

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

**ESTRATEGIA DE CONTROL MULTIMODO PARA
CONVERTIPLANO CON PROPULSIÓN BASCULANTE**

POR

JOSÉ DAVID ALADRO MARÍN

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA AERONÁUTICA
CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO**

DICIEMBRE, 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TESIS

**ESTRATEGIA DE CONTROL MULTIMODO PARA
CONVERTIPLANO CON PROPULSIÓN BASCULANTE**

POR

JOSÉ DAVID ALADRO MARÍN

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA AERONÁUTICA
CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO**

DICIEMBRE, 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis “Estrategia de control multimodo para convertiplano con propulsión basculante”, realizada por el estudiante José David Aladro Marín, con número de matrícula 1544698, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ingeniería Aeronáutica con Orientación en Dinámica de Vuelo.

El Comité de Evaluación de Tesis

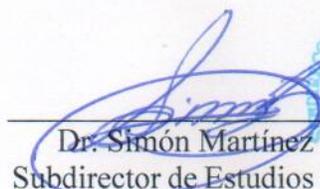
Luis Antonio Amézquita Brooks
Director

Dr. Octavio García Salazar
Revisor

Dr. Carlos Antonio Santana Delgado
Revisor

Dr. Juan Carlos Tudón Martínez
Revisor

Vo.Bo.


Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



Institución 190001

Programa 563510

Acta Núm. 4021

Ciudad Universitaria, a abril 2022.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	xvii
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes y estado del arte	2
1.1.1. Convertiplanos y aeronaves con multirotores basculantes: es- trategias de control	3
1.2. Hipótesis	14
1.3. Objetivo	14
1.4. Justificación	14
1.5. Metodología	15
1.5.1. Revisión de literatura	15
1.5.2. Diseño del prototipo	15
1.5.3. Manufactura	16
1.5.4. Diseño y simulación de leyes de control	17
2. Diseño de prototipo	18

2.1.	Restricciones de diseño	18
2.2.	Configuración de la aeronave	19
2.3.	Dimensionamiento inicial	21
2.3.1.	Selección de rotores	22
2.3.2.	Almacenamiento energético	25
2.3.3.	Pesos de componentes	26
2.3.4.	Bosquejo dimensional	28
2.4.	Diseño aerodinámico	30
2.4.1.	Fuerzas aerodinámicas	30
2.4.2.	Fuerzas y momentos de la planta de propulsión	33
2.4.3.	Balance de fuerzas y momentos	36
2.4.4.	Geometría alar	42
2.4.5.	Estabilizadores verticales y horizontal	49
2.5.	Diseño a detalle	51
3.	Modelado dinámico	57
3.1.	Dinámica de cuerpo rígido	57
3.1.1.	Dinámica traslacional	59
3.1.2.	Dinámica rotacional	60
3.2.	Marco de referencia inercial	60
3.2.1.	Dinámica de orientación	63

3.3. Marco de referencia aerodinámico	64
3.3.1. Marco de referencia local	67
3.4. Fuerzas y momentos aerodinámicos	70
3.4.1. Coeficientes adimensionales	71
3.4.2. Efectos aerodinámicos en el marco del cuerpo	72
3.4.3. Estimación de coeficientes aerodinámicos	75
3.4.4. Ajuste polinomial	79
3.5. Modelo de propulsión	81
3.6. Entradas del sistema	89
3.7. Ecuaciones de estado	93
3.8. Linealización del modelo	95
3.8.1. Puntos de equilibrio	96
3.8.2. Espacio lineal de estados	99
3.8.3. Matriz de transferencia	102
4. Diseño de controladores	104
4.1. Polos y ceros de la planta	105
4.2. Acoplamiento relativo	106
4.3. Ecuaciones de los canales	108
4.4. Estabilidad de los canales	112
4.4.1. Velocidad longitudinal	114

4.4.2. Altura	116
4.4.3. Ángulo de alabeo	119
4.4.4. Ángulo de cabeceo	122
4.4.5. Tasa de guiñada	124
4.4.6. Márgenes de estabilidad de los canales	127
4.5. Simulación del modelo lineal	129
5. Resultados	131
5.1. Simulación no-lineal	131
5.1.1. Actuación ideal	132
5.1.2. Modelo con matriz de propulsión estática	133
5.1.3. Modelo con corrección de empuje dinámico	134
6. Manufactura	138
6.1. Piezas impresas	139
7. Conclusiones	143
7.1. Trabajo a futuro	144
A. Parámetros y coeficientes constantes	146
A.1. Perfiles aerodinámicos	146
A.2. Coeficientes aerodinámicos	147
A.3. Parámetros del sistema de propulsión	148

B. Modelo linealizado	150
B.1. Funciones de transferencia	150
B.1.1. Vuelo estacionario	150
B.1.2. Vuelo recto y nivelado	151
C. Ecuaciones para el diseño de controladores	153
C.1. Funciones MSF	153
C.2. Ecuaciones de los canales	155
C.3. Funciones H	155
C.4. Diagramas de Bode (Vuelo estacionario)	155

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Fases de vuelo de un convertiplano. Air-Force (2015)	1
1.2. Convertiplano "Tiltrotor" Bell XV-15. Calzada (2003)	3
1.3. Prototipo presentado en Yanguo y Huanjin (2009), helicóptero tándem convertiplano.	4
1.4. Simulación de maniobra de aterrizaje del cuadritoror convertiplano reportado en Oner <i>et al.</i> (2012).	5
1.5. Esquema de fuerzas y momentos desarrollados por el sistemas de pro- pulsión actuando en el cuerpo de la aeronave presentada en Cetinsoy <i>et al.</i> (2012).	5
1.6. Esquema del sistema primario de control de vuelo Muraoka <i>et al.</i> (2012)	6
1.7. Esquema para el ángulo de orientación de la planta de propulsión según la velocidad de vuelo Sato y Muraoka (2015).	7
1.8. Principios de operación en vuelo vertical. Papachristos <i>et al.</i> (2012) .	7
1.9. Esquema de control para el seguimniento de trayectoria en modo de vertical. Papachristos (2013)	8
1.10. Prototipo modelado en Hernandez-Garcia y Rodriguez-Cortes (2015).	8
1.11. Prototipo modelado en Warren <i>et al.</i> (2019).	9

1.12. Concepto de aeronave "tilt-arm" propuesto en Zeng <i>et al.</i> (2020).	10
1.13. Optimización de geometría alar, en función de incertidumbre atmosférica según el tipo de clima Zeng <i>et al.</i> (2020).	11
1.14. Aeronave analizada en Wang <i>et al.</i> (2020).	11
1.15. Maniobra de transición de vuelo de la aeronave reportada en Wang <i>et al.</i> (2020).	12
1.16. Prototipo propuesto en Nam <i>et al.</i> (2020).	12
1.17. Esquema general para el "mixer" de la señales de control para los actuadores del prototipo en Nam <i>et al.</i> (2020).	13
1.18. Prototipo con propulsión basculante trirotor analizada en He <i>et al.</i> (2020).	13
1.19. Esquema de control general para prototipo presentado en He <i>et al.</i> (2020).	13
2.1. Túnel de viento del Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica, de la UANL.	19
2.2. Posiciones de elementos principales de la aeronave en el plano XY.	19
2.3. Configuración de rotores	20
2.4. Peso estructural permisible.	28
2.5. Bosquejo de la posición de los rotores respecto al centro másico del prototipo propuesto.	29
2.6. Bosquejo de distintas plataformas alares, con la batería y computadora de vuelo en el centro.	30
2.7. Relación del marco aerodinámico y el marco del cuerpo, variando α	32

2.8. Fuerzas y momentos aerodinámicos del ala ($\beta = 0$).	33
2.9. Esquema general de fuerzas propulsivas actuando en el plano XZ de la aeronave en condiciones de equilibrio.	34
2.10. Marcos de referencia de una aeronave general (Marco <i>et al.</i> (2007)).	37
2.11. Ángulo de ataque (α) y ángulo de cabeceo (θ).	38
2.12. Crosquis del perímetro del área de la plataforma alar.	42
2.13. Comparativa entre alas con distintos perfiles.	44
2.14. Ángulo de deflexión de los rotores frontales, necesario para el balance estático en vuelo recto y nivelado.	46
2.15. Fuerza el rotor de cola necesaria para balance estático en vuelo recto y nivelado.	47
2.16. Fuerza total necesaria para el balance estático en vuelo recto y nivelado.	48
2.17. Cargas de equilibrio incluyendo empenaje.	50
2.18. Líneas de flujo del modelo en XFLR5.	50
2.19. Vistas del prototipo propuesto.	51
2.20. Componentes del prototipo.	53
2.21. Rotores en cada posición de vuelo.	55
2.22. Vistas del prototipo propuesto.	55
3.1. Variables de velocidad, fuerzas y momentos externos definidas en las coordenadas del cuerpo McRuer <i>et al.</i> (1973).	59
3.2. Esquema de orientación mediante rotaciones consecutivas conocidas como ángulos de Euler, tomado de Cook (2007).	61

3.3. Relación entre las velocidades relativas respecto al flujo en el marco del cuerpo con los ángulos aerodinámicos α y β , como se expresa en Duke <i>et al.</i> (1988).	65
3.4. Distribución alar del coeficiente de sustentación en función de α y β	77
3.5. Ajuste polinomial para el coeficiente de sustentación de las semi-alas, respecto a α y β	80
3.6. Ajuste polinomial para el modelo de la hélice.	83
3.7. Velocidad del viento relativa a los rotores.	84
4.1. Polos del sistema en el plano complejo.	105
4.2. Magnitud de la matriz de ganancias relativas para el dominio de la frecuencia, en vuelo estacionario.	107
4.3. Magnitud de la matriz de ganancias relativas para el dominio de la frecuencia, en vuelo recto y nivelado.	107
4.4. Diagrama de bloques general para un sistema MIMO en lazo cerrado.	108
4.5. Canales de control para un sistema MIMO en lazo cerrado.	109
4.6. Diagrama de Nyquist de γ_{u_b}	115
4.7. Diagramas de Bode del canal y función MSF para u_b . Ver Tabla 4.1 para consultar márgenes de estabilidad.	116
4.8. Diagrama de Nyquist de γ_z	118
4.9. Diagramas de Bode del canal y función MSF para z . Ver Tabla 4.2 para consultar márgenes de estabilidad.	119
4.10. Diagrama de Nyquist de γ_ϕ	120

4.11. Diagramas de Bode del canal y función MSF para ϕ . Ver Tabla 4.3 para consultar márgenes de estabilidad.	121
4.12. Diagrama de Nyquist de γ_θ	123
4.13. Diagramas de Bode del canal y función MSF para θ . Ver Tabla 4.4 para consultar márgenes de estabilidad.	124
4.14. Diagrama de Nyquist de γ_r	126
4.15. Diagramas de Bode del canal y función MSF para r . Ver Tabla 4.5 para consultar márgenes de estabilidad.	127
4.16. Repuesta del sistema para referencias de escalón individuales.	129
4.17. Repuesta de las variables de entrada U , para referencias de escalón individuales.	130
5.1. Resultados de simulación con dinámica de actuación $1 \rightarrow 1$	132
5.2. Resultados de simulación sin corrección por pérdidas de empuje dinámico. co.	133
5.3. Simulación del vuelo en transición, considerando la primer corrección para el empuje dinámico.	135
5.4. Simulación del vuelo en transición, considerando la segunda corrección para el empuje dinámico.	137
6.1. Impresora 3D Rostock Max V2	138
6.2. Componentes hechos por manufactura aditiva.	139
6.3. Ensamble de piezas impresas a tubos de fibra de carbono.	140
6.4. Prototipo con actuadores instalados.	141

6.5. Diagrama esquemático de las conexiones de los actuadores	142
A.1. Perfiles aerodinámicos del ala.	146
C.1. Diagramas de Bode de los canales de control en vuelo estacionario. . .	156

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Promedio de variables de diseño de aeronaves similares.	21
2.2. Especificaciones del rotor seleccionado KDE-Direct (2021a).	23
2.3. Especificaciones del controlador de velocidad del motor.	24
2.4. Especificaciones de servomotores de las plataformas basculantes.	25
2.5. Características de la batería seleccionada	26
2.6. Masa de componentes seleccionados	27
2.7. Posición de rotores respecto al centro de masa.	29
2.8. Perfiles aerodinámicos considerados para el semi-ala.	43
2.9. Perfiles aerodinámicos considerados para el semi-ala.	43
2.10. Parámetros generales del ala.	45
2.11. Secciones del empenaje	49
2.12. Lista de partes impresas del prototipo, indicadas en la figura 2.19.	52
2.13. Lista de componentes del prototipo, indicadas en la figura 2.20.	54
2.14. Propiedades de masa e inercia del prototipo.	56

3.1. Variables definidas en las coordenadas del cuerpo de la aeronave. McRuer <i>et al.</i> (1973)	59
3.2. Identificación de los componentes aerodinámicos de la aeronave	74
3.3. Parámetros descriptivos de los componentes aerodinámicos <i>i.</i>	75
3.4. Discretización de la superficie alar para el modelo VML.	76
4.1. Margenes de estabilidad para canal y estructura de u_b	117
4.2. Margenes de estabilidad para canal y estructura de z	119
4.3. Margenes de estabilidad para canal y estructura de ϕ	122
4.4. Márgenes de estabilidad para canal y estructura de θ	125
4.5. Márgenes de estabilidad para canal y estructura de r	127
4.6. Márgenes de estabilidad de los canales.	128
A.1. Coeficientes para las fuerzas y momentos aerodinámicos.	147
A.2. Coeficientes del ajuste polinomial de la hélice (eq. 3.66).	148
A.3. Posición de rotores respecto al centro de gravedad.	148
A.4. Características dinámicas del sistema de propulsión.	149

RESUMEN

José David Aladro Marín.

Candidato para obtener el grado de Maestría en ingeniería aeronáutica con orientación en Dinámica de Vuelo.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: ESTRATEGIA DE CONTROL MULTIMODO PARA CONVERTIPLANO CON PROPULSIÓN BASCULANTE.

Número de páginas: 162.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: Aquí debes poner tus objetivos y métodos de estudio. (Este es el formato).

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Y aquí tus contribuciones y conclusiones. (También es parte del formato).

Firma del asesor: _____
Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de aeronaves híbridas no es reciente, para el caso específico de los convertiplanos podemos remontarnos a poco después de la segunda guerra mundial, cuando comenzaron los primeros desarrollos de girodinós y helicópteros compuestos, como el caso del McDonnell XV-1, reportado en Harris (2003).

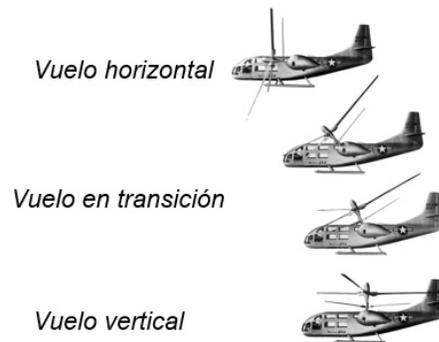


FIGURA 1.1: Fases de vuelo de un convertiplano. Air-Force (2015)

Como la mayoría de los desarrollos tecnológicos, el impulso de estos desarrollos venía del sector militar, en especial por las prestaciones que brindan estos vehículos, al contar con las prestaciones de un helicóptero de poder despegar y aterrizar en sitios mas mucho más estrechos que las pistas de aterrizaje para aeronaves de ala fija, y a su vez, el contar con la agilidad de este otro tipo de aeronaves, en la maniobra de vuelo crucero, presentando una mayor autonomía respecto a las aeronaves de ala rotativa, puesto que la sustentación del vehículo es provista en gran parte por las alas

fijas de la aeronave. Eventualmente, y no mucho tiempo después al XV-1, surgió la primer aeronave con rotores basculantes, el Bell XV-3; consistiendo en un helicóptero tandem, con rotores cadenados y en plataformas basculantes, como puede apreciarse en la figura 1.1.

Como mencionando anteriormente, el desarrollo de aeronaves con capacidad de despegue y aterrizaje vertical no es reciente, sin embargo, la evolución de la tecnología de propulsión eléctrica ha permitido en los últimos años el surgimiento diversas configuraciones en el diseño aeronaves convertiplano. Entre las diversas configuraciones emergentes, siguen presentándose propuestas de aeronaves con rotores basculantes.

1.1 ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE

En los últimos años, los sistemas aéreos no tripulados se han consolidado como una tecnología cotidiana, integrándose cada vez más en diversas actividades humanas. Esta proliferación del uso de estas tecnologías ha llevado a la diversificación de estos sistemas vuelo, de los cuales hemos de resaltar las aeronaves con capacidad de despegue y aterrizaje vertical, dado a su versatilidad operacional dado que no requieren de una pista para aterrizar o despegar.

La configuración de aeronave convertiplano posee una planta de propulsión capaz de sustentar en estado estacionario y de reducir la carga del sistema de propulsión en vuelo horizontal al sustentarse mediante al menos una superficie de control fija, debido a la velocidad flujo incidente. A su vez, existen distintos tipos de aeronaves convertiplano, siendo la configuración de rotores basculantes la que se busca analizar en este proyecto, debido a la posibilidad que permiten de utilizar la misma planta de propulsión, tanto para sustentar la aeronave en vuelo estacionario, como para contrarrestar la fuerza de resistencia al avance en vuelo horizontal.

Partiendo de la configuración de un vehículo multicóptero tri-rotor y con el

objetivo inmediato de incrementar su autonomía, se propone la integración de un ala fija y plataformas basculantes, produciendo un prototipo capaz de ser probado asemejando condiciones de vuelo, mediante simulaciones Hardware In the Loop dentro de un túnel de viento. De la mano al desarrollo del prototipo, se busca el establecer un esquema de control que opere en la totalidad de la misión de la aeronave, ejecutando automáticamente la transición de la dirección de la planta de propulsión según la velocidad incidente de flujo.

Entre los antecedentes más antiguos que encontrados se encuentra Ferguson (1983), que reporta un modelo genérico para para una aeronave de rotores basculantes. El modelo está basado en la aeronave Bell XV-15 (figura 1.2), cuyo desarrollo comenzó en el año 1973, y completó sus primeras pruebas en el año 1979. Esta aeronave fue el la base del desarrollo de las futuras V-22 por parte de la compañía Bell. Calzada (2003) El modelo presentado es muy amplio, presenta interacción entre los rotores y el cuerpo de la aeronave, tanto ala como fuselaje, así como el efecto de las variables de control del mecanismo de los rotores cíclicos. Esta fuente puede resultar de gran utilidad, principalmente en la formulación de un modelo para la interacción de los rotores, en caso que sea necesario según apunten los experimentos iniciales.



FIGURA 1.2: Convertiplano "Tiltrotor" Bell XV-15. Calzada (2003)

1.1.1 CONVERTIPLANOS Y AERONAVES CON MULTIROTORES

BASCULANTES: ESTRATEGIAS DE CONTROL

Se ha desarrollado diversas técnicas para la transición entre modos de vuelo. Comenzando por Yanguo y Huanjin (2009), los autores reportan el diseño de siste-

ma de control de vuelo para un convertiplano tandem de rotores basculantes, con un modelo verificado en túnel de viento. La figura 1.3, muestra una fotografía del prototipo en cuestión. La estrategia de control en este particular trabajo consiste en un lazo interno y otro externo. El lazo de control interno, el que estabiliza la velocidad en la dirección vertical del cuerpo de la aeronave y las velocidades angulares en los ejes del cuerpo. El objetivo del lazo interno de control es generar una estructura de *eigen-valores*, que después será utilizada para cerrar el segundo lazo de control con nuevamente la velocidad vertical de la aeronave, el ángulo de alabeo, cabeceo y la velocidad angular del eje z del cuerpo (r). Este documento provee una estructura de control funcional para un punto de operación en específico, sin embargo, únicamente opera en ese punto y no cuenta con transición automática.



FIGURA 1.3: Prototipo presentado en Yanguo y Huanjin (2009), helicóptero tándem convertiplano.

También surge el caso de aeronaves con rotores basculantes cuya estructura móvil incluye en ala de la aeronave, como ocurre en Oner *et al.* (2012), que consiste un multicóptero cuadrirotor "tilt-wing", sin embargo el documento únicamente se reporta el diseño de controlador de vuelo vertical mediante compensadores PID, comprobándolo con simulaciones (figura 1.4) y pruebas de vuelo, pero sin gran descripción del rechazo a perturbaciones de prototipo en cuestión.

Podemos apreciar en Cetinsoy *et al.* (2012), el desarrollo del mismo prototipo (figura 1.5), donde se reporta mas detalladamente sobre su diseño e identificación

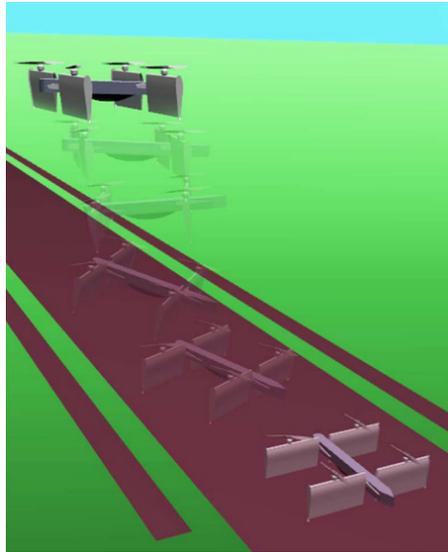


FIGURA 1.4: Simulación de maniobra de aterrizaje del cuadritoror convertiplano reportado en Oner *et al.* (2012).

del modelo aerodinámico, mediante mediciones en túnel de viento, información que puede resultar muy útil para la comparación o búsqueda de referentes previos al realizar un diseño de un prototipo con dimensiones similares. Presentan en este último documento un sistema de control mediante controladores PID en un esquema no lineal de variables virtuales, según el modo de vuelo en que se encuentra, ya sea vuelo vertical, transición o vuelo horizontal, sin embargo, nuevamente el documento sólo reporta los resultados experimentales de las pruebas de vuelo vertical, sin hondar tampoco en la función para hacer el intercambio de esquemas de control.

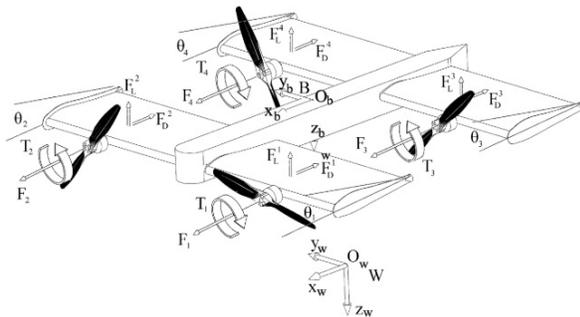


FIGURA 1.5: Esquema de fuerzas y momentos desarrollados por el sistemas de propulsión actuando en el cuerpo de la aeronave presentada en Cetinsoy *et al.* (2012).

