Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrios con Variaciones Conjeturadas en un Oligopolio parcialmente mixto

por

M.C. Gabriela Renata Huarachi Benavídez

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León 4 de mayo de 2022

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrios con Variaciones Conjeturadas en un Oligopolio parcialmente mixto

por

M.C. Gabriela Renata Huarachi Benavídez

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León 4 de mayo de 2022

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Equilibrios con Variaciones Conjeturadas en un Oligopolio parcialmente mixto", realizada por la alumnaM.C. Gabriela Renata Huarachi Benavídez, con número de matrícula 1878691, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dra. Nataliya Kalashnykova
Asesora

Dr. José Guadalupe Flores Muñiz
Co-asesor

Dr. Viacheslav Kalashnikov
Co-asesor

Dra. Lilia Alanís López
Revisora

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga
Revisor

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Coordinador del programa de Ciencias con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, 4 de mayo de 2022

Índice general

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mis padres, por su apoyo incondicional y convertirme en la persona que soy hoy en día. A mi hermana, sobrino y hermanos, por siempre estar pendientes de mi y permitirme estudiar tranquila en esos años difíciles. A mis tíos y primos, por ser un apoyo para mis padres y preocuparse por ellos para que terminará este ciclo sin contratiempos.

A mis amigas de Arica, Katy, Geral y Paty, que a pesar de la distancia me han apoyado en esta etapa de mi vida y seguir con estos casi 17 años de amistad.

Agradecer a mis profesores, por compartir sus conocimientos y comprender los momentos difíciles que hubo en está etapa.

A la Dra. Nataliya Kalashnykova, por ser mi asesora desde Maestría hasta Doctorado, a mi amigo y co-asesor Dr. José Flores Muñiz, ambos por guiarme en estos años de trabajo.

A mis amigos que hice en estos años de Posgrado, Lilian, Nancy, Yadira, Vero y Dianne, por brindarme su amistad y acompañarme en este maravillosa experiencia.

Agradezco también a la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas (FCFM), y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico y por permitirme estudiar la Maestría y Doctorado en este maravilloso país.

Por último y no menos importante; a mi futuro esposo, Leo, por acompañarme en esas tardes de estudio y trabajo, por su apoyo, comprensión y amor por esos años y los que vienen.

“Donde esté tu tesoro, allí estará también tu corazón.”

Reliquias de la Muerte - Capítulo 16: El Valle de Godric.

Capítulo 1
Introducción

Actualmente, la economía puede dividir las empresas en dos tipos: privadas o públicas.

Las empresas privadas son aquellas que toman el papel de maximizar la función de utilidad neta y por otro lado, las compañías públicas buscan maximizar una función objetivo que sea diferente a la de utilidad neta, por ejemplo, función de beneficio social (véase en trabajos como Kalashnikov et al. (2011); Fiell and Heywood (2001)) o función laboral como en Ireland and Law (1982); Stephen (1982).

Y en algunas de estas empresas existen mercados de un solo tipo producto que son dominados por ellas, en tal caso, el mercado toma el nombre de oligopolio, que se puede dividir en dos tipos: cuando las empresas o también llamados productores son privados, el mercado toma el nombre de oligopolio clásico, trabajos como Cornes and Sepahvand (2003); Figuières et al. (2004); Matsushima and Matsumura (2004) y en otro caso, cuando entre los empresas privadas existe al menos una empresa especial o pública, es decir, aquella empresa que maximiza otro tipo de función objetivo distinta a la de utilidad neta, el mercado se llama oligopolio mixto, véase Fiell and Heywood (2001); Kalashnikov et al. (2011); Matsumura (2003); Matsumura and Kanda (2005).

En estos últimos años, los modelos de oligopolios mixtos se han convertido en un tema muy popular en la literatura.

Como mencionamos el productor especial generalmente se ocupa de una función objetiva distinta a la de utilidad neta. Algunos trabajos incluyen un productor que maximiza el beneficio social: véase, Cornes and Sepahvand (2003); Fershtman (1990); Matsumura (2003); Matsushima and Matsumura (2004) y Matsumura and Kanda (2005), por mencionar algunos, otros trabajos reemplazan la función objetivo de utilidad neta estándar por una función de ingresos por trabajador en trabajos como:Ireland and Law (1982); Bonin and Putterman (1987); Stephen (1982) y Putterman (2008). E investigadores como Saha and Sensarma (2013) y Mumcu et al. (2001) estudian un tercer tipo de duopolio mixto con un participante exclusivo con el objetivo de mejorar una combinación convexa entre la utilidad neta y su beneficio social.

En muchos de los trabajos mencionados anteriormente, los autores estudian los modelos de oligopolios mixtos con enfoques de Cournot, Hotelling o Stackelberg, como Bonin and Putterman (1987); Fiell and Heywood (2001) y Bulavsky (1997).

Estos enfoques mencionados, se diferencian en que los productores compiten por cantidades, pero difieren en el tiempo de sus decisiones. En Cournot, Bulavsky and Kalashnikov (1995); Cornes and Sepahvand (2003); Kalashnikov et al. (2010), las empresas toman la decisión de su producción simultáneamente, por otro lado, en Stackelberg Cornes and Sepahvand (2003); Fershtman (1990); Kalashnikov et al. (2010) se considera un líder, el cual toma la decisión y los seguidores observan el movimiento del líder y de ahí toman su decisión de producción.

Por otro lado, hoy en día, un concepto de equilibrio de variaciones conjeturadas (CVE) que fue introducido por primera vez en Bowley (1924) y Frisch (1951), son considerados como otra posible solución a los juegos estáticos que se usa cada vez más. Este concepto, pone que los productores se comporten de la siguiente manera: cada uno de ellos escoge su acción más favorable tomando en cuenta que la estrategia de cada rival es una función conjeturada de su propia estrategia

En Isac et al. (2002), propone un manera diferente de Bowley (1924); Frisch (1951) en el concepto del equilibrio con variaciones conjeturadas y el modelo de Cournot clásico, junto con el modelo de competencia perfecta, fueron incluidos en una clase uniforme de modelos de oligopolios, en el que la influencia de cada productor está modelada por un parámetro especial (llamado coeficiente de influencia). En más detalle, en lugar de tomar la hipótesis del modelo clásico de Cournot, se supone que cada productor utiliza variaciones conjeturadas del volumen total del mercado en función de la variación de su propio volumen de producción de la siguiente manera:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i)\omega_i(G, q_i) \tag{1}$$

donde

- G es el volumen total de producción del mercado;
- q_i es la cantidad de la producción actual por el productor i;
- η es la cantidad de producción esperada por productor i;
- $G_i(\eta)$ es el volumen total de producción con conjetura por el productor i después de que su volumen de producción cambia de q_i a η.

La función de conjetura $\omega_i(G, q_i)$ en la fórmula (1) representa el coeficiente de influencia del productor i. En el modelo clásico de Cournot, este coeficiente es igual a 1 y en el modelo de competencia perfecta es igual a cero. Para las conjeturas dadas bajo los supuestos generales se demostró la existencia y unicidad del equilibrio antes mencionado. No obstante, una importante pregunta no fue respondida durante ese trabajo: ¿Qué conjeturas pueden considerarse óptimas?.

Para responder a esta importante pregunta, Bulavsky en Bulavsky (1997) planteó un enfoque verdaderamente nuevo.

En lugar de asumir la equivalencia (simetría) de los productores en el modelo de oligopolio, se supone que cada productor hace conjeturas, no sobre las funciones de respuesta (óptimas) de cada uno de los otros productores, sino sobre las variaciones del precio de equilibrio en el mercado dependiendo de las variaciones en el volumen de producción del mismo productor (de manera infinitesimal). Conociendo las conjeturas de los adversarios (llamados coeficientes de influencia), cada productor se somete a un procedimiento de verificación y revela si su coeficiente de influencia es consistente con el resto de los productores.

En trabajos Kalashnikov et al. (2011); Kalashnykova et al. (2011); Kalashnikov et al. (2014*a*) y Kalashnikov et al. (2014*b*), los resultados obtenidos en Bulavsky (1997) se extendieron a los casos de duopolio y oligopolio mixtos, respectivamente. En Kalashnikov et al. (2014*a*) y Kalashnikov et al. (2014*b*) se estudiaron modelos de duopolio y oligopolio parcialmente mixtos, es decir, donde la compañía semi-pública, al igual que en Bowley (1924) y Frisch (1951), maximiza una combinación convexa de las funciones de beneficio social y la función de utilidad neta del participante con un parámetro $\beta \in (0, 1]$, considerando que las funciones de costos de los productores del mercado son cuadráticas.

En el Capítulo 2, y las secciones, 2.2 y 2.3 del presente trabajo, extendemos los resultados vistos en Kalashnikov et al. (2014*a*) y Kalashnikov et al. (2014*b*), al caso de funciones de costo convexas (es decir, no necesariamente cuadráticas).

Cuando estudiamos los modelos de oligopolios, además de los problemas de existencia y el cálculo de los estados de equilibrio, cobra mucha importancia e interés el análisis comparativo de los diferentes equilibrios. Tal análisis comparativo para el duopolio semimixto se ha realizado en el trabajo Kalashnikov-Jr et al. (2017) donde se formuló un criterio para el valor óptimo del parámetro β y se demostró la existencia del valor óptimo de esté parámetro $\beta^{\text{opt}} \in (0, 1)$.

En el Capítulo 3 del presente trabajo, se amplía este análisis mencionado para el caso del oligopolio donde todas las firmas privadas tienen la misma función de costos, y donde el criterio de optimalidad para la elección del valor óptimo del parámetro β ha sido formulado y su existencia está demostrada.

En el Capítulo 4 se describen experimentos numéricos y se proporciona los análisis de estos resultados. Las observaciones finales (Capítulo 5), los agradecimientos y la lista de referencias completan este trabajo. Las demostraciones de los lemas y teoremas se encuentran en el apéndice.

Capítulo 2

Modelo de Oligopolio parcialmente mixto

2.1 Especificación del modelo

En este capítulo 2 consideramos un mercado de oligopolio de un producto homogéneo con $n+1$ productores y $n \geq 1$. Cada productor $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tiene sus funciones de costos $f_i(q_i)$, donde q_i es el volumen de producción para cada agente i. La demanda de los consumidores se considera de dos tipos: pasiva y activa. La demanda pasiva depende del precio y está dada por la función de demanda $G\,(p)$, donde p es el precio de mercado propuesto por todos los agentes productores. Y la demanda activa D es no-negativa y no depende del precio. Se define también el equilibrio entre la oferta y la demanda para un precio determinado p dado por la siguiente ecuación de balance:

$$\sum_{i=0}^{n} q_i = G\,(p) + D \tag{2}$$

Para el comportamiento de la demanda pasiva se representa en el siguiente supuesto:

A 1. *La función de demanda $G\,(p)$ está definida para precios $p \in (0, +\infty)$ siendo no negativa, continuamente diferenciable y $G'(p) < 0$.*

Además, asumimos que las funciones de costos son estrictamente crecientes y convexas que se representa en el siguiente supuesto:

A2. *Para cada productor $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, su función de costo $f_i\,(q_i)$, se define para cada $q_i \geq 0$, es dos veces continuamente diferenciable, con $f_i^{'}\,(0) > 0$, $f_i^{''}\,(q_i) > 0$.*

Además, se cumple

$$f_0^{'}\,(0) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ f_i^{'}\,(0) \right\} \tag{3}$$

Los productores $i \in \{1, \ldots, n\}$ se denominan productores privados y escogen su volumen de producción $q_i \geq 0$ con el fin de maximizar su utilidad neta.

$$\pi_i(p, q_i) = p \cdot q_i - f_i(q_i). \tag{4}$$

Por otro lado, el productor $i = 0$, es una compañía semi-pública y selecciona su volumen de producción $q_0 \geq 0$ para maximizar la combinación convexa entre el beneficio social y su función de utilidad neta

$$S(\beta, p, q_0, \ldots, q_n) = \beta \left(\int_0^{\sum_{i=0}^{n} q_i} p(x)\, dx - p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right) - f_0(q_0) \right) + (1-\beta)(pq_0 - f_0(q_0)). \tag{5}$$

donde, como en Saha and Sensarma (2013) y Mumcu et al. (2001), $\beta \in (0, 1]$ es un parámetro. Desde ahora en adelante, llamaremos este parámetro, β, nivel de socialización.

Para todos los agentes (tanto semi-público como privados) asumen que su elección de volumen de producción podría afectar el valor del precio del mercado p. Este supuesto puede ser definido por una dependencia conjeturada de la variación del precio p en función de su volumen de producción q_i del productor i. Así, las condiciones de optimalidad de primer orden para describir el equilibrio tienen la siguiente forma:

Para productores privados ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$)

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f_i'(q_i) \begin{cases} = 0 & \text{si } q_i > 0 \\ \leq 0 & \text{si } q_i = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Y para el productor semi-público ($i = 0$)

$$\frac{\partial S}{\partial q_0} = p + \left[(1-\beta) q_0 - \beta \sum_{i=1}^{n} q_i \right] \frac{\partial p}{\partial q_0} - f_0'(q_0) \begin{cases} = 0 & \text{si } q_0 > 0 \\ \leq 0 & \text{si } q_0 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Entonces, para describir el comportamiento de los productores i, necesitamos evaluar el comportamiento de la derivada de la dependencia de p respecto a q_i. Es decir,

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} = -\nu_i \tag{8}$$

Introducimos el signo menos en (8) para trabajar con valores no negativos de ν_i. Además, debemos garantizar que las derivadas de p con respecto a su volumen de producción del productor $i \in \{0, 1, \ldots n\}$ proporciona la concavidad de la función, sino, no podemos garantizar que las condiciones necesarias sean suficientes.

Para los agentes privados $i \in \{1, \ldots, n\}$, para que las condiciones en (6) sean suficientes, basta sólo garantizar que la función $\pi_i\,(q_i)$ sea cóncava. Como suponemos que las funciones de costo $f_i\,(q_i)$ son estrictamente convexas, sólo falta garantizar la concavidad del producto $p \cdot q_i$ con respecto a q_i. Para esto, es suficiente suponer que el coeficiente ν_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (que llamamos coeficiente de influencia del productor i) es no negativo y constante. Entonces, para la función de la dependencia local conjeturada de la utilidad neta "$\widetilde{\pi}_i$"del productor privado i con respecto a la variación de su volumen de producción η_i tiene la forma

$$\widetilde{\pi}_i(\eta_i) = [p - \nu_i\,(\eta_i - q_i)]\,\eta_i - f_i\,(\eta_i) \tag{9}$$

la cual es una función cuadrática y cóncava. Por lo que, las condiciones necesarias de primer orden (ahora también suficientes) para el volumen de producción del equilibrio, $\eta_i = q_i$, están dadas por

$$\begin{cases} p = \nu_i q_i + f_i'(q_i) & \text{si } q_i > 0, \\ p \leq f_i'(0) & \text{si } q_i = 0, \end{cases} \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{10}$$

De manera similar, para que la condición (7) sea suficiente, se debe garantizar la concavidad de la función $\widetilde{S}$. Finalmente, la dependencia local conjeturada de la función objetivo del productor público de su función objetivo está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(\eta_0) = & \left(\int_0^{\eta_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i} p\,(x)\,dx - [p - \nu_i\,(\eta_i - q_i)] \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right) - f_0\,(\eta_0) \right) \\ & + (1 - \beta)\,([p - \nu_i\,(\eta_i - q_i)] - f_0\,(\eta_0)) \end{aligned} \tag{11}$$

que es una función cóncava y permite obtener las condiciones necesarias y suficientes para el volumen de producción en equilibrio, $\eta_0 = q_0$, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} p = \left[(1-\beta)\, q_0 - \beta \sum_{i=1}^{n} q_i \right] \nu_0 + f_0'(q_0)\,, & q_0 > 0; \\ p \leq f_0'(0) - \beta \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right) \nu_0, & q_0 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Si las conjeturas de los productores están dadas de manera exógena, entonces los volúmenes de producción q_i están determinados en función de los parámetros del modelo y también de los volúmenes de producción de los demás productores. Este equilibrio se llama Exterior y se describe mediante el siguiente vector:

$$(p, q_0, \ldots, q_n)\,. \tag{13}$$

Sin embargo, en este trabajo estudiamos el segundo concepto de equilibrio, denominado Equilibrio Interior (consistente). Donde los coeficientes de influencia ν_i no están dados de antemano, sino que se encuentran a partir de la solución de un sistema especial de ecuaciones.

2.2 Equilibrio Exterior

Para presentar el procedimiento de verificación, es necesaria otra noción de equilibrio llamada equilibrio exterior con los parámetros ν_i determinados exógenamente.

Definición 1. *El vector*

$$(p, q_0, q_1, \ldots, q_n) \tag{14}$$

se denomina ***equilibrio exterior*** *para determinados coeficientes de influencia*

$$(\nu_0, \nu_1, \ldots,\ \nu_n)\,,\ \nu_i \geq 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{15}$$

si se cumple la ecuación de balance (2) *y para todos los productores que cumplen las condiciones de optimalidad* (10) *y* (12)*.*

Desde ahora, asumimos que el número de participantes en el mercado está fijo (independientemente de los coeficientes de influencia ν_i). Para garantizar esto, introducimos el valor p_0 y demostramos el Lemma 1 a continuación:

$$p_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \{f_i'(0)\} \geq f_0'(0) \tag{16}$$

Lemma 1. *Sean los supuestos **A1** y **A2** como verdaderos. El vector* (14) *es el equilibrio exterior para los coeficientes de influencia dados* $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$*, entonces la relación* $p > p_0$ *es equivalente a que todos los volúmenes de producción son positivos, es decir,* $q_i > 0$*,* $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Ahora vamos a introducir el siguiente supuesto:

A3. *Para el precio* p_0 *y para algún* $\nu_i \geq 0$*,* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$*, existe un único volumen de producción* $q_i^0 \geq 0$ *(por el supuesto **A2**), tal que*

$$p_0 = f_i' \left(q_i^0 \right), \tag{17}$$

y además, se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=0}^{n} q_i^0 < G\left(p_0\right) \tag{18}$$

La suposición **A3**, junto con las suposiciones **A1** y **A2**, garantiza la existencia y unicidad para todos los valores no negativos de $\nu_i \geq 0,\ \ i \in \{1, \ldots, n\}$ y para $\nu_0 \in [0, \bar{\nu}_0)$ donde se considera lo siguiente:

$$\overline{\nu}_0 = \begin{cases} \dfrac{f_0'\left(G(p_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0\right) - p_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0}, & \beta = 1, \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 > 0 \\ \dfrac{f_0'\left(G(p_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0\right) - p_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta)\, G\left(p_0\right)}, & \beta \neq 1, \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 > \text{máx}\left\{ (1-\beta)\, G\left(p_0\right), \dfrac{1-\beta}{\beta} q_0^0 \right\} \\ +\infty & e.c.o.p. \end{cases} \tag{19}$$

Esto es formulado y establecido en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Bajo los supuestos **A1**, **A2** y **A3**, para cuales quiera* $\beta \in (0, 1]$*,* $D \geq 0$*,* $\nu_i \geq 0$*,* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *y* $\nu_0 \in [0, \bar{\nu}_0)$*, existe un único equilibrio exterior* $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$*, que es continuamente diferenciable de los parámetros* β*,* D *y* ν_i*,* $i \in \{1, \ldots, n\}$*. Es decir,*

$$p = p\left(D, \nu_0, \nu_1, \ldots,\ \nu_n\right) \tag{20}$$

Además,

$$p > p_0 \tag{21}$$

y

$$\frac{\partial p\,(D, \nu_0, \nu_1, \ldots,\ \nu_n)}{\partial D} = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} + \frac{\nu_0 + f_0''(q_0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''\,(q_i)} - G'\,(p)} \tag{22}$$

Demostración. Ver apéndice 6.2.

2.3 Equilibrio Interior

Antes de definir el Equilibrio *Interior*, recordemos el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia ν_i como fueron descritos por Bulavsky (1996). Supongamos que, para los parámetros $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ y D, el equilibrio exterior $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ es encontrado. Ahora suponemos, que uno de los productores, por ejemplo, el productor k, cambia temporalmente su comportamiento absteniéndose de maximizar su utilidad neta esperada y comienza a hacer pequeñas variaciones sobre su volumen de producción óptimo q_k. Esto es equivalente a considerar que solo los productores pertenecientes al conjunto $I_k = \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ continúan trabajando en el modelo y restando el volumen de producción q_k (del productor k) de la demanda activa D.

