \text{ y } \hat{N}_k(s) := (s+a) \tilde{N}_k(s) \quad (23)$$

entonces, los resultados de las Ec. (18) y Ec. (19) se siguen directamente de las Ec. (1) y Ec. (3) reemplazando la Ec. (7), Ec. (8) y (10). Dado que $P(s)$ satisface la p.e.p. entonces,

existen controladores estables $K(s)$ y $K_r(s)$ dentro de las familias de controladores estabilizantes dadas por las Ec. (18) y Ec. (19). Si $\det(\tilde{D}_k(s))$ es un polinomio Hurwitz entonces $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Dado que $s = -a$ es un polo estable y B_m es una matriz no singular, $K(s)$ y $K_r(s)$ son estables si los polinomios de la Ec. (22) son Hurwitz. ■

Como se muestra por la Ec. (22) del Teorema 4 la estabilidad de los controladores estabilizantes puede lograrse seleccionando a y $R(s)$ si $C_{12} = 0$, sin embargo ésto es una tarea más difícil si $C_{11} = 0$. Así, si $K_r(s)$ es inestable en la configuración retroalimentada con controlador de dos parámetros, éste deberá implementarse obteniendo un denominador común coprimo, $\tilde{D}_k(s)$, de ambos controladores.

IV-A. Problema de sensibilidad mezclada

Se considera la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ de la aproximación de bajas frecuencias de la función de sensibilidad a la salida $\|S_{ol}\|_\infty$ sujeta a una ecuación algebraica de restricción que asigna el mismo valor a las normas \mathcal{H}_∞ de las aproximaciones de bajas y altas frecuencias de la función de sensibilidad a la salida y de la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, respectivamente (ver el trabajo de (Galindo R., 2008)). Este problema de sensibilidad mezclada involucra la minimización simultánea de $\|S_{ol}\|_\infty$ y de $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$, ésto es, $\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty$ sujeta a,

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (24)$$

Se resuelve este problema fijando los parámetros libres de los controladores estabilizantes, cuando la entrada de referencia de velocidad es cero. Una solución exacta a (24) para sistemas estrictamente propios, se propone por,

Teorema 5. *Considere la realización en espacio de estados dada por la Ec. (4) de la planta $C(sI_n - A)^{-1}B$ en las configuraciones retroalimentadas de las Figuras 1 y 2. Suponga que $K(s)$ y $K_r(s)$ están dadas por el Teorema 4. Si $C_{12} = 0$, y $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular, el parámetro libre $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ sea $a(rI_m + A_{22})$, y $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ sea $qa^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$. Entonces, los valores óptimos de r y q para un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida son,*

$$r = \frac{a(3\|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty - a^2b)}{a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty} \quad (25)$$

y,

$$q = \frac{w_h^2}{a^2 + w_h^2} \quad (26)$$

respectivamente, donde,

$$\begin{aligned} b &:= \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_d + aA_{22})A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty \\ m &:= \frac{1}{3aw_h^2} (\|C_{11}A_{12}(X_d + aY_d)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty - w_h^2b) \end{aligned} \quad (27)$$

siendo $Y_d := A_{22} + 3aI_m$ y $X_d := Y_dA_{22} + A_{21}A_{12} + 3a^2I_m$.

Prueba. La función de transferencia de la entrada de referencia $y_d(t)$ a la salida $y(t)$ está dada por $T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s)$ (ver (Vidyasagar M., 1985)), en la configuración retroalimentada de un parámetro mostrada en la Fig. 1 donde $N(s)$ y $\tilde{N}_k(s)$ están dadas por (7) y (21), respectivamente. Las aproximaciones de altas y bajas frecuencias de $\Gamma(s)$ son $\Gamma_h = I_m$ y $\Gamma_l = (-1/a^2)A_{21}A_{12}$, respectivamente. Para asegurar que $\|S_{ol}\|_\infty = 0$ para cierto valor de r , si $C_{12} = 0$, entonces se propone $R(s)$ sea $a(rI_m + A_{22})$, así,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_d + a(rI_m + A_{22}))A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (28)$$

donde $w_h > 0$ es una frecuencia fija en al banda de altas frecuencias de $P(s)$. Por otro lado, la aproximación de bajas frecuencias de $T_o(s)$ es,

$$T_{ol} = I_m + \frac{3a-r}{a^3}C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1} \quad (29)$$