Otro ejemplo de VANT con rotores basculantes y "tilt-wing", es el presentado en Muraoka *et al.* (2012), donde se analiza la modo de transición de vuelo, mediante la técnica de *Schedulling*. El esquema de control primario es descrito en la figura 1.6. Otro punto a resaltar del documento, es el mapeo que utiliza para las condiciones de equilibrio de las variables de estado.

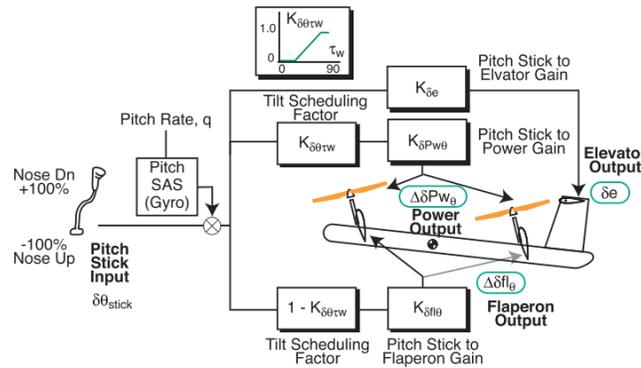


FIGURA 1.6: Esquema del sistema primario de control de vuelo Muraoka *et al.* (2012)

Este mismo prototipo es analizado a mucho mayor detalle en Sato y Muraoka (2015), donde la metodología para el diseño del controlador de vuelo es explicada. Utilizan una técnica de *Gain scheduling*, considerando las maniobras de vuelo vertical, vuelo en transición, vuelo horizontal y viraje coordinado. La técnica utilizada demostró tener gran efectividad, distintas consideraciones de diseño para el controlador de vuelo son comparados y se realizaron exitosamente pruebas de vuelo con transición exitosa. El documento tiene información detallada acerca de la estructura de control utilizada, así como los puntos de equilibrio a partir de los cuales se hacen las aproximaciones para el diseño de los controladores en cada punto, la figura 1.7 presenta la relación entre la velocidad de vuelo y la secuencia de volteo de la planta de propulsión.

Otro ejemplo de una aeronave con rotores basculantes, pero sin ala fija, únicamente con modo de vuelo tri-rotor es en Papachristos *et al.* (2011) y Papachristos *et al.* (2012), también mediante un controlador PID estabiliza el vuelo del vehículo, que si bien no necesita alternar entre modos de vuelo, puesto que el prototipo propuesto

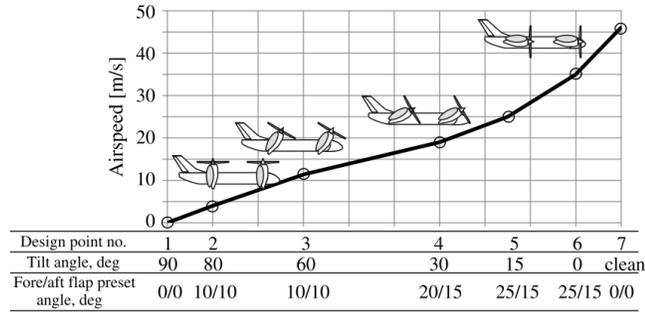


FIGURA 1.7: Esquema para el ángulo de orientación de la planta de propulsión según la velocidad de vuelo Sato y Muraoka (2015).

únicamente opera en modo de multicoptero, sin embargo el mecanismo basculante es idéntico, y es mas sencillo el modelo puesto que no utiliza un plato de control cíclico. La figura 1.8 muestra un esquema de las maniobras en vuelo vertical del prototipo en cuestión.

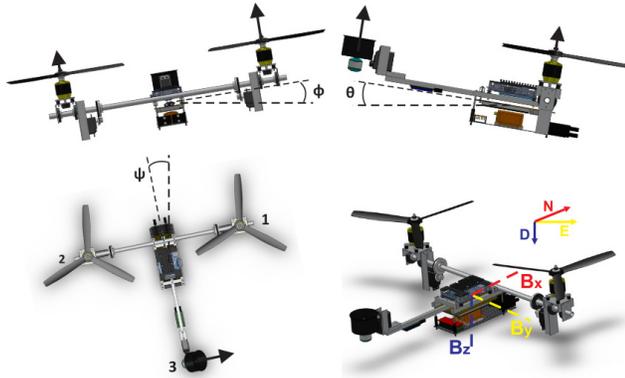


FIGURA 1.8: Principios de operación en vuelo vertical. Papachristos *et al.* (2012)

Este mismo prototipo, es desarrollado con mayor detalle en Papachristos (2013), utilizando ahora un controlador LQR, donde se argumenta se mejora el desempeño del vehículo, respecto a la dinámica longitudinal. El esquema de control general puede apreciarse en la figura 1.9. En este documento se establece la intención que el prototipo sea implementado con ala fija que posteriormente integrada al vehículo.

En Hernandez-Garcia y Rodriguez-Cortes (2015), se propone una técnica de Gain scheduling para un convertiplano de rotores basculantes cíclicos (como puede

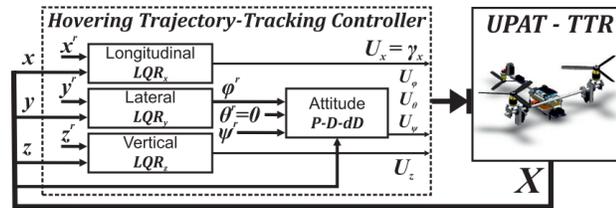


FIGURA 1.9: Esquema de control para el seguimiento de trayectoria en modo de vertical. Papachristos (2013)

observarse en la figura 1.10), presentando únicamente simulaciones numéricas para la validación de su estrategia de control. Sin embargo, puede apreciarse que es necesario un mayor análisis del sistema de vuelo propuesto, al no reportar la estabilidad relativa ante perturbaciones. Más, se puede apreciar su enfoque práctico al evaluar su sistema propuesto mediante un enfoque de aproximaciones lineales con espacio de estados en diversos puntos de equilibrio. El ángulo de rotación de la planta de propulsión es determinado a partir de una función respecto a la altitud, según los puntos de equilibrio obtenidos.



FIGURA 1.10: Prototipo modelado en Hernandez-Garcia y Rodriguez-Cortes (2015).

Un modelo que se propone en Warren *et al.* (2019), consiste simplemente en un sistema multicóptero cuadrirotor, que únicamente modifica la dirección de los rotores sin afectar la posición del ala. En la figura 1.11 puede apreciarse el modelo CAD del prototipo desarrollado en el reporte, así como el mecanismo basculante que se implementó. Puede apreciarse que únicamente utiliza el par de rotores traseros están montados en el mecanismo basculante, mientras que los rotores delanteros se encuentran fijos. Podemos apreciar un diseño aerodinámico convencional con alas en

terminación de reducción de cuerda. Este reporte hace un reporte del diseño bajo diversos requerimientos de diseño y utiliza un controlador de vuelo relativamente sencillo consistiendo en controladores PID. La transición entre los modos de vuelo es hecha manualmente, conforme la velocidad de la aeronave incrementa hasta ser lo suficiente.

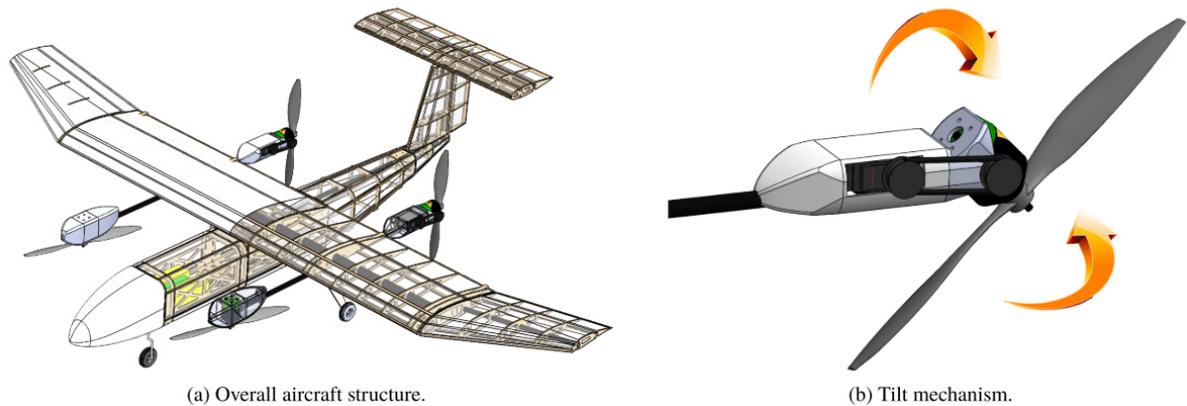


FIGURA 1.11: Prototipo modelado en Warren *et al.* (2019).

Un diseño conceptual interesante es el presentado en Zeng *et al.* (2020), donde se presenta a detalle diversos parámetros de diseño determinados según el tipo de misión, en diversas condiciones climatológicas, como se puede observar en la figura 1.13. El prototipo presentado únicamente consiste en un ala embebida con el fuselaje, y se propone una mecanismo basculante que direcciona toda la planta de propulsión a la vez, como mostrado en la figura 1.12. Este trabajo provee un análisis muy útil para determinar los parámetros de diseño para un VANT, así como de simulaciones en lazo abierto para evaluar los requerimientos de los actuadores para mantener el equilibrio.

La consideración del efecto de la incertidumbre en la dirección del viento hecha en Zeng *et al.* (2020), considera únicamente una afectación en el plano zx , esto es, en la dinámica longitudinal de la aeronave. Este estudio es particularmente interesante, puesto que integra las características del tipo de misión a los parámetros de diseño de la aeronave.

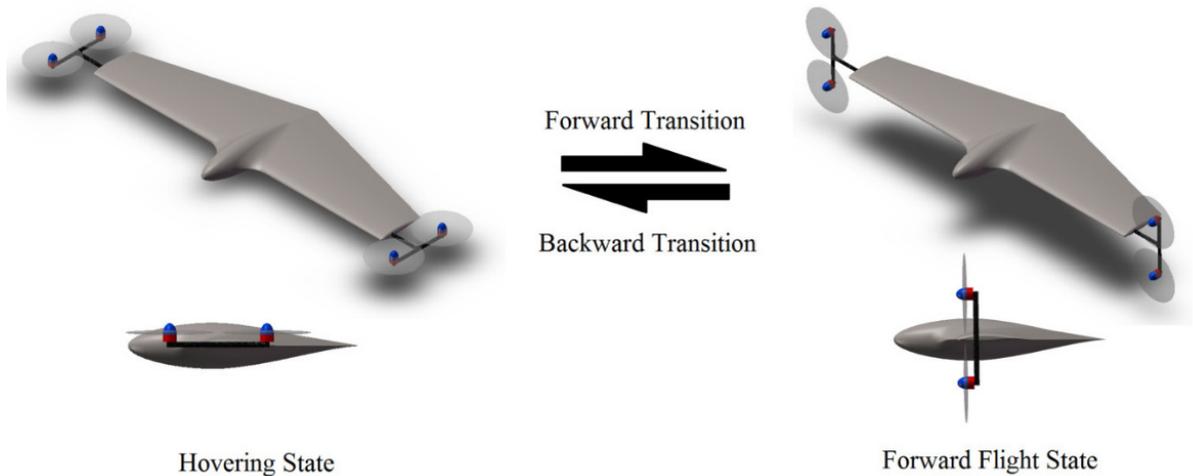


FIGURA 1.12: Concepto de aeronave "tilt-arm" propuesto en Zeng *et al.* (2020).

Una técnica de control diferente a las antes mencionadas es la presentada en Wang *et al.* (2020), pues se basa en un control de rechazo activo a perturbaciones en conjunto con modos deslizantes en retroalimentación de error de estado no lineal. El control utiliza un observador de estado extendido con el fin de compensar la incertidumbre externa e interna. Es de mencionar que el objetivo principal del documento es evaluar el desempeño del controlador de vuelo, precisamente en la etapa de transición. Se puede apreciar un prototipo muy parecido al reportado en Muraoka *et al.* (2012) y Sato y Muraoka (2015), siendo también cuadrirotor de motores basculantes cuyas plataformas también cuentan con una sección de semi-ala alineada a la nariz de su respectiva rotor.

Se puede apreciar la maniobra de transición que utiliza la aeronave, en una secuencia en rampa, deteniéndose a 45 grados con tal de permitir que el cabeceo se estabilice, luego continuando hasta hacer la transición completa, como se muestra en la figura 1.15.

En Nam *et al.* (2020) se presenta el diseño de un trirotor convertiplano con rotores basculantes, con un par de alas unidas a cada plataforma basculante de los motores frontales, por lo que rotan a la par que la planta de propulsión, como se muestra en la figura 1.16. Un punto especialmente interesante de este prototipo es

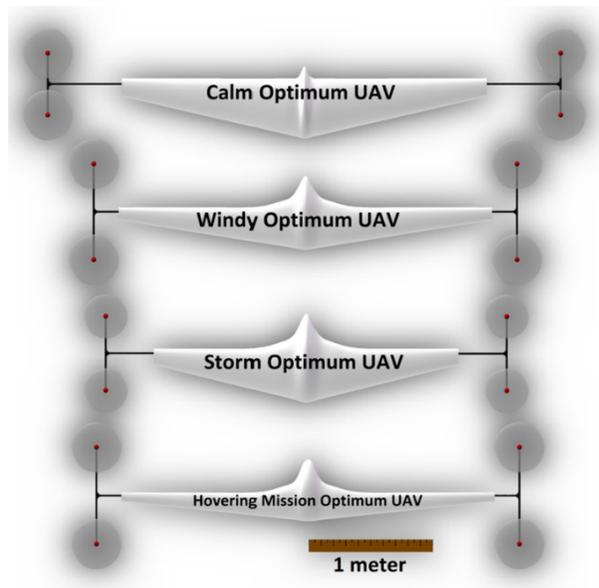


FIGURA 1.13: Optimización de geometría alar, en función de incertidumbre atmosférica según el tipo de clima Zeng *et al.* (2020).



FIGURA 1.14: Aeronave analizada en Wang *et al.* (2020).

que se implemento en dos configuraciones, una sin superficies de control, actuada únicamente mediante la planta de propulsión y la otra, utilizando efectivamente alerones en alas para controlar la dinámica de alabeo.

El prototipo es implementado exitosamente, se propone un esquema de control no lineal, con compensadores PID. La transición del vehículo es establecida mediante un algoritmo lógico que alterna entre un controlador entre vuelo horizontal y un controlador para vuelo vertical. Los parámetros que rigen el flujo del algoritmo para alternar los controles son determinados a base de experimentación de prueba y error. Un punto interesante también en este diseño, es la descripción del "mixer" de las señales de control para generar las señales a los actuadores, que bien puede apreciarse

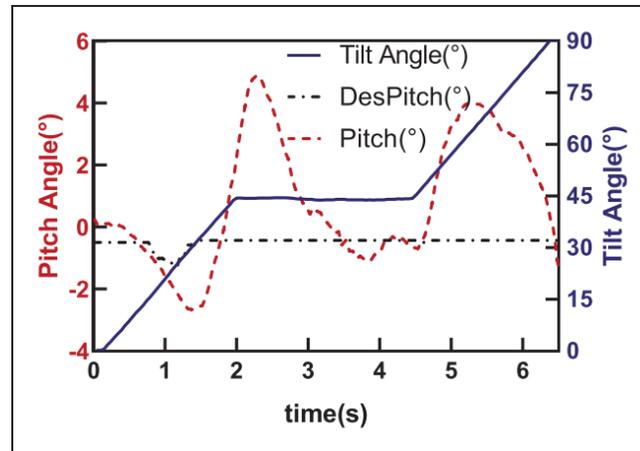


FIGURA 1.15: Maniobra de transición de vuelo de la aeronave reportada en Wang *et al.* (2020).

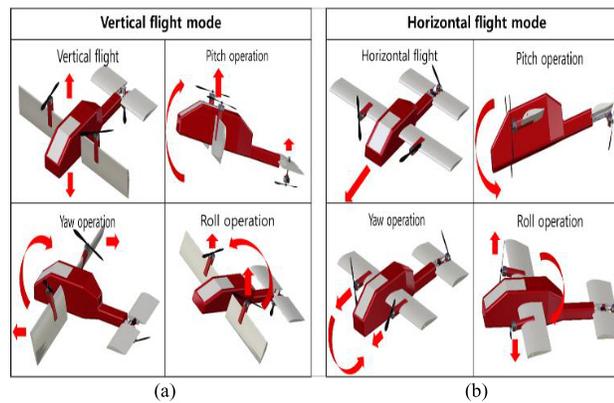


FIGURA 1.16: Prototipo propuesto en Nam *et al.* (2020).

en 1.17, el esquema no-linear presentado prueba ser efectivo, y sería interesante indagas mas afondo el rechazo a perturbaciones que el prototipo prepuesto presenta.

Otro diseño de convertiplano trirotor es presentado en He *et al.* (2020), donde se presenta una sistema de control para el modo de vuelo vertical únicamente, la figura 1.19 muestra el prototipo modelado. Se puede apreciar que la aeronave presenta tiene un diseño aerodinámico clásico.

Este prototipo en la figura 1.19 presenta un esquema no lineal por modos deslizantes. Se presume que en trabajos futuros se desarrollará el esquema de control para la transición del vehículo, por lo que es prudente monitorear si se publican

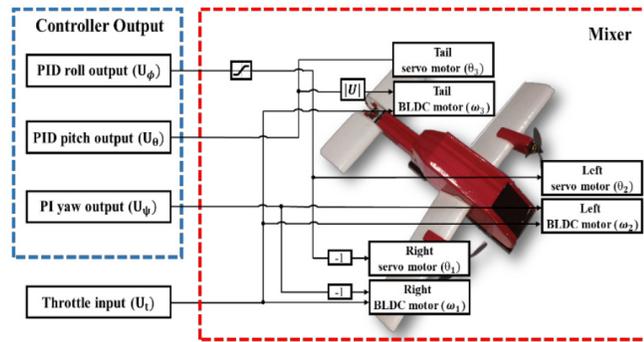


FIGURA 1.17: Esquema general para el "mixer" de la señales de control para los actuadores del prototipo en Nam *et al.* (2020).

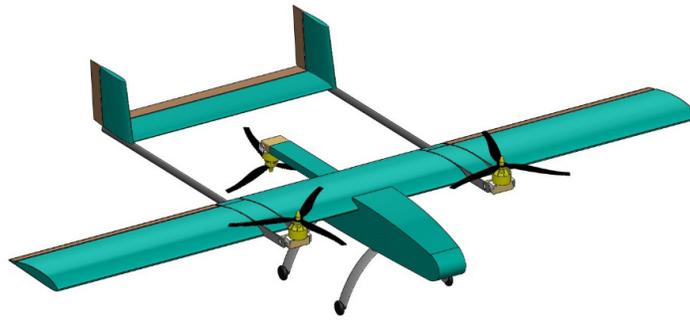


FIGURA 1.18: Prototipo con propulsión basculante trirotor analizada en He *et al.* (2020).

avances en cuestión, con el fin de considerarlos para el trabajo de investigación.

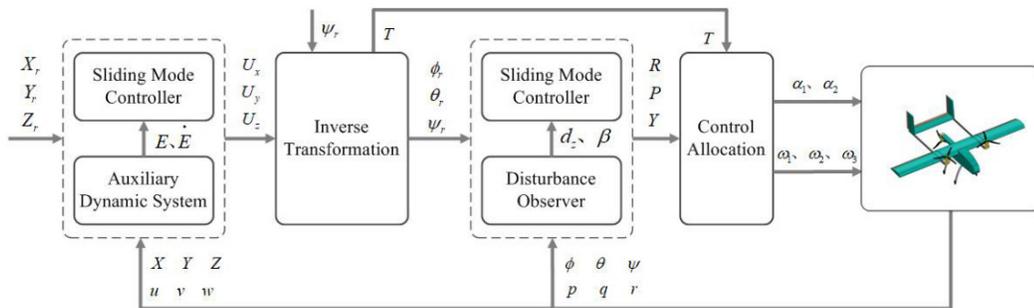


FIGURA 1.19: Esquema de control general para prototipo presentado en He *et al.* (2020).

Una comparación entre control PID y LQR es hecha en Houari *et al.* (2020), que

se aplica en un multicóptero trirotor. El prototipo propuesto no presenta la necesidad de alternar entre modos de vuelo, puesto que no utiliza superficies sustentadoras, pero la estrategia de control propuesta puede resultar de utilidad al considerar un vehículo trirotor.

1.2 HIPÓTESIS

Es posible operar una aeronave de ala fija con tres rotores basculantes actuada únicamente por la planta de propulsión (sin la intervención de superficies de control) tanto en vuelo estacionario, como en vuelo recto y nivelado, utilizando una sola ley de control lineal multivariable.

1.3 OBJETIVO

Diseñar, modelar y construir una prototipo de aeronave convertiplano, capaz de operar tanto en vuelo estacionario como en vuelo horizontal; así como diseñar y verificar mediante simulaciones una ley de control lineal multivariable que establezca las principales variables de dicha aeronave, con márgenes robustos de estabilidad. El prototipo estará diseñado para ser probado en las balanzas aerodinámicas, con las que se cuentan en el CIIA para el desarrollo de futuras investigaciones.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Tal como se discutió en la sección 1.1, existe un reciente interés en aeronaves con sistemas de propulsión no convencionales y con capacidad de vuelo estacionario y horizontal. Estos vehículos son comúnmente propuestos con una redundancia de propulsores y superficies de control. La estrategia propuesta en esta tesis que es

posible eliminar esta redundancia sin perder autoridad al regular las variables principales de la aeronave. Por otro lado, comúnmente se proponen esquemas de control conmutados para resolver el problema de operar en diferentes modos de vuelo; es decir, vuelo estacionario y vuelo horizontal. Contar con un esquema de control único que funcione dentro de toda la envolvente de la aeronave, facilitaría los procesos de validación, implementación y certificación en el desarrollo de aeronaves híbridas con una configuración similar.

1.5 METODOLOGÍA

1.5.1 REVISIÓN DE LITERATURA

El objetivo de la revisión bibliográfica es tanto conocer al tanto del estado del arte, tanto como la o en los siguientes dos principales rubros:

- Diseño de convertiplanos de pequeña escala, especialmente implementados para fines de investigación extraer la información necesaria para tomar como punto de partida para el diseño del prototipo.
- Técnicas de control para la transición entre fases de vuelo de aeronaves híbridas. Este punto de especial interés por su directa relación con el tema de tesis, y preferentemente se buscarán estrategias de control para aeronaves de motores basculantes.