La variación del volumen de producción q_k (del productor k) es equivalente a la variación D_k (en dirección contraria) de la demanda activa, dada en la forma:

$$D_k = D - q_k \tag{23}$$

Consideramos las variaciones de q_k infinitesimales, podemos suponer que, a través de la observación de las variaciones entre el precio de equilibrio p y las variaciones de la demanda D_k, el productor k puede obtener las variaciones correspondiente a su volumen de producción, es decir, su coeficiente de influencia del productor k.

$$\frac{\partial p}{\partial D_k} = \frac{\partial p}{\partial (D - q_k)} = -\frac{\partial p}{\partial (q_k)} = \nu_k \tag{24}$$

En el modelo propuesto, si el productor $k \in \{1, \ldots, n\}$ sale del mercado, con el fin de calcular la derivada correspondiente en (24), aplicamos la fórmula obtenida en (22) del teorema 1, donde el productor k está ausente, por lo que los términos correspondientes al índice $i = k$ debe excluirse de la fórmula.

Por otro lado, si el productor semi-público $i = 0$ sale del mercado, entonces quienes permanecen en el mercado son solo los productores privados, entonces tenemos que aplicar el teorema y fórmula obtenida en Bulavsky (1997) del modelo de oligopolio clásico. Para eso definimos el siguiente criterio:

Definición 2. ***Criterio de Consistencia***. *La colección* $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ *son consistentes si, junto al equilibrio exterior* $(p, q_0, \ldots, q_n)$*, satisfacen las siguientes igualdades:*

$$\nu_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} - G'(p)}, \tag{25}$$

y

$$\nu_i = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} + \frac{\nu_0 + f_0''(q_0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''(q_j)} - G'(p)} \tag{26}$$

Definición 3. *La colección* $(p, q_0, \ldots, q_n, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ *donde* $\nu_i \geq 0$, $i \in \{0, \ldots, n\}$ *se llama equilibrio interior si, para los coeficientes de influencias dados* $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$*, el vector* $(p, q_0, \ldots, q_n)$ *es el equilibrio exterior, y el* ***Criterio de consistencia*** *(Definición 2) es válido, es decir, las ecuaciones* (25) *y* (26) *se satisfacen para todos los* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$*.*

La existencia del equilibrio interior está formulada y demostrada en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Bajo los supuestos* ***A1***, ***A2*** *y* ***A3***, *existe un equilibrio interior.*

Demostración. Ver apéndice 6.3.

Capítulo 3
Caso Particular: Función de demanda afín, productores privados idénticos y funciones de costos cuadráticas

Al estudiar el modelo oligopolio del Capítulo 2 y además de responder a las preguntas de la existencia del equilibrio de consistencia para el modelo y como calcularlo, llama la atención la comparación de este modelo con los que aparecen en el modelo de Cournot y el modelo de competición perfecta. También el preguntarse para que valores del parámetro β (también llamado nivel de socialización) es recomendable usar dicho modelo, y por eso, mediante la comparación de los distintos modelos se proponen ideas para elegir dicho parámetro óptimo para los niveles de socialización. La necesidad del elegir un valor de β óptimo, que no sea al azar.

En este capítulo consideramos el modelo de oligopolio como un caso particular en el que la demanda activa D es 0, la demanda pasiva es una función lineal, todos los productores tienen una función de los costo cuadrático y además todos productores privados tienen la misma función de costos. Vamos a considerar el caso cuando $n \geq 2$. Además el caso de duopolio, es decir, cuando $n = 1$, fue considerado en el trabajo Kalashnikov-Jr et al. (2017).

De lo mencionado, como las funciones de costos de los productores privados son cuadráticas e iguales, los volúmenes de producción estarán dadas de la siguiente manera $q = q_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para este caso, re-formulamos los supuestos presentados en el capítulo anterior, **A1**, **A2** y **A3**, de la siguiente manera:

A4. *La función de la demanda es lineal*

$$G(p) = \begin{cases} = -Kp + T & \text{si } 0 < p < \frac{T}{K}, \\ \leq 0 & \text{si } p \geq \frac{T}{K}, \end{cases} \tag{27}$$

donde $K > 0$ y $T > 0$.

A 5. *Las funciones de costos son cuadráticas, es decir, Para el productor semi-público $(i = 0)$*

$$f_0(q_0) = \frac{1}{2} a_0 q_0^2 + b_0 q_0, \quad a_0, b_0 > 0 \tag{28}$$

Para los productores privados $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$f_i(q_i) \equiv f(q) = \frac{1}{2} a q^2 + bq, \quad a, b > 0. \tag{29}$$

En este caso particular, dado que la función de demanda $G(p)$ es lineal por partes, no es diferenciable en el punto $p = \frac{T}{K}$, entonces la suposición **A1** no se cumple. Por otro lado, de la demostración del Teorema 1, se deduce que el precio p del equilibrio exterior (14) esta dado por la intersección del volumen total $Q(p) = \sum_{i=0}^{n} q_i(p)$ y la función de demanda $G(p)$, además, esta intersección se encuentra dentro el intervalo abierto donde se encuentra la función de demanda definida en el supuesto **A4**, lo que finalmente satisface el supuesto **A1**. Por lo tanto, los resultados presentados en el capítulo 2 es válida para este caso en particular.

Re-formulamos es Supuesto **A3** de la siguiente manera:

A6. *Para el precio $p_0 = b$, se cumple que*

$$\frac{p_0 - b_0}{a_0} < -Kp_0 + .T \tag{30}$$

El equilibrio entre la oferta y demanda de (2), para este caso estaría dado

$$q_0 + nq = -Kp + T + D \tag{31}$$

La utilidad neta para los productores privados escogen su producción para maximizar

$$\pi(p, q) = p \cdot q - \left(\frac{1}{2} a q^2 + bq \right). \tag{32}$$

Y, la función objetivo para el productor semi-público esta dado

$$S(\beta, p, q_0, q) = \beta\left[\int_0^{q_0+nq} p(x)\,dx - npq - \left(\frac{1}{2}aq_0^2 + bq_0\right)\right] + (1-\beta)\left[p \cdot q_0 - \left(\frac{1}{2}aq_0^2 + bq_0\right)\right] \tag{33}$$

con $\beta \in (0, 1]$

Las condiciones de optimalidad (10) y (12) se reescriben para este caso particular de la siguiente manera:

Para el productor privado

$$\begin{cases} p = \nu q + aq + b, & q > 0, \\ p \leq b, & q = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Y el productor semi-público

$$\begin{cases} p = \left[(1-\beta)q_0 - n\beta q\right]\nu_0 + aq_0 + b_0, & \text{si} \quad q_0 > 0; \\ p \leq b_0 - n\beta\nu_0 q, & \text{si} \quad q_0 = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Para este caso particular los conceptos de Equilibrio Exterior y Equilibrio Interior en el modelo anteriormente propuesto no se cambian y todos los resultados mostrados siguen ser válidos.

3.1 Análisis del equilibrio consistente

Dado el caso particular, todos los productores privados tienen el mismo coeficiente de influencia $\nu_i \equiv \nu$, es decir, reescribimos el Criterio de Consistencia.

Definición 4. ***Criterio de Consistencia para el caso particular*** *Los coeficientes de influencia* (ν_0, ν) *son consistentes para un equilibrio exterior* (p, q_0, q) *si se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\nu_0 = \frac{1}{\dfrac{n}{\nu + a} + K}, \tag{36}$$

y

$$\nu = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\frac{n-1}{\nu + a} + K} \tag{37}$$

Teorema 3. *Al igual que el Teorema 2 del Capítulo 2, bajo los supuestos* ***A4*****,*****A5*** *y* ***A6*** *con la función $G(p)$ lineal, las funciones $f_0(q_0)$, $f(q)$ y para cada $\beta \in (0,1]$ cuadráticas, el equilibrio interior existe y es único $(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*)$.*

Demostración. Ver apéndice 6.4.

Por el Teorema 3, para cada $\beta \in (0,1]$, existe únicamente el equilibrio consistente (interior) $(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*)$, y denotamos la utilidad neta de los productores privados calculados para este equilibrio por $\pi^*(\beta) = \pi^*(p^*(\beta), q^*(\beta))$.

El objetivo de este caso particular es dar un criterio de optimalidad para el nivel de socialización β que satisfaga las necesidades del productor semi-público, dado que es quien decide poner como objetivo el cuidar la ganancia del público.

Para encontrar este criterio de optimalidad, vamos a analizar y comparar el precio del mercado y la ganancia de los productores privados de nuestro modelo y del modelo de Cournot, que es el que normalmente utilizan los productores privados.

Teorema 4. *Sea el equilibrio interior $(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*)$ y la función $\pi^*(\beta)$ continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0,1]$. Además, $p^*(\beta)$, $\nu_0^*(\beta)$ y $nu^*(\beta)$ estrictamente decrecientes.*

Demostración. Ver apéndice 6.5.

3.2 Análisis del equilibrio de Cournot

Dada la conjetura de Cournot para los modelos de oligopolio se describe de la siguiente manera

$$\varpi_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q_i} = -1, \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{38}$$

Y para nuestro modelo, (38) corresponde el coeficiente de influencia dado

$$\nu_i = -\frac{\partial p}{\partial q_i} = -\frac{\varpi_i}{G'(p)} = -\frac{1}{G'(p)}, \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{39}$$

Por lo tanto, para el caso particular, la conjetura de Cournot esta dada por

$$\nu_0 = \nu = \frac{1}{K} \tag{40}$$

Por el Teorema 1, para cada $\beta \in (0,1]$, existe un único equilibrio exterior correspondiente a la conjetura de Cournot denotada por $(p^C(\beta), q_0^C(\beta), q^C(\beta))$ y el coeficiente de influencia denotada por $\nu_0^C = \nu^C = \frac{1}{K}$.

Es fácil observar que el equilibrio de Cournot no coincide con el equilibrio para nuestro modelo ya que no satisface el criterio de consistencia.

$$\nu_0 = \frac{1}{\frac{n}{\nu+a} + K} < \frac{1}{K} = \nu_0^C \tag{41}$$

$$\nu = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \dfrac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\dfrac{n-1}{\nu + a} + K} < \frac{1}{K} = \nu^C \tag{42}$$

Para cada $\beta \in (0,1]$, denotamos la utilidad neta de los productores privados para el equilibrio de Cournot por $\pi^C(\beta) = \pi^C(p^C(\beta), q^C(\beta))$

Teorema 5. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** el equilibrio exterior* $(p^C(\beta), q_0^C(\beta), q^C(\beta))$ *y la función* $\pi^C(\beta)$ *son continuamente diferenciales con respecto a* $\beta \in (0,1]$ *y* $p^C(\beta)$ *estrictamente decreciente para todo* $\beta \in (0,1]$.

Demostración. Ver apéndice 6.6.

3.3 Análisis del equilibrio de Competencia Perfecta

Dada la conjetura de competencia perfecta para los modelos de oligopolio se describe de la siguiente manera

$$\varpi_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q_i} = 0, \;\; \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \tag{43}$$

Para nuestro modelo corresponde que el coeficiente de influencia esta dado de la siguiente manera:

$$\nu_i = -\frac{\partial p}{\partial q_i} = -\frac{\varpi_i}{G'(p)} = 0, \;\; \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \tag{44}$$

Por lo tanto, para el caso particular, esta dada por

$$\nu_0 = \nu = 0 \tag{45}$$

Por el Teorema 1, para cada $\beta \in (0,1]$, existe un único equilibrio exterior correspondiente a la conjetura de Competencia perfecta denotada por $(p^{CP}(\beta), q_0^{CP}(\beta), q^{CP}(\beta))$ y el coeficiente de influencia denotado por $\nu_0^{CP} = \nu^{CP} = 0$.

Es fácil observar que el equilibrio de Competencia perfecta no coincide con el equilibrio para nuestro modelo ya que no satisface el criterio de consistencia.

$$\nu_0 = \frac{1}{\frac{n}{\nu+a} + K} > 0 = \nu_0^{CP} \tag{46}$$

$$\nu = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \frac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\frac{n-1}{\nu + a} + K} > 0 = \nu^{CP} \tag{47}$$

Para cada $\beta \in (0,1]$, denotamos la utilidad neta de los productores privados para el equilibrio de Competencia Perfecta por $\pi^{CP}(\beta) = \pi^{CP}(p^{CP}(\beta), q^{CP}(\beta))$

Teorema 6. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** el equilibrio exterior* $(p^{CP}(\beta), q_0^{CP}(\beta), q^{CP}(\beta))$ *y la función* $\pi^{CP}(\beta)$ *son continuamente diferenciales con respecto a* $\beta \in (0,1]$ *y* $p^{C}(\beta)$ *son constante con respecto a* $\beta \in (0,1]$.

Demostración. Ver apéndice 6.7.

3.4 Análisis Comparativo

Podemos ver que es de gran interés la comparación entre los tres tipos de equilibrio mencionados anteriormente, equilibrio consistente, equilibrio de Cournot y el equilibrio de competencia perfecta.

Como se menciono anteriormente, para el caso de duopolio, es decir, cuando $n = 1$, se puede encontrar en el trabajo Kalashnikov-Jr et al. (2017). Por eso en este análisis consideramos el caso de oligopolio cuando $n \geq 2$.

Teorema 7. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** la siguiente desigualdad se cumple:*

$$\lim_{(\beta \downarrow 0)} p^C(\beta) > \lim_{(\beta \downarrow 0)} p^*(\beta) > p^{CP}, \tag{48}$$

Demostración. Ver apéndice 6.8.

Para el caso de duopolio, en el trabajo Kalashnikov-Jr et al. (2017), se demostró que para cualquier $\beta \in (0,1]$, la desigualdad $p^C(\beta) > p^*(\beta)$ se cumple. Sin embargo, para el caso de oligopolio de nuestro modelo, la desigualdad (48) del teorema 7 entre el precio cuando $\beta \uparrow 1$ puede o no cumplirse, dependiendo de los parámetros del modelo. Se puede observar este caso de situaciones en los experimentos numéricos del Capítulo 4.

Teorema 8. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** para cualquier $\beta \in (0,1]$ si $\pi^C(\beta) \leq \pi^*(\beta)$, entonces se satisface que $p^C(\beta) > p^*(\beta)$*

Demostración. Ver apéndice 6.9.

Teorema 9. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** son verdaderas. Si la relación*

$$\frac{(n-1)a}{n+aK} \geq a_0, \tag{49}$$

es valida, entonces existe valores $\overline{\beta} \in (0,1)$ tal que $\pi^C(\overline{\beta}) = \pi^*(\overline{\beta})$ y $p^C(\overline{\beta}) > p^*(\overline{\beta})$

Demostración. Ver apéndice 6.10.

Definición 5. *Sea el parámetro $\overline{\beta} \in (0,1)$, en el cual se cumple lo siguiente $\pi^*(\overline{\beta}) = \pi^C(\overline{\beta})$, entonces $\overline{\beta}$ es el nivel de socialización óptimo para la empresa pública. Si este valor no existe, entonces, el valor óptimo es $\overline{\beta} = 1$.*

Es decir, si (49) presentada en el teorema 9, se cumple, podemos considerar este valor de parámetro $\overline{\beta}$ como el *Nivel de socialización óptimo*. Es decir, para este valor $\overline{\beta}$, las utilidades netas de los productores privados son los mismos en ambos equilibrios, cournot y consistente; por lo tanto, el productor semi-público puede convencer a las productores privados de cambiar sus estrategias del modelo de cournot al modelo del equilibrio consistente, donde se puede garantizar que el precio de mercado será más bajo que el que aparece en el modelo de Cournot. De este modo, el productor semi-público no solo está cumpliendo con su beneficio social, sino que también mantendrá seguro su propio presupuesto, ya que no necesita pagar ningún subsidio a los productores privados ni a los consumidores.

La existencia de este nivel de socialización óptimo fue definido y demostrado la primera vez en el caso de duopolio parcialmente mixto de Kalashnikov-Jr et al. (2017) sin la necesidad de relación (49), pero en el caso de oligopolio, este nivel óptimo de socialización puede no existir (es decir, podría ser que $\pi^C(\beta) > \pi^*(\beta)$ para todo $\beta \in (0,1]$

); esto último puede suceder cuando el productor semi-público es mucho más débil que los productores privados. Para esos casos, en futuros trabajos, hacer uso de una política de subsidios para definir un criterio de optimalidad diferente para el nivel de socialización.

El caso cuando no existe $\overline{\beta} \in (0, 1)$ tal que $\pi^*(\overline{\beta}) = \pi^C(\overline{\beta})$ será analizado en trabajos futuros.

Capítulo 4
Experimentos Numéricos

En los modelos clásicos de oligopolio, donde la conjetura de Cournot es $\frac{\partial G}{\partial q_i} = 1$, y la conjetura de la competencia perfecta es $\frac{\partial G}{\partial q_i} = 0$, estas dos conjeturas son los casos extremos de la conjetura de variaciones conjeturadas, $\frac{\partial G}{\partial q_i} = \varpi_i \in [0,1]$ (ver Isac et al. (2002)). Como se conoce en el equilibrio de Cournot, donde el precio de mercado es más alto que el precio de mercado que aparece en el equilibrio de las variaciones conjeturadas, por otro lado, ocurre todo lo contrario al comparar el precio de mercado en el equilibrio de competencia perfecta, él cuál siempre es menor. Por eso es lógico pensar que el modelo de Cournot es mucho más rentable para los productores privados, mientras que el modelo de competencia perfecta es perfecta para beneficiar a los consumidores.

Sin embargo, como se demostró en el capítulo 3, esto no siempre sucede en el caso de oligopolios mixtos (o parcialmente mixto).

En este capítulo 4, se dan a conocer algunos experimentos numéricos para las diferentes situaciones (formuladas en los teoremas 4 a 9) que pueden suceder en el oligopolio parcialmente mixto y conducir al criterio de optimización para el nivel de socialización. Los ejemplos están basados en los experimentos numéricos presentados en Liu et al. (2007) donde se consideró el mercado de energía eléctrica.

La demanda activa se considera $D = 0$ y se acepta la función de demanda inversa como la siguiente:

$$p(G) = 50 - 0.002G, \tag{50}$$

lo que significa que la función de demanda viene dada por la siguiente función afín :

$$G(p) = -50p + 2500. \tag{51}$$

La función de costo para la compañía semi-pública está dada por la función cuadrática

$$f_0(q_0) = 0,01q_0^2 + 2q_0. \tag{52}$$

Suponemos que el número de productores privados es $n = 5$ y que todos tienen la misma función de costo cuadrática dada por la siguiente fórmula:

$$f_i(q_i) \equiv f(q) = \kappa q^2 + 3.25q, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, 5\} \tag{53}$$

donde el valor de κ está dado por $\kappa = 0.0075$ para el Experimento 1, para el Experimento 2, y para el Experimento 3.

En la función de costo (53) para los productores privados, el parámetro κ puede interpretarse como la fortaleza de las firmas privadas cuando la producción en el mercado es alta (es decir, si el volumen de producción es lo suficientemente grande, el término lineal del costo cuadrático funciones es insignificante) y, por lo tanto, para el Experimento 1 consideramos que los productores privados son más fuertes que el productor semi-pública, e incluso más fuertes para el Experimento 3, y para el Experimento 2, consideramos que los productores privados son más débiles que el productor semi-públicas.

En los 3 experimentos, comparamos los 3 equilibrios ya mencionados, equilibrio consistente de variaciones conjeturadas (siglas en inglés: CCVE), Cournot y competencia perfecta (CP). Además, para no perder la noción intuitiva de los coeficientes de influencia, vamos a utilizar las siguientes relaciones:

$$\varpi_i \equiv \frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q_i} = -K\frac{\partial p}{\partial q_i} = K\nu_i, \forall i \in \{0, 1, \ldots, 5\}, \tag{54}$$

para trabajar los coeficientes de influencia. Con esta notación, la conjetura de Cournot está representada por para todos los productores como $\varpi_i = \varpi_i^C = 1$ para todos $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, mientras que la conjetura de competencia perfecta viene dada por $\varpi_i = \varpi_i^{CP} = 1$ para todos $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

En todas las figuras, los valores límites cuando $\beta \downarrow 0$ corresponden al modelo clásico de oligopolio, ya que el productor semi-público se centra únicamente en la maximización de beneficios, por otro lado, los valores correspondientes a $\beta = 1$ corresponden al modelo de oligopolio mixto donde el productor semi-público solo maximiza el bienestar social.

