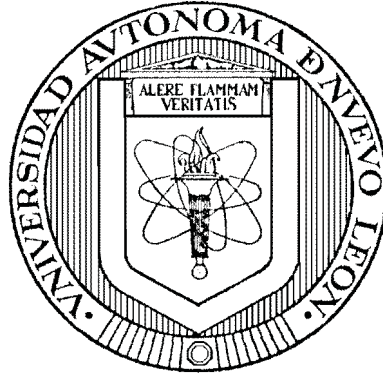


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Posgrado



CONTROL ROBUSTO DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES
EN EL TIEMPO

POR

MIGUEL ANGEL FLORES GUERRERO

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA

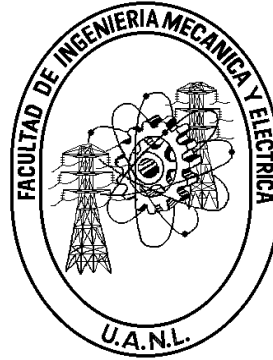
San Nicolás de los Garza, N.L.

marzo, 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Posgrado



CONTROL ROBUSTO DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES
EN EL TIEMPO

POR

MIGUEL ANGEL FLORES GUERRERO

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA

San Nicolás de los Garza, N.L.

marzo, 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis "Control Robusto de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo", realizada por el estudiante M. en C. Miguel Angel Flores Guerrero, con número de matrícula 1609593, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Evaluación de Tesis

Dr. René Galindo Orozco
Director

Dr. Alberto Cavazos González
Revisor

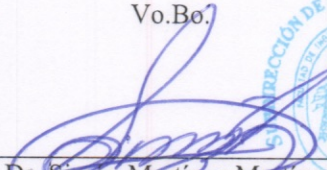
Dra. Griselda Quiroz Compeán
Revisor

Dr. Daniel Ulises Campos Delgado
Revisor

Dr. Marco Iván Ramírez Sosa Moran
Revisor

Dr. Gerardo Romero Galván
Revisor

Vo.Bo.


Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



Institución 190001

Programa 514601

Acta Núm. 304

Ciudad Universitaria, a 2 de marzo de 2022.

A mis padres

Agradecimientos

A mi asesor de tesis, el Dr. René Galindo Orozco, por la guía, consejos y tiempo dedicado, a mis revisores de tesis por los comentarios y sugerencias que ayudaron a mi trabajo, a mis profesores y compañeros del posgrado por ser motivación, a mi familia que siempre me apoyó y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el soporte económico.

marzo, 2022

Miguel Angel Flores Guerrero

Resumen

Control Robusto de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

Miguel Angel Flores Guerrero

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

marzo, 2022

Este trabajo se enfoca en el estudio de controladores robustos para sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo, multivariables y con parámetros concentrados. Se abordan los problemas de control de atenuación de perturbaciones e incertidumbres, seguimiento a entradas de referencia en bajas frecuencias, y asignación de dinámica por ubicación de polos. Se proponen expresiones analíticas de la parametrización de controladores estabilizantes en una configuración retroalimentada con un controlador de dos parámetros para el caso de sistemas con salidas reguladas diferentes a las medidas. Las factorizaciones de la planta y el controlador para la parametrización se basan en las formulas de Nett, Jacobson y Balas, mediante ganancias de retroalimentación propuestas que ubican los polos en lazo cerrado. Uno de los parámetros libres del controlador resuelve un problema de sensibilidad mezclada satisfaciendo un criterio de atenuación de las perturbaciones más comunes y un tipo de incertidumbre en la planta; mientras que el otro parámetro, asegura que las salidas sigan las entradas de referencia en bajas frecuencias.

Contenido

Lista de figuras	ix
Lista de tablas	x
1 Introducción	1
2 Antecedentes	6
2.1 Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)	6
2.2 Propiedades de los sistemas LTI	8
2.2.1 Solución de las ecuaciones de estado del sistema LTI	8
2.2.2 Estabilidad	9
2.2.2.1 Estabilidad Entrada-Salida (BIBO)	9
2.2.2.2 Estabilidad interna	9
2.2.3 Controlabilidad y observabilidad	10
2.2.4 Transformación de estados	11
2.2.5 Realización mínima	12
2.3 Control por retroalimentación	12
2.3.1 Retroalimentación de estados	13
2.3.1.1 Observador de estados	13
2.3.2 Retroalimentación de la salida	14
2.3.3 Enfoque de la Factorización	16
2.4 Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE)	18
2.4.1 PTCE de un parámetro libre	18
2.4.2 PTCE con dos parámetros libres	19
2.4.3 Factorizaciones coprimas para la PTCE	20
2.5 Control Robusto \mathcal{H}_∞	23
2.5.1 Norma \mathcal{H}_∞	23
2.5.2 Modelo de incertidumbre	24

2.5.3	Estabilidad robusta	25
2.5.4	Desempeño robusto	26
2.5.5	Esquema General Estándar de Control Robusto	27
2.5.5.1	Transformaciones Lineales Fraccionales (LFT)	27
2.5.5.2	PTCE en el esquema general estándar	29
2.5.6	Criterios de control robusto	30
3	Resultados	33
3.1	Planteamiento del problema	34
3.2	Ganancias de retroalimentación	41
3.3	Factorizaciones coprimas	42
3.4	Parámetros libres	45
3.5	Síntesis del controlador	50
3.6	Ejemplos	51
3.6.1	Planta con ceros de transmisión	52
3.6.2	Sistema de 2 carros	55
3.6.3	Suspensión de medio-carro	57
4	Conclusiones y trabajos futuros	62
4.1	Trabajos futuros	63

Lista de figuras

2.1	Configuración de retroalimentación	14
2.2	Configuración de retroalimentación simplificada	15
2.3	Configuración de retroalimentación con un controlador de 2 parámetros	19
2.4	Configuración de retroalimentación con un controlador de 2 parámetros en el enfoque de la factorización	20
2.5	Teorema de Ganancia pequeña	25
2.6	Esquema General Estándar de Control Robusto	28
2.7	Transformaciones Lineales Fraccionales	29
3.1	Configuración de control de dos parámetros	35
3.2	Incertidumbre multiplicativa a la salida	37
3.3	Función de intersección para el caso 1 del Teorema 3.1	49
3.4	Función de intersección para el caso 2 del Teorema 3.1	49
3.5	Procedimiento de síntesis del controlador	51
3.6	Valores Singulares máximos de $N_o\tilde{D}_K$, $N_o\tilde{N}_K$ y N_oQ	53
3.7	Valores Singulares máximos de N_oQ modificada	54
3.8	Respuesta en el tiempo de la salida y_o con la función N_oQ modificada	54
3.9	Sistema de dos-carros	55
3.10	Valores singulares máximos de $N_o\tilde{D}_K$ y $N_o\tilde{N}_K$	57
3.11	Respuesta en el tiempo de las posición de la masa m_1	57
3.12	Suspension de medio-carro	59
3.13	Valores Singulares máximos de $N_o\tilde{D}_K$, $N_o\tilde{N}_K$, N_oQ y $W_o - N_o\tilde{N}_K W_m$	60
3.14	Respuesta en el tiempo de y_o para R dada en (3.123)	61
3.15	Respuesta en el tiempo de y_o para $R = I$	61

Lista de tablas

2.1	Algunos modelos de incertidumbre	24
3.1	Norma infinito para el ejemplo 3.6.1	52
3.2	Parámetros del sistema de dos-carros.	56
3.3	Parámetros del sistema de suspensión activa de medio-carro	59

Nomenclatura

Símbolos y notación

\mathbb{R}	Conjunto de números reales.
\mathbb{C}	Conjunto de números complejos.
\mathbb{R}^n	Espacio vectorial real de dimensión n .
\mathbb{C}^n	Espacio vectorial complejo de dimensión n .
$\mathbb{R}^{p \times m}$	Conjunto de matrices reales de dimensiones $p \times m$.
$\mathbb{C}^{p \times m}$	Conjunto de matrices complejas de dimensiones $p \times m$.
I_p	Matriz identidad de dimensión $p \times p$.
A^T	Transpuesta de la matriz A .
A^{-1}	Inversa de la matriz A .
A^+	Pseudoinversa de la matriz A .
$\det(A)$	Determinante de la matriz A .
$\text{eig}(A)$	Conjunto de valores propios de la matriz A .
$\bar{\sigma}(A)$	Máximo valor singular de la matriz A .
$\underline{\sigma}(A)$	Mínimo valor singular de la matriz A .
$\min_Y X$	Minimizar X respecto a Y .
$\sup_Y (X)$	Supremo de X respecto a Y .
$:=$	Definido como.
\in	Pertenece a.
t	Variable real para el análisis en el tiempo.
s	Variable compleja para el análisis en la frecuencia.
\mathcal{R}	Conjunto de funciones racionales reales en la variable compleja s con coeficientes reales.
$\mathcal{R}^{p \times m}$	Conjunto de matrices de dimensiones $p \times m$ cuyos elementos son funciones racionales reales en la variable compleja s con coeficientes reales.

\mathcal{RH}_∞	Conjunto de funciones racionales reales propias y estables en la variable compleja s con coeficientes reales.
$\mathcal{RH}_\infty^{p \times m}$	Conjunto de matrices de dimensiones $p \times m$ cuyos elementos son funciones racionales reales propias y estables en la variable compleja s con coeficientes reales.
$x(t)$	Señal en tiempo continuo.
$x(s)$	Señal en la frecuencia.
$\ x\ _2$	Norma \mathcal{L}_2 de la función x .
$\ G\ _\infty$	Norma \mathcal{H}_∞ de $G \in \mathcal{RH}_\infty$.
$A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$	Aproximación asintótica de la matriz $A \in \mathcal{R}^{p \times m}$ de dimensiones $p \times m$ en bajas frecuencias.
$A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$	Aproximación asintótica de la matriz $A \in \mathcal{R}^{p \times m}$ de dimensiones $p \times m$ en altas frecuencias.

Acrónimos

LTI	Lineal Invariante en el Tiempo, del inglés Linear Time-Invariant.
SISO	Una Entrada y Una Salida, del inglés Single-Input Single-Output.
MIMO	Múltiples Entradas y Múltiples Salidas, del inglés Multi-Input Multi-Output.
PTCE	Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes.
FCD	Factorización Coprima Derecha.
FCL	Factorización Coprima Izquierda.
EGE	Esquema General Estándar.
LFT	Transformación Lineal Fraccional, del inglés Linear Fractional Transformation.

Variables

P	Planta.
N	Numerador de la planta de su FCD.
D	Denominador de la planta de su FCD.
\tilde{N}	Numerador de la planta de su FCL.
\tilde{D}	Denominador de la planta para su FCL.

P_o	Planta con salidas a controlar.
P_m	Planta con salidas para la retroalimentación.
N_o	Numerador de P_o de su FCD.
N_m	Numerador de P_m de su FCD.
\tilde{N}_m	Numerador de P_m de su FCI.
\tilde{D}_m	Denominador de P_m de su FCI.
(X, Y)	Par solución a la ecuación $XN + YD = I$.
(\tilde{X}, \tilde{Y})	Par solución a la ecuación $\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y} = I$.
K	Controlador.
R	Parámetro libre del controlador de su FCI.
S	Parámetro libre del controlador de su FCD.
Q	Segundo parámetro libre para controlador de dos parámetros.
$N_K := (\tilde{X} + DS)$	Numerador del controlador de su FCD.
$D_K := (\tilde{Y} - NS)$	Denominador del controlador de su FCD.
$\tilde{N}_K := (Y - R\tilde{N})$	Numerador del controlador de su FCI.
$\tilde{D}_K := (X + R\tilde{D})$	Denominador del controlador de su FCI.
A	Matriz de estado de la planta.
B	Matriz de entrada de la planta.
C	Matriz de salida de la planta.
E	Matriz de transferencia directa de la planta.
$x(t) \in \mathbb{R}^n$	Vector de estados de la planta.
n	Número de estados de la planta.
m	Número de entradas de la planta.
p	Número de salidas de la planta.
\mathcal{C}	Matriz de Controlabilidad.
\mathcal{O}	Matriz de Observabilidad.
F	Ganancia de retroalimentación de todos los estados.
L	Ganancia de retroalimentación para el observador de estados.
T	Matriz de transformación de estados.

T_1	Matriz de transformación de estados 1.
T_2	Matriz de transformación de estados 2.
A_k	Matriz de estado de la planta mediante la transformación T_1 .
B_k	Matriz de entradas de la planta mediante la transformación T_1 .
C_k	Matriz de salidas de la planta mediante la transformación T_1 .
A_o	Matriz de estado de la planta mediante la transformación T_2 .
B_o	Matriz de entradas de la planta mediante la transformación T_2 .
C_o	Matriz de salidas de la planta mediante la transformación T_2 .
u	Señal de entrada de la planta.
ϖ	Señal de salida del denominador de la planta.
y	Señal de salida de la planta.
y_s	Señal de salida controlada.
y_o	Señal de salida controlada.
y_m	Señal de salida para la retroalimentación.
d_i	Perturbación aditiva a la entrada de la planta.
d_m	Perturbación aditiva en la medición de la planta.
d_h	Perturbación aditiva a la salida de la planta.
y_d	Señal de referencia.
e	Señal de error.
v	Señal de salida del controlador.
P_G	Planta generalizada
z	Señal de salida generalizada
w	Señal de entrada generalizada
T_{zw}	Función de transferencia que relaciona a z y w
Δ	Incertidumbre
ω	Frecuencia angular
ω_h	Frecuencia angular en la banda de altas frecuencias

Capítulo 1

Introducción

En los sistemas de control por retroalimentación, la estabilidad y algún desempeño como el seguimiento a señales de referencia son dos de las características más deseadas. Sin embargo, en la práctica, se desea que estas características se preserven ante la presencia de incertidumbres en el sistema a controlar, que de aquí en adelante, llamaremos planta, y ante perturbaciones externas. Es decir, se desea obtener estabilidad robusta y desempeño robusto.

Debido a que la mayoría de los diseños de control se basan en el uso de un modelo matemático, surge la incertidumbre, ya que ningún modelo es equivalente a un sistema real; más aún, si se han considerado simplificaciones de éste, para facilitar el análisis y/o diseño; como lo puede ser la linealización de un sistema no-lineal y la reducción del orden del modelo; quedándonos con dinámicas no modeladas. Además, también se tiene el desconocimiento con precisión de los valores reales de los parámetros, ya sea porque es difícil medirlos o porque sufren cambios por variación en el tiempo, temperatura, humedad, envejecimiento, etc.

Las teorías de control robusto nos ofrecen herramientas para sintetizar un controlador que nos garantice estabilidad robusta y desempeño robusto de acuerdo a cómo modelemos la incertidumbre, al conocimiento o consideraciones de las perturbaciones y a nuestros objetivos de desempeño.

Un modelo general para representar varias fuentes de incertidumbre es un modelo de retroalimentación que consiste en separar la parte conocida del sistema y la parte incierta, y que de aquí en adelante lo llamaremos Esquema General Estándar de control robusto (EGE, [1], [2]). La parte conocida se considera Lineal Invariante en el Tiempo (LTI, por sus siglas en inglés) y la parte incierta o incertidumbre se considera que está acotada; y puede ser una matriz estática, real o compleja; o

dinámica, no-lineal y/o variante en el tiempo en el caso de tener una representación en espacio de estados, o una matriz de transferencia. A su vez, la incertidumbre puede ser estructurada y no-estructurada; donde la incertidumbre estructurada además de estar acotada, contiene más restricciones o información. En particular, la incertidumbre paramétrica puede modelarse de esta forma. Si los parámetros son invariantes en el tiempo, también se puede tomar el enfoque basado en polinomios con coeficientes inciertos ([3]).

En el EGE, se declaran las perturbaciones como señales de entrada; y las señales de desempeño como errores de seguimiento y señales controladas como señales de salida. Las relaciones entrada-salida se puede obtener mediante una Transformación Lineal Fraccional (LFT, por sus siglas en inglés).

Este trabajo se dirige hacia el enfoque \mathcal{H}_∞ ([1], [2], [4], [5], [6]); en donde se supone que la incertidumbre es no-estructurada y acotada en norma \mathcal{H}_∞ determinando la estabilidad robusta involucrando esta norma. También, se considera que el desempeño robusto se obtiene mediante la norma \mathcal{H}_∞ de las funciones en lazo cerrado, que relaciona la ganancia entre señales de norma-2 acotada y entre señales de potencia. De esta forma tanto la estabilidad robusta como el desempeño robusto se pueden combinar en un solo criterio.

En el enfoque de la frecuencia se han resuelto algunos criterios como el que involucra la función de sensibilidad a la entrada, que relaciona al error de seguimiento con la entrada de referencia, y su función complementaria relacionada a un modelo de incertidumbre en la planta. Este criterio es llamado de sensibilidad mezclada, y debido a que no se pueden minimizar ambas funciones a la vez, se emplean técnicas como Conformación o Moldeo de Lazo (Loop Shaping, por su uso común en inglés) que consiste en darle forma deseada en la frecuencia a la función de lazo abierto, posiblemente usando funciones de peso, tal que las funciones de sensibilidad sean minimizadas en diferentes bandas de frecuencia; o directamente en lazo cerrado con las funciones de sensibilidad utilizando funciones de peso. También, se ha utilizado Seguimiento de Modelo mediante la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE), que está basada en el enfoque de la factorización (ver [7]), utilizando su parámetro libre para resolver el criterio. Otro ejemplo, es el trabajo de [8] que minimiza las cuatro funciones más importantes en lazo cerrado utilizando factorizaciones coprimas normalizadas de la planta.

En el enfoque de espacio de estados, la solución dada en [9] obtiene un

controlador sub-óptimo que garantiza que la norma del criterio esté por debajo de una cota dada; y consiste en encontrar ganancias de retroalimentación para el controlador basado en observador resolviendo dos ecuaciones de Ricatti de forma iterada. La alternativa por Desigualdades Lineales Matriciales (LMI, por sus siglas en inglés) dada en [10] relaja algunas suposiciones.

Los trabajos de [11, 12, 13] han utilizado el enfoque en la frecuencia, pero utilizando elementos de la representación en espacio de estados para una planta cuadrada, esto es, que el número de entradas es igual al de salidas, para obtener la PTCE y utilizar el parámetro libre para resolver diferentes criterios. Se han dado expresiones analíticas para el controlador en un esquema con controlador de uno y dos parámetros, que consisten en las factorizaciones coprimas de la planta y del controlador, así como de sus parámetros libres. Una de las ventajas que se tienen con este método es que no se requiere el uso de funciones de peso que incrementen el orden del controlador, se puede resolver el problema de estabilidad fuerte [7], es decir, encontrar un controlador estable, y se pueden asignar polos reales en lazo cerrado.

Es bien conocido que el enfoque de ubicación de polos para sistemas MIMO no es único y que puede llevar a un desempeño en lazo cerrado no satisfactorio. Estos problemas se pueden resolver agregando requisitos de diseño del sistema de control. Trabajos en este sentido son, el descrito en [14] donde se presenta una Desigualdad Lineal Matricial (LMI) para ubicación robusta de polos en una región LMI prescrita; el presentado en [15] utilizando retroalimentación proporcional-derivativa en un sistema MIMO LTI sujeto a incertidumbre politópica o de norma acotada; el detallado en [16] donde se presenta una asignación de polos robusta, que consiste en hacer asignación de polos exacta encontrando ganancias de retroalimentación óptimas usando redes neuronales recurrentes, garantizando estabilidad en lazo cerrado para una matriz de estados de la planta incierta o perturbada. Un enfoque por la técnica de computación blanda como Algoritmos Evolutivos puede ser encontrada en el trabajo de [17], donde presenta asignación de polos y un criterio de sensibilidad mezclada en una función multi-objetivo, continuando con un procedimiento de optimización.

El trabajo de esta tesis se enfoca en obtener un controlador robusto para un sistema de control que dé seguimiento a entradas de referencia en bajas frecuencias, tales como entradas escalón o entradas sinusoidales, en las salidas controladas, que son diferentes a las salidas de retroalimentación, con respuesta transitoria de acuerdo

a la ubicación de polos en lugares específicos del plano complejo; atenuación de las perturbaciones más comunes en los sistemas retroalimentados, que son, las aditivas a la entrada de la planta en bajas frecuencias y las de la medición de la salida en altas frecuencias. Para satisfacer estas especificaciones, se propone el esquema de control presentado en el trabajo de [18] que fue usado para desacoplamiento entrada-salida, y que consiste en separar la planta en dos sub-plantas cuadradas, una para la salida controlada y otra para la salida de retroalimentación con un controlador de dos parámetros. De esta forma, se obtienen expresiones analíticas para las factorizaciones de la planta y el controlador en la frecuencia, con elementos de la representación en espacio de estados como en los trabajos [11, 12, 13], aunque con un procedimiento diferente. Primero, se resuelve el problema de ubicación de polos mediante ganancias de retroalimentación propuestas, para después utilizarlas y obtener las factorizaciones coprimas de la planta y el controlador con base en las factorizaciones de las fórmulas presentadas por [19] que requieren de ganancias de retroalimentación, en lugar de utilizar métodos algebraicos polinomiales. Una vez obtenidas las factorizaciones se proponen los parámetros libres del controlador, utilizando el primero tal que satisfagan el criterio de atenuación a perturbaciones e incertidumbre y el segundo para el seguimiento a entradas de referencia en las salidas controladas.