1.5.2 DISEÑO DEL PROTOTIPO

Esta etapa consiste en desarrollar el diseño del prototipo, acorde a las limitantes del proyecto. Primeramente se deben especificar las restricciones de diseño, las cuales

están expresadas a detalle al principio del apartado diseño (sección 2.1). De forma general, las etapas del diseño del prototipo son las siguientes:

- Especificar esquemáticamente la configuración de la aeronave.
- Hacer el dimensionamiento inicial a partir de la consulta bibliográfica de aeronaves similares según las restricciones de diseño.
- Seleccionar componentes principales de la aeronave (baterías, motores, hélices, etc.), corroborando su viabilidad con los resultados del siguiente paso.
- Desarrollar el diseño aerodinámico buscando reducir la carga operacional de la planta de propulsión en el régimen de vuelo de la aeronave.
- Integrar todos componentes de la aeronave en un modelo digital (CAD) a detalle, con un diseño orientado a ser manufacturado mediante manufactura aditiva. Se incluirá en el modelo CAD una base para montar el prototipo en una celda de carga para hacer mediciones aerodinámicas en túnel de viento.

1.5.3 MANUFACTURA

Adquirir los insumos necesarios para la manufactura del prototipo, tales como los componentes seleccionados en la etapa de diseño, materiales de construcción, herramienta, etc. Se ensamblarán e integraran los componentes de la aeronave, acondicionándola para ser utilizada en pruebas experimentales en túnel de viento (si lo permite la autoridad académica y acatando las medidas sanitarias ante la actual pandemia).

1.5.4 DISEÑO Y SIMULACIÓN DE LEYES DE CONTROL

Las leyes de control serán desarrolladas a partir de aproximaciones lineales para diferentes puntos de operación, con el objetivo de inspeccionar si un esquema lineal multivariable puede regular su operación en tales puntos de operación. Hay tres puntos de especial interés para el análisis del modelo: Vuelo estacionario o vertical, vuelo recto y nivelado (con los rotores basculantes alineados a la dirección del vector velocidad) y en la transición entre ambas fases (velocidades de vuelo intermedias entre ambas fases de vuelo). En términos generales lo que se busca es que la posición de equilibrio de los rotores esté en función de la velocidad de la aeronave y que se cuente con márgenes de estabilidad robustos en toda su envolvente.

CAPÍTULO 2

DISEÑO DE PROTOTIPO

2.1 RESTRICCIONES DE DISEÑO

El diseño del prototipo es desarrollado siguiendo los criterios establecidos en la metodología del proyecto, además de las siguientes restricciones de diseño:

- Diseñar el sistema de propulsión como único sistema de actuación de la aeronave, es decir, sin considerar superficies de control y partiendo de una configuración tri-rotor.
- Restringir las dimensiones del vehículo tomando en cuenta las dimensiones de la sección de pruebas del túnel de viento de la institución, con el fin que el prototipo pueda ser probado dentro del mismo. La figura 2.1 muestra el túnel de viento, cuya sección de pruebas tiene las siguientes medidas: $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1.5\text{m}$.
- Estimar los pesos y dimensiones del vehículo a partir de otros vehículos de dimensiones similares que se encuentren reportados en la literatura.
- Garantizar la estabilidad estática dentro de la envolvente de la aeronave. El sistema de propulsión debe satisfacer las condiciones de equilibrio para el régimen de vuelo, sin que alguno de sus componentes tome un valor extremo.



FIGURA 2.1: Túnel de viento del Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica, de la UANL.

2.2 CONFIGURACIÓN DE LA AERONAVE

Antes de comenzar con el dimensionamiento de la aeronave, se definirá la configuración de esta. Por configuración, se hace referencia al tipo de planta de propulsión y a sus características aerodinámicas. La figura 2.2 ilustra esta configuración y a continuación será descrita más a detalle.

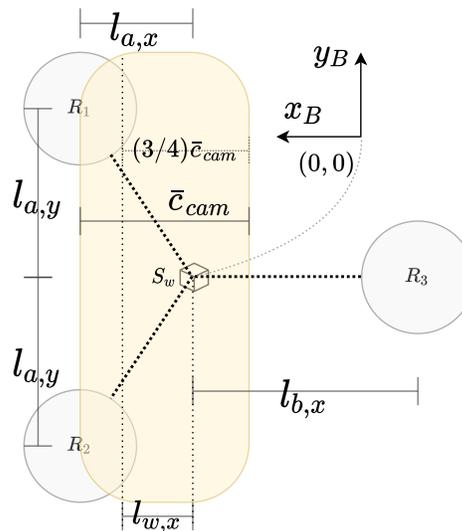


FIGURA 2.2: Posiciones de elementos principales de la aeronave en el plano XY.

Comenzando por describir la configuración aerodinámica, se buscará diseñar una aeronave tipo monoplano, cuyo centro aerodinámico se encuentra delante del centro de gravedad. Esto es mostrado en la figura 2.2, donde la superficie amarilla alude a la superficie alar (S_w). Se ilustra también algunos parámetros relacionados al ala como su cuerda media aerodinámica (\bar{c}_{mac}) y separación entre el ideal centro aerodinámico del ala y el centro de gravedad en la dirección longitudinal, denotado por $l_{w,x}$.

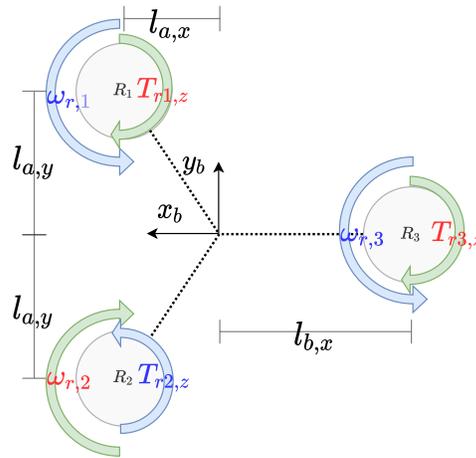


FIGURA 2.3: Configuración de rotores

Continuando con la descripción del tipo de propulsión, se propone para cada rotor un sistema de motores eléctricos con hélices de paso fijo; configuración característica de las micro-aeronaves multirotor que abundan hoy en día. Es importante especificar que se utilizan tres rotores como un número mínimo para actuar la aeronave en su totalidad, utilizando dos en la posición frontal y un trasero. Estos rotores se ilustran de forma específica en la figura 2.3 por los discos identificados como R_1 , R_2 y R_3 . Además, se pretende que cada rotor se encuentren montados en una plataforma basculante, es decir, una base capaz de rotar de forma controlada para cambiar a conveniencia la orientación del eje de giro del rotor. La orientación de cada plataforma basculante sería controlada por un servomotor. Las posiciones de los rotores están indicadas con las variables $l_{a,x}$ y $l_{a,y}$ para los rotores frontales en

las direcciones longitudinal y lateral, respectivamente. Para el caso del rotor de cola, como se encuentra centrado lateralmente, sólo se indica la posición longitudinal $l_{b,x}$.

Lo anterior describe de forma general la configuración de la aeronave, a partir de la cuál se realizará su diseño.

2.3 DIMENSIONAMIENTO INICIAL

El dimensionamiento del vehículo está en función de una estimación de la masa total de todo el sistema. Esta estimación se realizó mediante una revisión de otros vehículos convertiplano o de rotores basculantes reportados en Nam *et al.* (2020), Abhishek *et al.* (2017), Hochstenbach *et al.* (2015), Vogeltanz (2019), Mantha (2015) y Carlson (2014). El promedio de los datos recopilados es mostrado en la tabla 2.1. Estos datos fueron utilizados para hacer el dimensionamiento inicial de vehículo, estimar la relación de empuje-peso y establecer la velocidad de vuelo crucero. Si se asume que el prototipo terminará con dimensiones similares, se pueden usar esta lista información para dimensionamiento inicial y selección de componentes.

Variable	Descripción	Unidades	Valor
$W_{\widetilde{MTOW}}$	Peso promedio máximo de despegue	[N]	22.81
$\frac{W_{\bar{z}}}{W_{\widetilde{MTOW}}}$	Razón promedio de peso energético	[kg/kg]	0.19
$\frac{T_{\widetilde{max}}}{W_{\widetilde{MTOW}}}$	Razón promedio de empuje máximo y peso	[N/N]	2.13
$S_{\bar{w}}$	Superficie alar promedio	[m ²]	0.2588
$\frac{L_{SLF}}{S_{\bar{w}}}$	Carga alar promedio	[N/m ²]	95.4633
$V_{\bar{c}}$	Velocidad crucero promedio	[m/s]	16.1

TABLA 2.1: Promedio de variables de diseño de aeronaves similares.

2.3.1 SELECCIÓN DE ROTORES

Considerando los datos de la tabla 2.1, se estima un empuje máximo en vuelo estacionario mediante la razón de empuje-peso $\left(\frac{T_{\widetilde{max}}}{W_{\widetilde{MTOW}}}\right)$ y el máximo peso de despegue, como en la ecuación (2.1). Considerando las especificaciones de la configuración básica, los tres rotores están posicionados simétricamente para que en vuelo estacionario y se encuentran operando en las mismas condiciones de carga. Por lo tanto, el empuje máximo que cada motor debería dar sería un tercio del empuje total para cumplir la relación de empuje-peso.

$$T_{\widetilde{max}} = (W_{\widetilde{MTOW}}) \left(\frac{T_{\widetilde{max}}}{W_{\widetilde{MTOW}}} \right) = 48.58 \text{ N} \quad (2.1)$$

$$T_{c/u} = \frac{T_{\widetilde{max}}}{N_{\text{rotores}}} = \frac{48.58}{3} \text{ N} = 16.1933 \text{ N}$$

Tomando en cuenta el empuje calculado se seleccionó una hélice de **10x5**; este tamaño de hélice también es observado en modelos de aeronaves de la tabla 2.1, como en Nam *et al.* (2020) o en Mantha (2015), y cumple el requerimiento de empuje máximo calculado en la ecuación (2.1). Esto se consultó de la base de datos en línea provista por el fabricante de la hélice en APC-Propellers (2021), donde la hélice en empuje estacionario produce cerca $T_{c/u} = 16.1933 \text{ N}$ operando a 10000 *rev/min*, ejerciendo un torque 0.2415 Nm y desarrollando una tasa de trabajo de 255.954 W.

La selección del motor es en base a estos últimos dos datos obtenidos, las revoluciones de rotor y la tasa de trabajo desarrollada. Se seleccionó el motor modelo KDE2315XF-965 consultando las especificaciones provistas por el fabricante de motores, disponibles en KDE-Direct (2021a). Este motor fue seleccionado bajo el criterio que la potencia máxima que puede desarrollar es de 385 W.

Una batería LiPo de 4 celdas con un voltaje por celda de 3.7 V produciría un voltaje en serie total de 14.8 V. Considerando la constante de velocidad del motor,

Símbolo	Parámetro	Unidades	Valor
K_v	Constante de velocidad	[RPM/V]	965
K_t	Constante de torque	[Nm/A]	0.0099
K_m	Constante del motor	[Nm/ \sqrt{W}]	0.031
$(I_m)_{max}$	Máxima tensión continua (180 s)	Amperios [A]	26
$(P_m)_{max}$	Máxima potencia continua (180 s)	Watts [W]	385
V_{rango}	Rango de voltaje	Volts [V]	(11.1 – 17.4)
I_0	Corriente reactiva	Amperios [A]	0.5
R_m	Resistencia del embobinado	Ohms [Ω]	0.102
m_m	Masa del motor (con cableado)	Gramos[g]	75
D_r	Diámetro del disco actuador	Pulgadas [in]	10
P_r	Paso de la hélice	[in/rev]	5
m_{hel}	Masa de la hélice	[g]	10

TABLA 2.2: Especificaciones del rotor seleccionado KDE-Direct (2021a).

esto permitiría una velocidad máxima del motor sin carga de 14282 RPM, como se muestra en la ecuación (2.2). Lo cual hace factible que el sistema pueda alcanzar los 10000 RPM ($\omega_{\hat{m}_0}$) para cumplir el requerimiento de empuje propuesto en la ecuación (2.1), si el rotor con la hélice instalada tiene un decremento de velocidad de 4282 RPM en comparación con el rotor sin carga. Se utilizará la variable $\omega_{\hat{m}}$ Para designar a la velocidad rotacional máxima de la hélice (10000 RPM) que se espera en condiciones estáticas.

$$\omega_{\hat{m}_0} = K_v V_e = (935 \text{ RPM/V})(14.8 \text{ V}) = 14282 \text{ RPM} \quad (2.2)$$

Ahora, considerando el torque estático por arrastre de 0.2415 Nm (APC-Propellers (2021)) desarrollado por la hélice a $\omega_{\hat{m}}$ podemos esperar que el motor tenga la capacidad de operarla, puesto que la corriente máxima del motor genera

un torque máximo de ($T_{\dot{m}} = 0.2574 \text{ Nm}$) según la constante de torque del mismo, como se expresa en la ecuación (2.3).

$$T_{\dot{m}} = K_t (I_m)_{max} = (26 \text{ A})(0.0099 \text{ Nm/A}) = 0.2574 \text{ Nm} \quad (2.3)$$

El controlador de velocidad del motor también es de suma importancia, este se seleccionó asegurando que pueda operar el rotor sin exceder los límites de operación del resto de los componentes. La tabla 2.3 muestra datos de las características del controlador de velocidad seleccionado, consultado en KDE-Direct (2021b). Mas adelante, conforme se avance en el diseño aerodinámico, se corroborarán los requerimientos de empuje para el vuelo crucero con el fin que la selección de rotores puede mantener los requerimientos de propulsión dentro del régimen de velocidad de la aeronave.

Característica	Valor
Tasa de actualización	50 – 600 [Hz] (Adaptable)
Corriente máxima pico	60 [A] (5 s)
Corriente máxima continua	35 [A] (180 s)
Masa	55 [g]

TABLA 2.3: Especificaciones del controlador de velocidad del motor.

Las especificaciones del servomotor seleccionado para operar cada plataforma basculante del sistema de propulsión, son mostradas en la tabla 2.4, información consultada en Hitec-RCD (2021). Otros tamaños de servomotores se pueden encontrar reportados en la literatura, como en Carlson (2014) o Nam *et al.* (2020), utilizando servomotores con un torque máximo de 2.6 [kg-cm] y 9.4 [kg-cm] , respectivamente. En el caso de Nam *et al.* (2020) además de las reacciones inerciales del sistema, también debe contrarrestarse los momentos aerodinámicos generados por el ala; por lo que el servomotor seleccionado para ese prototipo en particular tiene mayor ca-

pacidad de carga, a diferencia del utilizado por Carlson (2014) que sólo opera la plataforma basculante del prototipo. Para el caso local, se escogió un servomotor de mayor capacidad que el utilizado por Carlson (2014), pero no tan grande como para vencer un momento aerodinámico de un ala. Sin embargo, es necesario hacer pruebas para corroborar que se tiene la capacidad suficiente para operar de forma segura prototipo.

Característica	Valor
Masa	22 [g]
Voltaje operacional	6 – 7.4 [V]
Torque máximo	3.6 – 4.3 [kg-cm]
Corriente reactiva sin carga	200 [mA]
Máxima corriente	1750 [mA]
Velocidad	0.17 – 0.13 [s/(60°)]

TABLA 2.4: Especificaciones de servomotores de las plataformas basculantes.

2.3.2 ALMACENAMIENTO ENERGÉTICO

A partir de la razón promedio de peso energético de la tabla 2.1, se calcula el peso estimado de la batería con el fin de seleccionar una de tamaño parecido que se encuentre comercialmente disponible. El peso estimado de la batería es calculado en la ecuación (2.4).

$$W_{bat} = \left(\frac{W_{\tilde{e}}}{W_{\widetilde{MTOW}}} \right) (W_{\widetilde{MTOW}}) = (0.19) (22.81N) = 4.3339 [N] \quad (2.4)$$

Se buscó una batería de 4 celdas que tuviera este peso equivalente (4.3339 N) en masa al rededor de 442 gramos, por lo que se seleccionó una batería con las características mostradas en la tabla 2.5. Por motivos de disponibilidad en el mercado,

se seleccionó una batería 110 gramos mas pesada que la previamente estimada.

Parámetro	Valor
Número de celdas	4
Voltaje nominal	14.8 [V]
Capacidad	5000 [mAh]
Capacidad de descarga	70 – 140C
masa	553 [g]

TABLA 2.5: Características de la batería seleccionada

2.3.3 PESOS DE COMPONENTES

Con el fin de estimar una margen permisible para la estructura de la aeronave, comparemos los pesos de los componentes actuales con el empuje máximo estacionario. Recordemos que esperamos una relación empuje-peso parecida a otros prototipos similares, el peso máximo de despegue es la suma de los componentes y el peso estructural; esto es no considerando alguna carga de paga. como expresado en la ecuación (2.5). La variable W_e es la suma del peso de todos los componentes seleccionados hasta el momento, incluyendo los rotores, batería y aviónica; tál como es mostrado en la tabla 2.6.

$$W_{est} = W_{MTOW} - W_e \quad (2.5)$$

Considerando el empuje máximo disponible de la planta de propulsión y el peso total de los componentes seleccionados hasta el momento, podemos acotar el peso estructural del prototipo con tal que satisfaga un margen permisible para la relación empuje-peso, como bien puede ser entre [1.5, 2.5] que incluye la razón promedio $\left(\frac{T_{\widetilde{max}}}{W_{\widetilde{MTOW}}} = 2.3\right)$ de la tabla (2.1).

Componente	Descripción	Masa (g)	Cantidad	Masa total (g)
Motor	KDE2315XF-965	78	3	234
ESC	KDEXF-UAS35	55	3	165
Hélice	10x4	10	3	30
Servomotor	HS-5087MH	22	3	66
Batería	4s 14.8V 5000mAh	553	1	553
Aviónica	CPU, sensores, etc.	130	1	130
			Total	1178

TABLA 2.6: Masa de componentes seleccionados

Tomando la ecuación (2.5) y dejando el peso de despegue máximo en función la razón empuje-peso ($W_{MTOW} = T_{m\hat{a}x} / \frac{T_{max}}{W_{MTOW}}$) podemos formular la ecuación (2.6) que expresa el peso estructural permisible para mantener la relación empuje-peso dentro del rango propuesto. Lo anterior se muestra gráficamente en la figura 2.4. Note que las unidades mostradas en la figura anterior son kilogramo fuerza, con el fin de relacionarlo a la cantidad másica fácilmente.

$$W_{est} = T_{m\hat{a}x} / \frac{T_{max}}{W_{MTOW}} - W_e \quad (2.6)$$

Podemos concluir de la figura 2.4 que si el peso estructural no excede 2.1 kilogramos, se mantiene arriba de 1.5 la razón de empuje-peso $\left(\frac{T_{max}}{W_{MTOW}}\right)$. Esto servirá como criterio al momento elaborar el diseño extructural y diseño a detalle, cuidando de no exceder los límites de esta relación de pesos.

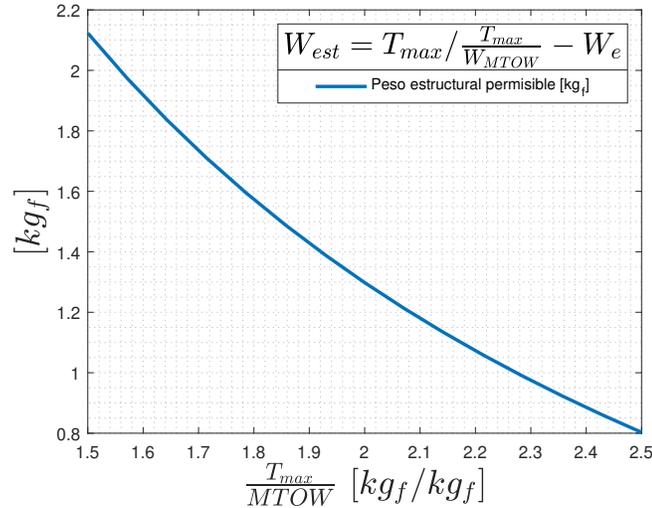


FIGURA 2.4: Peso estructural permisible.

2.3.4 BOSQUEJO DIMENSIONAL

Partiendo de las dimensiones de la sección de pruebas del túnel de viento, las dimensiones de la sección transversal del plano x-y limitan el tamaño que puede tener el prototipo. Esto anterior, siguiendo el criterio que el vehículo pueda tener libertad para rotar dentro del túnel de viento; con la intención que pueda ser montado en una rótula conforme se desarrolla el proyecto.

La figura 2.5 muestra el sketch de la posición de los rotores respecto a centro másico ideal del vehículo, que se encuentran simétricamente distribuidos, casi coincidiendo con los vértices de un triángulo equilátero. Se ha dejado un espacio para que el rotor al cambiar su ángulo de deflexión tenga suficiente margen para desplazarse en la dirección "x" sin que se sobre pase el margen de separación mínimo de 50 mm respecto a las paredes del túnel. Ha de notarse que los discos rotores tienen un diámetro de **10 pulgadas**, de acuerdo con la hélice seleccionada de **10x5** (tabla (2.2)).

Los bosquejos fueron realizados con el fin de determinar la posición de los rotores respecto al centro de masa. Estas posiciones relativas están condensadas en

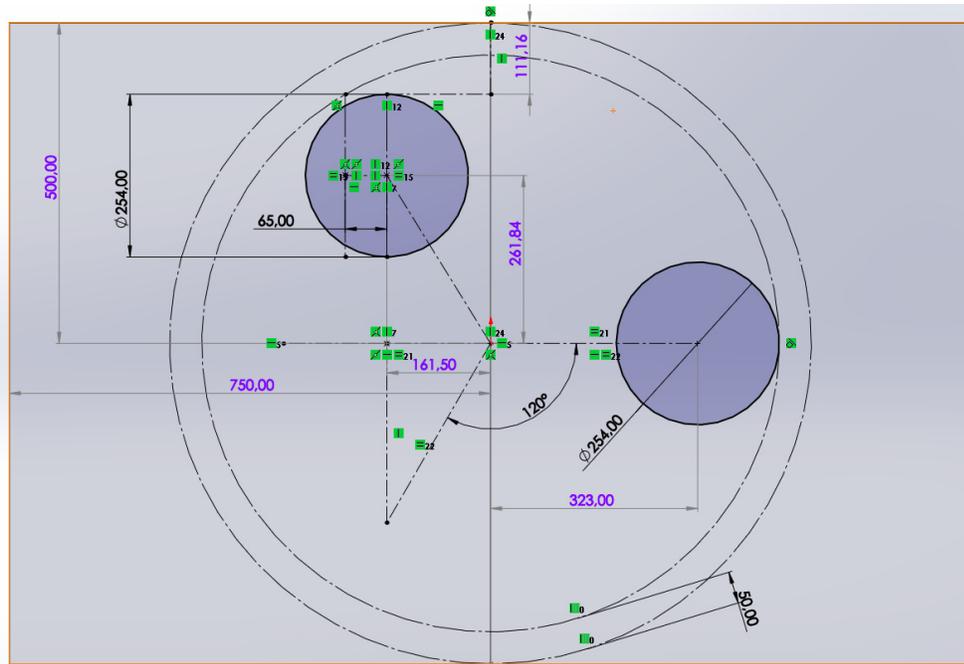


FIGURA 2.5: Bosquejo de la posición de los rotores respecto al centro másico del prototipo propuesto.