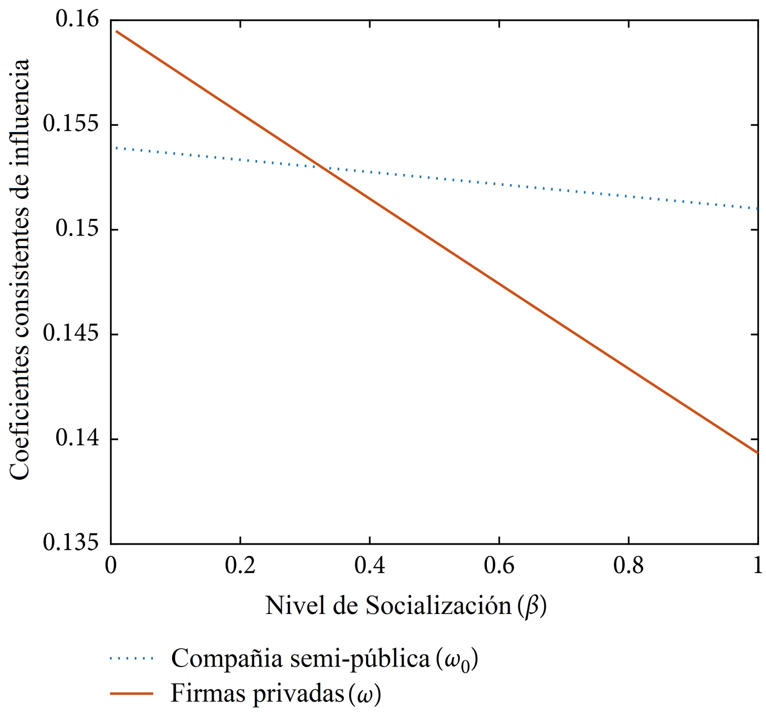

Figura 1: Coeficientes consistentes de influencia para la compañía semi-pública y productores privados en el Experimento 1.

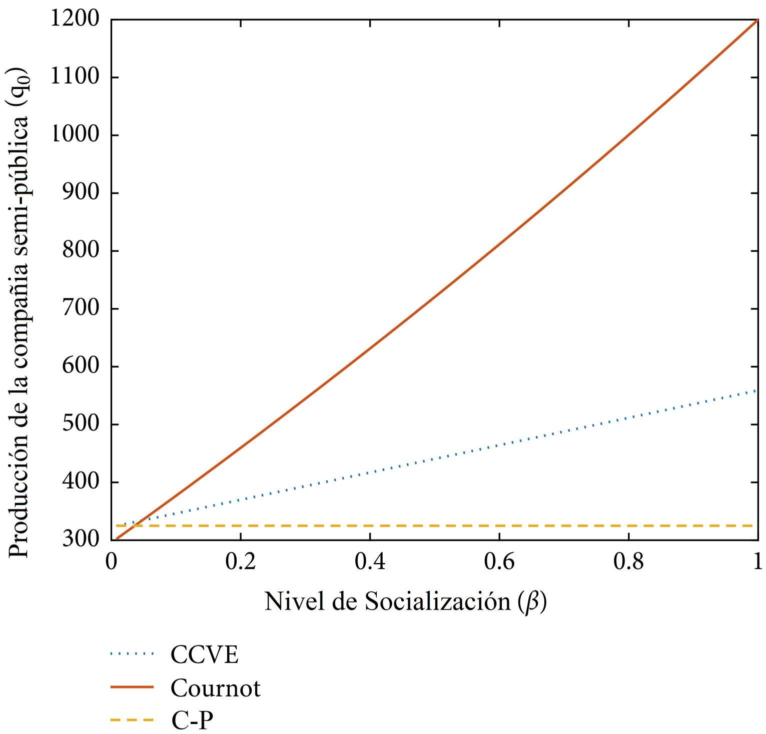

Figura 2: Producción de la compañía semi-pública para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 1.

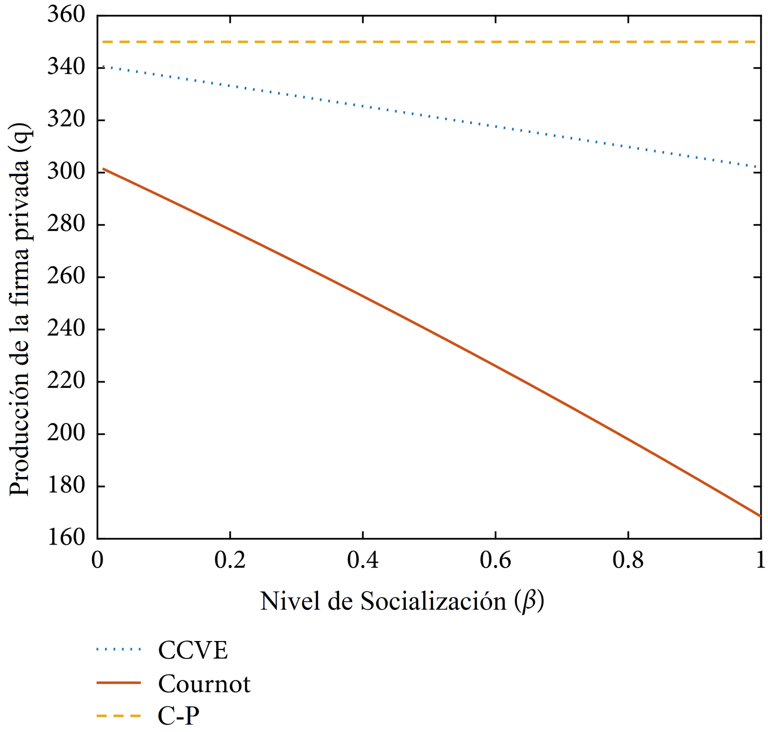

Figura 3: Producción de las firmas privadas para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 1.

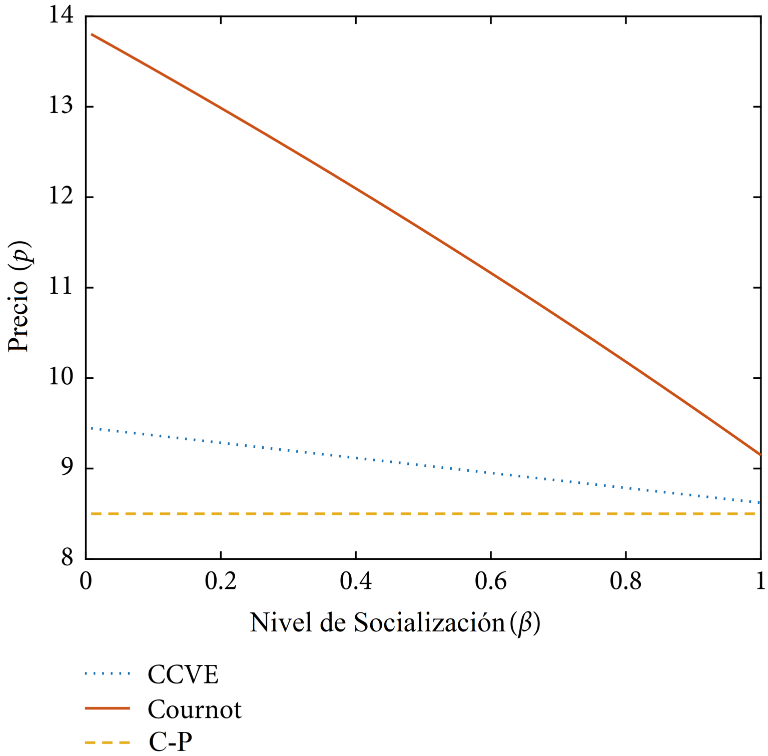

Figura 4: Precio de equilibrio del mercado para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 1.

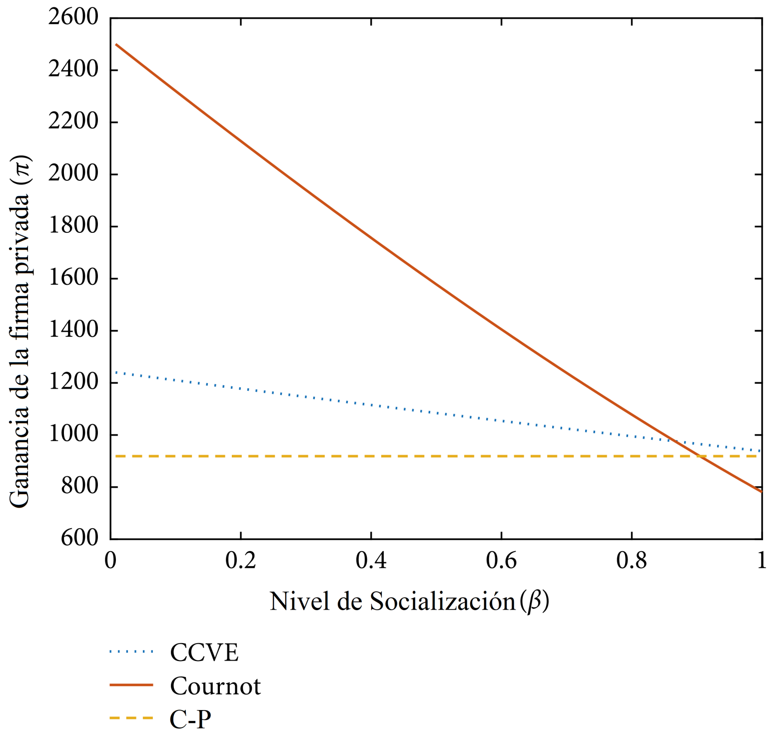

Figura 5: Ganancia de las firmas privadas para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 1.

Experimento 1. En las Figuras 1 a 5, presentamos las gráficas de los 3 equilibrios como funciones del nivel de socialización β.

En los gráficos de la Figura 1, vemos que los coeficientes consistentes de influencia se encuentran dentro del intervalo abierto $(0,1)$. Esto siempre es cierto (como se puede ver en las ecuaciones (25) y (26), del criterio de consistencia del capítulo 2 y la relación (54)), debemos considerar el modelo CCVE como un intermedio entre Cournot y la competencia perfecta.

Podemos observar como los coeficientes de influencia decrecen con respecto a β; sin embargo, el coeficiente de influencia de las firmas privadas disminuye más rápido en comparación con la compañía semi-pública, lo que refleja, en un mercado de oligopolio mixto, la firma pública (aún cuando esta firma es la más débil) tiene la mayor influencia en el mercado, dado que elige su volumen de producción para maximizar el bienestar social, independientemente del costo de producción.

En las Figuras 2 y 3, podemos observar que la producción de la compañía semi-pública aumenta en los equilibrios de CCVE y Cournot a medida que se inclina hacia el bienestar social, en consecuencia tratar de disminuir el precio de mercado (aumentando el volumen total) para maximizar bienestar Social.

Como se mencionó anteriormente, la conjetura de Cournot favorece a las firmas privadas, por lo que el incremento en la producción de la compañía semi-pública que se muestra en la Figura 2 es considerablemente mayor en el equilibrio de Cournot en comparación con el equilibrio CCVE; por lo tanto, maximizar el bienestar social es especialmente más difícil bajo la competencia de Cournot.

Por otro lado, observamos que la producción de los productores privados disminuye para compensar la sobre producción de la compañía semi-pública. Mientras, para el equilibrio de competencia perfecta, la producción de ambos productores es la misma en todo momento, independientemente del nivel de socialización β elegido por la compañía semi-pública, esto solo refleja la naturaleza de la competencia perfecta (es decir, donde ningún productor tiene influencia sobre el mercado).

Aquí, podemos observar la consecuencia de que una compañía pública ingrese a un mercado de oligopolio clásico; a medida que la compañía pública busca maximizar el bienestar social, la influencia de los productores disminuye, acercándose a la competencia perfecta, beneficiando así a los clientes; sin embargo, en el proceso, las compañías públicas tienen que aumentar su producción, olvidándose de su ganancia, lo que puede resultar en gastos superiores a los que la empresa pública puede afrontar. Es aquí, donde surge la importancia del marco del oligopolio semi-mixto, al maximizar la combinación convexa de bienestar social y utilidad neta, la compañía semi-pública no solo vela por los clientes sino también por su propio presupuesto.

En la Figura 4, podemos ver, que los equilibrios CCVE y Cournot, el precio de mercado p disminuye a medida que el nivel de socialización β aumenta (es decir, a medida que la compañía semi-pública prioriza el bienestar social sobre su beneficio neto), teniendo una disminución mayor en el equilibrio de Cournot que el precio de mercado en el oligopolio clásico (es decir, cuando $\beta \downarrow 0$) es considerablemente mayor en el equilibrio de Cournot en comparación con el equilibrio CCVE. Mientras tanto, en el equilibrio de competencia perfecta, el precio de mercado es constante ya que el volumen total de producción no cambia con respecto a β.

Aun así, podemos ver que el comportamiento intuitivo del precio de mercado p, siendo este último, más bajo en el equilibrio de competencia perfecta, más alto en el equilibrio de Cournot y algo intermedio en el equilibrio CCVE.

En la Figura 5, podemos ver que, en el oligopolio clásico (es decir, cuando $\beta \downarrow 0$), el mercado sigue el comportamiento intuitivo mencionado anteriormente, por lo que el equilibrio de Cournot muestra la ganancia neta más alta para las firmas privadas y el equilibrio de competencia perfecta muestra la más baja (que nuevamente es constante). Sin embargo, en el oligopolio mixto (es decir, cuando $\beta = 1$), este último ya no es el caso, ya que el equilibrio CCVE se convierte en el más rentable para las firmas privadas, mientras que el equilibrio de Cournot es ahora el menos rentable.

Por lo tanto, existe el nivel de socialización dentro del intervalo abierto $(0, 1)$ tal que el beneficio neto para las firmas privadas es el mismo en ambos equilibrios, CCVE y Cournot. Así, al elegir este nivel de socialización (óptimo), la compañía semi-pública puede convencer a las firmas privadas de cambiar su comportamiento de Cournot por el de CCVE, ya que su beneficio neto seguirá siendo el mismo; sin embargo, el precio de mercado seguirá siendo más bajo en el equilibrio de CCVE (en comparación con el equilibrio de Cournot), por lo que la compañía semi-pública está cumpliendo con su responsabilidad social y al mismo tiempo está cuidando de su presupuesto (ya que el nivel óptimo de socialización es inferior a 1).

Para este experimento, el nivel óptimo de socialización es $\widehat{\beta} \approx 0.8664$, el equilibrio interior correspondiente es

$$(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*) \approx (8.73, 527.37, 307.22, 0.003028, 0.002841), \tag{55}$$

y el correspondiente equilibrio de Cournot (exterior) es

$$(p^C, q_0^C, q^C) \approx (9.84, 1065.9, 188.39), \tag{56}$$

teniendo en ambos equilibrios el beneficio de las firmas privadas de

$$\pi^* = \pi^C \approx 975.96.$$

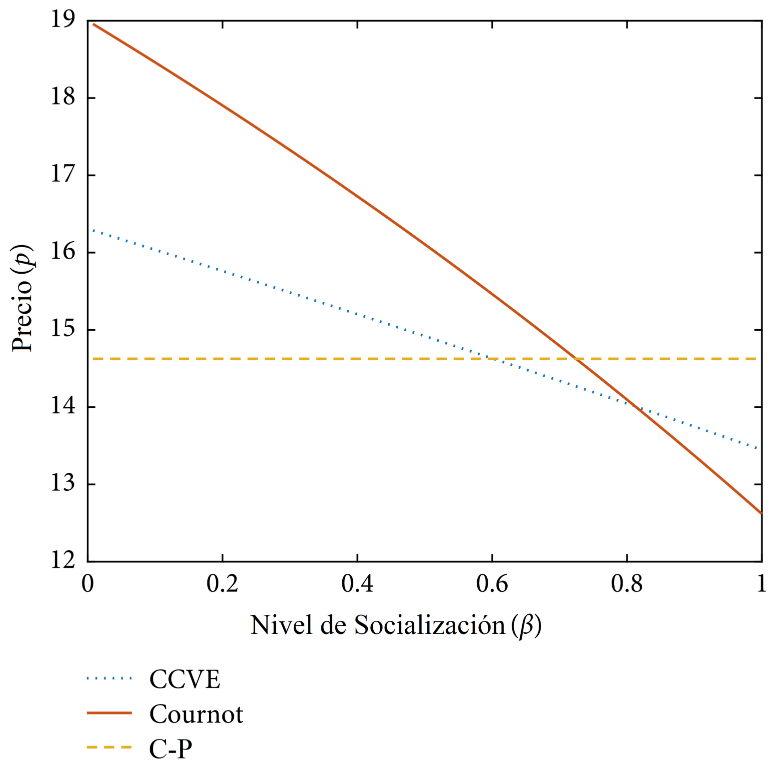

Figura 6: Precio de equilibrio del mercado para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 2

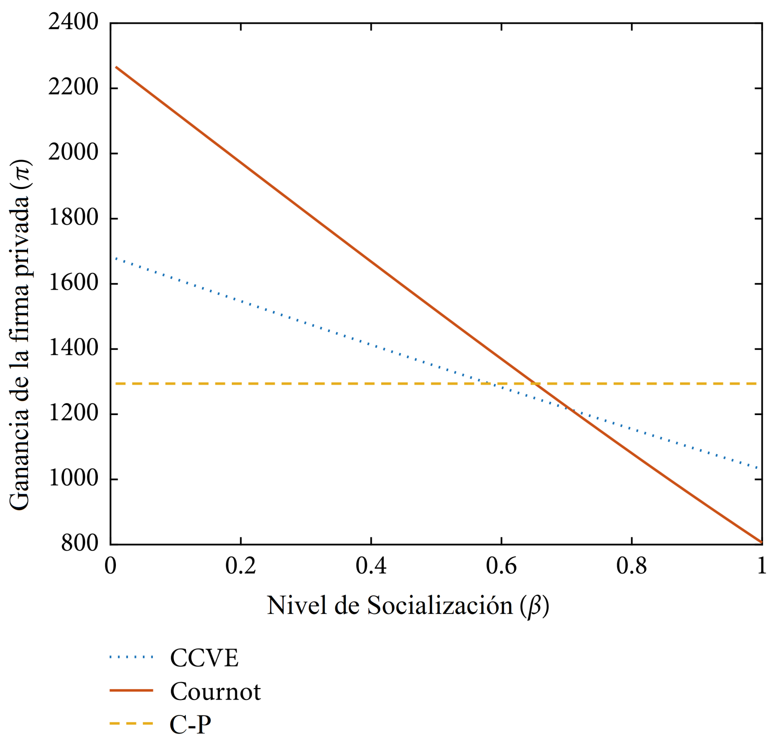

Figura 7: Ganancia de las firmas privadas para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 2.

Experimento 2. En las Figuras 6 y 7, presentamos las funciones de precio de mercado y beneficio de las firmas privadas para los 3 tipos de equilibrio. En la Figura 6, podemos ver que la disminución (como β aumenta) en el precio de mercado para ambos equilibrios, Cournot y CCVE, es más notable ahora que las firmas privadas son más débiles, en comparación con el Experimento 1, cayendo incluso por debajo del precio de mercado en el Equilibrio de competencia perfecta. Además, en el caso del oligopolio mixto (cuando $\beta = 1$), el precio de mercado del equilibrio de Cournot es ahora el más bajo, lo que es completamente contrario a la intuición.

En la Figura 7, podemos ver que (como consecuencia de la decrecimiento más rápido del precio) la utilidad neta de las firmas privadas en los equilibrios de CCVE y Cournot se cruzan en un nivel de socialización más pequeño β, en comparación con el Experimento 1; así, la compañía semi-pública puede convencer a las firmas privadas de cambiar a la conjetura de CCVE, teniendo un poco más en cuenta su utilidad neta.

Además, aunque el precio de mercado en el equilibrio de Cournot se vuelve el más bajo cuando, esto último ocurre solo después de que se cruzan las ganancias de las firmas privadas en los equilibrios CCVE y Cournot; por tanto, el valor de β en el que se produce esta intersección es, de nuevo, el nivel óptimo de socialización.

Para este experimento, el nivel óptimo de socialización es $\widehat{\beta} \approx 0.7067$, el equilibrio interior correspondiente es

$$(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*) \approx (14.32, 785.52, 199.69, 0.00713, 0.005438), \tag{57}$$

y el correspondiente equilibrio de Cournot (exterior) es

$$(p^C, q_0^C, q^C) \approx (14.75, 941.52, 164.23), \tag{58}$$

proporcionando en ambos equilibrios un beneficio individual para las firmas privadas de

$$\pi^* = \pi^C \approx 1213.8.$$

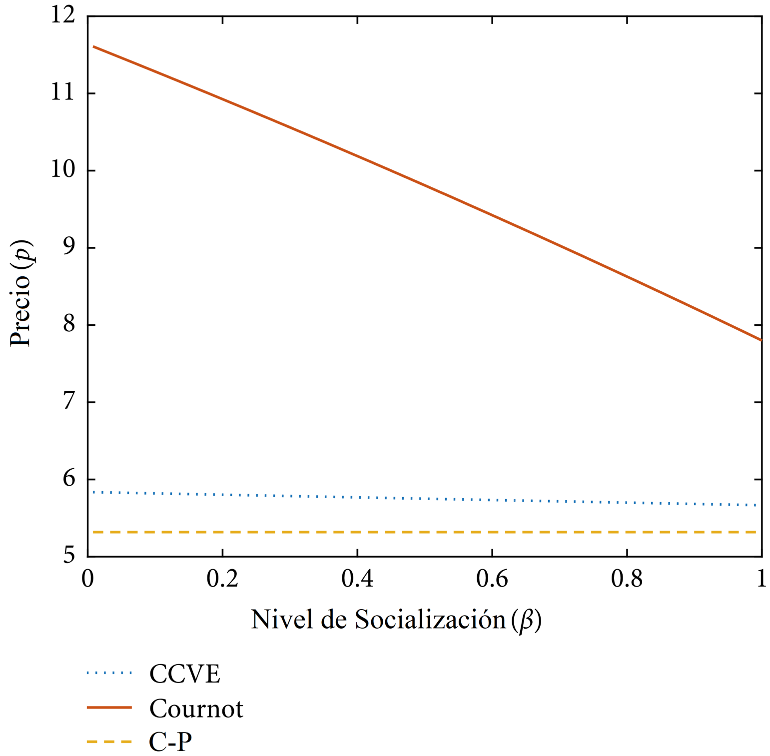

Figura 8: Precio de equilibrio del mercado para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 3.