Además de las restricciones en el diseño que se presentan debido a las relaciones que existen entre las funciones de transferencia, se tienen las de los ceros de las plantas, que pueden ocasionar efectos no-deseados en la respuesta. La posible cancelación polos-ceros no deseada de los diseños de sensibilidad mezclada por [8] fue examinada en el trabajo de [20], donde se señala que la cancelación polo-cero es dependiente de la elección de las funciones de peso, dando una construcción particular y prevenir este fenómeno. Dos técnicas son comparadas en el trabajo de [21] que previenen cancelaciones polo-cero del enfoque de sensibilidad mezclada basado en ecuaciones de Riccati. En este trabajo, se propone una expresión para el segundo parámetro libre del controlador para atenuar efectos no-deseados por los ceros de la planta en la respuesta transitoria.

En este capítulo se presentó una introducción general sobre el control robusto y la dirección que aborda esta tesis; en el capítulo 2 se detallan antecedentes para dar en el capítulo 3 los resultados que involucran las ganancias de retroalimentación propuestas, las factorizaciones de la planta y el controlador y la metodología para

synthesize the robust controller, showing them through examples; finally in chapter 4 the conclusions about the results obtained are given.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se presentan resultados en el enfoque de control robusto \mathcal{H}_∞ que son base para esta tesis. En el capítulo de introducción se mencionó que el Esquema General Estándar (EGE) consta de una parte conocida LTI y una desconocida que se supone en este trabajo ser no-estructurada y acotada en norma \mathcal{H}_∞ . El capítulo comienza con la descripción de los sistemas LTI y sus características en su representación en la frecuencia y en espacio de estados, que representan la parte conocida del EGE de control robusto. En la sección 2.4 se presenta la PTCE de uno y dos parámetros para la estabilización de los sistemas LTI. Posteriormente se presenta el análisis de estabilidad robusta dado por el Teorema de Ganancia Pequeña, el EGE de control robusto y algunos criterios para estabilidad y desempeño robusto.

2.1. Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Considere un sistema dinámico LTI descrito por un sistema de ecuaciones lineales diferenciales de primer orden con coeficientes constantes como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Eu(t) \quad (2.1b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $x(t_0)$ es la condición inicial del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema, mientras que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $E \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

La dimensión del sistema es n ; y el sistema se dice llamar de Una-Entrada y Una-Salida (SISO, por sus siglas en inglés) cuando $m = 1$ y $p = 1$; y multivariable o de Múltiples-Entradas y Múltiples-Salidas (MIMO, por sus siglas en inglés) cuando $m > 1$ y $p > 1$.

La representación dada por las ecuaciones (2.1) es llamada *representación en espacio de estados*. Aplicando la transformada de Laplace a 2.1a, obtenemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (2.2)$$

que al sustituirla en 2.1b después de aplicarle la Transformada de Laplace con $x_0 = 0$, podemos obtener una *representación entrada-salida* como,

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.3)$$

donde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + E \quad (2.4)$$

es llamada *función de transferencia* del sistema; siendo s la variable compleja. El conjunto $\{A, B, C, E\}$ se dice ser una *realización* de $G(s)$.

Debido a que

$$C(sI - A)^{-1}B + E = \frac{1}{\det(sI - A)}C[\text{adj}(sI - A)]B + E \quad (2.5)$$

donde $\text{adj}(sI - A)$ denota la matriz adjunta de $(sI - A)$.

Para el caso SISO, (2.5) es una función de transferencia que puede ser expresada como una razón de un numerador $N(s)$ y un denominador $D(s)$; ambos polinomios de s que no tengan factores en común. Sea $\deg(N(s))$ y $\deg(D(s))$ el grado del numerador y el denominador respectivamente. Entonces, decimos que $G(s)$ es (ver [22]),

- propia, si $\deg(D(s)) \geq \deg(N(s))$
- estrictamente propia, si $\deg(D(s)) > \deg(N(s))$
- bipropia, si $\deg(D(s)) = \deg(N(s))$
- impropia, si $\deg(D(s)) < \deg(N(s))$

Un número complejo s es llamado *polo* de $G(s)$ si es una raíz de $D(s)$, y *cero* si es una raíz de $N(s)$.

Para el caso MIMO, (2.5) es una *matriz de transferencia*; y se dice ser,

- propia, si cada elemento de la matriz es una función de transferencia propia
- estrictamente propia, si cada elemento de la matriz es una función de transferencia estrictamente propia
- bipropia, si es cuadrada y si tanto $G(s)$ como $G^{-1}(s)$ son propias

Definiremos los polos y ceros de una matriz de transferencia racional mediante una forma canónica diagonal equivalente conocida como forma Smith-McMillan. Decimos que dos matrices racionales $G(s)$ y $M_{sm}(s)$ son equivalentes, si existe una secuencia de operaciones elementales de matrices por izquierda y derecha, $\{L_1(s)\dots L_l(s)\}$ y $\{R_1(s)\dots R_r(s)\}$ tal que,

$$G(s) = L_1(s)\dots L_l(s)M_{sm}(s)R_1(s)\dots R_r(s) \quad (2.6)$$

Teorema 2.1 (Forma Smith-McMillan, ver [6]) *Sea $G(s)$ una matriz de transferencia racional de rango r . Entonces $G(s)$ puede ser transformada, con operaciones elementales por filas y columnas, a una matriz racional diagonal $M_{sm}(s)$ de la forma,*

$$M_{sm}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde $(\varepsilon_i(s), \psi_i(s))$ son coprimos; es decir, no tienen factores en común. $M_{sm}(s)$ es la forma Smith-McMillan de $G(s)$.

Definición 2.1 (Ver [6]) *Sea $G(s)$ una matriz de transferencia racional con forma Smith-McMillan como en (2.7), y defina los polinomios $\psi(s) = \psi_1(s)\dots\psi_r(s)$ y $\varepsilon(s) = \varepsilon_1(s)\dots\varepsilon_r(s)$. Las raíces de $\psi(s)$ y $\varepsilon(s)$ son llamados polos y ceros de transmisión de $G(s)$, respectivamente.*

2.2. Propiedades de los sistemas LTI

2.2.1. Solución de las ecuaciones de estado del sistema LTI

La solución al sistema (2.1) está dada por (ver [1])

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.8)$$

para $t \geq t_0$; entonces, la salida del sistema está determinada por,

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Eu(t) \quad (2.9)$$

Debido a que el sistema es invariante en el tiempo, sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante se supone que $t_0 = 0$.

De la ecuación (2.5), el polinomio obtenido por $\det(sI - A)$ es llamado *polinomio característico* de A , donde cada raíz corresponde a un valor propio de la matriz A . Por lo tanto, cada polo de $G(s)$ es un valor propio de A ; sin embargo, lo contrario no es verdad, debido a posibles cancelaciones que puedan ocurrir en la ecuación. De la relación que existe entre las ecuaciones 2.2 y 2.8 podemos calcular la matriz exponencial e^{At} mediante la Transformada Inversa de Laplace, esto es $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$.

Con base en estas relaciones, en esta sección se presentan resultados que nos permiten conocer propiedades de un sistema LTI.

2.2.2. Estabilidad

Se definen dos tipos de estabilidad; estabilidad Entrada-Acotada Salida-Acotada (BIBO, por sus siglas en inglés) que está definida para la respuesta a una determinada entrada bajo condiciones iniciales cero; y estabilidad interna, que está definida para la respuesta bajo entrada nula con condiciones iniciales no-cero.

2.2.2.1. Estabilidad Entrada-Salida (BIBO)

Definición 2.2 (Ver [22]) *Un sistema se dice ser BIBO estable si para cada entrada acotada (entrada que no crece hasta el infinito positivo o negativo) produce una salida acotada.*

Teorema 2.2 (Ver [22]) *Un sistema MIMO con matriz de transferencia racional y propia es BIBO estable, si y sólo si, cada polo de cada entrada de la matriz de transferencia tiene parte real negativa, o equivalentemente, en el semiplano izquierdo de la variable compleja s .*

2.2.2.2. Estabilidad interna

Definición 2.3 (Ver [22]) *La ecuación de estado $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es marginalmente estable o estable en el sentido de Lyapunov si cada estado inicial x_0 produce una*

respuesta acotada. Es asintóticamente estable si cada estado inicial produce una respuesta acotada, además de que se aproxima a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.3 (Ver [22]) 1. La ecuación $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es marginalmente estable, si y sólo si, todos los valores propios de A tienen parte real negativa o cero, y esos con parte real cero son raíces simples del polinomio mínimo de A .

2. La ecuación $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.

Una matriz A con la segunda propiedad se dice ser estable o Hurwitz. Debido a que cada polo es un valor propio de A , entonces la estabilidad asintótica implica estabilidad BIBO; sin embargo, lo contrario no es verdad, ya que incluso si A tiene valores propios con parte real positiva o cero, el sistema puede aún ser BIBO estable debido a posibles cancelaciones al obtener una representación entrada-salida.

2.2.3. Controlabilidad y observabilidad

Definición 2.4 (Controlabilidad, ver [22]) El sistema descrito por la ecuación (2.1a) o el par (A, B) se dice ser controlable si para cualquier estado inicial x_0 y cualquier estado final x_1 , existe una entrada $u(t)$ que transfiera del estado x_0 al estado x_1 en un tiempo finito. En otro caso, el sistema o el par (A, B) se dice ser no controlable.

Teorema 2.4 (Sistema Controlable, ver [22]) El par (A, B) es controlable si la matriz

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

es de rango n .

Definición 2.5 (Observabilidad, ver [22]) El sistema descrito en (2.1) o el par (C, A) se dice ser observable si para cualquier estado inicial x_0 no conocido, existe un tiempo finito $t_1 > 0$ tal que con el conocimiento de la salida $y(t)$ (y de la entrada $u(t)$ si está presente) en el intervalo $[0, t_1]$, x_0 pueda ser determinado. En otro caso, el sistema o el par (C, A) se dice ser no observable.

Teorema 2.5 (Sistema Observable, ver [22]) *el par (C, A) es observable si la matriz*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

es de rango n .

2.2.4. Transformación de estados

La representación en espacio de estados dada en (2.1) no es única. En ocasiones, para realizar un mejor análisis, escogemos un sistema equivalente que mejor se adapte a nuestras necesidades mediante una transformación de estados.

Definición 2.6 (Transformación de estados, ver [22]) *Sea T un matriz no singular real de $n \times n$ y sea $\bar{x}(t) = Tx(t)$. Entonces el sistema de ecuaciones,*

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.12)$$

$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{E}u(t) \quad (2.13)$$

donde

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB \quad \bar{C} = CT^{-1} \quad \bar{E} = E \quad (2.14)$$

se dice ser equivalente a (2.1).

Bajo la transformación de estados, la matriz de transferencia no cambia, se tiene el mismo polinomio característico, y consecuentemente, el mismo conjunto de valores propios; además, tanto la propiedad de controlabilidad como la de observabilidad no se ven afectadas.

Algunas de las transformaciones más comunes son, la canónica controlable y la canónica observable. Con estas transformaciones es posible identificar la cantidad de estados que son controlables y observables. Una transformación más elaborada es la siguiente descomposición de Kalman (ver [22]),

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co}(t) \\ \bar{x}_{c\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}o}(t) \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.15a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + Eu(t) \quad (2.15b)$$

donde $\bar{x}_{co}(t)$ es controlable y observable; $\bar{x}_{c\bar{o}}(t)$ es controlable, pero no observable; $\bar{x}_{\bar{c}o}(t)$ es observable, pero no controlable; y $\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}(t)$ no es controlable ni observable.

2.2.5. Realización mínima

La matriz de transferencia de (2.15) está dada por,

$$G(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + E \quad (2.16)$$

Entonces la realización $\{\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co}, E\}$ de $G(s)$ ha quedado con una dimensión menor que la realización original $\{A, B, C, E\}$.

Definición 2.7 (Realización mínima, ver [22]) *Una realización mínima es la que cuenta con la dimensión más pequeña posible.*

Teorema 2.6 (Ver [22]) *Una realización $\{A, B, C, E\}$ es una realización mínima de una matriz de transferencia racional y propia $G(s)$, si y solo si, (A, B) es controlable y (C, A) es observable.*

Una vez analizado un sistema determinamos si deseamos modificarlo para que se comporte de una manera deseada. En las siguientes secciones se describen algunas técnicas para lograr diferentes objetivos.

2.3. Control por retroalimentación

El control por retroalimentación es de los métodos más empleados para modificar un sistema donde la señal a ser controlada se compara con una señal de referencia deseada y el error o diferencia se usa para generar una acción de control correctiva.

2.3.1. Retroalimentación de estados

Si tenemos disponibles los estados como salida podemos estabilizar un sistema inestable, y modificar su dinámica. Considere como entrada de (2.1a), $u(t) = y_d(t) - Fx(t)$, entonces,

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + By_d(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.17)$$

y la estabilidad, así como la dinámica del sistema depende de los valores propios de $(A - BF)$.

Teorema 2.7 ([22]) *Todos los valores propios de $(A - BF)$ pueden ser asignados arbitrariamente seleccionando una matriz constante F , si y solo si, (A, B) es controlable.*

Si el sistema es no controlable como en el caso de (2.15), aún se puede lograr la estabilidad si el subsistema no controlable, que solo depende las condiciones iniciales, es estable, según el Teorema 2.3; es decir, depende de los valores propios asociados a la parte no controlable.

Definición 2.8 (Sistema estabilizable, ver [1]) *El sistema (2.1) o el par (A, B) se dice ser estabilizable si existe una matriz constante F tal que $A - BF$ sea estable.*

2.3.1.1. Observador de estados

En caso de no tener disponibles los estados, se puede diseñar un observador. El Observador de Luenberger consiste en crear una copia del sistema que se sujeta a la misma entrada, más un término de corrección que consiste en comparar la salida del sistema y del observador generando un error que se hace pasar por una ganancia L antes de retroalimentarse al observador; es decir, su representación en espacio de estados es,

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (2.18)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Eu(t) \quad (2.19)$$

donde $\hat{x}(t)$ es el estado estimado. La dinámica del error entre el estado real y el estimado; esto es, $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ queda determinada por (ver [1] y [22]),

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) \quad (2.20)$$

por lo que depende de los valores propios de $A - LC$.

Teorema 2.8 ([22]) *Todos los valores propios de $A - LC$ pueden ser asignados arbitrariamente seleccionando una matriz constante L , si y solo si, (C, A) es observable.*

Definición 2.9 (Sistema detectable, ver [1]) *El sistema (2.1) o el par (C, A) se dice ser detectable si existe una matriz constante L tal que $A - LC$ sea estable.*

En caso de que el sistema sea no observable como en el caso de (2.15), la dinámica del error para el observador puede aún converger si los valores propios asociados a la parte no-observable tienen parte real negativa; es decir, el sistema es detectable.

2.3.2. Retroalimentación de la salida

La mayoría de los problemas de control se pueden plantear como el esquema de la Figura 2.1, donde P es el sistema a controlar, que de ahora en adelante será llamado planta, K es el controlador a diseñar; u y y son la entrada y la salida de la planta, respectivamente; y_d es la entrada de referencia que se desea siga la salida controlada y_s , e es la señal de error, y d_i , d_o y d_m son perturbaciones a la entrada de la planta, salida de la planta; y del sensor, respectivamente.

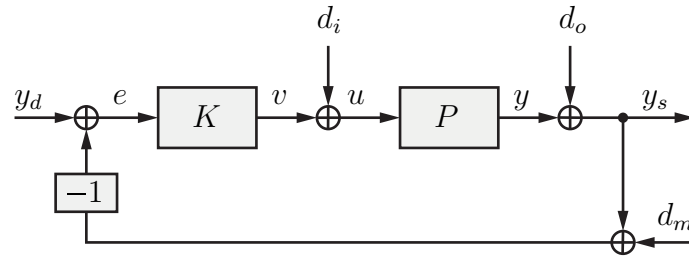


Figura 2.1: Configuración de retroalimentación

Una forma de obtener todas las representaciones entrada-salida es reordenando el sistema como se muestra en la Figura 2.2.

Las relaciones entrada-salida en el dominio de la frecuencia quedan determinadas entonces por,

$$u = (I + KP)^{-1}(d_i + Kw) = [I - K(I + PK)^{-1}P] [d_i + Kw] \quad (2.21)$$

$$e = (I + PK)^{-1}(w - Pd_i) = [I - P(I + KP)^{-1}K] [w - Pd_i] \quad (2.22)$$

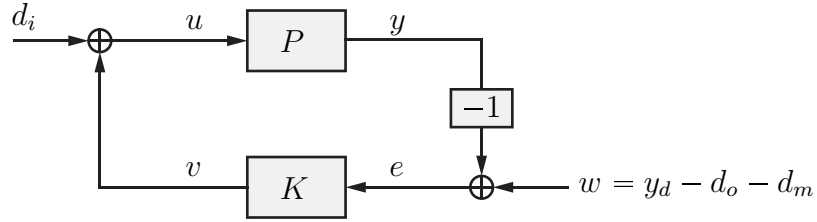


Figura 2.2: Configuración de retroalimentación simplificada

Definición 2.10 (Sistema bien planteado, ver [1]) Un sistema de retroalimentación como el de la Figura 2.2 se dice estar bien planteado, si todas las matrices de transferencia están bien definidas (existen) y son propias (físicamente realizables).

Lema 2.1 (Ver [1]) El sistema en la Figura 2.2 está bien planteado, si y solo si, $I + K(\infty)P(\infty)$ es invertible.

Equivalentemente, si y solo si, $I + P(\infty)K(\infty)$ es invertible, como se muestra en la igualdad de las ecuaciones (2.21) y (2.22), que representan todas las matrices de transferencia.

Sean $\{A, B, C, E\}$ y $\{A_K, B_K, C_K, E_K\}$ realizaciones de P y K respectivamente. Entonces $P(\infty) = E$ y $K(\infty) = E_K$ y el Lema 2.1 es equivalente a que $I + EE_K$ sea invertible.

Lema 2.2 (Ver [1]) El sistema de la Figura 2.2 con realizaciones de P y K estabilizables y detectables es internamente estable, si y solo si, la matriz,

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -E_K \\ E & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_K \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

es Hurwitz.

Lema 2.3 (Ver [1]) Suponga que P y K tienen realizaciones estabilizables y detectables. Entonces, el sistema en la Figura 2.2 es internamente estable, si y solo si, las cuatro matrices de transferencia, $(I + KP)^{-1}$, $(I + KP)^{-1}K$, $(I + PK)^{-1}$ y $(I + PK)^{-1}P$ de las ecuaciones (2.21) y (2.22) son BIBO estables.

Corolario 2.1 (Ver [1]) Suponga que P y K son BIBO estables. Entonces, el sistema en la Figura 2.2 es internamente estable, si y solo si, $(I + PK)^{-1}$ es BIBO estable.

Finalmente, de la Figura 2.1 y de las ecuaciones (2.21) y (2.22), obtenemos todas las relaciones entrada-salida,

$$u = S_i d_i + S_i K(y_d - d_o - d_m) \quad (2.24a)$$

$$y_s = Pu + d_o = T_o(y_d - d_m) + PS_i d_i + S_o d_o \quad (2.24b)$$

$$e = S_o(y_d - d_o - d_m) - S_o P d_i \quad (2.24c)$$

$$v = Ke = KS_o(y_d - d_o - d_m) - T_i d_i \quad (2.24d)$$

donde $S_i = (I + L_i)^{-1}$, con $L_i = KP$, es la función de sensibilidad a la entrada, $S_o = (I + L_o)^{-1}$, con $L_o = PK$, es la función de sensibilidad a la salida; y $T_i = I - S_i$ y $T_o = I - S_o$ son las funciones de sensibilidad complementarias de entrada y salida, respectivamente.