Símbolo	Descripción	Valor [m]
$l_{\{a,x\}}$	Distancia longitudinal de los rotores frontales al centro de masa del vehículo.	0.1615
$l_{\{a,y\}}$	Distancia lateral de los rotores frontales al centro de masa del vehículo, positiva para el derecho y negativa para el izquierdo.	0.26184
$l_{\{b,x\}}$	Distancia longitudinal del rotor trasero al centro de masa del vehículo.	0.323

TABLA 2.7: Posición de rotores respecto al centro de masa.

la tabla 2.7. Para el caso de los rotores frontales, la distancia en la dirección lateral es positiva para el rotor frontal derecho y negativa para el rotores frontal izquierdo. Se asume que los rotores frontales en encuentran alineados en la dirección vertical con el centro de masa, y el rotor de cola tiene una ligera desviación en la dirección

negativa del vehículo.

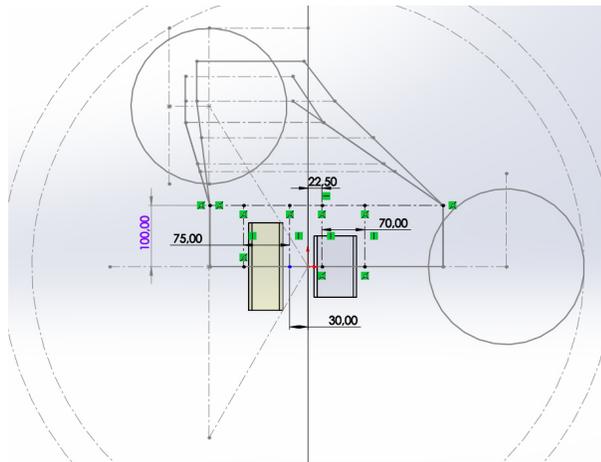


FIGURA 2.6: Bosquejo de distintas plataformas alares, con la batería y computadora de vuelo en el centro.

Bajo la premisa que la planta y los pesos de sus componentes, se encuentran simétricamente distribuidos, es necesario únicamente posicionar la batería y la computadora de vuelo cercano al centro de gravedad del vehículo, con oportunidad de ajustar la posición de estos componentes, una vez que la estructura de la aeronave quede lista. Esto último está principalmente en función principalmente de la forma aerodinámica del ala, lo cuál se analizará brevemente en el siguiente apartado. La figura 2.6 es un bosquejo de distintas plataformas alares bajo las restricciones dimensionales propuestas, manteniendo la batería y computadora de vuelo cercanos al centro del prototipo.

2.4 DISEÑO AERODINÁMICO

2.4.1 FUERZAS AERODINÁMICAS

Antes de proceder con el dimensionamiento aerodinámico, hay que definir primero las fuerzas y momentos considerados para el diseño. La ecuación (2.7) expresa

la presión dinámica general del fluido (\bar{q}_∞) al rededor del cuerpo de la aeronave, que se encuentra dada en términos de la velocidad relativa (V_∞) y densidad (ρ_∞) del flujo libre.

$$\bar{q}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \quad (2.7)$$

Si no se considera el efecto de ráfagas de viento, entonces la velocidad relativa al flujo y la magnitud de la velocidad de la aeronave en el marco inercial (V) son idénticas, es decir $V = V_\infty$. Las fuerzas y momentos a considerar en esta etapa, son el producto de un ala única para el diseño de la aeronave en la condición de vuelo crucero.

Las fuerzas de sustentación y de arrastre son expresadas respectivamente en las ecuaciones (2.8) y (2.9); donde S_w representa el área de plataforma alar, C_{L_w} es el coeficiente de sustentación ala y C_{D_w} es el coeficiente de arrastre alar.

$$L_w = \bar{q}_\infty S_w C_{L_w} \quad (2.8)$$

$$D_w = \bar{q}_\infty S_w C_{D_w} \quad (2.9)$$

El momento aerodinámico del ala es expresado en la ecuación (2.10), dónde \bar{c}_{mac} es la cuerda aerodinámica media y C_{M_w} es el coeficiente de momento aerodinámico alar. Este coeficiente de momentos de calculado en el centro aerodinámico del ala, que es el punto donde idealmente este coeficiente no varía respecto al ángulo de ataque, como se demuestra en Anderson (2011).

$$M_w = \bar{q}_\infty S_w \bar{c}_{mac} C_{M_w} \quad (2.10)$$

Recordando que las fuerzas aerodinámicas suelen definirse respecto al marco

aerodinámico, por lo que deben proyectarse al marco del cuerpo con tal de calcular las reacciones que estas tienen en el vehículo; como se muestra en la figura 2.7.

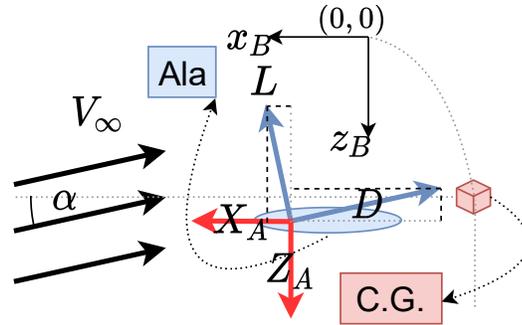


FIGURA 2.7: Relación del marco aerodinámico y el marco del cuerpo, variando α .

La ecuación (2.11) expresa lo anterior descrito, ha de notarse que el vector de fuerzas aerodinámicas en el cuerpo es denotado por la variable $F_{\{B,A\}}$, el vector de fuerzas aerodinámicas en el marco aerodinámico está dado por F_A y la matriz de rotación del marco aerodinámico al marco del cuerpo esta expresada por $R_{\{B \leftarrow A\}}$ (Cook (2007)). Se hizo un cambio al expresar las funciones trigonométricas en la matriz de rotación $R_{\{B \leftarrow A\}}$, denotando a las funciones seno y coseno del ángulo de ataque (α) con c_α y s_α , respectivamente.

$$F_{\{B,A\}} = R_{\{B \leftarrow A\}} F_A$$

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -L \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

No se han incluido las fuerzas laterales en la ecuación (2.11), pues se está asumiendo que la aeronave no experimenta un ángulo de derrape (β) y no se estarían produciendo fuerzas aerodinámicas en la dirección "y".

El diagrama de la figura 2.8 muestra las fuerzas aerodinámicas y el momento aerodinámico producidas por el ala, nótese que la dirección del momento aerodinámico (M_w) no se refiere al sentido del giro positivo, sino al valor negativo del coeficiente

de momento aerodinámico alar (C_{M_w}).

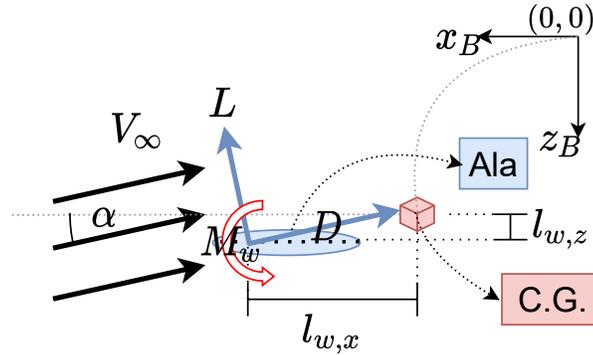


FIGURA 2.8: Fuerzas y momentos aerodinámicos del ala ($\beta = 0$).

Se está considerando que el centro aerodinámico se encuentra alineado con el centro de gravedad en la dirección "z", es decir $l_{w,z} = 0$. Entonces, la fuerza proyectada X_A no produciría un brazo de palanca. El momento en el eje lateral producido por aerodinámicamente ($M_{A,q}$) que se ejerce en la aeronave es el resultado del momento aerodinámico del ala (M_w), mas momento del producto cruz de las fuerzas aerodinámicas del ala con el brazo de palanca entre el centro aerodinámico alar y el centro de gravedad del vehículo; como se expresa en la ecuación (2.12).

$$\begin{aligned} M_{\{A,q\}} &= M_w - l_{\{w,x\}} Z_A \\ &= M_w + l_{\{w,x\}} (s_a D + c_a L) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.4.2 FUERZAS Y MOMENTOS DE LA PLANTA DE PROPULSIÓN

La planta de propulsión es un sistema de alas rotativas cuyos ejes de rotación son impulsados por motores eléctricos. La fuerza de empuje neta, así como el torque generado por la hélice, están en función de la velocidad angular de la hélice, de la velocidad incidente del flujo, su dirección respecto al eje de giro; así como de la geometría de la hélice, definida por el perfil aerodinámico, la cuerda y el ángulo

torsión a lo largo de la dirección longitudinal de la pala, número de Reynolds y de Mach entre otros parámetros bajo los que se diseñan estos dispositivos.

Es necesario expresar la relación entre las variables que describen el sistema de propulsión y las reacciones resultantes de forma simplificada para estimar las condiciones en el que este operaría durante el vuelo recto y nivelado. La figura 2.9 esquematiza las fuerzas de propulsión actuando en el plano xz del vehículo, donde F_a se refiere al vector resultante de la suma de la fuerza de los rotores frontales y F_b es el vector de fuerza producido por el rotor trasero. Las componentes de estos últimos vectores de fuerza en las direcciones x_B y z_B se diferencian por los subíndices x y z , respectivamente; así como el color gris de sus flechas. Estas componentes son proyección ocasionadas por la rotación de los rotores en el lateral, que es dada por los ángulos η_a y η_b para cada rotor; nótese que este par de ángulos es medido respecto a la dirección longitudinal (x_B). También se especifica la posición de los rotores respecto al centro de gravedad (C.G.), por las variables identificadas con l y por los subíndices referentes a los rotores frontales (a), el trasero (b) o a las dirección en el plano (x ó z).

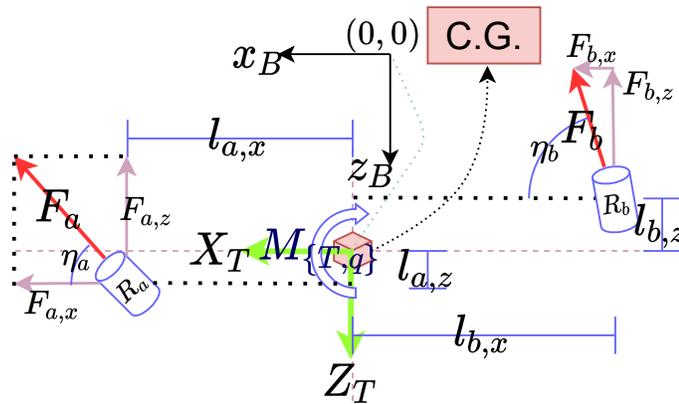


FIGURA 2.9: Esquema general de fuerzas propulsivas actuando en el plano XZ de la aeronave en condiciones de equilibrio.

La figura 2.9 muestra también las componentes netas de fuerza de propulsión en la dirección longitudinal (X_T) y vertical (Z_T), así como la reacción de momento

actuando en el eje lateral ($M_{\{T,q\}}$) de la aeronave en condiciones de equilibrio; esto es definido en la ecuación (2.13). Otro punto a especificar es que se asume que los rotores están alineados longitudinalmente con el centro de gravedad, por lo que su posición vertical relativa es cero, es decir $l_{a,z} = l_{b,z} = 0$. Las dos variables anteriores, a pesar de ser incluidas en el diagrama con fines ilustrativos, se han omitido para el cálculo de los momentos en este apartado, esperando que la desviación de este valor en el diseño final no produzca resultados contraproducentes.

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Z_T \\ M_{\{T,q\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{a,x} + F_{b,x} \\ -F_{a,z} - F_{b,z} \\ F_{a,z}l_{a,x} - F_{b,z}l_{b,x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

La ecuación (2.14) relaciona los vectores de fuerza F_a y F_b con sus componentes horizontal y vertical determinadas por sus respectivos ángulos η .

$$\begin{aligned} F_{\{a,x\}} &= c_{\eta_a} F_a, & F_{\{b,x\}} &= c_{\eta_b} F_b \\ F_{\{a,z\}} &= s_{\eta_a} F_a, & F_{\{b,z\}} &= s_{\eta_b} F_b \end{aligned} \quad (2.14)$$

La magnitud del vector de los vectores de fuerza F_a y F_b es equivalente a la suma vectorial sus respectivas componentes perpendiculares, como lo expresa la ecuación (2.15).

$$\begin{aligned} F_a &= \sqrt{F_{a,x}^2 + F_{a,z}^2} \\ F_b &= \sqrt{F_{b,x}^2 + F_{b,z}^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La deflexión de los rotores se calcula de forma trigonométrica, como lo expresa la ecuación (2.16). Esto sólo es valido asumiendo que el empuje producido por cada rotor es invariante a su orientación, lo cuál no es del todo cierto puesto que el flujo incidente cambia la razón de avance J de la hélice, por lo sí cambian las fuerzas aerodinámicas producidas. Este modelo describe más fielmente las fuerzas producidas en de vuelo estacionario, pero lo utilizaremos para realizar una primera aproximación.

$$\begin{aligned}\eta_a &= \text{atan2}(F_{\{a,x\}}, F_{\{a,z\}}) \\ \eta_b &= \text{atan2}(F_{\{b,x\}}, F_{\{b,z\}})\end{aligned}\tag{2.16}$$

Durante esta etapa del análisis se fijará la deflexión del rotor de cola en la posición vertical, es decir $\eta_b = 90^\circ$, con el fin de simplificar las ecuaciones equilibrio y más adelante ajustar este grado de libertad (η_b) a conveniencia. Por lo tanto, sólo se tomará en cuenta la componente vertical del rotor de cola. Considerando lo anterior, podemos reescribir la ecuación (2.13) y expresarla en forma matricial, como está hecho en la ecuación (2.17).

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Z_T \\ M_{\{T,q\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & l_{\{a,x\}} & -l_{\{b,x\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\{a,x\}} \\ F_{\{a,z\}} \\ F_{\{b,z\}} \end{bmatrix}\tag{2.17}$$

2.4.3 BALANCE DE FUERZAS Y MOMENTOS

Ahora se definirán las condiciones a partir de las cuál se realiza el diseño del prototipo. Durante la maniobra de vuelo recto y nivelado, o bien, vuelo crucero, el vehículo se desplaza manteniendo una velocidad y elevación uniformes, esto supone que las fuerzas y momentos aerodinámicos se encuentran en equilibrio con las fuerzas y momentos producidos por la planta de propulsión. Se debe considerar cuál es el estado de las variables que determinan esta condición de vuelo recto y nivelado. La figura 2.10 ilustra para una aeronave en general, los ángulos aerodinámicos.

Debe de notarse que en la figura 2.10 los ángulos ϕ_W , θ_W y ψ_W son tomados de las coordenadas del vehículo respecto la dirección del viento, no propiamente respecto al marco inercial, el cuál está denotado por el subíndice V . Esta figura se incluye para ilustrar las variables tomadas en cuenta en el balance, las variables de orientación se detallan en el capítulo de modelado (apartado 3.2).

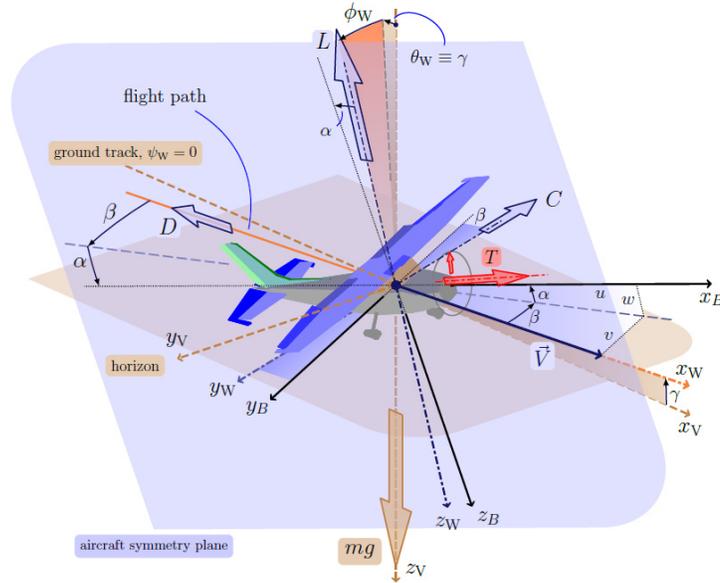


FIGURA 2.10: Marcos de referencia de una aeronave general (Marco *et al.* (2007)).

Primeramente definamos la tasa de ascenso (\dot{z}), que indica la velocidad a la que la aeronave cambia su altitud. Esta variable depende de la velocidad de la aeronave (V), de los ángulos de orientación para el cabeceo (θ) y alabeo (ϕ), y de los ángulos aerodinámicos (α y β); como se expresa en la ecuación (2.18) tomada de Marco *et al.* (2007).

$$\dot{z} = V [s_{\beta} c_{\theta} s_{\phi} - c_{\beta} c_{\alpha} s_{\theta} + c_{\beta} c_{\phi} s_{\alpha} c_{\theta}] \quad (2.18)$$

Debido a que se analizarán las condiciones de equilibrio para vuelo recto y nivelado, se utilizará el subíndice cr que representa el nombre de esta maniobra (vuelo *crucero*). En esta condición se asume que el vehículo no presenta un ángulo de alabeo ($\phi_{cr} = 0$), tampoco experimenta velocidad lateral, por ende no tiene ángulo de derrape ($\beta_{cr} = 0$). Dadas estas condiciones podemos reescribir la ecuación (2.18) sustituyendo los valores de las variables, como se expresa en 2.19.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{cr} &= V_{cr} [(0)c_{\theta_{cr}}(0) - (1)c_{\alpha_{cr}}s_{\theta_{cr}} + (1)(1)s_{\alpha_{cr}}c_{\theta_{cr}}] \\ \dot{z}_{cr} &= -c_{\alpha_{cr}}s_{\theta_{cr}} + c_{\theta_{cr}}s_{\alpha_{cr}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

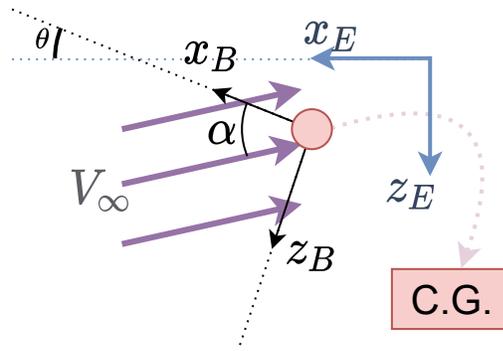


FIGURA 2.11: Ángulo de ataque (α) y ángulo de cabeceo (θ).

La figura 2.11 muestra un esquema sobre la relación del ángulo de ataque y el ángulo de cabeceo, con las coordenadas del cuerpo. Se observa que en la ecuación (2.19) la tasa de ascenso depende de estas dos variables, α y θ . Reordenando términos de (2.19), se obtiene que para mantener una tasa de ascenso nula, es decir $\dot{z}_{cr} = 0$, α_{cr} y θ_{cr} deben tener un valor idéntico; tal como se expresa en la ecuación (2.20), dónde t_θ y t_α se refieren a la función tangente de los ángulos anteriores.

$$\begin{aligned}
 c_{\alpha_{cr}} s_{\theta_{cr}} &= c_{\theta_{cr}} s_{\alpha_{cr}} \\
 \frac{s_{\theta_{cr}}}{c_{\theta_{cr}}} &= \frac{s_{\alpha_{cr}}}{c_{\alpha_{cr}}} \\
 t_{\theta_{cr}} &= t_{\alpha_{cr}} \\
 \theta_{cr} &= \alpha_{cr}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

La condición de esta ecuación (2.20) se utilizará para encontrar el resto de las variables de que definen el vuelo recto y nivelado. Se continua ahora por definir la tasa de cambio de velocidad (\dot{V}) para una aeronave en general, expresada por la ecuación (2.21) tomada de Duke *et al.* (1988); dónde m es la masa del vehículo, g la aceleración de la gravedad y Y_T es la componente lateral de la fuerza de propulsión, el resto de la variables se había definido anteriormente.

$$\dot{V} = \frac{1}{m} [-D + X_T c_\alpha c_\beta + Y_T s_\beta + Z_T s_\alpha c_\beta] + g (s_\beta s_\phi c_\theta - c_\alpha c_\beta s_\theta + s_\alpha c_\beta c_\phi c_\theta) \tag{2.21}$$

Como se mencionó, esta ecuación (2.21) es para un caso general, en el caso del prototipo propuesto no cuenta con una componente lateral de fuerza de propulsión. Considerando que no se experimenta aceleración en la maniobra que se está analizando, es decir $\dot{V} = 0$, se reescribe la ecuación (2.21) haciendo las mismas asunciones hechas para la ecuación (2.19) y se simplifican términos, como se muestra en la ecuación (2.22).

$$\begin{aligned} 0 = \dot{V}_{cr} &= \frac{1}{m} [-D + X_T c_{\alpha_{cr}} + Z_T s_{\alpha_{cr}}] + g (-c_{\alpha_{cr}} s_{\theta_{cr}} + s_{\alpha_{cr}} c_{\theta_{cr}}) \\ 0 &= -D + X_T c_{\alpha_{cr}} + Z_T s_{\alpha_{cr}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Este resultado indica que en vuelo recto y nivelado, el arrastre debe ser compensado por las componentes horizontal y vertical de la planta de propulsión (X_T y Z_T) proyectadas en el vector de velocidad V de marco aerodinámico.

Para cumplir con las condiciones de vuelo la tasa del ángulo de ataque también debe ser nula, esta es expresada en la ecuación (2.24); esta se obtenida derivando la definición del ángulo de ataque, como se demuestra en Marco *et al.* (2007). Esta ecuación relaciona de forma general las variables de la aeronave con la tasa de cambio, donde a diferencia de las ecuaciones anteriores (2.21 y 2.18) ahora involucra las velocidades angulares p , q , y r , de los ejes longitudinal, lateral y vertical del vehículo, respectivamente.

$$\dot{\alpha} = q - t_{\beta} (p c_{\alpha} - r s_{\alpha}) + \frac{1}{m V c_{\beta}} [-L - X_T s_{\alpha} + Z_T c_{\alpha}] + \frac{g}{V c_{\beta}} (s_{\alpha} s_{\theta} + c_{\alpha} c_{\phi} c_{\theta}) \quad (2.23)$$

Debido a que en la condición de vuelo propuesta, se asume que no se experimenta alguna velocidad angular del cuerpo. Lo cuál simplifica las expresión (2.23) para vuelo recto y nivelado; como se expresa en la ecuación (2.24), además que se ha substituido el resto de las variables por su valor en condiciones de equilibrio.

$$\dot{\alpha}_{cr} = \frac{1}{mV_{cr}} [-L - X_T s_{\alpha_{cr}} + Z_T c_{\alpha_{cr}}] + \frac{g}{V_{cr}} (s_{\alpha_{cr}} s_{\theta_{cr}} + c_{\alpha_{cr}} c_{\theta_{cr}}) \quad (2.24)$$

Reordenando los términos de (2.24) y simplificando, se obtiene en la ecuación (2.25).

$$0 = -L - X_T s_{\alpha_{cr}} + Z_T c_{\alpha_{cr}} + gm \quad (2.25)$$

Por lo tanto, las fuerzas verticales deben estar en equilibrio para mantener la tasa de ángulo de ataque nula ($\dot{\alpha}_{cr} = 0$).