Por lo tanto, dado que $a > 0$, la norma \mathcal{H}_∞ de $S_{ol} = I_m - T_{ol}$ es,

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{|r-3a|}{a^3} \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (30)$$

La ecuación de restricción $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$ tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas de la Fig. 3, ésto es, de la Fig. 3,

$$mr + b = \left(\frac{-1}{a^3}r + \frac{3}{a^2}\right) \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (31)$$

que implica el resultado (25). Además, $T_o(s) = N(s)Q(s)$ (ver (Vidyasagar M., 1985)) en la configuración retroalimentada de dos parámetros mostrada en la Fig. 2. Si $C_{12} = 0$, entonces $Q(s)$ es $qa^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$, así, de (7), las normas \mathcal{H}_∞ de las aproximaciones de altas y bajas frecuencias de $T_o(s)$ y $S_o(s) := I_n - T_o(s)$ son,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{a^2}{w_h^2}|q| \quad \text{y} \quad \|S_{ol}\|_\infty = |1-q| \quad (32)$$

respectivamente. Por lo tanto, $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$ tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas de la Fig. 4, i.e., de la Fig. 4,

$$\frac{a^2}{w_h^2}q = -q + 1 \quad (33)$$

que implica el resultado (26). ■

Si $C_{12} = 0$, de (25) y (30),

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{(b+3am)\|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty}{a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty} \quad (34)$$

en la configuración de un parámetro. Además, de (26) y (32),

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{a^2}{a^2 + w_h^2} \quad (35)$$

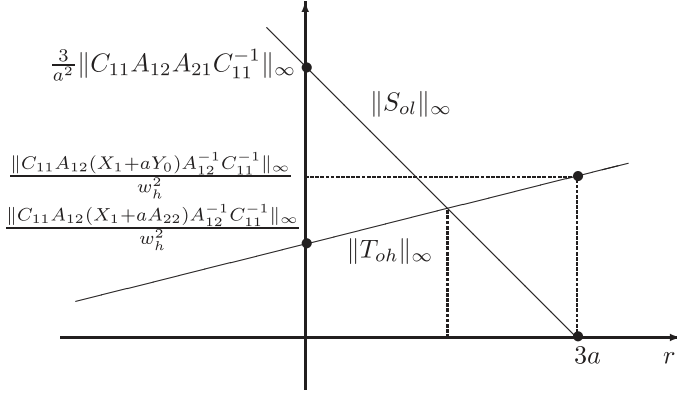


Figura 3. Función de intersección para una configuración de un parámetro

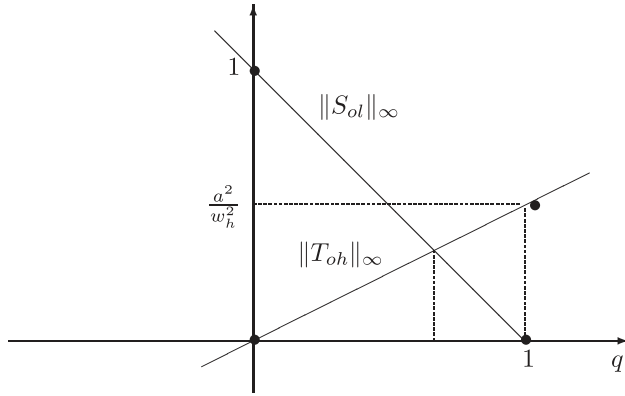


Figura 4. Función de intersección para una configuración de dos parámetros

en la configuración de dos parámetros. Si $w_h \rightarrow \infty$, entonces, de (27), $m \rightarrow 0$ y $b \rightarrow 0$, así, de (34) ambos $\|T_{oh}\|_\infty$ y $\|S_{ol}\|_\infty$ tienden a cero en la configuración retroalimentada de la Fig. 1. Además, si $w_h \gg a^2$, entonces de (35) ambos $\|T_{oh}\|_\infty$ y $\|S_{ol}\|_\infty$ tienden a a^2/w_h^2 en la configuración retroalimentada de la Fig. 2. Sin embargo, si $b \rightarrow 0$ y $m \rightarrow 0$, entonces $r \rightarrow 3a$ y de (22), si $r \rightarrow 3a$, los controladores se vuelven inestables. Por lo tanto, para a suficientemente pequeña tal que la estabilidad de los controladores se preserve, se resuelve el problema de sensibilidad mezclada incrementando w_h .