2.3.3. Enfoque de la Factorización

El enfoque de la factorización consiste en representar tanto a la planta como al controlador como la razón de un numerador y un denominador que pertenecen a \mathcal{RH}_∞ ; que es el conjunto de funciones racionales propias y estables en s . De esta forma todas las relaciones entrada-salida pertenecerán a \mathcal{RH}_∞

Definición 2.11 (Factorización coprime, ver [1]) *Dos matrices N y D en \mathcal{RH}_∞ son coprimas derechas en \mathcal{RH}_∞ si tienen el mismo número de columnas y existen matrices U y V en \mathcal{RH}_∞ tales que,*

$$\begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} = UN + VD = I \quad (2.25)$$

De forma similar, dos matrices \tilde{N} y \tilde{D} en \mathcal{RH}_∞ son coprimas izquierdas en \mathcal{RH}_∞ si tienen el mismo número de filas y existen matrices \tilde{U} y \tilde{V} en \mathcal{RH}_∞ tales que,

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} = \tilde{N}\tilde{U} + \tilde{D}\tilde{V} = I \quad (2.26)$$

Sea P una matriz de transferencia racional y propia. El par (N, D) y el par (\tilde{N}, \tilde{D}) , con N, D, \tilde{N} , y \tilde{D} en \mathcal{RH}_∞ , son una *factorización coprime derecha* (FCD) y una *factorización coprime izquierda* (FCI) de P , respectivamente, si,

$$P = ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N} \quad (2.27)$$

donde N y D son coprimas derechas, y \tilde{N} y \tilde{D} coprimas izquierdas, en \mathcal{RH}_∞ ; con D y \tilde{D} cuadradas e invertibles.

De igual forma, considere para K , el par (\tilde{X}, \tilde{Y}) y el par (X, Y) como una FCD y una FCI, tales que,

$$K = \tilde{X}\tilde{Y}^{-1} = Y^{-1}X \quad (2.28)$$

Sustituyendo P y K en las las ecuaciones (2.21) y (2.22), tenemos que,

$$u = D(XN + YD)^{-1}(Yd_i + Xw) \quad (2.29)$$

$$= \left[I - \tilde{X}(\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y})^{-1}\tilde{N} \right] d_i + \tilde{X}(\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y})^{-1}\tilde{D}w \quad (2.30)$$

$$e = \left[I - N(XN + YD)^{-1}X \right] w - N(XN + YD)^{-1}Yd_i \quad (2.31)$$

$$= \tilde{Y}(\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y})^{-1}(\tilde{D}w - \tilde{N}d_i) \quad (2.32)$$

Debido a que los elementos de las factorizaciones pertenecen a \mathcal{RH}_∞ , para que el sistema sea estable, solo queda verificar que $(XN + YD)$ y $(\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y})$ tengan inversa en \mathcal{RH}_∞ . El siguiente Teorema confirma esta conclusión.

Teorema 2.9 (Ver [1] y [7]) Sean (N, D) y (\tilde{N}, \tilde{D}) cualquier FCD y FCI de P ; sean (\tilde{X}, \tilde{Y}) y (X, Y) cualquier FCD y FCI de K para el sistema de la Figura 2.2; entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

1. El sistema retroalimentado es internamente estable
2. $XN + YD$ tiene inversa en \mathcal{RH}_∞
3. $\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y}$ tiene inversa en \mathcal{RH}_∞

Este Teorema nos lleva al siguiente Corolario para encontrar un controlador estabilizante a partir de una factorización coprima de la planta.

Corolario 2.2 (Ver [1] y [7]) Sean (N, D) y (\tilde{N}, \tilde{D}) cualquier FCD y FCI de P . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

1. K estabiliza a P ,
2. K tiene una FCD (\tilde{X}, \tilde{Y}) tal que,

$$XN + YD = I \quad (2.33)$$

3. K tiene una FCI (X, Y) tal que,

$$\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y} = I \quad (2.34)$$

2.4. Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE)

La Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE) describe todos los posibles controladores que estabilizan a una planta dada; fue inicialmente propuesta por [23] y [24], y desarrollada para funciones racionales propias y estables por [7] y [25].

2.4.1. PTCE de un parámetro libre

Esta PTCE está en función de un parámetro libre; y la importancia es que se puede ajustar de tal forma que se cumplan criterios adicionales de desempeño. Considere la configuración de retroalimentación mostrada en la Figura 2.1. El siguiente Teorema (ver [7]) da la PTCE.

Teorema 2.10 Sean (N, D) , (\tilde{D}, \tilde{N}) alguna factorización coprima derecha e izquierda de P en \mathcal{RH}_∞ . Seleccione matrices X, Y, \tilde{X} y \tilde{Y} en \mathcal{RH}_∞ tales que $XN + YD = I$ y $\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y} = I$. Entonces, todos los controladores que estabilizan a P están dados por

$$K := N_K D_K^{-1} = (\tilde{X} + DS) (\tilde{Y} - NS)^{-1} \quad (2.35)$$

$$:= \tilde{D}_K^{-1} \tilde{N}_K = (Y - R\tilde{N})^{-1} (X + R\tilde{D}) \quad (2.36)$$

donde $R \in \mathcal{RH}_\infty$ es tal que $\det(Y - R\tilde{N}) \neq 0$ y $S \in \mathcal{RH}_\infty$ es tal que $\det(\tilde{Y} - NS) \neq 0$.

Además, si se satisface la doble factorización coprima,

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \tilde{D} & -\tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & \tilde{Y} \\ D & -\tilde{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

entonces, $S = R$.

Las relaciones entrada-salida resultantes se describen enseguida:

$$u = D\tilde{D}_K d_i + D\tilde{N}_K (y_d - d_o - d_m) \quad (2.38a)$$

$$y_s = N\tilde{N}_K (y_d - d_m) + N\tilde{D}_K d_i + D_K \tilde{D} d_o \quad (2.38b)$$

$$e = D_K \tilde{D} (y_d - d_o - d_m) - D_K \tilde{N} d_i \quad (2.38c)$$

$$v = N_K \tilde{D} (y_d - d_o - d_m) - N_K \tilde{N} d_i \quad (2.38d)$$

Algunas de las ventajas que se tienen con la parametrización son que: (a) garantiza la estabilidad entrada-salida o interna suponiendo que el sistema es detectable y estabilizable, (b) todas las funciones de transferencia son afines al parámetro libre, (c) su parámetro libre se puede ajustar para satisfacer otras especificaciones o resolver otros problemas de control, y (d) garantiza que no exista cancelación polo-cero entre el controlador y la planta.

2.4.2. PTCE con dos parámetros libres

El esquema de la Figura 2.3 donde $v = [K_1 \ K_2][y_d \ - (y_s + d_m)]^T$ es conocido como esquema con un controlador de 2-parámetros. El siguiente Teorema (ver [7]), da la PTCE con dos parámetros libres.

Teorema 2.11 *Suponga que (N, D) , (\tilde{D}, \tilde{N}) son alguna FCD y FCI de P en \mathcal{RH}_∞ , y que $X, Y \in \mathcal{RH}_\infty$ satisfacen $XN + YD = I$. Entonces el controlador de dos parámetros que estabiliza a P está dado por*

$$K = [K_1 \ K_2] = \tilde{D}_K^{-1} \begin{bmatrix} Q & \tilde{N}_K \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde

$$\tilde{D}_K := Y - R\tilde{N} \quad (2.40)$$

$$\tilde{N}_K := X + R\tilde{D} \quad (2.41)$$

con $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ y $R \in \mathcal{RH}_\infty$ tal que $\det(Y - R\tilde{N}) \neq 0$.

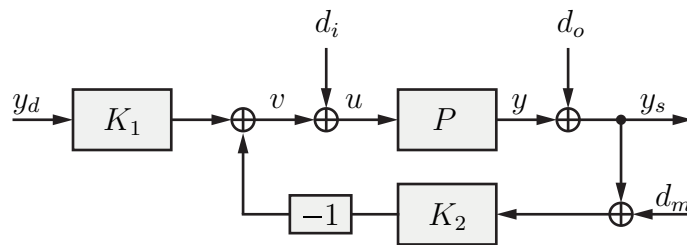


Figura 2.3: Configuración de retroalimentación con un controlador de 2 parámetros

En la Figura 2.4 se muestra el esquema en el enfoque de la factorización.

Las relaciones entrada-salida resultantes son:

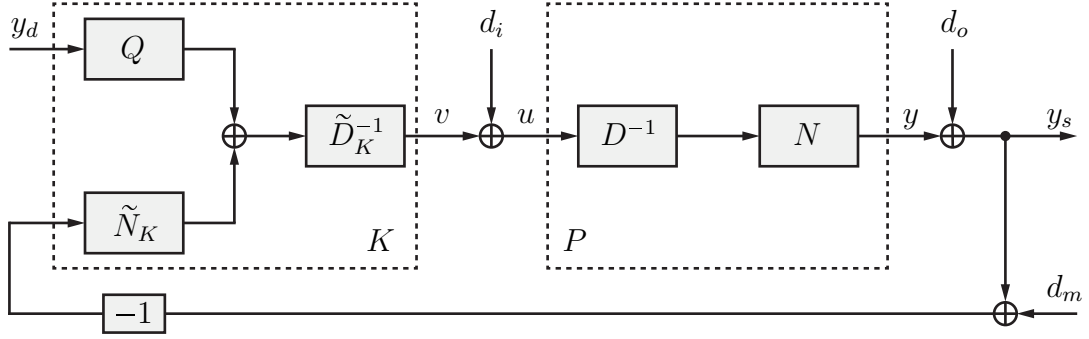


Figura 2.4: Configuración de retroalimentación con un controlador de 2 parámetros en el enfoque de la factorización

$$v = DQy_d - (I - D\tilde{D}_K)d_i - D\tilde{N}_K(d_o + d_m) \quad (2.42a)$$

$$u = v + d_i = DQy_d - D\tilde{D}_Kd_i - D\tilde{N}_K(d_o + d_m) \quad (2.42b)$$

$$y = NQy_d + N\tilde{D}_Kd_i - N\tilde{N}_K(d_o + d_m) \quad (2.42c)$$

$$y_s = y + d_o = NQy_d + N\tilde{D}_Kd_i - N\tilde{N}_Kd_m + (I - N\tilde{N}_K)d_o \quad (2.42d)$$

$$(2.42e)$$

El esquema de dos parámetros ofrece flexibilidad en el diseño debido a que la relación entre la entrada de referencia y_d y la salida y_s , puede ser ajustada independientemente de otras relaciones utilizando el segundo parámetro libre Q , debido a que $y_s = NQy_d$; dejando el parámetro libre R para otras especificaciones.

2.4.3. Factorizaciones coprimas para la PTCE

Una de las formas de obtener factorizaciones coprimas para P es utilizando su forma Smith-McMillan junto con las operaciones elementales que se utilizaron. Una vez obtenidas; se resuelven (2.33) y (2.34) del Corolario 2.2 para obtener factorizaciones de un controlador estabilizante. El siguiente Teorema (ver [7] y [19]) nos da una fórmula explícita para obtener factorizaciones coprimas de la planta y el controlador en función de una representación en espacio de estados de P .

Teorema 2.12 *Suponga que P es una matriz de transferencia racional y propia con realización $\{A, B, C, E\}$ donde (A, B) es estabilizable y (C, A) es detectable.*

Seleccione F y L tales que $A - BF$ y $A - LC$ sean matrices Hurwitz. Defina,

$$N = (C - EF)(sI - A + BF)^{-1}B + E \quad (2.43)$$

$$D = I - F(sI - A + BF)^{-1}B \quad (2.44)$$

$$\tilde{N} = C(sI - A + LC)^{-1}(B - LE) + E \quad (2.45)$$

$$\tilde{D} = I - C(sI - A + LC)^{-1}L \quad (2.46)$$

$$X = F(sI - A + LC)^{-1}L \quad (2.47)$$

$$Y = I + F(sI - A + LC)^{-1}(B - LE) \quad (2.48)$$

$$\tilde{X} = F(sI - A + BF)^{-1}L \quad (2.49)$$

$$\tilde{Y} = I + (C - EF)(sI - A + BF)^{-1}L \quad (2.50)$$

Entonces,

1. Todas las matrices de (2.43) a (2.50) son internamente estables.
2. D y \tilde{D} tienen inversa.
3. $P = ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N}$.
4. Se satisface la doble factorización coprime dada en (2.37)

Del Teorema anterior, por el Corolario 2.2; un controlador estabilizante para P es $K = \tilde{X}\tilde{Y}^{-1} = Y^{-1}X$, llamado controlador central, y la PTCE está dada en el Teorema 2.10.

Un enfoque diferente se da en los trabajos [11], [12] y [26], donde las expresiones analíticas dadas en la frecuencia utilizan particiones de las matrices de una planta dada en una representación en espacio de estados. Este enfoque es para sistemas controlables y observables, donde el número de estados n es par, y el número de entradas m es $n/2$.

Por ejemplo, en [26] cuando P tiene las siguientes matrices en su representación en espacio de estados,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_m & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

donde A_{12} , A_{21} , A_{22} , B_m y $C_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, se dan las siguientes expresiones,

$$N = \frac{1}{(s+a)^2} C_m A_{12} \quad (2.52)$$

$$D = B_m^{-1} \Gamma \quad (2.53)$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{(s+a)^2} B_m \quad (2.54)$$

$$\tilde{D} = \Gamma A_{12}^{-1} C_m^{-1} \quad (2.55)$$

$$X = \frac{1}{s+a} (X_{d1}s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_m^{-1} \quad (2.56)$$

$$Y = \frac{1}{s+a} (sI_m + Y_d) B_m \quad (2.57)$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_{d2}s + A_{21} A_{12} Y_d + a^3 I_m) \quad (2.58)$$

$$\tilde{Y} = \frac{1}{s+a} C_m A_{12} (sI_m + Y_d) \quad (2.59)$$

donde

$$\Gamma = \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - A_{22}s - A_{21} A_{12}) \quad (2.60)$$

$$Y_d = A_{22} + 3a I_m \quad (2.61)$$

$$X_{d1} = Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m \quad (2.62)$$

$$X_{d2} = A_{22} Y_d + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m \quad (2.63)$$

y $0 < a \in \mathbb{R}$.

Las ventajas que se tienen son:

1. No se requieren operaciones elementales sobre cada planta dada, para obtener factorizaciones coprimas.
2. No se requiere estabilización previa por retroalimentación del estado como en el Teorema 2.12.
3. El esfuerzo computacional al obtener el controlador es menor.
4. Se puede resolver fácilmente el problema de estabilidad fuerte, es decir, obtener un controlador estable si el sistema satisface la propiedad de entrelazamiento par (ver [7]).

En esta sección se describieron las condiciones de estabilidad para dos configuraciones de retroalimentación; pero además de la estabilidad del sistema, se

desea lograr algún criterio de desempeño como manipular alguna variable deseada de acuerdo a las relaciones establecidas en esta sección; y esto, se puede lograr utilizando el parámetro libre de la PTCE. La siguiente sección da criterios para lograr ambos objetivos ante la presencia de incertidumbres.

2.5. Control Robusto \mathcal{H}_∞

En la práctica se desea que la estabilidad y algún criterio de desempeño se preserven ante incertidumbres en la planta y perturbaciones externas. De acuerdo a la información que tengamos de la incertidumbre y las perturbaciones podemos utilizar diferentes herramientas de control robusto. Este trabajo se enfoca en el control robusto \mathcal{H}_∞ , que considera que tanto la norma \mathcal{H}_∞ de la incertidumbre, como la de la ganancia de la relación entre las perturbaciones y las salidas a controlar, están acotadas, permitiéndonos establecer un criterio de estabilidad robusta y desempeño robusto. A continuación, se define esta norma, se presentan algunos modelos de incertidumbre y se establecen algunos criterios.

2.5.1. Norma \mathcal{H}_∞

La norma \mathcal{H}_∞ está definida de la siguiente forma (ver [1] y [4]).

Definición 2.12 (Norma \mathcal{H}_∞) *Considere que la matriz de transferencia $G(s)$ pertenece a \mathcal{RH}_∞ , la norma \mathcal{H}_∞ de $G(s)$ se define como*

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{\text{Re}(s) > 0} \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[G(s)] \right\} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.64)$$

donde $\bar{\sigma}$ representa el valor singular máximo.

Esta norma es una norma inducida para G si se considera un operador del espacio de entradas al espacio de salidas $\mathcal{L}_2[0, \infty)$, que es el espacio de señales cuadráticamente integrables en el intervalo $[0, \infty)$, es decir, de señales de norma-2 acotada; representando así, la ganancia máxima; es decir,

$$\|y(t)\|_2 \leq \|G(s)\|_\infty \|u(t)\|_2, \quad \|u(t)\|_2^2 = \int_0^\infty u(t)^T u(t) dt \quad (2.65)$$

También, es la ganancia máxima entre los espacios relacionados a señales de potencia; es decir,

$$pow(y(t)) \leq \|G(s)\|_\infty pow(u(t)), \quad pow(u(t)) = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)^T u(t) dt} \quad (2.66)$$

De esta forma se pueden establecer criterios de desempeño como lo pueden ser mantener “pequeñas” las señales de perturbación d_i , d_o y d_m en la salida y_s en el esquema de la Figura 2.1.

2.5.2. Modelo de incertidumbre

Existen varias formas de caracterizar la incertidumbre. La técnica básica consiste en modelar a la planta como perteneciente a un conjunto como los ejemplos de modelos que se encuentran en la Tabla 2.1; donde P_Δ representa el modelo de incertidumbre, P en \mathcal{R} , la planta nominal y Δ en \mathcal{RH}_∞ , la incertidumbre o error en el modelo.

Aditivo	$P_\Delta = P + \Delta$
Multiplicativo a la salida	$P_\Delta = (I + \Delta)P$
Multiplicativo a la entrada	$P_\Delta = P(I + \Delta)$
Factores coprimos por la izquierda	$P_\Delta = (\tilde{D} + \tilde{\Delta}_D)^{-1}(\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)$

Tabla 2.1: Algunos modelos de incertidumbre

Definición 2.13 ([1]) *Dada una descripción de un conjunto de modelo de incertidumbre P_Δ y un conjunto de objetivos de desempeño, suponga que K es el controlador resultante para la planta nominal P . Entonces, el sistema en lazo cerrado se dice tener:*

- *Estabilidad Nominal: Si K estabiliza internamente a la planta nominal P .*
- *Estabilidad Robusta: Si K estabiliza internamente a cada planta del conjunto P_Δ .*
- *Desempeño Nominal: Si los objetivos de desempeño se satisfacen para la planta nominal P .*
- *Desempeño Robusto: Si los objetivos de desempeño se satisfacen para cada planta del conjunto P_Δ .*

2.5.3. Estabilidad robusta

Considere que se tiene un modelo de incertidumbre en el esquema de la Figura 2.1 y se ha diseñado un controlador estabilizante K para la planta nominal P . Entonces, podemos realizar una prueba de estabilidad robusta, al sustituir P por P_Δ y separar la incertidumbre como se muestra en la Figura 2.5, donde M representa la re-agrupación de los demás elementos.

Teorema 2.13 (Ganancia pequeña, ver [1]) *Considere el sistema interconectado de la Figura 2.5 donde $M \in \mathcal{RH}_\infty$. Entonces el sistema es estable para toda $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ con,*

(a) $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$, si y sólo si, $\|M\|_\infty < \gamma$.

(b) $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$, si y sólo si, $\|M\|_\infty \leq \gamma$.

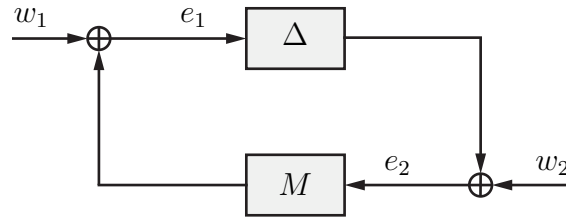


Figura 2.5: Teorema de Ganancia pequeña

A continuación se da la prueba de suficiencia basada en valores singulares.

Demostración [1]. Considere el caso (a) y suponga que $\gamma = 1$. Está claro que $M\Delta$ es estable debido a que tanto M como Δ son estables. Entonces, por Corolario 2.1, el sistema en lazo cerrado es estable si $(I - M\Delta)^{-1}$ es estable, esto es, que $\det(I - M\Delta)$ no tenga raíces en el semiplano cerrado derecho ($\bar{\mathbb{C}}_+$) para todo $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ y $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Equivalentemente si

$$\inf_{s \in \bar{\mathbb{C}}_+} \underline{\sigma}(I - M\Delta) \neq 0 \quad (2.67)$$

Pero,

$$\inf_{s \in \bar{\mathbb{C}}_+} \underline{\sigma}(I - M\Delta) \geq 1 - \sup_{s \in \bar{\mathbb{C}}_+} \bar{\sigma}(M\Delta) \quad (2.68)$$

$$= 1 - \|M\Delta\|_\infty \quad (2.69)$$

$$\geq 1 - \|M\|_\infty > 0 \quad (2.70)$$

La prueba para el caso (b) es similar. \square

Ahora se muestran dos Teoremas para la prueba de estabilidad robusta cuando se tiene un modelo de incertidumbre aditivo y uno multiplicativo a la salida, utilizando el Teorema anterior.