Finalmente queda por analizar la tasa de cambio de la velocidad angular q , que es la velocidad de giro alineada al eje lateral de la aeronave. Esta es expresada en la ecuación (2.26), que fue tomada de Cook (2007). En esta ecuación ahora aparecen los términos I_x , I_y y I_z , que son las componentes diagonales del tensor de inercia de la aeronave.

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y} [pr(I_z - I_x) + M_{\{T,q\}} + M_{\{A,q\}}] \quad (2.26)$$

Reescribiendo esta ecuación para el caso de vuelo horizontal y asumiendo que no se experimentan velocidades angulares del cuerpo de la aeronave, se produce la expresión (2.27).

$$0 = \dot{q}_{cr} = \frac{1}{I_y} [M_{\{T,q\}} + M_{\{A,q\}}] \quad (2.27)$$

$$0 = M_{\{T,q\}} + M_{\{A,q\}}$$

Esto muestra que el balance de momentos actuando en el eje lateral mantiene la tasa de cambio de la velocidad angular longitudinal igual a cero $\dot{q}_{cr} = 0$.

A partir de las ecuaciones (2.22), (2.25) y (2.27) se forma el sistema de ecuaciones (2.28), que aísla el vector de fuerzas y momentos producidos por la planta de

propulsión.

$$\begin{bmatrix} D \\ L - gm \\ -M_w - l_{\{w,x\}}(s_{\alpha_{cr}}D + c_{\alpha_{cr}}L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha_{cr}} & s_{\alpha_{cr}} & 0 \\ -s_{\alpha_{cr}} & c_{\alpha_{cr}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_T \\ Z_T \\ M_{\{T,q\}} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Despejando para el vector de fuerzas y momentos de la planta de propulsión, obtenemos la ecuación (2.29).

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Z_T \\ M_{\{T,q\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha_{cr}} & -s_{\alpha_{cr}} & 0 \\ s_{\alpha_{cr}} & c_{\alpha_{cr}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ L - gm \\ -M_w - l_{\{w,x\}}(s_{\alpha_{cr}}D + c_{\alpha_{cr}}L) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Finalmente, se expresa el vector $[F_{\{a,x\}} \ F_{\{a,z\}} \ F_{\{T,3\}}]^T$ despejándolo de la ecuación (2.17), tal como lo expresa la ecuación (2.30). También se expresa la equivalencia de las fuerzas y momentos de la planta de propulsión, con las fuerzas aerodinámicas en la ecuación (2.29).

$$\begin{bmatrix} F_{\{a,x\}} \\ F_{\{a,z\}} \\ F_{\{b,z\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-l_{\{b,x\}}}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} & \frac{1}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} \\ 0 & \frac{-l_{\{a,x\}}}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} & \frac{-1}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_T \\ Z_T \\ M_{\{T,q\}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{\{a,x\}} \\ F_{\{a,z\}} \\ F_{\{b,z\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha_{cr}} & -s_{\alpha_{cr}} & 0 \\ \frac{-l_{\{b,x\}}s_{\alpha_{cr}}}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} & \frac{-l_{\{b,x\}}c_{\alpha_{cr}}}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} & \frac{1}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} \\ \frac{-l_{\{a,x\}}s_{\alpha_{cr}}}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} & \frac{-l_{\{a,x\}}c_{\alpha_{cr}}}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} & \frac{-1}{l_{\{a,x\}}+l_{\{b,x\}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_w \\ L_w - gm \\ -M_w - l_{\{w,x\}}(s_{\alpha_{cr}}D_w + c_{\alpha_{cr}}L_w) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Esto muestra que las fuerzas del sistemas de propulsión requeridas para el equilibrio en la condición de vuelo horizontal dependen de las fuerzas aerodinámicas (aisladas en forma de vector en la ecuación (2.30)) y de la posición de los propulsores respecto al centro de gravedad.

2.4.4 GEOMETRÍA ALAR

Recordando las restricciones dimensionales dictadas por la sección de pruebas del túnel de viento con un volumen $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1.5\text{m}$ se propone un ala embebida con el fuselaje de la aeronave. Lo anterior con el objetivo de dedicar al ala mayor porcentaje del volumen del vehículo, procurando que los componentes considerado tengan suficiente espacio para ser instalados cercanos al centro de masa de la aeronave. Un bosquejo es mostrado en la figura 2.6, donde se ve una vista de plataforma con líneas de potenciales perímetros de la superficie alar.

Uno de los criterios para diseñar la geometría alar es que esta última sea capaz incorporar la batería y computadora de vuelo en la región cercana al centro de gravedad, y de proveer suficiente espacio como para balancear el peso estructural ajustando la posición de la batería. La figura 2.12 representa en un croquis la longitud de las secciones de la semi-ala y la posición del borde de ataque de estas secciones, respecto al centro de masa ideal del vehículo.

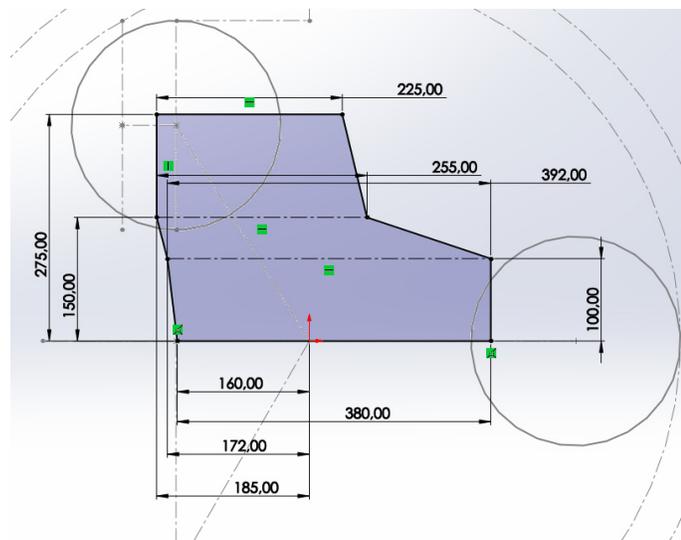


FIGURA 2.12: Croquis del perímetro del área de la plataforma alar.

La tabla 2.8 describe las secciones de la semi-ala simétrica representada por la figura 2.12. Esta tabla especifica el ángulo de torsión (α_i) de cada sección respecto al eje longitudinal de la aeronave. Este torcimiento alar se fijó para que el ala a cero

grados de ángulo de ataque ($\alpha = 0$) quede a la mitad de su envolvente aerodinámica, como se verá más adelante en este capítulo.

Sección	x_{LE} [mm]	y_{LE} [mm]	Cuerda [mm]	Torcimiento α_i [°]
# 1	160	0	380	11
# 2	172	100	392	11
# 3	185	150	255	11
# 4	185	275	225	10

TABLA 2.8: Perfiles aerodinámicos considerados para el semi-ala.

Considerando las especificaciones para una semi-ala simétrica cuya es geometría es descrita en la Tabla 2.8, se compararon tres alas formadas con diferentes combinaciones perfiles aerodinámicos, tal y como se describe en la Tabla 2.9. Los perfiles Goe226 (A.1b) y el Eppler420 (A.1a) fueron seleccionados por ser perfiles con coeficientes de sustentación relativamente altos para bajo número de Reynolds. Como lo muestra la ecuación (2.26), el momento aerodinámico del ala afecta directamente la condición de equilibrio del vehículo en crucero. Fue necesario seleccionar un perfil con bajo momento aerodinámico para satisfacer el balance de momentos en vuelo crucero; por ello se seleccionó el NACA55116 (A.1c), que dentro de la serie 5, es un perfil de bajo momento aerodinámico y alto coeficiente de sustentación. El perfil IntW1 (A.1d) se generó a partir de los perfiles GOE226 y el NACA55116, tratando de generar un perfil de características intermedias.

Ala	Sección #1	Sección #2	Sección #3	Sección #4
Ala #1	IntW1	IntW1	Eppler420	Eppler420
Ala #2	NACA55116	NACA 55116	GOE226	GOE226
Ala #3	GOE226	GOE226	Eppler420	Eppler420

TABLA 2.9: Perfiles aerodinámicos considerados para el semi-ala.

Para el cálculo de los coeficientes aerodinámicos se empleó la aplicación XFLR5. Esta aplicación emplea el código de XFOIL, el cuál fue diseñado para el cálculo de coeficientes aerodinámicos de perfiles de bajo número de Reynolds, como se describe en Drela (1989). Se creó un modelo para cada combinación de perfiles de la tabla 2.9, tomando los datos de la geometría alar de la tabla 2.8. La figura 2.13 muestra las gráficas de las polar aerodinámica para cada modelo de ala. La geometría alar posee un número de Reynolds de 380,000 en la raíz y de 225,000 en la punta, según la condición de operación propuesta.

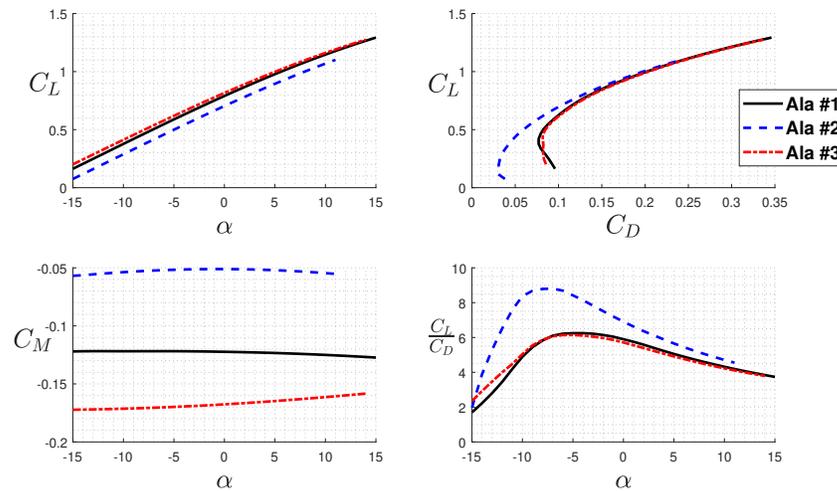


FIGURA 2.13: Comparativa entre alas con distintos perfiles.

La posición del centro aerodinámico se obtuvo de forma iterativa al modificar la posición del ala respecto al centro de masa del modelo en XFLR5, hasta obtener un coeficiente de momento aerodinámico aproximadamente constante, como se muestra en la figura 2.13. La tabla 2.10 muestra los parámetros físicos del ala necesarios para evaluar las ecuaciones de fuerza y momento aerodinámicos (2.8, 2.9 y 2.10) producidos por el ala.

Los diferentes modelos de geometrías alares pueden compararse evaluando la ecuación (2.30). Esta ecuación expresa las fuerzas generadas por los rotores del sistema de propulsión, para mantener el balance estático en condiciones de vuelo recto y nivelado. Los términos $F_{\{a,x\}}$ y $F_{\{a,z\}}$ representan las componentes de fuerza lon-

Área de plataforma alar	S_w	0.168 [m^2]
Cuerda aerodinámica media	\bar{c}_{mac}	0.323 [m]
Posición del centro aerodinámico	$l_{\{w,x\}}$	0.106 [m]

TABLA 2.10: Parámetros generales del ala.

gitudinal y vertical de los rotores frontales, respectivamente. El ángulo de deflexión η_a , se calcula mediante la ecuación (2.16). Según el modelo propuesto por las ecuaciones anteriores (2.30 y 2.16), este ángulo de deflexión está dado en función de la velocidad relativa al flujo del vehículo (V_∞) y su ángulo de ataque (α). La figura 2.14 muestra este ángulo de deflexión para cada modelo de ala de la tabla 2.9. Se puede apreciar que en el caso el ala #2, la dependencia estática tiene una mayor pendiente en comparación a las otras dos alas, lo cuál no es deseado porque aumenta la sensibilidad del diseño. El ala #1 y la #3, resultaron con valores muy parecidos para este balance. Una razón que podemos inferir a primera vista de esta diferencia es que las alas #1 y #3 tienen una eficiencia aerodinámica muy similar (2.13) y como el ala #2 posee un menor arrastre, es menor la componente de fuerza necesaria en la dirección longitudinal.

Continuando con las condiciones de carga para el balance estático, la fuerza neta del rotor trasero también es calculada a partir de la ecuación (2.30). La figura 2.15 compara las condiciones de fuerza del rotor trasero para cada ala en la tabla 2.9. En este caso, se puede observar que conforme aumenta la velocidad de vuelo, la fuerza necesaria para el balance disminuye. Acorde a la ecuación (2.30) y a las gráficas polares (2.13) podemos inferir que es el momento aerodinámico del ala, lo que ocasiona esta diferencia de carga para cada modelo de ala. El menor momento aerodinámico del ala #2, hace necesario una mayor carga para contrarrestar el momento producido por el levantamiento respecto al centro de masa. Se aprecia que esta condición determina un límite para el balance estático, debido a que no se está considerando un grado de libertad para cambiar de dirección de la fuerza F_b en este

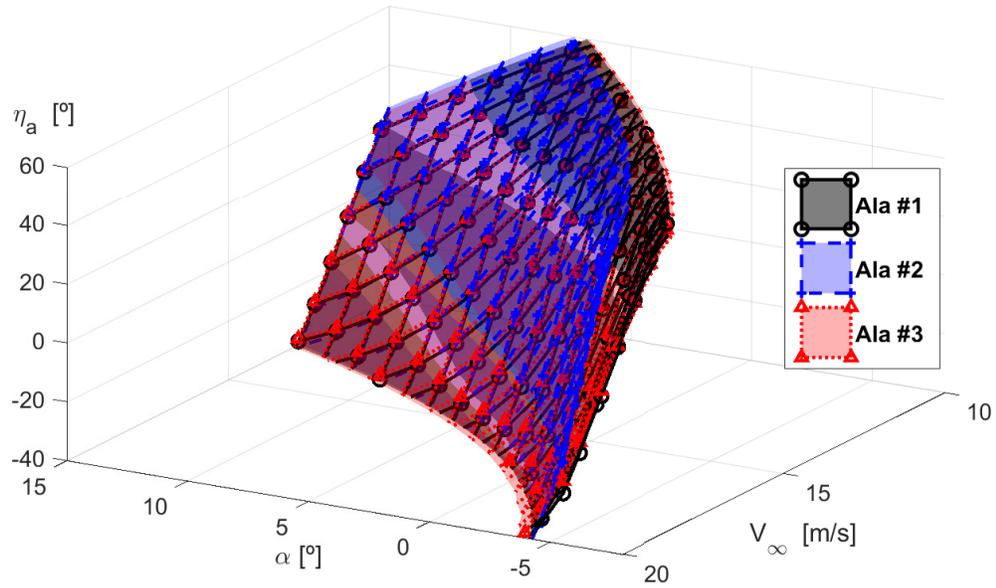


FIGURA 2.14: Ángulo de deflexión de los rotores frontales, necesario para el balance estático en vuelo recto y nivelado.

balance y si esta tomara un valor negativo o nulo ($F_b = 0$), la planta de propulsión no podría cumplir esta condición, o tendría que invertir la dirección de giro del rotor.

Ahora se considerará la fuerza total que deben desarrollar los rotores para el balance estático, la cual es expresada en la ecuación (2.31). Esta expresión representa el nivel de carga total de la planta de propulsión, independientemente de la dirección en que apunten las fuerzas de los rotores. Debe notarse que en esta expresión (2.31), los rotores frontales poseen la misma carga y orientación.

$$F_{tot} = \|F_a\| + \|F_b\| \quad (2.31)$$

La fuerza total de los rotores F_{tot} puede servir para evaluar los rotores los modelos de alas, basandose en los requerimientos de carga para la condición de balance estático. En este caso sería preferible seleccionar el modelo que demande menor carga a los motores, si se considera la eficiencia energética de la aeronave.

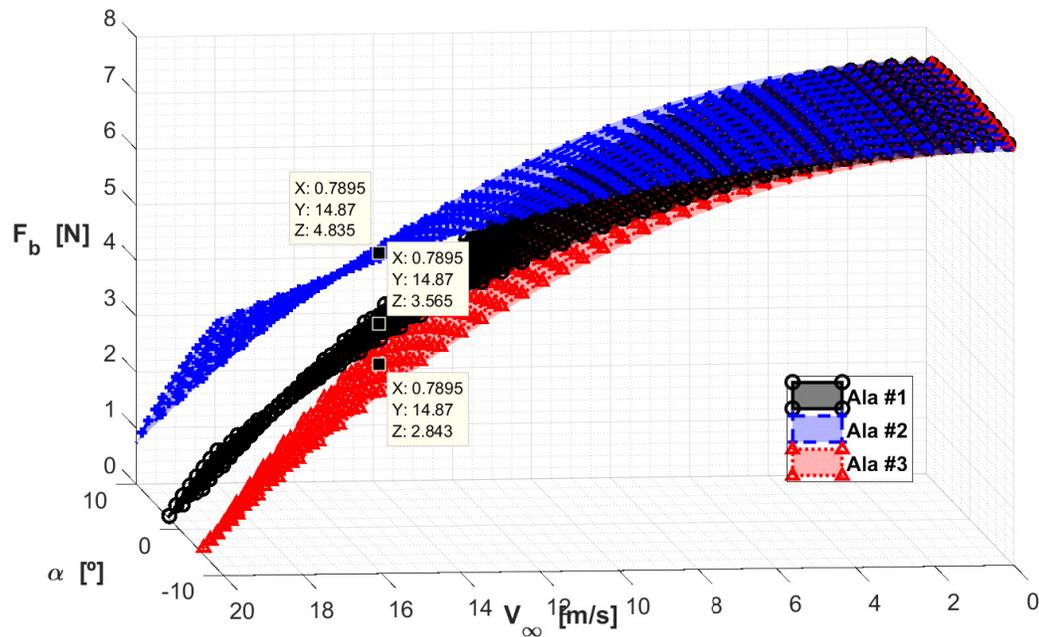


FIGURA 2.15: Fuerza el rotor de cola necesaria para balance estático en vuelo recto y nivelado.

La figura 2.16 muestra lo anterior, comparando la fuerza neta F_{tot} en las mismas condiciones de velocidad y ángulo de ataque, para cada modelo de ala de la tabla 2.9. Se aprecia que para una velocidad (V_∞) cercana a 15 [m/s], el ángulo de ataque (α) que menor carga demanda al sistema se encuentra cercano a 0° .

De los tres modelos de alas propuestos en la tabla 2.9, se seleccionó el **ala #1** considerando las evaluaciones anteriores. Resumidas en los siguientes puntos:

- La figura 2.14 muestra que a diferencia del ala #2, tiene una pendiente menor para la condiciones de balance estático respecto a la velocidad.
- En la figura 2.15 se observa que posee una mayor condición de carga para el rotor de cola, a diferencia del ala #3. El ala #2 posee demanda una condición de carga aún mayor, por lo que también podría ser un modelo de ala factible para el prototipo.
- Considerando la figura 2.16, podemos apreciar que el ala #1 demanda una

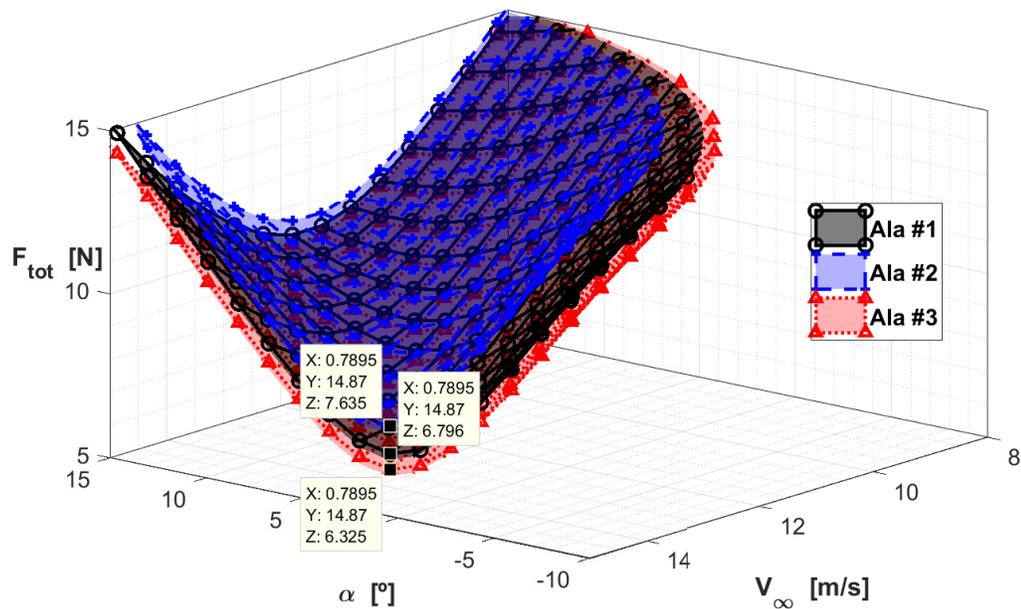


FIGURA 2.16: Fuerza total necesaria para el balance estático en vuelo recto y nivelado.

condición de carga ligeramente menor a la de el ala #2, por lo cuál se optó por esta ala #1.

- También se aprecia que el ala #3 es la que menos carga demanda en estas condiciones de vuelo (fig. 2.16), sin embargo debido a la baja condición de carga en el motor de cola de la figura 2.15, no se optó por esta ala, pues el rotor de cola debe mantener cierto nivel de carga como parte del sistema de actuación único de la aeronave, debido que la condición en que no posee carga sería que se encontrara apagado.

Se considera definida la geometría alar, tras el análisis anteriormente presentado.

2.4.5 ESTABILIZADORES VERTICALES Y HORIZONTAL

Como se puede observar en la figura 2.12, el círculo trasero que representa al rotor de cola se encuentra fuera de la geometría alar. Se optó por incluir un par de soportes verticales, en la forma de pequeños estabilizadores, con el fin de instalar el rotor de cola en tal posición. Así mismo, un ligero estabilizador horizontal, que es principalmente la base donde va rotor trasero.