Los resultados se ilustran por un ejemplo de simulación de un sistema de amortiguamiento de medio carro.

V. SISTEMA DE AMORTIGUAMIENTO DE MEDIO CARRO

El modelo del sistema de amortiguamiento de medio carro está representado por (ver (Galindo R., 2009)),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} u(t) + Hd(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (36)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{m} & \frac{1}{J}d_1 \\ \frac{-1}{m} & \frac{1}{J}d_2 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -d_1 k_1 & -d_2 k_2 \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{-(b_{s2}+b_{s1})}{m} & \frac{-(d_2 b_{s2}-d_1 b_{s1})}{J} \\ \frac{-(d_2 b_{s2}-d_1 b_{s1})}{m} & \frac{-(b_{s1} d_1^2 + b_{s2} d_2^2)}{J} \end{bmatrix} \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_{s1} & 1 & b_{s2} \\ -d_1 b_{s1} & 0 & d_2 b_{s2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

siendo m y J la masa y el momento de inercia del cuerpo del vehículo, respectivamente, d_2 y d_1 las distancias entre la suspensión delantera y trasera al centro de masas (CM) del vehículo, respectivamente, k_1 y k_2 los coeficientes de elasticidad de la suspensión delantera y trasera respectivamente, b_{s2} y b_{s1} los coeficientes de amortiguamiento de la suspensión delantera y trasera, respectivamente.

Sea $u(t) := [F_{act1} \ F_{act2}]^T$, $d(t) := [V_{road1}(t) \ F_{masstransfer}(t) \ V_{road2}(t)]^T$ donde $F_{masstransfer}(t)$ y $V_{roadi}(t)$, $i = 1, 2$, son entradas de perturbaciones externas medibles y no medibles, y $x(t) := [x_{rel1}(t) \ x_{rel2}(t) \ Jw_j(t) \ mV_m(t)]^T$, donde $x_{rel1}(t)$ y $x_{rel2}(t)$ son las posiciones relativas de la suspensión delantera y trasera respectivamente, $V_m(t)$ y $w_j(t)$ son la velocidad vertical y angular del cuerpo del vehículo en el CM.

Note que la Ec. (36) está en la forma (4) y los bloques A_{12} , C_{11} y B_m son matrices no singulares. Considere los valores medios de los parámetros de la planta dados en la tabla 1, (ver (Galindo R., 2009)),

Parámetro	Valor	Unidad
m	1794,4	kg
J	3443,05	kg m ²
d_2	1,271	m
d_1	1,716	m
k_2	66824,4	N/m
k_1	18615	N/m
b_{s2}	1190	N s/m
b_{s1}	1000	N s/m

Todos los polos de la planta nominal $P(s)$ son estables y usando el Teorema 1 $P(s)$ es fuertemente estabilizable. Por el Lema 1 se obtienen las *f.c.d.* y *f.c.i.* de la planta así como las soluciones de las ecuaciones Diophantinas derecha e izquierda. Usando el Teorema 4 se parametriza toda la familia de controladores estabilizantes de la planta para las configuraciones de 1 y 2 parámetros. Por medio del Teorema 5 se fijan los parámetros libres resolviendo un problema de sensibilidad mezclada para las configuraciones de 1 y 2 parámetros.

Seleccionando $a = 10$, la Fig. 5 muestra que conforme w_h se incrementa las normas infinito de las funciones de

sensibilidad son minimizadas sin embargo, si $w_h < a$, entonces $\|S_{ol}\|_\infty$ y $\|T_{oh}\|_\infty$ incrementan su valor con lo cual se pierde el objetivo de la minimización de estas normas, sin embargo, se espera que $w_h \gg a$ dado que se interpreta como una frecuencia en la banda de altas frecuencias.