Teorema 2.14 ([1]) *Sea $P_\Delta = P + \Delta$, $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ y K un controlador estabilizante para la planta nominal P en el esquema de la Figura 2.1. Entonces, el sistema en lazo cerrado está bien planteado y es internamente estable para todo $\|\Delta\|_\infty < 1$, si y solo si, $\|KS_o\|_\infty \leq 1$.*

Teorema 2.15 ([1]) *Sea $P_\Delta = (I + \Delta)P$, $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ y K un controlador estabilizante para la planta nominal P en el esquema de la Figura 2.1. Entonces, el sistema en lazo cerrado está bien planteado y es internamente estable para todo $\|\Delta\|_\infty < 1$, si y solo si, $\|T_o\|_\infty \leq 1$.*

2.5.4. Desempeño robusto

A continuación se muestra un ejemplo común de desempeño robusto.

Ejemplo. Suponga que el criterio de desempeño en el esquema de la Figura 2.1 es mantener “pequeña” la presencia de la perturbación d_o en la salida y_s , en energía o en potencia de acuerdo a las relaciones de las ecuaciones (2.65) y (2.66) y de las relaciones mostradas en la ecuación 2.24b; por lo que se desea que $\|S_o\|_\infty \leq \epsilon$, donde $S_o = (I + PK)^{-1}$. Considere que la función de peso W_S escala el error, es decir, $W_S = 1/\epsilon$; entonces el criterio de desempeño nominal es,

$$\|W_S S_o\|_\infty \leq 1 \quad (2.71)$$

Ahora suponga que se tiene un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida $P_\Delta = (I + \Delta)P$ con $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|\Delta\|_\infty < 1$; entonces, el desempeño robusto se satisface si

$$\|T_o\|_\infty \leq 1 \quad (2.72)$$

para estabilidad robusta de acuerdo al Teorema 2.15 y

$$\|W_S S_o (I + \Delta T_o)^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (2.73)$$

que resulta al reemplazar en (2.71), P en S_o , por el modelo de incertidumbre multiplicativo $P_\Delta = (I + \Delta)P$.

El siguiente Teorema, nos da una condición suficiente para el caso presentado.

Teorema 2.16 ([1]) *Suponga que $P_\Delta = (I + \Delta)P$ con $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|\Delta\|_\infty < 1$ y que K estabiliza internamente a P . Entonces el desempeño robusto del sistema se garantiza si,*

$$\|W_S S_o\|_\infty + \|T_o\|_\infty \leq 1 \quad (2.74)$$

Demostración [1]. Es evidente que en la ecuación (2.74) se garantiza que $\|T_o\|_\infty \leq 1$, entonces, es suficiente mostrar que $\|W_S S_o(I + \Delta T_o)^{-1}\|_\infty \leq 1$. Se puede ver que

$$\bar{\sigma}(W_S S_o(I + \Delta T_o)^{-1}) \leq \bar{\sigma}(W_S S_o) \bar{\sigma}[(I + \Delta T_o)^{-1}] \quad (2.75)$$

$$= \frac{\bar{\sigma}(W_S S_o)}{\underline{\sigma}(I + \Delta T_o)} \quad (2.76)$$

$$\leq \frac{\bar{\sigma}(W_S S_o)}{1 - \bar{\sigma}(\Delta T_o)} \quad (2.77)$$

$$\leq \frac{\bar{\sigma}(W_S S_o)}{1 - \bar{\sigma}(\Delta) \bar{\sigma}(T_o)} \quad (2.78)$$

Por lo tanto, (2.74) garantiza que $\|W_S S_o(I + \Delta T_o)^{-1}\|_\infty \leq 1$ al sustituirla en (2.78).
□

2.5.5. Esquema General Estándar de Control Robusto

Una forma de unificar los criterios de estabilidad robusta y desempeño robusto es utilizando el esquema general estándar de control robusto (EGE) mostrado en la Figura 2.6; que consiste en separar a la incertidumbre y al controlador a diseñar formando una planta generalizada P_G , donde w son las entradas exógenas como referencias y perturbaciones que deseamos minimizar en las señales z .

2.5.5.1. Transformaciones Lineales Fraccionales (LFT)

A continuación se define la Transformación Lineal Fraccional (LFT), que es una función matricial y se utiliza como herramienta para formulación de problemas de control. La definición está dada para matrices con elementos en los complejos, y para poder asociarla con las funciones de transferencia del EGE, se utiliza la analogía entre las matrices de transferencia P_G , K y Δ , y \hat{P}_G , \hat{K} y las matrices $\hat{\Delta}$ en los complejos.

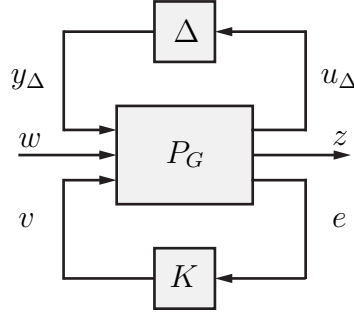


Figura 2.6: Esquema General Estándar de Control Robusto

Definición 2.14 ([1]) *Considere $\hat{K} \in \mathbb{C}^{m_3 \times p_3}$ y \hat{P}_G particionada como,*

$$\hat{P}_G = \begin{bmatrix} \hat{P}_{G11} & \hat{P}_{G12} & \hat{P}_{G13} \\ \hat{P}_{G21} & \hat{P}_{G22} & \hat{P}_{G23} \\ \hat{P}_{G31} & \hat{P}_{G32} & \hat{P}_{G33} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

donde $\hat{P}_{G11} \in \mathbb{C}^{p_1 \times m_1}$, $\hat{P}_{G12} \in \mathbb{C}^{p_1 \times m_2}$, $\hat{P}_{G13} \in \mathbb{C}^{p_1 \times m_3}$, $\hat{P}_{G21} \in \mathbb{C}^{p_2 \times m_1}$, $\hat{P}_{G22} \in \mathbb{C}^{p_2 \times m_2}$, $\hat{P}_{G23} \in \mathbb{C}^{p_2 \times m_3}$, $\hat{P}_{G31} \in \mathbb{C}^{p_3 \times m_1}$, $\hat{P}_{G32} \in \mathbb{C}^{p_3 \times m_2}$ y $\hat{P}_{G33} \in \mathbb{C}^{p_3 \times m_3}$. Entonces, la LFT inferior respecto a K es el mapeo de $\mathbb{C}^{m_3 \times p_3}$ a $\mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (m_1+m_2)}$ definido como,

$$\mathcal{F}_l(\hat{P}_G, \hat{K}) = \begin{bmatrix} \hat{P}_{G11} & \hat{P}_{G12} \\ \hat{P}_{G21} & \hat{P}_{G22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{P}_{G13} \\ \hat{P}_{G23} \end{bmatrix} \hat{K} (I - \hat{P}_{G33} \hat{K})^{-1} \begin{bmatrix} \hat{P}_{G31} & \hat{P}_{G32} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

siempre y cuando la inversa, $(I - \hat{P}_{G33} \hat{K})^{-1}$ exista.

Considere que \hat{M} es la matriz compleja obtenida en (2.80) particionada como,

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

donde $\hat{M}_{11} \in \mathbb{C}^{p_1 \times m_1}$, $\hat{M}_{12} \in \mathbb{C}^{p_1 \times m_2}$, $\hat{M}_{21} \in \mathbb{C}^{p_2 \times m_1}$ y $\hat{M}_{22} \in \mathbb{C}^{p_2 \times m_2}$; y considere $\hat{\Delta} \in \mathbb{C}^{m_1 \times p_1}$. Entonces, la LFT superior respecto a $\hat{\Delta}$ es el mapeo de $\mathbb{C}^{m_1 \times p_1}$ a $\mathbb{C}^{p_2 \times m_2}$ definido como

$$\mathcal{F}_u(\hat{M}, \hat{\Delta}) = \hat{M}_{22} + \hat{M}_{21} \hat{\Delta} (I - \hat{M}_{11} \hat{\Delta})^{-1} \hat{M}_{12} \quad (2.82)$$

siempre y cuando la inversa, $(I - \hat{M}_{11} \hat{\Delta})^{-1}$ exista.

El significado de la LFT en la teoría de control es evidente si tomamos a \hat{P}_G , \hat{K} y $\hat{\Delta}$ de la definición anterior, como las matrices de transferencia P_G , K y Δ de la

Figura 2.6. En este caso, obtenemos las relaciones entradas-salidas definidas entre w y z , es decir,

$$z = \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(P_G, K), \Delta)w \quad (2.83)$$

donde podemos definir $T_{zw} := \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(P_G, K), \Delta)$.

Los diagramas de la Figura 2.7 representan las LFT mencionadas.

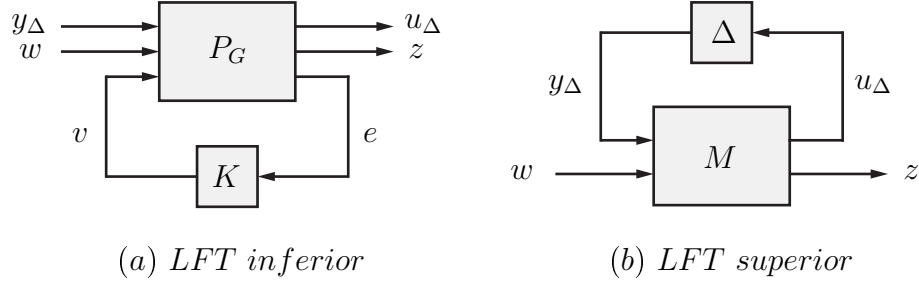


Figura 2.7: Transformaciones Lineales Fraccionales

Considere que K es un controlador estabilizante para P_G ; entonces, $M \in \mathcal{RH}_\infty$ y observe que M_{11} corresponde a la relación entre la entrada y la salida de Δ , por lo que puede ser usada para prueba de estabilidad robusta; es decir, toma el papel de M en el Teorema 2.13. Además, M_{22} corresponde a la relación entrada-salida de w a z , que aún no ha tomado en cuenta Δ , por lo que se puede usar como prueba para el análisis de desempeño nominal.

2.5.5.2. PTCE en el esquema general estándar

La PTCE para el esquema general estándar, queda representada como una LFT entre el controlador central y su parámetro libre. Considere el esquema de la Figura 2.7 (a) donde P_G tiene la siguiente representación en espacio de estados,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w_g(t) + B_2 v(t) \quad (2.84a)$$

$$z_g(t) = C_1 x(t) + D_{11} w_g(t) + E_{12} v(t) \quad (2.84b)$$

$$e(t) = C_2 x(t) + D_{21} w_g(t) + E_{22} v(t) \quad (2.84c)$$

donde $w_g = [y_\Delta^T \ w^T]^T$ y $z_g = [u_\Delta^T \ z^T]^T$.

Lema 2.4 ([1]) *Suponga que el par (A, B_2) es estabilizable y que el par (C_2, A) es detectable. Entonces, el sistema de la Figura 2.7 (a) es internamente estable, si y solo si, el sistema $\{A, B_2, C_2, E_{22}\}$ es internamente estable.*

Teorema 2.17 ([1]) Sean F y L tales que $A - B_2F$ y $A - LC_2$ sean estables, entonces la PTCE que estabilizan internamente a P_G es

$$K = \mathcal{F}_l(K_c, R) \quad (2.85)$$

con $R \in \mathcal{RH}_\infty$ y $I - E_{22}R$ no singular, donde K_c tiene la representación en espacio de estados $\{A_{K_c}, B_{K_c}, C_{K_c}, E_{K_c}\}$, siendo,

$$A_{K_c} = A - B_2F - LC_2 - LE_{22}F \quad B_{K_c} = L - (B_2 - LE_{22}) \quad (2.86)$$

$$C_{K_c} = \begin{bmatrix} F \\ -(C_2 - E_{22}F) \end{bmatrix} \quad E_{K_c} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & E_{22} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Si P_{G33} descrita por la realización $\{A, B_2, C_2, E_{22}\}$ corresponde a la planta nominal P , entonces la PTCE dada en el Teorema 2.17 corresponde a la PTCE dada en el Teorema 2.10.

2.5.6. Criterios de control robusto

El criterio de estabilidad robusta y desempeño robusto del Teorema 2.16 dado en la ecuación (2.74), involucra minimizar las funciones S_o y T_o . Observe que estas funciones de sensibilidad son complementarias como se mostró en la sección (2.3.2), por lo que no se pueden minimizar al mismo tiempo, resultando en un compromiso entre estabilidad robusta y desempeño robusto, que se ve reflejado en especificaciones en bandas de frecuencias. Comúnmente las perturbaciones en d_o se presentan en bajas frecuencias y las incertidumbres en los modelos en altas frecuencias.

Una forma de lograr este objetivo, es utilizando la técnica de Moldeo de Lazo (Loop Shaping, por su uso común en inglés), que consiste en encontrar un controlador que le de forma a la función de lazo abierto $L_o = PK$ para que se satisfagan las características deseadas en lazo cerrado para S_o y T_o , posiblemente utilizando funciones de peso y el parámetro libre del controlador de la PTCE.

Otra técnica para resolver criterios de desempeño, es plantear el modelo como Seguimiento de Modelo. Considere los esquemas de la Figura 2.7 y la PTCE del Teorema 2.17; defina $T := \mathcal{F}_l(P_G, K_c)$, particionada como $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, entonces

$M = \mathcal{F}_l(T, R)$, y el problema,

$$\min_K \|M\|_\infty \quad (2.88)$$

que involucra las funciones que relacionan las perturbaciones e incertidumbre a las salidas de interés, para maximizar el margen de estabilidad robusta y obtener un desempeño robusto, se puede reescribir como,

$$\min_{R \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_{11} + T_{12} R T_{21}\|_\infty \quad (2.89)$$

que consiste en escoger el parámetro libre R tal que $T_{12} R T_{21}$ se aproxime a T_{11}

El algoritmo presentado en [9] consiste en obtener una solución sub-óptima, es decir, un controlador tal que

$$\|M\|_\infty < \gamma \quad (2.90)$$

para un γ dado. El algoritmo consiste en encontrar ganancias de retroalimentación para el controlador mediante ecuaciones de Riccati.

En particular, en [27] se resuelve,

$$J_1 = \left\| \begin{bmatrix} S_o & PS_i \\ KS_o & T_i \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.91)$$

para $P_\Delta = (\tilde{D} + \tilde{\Delta}_D)^{-1}(\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)$ y un γ dado, utilizando factorizaciones coprimas normalizadas.

El criterio de minimizar,

$$J_2 = \left\| \begin{bmatrix} W_S S_o \\ W_M M_\Delta \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.92)$$

respecto a un controlador estabilizante para la planta nominal, donde M_Δ representa la función asociada al criterio de estabilidad robusta de acuerdo al Teorema 2.13, como pueden ser T_o y KS_o , para un modelo multiplicativo a la salida y uno aditivo, respectivamente; y W_M y W_S son funciones de peso que escalan y especifican las bandas de frecuencia; es transformado en [28] a minimizar,

$$J_3 = \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ M_{\Delta h} \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.93)$$

respecto a un controlador estabilizante para la planta nominal, donde S_{ol} es la aproximación de S_o en bajas frecuencias y $M_{\Delta h}$ es la aproximación en altas frecuencias.

El criterio se ha resuelto involucrando la minimización simultánea de $\|S_{ol}\|_\infty$ y $\|M_{\Delta h}\|_\infty$, esto es,

$$\begin{aligned} \min_K \quad & \|S_{ol}\|_\infty \\ \text{sujeto a} \quad & \|S_{ol}\|_\infty = \|M_{\Delta h}\|_\infty \end{aligned} \tag{2.94}$$

En particular, se ha resuelto utilizando la PTCE. Este último enfoque de utilizar aproximaciones para resolver el criterio, es el que se presenta en este trabajo en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Resultados

En el capítulo anterior, se dieron a conocer algunos criterios de control robusto en la sección 2.5.6 para obtener estabilidad robusta y desempeño robusto basados en la norma \mathcal{H}_∞ de funciones en lazo cerrado. En este capítulo, se presentan los resultados para la obtención de controladores que satisfacen un criterio de control robusto. Estos controladores están basados en la PTCE utilizando el enfoque de los trabajos [11, 12, 13] presentado en la sección 2.4, donde las factorizaciones de la planta y el controlador, están en la frecuencia con elementos de la planta en su representación en espacio de estados, manteniendo así, sus ventajas ahí mencionadas. Además, con estos controladores, a diferencia de los trabajos mencionados, el seguimiento a entradas de referencia en las salidas de control son diferentes a las señales de retroalimentación y la ubicación de polos es en lugares deseados del plano complejo. Para estas especificaciones, se propuso un esquema de control con un controlador de dos parámetros libres, donde el primero resuelve el criterio de control robusto y el segundo logra obtener seguimiento a entradas de referencia en bajas frecuencias. En este trabajo, las expresiones de las factorizaciones de la planta y el controlador se obtuvieron de las fórmulas dadas en [19] presentadas en la sección 2.4 que requieren ganancias de retroalimentación en lugar obtenerlas de forma algebraica; para ello, se propusieron ganancias de retroalimentación basadas en los elementos de la representación en espacio de estados de la planta y un conjunto de parámetros constantes que son los que permiten resolver el problema de ubicación de polos. Con estas factorizaciones, también se mantiene la ventaja de facilitar expresiones para los parámetros libres del controlador.

Los resultados de este capítulo están organizados de la siguiente manera. En la sección 3.1 se presenta el esquema de control y se definen los tipos de plantas a

controlar, así como los tipos de perturbaciones, para al final de la sección plantear el problema y proponer la solución. En la sección 3.2 se presentan ganancias de retroalimentación que resuelven el problema de ubicación de polos en lazo cerrado, y que a su vez, se utilizan para proponer las factorizaciones coprimas de la planta y el controlador en la sección 3.3. En la sección 3.4, se da la forma explícita de los dos parámetros libres del controlador que resuelven el criterio de sensibilidad planteado y el seguimiento a entradas de referencia. En la sección 3.5 se propone un algoritmo para la síntesis del controlador robusto que se aplica en los ejemplos de la sección 3.6.

3.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema de retroalimentación mostrado en la Figura 3.1 propuesto por [18] donde P es la planta dada, K es el controlador de dos parámetros libres a diseñar, W_o y W_m son funciones de peso estables y estrictamente propias, y_o es la salida a ser controlada, y_m es la salida medida, y_d es la entrada de referencia, d_i , d_m , y d_h son las perturbaciones aditivas en la entrada, en la medición y en la salida de la planta, respectivamente, satisfaciendo las siguientes suposiciones.

S1 Sea $P \in \mathcal{R}^{(p_o+m) \times m}$ con la siguiente FCD,

$$P = \begin{bmatrix} P_o \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_o \\ N_m \end{bmatrix} D^{-1} \quad (3.1)$$

donde, $N_o \in \mathcal{RH}_\infty^{p_o \times m}$, $N_m \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$, y $D \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ es un denominador coprimo común de P_o y P_m .

S2 Sea $K \in \mathcal{R}^{m \times (p_o+m)}$ con la siguiente FCI,

$$K = [K_1 \ K_2] = \tilde{D}_K^{-1} \begin{bmatrix} Q & \tilde{N}_K \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde $\tilde{D}_K \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ es un denominador coprimo izquierdo común de las partes del controlador de referencia y retroalimentación, $Q \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times p_o}$ es un parámetro de control libre, y $\tilde{N}_K \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$.