Sección	x_{LE} [mm]	y_{LE} [mm]	z_{LE} [mm]	Cuerda[mm]	Espesor[mm]
Estabilizadores verticales					
#1	-164.31	± 90	80	106.4	24
#2	-141.95	± 90	56.31	149.44	25
#3	-210	± 90	35	100	20
#4	-305.5	± 90	-40	70	16
Semi-ala del estabilizador horizontal					
#1	-305.5	0	-40	70	25
#2	-305.5	100	-40	70	25

TABLA 2.11: Secciones del empenaje

La tabla 2.11 muestra la posición del borde de ataque (x_{LE} , y_{LE} , z_{LE}) de los estabilizadores verticales y el estabilizador horizontal. Con el fin de acomodar una viga de refuerzo de 6 mm, así como el cableado interno es necesario mantener un suficiente espesor a lo largo del estabilizado vertical.

los perfiles aerodinámicos de cada sección se generaron acorde a la nomenclatura NACA serie 4. Se le dió un ángulo de incidencia ($\alpha_{i,h}$) al estabilizador horizontal de 10° , con el objetivo de compensar ángulo de ataque generado por el flujo vertical inducido por la sustentación del ala.

Habiendo definido las geometrías para el empenaje, podemos incluirlas en el

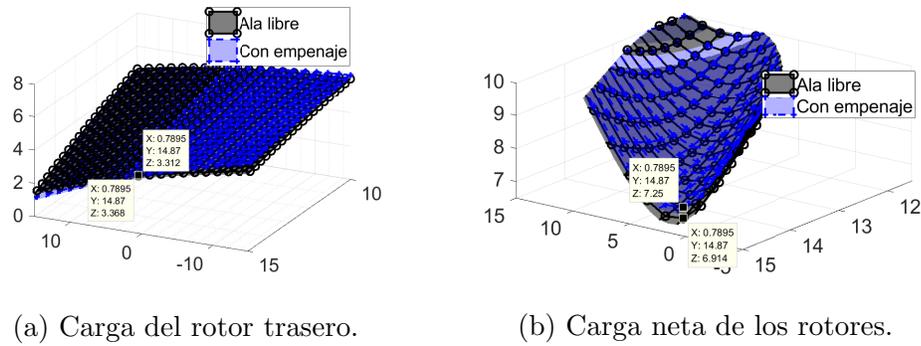


FIGURA 2.17: Cargas de equilibrio incluyendo empenaje.

modelo de XFLR5 para recalcular los coeficientes aerodinámicos y evaluar nuevamente las condiciones de equilibrio expresadas en la ecuación (2.30). La figura 2.17 muestra la carga necesaria del rotor de cola (2.17a) y de fuerza de propulsión neta (2.17b) para satisfacer las condiciones de equilibrio vuelo recto y nivelado. Se observa en la figura 2.17b que aumentó ligeramente la carga neta del vehículo, específicamente 0.336 N, volando a una velocidad (V_∞) de 14.87 m/s y con 0.7895° de ángulo de ataque (α).

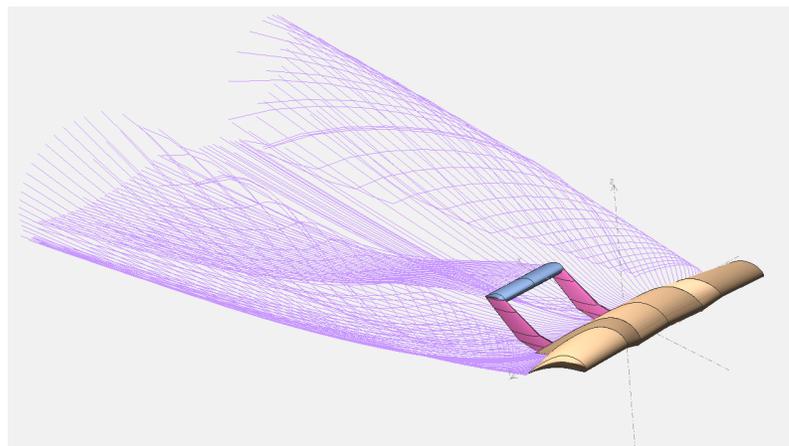


FIGURA 2.18: Líneas de flujo del modelo en XFLR5.

La figura 2.18 muestra las líneas de flujo del modelo hecho con el ala seleccionada (#1) e incluyendo ya el empenaje especificado en la tabla 2.11, volando una velocidad relativa al viento (V_∞) de 15 m/s y con un ángulo de ataque (α) de 14° , que es el ángulo de ataque máximo dónde convergía el análisis a esa velocidad.

En esta sección, el análisis del modelo aerodinámico abarca hasta este punto. aún no se está modelando la interacción del ala con los rotores, ni las modificaciones en la geometría al realizar el diseño a detalle por debido a la integración de componentes.

2.5 DISEÑO A DETALLE

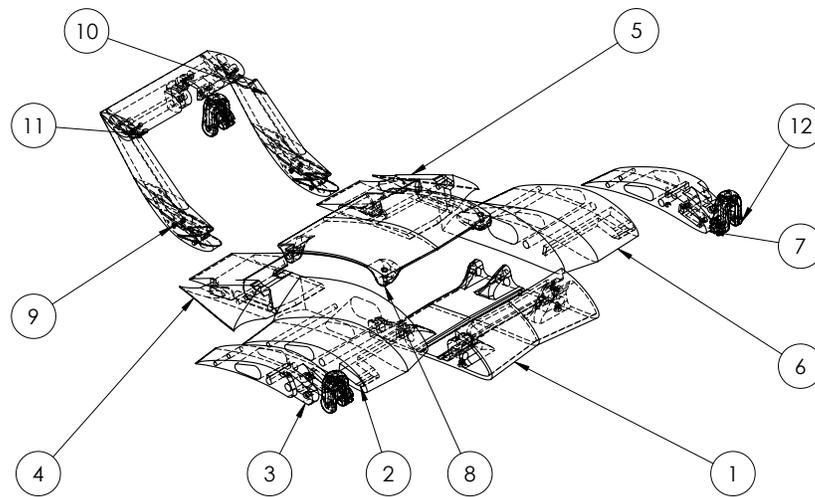


FIGURA 2.19: Vistas del prototipo propuesto.

La etapa del diseño aerodinámico, buscó que las dimensiones de los componentes del prototipo cupieran dentro del volumen de impresión en las maquinas de estereolitografía que se cuentan en el centro de investigación. Este volumen de impresión está dado por una base circular de 28 cm por una altura de 35 cm. A partir de la geometría aerodinámica descrita en las tablas 2.8 y 2.11 se generó un modelo CAD del cuerpo aerodinámico del vehículo, particionado conforme a al volumen de impresión disponible. La figura 2.19 muestra las piezas diseñadas del prototipo para ser manufacturadas por estereolitografía, cuyas piezas se enumeran en la tabla 2.12 2.19.

El peso total del conjunto del partes de la tabla 2.12 es de 0.97 kilogramos,

Número de pieza	Descripción
1	Sección central del ala
2	Ala intermedia derecha
3	Extremo alar derecho
4	Sección posterior derecha del ala central
5	Sección posterior izquierda del ala central
6	Ala intermedia izquierda
7	Extremo alar izquierdo
8	Cubierta de la sección central del ala
9	Estabilizador derecho
10	Estabilizador izquierdo
11	Estabilizador horizontal
12	Base basculante de los motores

TABLA 2.12: Lista de partes impresas del prototipo, indicadas en la figura 2.19.

piezas que fueron impresas en PLA. El peso de las piezas está en función de los parámetros de impresión, del volumen de ellas y de la densidad del material en que son impresas. Este peso podría ser reducido, si utilizáramos un material más ligero como ciertos tipos de PLA de baja densidad que expanden su volumen hasta un 300 %. Un análisis para optimizar las dimensiones de la geometría alar y material estructural sería de gran provecho para mejorar el desempeño del prototipo propuesto.

El resto de los componentes no impresos posicionados en el prototipo se pueden apreciar en la figura 2.20. Se aprecia que los rotores frontales se encuentran instalados los extremos de ala derecha e izquierdo, respectivamente. La geometría alar tiene cavidades internas para instalar los componentes de la planta de propulsión y aviónica.

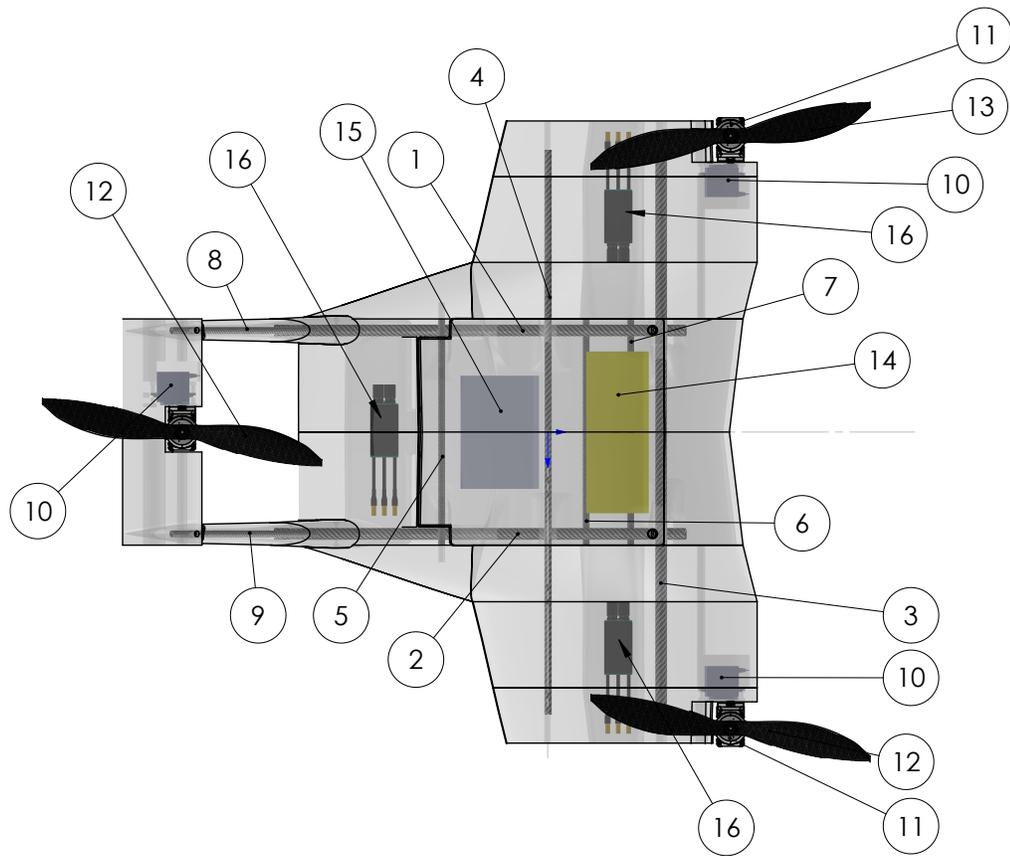


FIGURA 2.20: Componentes del prototipo.

La tabla 2.13 describe los componentes enumerados en la figura 2.20. Se puede apreciar en la figura anterior como la batería y computadora de vuelo están instaladas en las secciones central del ala, entre dos elementos estructurales longitudinales. En la sección posterior del ala central se encuentra el controlador de velocidad del motor trasero. En la parte posterior de la aeronave podemos apreciar al rotor trasero montado sobre el pequeño estabilizador horizontal, que también tiene una ranura para posicionar el servomotor del rotor de cola. Podemos apreciar que los estabilizadores horizontales, también poseen un refuerzo estructural de fibra de carbono, acoplado a las secciones posteriores del ala central. Los rotores frontales se encuentran instalados en los extremos derecho e izquierdo del ala, respectivamente. Las piezas de las alas están sujetas por dos largueros laterales, uno principal con diámetro de 10 mm

y otro secundario con diámetro de 6 mm.

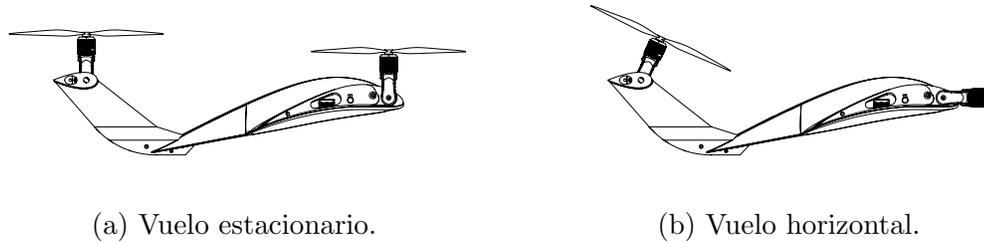
Pieza	Descripción
1	Larguero longitudinal izquierdo $10\varnothing \times 8\varnothing \times 355$ [mm]
2	Larguero longitudinal derecho $10\varnothing \times 8\varnothing \times 355$ [mm]
3	Larguero transversal frontal $10\varnothing \times 8\varnothing \times 500$ [mm]
4	Larguero transversal secundario $6\varnothing \times 4\varnothing \times 500$ [mm]
5	Larguerillo soporte de la cubierta central $6\varnothing \times 4\varnothing \times 200$ [mm]
6	Larguerillo soporte de batería central $6\varnothing \times 4\varnothing \times 200$ [mm]
7	Larguerillo soporte de batería central $6\varnothing \times 4\varnothing \times 200$ [mm]
8	Larguerillo soporte de estabilizador izquierdo $6\varnothing \times 4\varnothing \times 190$ [mm]
9	Larguerillo soporte de estabilizador derecho $6\varnothing \times 4\varnothing \times 190$ [mm]
10	Servomotor HS-5087MH HV
11	Motor KDE2315XF-965
12	Hélice CCW 10x4
13	Hélice CW 10x4
14	Batería LiPo 4s 5000 mAh
15	Computadora de vuelo
16	Controlador de velocidad de motor sin escobillas KDEXF-UAS35

TABLA 2.13: Lista de componentes del prototipo, indicadas en la figura 2.20.

Lo anterior describe de forma general los componentes de la aeronave, además de los componentes de ensamble como los tornillos, tuercas, baleros, el cableado de sus componentes eléctricos y arneses de comunicación electrónica.

Como se ha mencionado anteriormente, las plataformas basculantes de los rotores son controladas por los servomotores instalados continuo a las bases de los motores. La figura 2.21 muestra un esquema de las posiciones de los rotores en vuelo estacionario, con los rotores en posición vertical, y en vuelo horizontal, con los roto-

res frontales idealmente alineados a la dirección longitudinal del cuerpo y con una ligera deflexión del rotor de cola contribuyendo al empuje en dicha dirección.



(a) Vuelo estacionario.

(b) Vuelo horizontal.

FIGURA 2.21: Rotores en cada posición de vuelo.

Se aprecia el modelo digital del prototipo en la figura 2.22, en sus vistas lateral, de planta, frontal e isométrica. El diseño de este prototipo en particular se dejará hasta este punto.

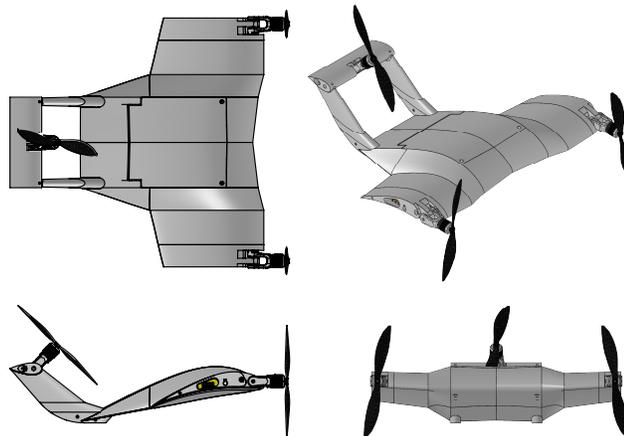


FIGURA 2.22: Vistas del prototipo propuesto.

Finalmente, se obtuvieron las propiedades de inercia y la desviación en el modelo digital del centro de gravedad, datos mostrados en la tabla 2.14. Estos datos son medidos a partir del origen de la aeronave, que en un principio se tomó como el centro de masa ideal del vehículo.

Se observa que la desviación del centro de gravedad es mínima, posiblemente mantener las relaciones dimensionales propuestas similares al triángulo equilátero

Parámetro	Valor	Unidades
Δ_x del C.G.	-0.0043	[m]
Δ_y del C.G.	-0.0004	[m]
Δ_z del C.G.	-0.0042	[m]
I_{xx}	0.0408	[kg - m ²]
I_{xy}	0.0002	[kg - m ²]
I_{xz}	0.001	[kg - m ²]
I_{yy}	0.0608	[kg - m ²]
I_{yz}	0	[kg - m ²]
I_{zz}	0.0961	[kg - m ²]
m	2.23	[kg]

TABLA 2.14: Propiedades de masa e inercia del prototipo.

contribuyó en gran manera que se mantuviera cercano al valor ideal. También podemos considerar a partir de los valores del tensor e inercia, denotados por I -subíndice según la dirección, el modelo digital está bien balanceado al tener sus componentes de inercia principales orientados casi idealmente con las direcciones de las coordenadas del cuerpo.

CAPÍTULO 3

MODELADO DINÁMICO

3.1 DINÁMICA DE CUERPO RÍGIDO

La base para el modelado de la dinámica de aeronaves es la dinámica de Newton-Euler para un cuerpo rígido. El modelo de Newton describe la conservación del momento lineal y angular de un cuerpo bajo la influencia de fuerzas y momentos aplicados sobre este, sin que sufra alguna deformación, es decir, asumiendo que es un cuerpo rígido. El análisis para obtener las ecuaciones diferenciales que expresan lo anterior podemos encontrarlo a detalle en MANN (1974). Sin embargo, optaremos por utilizar la notación utilizada en Duke *et al.* (1988), expresada en las ecuaciones (3.1) y (3.2), que justamente expresan la relación del momento lineal y angular con las fuerzas y momentos actuando en un cuerpo rígido, respectivamente en el marco de referencia del cuerpo (ver figura 3.1).

$$m(\dot{V}_b + \omega_b \times V_b) = F_b \quad (3.1)$$

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times J\omega_b = M_b \quad (3.2)$$

Dichas ecuaciones están expresadas de forma vectorial e involucran un total de seis variables para representar las componentes de dichos vectores. La variable V_b refiere

al vector de velocidad lineal del cuerpo de la aeronave, cuyas componentes axiales en la dirección longitudinal, transversal y vertical son expresadas por las variables u , v y w respectivamente, tal cual lo expresa la ecuación (3.3). La variable m representa la masa del cuerpo, en este caso el total de masa de la aeronave y F_b la suma de todas las fuerzas actuando en el cuerpo.

$$V_b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La velocidad angular del cuerpo es representada por ω_b , siendo también un vector con tres componentes tal como V_b , cuyas componentes están ordenadas consecutivamente por la dirección longitudinal, lateral y vertical, tal como lo define la ecuación (3.4). La variable M_b representa la suma total de momentos actuando en el cuerpo y J es el tensor de inercia MANN (1974) cuerpo del vehículo.

$$\omega_b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Las ecuaciones anteriores están definidas en las coordenadas del cuerpo de la aeronave, tal como lo expresa el diagrama 3.1. La orientación de las flechas indican la dirección en que las variables tienen valor positivo. La tabla 3.1 resume el conjunto de variables definidas en dicho diagrama. Se ha cambiado la notación de las fuerzas y momentos, a diferencia como se presenta en el diagrama, con el fin de distinguirlas de otras variables que se presentarán más adelante en el documento.

Dirección	Velocidad axial	Velocidad angular	Fuerzas	Momentos
Longitudinal	u_b	p	$F_{\{b,X\}}$	$M_{\{b,L\}}$
Lateral	v_b	q	$F_{\{b,Y\}}$	$M_{\{b,M\}}$
Vertical	w_b	r	$F_{\{b,Z\}}$	$M_{\{b,N\}}$

TABLA 3.1: Variables definidas en las coordenadas del cuerpo de la aeronave.

McRuer *et al.* (1973)

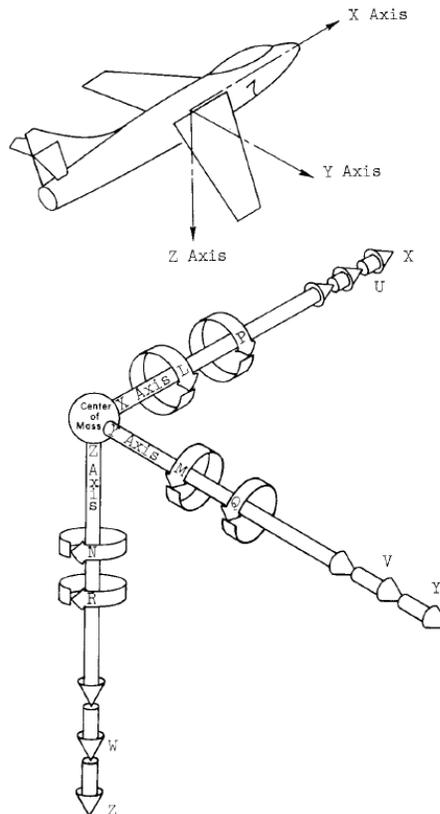


FIGURA 3.1: Variables de velocidad, fuerzas y momentos externos definidas en las coordenadas del cuerpo McRuer *et al.* (1973).

3.1.1 DINÁMICA TRASLACIONAL

Hemos de aislar la tasa de cambio del vector de velocidad alineado con el cuerpo del vehículo expresado en (3.3), a partir de la relación del momento lineal con las

fuerzas actuando en el cuerpo en la ecuación (3.1); tal como lo expresa la ecuación (3.5).

$$\dot{V}_b = \frac{F_b}{m} - \omega_b \times V_b \quad (3.5)$$

3.1.2 DINÁMICA ROTACIONAL

La tasa de cambio para el vector de velocidad angular del cuerpo ha de ser obtenido tal como se expresó con el de velocidad. Éste puede aislarse a partir de la ecuación (3.2), tal como expresa la ecuación (3.6).

$$\dot{\omega}_b = J^{-1}(M_b - \omega_b \times J\omega_b) \quad (3.6)$$

Se puede observar que el tensor de inercia del cuerpo J es de suma relevancia para la dinámica rotación del cuerpo. Este suele asumirse que es definido a partir del centro de masa del cuerpo, con una estructura diagonal Cook (2007), sin embargo en caso de ser necesario también puede ser definido de forma general tal como es expresado en Duke *et al.* (1988), sin embargo en este trabajo se optó por asumirlo diagonal con tal de mantener la simplicidad del análisis.

3.2 MARCO DE REFERENCIA INERCIAL

Las ecuaciones definidas anteriormente describen la tasa de velocidad axial (3.5) y angular (3.6) definidas en las coordenadas del cuerpo de la aeronave. Sin embargo, es necesario describir el movimiento de la aeronave en un marco de referencia que se considera fijo, conocido también como inercial. Este marco cuando se encuentra alineado a la aeronave coincide en sus direcciones x , y y z según la convención

NED, que significa norte-este-abajo por sus siglas en inglés (north-east-down) Duke *et al.* (1988).