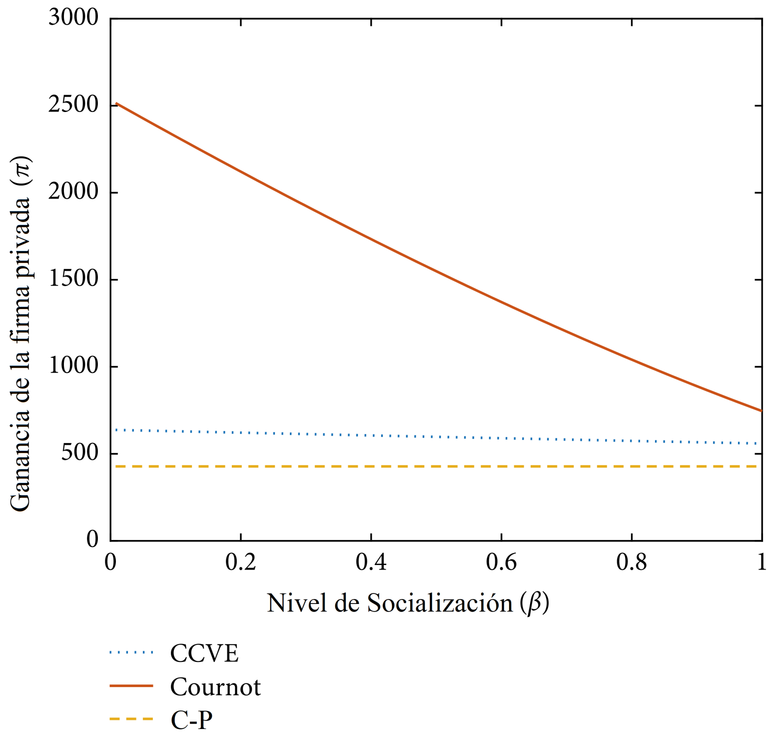

Figura 9: Ganancia de las firmas privadas para los 3 tipos de equilibrio del Experimento 3.

Experimento 3.

En las Figuras 8 y 9, presentamos las funciones de precio de mercado y ganancia de las firmas privadas para los 3 tipos de equilibrio.

En las Figura 8, vemos que ahora (dado que las firmas privadas son nuevamente más fuertes que la compañía semi-pública) el precio de mercado se comporta intuitivamente como en el Experimento 1 . Sin embargo, dado que las firmas privadas ahora son aún más fuertes, la disminución del precio de mercado en los equilibrios de CCVE y Cournot ahora es menos notable en comparación con la disminución del Experimento 1.

En la figura 9, vemos que (como consecuencia de que el precio de mercado no baja lo suficiente) el beneficio neto de las firmas privadas en el equilibrio de Cournot no cae por debajo de su beneficio neto en el equilibrio de CCVE (ni el de competencia perfecta); así, la compañía semi-pública (independientemente del nivel de socialización β) no puede convencer a las firmas privadas de cambiar a las conjeturas de CCVE sin pagarles algún tipo de compensación por las pérdidas en sus ganancias. Debido a esto, no existe un nivel de socialización óptimo en el sentido definido del capítulo 3.

En Kalashnikov-Jr et al. (2017) se muestra la existencia de este nivel óptimo de socialización para el caso de un duopolio parcialmente mixto sin necesidad de relación (49); sin embargo, como se muestra en el Experimento 3, para el caso de oligopolio (cuando el número de productores es de al menos 3), este nivel óptimo de socialización β puede no existir; de hecho, del Teorema 9, podemos ver que la condición (49) es decreciente con respecto a ambos, a y n, y por lo tanto, podemos concluir que cuanto más fuertes son las firmas privadas (es decir, cuanto menor es el coeficiente), el mayor debe ser el número de firmas privadas para garantizar la existencia del nivel óptimo de socialización.

Sin embargo, incluso si el nivel de socialización óptimo (como se define en el capítulo 3) no existe, la compañía semi-pública todavía puede convencer a las firmas privadas de utilizar el modelo CCVE en lugar del de Cournot al pagar un subsidio igual (al menos) a la diferencia entre sus beneficios esperados en ambos modelos (por sus pérdidas).

En nuestros trabajos futuros, planeamos usar esta política de subsidios para definir el nivel de socialización óptimo como tal que minimice los costos totales de la compañía semi-pública, dados como la suma de su costo de producción y el subsidio que estaría pagando a todas las firmas privadas.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo a Futuro

En este trabajo, extendimos los modelos de oligopolio mixto con equilibrio de variaciones conjeturadas previamente estudiados para el caso de que las funciones de costos de los agentes sean convexos pero no necesariamente sean cuadráticas.

Establecimos los resultados de existencia y unicidad para el equilibrio de variaciones conjeturadas (llamado **equilibrio exterior**) para cualquier conjunto de conjeturas factibles. Para introducir la noción de equilibrio interior (entendido como el **CVE** con conjeturas consistentes, o **CCVE**), desarrollamos un criterio de consistencia para las conjeturas (denominados *coeficientes de influencia*) y probamos el teorema de existencia.

Luego, analizamos el comportamiento de los equilibrios de **CCVE**, **Cournot** y **competencia perfecta**, y realizamos un análisis comparativo para el oligopolio semi mixto con la función de demanda afín, siendo las funciones de costo de las firmas cuadráticas, y todas las firmas privadas tienen la misma función de costo. Con base en este análisis, formulamos el criterio para el valor óptimo del nivel de socialización $\widehat{\beta}$ de la compañía semi-pública y probamos su existencia (bajo condición adicional de que la compañía doméstica que no puede ser demasiado débil en comparación con las firmas privadas). Estos resultados se ilustraron con experimentos numéricos para un pequeño mercado de energía eléctrica, mostrando las diferentes situaciones que se pueden presentar cuando una compañía pública ingresa a un mercado de oligopolio clásico.

En los próximos trabajos, vamos a examinar el comportamiento cualitativo de los precios y la producción cuando la función de demanda no es necesariamente diferenciable y que las funciones de costo no sean cuadráticas.

Capítulo 6

Apéndices

6.1 Demostración del Lemma 1

Lemma 1. *Sean los supuestos **A1** y **A2** verdaderos. El vector* (14) *es el equilibrio exterior para los coeficientes de influencia dados* $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$*, entonces la relación* $p > p_0$ *es equivalente a que todos los volúmenes de producción son positivos, es decir,* $q_i > 0$*,* $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$*.*

Demostración. Sea $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ un equilibrio exterior. Asumimos que $q_i > 0$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, entonce, de la condición de optimalidad (10) y la suposición **A2** tenemos

$$p = \nu_i q_i + f_i'(q_i) \geq f_i'(q_i) > f_i'(0), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{A.1}$$

de donde obtenemos $p > \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{f_i'(0)\} = p_0$. Por otro lado, si $p > p_0$, obtenemos del supuesto **A2** que

$$f_i'(0) \leq \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{f_i'(0)\} = p_0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{A.2}$$

y

$$-\beta \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right) \nu_0 + f_0'(0) \leq f_0'(0) \leq \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{f_i'(0)\} = p_0, \tag{A.3}$$

lo que implica que las desigualdades

$$p \leq f_i'(0), \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{A.4}$$

y

$$p \leq -\beta \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right) \nu_0 + f_0'(0), \tag{A.5}$$

de la condición de optimalidad (10) y (12), son imposibles, por lo que se debe cumplir que $q_i > 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y $q_0 > 0$.■

6.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1

Teorema 1. *Bajo los supuestos **A1**, **A2** y **A3**, para cuales quiera $\beta \in (0,1]$, $D \geq 0$, $\nu_i \geq 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$ y $\nu_0 \in [0, \bar{\nu}_0)$, existe un único equilibrio exterior $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$, que es continuamente diferenciable de los parámetros β, D y ν_i, $i \in \{1,\dots,n\}$. Es decir,*

$$p = p\left(D, \nu_0, \nu_1, \dots,\ \nu_n\right) \tag{20}$$

Además,

$$p > p_0 \tag{21}$$

y

$$\frac{\partial p\left(D, \nu_0, \nu_1, \dots,\ \nu_n\right)}{\partial D} = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} + \frac{\nu_0 + f_0''(q_0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''\left(q_i\right)} - G'\left(p\right)} \tag{22}$$

Demostración. Dado que estamos buscando un equilibrio exterior con $q_i > 0$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, de las condiciones de optimalidad (10), podemos considerar la igualdad

$$\varphi_i(p, q_i, \nu_i) = p - [\nu_i q_i + f_i'(q_i)] = 0, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \tag{B.1}$$

donde, del Supuesto **A2**, φ_i es continuamente diferenciable con respecto a (p, q_i, ν_i).

Por lo tanto, para todo $\nu_i \geq 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$, tenemos que la función

$$g_i(q_i) = \nu_i q_i + f_i'(q_i), \tag{B.2}$$

es continuamente diferenciable y estrictamente creciente para todo $q_i \geq 0$ (por el supuesto **A2**. Además,

$$g_i(0) = f_i'(0) \leq p_0 = f_i'(q_i^0) \leq g_i(q_i^0), \tag{B.3}$$

y existe el límite (que puede ser finito o infinito)

$$p_i^1(\nu_i) := \lim_{q_i \to +\infty} g_i(q_i) = \lim_{q_i \to +\infty} [\nu_i q_i + f_i'(q_i)] > p_0. \tag{B.4}$$

Por lo tanto, para cada $p \in [p_0, p_i^1(\nu_i))$, existe un único $q_i \geq 0$ tal que$\varphi_i(p, q_i, \nu_i) = 0$.

Además, desde

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} = -\nu_i - f_i''(q_i) < 0, \quad \forall q_i, \nu_i \geq 0, p \in \left[p_0, p_i^1(\nu_i)\right), \tag{B.5}$$

por el teorema de la función implícita, el mapeo

$$q_i(p, \nu_i) := \{q_i \geq 0 \mid \varphi_i(p, q_i, \nu_i) = 0\}, \tag{B.6}$$

es una función continuamente diferenciable con respecto a $\nu_i \geq 0$ y $p \in [p_0, p_i^1(\nu_i))$, con las relaciones

$$\frac{\partial q_i}{\partial p} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial p}}{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}} = \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} > 0 \tag{B.7}$$

y

$$\frac{\partial q_i}{\partial \nu_i} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \nu_i}}{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}} = -\frac{q_i}{\nu_i + f_i''(q_i)} \leq 0, \tag{B.8}$$

Lo que significa que $q_i(p, \nu_i)$ es estrictamente creciente con respecto a $p \in [p_0, p_i^1(\nu_i))$ (que implica que $q_i(p, \nu_i) > 0$ si $p > p_0$) y decreciente con respecto a $\nu_i \geq 0$. Además, de (B.1) y (B.4) podemos ver que

$$q_i(p_0, \nu_i) \leq q_i(p_0, 0) = q_i^0 \tag{B.9}$$

y

$$\lim_{p \uparrow p_i^1(\nu_i)} q_i(p, \nu_i) = +\infty. \tag{B.10}$$

A continuación, a partir de las condiciones de optimalidad (12), podemos considerar la ecuación

$$\begin{aligned} \varphi_0(p, q_0, \beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) = & \left[p + \beta \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i)\right] \\ & - \left[(1-\beta)\nu_0 q_0 + f_0'(q_0)\right] = 0, \end{aligned} \tag{B.11}$$

donde, a partir de los argumentos anteriores y la suposición **A2**, $\varphi_0(p, q_0, \beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ es continuamente diferenciable con respecto a $(p, q_0, \beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$.

Ahora, considere un $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrario. Si consideramos $\nu_0 > 0$, entonces, por el supuesto **A2**, se cumplen las siguientes desigualdades

$$\left[p_0 + \beta\nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p_0, \nu_i) \right] \geq p_0 \geq f_0'(0) = [(1-\beta)\nu_0(0) + f_0'(0)], \tag{B.12}$$

y podemos definir

$$p^1(\nu_1, \ldots, \nu_n) := \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{p_i^1(\nu_i)\}. \tag{B.13}$$

Ahora vamos a demostrar que existe un valor $p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) > p_0$, finito o infinito, pero no superior $p^1(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, tal que

$$\lim_{p \uparrow p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)} \left[p + \beta\nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i) \right] = \lim_{q_0 \to +\infty} [(1-\beta)\nu_0 q_0 + f_0'(q_0)]. \tag{B.14}$$

La demostración se divide en dos casos: $\beta = 1$ y $\beta \in (0, 1)$.

Primero, podemos observar que la función $p + \beta\nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i)$ es continua y estrictamente creciente (como se muestra arriba) con respecto a $p \in [p_0, p^1(\nu_1, \ldots, \nu_n))$, y la función $(1-\beta)\nu_0 q_0 + f_0'(q_0)$ es continua y estrictamente creciente (por el supuesto **A2**) con respecto a $q_0 \geq 0$.

Caso 1: Sea $\beta = 1$. Bajo estas condiciones, la igualdad (B.14) se reescribe como

$$\lim_{p \uparrow p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)} \left[p + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i) \right] = \lim_{q_0 \to +\infty} f_0'(q_0). \tag{B.15}$$

Si $\sum_{i=1}^{n} q_i^0 > 0$, de (19) tenemos que

$$\nu_0 < \frac{f_0'(G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, \tag{B.16}$$

el cual implica que la cadena de desigualdades

$$
\begin{aligned}
p_0 + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p_0,\nu_i) &\le p_0 + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \\
&< p_0 + \frac{f_0'(G(p_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0} \sum_{i=1}^{n} q_i^0 = f_0'(G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0) \\
&< \lim_{q_0 \to +\infty} f_0'(q_0) \le +\infty = \lim_{p \uparrow p^1(\nu_1,\ldots,\nu_n)} \left[p + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p,\nu_i) \right],
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

lo que garantiza la existencia del valor deseado de $p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ antes mencionado.

De lo contrario, si $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 = 0$, entonces, evidentemente

$$
\begin{aligned}
p_0 + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p_0,\nu_i) &\le p_0 + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i^0 = p_0 < \lim_{q_0 \to +\infty} f_0'(q_0) \\
&\le +\infty = \lim_{p \uparrow p^1(\nu_1,\ldots,\nu_n)} \left[p + \nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p,\nu_i) \right],
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

lo que nuevamente garantiza la existencia del valor deseado $p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ mencionado anteriormente.

Caso 2: Sea $\beta \in (0,1)$. En este caso

$$
\lim_{p \uparrow p^1(\nu_1,\ldots,\nu_n)} \left[p + \beta\nu_0 \sum_{i=1}^{n} q_i(p,\nu_i) \right] = \lim_{q_0 \to +\infty} [(1-\beta)\nu_0 q_0 + f_0'(q_0)] = +\infty, \tag{B.19}
$$

lo que implica que $p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) = p^1(\nu_1,\ldots,\nu_n)$.

Así, la demostración de la existencia del valor $p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ mencionado anteriormente está completa.

Por lo tanto, desde las relaciones (B.12) y (B.14), podemos concluir que por cada $p \in [p_0, p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n))$ existe un único $q_0 \ge 0$ tal que $\varphi_0(p,q_0,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) = 0$.

Por otro lado si$\nu_0 = 0$, entonces, la ecuación $\varphi_0(p,q_0,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) = 0$ toma la forma

$$
p - f_0'(q_0) = 0. \tag{B.20}
$$

Entonces podemos definir el valor

$$p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = \lim_{q_0 \to +\infty} f_0'(q_0), \tag{B.21}$$

y por el supuesto **A2**, podemos garantizar que para todos $p \in [p_0, p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n))$ existe un único $q_0 \geq 0$ tal que $\varphi_0(p, q_0, \beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = 0$.

Además, tenemos que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_0} = -(1-\beta)\nu_0 - f_0''(q_0) < 0, \tag{B.22}$$

para todo $q_0, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n \geq 0$, $p \in [p_0, p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n))$.

Entonces, por el teorema de la función implícita, el mapeo

$$q_0(p, \beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) := \{q_0 \geq 0 \mid \varphi_0(p, q_0, \beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = 0\} \tag{B.23}$$

es una función continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0, 1]$, $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n \geq 0$, y $p \in [p_0, p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n))$, con las siguientes propiedades

$$\frac{\partial q_0}{\partial p} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial p}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial q_0}} = \frac{1 + \beta\nu_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial q_i}{\partial p}}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} = \frac{1 + \beta\nu_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)}}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} > 0, \tag{B.24}$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_i} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \nu_i}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial q_0}} = \frac{\beta\nu_0 \dfrac{\partial q_i}{\partial \nu_i}}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} = -\frac{\beta\nu_0 \dfrac{q_i}{\nu_i + f_i''(q_i)}}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \leq 0, \tag{B.25}$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$, y

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_0} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \nu_0}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial q_0}} = \frac{\beta \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(p, \nu_i) - (1-\beta) q_0}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)}, \tag{B.26}$$

lo que nos permite concluir que $q_0(p, \beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$ es estrictamente creciente con respecto a $p \in [p_0, p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n))$ (lo que implica que $q_0(p, \beta, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) > 0$ si $p > p_0$) y decreciente con respecto a $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Además, de las relaciones (B.11), (B.14) y (B.21), es fácil ver que

$$q_0(p_0, \beta, 0, \nu_1, \dots, \nu_n) = q_0^0 \tag{B.27}$$

y

$$\lim_{p \uparrow p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)} q_0(p,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) = +\infty. \tag{B.28}$$

Sea $\beta \in (0,1]$, $\nu_1,\ldots,\nu_n, D \geq 0$, y considera la ecuación

$$\begin{aligned}\Gamma(p,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D) = &\left[q_0(p,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p,\nu_i)\right] \\ &- [G(p) + D] = 0,\end{aligned} \tag{B.29}$$

que, por (B.1)-(B.28) y el supuesto **A2**, es continuamente diferenciable con respecto a todos$\beta \in (0,1]$, $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $D \geq 0$ y $p \in [p_0, p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n))$.

Además, por (B.1)-(B.28), la función $q_0(p,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) + \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(p,\nu_i)$ es continuamente diferenciable y estrictamente creciente con respecto a todos $p \in [p_0, p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n))$, y se cumple la siguiente relación

$$\lim_{p \uparrow p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)} \left[q_0(p,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p,\nu_i)\right] = +\infty. \tag{B.30}$$

Además, por **A1**, la función $G(p)$ es continuamente diferenciable y estrictamente decreciente para todo $p > 0$.

Entonces, por (B.1)-(B.28) y la suposición **A3**, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq q_0(p_0,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p_0,\nu_i) \\ &\leq q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p_0,0) \\ &= q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \end{aligned} \tag{B.31}$$

Ahora, vamos a analizar el signo de la derivada

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_0}(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) = \frac{\beta \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta) q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)}. \tag{B.32}$$

Este análisis se realiza por separado para los Casos A, B, C, D y E.

Caso A: Sea $\beta = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} q_i^0 = 0$. En este caso, es claro que

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_0}(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad \forall \nu_0 \geq 0, \tag{B.33}$$

por lo tanto, $q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)$ es constante con respecto a ν_0 y

$$\begin{aligned} q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 &= q_0(p_0, \beta, 0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} q_i^0 < G(p_0) \leq G(p_0) + D. \end{aligned} \tag{B.34}$$

Caso B: Sea $\beta = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} q_i^0 > 0$. En este caso, tenemos que

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_0}(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}{f_0''(q_0)} > 0, \quad \forall \nu_0 \geq 0, \tag{B.35}$$

por lo tanto, $q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)$ es estrictamente creciente con respecto a ν_0.