Las relaciones entrada-salida están descritas por,

$$y_o = N_o \varpi + W_o d_h \quad (3.3)$$

$$y_m = N_m \varpi + W_m d_h \quad (3.4)$$

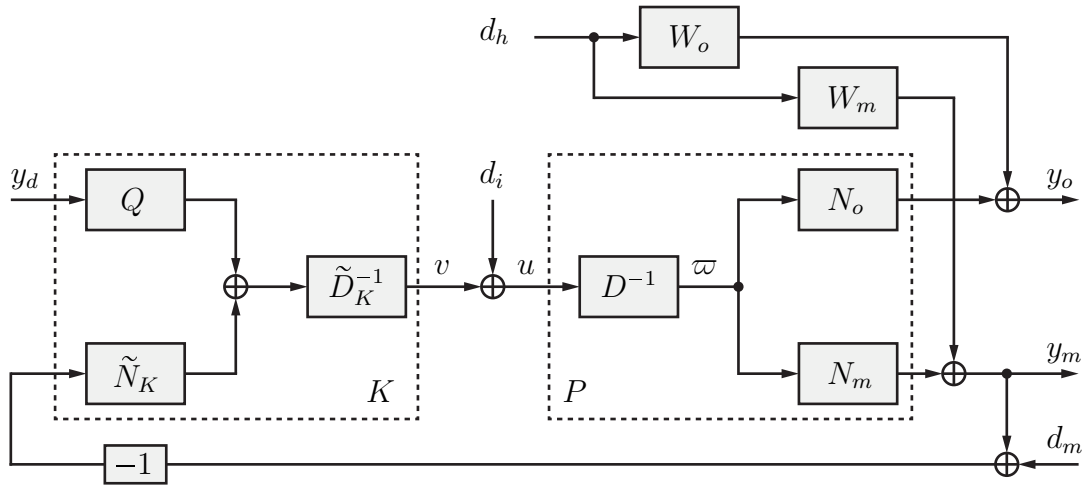


Figura 3.1: Configuración de control de dos parámetros

donde

$$\varpi = \left(\tilde{D}_K D + \tilde{N}_K N_m \right)^{-1} \left(Q y_d + \tilde{D}_K d_i - \tilde{N}_K d_m - \tilde{N}_K W_m d_h \right) \quad (3.5)$$

Como se puede ver de la ecuación (3.3) a la (3.5), el sistema es internamente estable si $\tilde{D}_K D + \tilde{N}_K N_m$ tiene inversa en \mathcal{RH}_∞ . Esto se asegura, de acuerdo al Teorema 2.11, si se satisface que,

$$X N_m + Y D = I_m \quad (3.6)$$

para $X, Y \in \mathcal{RH}_\infty$. Además, obtenemos la PTCE,

$$K = [K_1 \ K_2] = \tilde{D}_K^{-1} \begin{bmatrix} Q & \tilde{N}_K \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

siendo

$$\tilde{D}_K := Y - R \tilde{N}_m \quad (3.8)$$

$$\tilde{N}_K := X + R \tilde{D}_m \quad (3.9)$$

con los parámetros libres $Q \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times p_o}$ y $R \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ tales que $\det(Y - R \tilde{N}_m) \neq 0$. Más aún, $\tilde{D}_K D + \tilde{N}_K N_m$ de la ecuación (3.5) se reduce a la de (3.6), por lo que la ecuación (3.3) resulta en,

$$y_o = N_o Q y_d + N_o \tilde{D}_K d_i - N_o \tilde{N}_K d_m + (W_o - N_o \tilde{N}_K W_m) d_h \quad (3.10)$$

La condición $\det(Y - R \tilde{N}_m) \neq 0$ casi siempre se satisface para toda R como se muestra en [7].

Observe que la PTCE involucra sólo las factorizaciones coprimas dadas para P_m y no las de P_o ; entonces, el rol de K_2 que se encuentra en el lazo de retroalimentación, es asegurar la estabilidad del sistema.

S3 Las perturbaciones d_i , d_m y d_h se consideran señales de norma-2 acotada o de potencia de acuerdo a las ecuaciones (2.65) y (2.66).

Por lo tanto, para atenuar los efectos de d_i en bajas frecuencias, y los de d_m , y d_h en altas frecuencias sobre y_o , se requiere reducir la norma \mathcal{H}_∞ de las funciones $N_o\tilde{D}_K$ y $N_o\tilde{N}_K$ de acuerdo a la ecuación (3.10). Si W_o y W_m son funciones de peso pasa-bajas estables, la perturbación externa d_h se atenúa sobre y_o en altas frecuencias conforme se minimiza $\|N_o\tilde{N}_K\|_\infty$. Por lo tanto, corresponde minimizar,

$$J_4 = \left\| \begin{bmatrix} W_D N_o \tilde{D}_K \\ W_N N_o \tilde{N}_K \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.11)$$

respecto a un controlador estabilizante, donde W_D y W_N son funciones de peso que representan los anchos de banda en bajas y altas frecuencias respectivamente.

De la misma manera que en los trabajos de [11] y [28], presentado en las ecuaciones (2.93) y (2.94), el criterio de minimizar J_4 dado en la ecuación (3.11) se transforma en minimizar,

$$J_5 = \left\| \begin{bmatrix} N_o \tilde{D}_{Kl} \\ N_o \tilde{N}_{Kh} \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.12)$$

respecto a un controlador estabilizante, donde $N_o\tilde{D}_{Kl}$ es la aproximación de $N_o\tilde{D}_K$ en bajas frecuencias, y $N_o\tilde{N}_{Kh}$ es la aproximación de $N_o\tilde{N}_K$ en altas frecuencias, esto es, $N_o\tilde{D}_{Kl} = \lim_{s \rightarrow 0} (N_o\tilde{D}_K)$ y $N_o\tilde{N}_{Kh} = \lim_{s \rightarrow \infty} (N_o\tilde{N}_K)$. Este criterio se va a resolver mediante la minimización simultánea de $N_o\tilde{D}_{Kl}$ y $N_o\tilde{N}_{Kh}$ utilizando el primer parámetro libre R , esto es,

$$\min_R \left\| N_o \tilde{D}_{Kl} \right\|_\infty \quad (3.13a)$$

$$\text{sujeto a } \left\| N_o \tilde{D}_{Kl} \right\|_\infty = \left\| N_o \tilde{N}_{Kh} \right\|_\infty \quad (3.13b)$$

Una de las ventajas de usar aproximaciones es que no se requiere el uso de las funciones de peso W_D y W_N de (3.11) que puedan incrementar la dimensión del controlador.

Considere P_m incierta con un modelo multiplicativo a la salida, es decir, $(I + \Delta)P_m$ con $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$; entonces, de acuerdo a la Figura 3.2,

$$u_\Delta = N_m \varpi \quad (3.14)$$

con ϖ dada en la ecuación (3.5) más el nuevo término $-\tilde{N}_K y_\Delta$; es decir, ahora,

$$\varpi = Qy_d + \tilde{D}_K d_i - \tilde{N}_K d_m - \tilde{N}_K W_m d_h - \tilde{N}_K y_\Delta \quad (3.15)$$

donde $\tilde{D}_K D + \tilde{N}_K N_m = I_m$ debido a la PTCE. Entonces la relación de y_Δ a u_Δ es $N_m \tilde{N}_K$ que sirve como prueba de estabilidad robusta de acuerdo a la sección 2.5.3. Al minimizar $\|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty$, si $\|\tilde{N}_{Kh}\|_\infty$ es la de menor valor respecto a $\|N_o\|_\infty$, entonces $\|N_m \tilde{N}_{Kh}\|_\infty$ se reduce hasta cierto punto, es decir, se incrementa el margen de estabilidad robusta ante incertidumbre no estructurada en altas frecuencias donde es más significativa.

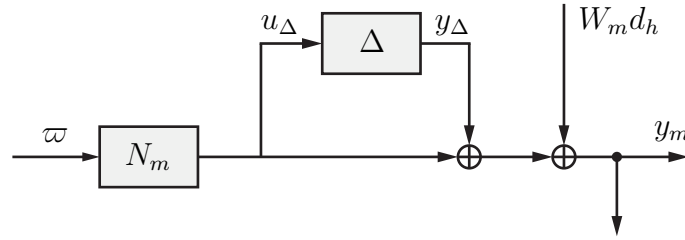


Figura 3.2: Incertidumbre multiplicativa a la salida

Se considera la siguiente clase de sistemas rectangulares para la planta nominal.

S4 Sea la realización en espacio de estados para $P \in \mathcal{R}^{(p_o+m) \times m}$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

Con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{(p_o+m) \times n}$ particionadas como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

siendo

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde $n = 2m$ es par, $p_o \leq m$, $C_{11}, C_{12} \in \mathbb{R}^{p_o \times m}$ y $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{21}, C_{21}, C_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Consecuentemente, $\{A, B, C_1\}$ y $\{A, B, C_2\}$ son realizaciones en espacio de estados para P_o y P_m , respectivamente, con P_m controlable y observable.

Para un sistema propio, se puede usar el esquema presentado en [13] para un controlador de dos parámetros y así trabajar sólo con la parte estrictamente propia del sistema.

Las siguientes fórmulas para obtener factorizaciones coprimas de la planta y el controlador mediante ganancias de retroalimentación, están basadas en las presentadas en la sección 2.4.3 para la representación en espacio de estados de la planta dada bajo la suposición S4:

$$\begin{bmatrix} N_o \\ N_m \end{bmatrix} = C (sI_n - A + BF)^{-1} B \quad (3.19)$$

$$D = I_m - F (sI_n - A + BF)^{-1} B \quad (3.20)$$

$$\tilde{N}_m = C_2 (sI_n - A + LC_2)^{-1} B \quad (3.21)$$

$$\tilde{D}_m = I_m - C_2 (sI_n - A + LC_2)^{-1} L \quad (3.22)$$

$$X = F (sI_n - A + LC_2)^{-1} L \quad (3.23)$$

$$Y = I_m + F (sI_n - A + LC_2)^{-1} B \quad (3.24)$$

con F y L tales que los polinomios característicos de $A - BF$ y $F - LC_2$ sean estables.

La siguiente transformación presentada por [12], actualizada en [13] y adecuada en esta tesis a la configuración de la Figura 3.1 con salidas controladas diferentes a las medidas, está basada en la representación en espacio de estados de P dada en la suposición S4, dándonos una estructura especial que nos permite proponer más adelante las ganancias de retroalimentación F y L .

Lema 3.1 *Considere P satisfaciendo las suposiciones S1 y S4 con matrices no-singulares B_{21} y C_{22} . Entonces, el cambio de base $\xi = T_1 x$ donde,*

$$T_1 := \begin{bmatrix} I_m & -B_{11}B_{21}^{-1} \\ V_1\Theta_1 & I_m \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1} & \Lambda_1^{-1}B_{11}B_{21}^{-1} \\ -V_1\Theta_1\Lambda_1^{-1} & I_m - V_1\Theta_1\Lambda_1^{-1}B_{11}B_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

con $V_1 := (A_{12} - B_{11}B_{21}^{-1}A_{22})^{-1}$, $\Theta_1 := A_{11} - B_{11}B_{21}^{-1}A_{21}$ y $\Lambda_1 := I_m + B_{11}B_{21}^{-1}V_1\Theta_1$; lleva la realización del sistema en nuevas coordenadas a la siguiente estructura,

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & A_{12k} \\ A_{21k} & A_{22k} \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} C_{11k} & C_{12k} \\ C_{21k} & C_{22k} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Así, $\{A_k, B_k, [C_{11k} \ C_{12k}]\}$ y $\{A_k, B_k, [C_{21k} \ C_{22k}]\}$ son realizaciones en espacio de estados de P_o y P_m en nuevas coordenadas, respectivamente.

También, un cambio de base $\eta = T_2x$ donde,

$$T_2 := \begin{bmatrix} \Lambda_2^{-1} & -\Lambda_2^{-1}\Theta_2V_2 \\ C_{22}^{-1}C_{21}\Lambda_2^{-1} & I_m - C_{22}^{-1}C_{21}\Lambda_2^{-1}\Theta_2V_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & \Theta_2V_2 \\ -C_{22}^{-1}C_{21} & I_m \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

con $V_2 := (A_{21} - A_{22}C_{22}^{-1}C_{21})^{-1}$, $\Theta_2 := A_{11} - A_{12}C_{22}^{-1}C_{21}$ y $\Lambda_2 := I_m + \Theta_2V_2C_{22}^{-1}C_{21}$; lleva la realización del sistema en nuevas coordenadas a la siguiente estructura,

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & A_{12o} \\ A_{21o} & A_{22o} \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} B_{1o} \\ B_{2o} \end{bmatrix}, C_o = \begin{bmatrix} C_{11o} & C_{12o} \\ 0 & C_m \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Consecuentemente, $\{A_o, B_o, [C_{11o} \ C_{12o}]\}$ y $\{A_o, B_o, [0 \ C_m]\}$ son realizaciones en espacio de estados de P_o y P_m en nuevas coordenadas, respectivamente. \square

Como se discute en [11], las formulaciones Euler-Lagrange completamente actuadas son una clase de sistemas dinámicos no-lineales que tienen realización linealizada de la forma (A_k, B_k) dada en (3.27). En ese caso, T_1 no es necesaria. También, en el Lema 3.1 se supone sin pérdida de generalidad que B_{21} y C_{22} son matrices no-singulares, esto es, sea $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ una realización de P , donde \hat{B} y $[\hat{C}_{21} \ \hat{C}_{22}]$ tienen m filas y columnas linealmente independientes, respectivamente, debido a que las entradas y salidas de P_m son linealmente independientes. En caso de que \hat{B}_{21} y \hat{C}_{22} no sean invertibles, entonces existen matrices unimodulares (matrices cuadradas con elementos en los enteros y determinante 1 o -1) U y V tales que,

$$B := U\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$C := \hat{C}V = \begin{bmatrix} C_{11o} & C_{12o} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

con B_{21} y C_{22} siendo invertibles; donde U y V^{-1} toman el rol de transformaciones que son aplicadas antes de T_1 y T_2 . Como consecuencias B_m y C_m son invertibles. También, A_{12k} y A_{21o} son invertibles, debido a que sus filas y columnas son linealmente independientes, de lo contrario, el rango de las matrices de controlabilidad y observabilidad sería menor que n , contradiciendo la suposición S4 de que la realización de P_m es controlable y observable.

Aunque las fórmulas dadas de la ecuación (3.19) a la (3.24) son válidas para dimensión de y_m diferente de m , el cambio de bases del Lema 3.1 queda involucrado automáticamente para ese caso. Si la dimensión de y_m es mayor que m , entonces, se puede usar una inversa por la izquierda C^+ tal que $C^+C = I_n$. La suposición S4 evita usar matrices pseudo-inversas que hace que se pierda unicidad en la solución y que se pueda perder estabilidad en lazo cerrado, y entonces se requerirá un análisis para integrar los parámetros del kernel de C^+ al diseño, como fue hecho en [28].

El problema a abordar es el siguiente.

Problema. Dar seguimiento a entradas de referencia en bajas frecuencias en la salida deseada y_o , en la configuración retroalimentada de la Figura 3.1, con respuesta transitoria de acuerdo a polos pre-especificados; y disminuir las perturbaciones aditivas d_i a la entrada de la planta en bajas frecuencias, y las perturbaciones aditivas d_m y d_h en la medición y en la salida de la planta, respectivamente, en altas frecuencias.

Los pasos propuestos para resolver el problema son los siguientes:

- Proponer ganancias de retroalimentación F y L basadas en el cambio de base dado por el Lema 3.1 para resolver el problema de ubicación de polos.
- Usar las ganancias de retroalimentación para obtener factorizaciones coprimas de la planta y el controlador mediante las formulas dadas de la ecuación (3.19) a la (3.24).
- Obtener las funciones del criterio de sensibilidad mezclada dadas en la ecuación (3.11) basadas en las factorizaciones y proponer el primer parámetro libre R para resolver el criterio.
- Proponer el segundo parámetro libre Q que relaciona la entrada de referencia y la salida deseada, para resolver el seguimiento a la entrada de referencia.

3.2. Ganancias de retroalimentación

El siguiente Lema presenta uno de los resultados de esta tesis, consiste en ganancias de retroalimentación basadas en la representación en espacio de estados de la planta, con parámetros constantes tales que podamos asignar polos en lazo cerrado. También, estas ganancias simplifican las matrices en lazo cerrado $A - BF$ y $A - LC_2$ en las expresiones de las ecuaciones dadas de (3.19) a (3.24).

Lema 3.2 *Considere P_m bajo la suposición $S4$, los cambios de base T_1 y T_2 dados en el Lema 3.1 y $0 < a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entonces,*

$$F = \bar{F}T_1 \quad (3.33)$$

$$L = T_2^{-1}\bar{L} \quad (3.34)$$

con

$$\bar{F} := B_m^{-1} \left[A_{21k} + \frac{c_1}{a_1} A_{12k}^{-1} \quad A_{22k} + \frac{b_1}{a_1} I_m \right] \quad (3.35)$$

$$\bar{L} := \begin{bmatrix} \left(A_{12o} + \frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \right) C_m^{-1} \\ \left(A_{22o} + \frac{b_2}{a_2} I_m \right) C_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

son las ganancias de estado de retroalimentación tales que las matrices $A - BF$ y $A - LC_2$ tienen polinomios característicos estables ϕ_1^m y ϕ_2^m , respectivamente, donde $\phi_1 := s^2 + \frac{b_1}{a_1}s + \frac{c_1}{a_1}$ y $\phi_2 := s^2 + \frac{b_2}{a_2}s + \frac{c_2}{a_2}$.

Demostración. De las ecuaciones (3.27), (3.33) y (3.35) el polinomio característico de la matriz $A - BF$ se simplifica a,

$$sI_n - A + BF = sI_n - T_1^{-1}A_kT_1 + T_1^{-1}B_kF \quad (3.37)$$

$$= T_1^{-1} (sI_n - A_k + B_k\bar{F}) T_1 \quad (3.38)$$

$$= T_1^{-1} \begin{bmatrix} sI_m & -A_{12k} \\ \frac{c_1}{a_1} A_{12k}^{-1} & \left(s + \frac{b_1}{a_1} \right) I_m \end{bmatrix} T_1 \quad (3.39)$$

Aplicando la fórmula de descomposición de matrices [1, ver p. 22-23]

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M_{21}M_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M_{11}^{-1}M_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

donde $\Psi := M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$ es el complemento de Schur de M_{11} ; entonces, su determinante es igual al $\det(M_{11})\det(\Psi)$. Así, tenemos que,

$$\det(sI_n - A + BF) = \det(T_1^{-1}) \det \left(\begin{bmatrix} sI_m & -A_{12k} \\ \frac{c_1}{a_1}A_{12k}^{-1} & \left(s + \frac{b_1}{a_1}\right)I_m \end{bmatrix} \right) \det(T_1) \quad (3.41)$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} sI_m & -A_{12k} \\ \frac{c_1}{a_1}A_{12k}^{-1} & \left(s + \frac{b_1}{a_1}\right)I_m \end{bmatrix} \right) \quad (3.42)$$

$$= \det(sI_m) \det \left(\left(s + \frac{b_1}{a_1} + \frac{c_1}{a_1} \frac{1}{s} \right) I_m \right) \quad (3.43)$$

$$= \phi_1^m \quad (3.44)$$

Usando el criterio de Routh-Hurwitz, con $a_1, b_1, c_1 > 0$ obtenemos un polinomio estable. De la misma forma para $sI_n - A + LC_2$, usando las ecuaciones (3.30), (3.34) y (3.36), el polinomio característico de la matriz $A - LC_2$ es,

$$sI_n - A + LC_2 = sI_n - T_2^{-1}A_oT_2 + L \begin{bmatrix} 0 & C_m \end{bmatrix} T_2 \quad (3.45)$$

$$= T_2^{-1} \left(sI_n - A_o + \bar{L} \begin{bmatrix} 0 & C_m \end{bmatrix} \right) T_2 \quad (3.46)$$

$$= T_2^{-1} \begin{bmatrix} sI_m & \frac{c_2}{a_2}A_{21o}^{-1} \\ -A_{21o} & \left(s + \frac{b_2}{a_2}\right)I_m \end{bmatrix} T_2 \quad (3.47)$$

Entonces,

$$\det(sI_n - A + LC_2) = \det(T_2^{-1}) \det \left(\begin{bmatrix} sI_m & \frac{c_2}{a_2}A_{21o}^{-1} \\ -A_{21o} & \left(s + \frac{b_2}{a_2}\right)I_m \end{bmatrix} \right) \det(T_2) \quad (3.48)$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} sI_m & \frac{c_2}{a_2}A_{21o}^{-1} \\ -A_{21o} & \left(s + \frac{b_2}{a_2}\right)I_m \end{bmatrix} \right) \quad (3.49)$$

$$= \phi_2^m \quad (3.50)$$

con $a_2, b_2, c_2 > 0$, y por el criterio de Routh-Hurwitz, obtenemos un polinomio estable. \square

3.3. Factorizaciones coprimas

El siguiente Lema da una FCD para P , una FCI para P_m y una solución a la ecuación dada en (3.6) con base en las ganancias de retroalimentación propuestas en el Lema 3.2.