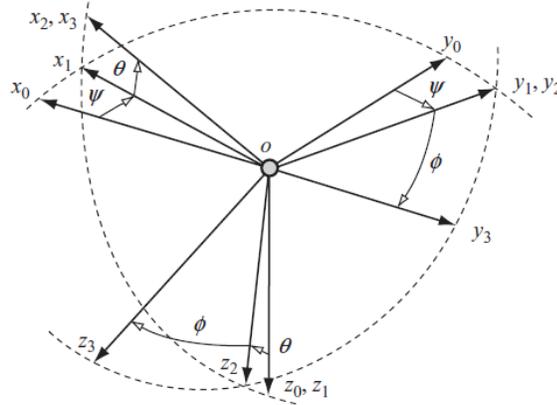


FIGURA 3.2: Esquema de orientación mediante rotaciones consecutivas conocidas como ángulos de Euler, tomado de Cook (2007).

La figura 3.2 muestra esta de forma compacta esta serie de rotaciones, dónde los ángulos ϕ , θ y ψ indican la orientación de la aeronave en el marco inercial. Sin embargo, es necesario definir las ecuaciones que expresan la relación entre la conversión entre un sistema de coordenadas y otro. Podemos observar que el vector de coordenadas $[x_3 \ y_3 \ z_3]^T$ corresponde al sistema de coordenadas alineado al cuerpo de la aeronave. Estas coordenadas pueden ser expresadas como una rotación a lo largo del eje x denotada por el ángulo de alabeo ϕ , a partir de una orientación anterior expresada por $[x_2 \ y_2 \ z_2]^T$, definida en la ecuación (3.7).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= R_\phi \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

A su vez, el vector de coordenadas $[x_2 \ y_2 \ z_2]^T$ es obtenido a partir de una orientación previa $[x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ aplicando una rotación en el eje transversal y denotada por el ángulo de cabeceo θ , tal como lo define la ecuación (3.8).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\
&= R_\theta \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Finalmente, el vector de coordenadas $[x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ es transformado a partir de una orientación previa alineada con el marco de referencia inercial, denotada por el vector $[x_e \ y_e \ z_e]^T$; como es expresado en la ecuación (3.9).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\
&= R_\psi \begin{bmatrix} x_e & y_e & z_e \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{3.9}$$

La transformación lineal completa desde una orientación alineada con el marco inercial y las coordenadas del cuerpo aplicando las tres rotaciones a lo largo de cada eje del cuerpo es definida en la ecuación (3.10). Se ha cambiado el subíndice por (*b*) del vector de coordenadas en el cuerpo, con tal de identificarlo directamente, así como el vector del marco inercial por el subíndice (*e*).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\
&= R_\phi R_\theta R_\psi \begin{bmatrix} x_e & y_e & z_e \end{bmatrix}^T \\
&= R_{\{b \leftarrow e\}} \begin{bmatrix} x_e & y_e & z_e \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La transformación lineal de coordenadas en la ecuación (3.10), es denotada por la matriz $R_{\{b \leftarrow e\}}$ y esta es a su vez definida en la ecuación (3.11).

$$R_{\{b \leftarrow e\}} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & c\theta s\phi \\ c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Es importante denotar que esta transformación lineal es unitaria, por lo que no modifica la magnitud del vector transformado, tal como se aprecia en el diagrama 3.2. Esto genera que su matriz inversa es idéntica a su traspuesta. Por lo cual, la matriz que transforma el sistema de coordenadas definido en el marco del cuerpo al marco inercial, es dada por la traspuesta de $R_{\{b \leftarrow e\}}$, justo como lo expresa (3.12)

$$R_{\{e \leftarrow b\}} = R_{\{b \leftarrow e\}}^T \quad (3.12)$$

Por lo tanto, podemos expresar la transformación lineal de las coordenadas del cuerpo al marco inercial como la ecuación (3.13).

$$\begin{bmatrix} x_e & y_e & z_e \end{bmatrix}^T = R_{\{e \leftarrow b\}} \begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

La traslación en el marco inercial puede definirse a partir del vector de velocidad del cuerpo, transformándolo al sistema de coordenadas del marco inercial mediante la matriz $R_{\{e \leftarrow b\}}$. Esto se expresa en la ecuación (3.14), dónde la velocidad en el marco inercial es expresado como el vector $V_e = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$.

$$V_e = R_{\{e \leftarrow b\}} V_b \quad (3.14)$$

3.2.1 DINÁMICA DE ORIENTACIÓN

Las velocidades angulares del cuerpo están relacionadas con la tasa de cambio de los ángulos de Euler, según el orden de rotación en que es desarrollado el cómputo de la operación. Como cada rotación es computada sobre un eje determinado,

podemos asumir que la velocidades del cuerpo son equivalentes a la suma de las tasas de cambio de los ángulos de Euler como vectores individuales transformados linealmente para coincidir con las coordenadas del cuerpo, según el orden de rotación en que se presentan, tal como lo expresa la ecuación (3.15).

$$\begin{aligned}
 \omega_b &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_\phi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_\phi R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= R_a \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La matriz R_a en la ecuación (3.15) relaciona las tasas de cambio de los ángulos de Euler con las velocidades angulares del cuerpo. A partir de dicha ecuación podemos obtener la ecuación diferencial para los ángulos de orientación, calculando la matriz inversa de R_a ; que es tomada de Cook (2007). La ecuación (3.16) define las tasas de cambio de los ángulos de Euler, que a su vez son expresadas como un vector $\left(\dot{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T\right)$.

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &= R_a^{-1} \omega_b \\
 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3 MARCO DE REFERENCIA AERODINÁMICO

El marco de referencia aerodinámico define la orientación del cuerpo respecto al vector de velocidad de flujo incidente con este. Tal como lo muestra la figura 3.3,

dónde el subíndice a indica que es relativo a la velocidad del aire. Por lo que podemos definir los ángulos aerodinámicos como las ecuaciones (3.17) y (3.18).

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{w_a}{u_a} \right) \quad (3.17)$$

$$\beta = \text{asin} \left(\frac{v_a}{V_a} \right) \quad (3.18)$$

La magnitud del vector de velocidad incidente al flujo se expresa en la ecuación (3.19).

$$V_a = (u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

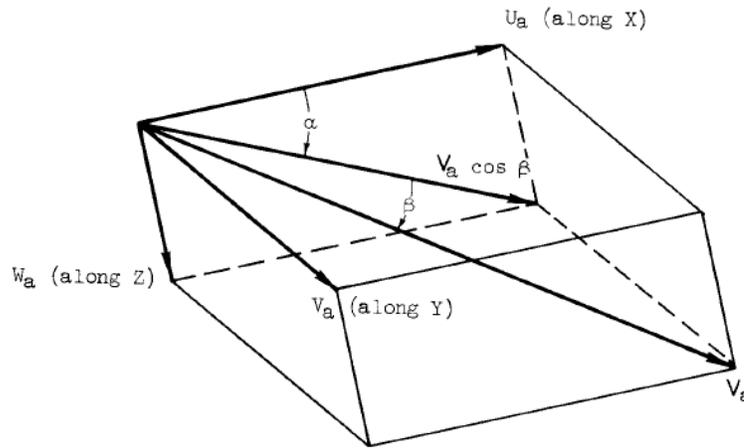


FIGURA 3.3: Relación entre las velocidades relativas respecto al flujo en el marco del cuerpo con los ángulos aerodinámicos α y β , como se expresa en Duke *et al.* (1988).

Es importante distinguir la diferencia entre la velocidad incidente de flujo y la velocidad del cuerpo cuyas tasa de cambio es definida en la ecuación (3.5), puesto que podemos observar en la ecuación (3.14) los vectores de velocidad del marco inercial y el marco del cuerpo coinciden en magnitud; sin embargo, esto no tiene que ser el caso en el marco aerodinámico debido a la presencia de ráfagas de viento. Asumiendo que no hay ráfagas, la magnitud de los vectores de velocidad en los tres

marcos de referencia son idénticas $V_e = V_a = V_b$, por lo que sería posible definir los ángulos aerodinámicos como las ecuaciones (3.20) y (3.21).

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{w}{u} \right) \quad (3.20)$$

$$\beta = \text{asin} \left(\frac{v}{V} \right) \quad (3.21)$$

La magnitud del vector de velocidad es expresada en (3.22) por la variable V , es definida de forma análoga a V_a en la ecuación (3.19).

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

Los ángulos aerodinámicos no solamente expresan la relación entre la velocidad relativa del flujo respecto al cuerpo de la aeronave, estos ángulos también expresan de forma general la transformación entre las coordenadas del cuerpo al marco de referencia aerodinámico. Las tres direcciones, longitudinal, lateral y longitudinal, pueden ser expresadas en ambos marcos de referencia mediante una transformación lineal como:

$$R_{\{b \leftarrow a\}} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta & -s_\alpha \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ s_\alpha c_\beta & -s_\alpha s_\beta & c_\alpha \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde $R_{\{b \leftarrow a\}}$ expresa la transformación de coordenadas entre las coordenadas del marco aerodinámico al marco del cuerpo.

Antes de definir las fuerzas y momentos aerodinámicos, se debe recordar la ecuación (2.7) de la presión dinámica definida en el capítulo 2, para el análisis de las fuerzas aerodinámicas actuando en el vehículo. Recordemos también, que no se está considerando el efecto de ráfagas de viento, por lo tanto la velocidad relativa al flujo (V_∞) y la magnitud de la velocidad de la aeronave en el marco inercial (V) son idénticas.

3.3.1 MARCO DE REFERENCIA LOCAL

Además de lo anterior, resulta conveniente definir un marco local de coordenadas para un componente del vehículo con el fin de modelar los ángulos aerodinámicos locales en dicho componente. Para definir de forma general un componente arbitrario se considerará que el origen del sistema de coordenadas de este componente arbitrario no necesariamente se encuentra en el centro de gravedad del vehículo, por lo que las velocidades angulares de la aeronave podrían inducir velocidades lineales en el origen del marco de referencia local de dicho componente. También se considerará que este marco de referencia local puede presentar una orientación arbitraria.

A continuación se definirá como transformar entre el sistema de coordenadas del cuerpo al sistema de coordenadas local del componente, utilizando una nomenclatura similar a las matrices de rotación para pasar del marco inercial al marco del cuerpo, definidas en la ecuación (3.11). Utilizando un orden de rotación xyz para ir del marco del cuerpo al marco al marco local, se define la primer matriz según el orden de la operación. Esta se denotará por el ángulo ϕ_i , dónde el subíndice i indica el componente junto con sus ángulos de orientación de este respecto al cuerpo:

$$R_{\phi_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\phi_i} & -s_{\phi_i} \\ 0 & s_{\phi_i} & c_{\phi_i} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

La siguiente rotación es realizada en un eje paralelo al eje lateral del cuerpo, y es denotada por el ángulo θ_i :

$$R_{\theta_i} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & 0 & s_{\theta_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{\theta_i} & 0 & c_{\theta_i} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Seguido de lo anterior, se define la rotación realizada en un eje paralelo al eje vertical

de la aeronave, denotada por el ángulo ψ_i :

$$R_{\psi_i} = \begin{bmatrix} c_{\psi_i} & -s_{\psi_i} & 0 \\ s_{\psi_i} & c_{\psi_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Finalmente podemos definir la operación general transformar un vector base en el marco del cuerpo al marco inercial, mediante la operación:

$$\begin{aligned} R_{\{i \leftarrow b\}} &= R_{\psi_i} R_{\theta_i} R_{\phi_i} \\ &= \begin{bmatrix} c_{\psi_i} & -s_{\psi_i} & 0 \\ s_{\psi_i} & c_{\psi_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & 0 & s_{\theta_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{\theta_i} & 0 & c_{\theta_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\phi_i} & -s_{\phi_i} \\ 0 & s_{\phi_i} & c_{\phi_i} \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} c_{\psi_i} & c_{\psi_i} s_{\theta_i} s_{\phi_i} - s_{\psi_i} c_{\phi_i} & c_{\psi_i} s_{\theta_i} c_{\phi_i} + s_{\psi_i} s_{\phi_i} \\ c_{\theta_i} s_{\psi_i} & s_{\psi_i} s_{\theta_i} s_{\phi_i} + c_{\psi_i} c_{\phi_i} & s_{\psi_i} s_{\theta_i} c_{\phi_i} - c_{\psi_i} s_{\phi_i} \\ -s_{\theta_i} & c_{\theta_i} s_{\phi_i} & c_{\theta_i} c_{\phi_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A pesar que no se utilizarán todos los ángulos de rotación para los componentes de la aeronave, se consideró conveniente definir esta transformación de coordenadas para futuros trabajos. Es necesario tomar en cuenta también, que para pasar del marco de referencia local al marco general del vehículo se debe utilizar la matriz inversa de $R_{\{i \leftarrow b\}}$, que para este caso consiste en su matriz traspuesta:

$$R_{\{b \leftarrow i\}} = R_{\{i \leftarrow b\}}^{-1} = R_{\{i \leftarrow b\}}^T \quad (3.28)$$

Ahora se prosigue a definir el vector de velocidad axial para una sección arbitraria en su marco local de referencia, dado por:

$$V_i = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

donde u_i , v_i y w_i son las componentes de velocidad longitudinal, lateral y vertical respectivamente. Así mismo, se debe definir la separación que tiene esta sección arbitraria respecto al centro de gravedad del vehículo:

$$l_{b,i} = \begin{bmatrix} l_{x,i} & l_{y,i} & l_{z,i} \end{bmatrix}^T \quad (3.30)$$

dónde los subíndices x , y y z indican las direcciones longitudinal, lateral y vertical de la aeronave. Se debe notar que este vector de separación se encuentra dado en el marco de referencia general del cuerpo.

El vector de velocidad de una sección arbitraria en su marco local (V_i) de la ecuación (3.29) se obtiene a partir de la rotación de la suma del vector de velocidad lineal del cuerpo mas el producto cruz entre el vector de velocidades angulares y el vector de distancia respecto al centro de gravedad:

$$V_i = R_{\{i \leftarrow b\}}(V_b + \omega_b \times l_{b,i}) \quad (3.31)$$

Dada la ecuación anterior, es conveniente formular los ángulos aerodinámicos también para una sección arbitraria. El ángulo de ataque se expresa como:

$$\alpha_i = \text{atan} \left(\frac{u_i}{w_i} \right) \quad (3.32)$$

que prácticamente es idéntica a la ecuación (3.20) excepto por el subíndice i puesto que se incluye la velocidad debido a la rotación del vehículo. De forma similar se define para el ángulo de barrido:

$$\beta_i = \text{asin} \left(\frac{v_i}{\bar{V}_i} \right) \quad (3.33)$$

donde \bar{V}_i es la magnitud del vector de velocidad de esta sección y que se define como:

$$\bar{V}_i = (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.34)$$

Considerando ahora la velocidad relativa al viento en una sección arbitraria del vehículo, se debe expresar la transformación de un vector en este marco aerodinámico local al marco local fijo en el cuerpo, tal como se hace en:

$$R_{\{i \leftarrow (a,i)\}} = \begin{bmatrix} c_{\alpha_i} c_{\beta_i} & -c_{\alpha_i} s_{\beta_i} & -s_{\alpha_i} \\ s_{\beta_i} & c_{\beta_i} & 0 \\ s_{\alpha_i} c_{\beta_i} & -s_{\alpha_i} s_{\beta_i} & c_{\alpha_i} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Ya una vez definidas las ecuaciones referentes al marco aerodinámico, se pueden definir las fuerzas y momentos en la siguiente sección.

3.4 FUERZAS Y MOMENTOS AERODINÁMICOS

El estudio aerodinámico generalmente es realizado mediante el análisis adimensional, que relaciona las unidades de las magnitudes físicas medibles sobre un objeto, o superficie alar en este caso específico, con parámetros físicos o variables del medibles del sistema en el que interacciona dicho cuerpo aerodinámico y el fluido en cuestión. A continuación se definirán los parámetros utilizados para caracterizar las fuerzas y momentos aerodinámicos.

Primeramente retomando un concepto mencionado en el capítulo 2, se considera la presión dinámica general del fluido:

$$\bar{q} = \frac{\rho_{\infty} V^2}{2} \quad (3.36)$$

dónde V es la velocidad relativa del viento con el cuerpo analizado y ρ_{∞} la densidad del flujo libre, que en este análisis se considera como constante, puesto que se operará a bajo número de Mach.

El siguiente parámetro a definir es la superficie S de interacción con el fluido, que en el caso particular de una geometría alar, esta superficie es la proyección de plataforma del ala a cero grados de ángulo de ataque ($\alpha = 0$). Además de este parámetro de superficie, en el caso de los momentos aerodinámicos se utiliza un parámetro de longitud; que generalmente es la cuerda aerodinámica media (\bar{c}) o la envergadura alar (b), según el momento que es está midiendo.

Es importante mencionar también, que no se está considerando los cambios de densidad debido al cambio de altitud. Para este modelo, se asume una densidad del viento constante a condiciones atmosféricas estándar, por lo tanto $\rho_{\infty} = 1.225 \text{ [kg/m}^3\text{]}$.

3.4.1 COEFICIENTES ADIMENSIONALES

Los coeficientes adimensionales procuran capturar la correlación entre la magnitud que se está midiendo, ya sea fuerza o momento, y las variables que describen la interacción fluido-cuerpo. Las magnitudes más conocidas generalmente son la fuerza de arrastre (D), la fuerza de sustentación (L) y el momento aerodinámico de cabeceo ($M_{Aero,q}$). La fuerza de arrastre se define como paralela a la dirección del vector de velocidad, a diferencia de la sustentación que es perpendicular a la dirección del vector de velocidad relativa con el viento y actúa únicamente en el plano $x - z$. Además de estas fuerzas, se puede estimar la fuerza lateral (Y) que experimenta la geometría aerodinámica, que para el caso de un cuerpo con simetría bilateral respecto a un plano $x - z$ alineado al origen, esta fuerza debería ser igual a cero, para un ángulo de derrape β igual a cero. Estas fuerzas se expresan de forma general como:

$$F_{Aero} = \bar{q} S C_{\{F_{Aero}\}}(\alpha, \beta, Re) \quad (3.37)$$

dónde F_{Aero} representa de forma general una de las tres fuerzas aerodinámicas D , Y ó L ; y le correspondería su coeficiente de fuerza denotado por $C_{\{F_{Aero}\}}$, que representa a los coeficientes C_D , C_Y y C_L para su respectiva fuerza aerodinámica. La presión dinámica \bar{q} es tomada de la ecuación (3.36).

Así mismo, los momentos aerodinámicos son producidos por estas fuerzas aerodinámicas actuando en cada punto de la superficie del cuerpo, pero midiendo desde un punto específico el momento producido para cada dirección (longitudinal, lateral y vertical). Cuando esto se analiza en el caso bidimensional, es decir, en un perfil aerodinámico, únicamente se estima el momento que es perpendicular al plano de las coordenadas del perfil. Generalmente esto se realiza en el centro aerodinámico del perfil, dónde idealmente para un perfil simétrico, el momento neto producido es igual a cero y es aproximadamente a un cuarto de la longitud de la cuerda. Para un perfil asimétrico, este punto se considera con un momento constante pero no necesariamente es un punto fijo, pero aproximadamente suele estar localizado al rededor de un cuarto de la cuerda del perfil. Para una geometría alar finita, cada una de

sus secciones es definida en un marco de referencia local $x - z$ y su envergadura se extiende en la dirección lateral y . La suma de momentos también respecto al llamado centro aerodinámico de la aeronave, dónde idealmente estos momentos se mantiene constantes, o bien, el cambio de ellos es mínimo. Para el caso del momento de cabeceo alar, este centro aerodinámico se sigue aproximando a un cuarto de la longitud de la cuerda aerodinámica media, respecto al borde de ataque. En este caso, las coordenadas del centro aerodinámico están en función de la geometría alar, de sus perfiles en cada estación a lo largo de su envergadura, así como del régimen viscoso; por lo que suele ser mas sencillo obtener su posición de forma numérica una vez teniendo la geometría alar. Se expresarán los momentos aerodinámicos de forma general con la siguiente ecuación:

$$M_A = \bar{q} S l_{Aero} C_{\{M\}}(\alpha, \beta, Re) \quad (3.38)$$

dónde M_{Aero} representa de forma general uno de los momentos aerodinámicos actuando en cada dirección: longitudinal ($M_{A,p}$), lateral ($M_{A,q}$) y vertical ($M_{A,r}$), que le correspondería su coeficiente de momento según su dirección: C_{M_p} , C_{M_q} y C_{M_r} , respectivamente; \bar{q} representa la presión dinámica general definida en (3.36), S es el área proyectada de plataforma de la superficie alar y l_{Aero} es la longitud aerodinámica que uniformiza las unidades de la parametrización con las de la magnitud del momento. Para el caso del momento de cabeceo, esta longitud aerodinámica (l_{Aero}) es la cuerda aerodinámica media (\bar{c}) y para el caso de los otros dos momentos, por convención se utiliza la envergadura (b).

3.4.2 EFECTOS AERODINÁMICOS EN EL MARCO DEL CUERPO

Primeramente, se debe definir el vector de fuerza para un componente aerodinámico del vehículo en su marco local de referencia. Esto se expresa como:

$$F_{Aero_i} = \begin{bmatrix} -D_i & Y_i & -L_i \end{bmatrix}^T \quad (3.39)$$

dónde estas fuerzas aerodinámicas están definidas de forma general en la ecuación (3.37) de acuerdo a su respectivo coeficiente de fuerza (C_{D_i} , C_{Y_i} y C_{L_i}). Recordemos que estas fuerzas se encuentran alineadas al marco aerodinámico local, por lo que resulta necesario expresarlas en el marco de referencia fijo local:

$$F_{A_i} = R_{\{i \leftarrow (a,i)\}} F_{Aero_i} \quad (3.40)$$

dónde $R_{\{i \leftarrow (a,i)\}}$ es la matriz de rotación del marco aerodinámico local al marco fijo local, definida en la ecuación (3.35). Una vez definidas las fuerzas en el marco fijo local, cuyo origen idealmente es el centro aerodinámico del componente en cuestión, se debe definir el vector de momentos aerodinámicos actuando en el marco de referencia local:

$$M_{A_i} = \left[M_{A_{(p|i)}} \quad M_{A_{(q|i)}} \quad M_{A_{(r|i)}} \right]^T \quad (3.41)$$

Habiendo definido los vectores de fuerzas y momentos en el marco local, se puede proceder con definir el vector de fuerza en el marco del cuerpo de la aeronave:

$$F_{(b|A_i)} = R_{\{b \leftarrow i\}} F_{A_i} \quad (3.42)$$

donde $R_{\{b \leftarrow i\}}$ es la matriz de rotación del marco local al marco del cuerpo, definida en la ecuación (3.28). En el caso de los momentos actuando en el marco del cuerpo de la aeronave, no solamente es necesario rotar el vector de momentos aerodinámicos (M_{A_i}) de la ecuación (3.41), también hay que tomar en cuenta los momentos producidos debido al producto cruz del vector de fuerzas $F_{(b|A_i)}$ y los brazos de palanca respecto al centro de gravedad:

$$M_{(b|A_i)} = (R_{\{b \leftarrow i\}} M_{A_i}) + (l_{(b|i)} \times F_{(b|A_i)}) \quad (3.43)$$

dónde $l_{(b|i)}$ es el vector de separación entre el centro de gravedad del vehículo y el centro aerodinámico del componente "i".