Además, de (19) tenemos que

$$\nu_0 < \frac{f_0'(G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, \tag{B.36}$$

de donde se tiene la desigualdad

$$q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) < q_0\left(p_0, \beta, \frac{f_0'(G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, 0, \ldots, 0\right), \tag{B.37}$$

y de la relación (B.11) se puede ver que

$$q_0\left(p_0, \beta, \frac{f_0'(G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0}, 0, \ldots, 0\right) = G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.38}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \\
&< q_0\left(p_0, \beta, \frac{f_0'(G(p_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0}, 0, \dots, 0\right) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \qquad \text{(B.39)}\\
&= G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0 + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 = G(p_0) \leq G(p_0) + D.
\end{aligned}
$$

Caso C: Sea $\beta \in (0,1)$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 > \text{máx}\left\{(1-\beta)G(p_0), \frac{1-\beta}{\beta} q_0^0\right\}$. Para este caso, Tenemos la relación:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^0 > \frac{1-\beta}{\beta} q_0^0, \tag{B.40}$$

que es equivalente a

$$\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0 > q_0^0. \tag{B.41}$$

Ahora, supongamos que existe el valor ν_0 tal que

$$\beta \sum_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta) q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \dots, 0) \leq 0, \tag{B.42}$$

la última desigualdad implica que

$$q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \dots, 0) \geq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.43}$$

De la ecuación (B.11) tenemos que

$$
\begin{aligned}
p_0 =& (1-\beta)\nu_0 \left[q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \dots, 0) - \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \right] \\
&+ f_0'(q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \dots, 0)),
\end{aligned} \tag{B.44}
$$

y aplicando las desigualdades (B.41) y (B.43) a (B.44) se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} p_0 &\geq (1-\beta)\nu_0 \left[\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right] + f_0'\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right) \\ &= f_0'\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right) > f_0'(q_0^0) = p_0, \end{aligned} \tag{B.45}$$

que no puede ser válido.

Por lo tanto, la suposición (B.42) no se puede sostener, lo que implica que

$$\beta\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta)q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) > 0, \quad \forall \nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0), \tag{B.46}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_0}(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) = \frac{\beta\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta)q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} > 0, \tag{B.47}$$

para todo $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$, entonces la función $q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0)$ es estrictamente creciente con respecto a $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$.

Además, para este caso tenemos

$$\overline{\nu}_0 = \frac{f_0'(G(p_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0) - p_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta)G(p_0)} \tag{B.48}$$

donde $G(p_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 > 0$ por el Supuesto **A3**, y $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta)G(p_0) > 0$ es uno de los supuestos para este **Caso C**. Además, de la ecuación (B.11) tenemos que

$$q_0(p_0,\beta,\overline{\nu}_0,0,\ldots,0) = G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.49}$$

Por eso,

$$\begin{aligned} q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 &< q_0(p_0,\beta,\overline{\nu}_0,0,\ldots,0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \\ &= G(p_0) - \sum_{i=1}^{n} q_i^0 + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 = G(p_0) \leq G(p_0) + D. \end{aligned} \tag{B.50}$$

Caso D: Sea $\beta \in (0,1)$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 \leq \dfrac{1-\beta}{\beta} q_0^0$. Entonces,

$$\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \leq q_0^0. \tag{B.51}$$

Ahora, supongamos que existe el valor ν_0 tal que

$$\beta\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta) q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) > 0, \tag{B.52}$$

la última desigualdad implica que

$$q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) < \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.53}$$

Aplicando las desigualdades (B.51) y (B.53) a (B.44) se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} p_0 &< (1-\beta)\nu_0\left[\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right] + f_0'\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right) \\ &= f_0'\left(\frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right) \leq f_0'(q_0^0) = p_0, \end{aligned} \tag{B.54}$$

que no puede ser válido.

Por lo tanto, la suposición (B.52) no se puede sostener, lo que implica que

$$\beta\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta) q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) \leq 0, \quad \forall \nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0), \tag{B.55}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial q_0}{\partial \nu_0}(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0) = \frac{\beta\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 - (1-\beta) q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \leq 0, \tag{B.56}$$

for all $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$, entonces la función $q_0(p_0,\beta,\nu_0,0,\ldots,0)$ es decreciente con respecto a $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$.

Por eso,

$$\begin{aligned} q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 &\leq q_0(p_0, \beta, 0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} q_i^0 < G(p_0) \leq G(p_0) + D. \end{aligned} \tag{B.57}$$

Caso E: Sea $\beta \in (0,1)$ y $\dfrac{1-\beta}{\beta} q_0^0 < \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 \leq (1-\beta)G(p_0)$. Análogo a textbf Caso C, usando la desigualdad $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 > \dfrac{1-\beta}{\beta} q_0^0$, Podemos demostrar que eso $q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)$ es estrictamente creciente con respecto a $\nu_0 \geq 0$.

Ahora, de la ecuación (B.11) tenemos que

$$\begin{aligned} &[p_0 - f_0'(q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0))] \\ &\quad + \beta\nu_0 \left[\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - \frac{1-\beta}{\beta} q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) \right] = 0. \end{aligned} \tag{B.58}$$

Además, si $\nu_0 > 0$, entonces,

$$\begin{aligned} p_0 - f_0'(q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)) &< p_0 - f_0'(q_0(p_0, \beta, 0, 0, \ldots, 0)) \\ = p_0 - f_0'(q_0^0) = p_0 - p_0 = 0, \end{aligned} \tag{B.59}$$

por lo tanto,

$$p_0 - f_0'(q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)) < 0, \quad \forall \nu_0 > 0. \tag{B.60}$$

Además, dado que $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 > \dfrac{1-\beta}{\beta} q_0^0$ y $q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)$ es estrictamente creciente con respecto a ν_0, para algún$\nu_0 > 0$ la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^0 - \frac{1-\beta}{\beta} q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) > 0 \tag{B.61}$$

implica que

$$q_0^0 < q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) < \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.62}$$

Por lo tanto, de (B.58), (B.60), (B.62) y el comportamiento estrictamente creciente de $q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0)$ con respecto a ν_0, podemos ver que

$$\lim_{\nu_0 \to +\infty} q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) = \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.63}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 < \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0 + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 = \frac{1}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0. \tag{B.64}$$

Aplicando la condición $\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \leq (1-\beta) G(p_0)$ de esto **Caso E** a (B.64), obtenemos

$$q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 < \frac{1}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} q_i^0 \leq G(p_0) \leq G(p_0) + D. \tag{B.65}$$

Así, como se deduce de los Casos anteriores A, B, C, D y E, hemos demostrado que

$$q_0(p_0, \beta, \nu_0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} q_i^0 < G(p_0) + D, \quad \forall \beta \in (0, 1], \nu_0 \in [0, \overline{\nu}_0). \tag{B.66}$$

Finalmente, la última desigualdad (B.66), junto con (B.31), dan la siguiente desigualdad

$$q_0(p_0, \beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) + \sum_{i=1}^{n} q_i(p_0, \nu_i) < G(p_0) + D \tag{B.67}$$

para todo $\beta \in (0, 1]$, $\nu_0 \in [0, \overline{\nu}_0)$ y $\nu_1, \ldots, \nu_n \geq 0$.

Por lo tanto, de las relaciones (B.30), (B.67), el comportamiento estrictamente creciente de las funciones continuas q_i, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, con respecto a p, y el comportamiento estrictamente decreciente de la función continua $G(p)$ con respecto a p, podemos garantizar la existencia de un único valor de precio $p \in (p_0, p_0^1(\beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n))$ tal que

$$\Gamma(p, \beta, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n, D) = 0. \tag{B.68}$$

Además,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} = \frac{\partial q_0}{\partial p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial p} - G'(p) > 0, \tag{B.69}$$

para todo $\beta \in (0,1]$, $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$, $\nu_1,\ldots,\nu_n, D \geq 0$ y $p \in [p_0, p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n))$.

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, el mapeo

$$\begin{aligned} &p(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D) \\ &\quad := \left\{p \in \left[p_0, p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)\right) \mid \Gamma(p,\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D) = 0\right\} \end{aligned} \tag{B.70}$$

es una función continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0,1]$, $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$, $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, y $D \geq 0$, es decir, para todo $\beta \in (0,1]$, $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$, $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, y $D \geq 0$, existen valores únicos $p = p(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D) \in (p_0, p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n))$, $q_0 = q_0(p(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D),\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) > 0$ y $q_i = q_i(p(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D),\nu_i) > 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, tal que el vector $(p,q_0,q_1,\ldots,q_n)$es el equilibrio exterior, con $q_i > 0$ $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$, para los coeficientes de influencia $(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$. Además, si $p \leq p_0$ no hay equilibrio exterior con $q_i > 0$ $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$, y si $p \geq p_0^1(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ entonces algunas de las condiciones de optimalidad (10) y/o (12) no pueden cumplirse, lo que implica que el vector $(p,q_0,q_1,\ldots,q_n)$ es el único equilibrio exterior para los coeficientes de influencia $(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$.

Finalmente, para este valor $p = p(\beta,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n,D)$, teniendo en cuenta las fórmulas (B.29), (B.69), (B.7) y (B.24), podemos calcular

$$\frac{\partial p}{\partial D} = -\frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial D}}{\frac{\partial \Gamma}{\partial p}} = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} + \frac{\nu_0 + f_0''(q_0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} - G'(p)}. \tag{B.71}$$

La demostración del Teorema 1 está completa. ■

6.3 Demostración del Teorema 2

Teorema 2. *Bajo los supuestos* ***A1****,* ***A2*** *y* ***A3****, existe un equilibrio interior.*

Demostración. Fijemos los valores de $\beta \in (0,1]$ y $D \geq 0$. Vamos a probar que existe un equilibrio interior para cualquier $n \geq 1$. Por el teorema 1 para cualquier $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$ y $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, existe un único equilibrio exterior $(p,q_0,q_1,\ldots,q_n)$, con $p > p_0$ y $q_i > 0$, $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$, y además, las funciones $p = p(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$, $q_0 = q_0(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$, y $q_i = q_i(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, son continuamente diferenciables con respecto a $\nu_0 \in [0,\overline{\nu}_0)$ y $\nu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Como $p > p_0$ y $G(p)$ es estrictamente decreciente, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} q_i = G(p) + D < G(p_0) + D, \tag{C.1}$$

entonces, $q_i \in (0, G(p_0)+D)$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Además, $f_i''(q_i) \in (0, \alpha)$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, donde $\alpha = \max\limits_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} \{f_i''(G(p_0) + D)\} > 0$.

Ahora, considere las funciones

$$F_0(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} - G'(p)} > 0, \tag{C.2}$$

$$F_i(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} + \frac{\nu_0 + f_0''(q_0)}{(1-\beta)\nu_0 + f_0''(q_0)} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j + f_j''(q_i)} - G'(p)} > 0, \tag{C.3}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por los supuestos **A1** y **A2**, estas funciones son continuas con respecto a $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$.

Ahora definamos las constantes

$$M_0 = \frac{2\alpha}{\beta + n - 1} > 0, \tag{C.4}$$

$$M = \frac{[(1-\beta) + n]\alpha}{\beta + n - 1} > 0. \tag{C.5}$$

Si seleccionamos $\nu_0 \in [0, M_0]$ y $\nu_i \in [0, M]$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces,

$$\begin{aligned} F_0(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\nu_i + f_i''(q_i)} - G'(p)} < \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{M + \alpha}} = \frac{1}{\dfrac{n}{M + \alpha}} \\ &= \frac{M + \alpha}{n} = \frac{\dfrac{[(1-\beta) + n]\alpha}{\beta + n - 1} + \alpha}{n} = \frac{2\alpha}{\beta + n - 1} = M_0, \end{aligned} \tag{C.6}$$

$$F_i(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0+f_0''(q_0)} + \frac{\nu_0+f_0''(q_0)}{(1-\beta)\nu_0+f_0''(q_0)} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j+f_j''(q_i)} - G'(p)}$$
$$< \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)M_0+\alpha}} = (1-\beta)M_0+\alpha \tag{C.7}$$
$$= (1-\beta)\frac{2\alpha}{\beta+n-1}+\alpha = \frac{[(1-\beta)+n]\alpha}{\beta+n-1} = M,$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

En otras palabras, $F_0(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) \in [0,M_0]$ y $F_i(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n) \in [0,M]$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, siempre que $\nu_0 \in [0,M_0]$ y $\nu_i \in [0,M]$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, lo que significa que la función continua $H = (F_0,F_1,\ldots,F_n)$ mapea el conjunto compacto convexo $[0,M_0] \times [0,M]^n$ en sí misma, por lo tanto, por el teorema del punto fijo de Brouwer, la función $H = (F_0,F_1,\ldots,F_n)$ tiene un punto fijo $(\nu_0^*,\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*)$, i.e., existe $(\nu_0^*,\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*) > 0$ tal que

$$F_0(\nu_0^*,\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*) = \nu_0^*, \tag{C.8}$$
$$F_i(\nu_0^*,\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*) = \nu_i^*, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{C.9}$$

Ahora, para estos coeficientes de influencia $(\nu_0^*,\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*)$ calculamos su equilibrio exterior $(p^*,q_0^*,q_1^*,\ldots,q_n^*)$, lo que implica que

$$\nu_0^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i^*+f_i''(q_i^*)} - G'(p^*)}, \tag{C.10}$$

$$\nu_i^* = \frac{1}{\frac{1}{(1-\beta)\nu_0^*+f_0''(q_0^*)} + \frac{\nu_0^*+f_0''(q_0^*)}{(1-\beta)\nu_0^*+f_0''(q_0^*)} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\nu_j^*+f_j''(q_i^*)} - G'(p^*)}, \tag{C.11}$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Finalmente, las ecuaciones (C.10) y (C.11) significan que $(p^*,q_0^*,q_1^*,\ldots,q_n^*,\nu_0^*,\nu_1^*,\ldots,\nu_n^*)$ es el equilibrio interior, lo que demuestra el Teorema 2. ■

6.4 Demostración del Teorema 3

Teorema 3. *Al igual que el Teorema 2 del Capítulo 2, bajo los supuestos* ***A4*,*A5*** *y* ***A6*** *con la función $G(p)$ lineal, las funciones $f_0(q_0)$, $f(q)$ y para cada $\beta \in (0,1]$ cuadráticas, el equilibrio interior existe y es único $(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*)$.*

Demostración. Para nuestro caso particular, el criterio de consistencia toma la siguiente forma:

$$\nu_0 = \frac{1}{\dfrac{n}{\nu + a} + K}, \tag{D.1}$$

$$\nu = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \dfrac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\dfrac{n-1}{\nu + a} + K}, \tag{D.2}$$

Luego, las funciones (C.2) y (C.3), dentro de la prueba del teorema 2, se reescriben de la siguiente manera

$$F_0(\nu_0, \nu) = \frac{1}{\dfrac{n}{\nu + a} + K} > 0, \tag{D.3}$$

$$F(\nu_0, \nu) = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + \dfrac{\nu_0 + a_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\dfrac{n-1}{\nu + a} + K} > 0, \tag{D.4}$$

Podemos ver que las funciones F_0 y F son continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0,1]$ y $\nu_0, \nu \geq 0$, y por Teorema 2 sabemos que la función $H = (F_0, F)$ tiene un punto fijo, es decir, el sistema de ecuaciones

$$F_0(\nu_0, \nu) = \nu_0, \tag{D.5}$$

$$F(\nu_0, \nu) = \nu, \tag{D.6}$$

tiene una solución.

Para demostrar que la solución de (D.5) y (D.6) es única, vamos a mostrar que la función $H = (F_0, F)$ es una contracción.

Dado que H es una función continuamente diferenciable, para demostrar que H es una contracción, es suficiente para demostrar que $\|\nabla H\|_\infty < 1$ (es decir, el infinito La norma de la matriz jacobiana de H es inferior a 1).

De la función (D.3) y (D.4) tenemos que

$$\frac{\partial F_0}{\partial \nu_0} = 0, \tag{D.7}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \nu} = \frac{n}{(\nu+a)^2\left(\dfrac{n}{\nu+a}+K\right)^2} = \frac{n}{[n+(\nu+a)K]^2} > 0, \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \nu_0} &= \frac{\dfrac{1-\beta}{[(1-\beta)\nu_0+a_0]^2} - \dfrac{(1-\beta)\nu_0+a_0-(1-\beta)(\nu_0+a_0)}{[(1-\beta)\nu_0+a_0]^2}\dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left[\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0+a_0}+\dfrac{\nu_0+a_0}{(1-\beta)\nu_0+a_0}\dfrac{n-1}{\nu+a}+K\right]^2},\\ &= \frac{(1-\beta)-\beta a_0\dfrac{n-1}{\nu+a}}{[(1-\beta)\nu_0+a_0]^2\left[\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0+a_0}+\dfrac{\nu_0+a_0}{(1-\beta)\nu_0+a_0}\dfrac{n-1}{\nu+a}+K\right]^2}\\ &= \frac{(1-\beta)-\beta a_0\dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left\{1+(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}+[(1-\beta)\nu_0+a_0]K\right\}^2},\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \nu} &= \frac{\dfrac{\nu_0+a_0}{(1-\beta)\nu_0+a_0}\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left[\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0+a_0}+\dfrac{\nu_0+a_0}{(1-\beta)\nu_0+a_0}\dfrac{n-1}{\nu+a}+K\right]^2},\\ &= \frac{[(1-\beta)\nu_0+a_0](\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left\{1+(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}+[(1-\beta)\nu_0+a_0]K\right\}^2}.\end{aligned} \tag{D.10}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial F_0}{\partial \nu_0}\right| + \left|\frac{\partial F_0}{\partial \nu}\right| = |0| + \left|\frac{n}{[n+(\nu+a)K]^2}\right| = \frac{n}{[n+(\nu+a)K]^2}\\ &\quad < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1,\end{aligned} \tag{D.11}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \nu_0}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \nu}\right| = \left|\frac{(1-\beta) - \beta a_0 \dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2}\right|$$

$$+ \left|\frac{[(1-\beta)\nu_0 + a_0](\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2}\right|$$

$$= \frac{\left|(1-\beta) - \beta a_0 \dfrac{n-1}{\nu+a}\right| + [(1-\beta)\nu_0 + a_0](\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \tag{D.12}$$

$$\leq \frac{(1-\beta) + \beta a_0 \dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0](\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2}$$

$$< \frac{1 + 2(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + \left[(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]^2}{\left[1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]^2} = 1.$$

Por eso,

$$\|\nabla H\|_\infty = \text{máx}\left\{\left|\frac{\partial F_0}{\partial \nu_0}\right| + \left|\frac{\partial F_0}{\partial \nu}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial \nu_0}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \nu}\right|\right\} < 1. \tag{D.13}$$

Por lo tanto, la función$H = (F_0, F)$ es una contracción y el punto fijo (ν_0^*, ν^*) s único. Además, dado que el equilibrio exterior correspondiente (p^*, q_0^*, q^*) es único, y, el equilibrio interior $(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*)$ también es único ■

6.5 Demostración del Teorema 4

Teorema 4. *Sea el equilibrio interior $(p^*, q_0^*, q^*, \nu_0^*, \nu^*)$ y la función $\pi^*(\beta)$ continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0, 1]$. Además, $p^*(\beta)$, $\nu_0^*(\beta)$ y $nu^*(\beta)$ estrictamente decrecientes.*

Demostración. Primero, demostraremos que los coeficientes de influencia $\nu_0^* = \nu_0^*(\beta)$ y $\nu^* = \nu^*(\beta)$ son funciones continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0, 1]$.

Para hacer eso, consideramos nuevamente las funciones F_0 y F, pero esta vez teniendo en cuenta su dependencia con respecto a β, i.e.,

$$F_0(\beta,\nu_0,\nu) = \frac{1}{\dfrac{n}{\nu+a}+K}, \tag{E.1}$$

$$F(\beta,\nu_0,\nu) = \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0+a_0}+\dfrac{\nu_0+a_0}{(1-\beta)\nu_0+a_0}\dfrac{n-1}{\nu+a}+K}. \tag{E.2}$$

Ahora, definimos la función $\Phi = (\phi_0, \phi)$, donde

$$\phi_0(\beta,\nu_0,\nu) = \nu_0 - F_0(\beta,\nu_0,\nu), \tag{E.3}$$

$$\phi(\beta,\nu_0,\nu) = \nu - F(\beta,\nu_0,\nu). \tag{E.4}$$

Por el Teorema 3, la ecuación

$$\Phi(\beta,\nu_0,\nu) = 0 \tag{E.5}$$

tiene una solución única $\nu_0^*(\beta), \nu^*(\beta) > 0$, para cada $\beta \in (0,1]$.

Además, es fácil ver que Φ es continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0,1]$ y $\nu_0, \nu \geq 0$, con

$$\begin{aligned}\nabla_{(\nu_0,\nu)}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial(\nu_0,\nu)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu_0} & \dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu_0} & \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\partial F_0}{\partial \nu_0} & -\dfrac{\partial F_0}{\partial \nu} \\ -\dfrac{\partial F}{\partial \nu_0} & 1-\dfrac{\partial F}{\partial \nu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu_0} & \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \nu_0} & \dfrac{\partial F}{\partial \nu} \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{E.6}$$

y dado que

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu_0} & \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \nu_0} & \dfrac{\partial F}{\partial \nu} \end{matrix} \right\|_\infty < 1, \tag{E.7}$$

Podemos concluir que la matriz $\nabla_{(\nu_0,\nu)}\Phi$ es dominante diagonal y, por lo tanto, invertible para cada $\beta \in (0,1]$.