Lema 3.3 *Considere K y una planta nominal dada P bajo las suposiciones $S1$, $S2$ y $S4$ en la configuración de retroalimentación mostrada en la Figura 3.1, los cambios de base T_1 y T_2 dados en el Lema 3.1, y las ganancias de retroalimentación dadas en el Lema 3.2 con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$. Sean $\phi_1 := s^2 + \frac{b_1}{a_1}s + \frac{c_1}{a_1}$ y $\phi_2 := s^2 + \frac{b_2}{a_2}s + \frac{c_2}{a_2}$. Entonces una factorización coprime derecha de P sobre \mathcal{RH}_∞ es,*

$$\begin{bmatrix} N_o \\ N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\phi_1} \begin{bmatrix} (C_{12k}s + C_{11k}A_{12k})B_m \\ (C_{22k}s + C_{21k}A_{12k})B_m \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$D = \frac{1}{\phi_1} B_m^{-1} (s^2 I_m - A_{22k}s - A_{21k}A_{12k}) B_m \quad (3.52)$$

una factorización coprime izquierda de P_m es,

$$\tilde{N}_m = \frac{1}{\phi_2} C_m (B_{2o}s + A_{21o}B_{1o}) \quad (3.53)$$

$$\tilde{D}_m = \frac{1}{\phi_2} C_m (s^2 I_m - A_{22o}s - A_{21o}A_{12o}) C_m^{-1} \quad (3.54)$$

y una solución a la ecuación $XN_m + YD = I_m$ es,

$$X = \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\left(A_{12o} + \frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \right) s + \frac{b_2}{a_2} A_{12o} - \frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} A_{22o} \right] C_m^{-1} \\ \left[\left(A_{22o} + \frac{b_2}{a_2} I_m \right) s + A_{21o}A_{12o} + \frac{c_2}{a_2} I_m \right] C_m^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$Y = \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1o}s + \frac{b_2}{a_2} B_{1o} - \frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} B_{2o} \\ B_{2o}s + A_{21o}B_{1o} \end{bmatrix} + I_m \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix} = \bar{F} T_1 T_2^{-1} \quad (3.57)$$

siendo $\bar{F} = B_m^{-1} \begin{bmatrix} A_{21k} + \frac{c_1}{a_1} A_{12k}^{-1} & A_{22k} + \frac{b_1}{a_1} I_m \end{bmatrix}$.

Demstración. De las ecuaciones (3.39) y (3.47) dadas en la prueba del Lema 3.2, obtenemos,

$$(sI_n - A + BF)^{-1} = T_1^{-1} \begin{bmatrix} sI_m & -A_{12k} \\ \frac{c_1}{a_1} A_{12k}^{-1} & \left(s + \frac{b_1}{a_1} \right) I_m \end{bmatrix}^{-1} T_1 \quad (3.58)$$

$$(sI_n - A + LC_2)^{-1} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} sI_m & \frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \\ -A_{21o} & \left(s + \frac{b_2}{a_2} \right) I_m \end{bmatrix}^{-1} T_2 \quad (3.59)$$

Entonces,

$$(sI_n - A + BF)^{-1} = T_1^{-1} \frac{1}{\phi_1} \begin{bmatrix} \left(s + \frac{b_1}{a_1}\right) I_m & A_{12k} \\ -\frac{c_1}{a_1} A_{12k}^{-1} & sI_m \end{bmatrix} T_1 \quad (3.60)$$

$$(sI_n - A + LC_2)^{-1} = T_2^{-1} \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \left(s + \frac{b_2}{a_2}\right) I_m & -\frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \\ A_{21o} & sI_m \end{bmatrix} T_2 \quad (3.61)$$

que claramente satisfacen $MM^{-1} = I$ con $M = sI_n - A + BF$ o $M = sI_n - A + LC_2$. Usando las fórmulas dadas de las ecuaciones (3.19) a (3.24) con T_1 dada en el Lema 3.1 para P ; y sustituyendo la ecuación (3.60) en la ecuación (3.19) obtenemos,

$$\begin{bmatrix} N_o \\ N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11k} & C_{12k} \\ C_{21k} & C_{22k} \end{bmatrix} \frac{1}{\phi_1} \begin{bmatrix} A_{12k} B_m \\ B_m s \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

llegando al resultado de la ecuación (3.51). De la transformación T_1 dada en el Lema 3.1 para P , F dado en el Lema 3.2, y sustituyendo la ecuación (3.60) en la ecuación (3.20),

$$D = I_m - \frac{1}{\phi_1} B_m^{-1} \begin{bmatrix} A_{21k} + \frac{c_1}{a_1} A_{12k}^{-1} & A_{22k} + \frac{b_1}{a_1} I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12k} B_m \\ B_m s \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

llegando al resultado de la ecuación (3.52). Mediante la transformación T_2 dada en el Lema 3.1 para P_m , y sustituyendo la ecuación (3.61) en la ecuación (3.21),

$$\tilde{N}_m = \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} C_m A_{21o} & C_m s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1o} \\ B_{2o} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

obteniendo la ecuación (3.53). Usando la transformación T_2 dada en el Lema 3.1 para P_m , L dada en el Lema 3.2, y sustituyendo la ecuación (3.61) en la ecuación (3.22),

$$\tilde{D}_m = I_m - \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} C_m A_{21o} & C_m s \end{bmatrix} \bar{L} \quad (3.65)$$

logrando el resultado de la ecuación (3.54). Aplicando la Transformación T_2 dada en el Lema 3.1 para P_m , F y L dadas en el Lema 3.2, y sustituyendo la ecuación (3.61) en la ecuación (3.23),

$$X = F T_2^{-1} \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \left(s + \frac{b_2}{a_2}\right) I_m & -\frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \\ A_{21o} & sI_m \end{bmatrix} \bar{L} \quad (3.66)$$

llegando a la ecuación (3.55). Finalmente, usando la transformada T_2 dada en el Lema 3.1 para P_m , F y L dadas en el Lema 3.2, y sustituyendo la ecuación (3.61)

en la ecuación (3.24),

$$Y = FT_2^{-1} \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \left(s + \frac{b_2}{a_2}\right) I_m & -\frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \\ A_{21o} & s I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1o} \\ B_{2o} \end{bmatrix} + I_m \quad (3.67)$$

obteniendo el resultado de la ecuación (3.56). \square

Con estas factorizaciones, los polos de las funciones de transferencia en lazo cerrado están determinados por las raíces de los polinomios ϕ_1 y ϕ_2 , resolviendo así el problema de asignación de polos.

3.4. Parámetros libres

El siguiente Teorema es el resultado principal de esta tesis y presenta fórmulas explícitas para los parámetros libres del controlador. Desde luego, cualquier otra elección de R y Q en \mathcal{RH}_∞ es posible. Las propuestas, simplifican el problema de sensibilidad mezclada y no incrementan el orden del controlador.

Teorema 3.1 *Bajo las suposiciones de S1 a S4, considere la parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes dada en (3.7) para la configuración de retroalimentación mostrada en la Figura 3.1, con factorizaciones coprimas y la solución a la ecuación (3.6) dadas en el Lema 3.3, los cambios de bases T_1 y T_2 dados por el Lema 3.1, y el criterio dado en la ecuación (3.12). Sea $\begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} := \bar{K} T_1 T_2^{-1}$ donde \bar{K} está dado por la ecuación (3.35), $0 < r \in \mathbb{R}$, ω_h una frecuencia fija en el ancho de banda de altas frecuencias de P y,*

$$Y_c := \frac{b_2}{a_2} \tilde{K}_1 B_{1o} - \frac{c_2}{a_2} \tilde{K}_1 A_{21o}^{-1} B_{2o} + \tilde{K}_2 A_{21o} B_{1o} + \frac{c_2}{a_2} I_m \quad (3.68)$$

Entonces,

1. Si $\|Y_c\|_\infty > \|Y_c - C_m A_{21o} B_{1o}\|_\infty$ y $\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty \leq \|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty$ para algún valor de r como se muestra en la Figura 3.3, donde,

$$\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty = \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \|C_{11k} A_{12k} B_m (Y_c - r C_m A_{21o} B_{1o})\|_\infty \quad (3.69)$$

y

$$\|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = \frac{1}{\omega_h} r \|C_{12k} B_m\|_\infty \quad (3.70)$$

escoja el parámetro libre del controlador estabilizante,

$$R = r I_m \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.71)$$

con

$$r = \frac{d_{ku}}{n_{ku} + d_{kl} - d_{ku}} \quad (3.72)$$

siendo

$$n_{ku} := \frac{1}{\omega_h} \alpha_1 \quad (3.73)$$

$$d_{ku} := \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \beta_1 \quad (3.74)$$

$$d_{kl} := \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \delta \quad (3.75)$$

$$\alpha_1 := \|C_{12k} B_m\|_\infty \quad (3.76)$$

$$\beta_1 := \|C_{11k} A_{12k} B_m Y_c\|_\infty \quad (3.77)$$

$$\delta := \|C_{11k} A_{12k} B_m (Y_c - C_m A_{21o} B_{1o})\|_\infty \quad (3.78)$$

R dado en (3.71) asegura que,

$$\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty = \|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = \frac{a_1 a_2 \alpha_1 \beta_1}{a_1 a_2 \omega_h (\beta_1 - \delta) + c_1 c_2 \alpha_1} \quad (3.79)$$

2. Si $C_m A_{21o} B_{1o}$ is invertible, entonces escoja

$$R = r Y_c (C_m A_{21o} B_{1o})^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.80)$$

donde

$$r = \frac{d_{ku}}{d_{ku} + n_{ku}} \quad (3.81)$$

siendo

$$n_{ku} := \frac{1}{\omega_h} \alpha_2 \quad (3.82)$$

$$d_{ku} := \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \beta_2 \quad (3.83)$$

$$\alpha_2 := \|C_{12k} B_m Y_c (C_m A_{21o} B_{1o})^{-1}\|_\infty \quad (3.84)$$

$$\beta_2 := \|C_{11k} A_{12k} B_m Y_c\|_\infty \quad (3.85)$$

R dado en (3.80) asegura que,

$$\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty = \|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = \frac{a_1 a_2 \alpha_2 \beta_2}{a_1 a_2 \beta_2 \omega_h + c_1 c_2 \alpha_2} \quad (3.86)$$

donde las normas de las aproximaciones en bajas y altas frecuencias de las funciones $N_o \tilde{D}_K$ y $N_o \tilde{N}_K$ son,

$$\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty = \left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \right) \beta_2 |1 - r| \quad (3.87)$$

y

$$\|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = \frac{1}{\omega_h} r \alpha_2 \quad (3.88)$$

respectivamente.

También, sea r_c el número de filas de $C_{11k} \in \mathbb{R}^{p_o \times m}$ linealmente independientes. Entonces, el parámetro libre Q que garantiza que las r_c salidas controladas de y_o sigan las entradas de referencia de y_d en estado estacionario con tiempo de respuesta determinado por los polos de $N_o Q$ es,

$$Q = \frac{c_1}{a_1} (A_{12k} B_m)^{-1} C_q \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.89)$$

siendo C_q tal que

$$C_{11k} C_q = \begin{bmatrix} I_{r_c} & \mathbf{0}_{r_c \times (p_o - r_c)} \\ \mathbf{0}_{(p_o - r_c) \times r_c} & \mathbf{0}_{(p_o - r_c) \times (p_o - r_c)} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Demostración. Primero, tomamos las aproximaciones de las funciones $N_o \tilde{D}_K$ y $N_o \tilde{N}_K$ en bajas y altas frecuencias, respectivamente, con las factorizaciones dadas en el Lema 3.3 y suponiendo que $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Considerando, $\tilde{D}_K = Y - R \tilde{N}_m$, con N_m y Y dadas por las ecuaciones (3.51) y (3.56) del Lema 3.3, tenemos,

$$N_{ol} = \frac{a_1}{c_1} C_{11k} A_{12k} B_m \quad (3.91)$$

$$\tilde{D}_{Kl} = \frac{a_2}{c_2} (Y_c - R C_m A_{21o} B_{1o}) \quad (3.92)$$

Con $C_{11k} A_{12k} \neq 0$,

$$N_o \tilde{D}_{Kl} = \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} C_{11k} A_{12k} B_m (Y_c - R C_m A_{21o} B_{1o}) \quad (3.93)$$

Considerando, $\tilde{N}_K = X + R \tilde{D}_m$, con \tilde{D}_m y X dadas por las ecuaciones (3.54) y (3.55) del Lema 3.3, tenemos,

$$N_{oh} = \frac{1}{w_h} C_{12k} B_m \quad (3.94)$$

$$\tilde{N}_{Kh} = \frac{1}{w_h} X_c + R \quad (3.95)$$

donde

$$X_c = \tilde{K}_1 \left(A_{12o} + \frac{c_2}{a_2} A_{21o}^{-1} \right) + \tilde{K}_2 \left(A_{22o} + \frac{b_2}{a_2} I_m \right) \quad (3.96)$$

En la ecuación (3.95) se supone que $\|R\|_\infty \gg \|\frac{1}{w_h} X_c\|_\infty$ debido al valor “grande” de ω_h . Entonces,

$$N_o \tilde{N}_{Kh} = \frac{1}{w_h} C_{12k} B_m R \quad (3.97)$$

Ahora, probamos 1 y 2,

1 Las ecuaciones (3.69) y (3.70) resultan de sustituir R de la ecuación (3.71) en la ecuación (3.93) y en la ecuación (3.97), respectivamente. Usando R dado en la ecuación (3.71), las normas de las funciones $N_o \tilde{D}_{Kl}$ y $N_o \tilde{N}_{Kh}$ dadas por las ecuaciones (3.69) y (3.70), son descritas como se muestra en la Figura 3.3, si para algún valor de r , $\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty \leq \|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty$, se asegura la intersección de las líneas. El valor para r dado en la ecuación (3.72) ocurre cuando ambas normas son iguales. Por lo tanto, usando la ecuación (3.72) en las ecuaciones (3.69) y (3.70) dan el resultado de la ecuación (3.79).

2 Las ecuaciones (3.87) y (3.88) resultan de sustituir R de la ecuación (3.80) en la ecuación (3.93) y (3.97), respectivamente. Usando R dada en la ecuación (3.80) y suponiendo que el valor de r varía entre 0 y 1; las normas de las funciones $N_o \tilde{D}_{Kl}$ y $N_o \tilde{N}_{Kh}$ dadas en las ecuaciones (3.87) y (3.88) se describen como se muestra en la Figura 3.4. El valor para r dado en la ecuación (3.81) ocurre cuando ambas normas son iguales. Por lo tanto, usando la ecuación (3.81) en las ecuaciones (3.87) y (3.88) se obtiene el resultado de la ecuación (3.86).

Finalmente, probamos el parámetro Q propuesto en la ecuación (3.89)

De la ecuación (3.10), $y_o = N_o Q y_d$. Con N_o dada en el Lema 3.3 y el parámetro Q propuesto en la ecuación (3.89),

$$y_o = \frac{c_1}{a_1 \phi_1} (C_{12k} s + C_{11k} A_{12k}) B_m (A_{12k} B_m)^{-1} C_q y_d \quad (3.98)$$

donde $\phi_1 = s^2 + \frac{b_1}{a_1} s + \frac{c_1}{a_1}$; el tiempo de respuesta queda determinado por los polos de N_o elegidos con a_1 , b_1 y c_1 . Aproximando en bajas frecuencias la ecuación (3.98), obtenemos que $y_o = C_{11k} A_{12k} B_m (A_{12k} B_m)^{-1} C_q y_d$. Debido a que A_{12k} y B_m son invertibles (ver los comentarios después del Lema 3.1) tenemos que $y_o = C_{11k} C_q y_d$, y con C_q satisfaciendo la ecuación (3.90)

$$y_o = \begin{bmatrix} I_{r_c} & 0_{r_c \times (p_o - r_c)} \\ 0_{(p_o - r_c) \times r_c} & 0_{(p_o - r_c) \times (p_o - r_c)} \end{bmatrix} y_d \quad (3.99)$$

□

Si hay ceros de transmisión de P_o que puedan causar efectos no deseados en la respuesta transitoria, podemos agregar al parámetro libre Q polos extra con el término $\frac{z_i}{s+z_i}$, esto es,

$$Q = \frac{c_1}{a_1} (A_{12k} B_m)^{-1} C_q \frac{z_i}{s+z_i} \quad (3.100)$$

donde z_i para $i = 1, \dots, m$ es la magnitud de la parte real de los ceros de transmisión de P_o ; por lo tanto, no existe cancelación de ceros en el semiplano derecho. Este término nuevo no afecta el seguimiento a la referencia debido a que la aproximación hecha en bajas frecuencia se preserva.

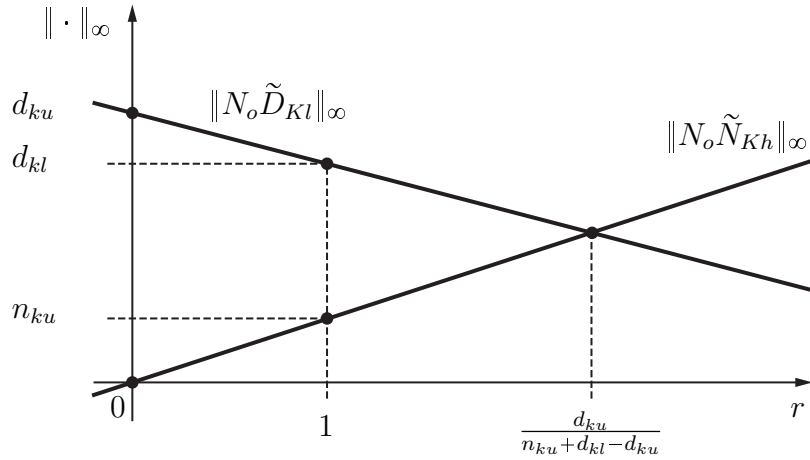


Figura 3.3: Función de intersección para el caso 1 del Teorema 3.1

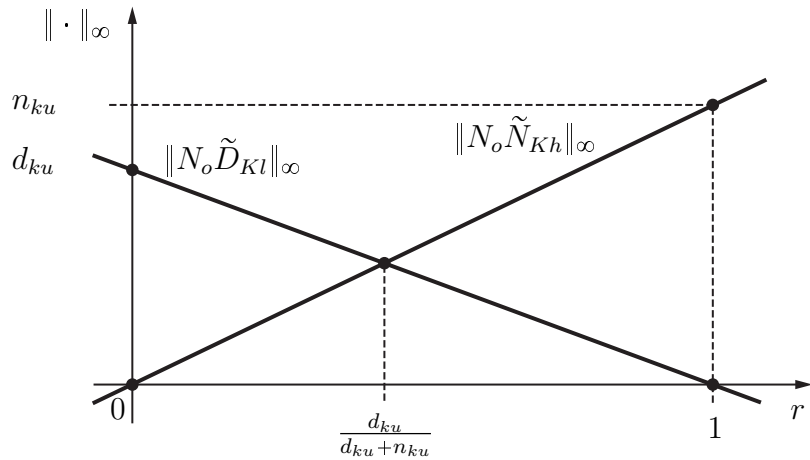


Figura 3.4: Función de intersección para el caso 2 del Teorema 3.1

Conforme se incrementa ω_h , de la ecuación (3.79) o de la ecuación (3.86),

$\|N_o\tilde{D}_{Kl}\|_\infty$ y $\|N_o\tilde{N}_{Kh}\|_\infty$ se minimizan simultáneamente obteniendo la misma norma, y como consecuencia, también J_5 dado en la ecuación (3.12) y no al revés como en el algoritmo de [9] por ejemplo, donde primero se obtiene la norma del criterio, pudiendo resultar en diferentes normas para cada función. También pueden ser usados los parámetros a_1, a_2, c_1 y c_2 para la minimización; sin embargo, la libre localización de los polos en lazo cerrado estaría limitada.

Las funciones de sensibilidad se obtienen con las factorizaciones dadas en el Lema 3.3. No necesitan ser factorizaciones normalizadas para resolver el criterio de sensibilidad mezclada como en [8] o que requieran filtros para delimitar las bandas de frecuencias a ser minimizados.

3.5. Síntesis del controlador

Con las factorizaciones dadas en el Lema 3.3 y los parámetros libres del controlador dados en el Teorema 3.1, el controlador estabilizante se obtiene con (3.7); y el problema planteado se resuelve mediante el siguiente procedimiento.

1. Verifique que P satisface las suposiciones S1 y S4; y obtenga la representación en espacio de estados de la planta dada como se muestra en las ecuaciones (3.27) y (3.30), usando las transformaciones del Lema 3.1.
2. Seleccione un nivel de desempeño γ que satisfaga las especificaciones en lazo cerrado tal que $\gamma_{opt} \leq J_5 \leq \gamma$, donde J_5 está dado en la ecuación (3.12)
3. Seleccione los polos deseados en lazo cerrado usando los parámetros a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 ; y obtenga las factorizaciones dadas en el Lema 3.3.
4. Seleccione el parámetro libre del controlador R del Teorema 3.1 y use el parámetro ω_h para minimizar J_5 usando las ecuaciones (3.79) o (3.86). Si el valor de J_5 no es satisfactorio, esto es, $J_5 > \gamma$ regrese al paso 3 seleccionando otros valores para a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y/o c_2 , hasta que $J_5 \leq \gamma$, o regrese al paso 2 seleccionando otro valor para γ , hasta que $J_5 \leq \gamma$. De otra forma, esto es, $J_5 \leq \gamma$, mantenga el valor de $R \in \mathcal{RH}_\infty$; y,
5. Obtenga el valor del segundo parámetro libre Q como se da en la ecuación (3.89). Modifíquelo de acuerdo a la ecuación (3.100) para cancelar dinámicas no deseadas de ceros, si existen.