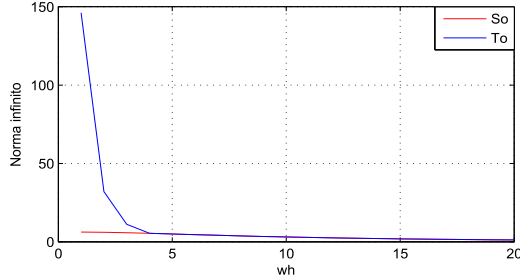


Figura 5. Normas infinito de las funciones de sensibilidad

En la Fig. 6 se muestra que si w_h toma valores grandes se puede corregir el valor en estado estacionario, se tiene una atenuación mayor de las perturbaciones de bajas frecuencias en la salida del sistema y las frecuencias de corte de las funciones de sensibilidad no se mueven.

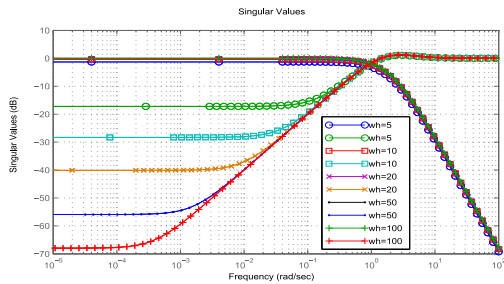


Figura 6. Función de sensibilidad al variar w_h

En la Fig. 7 se muestra como si a toma valores grandes la atenuación de las perturbaciones de bajas frecuencias a la salida es deteriorada, sin embargo se incrementa el ancho de banda para la referencia. Esto se ve reflejado también en la magnitud de la entrada de la planta donde se incrementa la energía en el transitorio.

Considere el controlador de un parámetro con $a = 5$, $w_h = 100$, $y_d(t) = [1 \ 1.25]^T$ y $d(t) = [\sin(300t) \ 1 \ \sin(300t)]^T$. En la Fig. 8 se muestra la atenuación de las perturbaciones, y el error en estado estacionario puede disminuirse ajustando los parámetros a , w_h o ambos.

Sea para el controlador de dos parámetros $a = 2$, $w_h = 100$ y $d(t) = [\sin(300t) \ 1 \ \sin(300t)]^T$, las perturbaciones también son atenuadas como se esperaba, además se tiene un mejor desempeño en esta configuración con respecto a la configuración de un parámetro (ver Fig. 9). En la Fig. 8 se puede ver un sobre paso negativo.

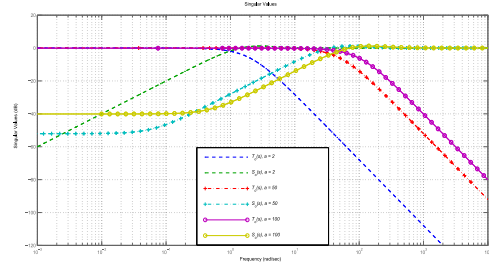


Figura 7. Función de sensibilidad al variar a

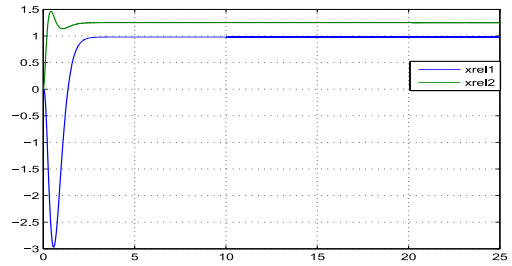


Figura 8. Salida con el controlador de un parámetro

Se muestran graficas de $u(t)$ en las Fig. 10 y 11, las perturbaciones afectan directamente a $u(t)$ por lo cual la efectividad del control queda sujeta al ancho de banda del actuador para poder atenuar las perturbaciones.

VI. CONCLUSIONES

Se consideran sistemas MEMS, estrictamente propios, de parámetros concentrados, LTI y fuertemente estabilizables con una realización estabilizable y detectable. En particular, se consideran sistemas Euler-Lagrange completamente actuados expresados en ecuaciones en espacio de estados. Los estados están dados por las coordenadas generalizadas de posición y velocidad, esto implica que la dimensión del estado es par y la dimensión de la salida es la mitad de la dimensión del estado. El enfoque utilizado es aplicar resultados algebraicos en una planta en términos de su realización en espacio de estado. Se presentan factorizaciones derecha e izquierda sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables. Además, una solución a la doble factorización coprime para sistemas estrictamente propios, y se proponen expresiones analíticas de las familias de todos los controladores estabilizantes de uno y dos parámetros. Se dan condiciones para obtener controladores estables. Además, se presentan expresiones analíticas para los parámetros libres, resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada. Los resultados muestran que la sintonización de los parámetros es más compleja para la configuración de un parámetro y errores numéricos incrementan la dimensión del controlador. Se logra sensibilidad mezclada estabilizando el sistema a pesar de las perturbaciones e incertidumbres