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, las funciones $\nu_0^*(\beta)$ y $\nu^*(\beta)$ son continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0,1]$, y, además,

$$\frac{d(\nu_0^*,\nu^*)}{d\beta} = -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial(\nu_0,\nu)}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu_0} & -\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu} \\ -\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0} & 1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_0}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\end{pmatrix}, \tag{E.8}$$

donde

$$\frac{\partial F_0}{\partial\beta} = 0, \tag{E.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\beta} &= \frac{\dfrac{-\nu_0}{[(1-\beta)\nu_0+a_0]^2}\left[1+(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]}{\left[\dfrac{1}{(1-\beta)\nu_0+a_0}+\dfrac{\nu_0+a_0}{(1-\beta)\nu_0+a_0}\dfrac{n-1}{\nu+a}+K\right]^2} \\ &= -\frac{\nu_0\left[1+(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]}{\left\{1+(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}+[(1-\beta)\nu_0+a_0]K\right\}^2} < 0.\end{aligned} \tag{E.10}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d(\nu_0^*,\nu^*)}{d\beta} = \begin{pmatrix}\dfrac{d\nu_0^*}{d\beta} \\ \dfrac{d\nu^*}{d\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu} \\ -\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0} & 1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\end{pmatrix}. \tag{E.11}$$

Ahora, desde $\nabla_{(\nu_0,\nu)}\Phi$ es invertible para toda $\beta \in (0,1]$, entonces

$$|\nabla_{(\nu_0,\nu)}\Phi| = 1-\frac{\partial F}{\partial\nu}-\frac{\partial F_0}{\partial\nu}\frac{\partial F}{\partial\nu_0} \neq 0, \quad \forall\beta\in(0,1], \tag{E.12}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu} \\ -\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0} & 1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu} & \dfrac{\partial F_0}{\partial\nu} \\ \dfrac{\partial F}{\partial\nu_0} & 1\end{pmatrix}, \tag{E.13}$$

por lo tanto,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d\nu_0^*}{d\beta} \\ \dfrac{d\nu^*}{d\beta}\end{pmatrix} = \frac{1}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu} & \dfrac{\partial F_0}{\partial\nu} \\ \dfrac{\partial F}{\partial\nu_0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\end{pmatrix}. \tag{E.14}$$

A continuación, como se muestra en(D.12), $\left|\dfrac{\partial F}{\partial \nu_0}\right| + \left|\dfrac{\partial F}{\partial \nu}\right| < 1$, lo que implica

$$1 - \frac{\partial F}{\partial \nu} > 0. \tag{E.15}$$

Además para $\beta = 1$ tenemos que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \nu_0}\right|_{\beta=1} = \frac{-a_0\dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left[1 + (\nu_0 + a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + a_0 K\right]^2} \leq 0. \tag{E.16}$$

Luego, de (D.8), (E.15) y (E.16),

$$1 - \frac{\partial F}{\partial \nu} - \frac{\partial F_0}{\partial \nu}\frac{\partial F}{\partial \nu_0} > 0, \quad \text{for } \beta = 1. \tag{E.17}$$

Además, sabemos que F_0 y F son continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0,1]$, por lo tanto, $1 - \dfrac{\partial F}{\partial \nu} - \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu}\dfrac{\partial F}{\partial \nu_0}$ es continuo respeto a $\beta \in (0,1]$, por lo tanto, de las desigualdades(E.12) y (E.17), tenemos que

$$1 - \frac{\partial F}{\partial \nu} - \frac{\partial F_0}{\partial \nu}\frac{\partial F}{\partial \nu_0} > 0, \quad \forall \beta \in (0,1]. \tag{E.18}$$

Por lo tanto, por las relaciones de (D.8), (E.10) y (E.18),

$$\frac{d\nu_0^*}{d\beta} = \frac{\dfrac{\partial F_0}{\partial \nu}\dfrac{\partial F}{\partial \beta}}{1 - \dfrac{\partial F}{\partial \nu} - \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu}\dfrac{\partial F}{\partial \nu_0}} < 0, \tag{E.19}$$

$$\frac{d\nu^*}{d\beta} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \beta}}{1 - \dfrac{\partial F}{\partial \nu} - \dfrac{\partial F_0}{\partial \nu}\dfrac{\partial F}{\partial \nu_0}} < 0, \tag{E.20}$$

así que las funciones $\nu_0^*(\beta)$ y $\nu^*(\beta)$ son estrictamente decreciente con respecto a $\beta \in (0,1]$.

Debido a que los coeficientes de influencia $\nu_0^*(\beta)$ y $\nu^*(\beta)$ son continuamente diferenciables con respecto a $\beta \in (0,1]$, y el equilibrio exterior $(p(\beta,\nu_0,\nu), q_0(\beta,\nu_0,\nu), q(\beta,\nu_0,\nu))$ es continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0,1]$ y $\nu_0, \nu \geq 0$ (por el Teorema 1), luego, el equilibrio

$$(p^*(\beta), q_0^*(\beta), q^*(\beta)) = (p(\beta, \nu_0^*, \nu^*), q_0(\beta, \nu_0^*, \nu^*), q(\beta, \nu_0^*, \nu^*)) \tag{E.21}$$

es continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0, 1]$. Además, ya que $\pi(p, q)$ es continuamente diferenciable con respecto a cualquier $p, q \geq 0$ (como podemos ver desde ecuación (32)), luego, $\pi^*(\beta) = \pi(p^*(\beta), q^*(\beta))$ es también continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0, 1]$.

A continuación, desde $p^*(\beta) = p(\beta, \nu_0^*, \nu^*)$, podemos aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{dp^*}{d\beta} = \frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \nu_0}\frac{d\nu_0^*}{d\beta} + \frac{\partial p}{\partial \nu}\frac{d\nu^*}{d\beta}. \tag{E.22}$$

Ahora, considera la función

$$\Gamma(p, \beta, \nu_0, \nu) = [q_0(p, \beta, \nu_0, \nu) + nq(p, \nu)] - [G(p) + D] = 0, \tag{E.23}$$

donde, para nuestro caso particular,

$$q(p, \nu) = \frac{p - b}{\nu + a}, \tag{E.24}$$

$$q_0(p, \beta, \nu_0, \nu) = \frac{(p - b_0) + \beta n \nu_0 q(p, \nu)}{(1 - \beta)\nu_0 + a_0}, \tag{E.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial p} &= \frac{\partial q_0}{\partial p} + n\frac{\partial q}{\partial p} - G'(p) = \frac{1 + \beta\nu_0 \dfrac{n}{\nu + a}}{(1 - \beta)\nu_0 + a_0} + \frac{n}{\nu + a} + K \\ &= \frac{1 + (\nu_0 + a_0)\dfrac{n}{\nu + a}}{(1 - \beta)\nu_0 + a_0} + K > 0. \end{aligned} \tag{E.26}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} &= \frac{\partial q_0}{\partial \beta} \\ &= \frac{n\nu_0 q(p, \nu)[(1 - \beta)\nu_0 + a_0] + \nu_0[(p - b_0) + \beta n \nu_0 q(p, \nu)]}{[(1 - \beta)\nu_0 + a_0]^2} \\ &= \frac{\nu_0[(p - b_0) + n(\nu_0 + a_0)q(p, \nu)]}{[(1 - \beta)\nu_0 + a_0]^2} > 0, \end{aligned} \tag{E.27}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_0} &= \frac{\partial q_0}{\partial \nu_0} \\
&= \frac{\beta n q(p,\nu)[(1-\beta)\nu_0 + a_0] - (1-\beta)[(p-b_0) + \beta n \nu_0 q(p,\nu)]}{[(1-\beta)\nu_0 + a_0]^2} \\
&= \frac{\beta n a_0 q(p,\nu) - (1-\beta)(p-b_0)}{[(1-\beta)\nu_0 + a_0]^2},
\end{aligned}
\tag{E.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} &= \frac{\partial q_0}{\partial \nu} + n\frac{\partial q}{\partial \nu} = \frac{\beta n \nu_0}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\frac{\partial q}{\partial \nu} + n\frac{\partial q}{\partial \nu} = \frac{n(\nu_0 + a_0)}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\frac{\partial q}{\partial \nu} \\
&= -\frac{n(\nu_0 + a_0)}{(1-\beta)\nu_0 + a_0}\frac{p-b}{(\nu+a)^2} < 0.
\end{aligned}
\tag{E.29}
$$

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita,

$$
\frac{\partial p}{\partial \beta} = -\frac{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial p}}, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_0} = -\frac{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu_0}}{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial p}}, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} = -\frac{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu}}{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial p}},
\tag{E.30}
$$

luego, de las igualdades (E.22) y (E.30),

$$
p^{*\prime}(\beta) = \frac{dp^*}{d\beta} = -\frac{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu_0}\dfrac{d\nu_0^*}{d\beta} + \dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\dfrac{d\nu^*}{d\beta}}{\dfrac{\partial \Gamma}{\partial p}},
\tag{E.31}
$$

y de las igualdades (E.27) y (E.28), podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_0}\frac{d\nu_0^*}{d\beta} &= \frac{\nu_0^*[(p^*-b_0) + n(\nu_0^* + a_0)q(p^*,\nu^*)]}{[(1-\beta)\nu_0^* + a_0]^2} \\
&\quad + \frac{\beta n a_0 q(p^*,\nu^*) - (1-\beta)(p^*-b_0)}{[(1-\beta)\nu_0^* + a_0]^2}\nu_0^{*\prime} \\
&= \frac{\nu_0^*(p^*-b_0) + nq(p^*,\nu^*)[\nu_0^{*2} + a_0(\nu_0^* + \beta\nu_0^{*\prime})]}{[(1-\beta)\nu_0^* + a_0]^2} \\
&\quad + \frac{(1-\beta)(p^*-b_0)}{[(1-\beta)\nu_0^* + a_0]^2}(-\nu_0^{*\prime}).
\end{aligned}
\tag{E.32}
$$

Ahora, vamos a analizar el signo de $\nu_0^* + \beta\nu_0^{*\prime}$.

Primero, desde la igualdad (D.8), podemos ver que

$$
\frac{\partial F_0}{\partial \nu} = \frac{n}{[n + (\nu+a)K]^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \le 1.
\tag{E.33}
$$

Segundo, desde las identidades (D.9) y (E.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \nu_0} - \frac{\beta}{\nu_0}\frac{\partial F}{\partial \beta} &= \frac{(1-\beta) - \beta a_0 \dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \\
&\quad + \frac{\beta}{\nu_0}\frac{\nu_0\left[1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \\
&= \frac{(1-\beta) - \beta a_0 \dfrac{n-1}{\nu+a} + \beta\left[1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \\
&= \frac{1 + \beta\nu_0\dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} > 0.
\end{aligned} \tag{E.34}$$

Y tercero, desde las igualdades (D.10) y (E.34), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \nu} + \frac{\partial F}{\partial \nu_0} - \frac{\beta}{\nu_0}\frac{\partial F}{\partial \beta} &= \frac{[(1-\beta)\nu_0 + a_0](\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \\
&\quad + \frac{1 + \beta\nu_0\dfrac{n-1}{\nu+a}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \\
&= \frac{1 + \beta\nu_0\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0](\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{(\nu+a)^2}}{\left\{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + [(1-\beta)\nu_0 + a_0]K\right\}^2} \\
&< \frac{1 + 2(\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a} + (\nu_0+a_0)^2\dfrac{(n-1)^2}{(\nu+a)^2}}{\left[1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n-1}{\nu+a}\right]^2} = 1.
\end{aligned} \tag{E.35}$$

Luego, utilizando las relaciones (E.18), (E.19), (E.33), (E.34) (E.35), obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu_0^* + \beta\nu_0^{*\prime} &= \nu_0^* + \beta\frac{\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\beta}}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}} \\
&= \frac{\nu_0^*\left(1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}\right)+\beta\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\beta}}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}} \\
&= \frac{\nu_0^*}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}}\left[1-\frac{\partial F}{\partial\nu}-\frac{\partial F_0}{\partial\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial\nu_0}-\frac{\beta}{\nu_0^*}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)\right] \\
&> \frac{\nu_0^*}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}}\left[1-\frac{\partial F}{\partial\nu}-\left(\frac{\partial F}{\partial\nu_0}-\frac{\beta}{\nu_0^*}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)\right] \\
&= \frac{\nu_0^*}{1-\dfrac{\partial F}{\partial\nu}-\dfrac{\partial F_0}{\partial\nu}\dfrac{\partial F}{\partial\nu_0}}\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial\nu}+\frac{\partial F}{\partial\nu_0}-\frac{\beta}{\nu_0^*}\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)\right] > 0.
\end{aligned} \tag{E.36}$$

Finalmente, aplicando las desigualdades (E.19), (E.36), y el supuesto **A5**, a (E.32), podemos ver que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma}{\partial\beta}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_0}\frac{d\nu_0^*}{d\beta} &= \frac{\nu_0^*(p^*-b_0)+nq(p^*,\nu^*)[\nu_0^{*2}+a_0(\nu_0^*+\beta\nu_0^{*\prime})]}{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]^2} \\
&\quad+\frac{(1-\beta)(p^*-b_0)}{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]^2}(-\nu_0^{*\prime}) > 0.
\end{aligned} \tag{E.37}$$

Por lo tanto, aplicando las desigualdades (E.20), (E.26), (E.29) y (E.37), a (E.31), obtenemos

$$p^{*\prime}(\beta) = -\frac{\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\beta}+\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\nu_0}\dfrac{d\nu_0^*}{d\beta}+\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\dfrac{d\nu^*}{d\beta}}{\dfrac{\partial\Gamma}{\partial p}} < 0, \tag{E.38}$$

que demuestra que $p^*(\beta)$ es estrictamente decreciente con respecto a $\beta \in (0,1]$.■

6.6 Demostración del Teorema 5

Teorema 5. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** el equilibrio exterior* $(p^C(\beta), q_0^C(\beta), q^C(\beta))$ *y la función* $\pi^C(\beta)$ *son continuamente diferenciales con respecto a* $\beta \in (0,1]$ *y* $p^C(\beta)$ *estrictamente decreciente para todo* $\beta \in (0,1]$.

Demostración. Del Teorema 1 tenemos que el equilibrio exterior $(p^C(\beta), q_0^C(\beta), q^C(\beta))$, correspondiente a los coeficientes de influencia $(\nu_0^C, \nu^C) = \left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$, es continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0,1]$. Además, ya que $\pi(p,q)$ es continuamente diferenciable con respecto a cualquier $p, q \geq 0$ (como podemos ver desde la ecuación maxpripart), entonces, $\pi^C(\beta) = \pi(p^C(\beta), q^C(\beta))$ también es continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0,1]$.

A continuación, de la misma manera que en la demostración del Teorema 4, consideramos las funciones $q_0(p, \beta, \nu_0, \nu)$, $q(p, \nu)$ y $\Gamma(p, \beta, \nu_0, \nu)$, dado por (E.23), (E.24) y (E.25), y defina la función implícita

$$\begin{aligned} \Gamma^C(p,\beta) &= \Gamma\left(p, \beta, \frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right) \\ &= \left[q_0\left(p, \beta, \frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right) + nq\left(p, \frac{1}{K}\right)\right] - [G(p) + D] = 0, \end{aligned} \tag{F.1}$$

donde (similar a la demostración del teorema 4)

$$\frac{\partial \Gamma^C}{\partial p} = \frac{1 + \left(\frac{1}{K} + a_0\right)\frac{n}{\frac{1}{K} + a}}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + K > 0, \tag{F.2}$$

y

$$\frac{\partial \Gamma^C}{\partial \beta} = \frac{\frac{1}{K}\left[(p - b_0) + n\left(\frac{1}{K} + a_0\right) q\left(p, \frac{1}{K}\right)\right]}{\left[(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0\right]^2} > 0. \tag{F.3}$$

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita,

$$p^{C'}(\beta) = \frac{dp^C}{d\beta} = -\frac{\frac{\partial \Gamma^C}{\partial \beta}}{\frac{\partial \Gamma^C}{\partial p}} < 0, \tag{F.4}$$

lo que demuestra que $p^C(\beta)$ es estrictamente decreciente con respecto a $\beta \in (0,1]$.■

6.7 Demostración del Teorema 6

Teorema 6. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** el equilibrio exterior* $(p^{CP}(\beta), q_0^{CP}(\beta), q^{CP}(\beta))$ *y la función* $\pi^{CP}(\beta)$ *son continuamente diferenciales con respecto a* $\beta \in (0,1]$ *y* $p^{C}(\beta)$ *son constante con respecto a* $\beta \in (0,1]$.

Demostración. Del Teorema 1 tenemos que el equilibrio exterior $(p^{CP}(\beta), q_0^{CP}(\beta), q^{CP}(\beta))$, correspondiente a los coeficientes de influencia $(\nu_0^{CP}, \nu^{CP}) = (0,0)$, es continuamente diferenciable con respecto a $\beta \in (0,1]$.

Otra vez, de la misma manera que en la demostración del Teorema 4, consideramos las funciones $q_0(p,\beta,\nu_0,\nu)$, $q(p,\nu)$ y $\Gamma(p,\beta,\nu_0,\nu)$, dado por (E.23), (E.24) y (E.25), y defina la función implícita como

$$\begin{aligned}\Gamma^{CP}(p,\beta) &= \Gamma\left(p,\beta,0,0\right)\\ &= \left[q_0\left(p,\beta,0,0\right) + nq\left(p,0\right)\right] - \left[G(p) + D\right] = 0,\end{aligned} \tag{G.1}$$

donde (similar a la prueba del teorema 4)

$$\frac{\partial \Gamma^{CP}}{\partial p} = \frac{1 + a_0\dfrac{n}{a}}{a_0} + K > 0, \tag{G.2}$$

y

$$\frac{\partial \Gamma^{CP}}{\partial \beta} = 0. \tag{G.3}$$

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita,

$$p^{CP\prime}(\beta) = \frac{dp^{CP}}{d\beta} = -\frac{\dfrac{\partial \Gamma^{CP}}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial \Gamma^{CP}}{\partial p}} = 0, \tag{G.4}$$

lo que demuestra que $p^{CP} = p^{CP}(\beta)$ es constante con respecto a $\beta \in (0,1]$.