En la Figura 3.5 se muestra un diagrama de bloques del procedimiento.

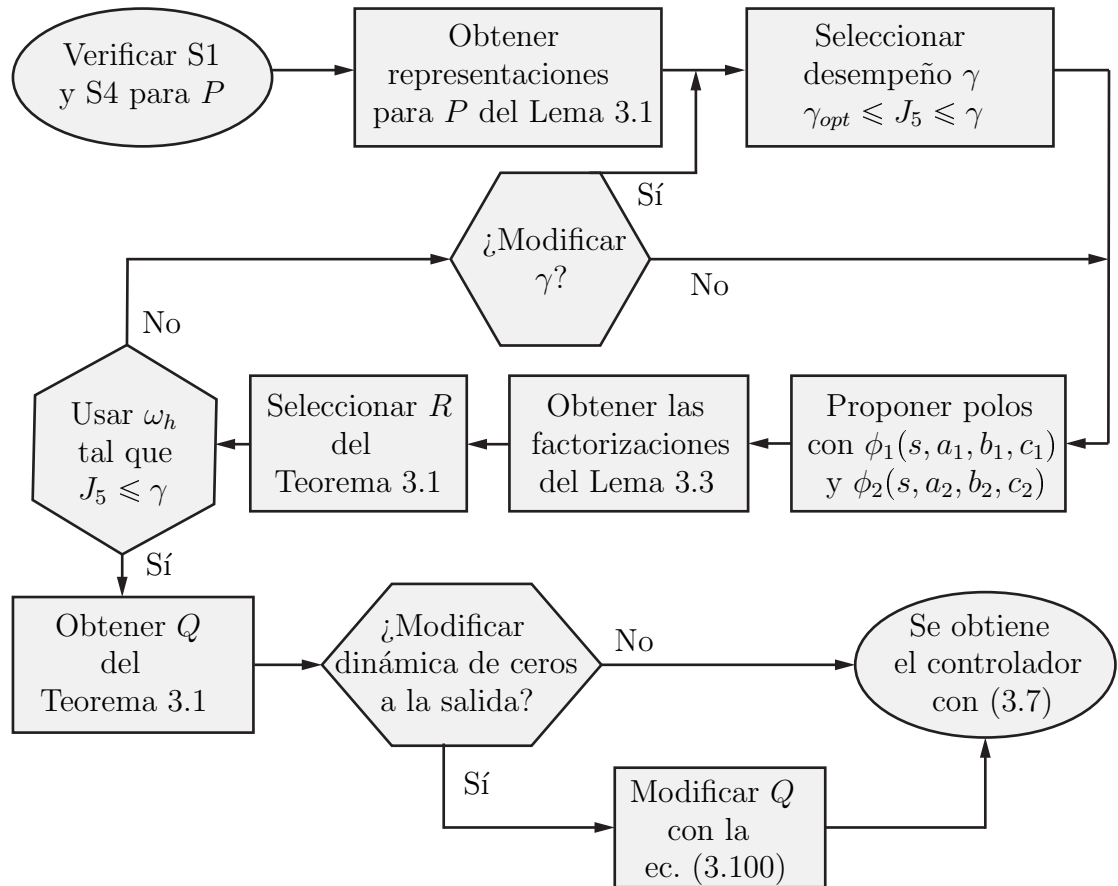


Figura 3.5: Procedimiento de síntesis del controlador

3.6. Ejemplos

En esta sección se presentan ejemplos para mostrar como aplicar los resultados obtenidos resolviendo el Problema planteado al final de la sección 3.1 seleccionando los parámetros libres constantes bajo las suposiciones de S1 a S4. En el primer ejemplo se muestra cómo minimizar la norma del criterio usando el parámetro ω_h una vez que los polos se han seleccionado, y como el segundo parámetro libre Q puede ser reajustado cuando hay ceros de transmisión que provocan dinámicas no deseadas. El segundo ejemplo es un sistema de 2-carros, donde se proponen dos selecciones para los polos y se muestra como afectan al ancho de banda para el sistema en lazo cerrado. Mientras que en el tercer ejemplo se obtiene un controlador para un sistema de suspensión activa de un medio-carro donde P_o no es cuadrada.

3.6.1. Planta con ceros de transmisión

En este ejemplo P tiene polos inestables en 1, 2, 3 y 4; P_o ceros de transmisión en -1.1232 y 13.8464 ; y una representación en espacio de estados de acuerdo a la ecuación (3.17) en la suposición S4, siendo,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 26 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 13 & -14 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Primero, seleccionamos el criterio de desempeño como $J_5 \leq 0.25$ y supongamos que se desean todos los polos en lazo cerrado en -7 ; es decir que $\phi_1 = \phi_2 = s^2 + 14s + 49$ de acuerdo al Lema 3.2, que se logra seleccionando $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 14$ y $c_1 = c_2 = 49$. Entonces, se obtienen las factorizaciones de la planta y el controlador dadas en el Lema 3.3.

Después, obtenemos la expresión de R dada en el Teorema 3.1. Como $\|Y_c\|_\infty < \|Y_c - C_m A_{21o} B_{1o}\|_\infty$ y $C_m A_{21o} B_{1o}$ es invertible para los polos propuestos, escogemos R dada por la ecuación (3.80).

Ahora, seleccionamos el parámetro constante ω_h para reducir la norma infinito del criterio dado en la ecuación (3.86). La Tabla 3.1 muestra el compromiso entre la norma y el ancho de banda en altas frecuencias para $N_o \tilde{N}_K$ determinado por ω_h . Seleccionando $\omega_h = 180$, $J_5 = 0.2070$ y se satisface el criterio de desempeño, que de acuerdo a las ecuaciones (2.65) y (2.66), los efectos de d_i y d_m se reducen alrededor del 80% sobre la salida y_o .

ω_h	$\ N_o \tilde{D}_{Kl}\ _\infty = \ N_o \tilde{N}_{Kh}\ _\infty$
100	0.3726
180	0.2070
300	0.1242

Tabla 3.1: Norma infinito para el ejemplo 3.6.1

Finalmente, usamos Q dado en la ecuación (3.89). Bajo la transformación T_1 , las dos filas de C_{11k} son linealmente independientes; lo que significa que podemos seguir ambas entradas de referencia. Los elementos obtenidos para la parametrización del controlador son,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2996 & -0.1559 \\ 0.9103 & -0.3609 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -0.4789 & -0.1566 \\ -0.4433 & -0.4526 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\tilde{D}_K = \frac{1}{\phi_1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 132.6 & -20.25 \\ 164.8 & -10.6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0.4609 & -87.35 \times 10^{-3} \\ 0.5057 & -15.59 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \right) \quad (3.105)$$

$$\tilde{N}_K = \frac{1}{\phi_1} \left(\begin{bmatrix} -0.4789 & -0.1566 \\ -0.4433 & -0.4526 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1.086 & -1.45 \\ 2.527 & -2.966 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0.3044 & -1.761 \\ 2.341 & -4.27 \end{bmatrix} \right) \quad (3.106)$$

La Figura 3.6 muestra los valores singulares máximos de la función N_oQ que relaciona la entrada y_d a la salida y_o ; y las funciones de sensibilidad mezclada $N_o\tilde{D}_K$ y $N_o\tilde{N}_K$ con sus respectivos anchos de banda en bajas y altas frecuencias delimitados por el valor de la norma 0.2070, que corresponde a -13.68 dB . Para este caso, la función N_oQ se encuentra sobre 0 dB aunque los polos en lazo cerrado no contienen polos complejos conjugados, esto se debe al cero de transmisión en -1.1232 . Esto causará un sobre-impulso en la respuesta a una entrada escalón como consecuencia.

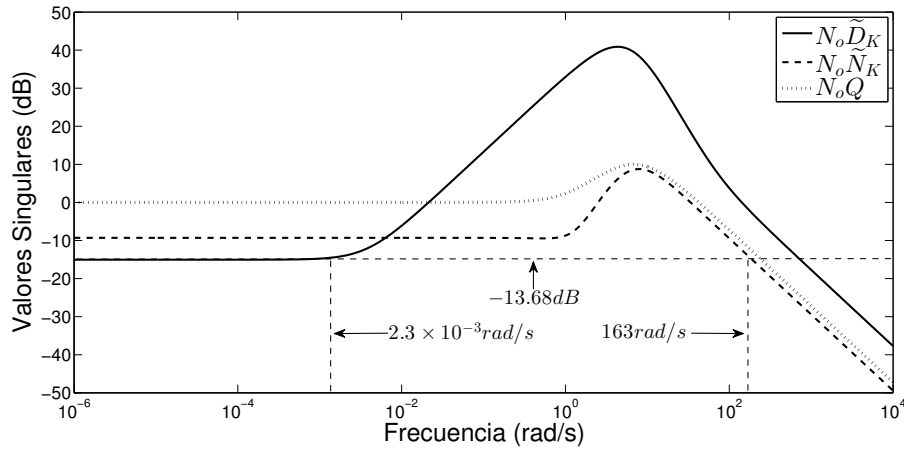


Figura 3.6: Valores Singulares máximos de $N_o\tilde{D}_K$, $N_o\tilde{N}_K$ y N_oQ

Por ello, usamos la modificación a Q dada en la ecuación (3.100), para cancelar el efecto no deseado de ese cero de transmisión.

$$Q = \frac{1.1232}{s + 1.1232} \begin{bmatrix} 0.2996 & -0.1559 \\ 0.9103 & -0.3609 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Note que, en este caso, el nuevo polo está mas cercano al origen, convirtiéndose en el polo dominante.

La Figura 3.7 muestra la función N_oQ modificada y la Figura 3.8 la respuesta de la salida para la entrada $y_d = \begin{bmatrix} 3 & \text{sen}(0.1t) \end{bmatrix}^T$ bajo $d_i = \text{sen}(0.001t)$ para $t \geq 15$ s en bajas frecuencias, y $d_m = \text{sen}(180t)$ para $t \geq 30$ s en altas frecuencias, sin sobreimpulso para la entrada escalón y tiempo de asentamiento de acuerdo al nuevo polo dominante.

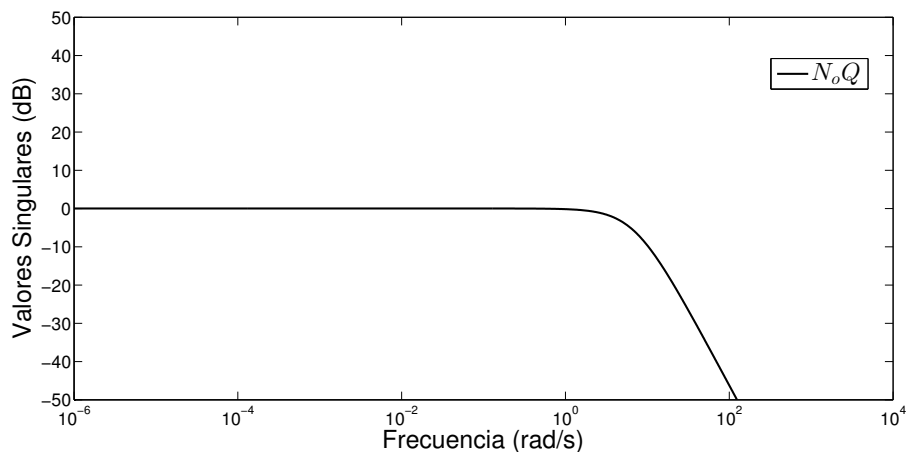


Figura 3.7: Valores Singulares máximos de N_oQ modificada

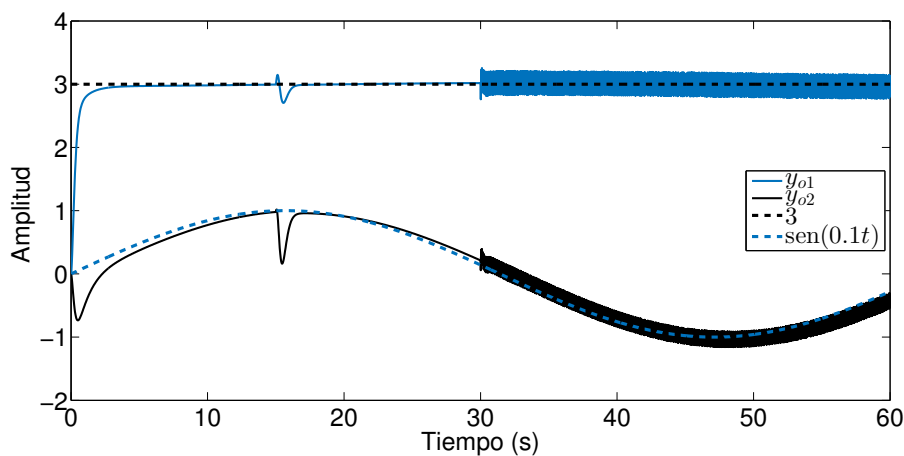


Figura 3.8: Respuesta en el tiempo de la salida y_o con la función N_oQ modificada

En este ejemplo escogimos el ancho de banda en altas frecuencias con ω_h . En el siguiente ejemplo ω_h ya no determina el ancho de banda debido a que la norma del criterio se vuelve 0 sin importar el valor que seleccionemos para ω_h .

3.6.2. Sistema de 2 carros

Una descripción en espacio de estados para el sistema de 2 carros mostrado en la Figura 3.9 está dada por la ecuación (3.16), con,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

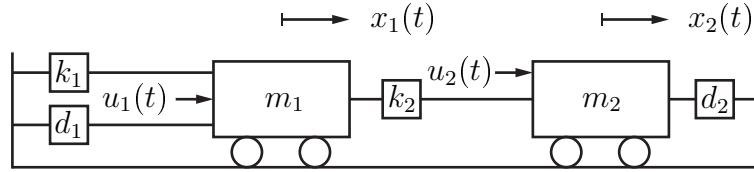


Figura 3.9: Sistema de dos-carros

donde

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \frac{-k_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{-d_1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{d_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

siendo m_1 y m_2 las masas de los carros, k_1 y k_2 las constantes de los resortes, y d_1 y d_2 los coeficientes de amortiguamiento con valores mostrados en la Tabla 3.2. Se pueden tomar otros valores siempre y cuando satisfagan las suposiciones para la planta. $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$ es el vector de estados de posiciones y velocidades para cada centro de masas. Las transformaciones del Lema 3.1 pueden ser aplicadas ya que B_{21} y C_{22} son matrices no-singulares.

En este ejemplo se considera que solo una salida de posición sigue a la entrada de referencia, y con $B_{11} = 0$, bajo la transformación T_1 , $C_{12k} = C_{12}$, entonces se logra el seguimiento a la referencia. También, $C_{12k} = 0$; esto implica que N_o no tiene ceros de transmisión de acuerdo a la ecuación (3.51) que pudieron causar efectos no deseados en la salida. También, α_1 y α_2 de las ecuaciones (3.76) y (3.84) respectivamente, se vuelven cero, entonces $\|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = 0$. Como en la ecuación (3.69) no hay ninguna r tal que $\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty \leq \|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = 0$, y $C_m A_{21o} B_{1o}$ es invertible, escogemos R dada por la ecuación (3.80), y entonces también $\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty = 0 = J_5$. En este caso, ω_h ya no determina a que frecuencia corresponde la norma.

Parámetro	Valor	Unidad
m_1	1	kg
m_2	1	kg
k_1	0.01	N/m
k_2	0.01	N/m
d_1	1	N·s/m
d_2	1	N·s/m

Tabla 3.2: Parámetros del sistema de dos-carros.

Se proponen dos casos, polos en lazo cerrado con parte real en -2.1 y en el segundo caso con parte real en -4.9 , aunque cualquier otra elección es posible; y suponga que en ambos casos se desea razón de amortiguamiento de 0.7 . Seleccionando $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 4.2$ y $c_1 = c_2 = 9$, obtenemos $\phi_{c1} = \phi_1 = \phi_2 = s^2 + 4.2s + 9$; y seleccionando $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 9.8$ y $c_1 = c_2 = 49$, obtenemos $\phi_{c2} = \phi_1 = \phi_2 = s^2 + 9.8s + 49$ de acuerdo al Lema 3.2. Los elementos del controlador de dos-parámetros obtenidos para el primer caso son;

$$Q = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -9.2203 & 7.4805 \\ 9.9214 & -4.2063 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$\tilde{D}_K = \frac{1}{\phi_{c1}} \left(I_2 s^2 + \begin{bmatrix} 1.659 & -21.22 \\ -1.509 & -4.351 \end{bmatrix} s \right) \quad (3.112)$$

$$\tilde{N}_K = \frac{1}{\phi_{c1}} \left(\begin{bmatrix} -9.22 & 7.48 \\ 9.921 & -4.206 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -49.9 & 29.58 \\ 17.42 & -8.109 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -36 & 27 \\ 31.5 & -13.5 \end{bmatrix} \right) \quad (3.113)$$

y para el segundo caso son,

$$Q = \begin{bmatrix} 49 \\ 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 383.1975 & -116.2293 \\ 238.8403 & -88.3416 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$\tilde{D}_K = \frac{1}{\phi_{c2}} \left(I_2 s^2 + \begin{bmatrix} -132.1 & -869.9 \\ -62.16 & -380.5 \end{bmatrix} s \right) \quad (3.115)$$

$$\tilde{N}_K = \frac{1}{\phi_{c2}} \left(\begin{bmatrix} 383.2 & -116.2 \\ 238.8 & -88.34 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -910.4 & 450.3 \\ 20.16 & -28.06 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1067 & 800.3 \\ 933.7 & -400.2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.116)$$

La Figura 3.10 muestra los valores singulares máximos de las funciones de sensibilidad mezclada $N_o \tilde{D}_K$ y $N_o \tilde{N}_K$ para ambos casos. Las frecuencias 9 rad/s y

50 rad/s corresponden a la magnitud de 0.2 para la función $N_o\tilde{N}_K$ para cada caso respectivamente, disminuyendo d_m alrededor del 80 %.

El controlador es implementado en la configuración de retroalimentación de la Figura 3.1, donde $d_h = 0$. La Figura 3.11 muestra la salida para la entrada $y_d = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, bajo $d_i = \text{sen}(0.01t)$ para $t \geq 5$ s para ambos casos, y $d_m = \text{sen}(9t)$ para $t \geq 5$ s y $d_m = \text{sen}(50t)$ para $t \geq 5$ s, para cada caso respectivamente.

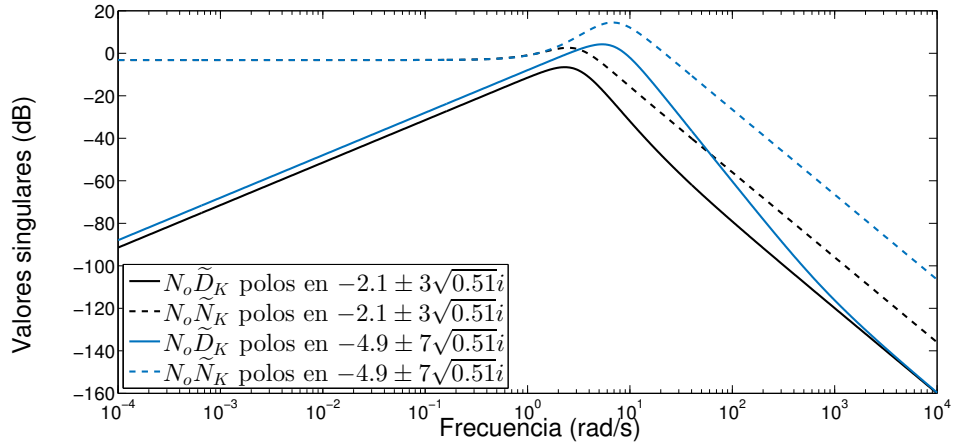


Figura 3.10: Valores singulares máximos de $N_o\tilde{D}_K$ y $N_o\tilde{N}_K$

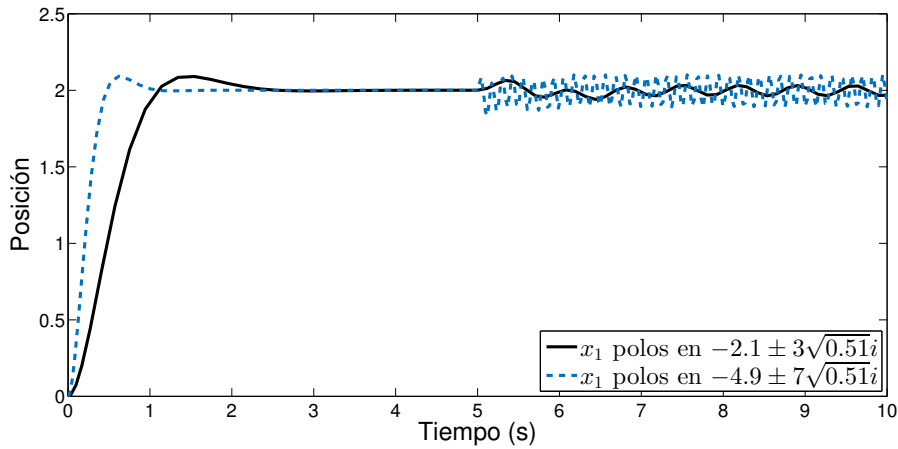


Figura 3.11: Respuesta en el tiempo de las posición de la masa m_1

3.6.3. Suspensión de medio-carro

Considere el sistema de suspensión de medio-carro mostrado en la Figura 3.12 donde se omitieron las masas no suspendidas. m y J son la masa suspendida y el

momento de inercia del cuerpo del vehículo de medio-carro respectivamente, d_1 y d_2 son las distancias de las suspensiones trasera y delantera al centro de masas del cuerpo del vehículo, k_1 y k_2 son los coeficientes de elasticidad de las suspensiones trasera y delantera, y b_{s1} y b_{s2} son los coeficientes de amortiguamiento de las suspensiones trasera y delantera. V_m y ω_J son las velocidades vertical y angular del cuerpo del vehículo en el centro de masas, F_{act2} y F_{act1} son las fuerzas activas delantera y trasera producidas por los actuadores, $F_{masstransfer}$ es la fuerza de transferencia de la masa debido a los efectos de aceleración y frenado aplicados en el centro de masas, y V_{road2} y V_{road1} son la velocidad frontal y trasera, respectivamente, vistas desde el vehículo que se mueve a una velocidad V .