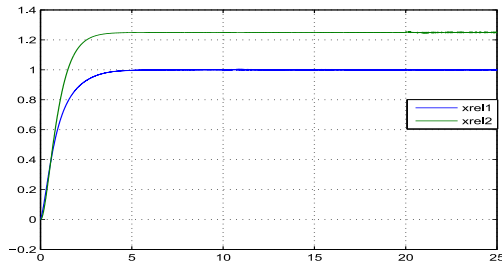


Figura 9. Salida con el controlador de dos parámetros

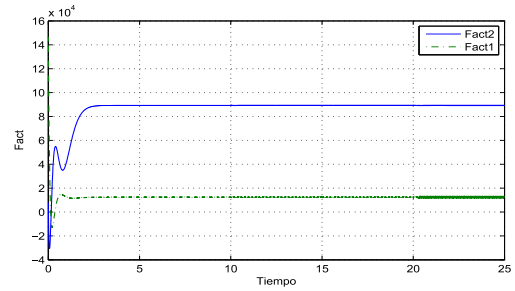


Figura 11. Salida con el controlador de dos parámetro

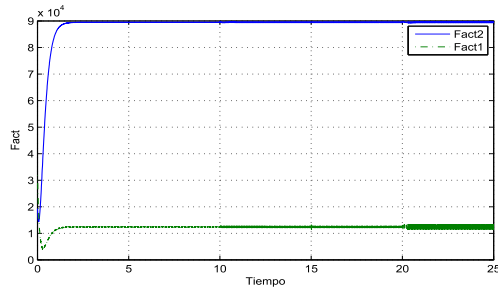


Figura 10. Entrada de la planta con el controlador de un parámetro

que son atenuadas, y se tiene un pequeño valor del error en estado estacionario, en la salida regulada. Se tiene un mejor desempeño y la magnitud de la entrada de la planta es menor para la configuración retroalimentada de dos parámetros que para la configuración de un parámetro.

REFERENCIAS

- Basile G. y Marro G. (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear Systems Theory*. Prentice Hall.
- Campos-Delgado D. U. y Zhou K. (2001). \mathcal{H}_∞ strong stabilization, *Trans. on Automatic Control (TAC)*, **46**, no. 12, 1968–1972.
- R.Y. Chiang y M.G. Safonov (1992). *Matlab Robust Control Toolbox User's Guide*, version 2. Math Works Inc..
- Desoer C. A., Liu R., Murray J. y Sacks R. (1980). "Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis", *TAC*, 399–412.
- Doyle J. C., Francis B. A. y Tannenbaum A. R. (1992). *Feedback Control Theory*. McMillan.
- Galindo R. (2009). Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, **223** (17), 957–971.
- Galindo R. (2008). Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ control, en el libro *Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*, segunda ed., InternationalSAR, y también en *Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, **2**, 141–149 y 15–23.
- Horowitz I. (1963). *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press.
- Kelly R. y Santibañez V. (2003). *Control de Movimientos de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice Hall.
- Kučera V. (1979). *Discrete linear control, The polynomial equation approach*. Wiley, Chichester.
- Nett C. N., Jacobson C. A. y Balas M. J. (1984). A connection between state-space and doubly coprime fractional representations, *TAC*, **29**, no. 9, 831–832.
- Vidyasagar M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. Massachusetts, The MIT Press Cambridge.

- Youla D. C., Bongiorno J. J. y Lu C. N. (1974). Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants, *Automatica*, 159–173.
- Youla D. C., Jabr H. A. y Bongiorno J. J. (1976). Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case, *TAC*, 319–338.
- Zeren M. y Özbay H. (1999). On the synthesis of stable \mathcal{H}_∞ controllers, *TAC*, **44**, no. 2, 431–435.
- Zhou K., Doyle J. C. y Glover K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.