Sustituyendo los valores p^{CP} y $\nu_0^{CP} = \nu^{CP} = 0$, en las expresiones de $q_0(p,\beta,\nu_0,\nu)$ y $q(p,\nu)$ dado por (E.24) y (E.25), obtenemos

$$q_0^{CP}(\beta) = q_0(p^{CP},\beta,0,0) = \frac{p^{CP} - b_0}{a_0}, \tag{G.5}$$

$$q^{CP}(\beta) = q(p^{CP},0) = \frac{p^{CP} - b}{a}, \tag{G.6}$$

luego, $q_0^{CP} = q_0^{CP}(\beta)$ y $q^{CP} = q^{CP}(\beta)$ también son constantes con respecto a $\beta \in (0,1]$, lo que implica que eso $\pi^{CP} = \pi^{CP}(\beta) = \pi(p^{CP}, q^{CP})$ es constante con respecto a $\beta \in (0,1]$, también.■

6.8 Demostración del Teorema 7

Teorema 7. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** la siguiente desigualdad se cumple:*

$$\lim_{(\beta\downarrow 0)} p^C(\beta) > \lim_{(\beta\downarrow 0)} p^*(\beta) > p^{CP}, \tag{48}$$

Demostración. De las ecuaciones (E.23), (E.24), (E.25) y el supuesto **A4**, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(p,\beta,\nu_0,\nu) &= \frac{(p-b_0) + \beta n \nu_0 \dfrac{p-b}{\nu+a}}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + n\frac{p-b}{\nu+a} + Kp - T - D \\
&= \frac{(p-b_0) + n(\nu_0+a_0)\dfrac{p-b}{\nu+a}}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + Kp - T - D \\
&= p\left[\frac{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n}{\nu+a}}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + K\right] \\
&\quad - \left[\frac{b_0 + (\nu_0+a_0)\dfrac{nb}{\nu+a}}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + T + D\right] = 0,
\end{aligned} \tag{H.1}$$

de donde podemos aislar p para obtener

$$p(\beta,\nu_0,\nu) = \frac{\dfrac{b_0 + (\nu_0+a_0)\dfrac{nb}{\nu+a}}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + T + D}{\dfrac{1 + (\nu_0+a_0)\dfrac{n}{\nu+a}}{(1-\beta)\nu_0 + a_0} + K}. \tag{H.2}$$

Ahora vamos a demostrar que

$$\lim_{\beta\downarrow 0} p^C(\beta) > \lim_{\beta\downarrow 0} p^*(\beta) > p^{CP}, \tag{??}$$

donde

$$p^*(\beta) = p(\beta, \nu_0^*(\beta), \nu^*(\beta)) = \frac{\dfrac{b_0 + (\nu_0^* + a_0)\dfrac{nb}{\nu^* + a}}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + T + D}{\dfrac{1 + (\nu_0^* + a_0)\dfrac{n}{\nu^* + a}}{(1-\beta)\nu_0^* + a_0} + K}, \tag{H.3}$$

$$p^C(\beta) = p\left(\beta, \frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right) = \frac{\dfrac{b_0 + \left(\frac{1}{K} + a_0\right)\dfrac{nb}{\frac{1}{K} + a}}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + T + D}{\dfrac{1 + \left(\frac{1}{K} + a_0\right)\dfrac{n}{\frac{1}{K} + a}}{(1-\beta)\frac{1}{K} + a_0} + K}, \tag{H.4}$$

$$p^{CP} \equiv p(\beta, 0, 0) = \frac{\dfrac{b_0 + a_0\dfrac{nb}{a}}{a_0} + T + D}{\dfrac{1 + a_0\dfrac{n}{a}}{a_0} + K}. \tag{H.5}$$

Primero, vamos a demostrar que

$$\lim_{\beta \downarrow 0} p^C(\beta) > \lim_{\beta \downarrow 0} p^*(\beta). \tag{H.6}$$

Para hacer eso, vamos a presentar la notación

$$\tilde{\nu}_0^* = \lim_{\beta \downarrow 0} \nu_0^*(\beta), \tag{H.7}$$

$$\tilde{\nu}^* = \lim_{\beta \downarrow 0} \nu^*(\beta). \tag{H.8}$$

De las ecuaciones (36) y (37) del criterio de consistencia para nuestro caso particular, podemos ver que $\nu_0^*(\beta), \nu^*(\beta) < \dfrac{1}{K}$ para toda $\beta \in (0,1]$, que, junto con el comportamiento estrictamente decreciente de $\nu_0^*(\beta)$ y $\nu^*(\beta)$ con respecto a $\beta \in (0,1]$, implica que los valores $\tilde{\nu}_0^*$ y $\tilde{\nu}^*$ existen.

Entonces, podemos calcular la diferencia

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\downarrow 0} p^C(\beta) - \lim_{\beta\downarrow 0} p^*(\beta) \\
&= \frac{\dfrac{b_0 + \left(\frac{1}{K}+a_0\right)\dfrac{nb}{\frac{1}{K}+a}}{\frac{1}{K}+a_0} + T + D}{\dfrac{1 + \left(\frac{1}{K}+a_0\right)\dfrac{n}{\frac{1}{K}+a}}{\frac{1}{K}+a_0} + K} - \frac{\dfrac{b_0 + (\tilde{\nu}_0^* + a_0)\dfrac{nb}{\tilde{\nu}^*+a}}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + T + D}{\dfrac{1 + (\tilde{\nu}_0^* + a_0)\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + K} \\
&= \frac{\dfrac{b_0}{\frac{1}{K}+a_0} + \dfrac{nb}{\frac{1}{K}+a} + T + D}{\dfrac{1}{\frac{1}{K}+a_0} + \dfrac{n}{\frac{1}{K}+a} + K} - \frac{\dfrac{b_0}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{nb}{\tilde{\nu}^*+a} + T + D}{\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a} + K} = \frac{S_1}{S_2},
\end{aligned}
\tag{H.9}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
S_1 = &\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \frac{n}{\tilde{\nu}^*+a} + K\right)\left(\frac{b_0}{\frac{1}{K}+a_0} + \frac{nb}{\frac{1}{K}+a} + T + D\right) \\
&- \left(\frac{1}{\frac{1}{K}+a_0} + \frac{n}{\frac{1}{K}+a} + K\right)\left(\frac{b_0}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \frac{nb}{\tilde{\nu}^*+a} + T + D\right),
\end{aligned}
\tag{H.10}
$$

$$
S_2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{K}+a_0} + \frac{n}{\frac{1}{K}+a} + K\right)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \frac{n}{\tilde{\nu}^*+a} + K\right) > 0. \tag{H.11}
$$

Ahora, analizamos el signo de S_1:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{n}{\tilde{\nu}^* + a}\right)\left(\frac{b_0}{\frac{1}{K} + a_0} + \frac{nb}{\frac{1}{K} + a}\right)\\
&\quad + K\left(\frac{b_0}{\frac{1}{K} + a_0} + \frac{nb}{\frac{1}{K} + a}\right) + \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{n}{\tilde{\nu}^* + a}\right)(T+D)\\
&\quad + K(T+D) - \left(\frac{1}{\frac{1}{K} + a_0} + \frac{n}{\frac{1}{K} + a}\right)\left(\frac{b_0}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{nb}{\tilde{\nu}^* + a}\right)\\
&\quad - K\left(\frac{b_0}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{nb}{\tilde{\nu}^* + a}\right) - \left(\frac{1}{\frac{1}{K} + a_0} + \frac{n}{\frac{1}{K} + a}\right)(T+D)\\
&\quad - K(T+D)\\
&= -nb\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a}\frac{1}{\frac{1}{K} + a_0} - \frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0}\frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right)\\
&\quad + nb_0\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a}\frac{1}{\frac{1}{K} + a_0} - \frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0}\frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right)\\
&\quad - K\left[nb\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right) + b_0\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a_0}\right)\right]\\
&\quad + (T+D)\left[n\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right) + \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a_0}\right)\right]\\
&= n(G(b) + D)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right)\\
&\quad - n(b - b_0)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a}\frac{1}{\frac{1}{K} + a_0} - \frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0}\frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right)\\
&\quad + (G(b_0) + D)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a_0}\right)
\end{aligned}
\tag{H.12}
$$

Desde los límites $\tilde{\nu}_0^* = \lim_{\beta \downarrow 0} \nu_0^*(\beta)$ y $\tilde{\nu}^* = \lim_{\beta \downarrow 0} \nu^*(\beta)$ existe, es fácil ver que las ecuaciones (36) y (37) deben mantener los valores $\nu_0 = \tilde{\nu}_0^*$ y $\nu = \tilde{\nu}^*$, lo que implica que

$$\tilde{\nu}_0^*, \tilde{\nu}^* < \frac{1}{K}, \tag{H.13}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} > \frac{1}{\frac{1}{K} + a_0}, \tag{H.14}$$

$$\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a} > \frac{1}{\frac{1}{K} + a}. \tag{H.15}$$

Además, por el supuesto **A5** y **A6**, tenemos que

$$G(b) > \frac{b - b_0}{a_0} \geq 0 \tag{H.16}$$

que, junto con el hecho de que $G(p)$ es estrictamente decreciente con respecto a p, implicando que

$$G(b_0) + D \geq G(b) + D > 0, \tag{H.17}$$

y

$$G(b) + D - \frac{b - b_0}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} > 0. \tag{H.18}$$

Luego, por las desigualdades (H.14), (H.15), (H.17), (H.18), y el supuesto **A5**, obtenemos

$$\begin{aligned} S_1 \geq\ & n(G(b) + D)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right) \\ & - n(b - b_0)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a}\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} - \frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0}\frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right) \\ & + (G(b_0) + D)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a_0}\right) \\ =\ & n\left(G(b) + D - \frac{b - b_0}{\tilde{\nu}_0^* + a_0}\right)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^* + a} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a}\right) \\ & + (G(b_0) + D)\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} - \frac{1}{\frac{1}{K} + a_0}\right) > 0. \end{aligned} \tag{H.19}$$

Por lo tanto, aplicando las relaciones (H.11) y (H.19) a (H.9), obtenemos

$$\lim_{\beta \downarrow 0} p^C(\beta) - \lim_{\beta \downarrow 0} p^*(\beta) = \frac{S_1}{S_2} > 0. \tag{H.20}$$

En otras palabras, $\lim_{\beta \downarrow 0} p^C(\beta) > \lim_{\beta \downarrow 0} p^*(\beta)$.

Ahora, demostramos que

$$\lim_{\beta \downarrow 0} p^*(\beta) > p^{CP}. \tag{H.21}$$

Para hacer eso, calculamos la diferencia

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta\downarrow 0} p^*(\beta) - p^{CP} \\
&= \frac{\dfrac{b_0 + (\tilde{\nu}_0^* + a_0)\dfrac{nb}{\tilde{\nu}^* + a}}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + T + D}{\dfrac{1 + (\tilde{\nu}_0^* + a_0)\dfrac{n}{\tilde{\nu}^* + a}}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + K} - \frac{\dfrac{b_0 + a_0\dfrac{nb}{a}}{a_0} + T + D}{\dfrac{1 + a_0\dfrac{n}{a}}{a_0} + K} \\
&= \frac{\dfrac{b_0}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \dfrac{nb}{\tilde{\nu}^* + a} + T + D}{\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \dfrac{n}{\tilde{\nu}^* + a} + K} - \frac{\dfrac{b_0}{a_0} + \dfrac{nb}{a} + T + D}{\dfrac{1}{a_0} + \dfrac{n}{a} + K} = \frac{R_1}{R_2},
\end{aligned} \tag{H.22}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_1 = &\left(\frac{1}{a_0} + \frac{n}{a} + K\right)\left(\frac{b_0}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{nb}{\tilde{\nu}^* + a} + T + D\right) \\
&- \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{n}{\tilde{\nu}^* + a} + K\right)\left(\frac{b_0}{a_0} + \frac{nb}{a} + T + D\right),
\end{aligned} \tag{H.23}$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^* + a_0} + \frac{n}{\tilde{\nu}^* + a} + K\right)\left(\frac{1}{a_0} + \frac{n}{a} + K\right) > 0. \tag{H.24}$$

Ahora, analizamos el signo de R_1:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \left(\frac{1}{a_0}+\frac{n}{a}\right)\left(\frac{b_0}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}+\frac{nb}{\tilde{\nu}^*+a}\right)+K\left(\frac{b_0}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}+\frac{nb}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{a_0}+\frac{n}{a}\right)(T+D)+K(T+D)\\
&\quad-\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}+\frac{n}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\left(\frac{b_0}{a_0}+\frac{nb}{a}\right)-K\left(\frac{b_0}{a_0}+\frac{nb}{a}\right)\\
&\quad-\left(\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}+\frac{n}{\tilde{\nu}^*+a}\right)(T+D)-K(T+D)\\
&= -nb\left(\frac{1}{a}\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}-\frac{1}{a_0}\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)+nb_0\left(\frac{1}{a}\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}-\frac{1}{a_0}\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\\
&\quad-K\left[nb\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)+b_0\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}\right)\right]\\
&\quad+(T+D)\left[n\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)+\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}\right)\right]\\
&= n(G(b)+D)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\\
&\quad-n(b-b_0)\left(\frac{1}{a}\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}-\frac{1}{a_0}\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\\
&\quad+(G(b_0)+D)\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}\right)
\end{aligned} \tag{H.25}$$

De nuevo, desde las ecuaciones (36) y (37), es fácil ver que

$$\tilde{\nu}_0^*, \tilde{\nu}^* > 0, \tag{H.26}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{a_0} > \frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}, \tag{H.27}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}, \tag{H.28}$$

y, de la desigualdad (H.16), tenemos que

$$G(b)+D-\frac{b-b_0}{a_0} > 0. \tag{H.29}$$

Luego, por las desigualdades (H.17), (H.27), (H.28), (H.29), y el supuesto **A5**, obtenemos

$$\begin{aligned}
R_1 &\geq n(G(b)+D)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)-n(b-b_0)\left(\frac{1}{a}\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_0}\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\\
&\quad+(G(b_0)+D)\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}\right)\\
&=n\left(G(b)+D-\frac{b-b_0}{a_0}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\tilde{\nu}^*+a}\right)\\
&\quad+(G(b_0)+D)\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0}\right)>0.
\end{aligned} \tag{H.30}$$

Por lo tanto, aplicando las relaciones (H.24) y (H.30) a (H.22), obtenemos

$$\lim_{\beta\downarrow 0} p^*(\beta)-p^{CP}=\frac{R_1}{R_2}>0. \tag{H.31}$$

En otras palabras, $\lim\limits_{\beta\downarrow 0} p^*(\beta)>p^{CP}$.■

6.9 Demostración del Teorema 8

Teorema 8. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** para cualquier* $\beta\in(0,1]$ *si* $\pi^C(\beta)\leq\pi^*(\beta)$*, entonces se satisface que* $p^C(\beta)>p^*(\beta)$

Demostración. Sea $\beta\in(0,1]$ tal que $\pi^C(\beta)\geq\pi^*(\beta)$.

Primero, sustituimos el valor de $q^*=q^*(\beta)=q(p^*(\beta),\nu^*(\beta))$, dado por (E.24), en la expresión de $\pi^*(\beta)=\pi(p^*(\beta),q^*(\beta))$, dada por (32):

$$\begin{aligned}
\pi^*(\beta)&=p^*q^*-\frac{1}{2}aq^{*2}-bq^*=\left(p^*-b-\frac{1}{2}aq^*\right)q^*\\
&=\left[(\nu^*+a)\frac{p^*-b}{\nu^*+a}-\frac{1}{2}a\frac{p^*-b}{\nu^*+a}\right]\frac{p^*-b}{\nu^*+a}\\
&=\left(\nu^*+\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{p^*-b}{\nu^*+a}\right)^2.
\end{aligned} \tag{I.1}$$

Del mismo modo, podemos conseguir

$$\pi^C(\beta) = p^C q^C - \frac{1}{2} a q^{C2} - b q^C = \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{p^C - b}{\frac{1}{K} + a}\right)^2. \tag{I.2}$$

Ahora, supongamos que $p^*(\beta) \geq p^C(\beta)$, luego,

$$\begin{aligned}
\pi^*(\beta) - \pi^C(\beta) &= \left(\nu^* + \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{p^* - b}{\nu^* + a}\right)^2 - \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{p^C - b}{\frac{1}{K} + a}\right)^2 \\
&\geq \left(\nu^* + \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{p^C - b}{\nu^* + a}\right)^2 - \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{p^C - b}{\frac{1}{K} + a}\right)^2 \\
&= \left[\frac{\nu^* + \frac{1}{2}a}{(\nu^* + a)^2} - \frac{\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a}{\left(\frac{1}{K} + a\right)^2}\right](p^C - b)^2 \\
&= \frac{\left[\left(\frac{1}{K} + a\right)^2\left(\nu^* + \frac{1}{2}a\right) - (\nu^* + a)^2\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a\right)\right]}{(\nu^* + a)^2\left(\frac{1}{K} + a\right)^2}(p^C - b)^2 \\
&= \frac{\left(\frac{1}{K} - \nu^*\right)\left(\frac{1}{K}\nu^* + \frac{1}{2}\nu^* a + \frac{1}{2}\frac{1}{K}a\right)}{(\nu^* + a)^2\left(\frac{1}{K} + a\right)^2}(p^C - b)^2 > 0,
\end{aligned} \tag{I.3}$$

lo que implica que $\pi^C(\beta) < \pi^*(\beta)$, contradiciendo la hipótesis $\pi^C(\beta) \geq \pi^*(\beta)$.

Por lo tanto, el supuesto $p^*(\beta) \geq p^C(\beta)$ es falso, es decir, $p^*(\beta) < p^C(\beta)$, demostrando el teorema.■

6.10 Demostración del Teorema 9

Teorema 9. *Bajo las suposiciones **A4**, **A5** y **A6** son verdaderas. Si la relación*

$$\frac{(n-1)a}{n + aK} \geq a_0, \tag{49}$$

es valida, entonces existe valores $\overline{\beta} \in (0,1)$ *tal que* $\pi^C(\overline{\beta}) = \pi^*(\overline{\beta})$ *y* $p^C(\overline{\beta}) > p^*(\overline{\beta})$

Demostración. Vemos que la desigualdad (49) implica que

$$a > a_0, \tag{J.1}$$

como consideramos $n \geq 2$.

Sea $\tilde{\nu}_0^* = \lim_{\beta\downarrow 0} \nu_0^*(\beta)$ y $\tilde{\nu}^* = \lim_{\beta\downarrow 0} \nu^*(\beta)$ los mismos límites introducidos en (H.7) y (H.8) de la demostración del teorema 7.

De las igualdades (36) y (37), tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}_0^* - \tilde{\nu}^* &= \frac{1}{\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K} - \frac{1}{\dfrac{1}{(1-\beta)\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{\tilde{\nu}_0^*+a_0}{(1-\beta)\tilde{\nu}_0^*+a_0}\dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K} \\
&> \frac{1}{\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K} - \frac{1}{\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K} \\
&= \frac{\left(\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right) - \left(\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)}{\left(\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)\left(\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} - \dfrac{1}{\tilde{\nu}^*+a}}{\left(\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)\left(\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)} \\
&= \frac{-(\tilde{\nu}_0^*-\tilde{\nu}^*)+(a-a_0)}{(\tilde{\nu}_0^*+a_0)(\tilde{\nu}^*+a)\left(\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)\left(\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)} \\
&> \frac{-(\tilde{\nu}_0^*-\tilde{\nu}^*)}{(\tilde{\nu}_0^*+a_0)(\tilde{\nu}^*+a)\left(\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)\left(\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)}.
\end{aligned} \tag{J.2}$$

Luego

$$\tilde{\nu}_0^* - \tilde{\nu}^* > \frac{-(\tilde{\nu}_0^*-\tilde{\nu}^*)}{(\tilde{\nu}_0^*+a_0)(\tilde{\nu}^*+a)\left(\dfrac{n}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)\left(\dfrac{1}{\tilde{\nu}_0^*+a_0} + \dfrac{n-1}{\tilde{\nu}^*+a}+K\right)}. \tag{J.3}$$

Dado que el denominador en el lado derecho de la desigualdad (J.3) es estrictamente positivo, entonces, la desigualdad (J.3) solo puede ser verdadera si

$$\tilde{\nu}_0^* > \tilde{\nu}^*. \tag{J.4}$$

Ahora, sustituyendo el valor de $p^*(\beta)$, dado por (H.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{p^*-b}{\nu^*+a} &= \frac{\left[\dfrac{\dfrac{b_0+(\nu_0^*+a_0)\dfrac{nb}{\nu^*+a}}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}+T+D}{\dfrac{1+(\nu_0^*+a_0)\dfrac{n}{\nu^*+a}}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}+K}\right]-b}{\nu^*+a} \\
&= \frac{\left[\dfrac{b_0+(\nu_0^*+a_0)\dfrac{nb}{\nu^*+a}}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}+T+D\right]-b\left[\dfrac{1+(\nu_0^*+a_0)\dfrac{n}{\nu^*+a}}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}+K\right]}{(\nu^*+a)\left[\dfrac{1+(\nu_0^*+a_0)\dfrac{n}{\nu^*+a}}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}+K\right]} \\
&= \frac{G(b)+D-\dfrac{b-b_0}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}}{(\nu^*+a)\left[\dfrac{1+(\nu_0^*+a_0)\dfrac{n}{\nu^*+a}}{(1-\beta)\nu_0^*+a_0}+K\right]} \\
&= \frac{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b)+D)-(b-b_0)}{n(\nu_0^*+a_0)+(\nu^*+a)+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](\nu^*+a)K} \\
&= \frac{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b)+D)-(b-b_0)}{n(\nu_0^*+a_0)+\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K\}(\nu^*+a)}.
\end{aligned} \tag{J.5}$$

Sustituyendo la relación (J.5), en (I.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\pi^*(\beta) = \\
&\quad \left(\nu^*+\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{[(1-\beta)\nu_0^*+a_0](G(b)+D)-(b-b_0)}{n(\nu_0^*+a_0)+\{1+[(1-\beta)\nu_0^*+a_0]K\}(\nu^*+a)}\right)^2.
\end{aligned} \tag{J.6}$$

Del mismo modo, podemos encontrar que

$$\pi^C(\beta) = \left(\frac{1}{K}+\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0](G(b)+D)-(b-b_0)}{n(\frac{1}{K}+a_0)+\{1+[(1-\beta)\frac{1}{K}+a_0]K\}(\frac{1}{K}+a)}\right)^2. \tag{J.7}$$

Para demostrar la afirmación del teorema, primero, vamos a mostrar que

$$\pi^*(1) > \pi^C(1). \tag{J.8}$$

Aquí, presentamos la notación

$$\overline{\nu}_0^* = \nu_0^*(1), \tag{J.9}$$
$$\overline{\nu}^* = \nu^*(1). \tag{J.10}$$

Por las relaciones (J.6) y (J.7), demostrando la desigualdad (J.8) es equivalente a demostrar la siguiente relación:

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\nu}^*+\frac{1}{2}a\right)\left[\frac{a_0(G(b)+D)-(b-b_0)}{n(\overline{\nu}_0^*+a_0)+(1+a_0K)(\overline{\nu}^*+a)}\right]^2\\ &> \left(\frac{1}{K}+\frac{1}{2}a\right)\left[\frac{a_0(G(b)+D)-(b-b_0)}{n(\frac{1}{K}+a_0)+(1+a_0K)(\frac{1}{K}+a)}\right]^2,\end{aligned} \tag{J.11}$$

que a su vez es equivalente a demostrar que

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\overline{\nu}^*+\frac{1}{2}a\right)}{[n(\overline{\nu}_0^*+a_0)+(1+a_0K)(\overline{\nu}^*+a)]^2}\\ &> \frac{\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{2}a\right)}{\left[n(\frac{1}{K}+a_0)+(1+a_0K)(\frac{1}{K}+a)\right]^2}.\end{aligned} \tag{J.12}$$

A continuación, se define la función

$$\begin{aligned}\Psi^1(t) &= \frac{\left[\overline{\nu}^*+t\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)+\frac{1}{2}a\right]}{\left\{n[\overline{\nu}_0^*+t\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}_0^*\right)+a_0]+(1+a_0K)[\overline{\nu}^*+t\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)+a]\right\}^2}\\ &= \frac{P_1(t)}{P_2(t)^2},\end{aligned} \tag{J.13}$$

donde

$$P_1(t) = \overline{\nu}^*+t\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)+\frac{1}{2}a > 0, \tag{J.14}$$

$$
\begin{aligned}
P_2(t) = n &\left[\overline{\nu}_0^* + t\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right) + a_0\right] \\
&+ (1 + a_0K)\left[\overline{\nu}^* + t\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) + a\right] > 0,
\end{aligned}
\tag{J.15}
$$

así que demostrar (J.12) es equivalente a demostrar

$$
\Psi^1(0) > \Psi^1(1). \tag{J.16}
$$

Podemos ver fácilmente que $P_1(t)$, $P_2(t)$ y $\Psi^1(t)$, son diferenciables para cada $t \in [0, 1]$, y $\Psi^{1'}(t)$ está dado por

$$
\Psi^{1'}(t) = \frac{P_1'(t)P_2(t)^2 - 2P_1(t)P_2(t)P_2'(t)}{P_2(t)^4} = \frac{P_1'(t)P_2(t) - 2P_1(t)P_2'(t)}{P_2(t)^3}, \tag{J.17}
$$

donde

$$
P_1'(t) = \frac{1}{K} - \overline{\nu}^* > 0, \tag{J.18}
$$

$$
P_2(t) = n\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right) + (1 + a_0K)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) > 0. \tag{J.19}
$$

Ahora, vamos a analizar el signo de $P_1'(t)P_2(t)^2 - 2P_1(t)P_2(t)P_2'(t)$:

$$
\begin{aligned}
P_1'(t)P_2(t) - 2P_1(t)P_2'(t) = &\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right)\left\{n\left[\overline{\nu}_0^* + t\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right) + a_0\right]\right. \\
&\left.+(1 + a_0K)\left[\overline{\nu}^* + t\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) + a\right]\right\} \\
&- 2\left[\overline{\nu}^* + t\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) + \frac{1}{2}a\right]\left[n\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right)\right. \\
&\left.+(1 + a_0K)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right)\right] \\
= n &\left[(\overline{\nu}_0^* + a_0)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) - (2\overline{\nu}^* + a)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right)\right] \\
&- \overline{\nu}^*(1 + a_0K)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) \\
&- t\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right)\left[n\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right) + (1 + a_0K)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right)\right].
\end{aligned}
\tag{J.20}
$$

Usando el valor de $\overline{\nu}_0^*$ dado por (36) encontramos la identidad

$$
\overline{\nu}_0^* = \frac{1}{\dfrac{n}{\overline{\nu}^* + a} + K} = \frac{\overline{\nu}^* + a}{n + (\overline{\nu}^* + a)K}, \tag{J.21}
$$

por lo tanto, podemos definir una nueva función $\psi^1(\overline{\nu}^*)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& n\left[(\overline{\nu}_0^*+a_0)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)-(2\overline{\nu}^*+a)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}_0^*\right)\right] \\
&\quad -\overline{\nu}^*(1+a_0K)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right) \\
&= n\left\{\left[\frac{\overline{\nu}^*+a}{n+(\overline{\nu}^*+a)K}+a_0\right]\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)\right. \\
&\quad \left.-(2\overline{\nu}^*+a)\left[\frac{1}{K}-\frac{\overline{\nu}^*+a}{n+(\overline{\nu}^*+a)K}\right]\right\}-\overline{\nu}^*(1+a_0K)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right) \\
&= \frac{n}{n+(\overline{\nu}^*+a)K}\left(\{(\overline{\nu}^*+a)+a_0[n+(\overline{\nu}^*+a)K]\}\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)\right. \\
&\quad \left.-(2\overline{\nu}^*+a)\left\{\frac{1}{K}[n+(\overline{\nu}^*+a)K]-(\overline{\nu}^*+a)\right\}\right) \\
&\quad -\overline{\nu}^*(1+a_0K)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)=\psi^1(\overline{\nu}^*).
\end{aligned} \tag{J.22}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& [n+(\overline{\nu}^*+a)K]\psi^1(\overline{\nu}^*) \\
&= n\left(\{(\overline{\nu}^*+a)+a_0[n+(\overline{\nu}^*+a)K]\}\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)\right. \\
&\quad \left.-(2\overline{\nu}^*+a)\left\{\frac{1}{K}[n+(\overline{\nu}^*+a)K]-(\overline{\nu}^*+a)\right\}\right) \\
&\quad -\overline{\nu}^*(1+a_0K)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)[n+(\overline{\nu}^*+a)K]=n\psi_1^1(\overline{\nu}^*)+\psi_2^1(\overline{\nu}^*),
\end{aligned} \tag{J.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
\psi_1^1(\overline{\nu}^*) &= \{(\overline{\nu}^*+a)+a_0[n+(\overline{\nu}^*+a)K]\}\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right) \\
&\quad -(2\overline{\nu}^*+a)\left\{\frac{1}{K}[n+(\overline{\nu}^*+a)K]-(\overline{\nu}^*+a)\right\}
\end{aligned} \tag{J.24}$$

$$\psi_2^1(\overline{\nu}^*) = -\overline{\nu}^*(1+a_0K)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)[n+(\overline{\nu}^*+a)K]<0. \tag{J.25}$$

Podemos ver fácilmente que $\psi_1^1(\overline{\nu}^*)$ es un polinomio cuadrático de $\overline{\nu}^*$, cuyas derivadas son

$$\begin{aligned}
\psi_1^{1\prime}(\overline{\nu}^*) &= (1+a_0K)\left(\frac{1}{K}-\overline{\nu}^*\right)-\{(\overline{\nu}^*+a)+a_0[n+(\overline{\nu}^*+a)K]\} \\
&\quad -2\left\{\frac{1}{K}[n+(\overline{\nu}^*+a)K]-(\overline{\nu}^*+a)\right\}
\end{aligned} \tag{J.26}$$

$$\psi_1^{1''}(\overline{\nu}^*) = -2(1 + a_0K). \tag{J.27}$$

Haciendo uso de la serie Taylor, obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi_1^1(\overline{\nu}^*) &= \psi_1^1(0) + \psi_1^{1'}(0)\overline{\nu}^* + \frac{1}{2}\psi_1^{1''}(0)\overline{\nu}^{*2} \\
&= \frac{1}{K}[a_0(n + aK) - (n-1)a] \\
&\quad - \left[(2n-1)\frac{1}{K} + (n-1)a_0 + a(1 + a_0K)\right]\overline{\nu}^* \\
&\quad - (1 + a_0K)\overline{\nu}^{*2}.
\end{aligned} \tag{J.28}$$

Ahora, del supuesto (49), tenemos que

$$a_0(n + aK) - (n-1)a \leq 0. \tag{J.29}$$

Luego, de la desigualdad (J.29), la igualdad (J.28) implica que

$$\psi_1^1(\overline{\nu}^*) < 0. \tag{J.30}$$

Aplicando las desigualdades (J.25) y (J.30), a (J.23), obtenemos la relación

$$[n + (\overline{\nu}^* + a)K]\psi^1(\overline{\nu}^*) = n\psi_1^1(\overline{\nu}^*) + \psi_2^1(\overline{\nu}^*) < 0. \tag{J.31}$$

Además, desde $[n + (\overline{\nu}^* + a)K] > 0$, debe mantener que

$$\psi^1(\overline{\nu}^*) < 0, \tag{J.32}$$

por lo tanto, aplicando la desigualdad (J.32) a la igualdad (J.22), demuestra que

$$\begin{aligned}
n &\left[(\overline{\nu}_0^* + a_0)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) - (2\overline{\nu}^* + a)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}_0^*\right)\right] \\
&- \overline{\nu}^*(1 + a_0K)\left(\frac{1}{K} - \overline{\nu}^*\right) < 0.
\end{aligned} \tag{J.33}$$

Por lo tanto, de las relaciones(J.20) y (J.33) vemos que

$$P_1'(t)P_2(t) - 2P_1(t)P_2'(t) < 0, \tag{J.34}$$

que, junto con (J.17) y (J.19), implica que

$$\Psi^{1\prime}(t) < 0, \quad \forall t \in [0,1], \tag{J.35}$$

entonces la función $\Psi^1(t)$ es estrictamente decreciente para todo $t \in [0,1]$, entonces, la desigualdad (J.16) es válida, que finalmente demuestra (J.8).

Segundo, vamos a demostrar que

$$\lim_{\beta\downarrow 0} \pi^*(\beta) < \lim_{\beta\downarrow 0} \pi^C(\beta). \tag{J.36}$$

Nuevamente, haciendo uso de las ecuaciones (J.6) y (J.7), vemos que la demostración de (J.36) es equivalente a demostrar que

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\nu}^* + \frac{1}{2}a\right)\left\{\frac{(\tilde{\nu}_0^* + a_0)(G(b)+D) - (b-b_0)}{n(\tilde{\nu}_0^* + a_0) + [1 + (\tilde{\nu}_0^* + a_0)K](\tilde{\nu}^* + a)}\right\}^2 \\ &< \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2}a\right)\left\{\frac{(\frac{1}{K} + a_0)(G(b)+D) - (b-b_0)}{n(\frac{1}{K} + a_0) + [1 + (\frac{1}{K} + a_0)K](\frac{1}{K} + a)}\right\}^2.\end{aligned} \tag{J.37}$$

Ahora, considere la función

$$\Psi^2(\nu_0,\nu) = \left(\nu + \frac{1}{2}a\right)\left\{\frac{(\nu_0 + a_0)(G(b)+D) - (b-b_0)}{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)}\right\}^2, \tag{J.38}$$

donde $\nu_0, \nu \in [0, \frac{1}{K}]$, por lo que demostrar (J.37) es equivalente a demostrar

$$\Psi^2(\tilde{\nu}_0^*, \tilde{\nu}^*) < \Psi^2\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right). \tag{J.39}$$

Es fácil ver que $\Psi^2(\nu_0,\nu)$ es diferenciable para todo $\nu_0, \nu \in [0, \frac{1}{K}]$.

A continuación, se defina la función diferenciable

$$W_0(\nu_0,\nu) = \frac{(\nu_0 + a_0)(G(b)+D) - (b-b_0)}{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)}, \tag{J.40}$$

que, debido a la desigualdad (H.16), satisface

$$W_0(\nu_0,\nu) > 0. \tag{J.41}$$

Usando la ecuación (J.40), podemos reescribir la expresión de $\Psi^2(\nu_0, \nu)$, dada por (J.38), de la siguiente manera:

$$\Psi^2(\nu_0, \nu) = \left(\nu + \frac{1}{2}a\right)[W_0(\nu_0, \nu)]^2. \tag{J.42}$$

Entonces, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \Psi^2}{\partial \nu_0} = 2\left(\nu + \frac{1}{2}a\right) W_0(\nu_0, \nu)\frac{\partial W_0}{\partial \nu_0}, \tag{J.43}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0}{\partial \nu_0} &= \frac{(G(b) + D)\{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)\}}{\{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)\}^2} \\ &\quad - \frac{[(\nu_0 + a_0)(G(b) + D) - (b - b_0)][n + (\nu + a)K]}{\{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)\}^2} \\ &= \frac{(G(b) + D)(\nu + a) + (b - b_0)[n + (\nu + a)K]}{\{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)\}^2} > 0. \end{aligned} \tag{J.44}$$

Aplicando desigualdades (J.41) y (J.44) a la ecuación (J.43) nos da la relación

$$\frac{\partial \Psi^2}{\partial \nu_0} > 0, \tag{J.45}$$

lo que demuestra que $\Psi^2(\nu_0, \nu)$ es estrictamente creciente con respecto a $\nu_0 \in [0, \frac{1}{K}]$ para toda $\nu \in [0, \frac{1}{K}]$.

De la misma manera, definimos la función diferenciable

$$W(\nu_0, \nu) = \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}a\right)}{\{n(\nu_0 + a_0) + [1 + (\nu_0 + a_0)K](\nu + a)\}^2} > 0, \tag{J.46}$$

Usando de la ecuación (J.46), podemos reescribir la expresión $\Psi^2(\nu_0, \nu)$, dada por (J.38), de la siguiente manera:

$$\Psi^2(\nu_0, \nu) = [(\nu_0 + a_0)(G(b) + D) - (b - b_0)]^2 W(\nu_0, \nu). \tag{J.47}$$

De nuevo, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \Psi^2}{\partial \nu} = [(\nu_0 + a_0)(G(b) + D) - (b - b_0)]^2 \frac{\partial W}{\partial \nu}, \tag{J.48}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \nu} &= \frac{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^2}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^4} \\
&- \frac{2\left(\nu+\frac{1}{2}a\right)\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}[1+(\nu_0+a_0)K]}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^4} \\
&= \frac{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)-2\left(\nu+\frac{1}{2}a\right)[1+(\nu_0+a_0)K]}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^3} \\
&= \frac{n(\nu_0+a_0)-\nu-\nu(\nu_0+a_0)K}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^3} \\
&= \frac{(\frac{1}{K}-\nu)(\nu_0+a_0)K+(n-1)(\nu_0+a_0)-\nu}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^3} \\
&> \frac{(\frac{1}{K}-\nu)(\nu_0+a_0)K+(\nu_0-\nu)}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^3}.
\end{aligned} \tag{J.49}$$

Entonces, podemos ver que

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} > \frac{(\frac{1}{K}-\nu)(\nu_0+a_0)K+(\nu_0-\nu)}{\{n(\nu_0+a_0)+[1+(\nu_0+a_0)K](\nu+a)\}^3} \geq 0, \quad \forall \nu_0 \geq \nu. \tag{J.50}$$

Aplicando desigualdades (H.16) y (J.50) a la ecuación (J.48) nos da la relación

$$\frac{\partial \Psi^2}{\partial \nu} > 0, \quad \forall \nu_0 \geq \nu, \tag{J.51}$$

lo que demuestra que $\Psi^2(\nu_0, \nu)$ es estrictamente creciente con respecto a $\nu \in [0, \nu_0]$ para toda $\nu_0 \in (0, \frac{1}{K}]$.

Finalmente, de las desigualdades (H.13), (H.26) y (J.4), tenemos que $0 < \tilde{\nu}^* < \tilde{\nu}_0^* < \frac{1}{K}$, entonces, por el comportamiento estrictamente creciente de $\Psi^2(\nu_0, \nu)$ con respecto a $\nu_0 \in (0, \frac{1}{K}]$ y $\nu \in [0, \nu_0]$, podemos concluir que

$$\Psi^2(\tilde{\nu}_0^*, \tilde{\nu}^*) < \Psi^2\left(\frac{1}{K}, \tilde{\nu}^*\right) < \Psi^2\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right), \tag{J.52}$$

así la desigualdad (J.39) es válida, lo que finalmente demuestra (J.36).

Por lo tanto, dado que las funciones $\pi^*(\beta)$ y $\pi^C(\beta)$ son continuas para toda $\beta \in (0, 1]$, y las desigualdades $\pi^*(1) > \pi^C(1)$ y $\lim_{\beta \downarrow 0} \pi^*(\beta) < \lim_{\beta \downarrow 0} \pi^C(\beta)$ son válidas, por el teorema del valor intermedio, podemos garantizar la existencia de un valor $\hat{\beta} \in (0, 1)$ tal que $\pi^*(\hat{\beta}) = \pi^C(\hat{\beta})$.

Finalmente por Theorem 8, para este valor $\hat{\beta}$, debe mantener que $p^*(\hat{\beta}) < p^C(\hat{\beta})$, lo cuál finaliza la demostración. ■

Bibliografía

Bonin, J. P. and Putterman, L. G. (1987), *Economics of Cooperation and the Labor-managed Economy*, Harwood Academic Publishers, Switzerland.

Bowley, A. L. (1924), 'The mathematical groundwork of economics', *Social Forces* **3**(1), 185.

Bulavsky, V. A. (1996), 'An imagined experiment in the framework of the generalized Cournot model', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **32**, 128–137. In Russian.

Bulavsky, V. A. (1997), 'Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **33**, 112–134. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1995), 'Equilibrium in generalized Cournot and Stackelberg models', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **31**, 164–176. In Russian.

Cornes, R. C. and Sepahvand, M. (2003), 'Cournot vs Stackelberg equilibria with a public enterprise and international competition', Discussion Paper No. 03/12, University of Nottingham - School of Economics, United Kingdom.

Fershtman, C. (1990), 'The interdependence between ownership status and market structure: The case of privatization', *Economica* **57**(22), 319–328.

Fiell, K. and Heywood, J. (2001), *Public Stackelberg leadership in a mixed oligopoly with foreign firms.* Working paper.

Figuières, C., Jean-Marie, A., Quérou, N. and Tidball, M. (2004), *Theory of Conjectural Variations*, World Scientific, Singapore.

Frisch, R. (1951), 'Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy', *International Economics Papers* **1**, 23–36.

Ireland, N. J. and Law, P. J. (1982), *The Economics of Labour-Managed Enterprises*, Croom Helm, London.

Isac, G., Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (2002), *Complementarity, equilibrium, efficiency and economics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Kalashnikov-Jr, V. V., Flores-Muñiz, J. G., Kalashnikov, V. V. and Kalashnykova, N. I. (2017), 'Consistent conjectural variations equilibrium in a semi-mixed duopoly', *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **21**(7), 1125–1134.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I. and Castillo-Pérez, F. J. (2011), 'Mixed oligopoly with consistent conjectures', *European Journal of Operational Research* **210**(3), 729–735.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., Watada, J. and Hernández-Rodríguez, D. J. (2014*a*), 'Analysis of consistent equilibria in a mixed duopoly', *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **18**(6), 962–970.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., Watada, J. and Hernández-Rodríguez, D. J. (2014*b*), 'Mixed oligopoly: Analysis of consistent equilibria', *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **18**(6), 971–984.

Kalashnikov, V. V., Cordero, A. E. and Kalashnikov-Jr, V. V. (2010), 'Cournot and Stackelberg equilibrium in mixed duopoly models', *Optimization* **59**(5), 689–706.

Kalashnykova, N. I., Bulavsky, V. A., Kalashnikov, V. V. and Castillo-Pérez, F. J. (2011), 'Consistent conjectural variations equilibrium in a mixed duopoly', *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* **15**(4), 425–432.

Liu, Y. F., Ni, Y. X., Wu, F. F. and Cai, B. (2007), 'Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets', *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **29**(6), 455–461.

Matsumura, T. (2003), 'Stackelberg mixed duopoly with a foreign competitor', *Bulletin of Economic Research* **55**, 275–287.

Matsumura, T. and Kanda, O. (2005), 'Mixed oligopoly at free entry markets', *Journal of Economics* **84**(1), 27–48.

Matsushima, N. and Matsumura, T. (2004), 'Mixed oligopoly and spatial agglomeration', *Canadian Journal of Economics* **36**(1), 62–87.

Mumcu, A., Oğur, S. and Zenginobuz, U. (2001), 'Competition between regulated and non-regulated generators on electric power networks', MPRA Paper 376, University Library of Munich, Germany.

Putterman, L. (2008), Labour-managed firms, *in* Durlauf, S. N. and Blume, L. E., eds, 'The New Palgrave Dictionary of Economics', Vol. 4, Palgrave Macmillan, Hampshire, 791–795.

Saha, B. and Sensarma, R. (2013), 'State ownership, credit risk and bank competition: a mixed oligopoly approach', *Macroeconomics and Finance in Emerging Market Economies* **6**(1), 1–13.

Stephen, F. H., ed. (1982), *The Performance of Labour-Managed Firms*, Palgrave Macmillan, London.