Sea $x(t) = [x_1 \ x_2 \ J\omega_J \ mV_m]^T$, donde x_1 y x_2 son las posiciones trasera y delantera respectivamente; $u = [F_{act1} \ F_{act2}]^T$; y $d_h = [V_{road1} \ F_{masstransfer} \ V_{road2}]^T$. Entonces, una representación en espacio de estados del sistema es,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \end{bmatrix} u(t) + H d_h(t) \quad (3.117)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} x(t) \quad (3.118)$$

con,

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m} & \frac{1}{J}d_1 \\ \frac{-1}{m} & \frac{-1}{J}d_2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -d_1k_1 & -d_2k_2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{-(b_{s2}+b_{s1})}{m} & \frac{-(d_2b_{s2}-d_1b_{s1})}{J} \\ \frac{-(d_2b_{s2}-d_1b_{s1})}{m} & \frac{-(d_2^2b_{s2}+d_1^2b_{s1})}{J} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_{s1} & 1 & b_{s2} \\ -d_1b_{s1} & 0 & d_2b_{s2} \end{bmatrix}, \quad C_{11} = I_2 \quad (3.120)$$

$$C_{12} = 0 \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

con valores mostrados en la Tabla 3.3 dados en [29], que fueron el promedio de valores aleatorios utilizados para la investigación de la respuesta dinámica. Al igual que en el ejemplo 3.6.2, B_{21} y C_{22} son matrices no-singulares, y P_m no tiene ceros de transmisión.

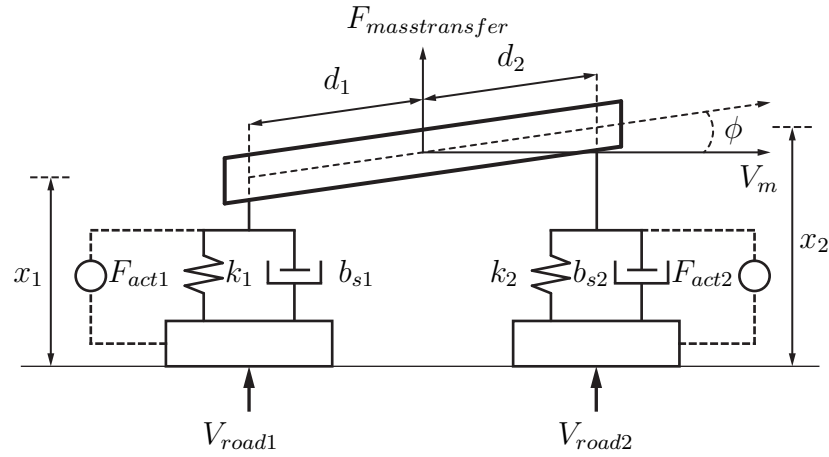


Figura 3.12: Suspencion de medio-carro

Parámetro	Valor	Unidad
m	1794.4	kg
J	3443.05	kg
k_1	18615	N/m
k_2	66824.4	N/m
d_1	1.716	m
d_2	1.271	m
b_{s1}	1000	N·s/m
b_{s2}	1190	N·s/m

Tabla 3.3: Parámetros del sistema de suspensión activa de medio-carro

Observe que en este ejemplo,

$$\begin{bmatrix} y_o \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(sI - A)^{-1}B & C_1(sI - A)^{-1}H \\ C_2(sI - A)^{-1}B & C_2(sI - A)^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d_h \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

donde $C_1 = [C_{11} \ C_{12}]$ y $C_2 = [C_{21} \ C_{22}]$. Entonces, de acuerdo al esquema de la Figura 3.1, las realizaciones $\{A, H, C_1\}$ y $\{A, H, C_2\}$ corresponden a las de W_o y W_m , respectivamente. Debido a que W_o y W_m contienen dinámicas de la planta en lazo-abierto, y está es estable, no afecta a la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Además, W_o y W_m tienen ganancias bajas en la banda de altas frecuencias minimizando los efectos de d_h en esa banda, en la salida y_o de acuerdo a la ecuación (3.10).

En este ejemplo se considera llevar a la referencia a x_1 y x_2 ; entonces,

$C_{11} = I_2$ y $C_{12} = 0$ que bajo la transformación T_1 , $C_{11k} = C_{11}$. Al igual que en el ejemplo anterior, como $C_m A_{21o} B_{1o}$ es invertible, escogemos R dado por la ecuación (3.80), entonces $\|N_o \tilde{D}_{Kl}\|_\infty = \|N_o \tilde{N}_{Kh}\|_\infty = J_5 = 0$, y ω_h ya no determina a que frecuencias corresponde el valor de la norma. Supongamos que se desean polos en lazo cerrado con parte real en -4.9 y factor de amortiguamiento de 0.7 , es decir, que $\phi_1 = \phi_2 = s^2 + 9.8s + 49$, que se logra seleccionando $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 9.8$ y $c_1 = c_2 = 49$ de acuerdo al Lema 3.2. Los elementos del controlador obtenidos son,

$$Q = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 3.4829 & 0.2595 \\ 0.2585 & 4.7928 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -2.3862 & 1.3506 \\ -2.0357 & 1.1526 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$\tilde{D}_K = \frac{1}{\phi_1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -6.994 \times 10^4 & 6.001 \times 10^5 \\ -6.434 \times 10^4 & 5.166 \times 10^5 \end{bmatrix} s \right) \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_K = \frac{1}{\phi_1} \left(1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -2.386 & 1.351 \\ -2.036 & 1.153 \end{bmatrix} s^2 + 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -2.632 & 1.495 \\ -2.241 & 1.274 \end{bmatrix} s \right. \\ \left. + 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} -7.092 & 5.478 \\ 8.57 & -3.492 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.125)$$

La Figura 3.13 muestra los valores singulares máximos de las funciones $N_o \tilde{D}_K$, $N_o \tilde{N}_K$, $N_o Q$ y $W_o - N_o \tilde{N}_K W_m$ que relaciona las entradas d_i , d_m , y_d y d_h a las salidas y_o , respectivamente. La Figura 3.14 muestra la salida para una entrada de referencia $y_d = [1 \quad 1.25]^T$, bajo $d_i = 0.5 \text{sen}(0.1t)$, $t \geq 2$, $d_m = 0.5 \text{sen}(500t)$, $t \geq 4$, $V_{road1} = 0.1 \text{sen}(300t)$, $t \geq 6$, $F_{masstransfer} = 1$, $t \geq 8$ y $V_{road2} = 0.1 \text{sen}(300t)$, $t \geq 10$.

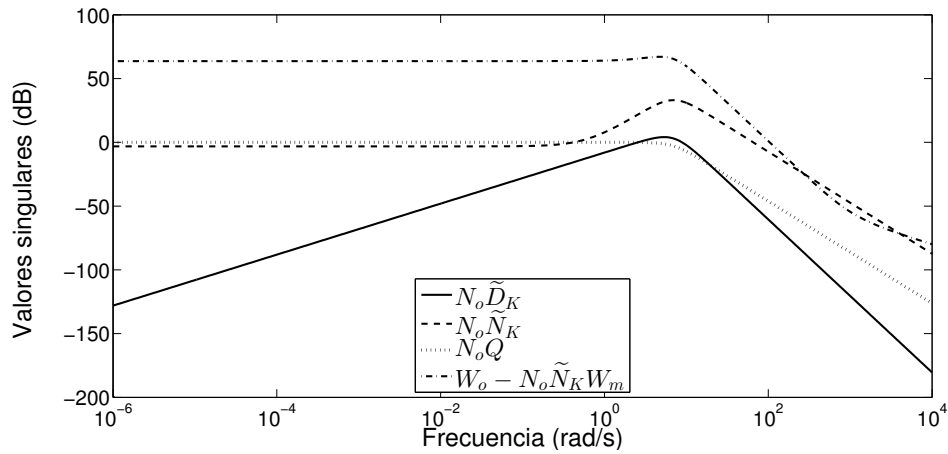


Figura 3.13: Valores Singulares máximos de $N_o \tilde{D}_K$, $N_o \tilde{N}_K$, $N_o Q$ y $W_o - N_o \tilde{N}_K W_m$

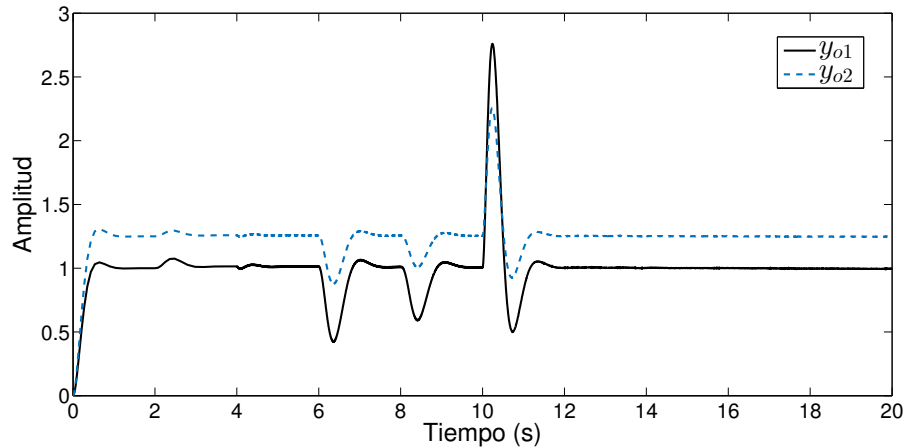


Figura 3.14: Respuesta en el tiempo de y_o para R dada en (3.123)

Aunque las suposiciones para usar $R = rI$ dada en la ecuación (3.71) garantizando que $\|N_o\tilde{D}_{Kl}\|_\infty = \|N_o\tilde{N}_{Kh}\|_\infty$ no se satisfacen para los polos seleccionados, con $r = 1$ tenemos que $\|N_o\tilde{D}_{Kl}\|_\infty = 3.6111 \times 10^{-4}$ y junto con $\|N_o\tilde{N}_{Kh}\|_\infty = 0$ que ya teníamos, $J_5 = 3.6111 \times 10^{-4}$. La Figura 3.15 muestra la salida para la misma referencia y perturbaciones previamente dadas.

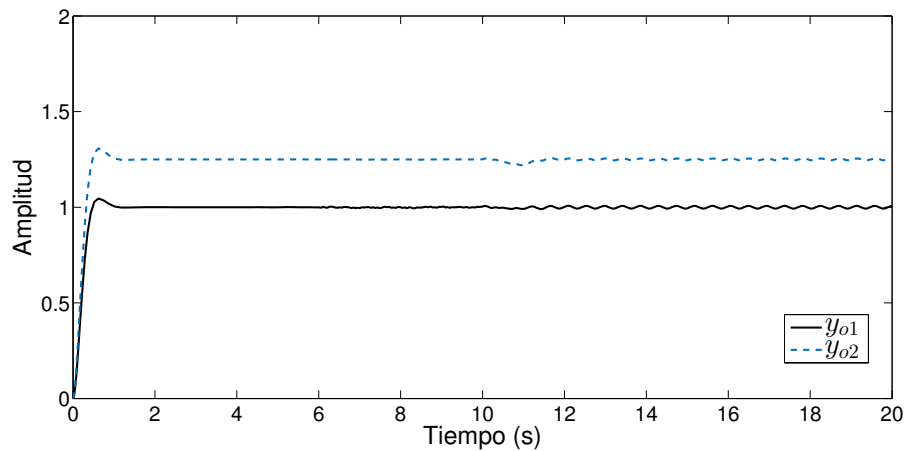


Figura 3.15: Respuesta en el tiempo de y_o para $R = I$

En los tres ejemplos, la respuesta del sistema fue estable bajo la presencia de perturbaciones en altas y bajas frecuencias, y suave de acuerdo a la asignación de polos. Además, se logra el objetivo de minimizar el criterio dado en la ecuación (3.12), esto es, atenuar d_m y d_h en altas frecuencias, y d_i en bajas frecuencias sobre y_o , logrando estabilidad y desempeño robusto.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

En este documento de tesis doctoral, se dieron expresiones analíticas de factorizaciones coprimas para una planta dada y para un controlador estabilizante, que permiten obtener la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes, evitando así tener que realizar operaciones elementales de matrices para cada planta dada. Estas expresiones fueron obtenidas mediante una fórmula estándar conocida que utiliza la representación en espacio de estados de la planta dada y la elección de ganancias de retroalimentación. Además, se propusieron ganancias de retroalimentación que contienen un conjunto de parámetros para poder especificar la ubicación de los polos en lazo cerrado. Estas ganancias están basadas en una transformación de estados para una clase de plantas, que facilitaron la obtención de las mismas.

También se dieron expresiones analíticas de los parámetros libres del controlador en una configuración retroalimentada con un controlador de dos parámetros, obteniendo así todas las funciones entrada-salida. Para el primer parámetro libre se propusieron dos expresiones después de realizar aproximaciones a dos funciones, a una en bajas y a la otra en altas frecuencias, que están involucradas en un criterio de control robusto para atenuar diferentes entradas de perturbaciones. Ambas propuestas aseguran que las normas infinito de las dos funciones sean iguales en sus respectivas bandas de frecuencia. Estas expresiones, quedaron descritas en función de algunos parámetros que determinan la ubicación de los polos en lazo cerrado y de un parámetro que determina el límite del ancho de banda en altas frecuencias obtenido en las aproximaciones. Con esto, es posible simplificar la elección del valor de la norma infinito mediante una técnica gráfica. Al igual que en otras técnicas, donde las ganancias de retroalimentación es el resultado de minimizar la

norma infinito del criterio, aquí también quedan involucradas las ganancias en el valor de la norma mediante los parámetros de ubicación de polos; sin embargo, es posible observar directamente el compromiso entre minimizar la norma infinito de las funciones involucradas y su ancho de banda resultante, así como el de la ubicación de polos deseada. Para el segundo parámetro libre del controlador, se propuso una expresión después de realizar una aproximación en bajas frecuencias que garantiza el seguimiento a entradas de referencia en la salida deseada, que es diferente a la medida, en esta banda, debido a que este parámetro es el involucrado en la relación entrada-salida. Además, se propuso un término que se le puede agregar por si se quiere contrarrestar efectos no deseados de ceros de transmisión, si existen. Sin embargo, esto implica agregar polos que pudieran ser dominantes a los elegidos previamente.

Las expresiones analíticas dadas, fueron obtenidas gracias a las aproximaciones que se realizaron en bajas y altas frecuencias, que es precisamente donde está el interés, obteniendo los resultados esperados mostrados mediante los ejemplos; y a la vez, no siendo tan conservadores en intentar minimizar la norma en una posible banda que no sea de nuestro interés. También, las aproximaciones nos permiten evitar el uso de funciones de peso que pudieran tener que proponerse para cada ejemplo, además de que incrementarían el orden del controlador; es decir, se tiene fijo el orden del controlador de antemano haciéndolo ideal para algunas situaciones como la implementación en línea.

4.1. Trabajos futuros

- Mejorar el algoritmo de elección de los parámetros que relacionan los polos en lazo cerrado, la norma \mathcal{H}_∞ de las funciones involucradas y su ancho de banda de frecuencias.
- Investigar la factibilidad de extender el resultado a una clase de sistemas más amplio, como para sistemas LTI con elementos de la planta no-cuadrados.
- Aplicar los resultados de control a sistemas Lineales con Parámetros Variantes en el tiempo (LPV, por sus siglas en inglés)

Bibliografía

- [1] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.
- [2] G. E. Dullerud and F. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*. Springer, 2000.
- [3] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel, *Robust Control The Parametric Approach*. Prentice Hall, 1995.
- [4] M. Green and D. J. Limebeer, *Linear Robust Control*. Prentice Hall, 1995.
- [5] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback control theory*. Dover Publications, 1992.
- [6] J. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [7] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. M.I.T. Press, 1985.
- [8] K. Glover and D. McFarlane, “Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with \mathcal{H}_∞ -bounded uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 821–830, Aug 1989.
- [9] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. A. Francis, “State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 831–847, August 1989.
- [10] P. Gahinet and P. Apkarian, “A linear matrix inequality approach to H_∞ control.,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.

- [11] R. Galindo, “Parameterization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity,” *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part I: journal of Systems and Control Engineering*, vol. 223, pp. 957–971, Oct 2009.
- [12] R. Galindo and C. D. Conejo, “A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems,” *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, pp. 1–6, Sep 2012.
- [13] R. Galindo, “Input/output decoupling of square linear systems by dynamic two-parameter stabilizing control,” *Asian Journal of Control*, vol. 18, pp. 2310–2316, Nov. 2016.
- [14] M. Chilali and P. Gahinet, “ \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 358–367, Mar. 1996.
- [15] D. Henrion, M. Šebek, and V. Kučera, “Robust pole placement for second-order systems: An lmi approach,” *Kybernetika*, vol. 41, no. 1, pp. 1–14, 2005.
- [16] X. Le and J. Wang, “Robust pole assignment for synthesizing feedback control systems using recurrent neural networks,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 25, pp. 383–393, Feb. 2014.
- [17] A. Sarjaš, A. Chowdhury, and R. Svečko, “Robust optimal regional closed-loop pole assignment over positivity conditions and differential evolution,” *IFAC CESCIT*, vol. 48, no. 10, pp. 141–146, 2015.
- [18] C. A. Desoer, “Decoupling linear multiinput multioutput plants by dynamic output feedback: An algebraic theory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, pp. 744–750, Aug 1986.
- [19] C. N. Nett, C. Jacobson, and M. J. Balas, “A connection between state-space and doubly coprime fractional representations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, pp. 831–832, Sep 1984.
- [20] M. Tsai, E. Geddes, and I. Postlethwaite, “Pole-zero cancellations and closed-loop properties of an H_∞ mixed sensitivity design problem,” *Automatica*, vol. 28, no. 3, pp. 519–530, 1992.

- [21] K. Folly, “A comparison of two methods for preventing pole-zero cancellation in H_∞ power system controller design,” in *IEEE Lausanne Power Tech*, 2007.
- [22] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1999.
- [23] D. C. Youla, H. A. Jabr, and J. J. Bongiorno, “Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case.,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, pp. 319–338, Jun 1976.
- [24] V. Kučera, “Stability of discrete linear feedback systems,” *Proceedings of the 6th IFAC World Congress*, pp.–, 1975.
- [25] C. A. Desoer, R. Liu, J. Murray, and R. Saeks, “Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 399–412, Jun 1980.
- [26] A. Bonilla and R. Galindo, “Expresión analítica de la doble factorización coprime para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada,” *Asociación de México de Control Automático*, Oct 2011.
- [27] D. McFarlane and K. Glover, “A loop-shaping design procedure using \mathcal{H}_∞ synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 759–769, Jun 1992.
- [28] R. Galindo, M. Malabre, and V. Kučera, “Mixed sensitivity \mathcal{H}_∞ control for LTI systems,” *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, pp. 1331–1336, Dec 2004.
- [29] W. Gao, N. Zhang, and H. Du, “A half-car model for dynamic analysis of vehicles with random parameters,” *Australasian Congress on Applied Mechanics*, 2007.