En resumen, las últimas dos ecuaciones (3.42) y (3.43) expresan las fuerzas y momentos producidos por una superficie aerodinámico arbitraria, que se considera un componente de la aeronave. La Tabla 3.2 especifica los componentes en los que

se divide la aeronave, así como los subíndices que se utilizarán para designar sus ecuaciones de fuerza y momentos.

Componente	Subíndice	Número de elemento i
Semi-ala derecha	wr	1
Semi-ala izquierda	wl	2
Estabilizador vertical derecho	vr	3
Estabilizador vertical izquierdo	vl	4

TABLA 3.2: Identificación de los componentes aerodinámicos de la aeronave

Es conveniente considerar a i como un vector ordinal, donde cada el número de elemento i se refiere a un componente de la aeronave, tal como indica la Tabla 3.2. Esto con el fin de expresar la sumatoria de las fuerzas aerodinámicas producidas por componentes fijos de la aeronave:

$$F_{(b|A)} = \sum_{i=1}^5 F_{(b|A_i)} = \left[X_A \quad Y_A \quad Z_A \right]^T \quad (3.44)$$

Así como la sumatoria de momentos aerodinámicos:

$$M_{(b|A)} = \sum_{i=1}^5 M_{(b|A_i)} = \left[M_{(b|Ap)} \quad M_{(b|Aq)} \quad M_{(b|Ar)} \right]^T \quad (3.45)$$

Finalmente, se debe especificar los parámetros constantes para evaluar de las fuerzas y momentos aerodinámicos actuando en el cuerpo. La Tabla 3.3 muestra los valores de estos parámetros constantes utilizados en las ecuaciones (3.27), (3.37) y (3.48).

Ahora que se ha definido de forma general las fuerzas y momentos aerodinámicos de los componentes fijos de la aeronave, se procederá a describir la estimación de los coeficientes aerodinámicos de fuerza y momentos de dichos componentes.

Componente	wr	wl	vr	vl
ϕ_i [°]	0	0	90	90
θ_i [°]	0	0	0	0
ψ_i [°]	0	0	0	0
$l_{\{x,i\}}$ [m]	0.106	0.106	-0.248	-0.248
$l_{\{y,i\}}$ [m]	0.1182	-0.1182	0.09	-0.09
$l_{\{z,i\}}$ [m]	0	0	0.02	0.02
S_i [m ²]	0.088	0.088	0.011	0.011
\bar{c}_i [m]	0.332	0.332	0.1	0.1
b_i [m]	0.275	0.275	-	-

TABLA 3.3: Parámetros descriptivos de los componentes aerodinámicos i .

3.4.3 ESTIMACIÓN DE COEFICIENTES AERODINÁMICOS

Como se mencionó en el capítulo 2, se evaluó los coeficientes aerodinámicos de las superficies de la aeronave en la aplicación XFLR5, utilizando un modelo. Además de este método, la aplicación también integra el método llamado LLT, por sus siglas en inglés "Lifting Line Theory", pero debido a la razón de aspecto baja de la geometría alar propuesta no se utilizó ese método pues es conocido que sus resultados no aproximan bien este tipo de casos.

Si bien, esta aplicación provee directamente los coeficientes aerodinámicos para el modelo, se optó por recalcular por separado la semi-ala derecha y la semi-ala izquierda nuevamente, con el fin de expresar sus fuerzas y momentos en función de las velocidades $\left(\begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix}^T \right)$ locales cada semi-ala. Se consideró una serie de puntos de operación para α desde -10° a 10° , y para β se consideró desde -15° a 15° . Hay que aclarar que no en todos los puntos de α se extendió hasta esos rango en el ángulo de derrape β por cuestiones de convergencia, pero si a bajos ángulos de ataque que idealmente sería la zona de operación de la aeronave.

La discretización de la superficie alar a lo largo de la envergadura se describe en la Tabla 3.4. Para el caso de la división de los paneles en la dirección "x", se utilizó una distribución coseno para aproximar mejor los valores calculados en el borde de ataque y el borde de salida de cada sección alar. Los intervalos especificados en dicha tabla, hacen referencia a las secciones descritas en la Tabla 2.8, donde define las coordenadas para cada sección alar especificada. El total de paneles a lo largo de t para una semi-ala suman 60.

Intervalo	Páneles en "y"	Páneles en "x"
Sección #1 – #2	10	13
Sección #2 – #3	10	13
Sección #3 – #4	40	13

TABLA 3.4: Discretización de la superficie alar para el modelo VML.

La figura 3.4 muestra la distribución del coeficiente de sustentación local del ala a lo largo de su envergadura, para distintos puntos de operación en α y β . Con el fin de visualizar mejor los datos, sólo se incluyó los valores positivos de β pues es una geometría simétrica. Debe de considerarse que cada punto en la gráfica representa el coeficiente normalizado el total de paneles la estación de z . especificada, es decir, para el área proyectada en plataforma de la tira en dicha sección alar.

Utilizando la distribución de los coeficientes aerodinámicos de fuerza generada por el modelo, podemos calcular las fuerzas aerodinámicas generadas por el ala como la sumatoria de la fuerza en cuestión producida en cada tira discreta:

$$F_{\{i|A\}} = \bar{q}_{\infty} \sum_{n=1}^{n_{sec}} S_{\{i|n\}} C_{\{i|F_A|n\}}(\alpha_i, \beta_i) \quad (3.46)$$

dónde $F_{\{i|A\}}$ es la fuerza aerodinámica que se está calculando, \bar{q}_{∞} es la presión dinámica que se utilizó en el modelo para el cálculo de los coeficientes, n_{sec} es el número de tiras de paneles a lo largo de "y", n es el número correspondiente a cada tira en la discretización, $S_{\{i|n\}}$ es el área de cada tira y $C_{\{i|F_A|n\}}(\alpha_i, \beta_i)$ es el

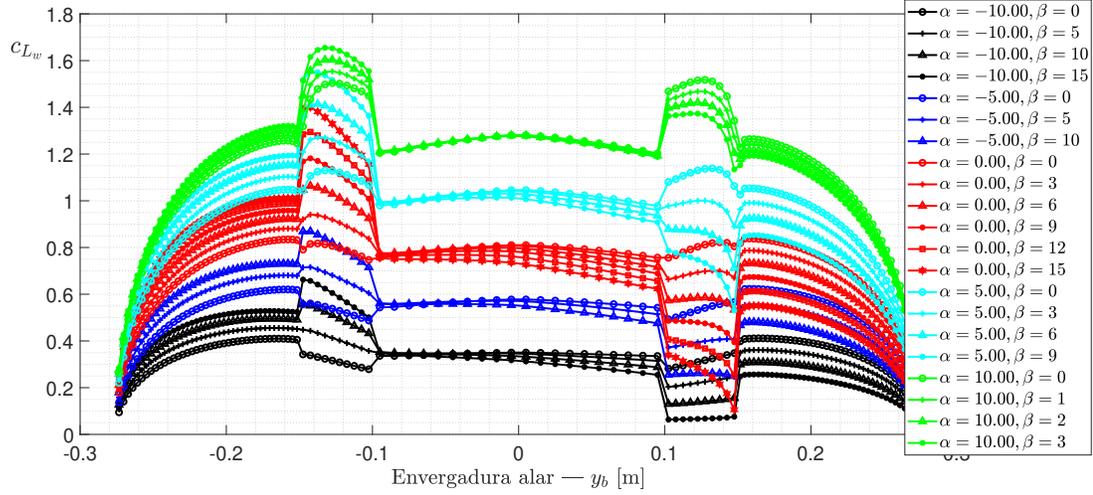


FIGURA 3.4: Distribución alar del coeficiente de sustentación en función de α y β .

coeficiente de aerodinámico relativo a la fuerza que se está calculando. Recordemos que este coeficiente varía respecto a α_i y β_i . Ha de notarse, que la ecuación (3.46) está formulada de forma general para cualquier componente i de la aeronave que sea descrito en tales términos, pero este análisis se realizó únicamente con el ala, al ser el componente cuyas fuerzas son de principal relevancia. Podemos expresar el coeficiente de fuerza aerodinámica despejándolo de la ecuación (3.37):

$$C_{\{F_{i|A}\}} = \frac{F_{\{i|A\}}}{\frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2 S_i} \quad (3.47)$$

dónde $F_{\{i|A\}}$ es la fuerza calculada a partir de las tiras de la superficie aerodinámica discretizada en la ecuación (3.46).

El momento aerodinámico de cabeceo también se recalculó para cada semi-ala:

$$M_{\{i|Aq\}} = \bar{q}_{\{\infty\}} \sum_{n=1}^{n_{sec}} S_{\{i|n\}} c_{\{i|n\}} C_{\{i|M_q|n\}}(\alpha, \beta) \quad (3.48)$$

dónde $M_{\{i|Aq\}}$ es el momento total de cabeceo respecto a las coordenadas de origen del componente i que se está analizando, $c_{\{i|n\}}$ es la cuerda de la tira discreta n y $C_{\{i|M_q|n\}}(\alpha, \beta)$ es el coeficiente de momento aerodinámico en función de α y β . Despejando el coeficiente de momentos de la ecuación (3.48), para el caso del momento

de cabeceo obtenemos la siguiente expresión:

$$C_{\{i|M_q\}} = \frac{M_{\{i|A_q\}}}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S_i \bar{c}_{\{i|mac\}}} \quad (3.49)$$

dónde $C_{\{i|M_q\}}$ es el coeficiente aerodinámico de cabeceo alineado con las coordenadas del componente i y $M_{i|A_q}$ el momento aerodinámico de cabeceo calculado a partir de los paneles discretos de ala como se muestra en la ecuación (3.48).

Los otros dos momentos aerodinámicos no son calculados directamente por un coeficiente normalizado específicamente para la dirección de interés. Estos son calculados a partir de la distribución de levantamiento y arrastre a lo largo de la superficie, según el brazo de palanca producido por su posición en "y":

$$\begin{aligned} M_{\{i|A_p\}} &= \sum_{n=1}^{n_{sec}} -y_{\{i|n\}} (c_{\alpha_i} L_{\{i|n\}} + s_{\alpha_i} D_{\{i|n\}}) + z_{\{i|CP|n\}} s_{\beta_i} D_{\{i|n\}} \\ &= \bar{q}_\infty \sum_{n=1}^{n_{sec}} -S_{\{i|n\}} [y_{\{i|n\}} (c_{\alpha_i} C_{\{i|L|n\}} + s_{\alpha_i} C_{\{i|D|n\}}) - z_{\{i|CP|n\}} s_{\beta_i} C_{\{i|D|n\}}] \end{aligned} \quad (3.50)$$

dónde $M_{\{i|A_p\}}$ es el momento actuando en el eje x_i , referente al marco local de referencia; $y_{\{i|n\}}$ es la posición de la tira n en el marco local i de donde se toma en consideración las fuerza que producen el momento calculado, $L_{\{i|n\}}$ es la fuerza de sustentación orientada perpendicularmente a la dirección del flujo libre relativo al marco local i , $D_{\{i|n\}}$ es la fuerza de arrastre que es paralela a la dirección del flujo libre en el marco aerodinámico local y $z_{\{i|CP|n\}}$ es la posición del centro de presión del la tira n en la dirección z . Se ha expresado también esta ecuación (3.50) en términos de $C_{\{i|L|n\}}$ y $C_{\{i|D|n\}}$ puesto que son datos directamente obtenidos de la distribución de los coeficientes aerodinámicos resultado del modelo VML. El coeficiente adimensional $C_{\{i|M_p\}}$ podemos despejarlo de la ecuación (3.48):

$$C_{\{i|M_p\}} = \frac{M_{\{i|A_p\}}}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S_i b_i} \quad (3.51)$$

dónde $M_{\{i|A_p\}}$ es el momento experimentado en el eje x_i y b_i es la envergadura del componente i en particular.

De forma similar se ha expresado al momento actuando en el eje vertical z_i sumando el momento producido por las fuerzas aerodinámicas proyectadas en la

dirección x_i :

$$\begin{aligned}
 M_{\{i|Ar\}} &= \sum_{n=1}^{n_{sec}} y_{\{i|n\}} (s_{\alpha_i} L_{\{i|n\}} + c_{\alpha_i} D_{\{i|n\}}) - x_{\{i|CP|n\}} s_{\beta_i} D_{\{i|n\}} \\
 &= \bar{q}_{\infty} \sum_{n=1}^{n_{sec}} S_{\{i|n\}} [y_{\{i|n\}} (s_{\alpha_i} C_{\{i|L|n\}} + c_{\alpha_i} C_{\{i|D|n\}}) - x_{\{i|CP|n\}} s_{\beta_i} C_{\{i|D|n\}}]
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

dónde $M_{\{i|Ar\}}$ es el momento calculado en el eje z_i a partir de los puntos discretos del ala del modelo VML y $x_{\{i|CP|n\}}$ es la posición del centro de presión de la tira n en la dirección x . Despejando de la ecuación (3.41) se obtiene el coeficiente de momento:

$$C_{\{i|M_r\}} = \frac{M_{\{i|Ar\}}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S_i b_i} \tag{3.53}$$

dónde también se utiliza la envergadura b_i como longitud aerodinámica para el cálculo de coeficiente. Debe de notarse, que tanto para el caso de este coeficiente $C_{\{i|M_r\}}$ como para $C_{\{i|M_p\}}$, se está despreciando el momento inducido por las fuerzas laterales. Habiendo definido como calcular los coeficientes para los distintos puntos de operación de las alas, se procederá a describir el modelo para

3.4.4 AJUSTE POLINOMIAL

La descripción de las fuerzas y momentos aerodinámicos es hecha por aproximación polinomial, para las semi-alas esta aproximación es hecha tomando los coeficientes calculados por la ecuación (3.47), que expresa los coeficientes de fuerza en cada punto de operación respecto a α y β . Para el resto de las superficies, esta aproximación se realizó a partir de los coeficientes calculados directamente por la aplicación VML. Hay que recordar que únicamente se recalcularon los coeficientes para el ala principal.

La figura 3.5 muestra un ejemplo del rango en el que es hecha y tiene validez la aproximación polinomial en este caso para el coeficiente de sustentación del ala a partir de los puntos calculados por la ecuación (3.47). Esta aproximación posee la

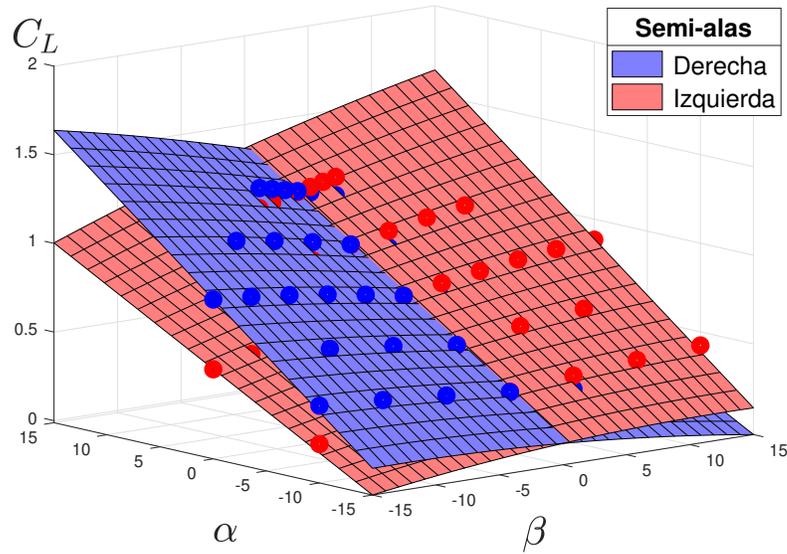


FIGURA 3.5: Ajuste polinomial para el coeficiente de sustentación de las semi-alas, respecto a α y β .

siguiente estructura general:

$$C_{\{i|A\}} = \left[K_{\{iA_0\}} \quad K_{\{iA|\alpha\}} \quad K_{\{iA|\alpha^2\}} \quad K_{\{iA|\beta\}} \quad K_{\{iA|\beta^2\}} \quad K_{\{iA|\alpha\beta\}} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \beta_i \\ \beta_i^2 \\ \alpha_i\beta_i \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

dónde $C_{\{i|A\}}$ es el coeficiente del componente i que se está describiendo, ya sea de fuerza o momento; $K_{\{iA_0\}}$ es el valor del coeficiente cuando ambos ángulos aerodinámicos son igual a cero ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), $K_{\{iA|\alpha\}}$ representa la pendiente de la aproximación lineal respecto a α_i , que es el mismo caso para $K_{\{iA|\beta\}}$ con respecto a β_i , $K_{\{iA|\alpha^2\}}$ representa el coeficiente de relación cuadrática respecto a α_i , de igual forma para $K_{\{iA|\beta^2\}}$ y β_i , y $K_{\{iA|\alpha\beta\}}$ representa el coeficiente de relación respecto al producto entre α_i y β_i .

Los coeficientes aerodinámicos para cada componente especificado en la Tabla 3.2 se encuentran reportados en la sección A.2, según la estructura de la ecuación

(3.54).

3.5 MODELO DE PROPULSIÓN

Lo primero que se debe aclarar para el modelo de propulsión, es que por el momento no se está incluyendo dentro del modelo dinámico de la aeronave. Pero sí se ha incluido un modelo de propulsión de relativa simplicidad cuya dinámica se considerará como una perturbación externa para el vehículo.

Se pueden plantear las fuerzas ejercidas por la hélice en todos sus ejes, es decir:

$$F_{R_n} = \left[F_{\{x|R_n\}} \quad F_{\{y|R_n\}} \quad F_{\{z|R_n\}} \right]^T \quad (3.55)$$

dónde $F_{\{(x,y,z)|R_n\}}$ vendría a representar cada componente de fuerza en el marco local del rotor. Caracterizar las fuerzas laterales de cada rotor es algo que escasamente se ha realizado en la literatura académica, y no se cuentan con modelos que describan estas fuerzas fielmente. Por lo que es conveniente despreciar las fuerzas laterales con tal de simplificar el modelo de propulsión:

$$F_{R_n} = \left[F_{\{x|R_n\}} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (3.56)$$

dónde únicamente se toma en cuenta la fuerza la dirección x del rotor. De forma similar los torques de cada rotor son representados por:

$$Q_{R_n} = \left[Q_{\{x|R_n\}} \quad Q_{\{y|R_n\}} \quad Q_{\{z|R_n\}} \right]^T \quad (3.57)$$

Y de igual forma sólo se toma en cuenta el torque del arrastre de la hélice en su dirección x :

$$Q_{R_n} = \left[Q_{\{x|R_n\}} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (3.58)$$

Para pasar a las coordenadas del cuerpo del vehículo, debemos tomar en consideración la deflexión de cada rotor por el ángulo η_n , que para cada vector de fuerzas

y momentos produce una transformación lineal como la siguiente:

$$\gamma_n = \begin{bmatrix} c_{\eta_n} & 0 & s_{\eta_n} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{\eta_n} & 0 & c_{\eta_n} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Por lo tanto, las fuerzas de propulsión en el marco del cuerpo del vehículo, están dadas por:

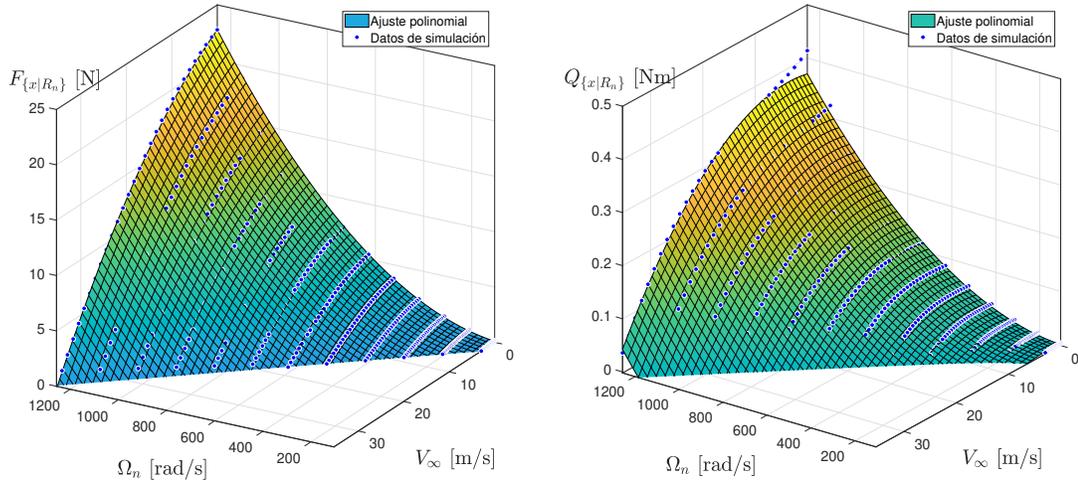
$$\begin{aligned} F_{\{b|R_n\}} &= \gamma_n F_{R_n} \\ &= \left[F_{\{b_x|R_n\}} \quad F_{\{b_y|R_n\}} \quad F_{\{b_z|R_n\}} \right]^T \end{aligned} \quad (3.60)$$

y de forma similar, los torques producidos por el arrastre de la hélice se expresan como:

$$\begin{aligned} Q_{\{b|R_n\}} &= \gamma_n Q_{R_n} \\ &= \left[Q_{\{b_x|R_n\}} \quad Q_{\{b_y|R_n\}} \quad Q_{\{b_z|R_n\}} \right]^T \end{aligned} \quad (3.61)$$

El modelo de propulsión básicamente considera el empuje y torque producidos en la dirección x del rotor, que es la dirección de su eje de giro. Estimar teóricamente un modelo dinámico para el sistema hélice-motor es altamente complejo, debido a la gran cantidad de factores involucrados desde la electrónica de potencia que controla la velocidad del motor como se explica brevemente en Mogensen (2016), hasta la interacción de la hélice con el flujo incidente cuyas dinámica a su vez involucra gran cantidad no-linealidades que han sido analizadas en Stepniewski y Keys (1984), y en Redgrave (2015). Con el fin de capturar el efecto de la velocidad relativa del flujo V_∞ en las fuerzas producidas por la hélice, se tomaron los datos del análisis por simulación proporcionados por el fabricante APC-Propellers (2021) y se realizó un ajuste polinomial respecto a la velocidad V_∞ y la velocidad angular de la hélice Ω como se puede apreciar en la figura 3.6. Lo anterior resalta una particularidad del presente trabajo, a diferencia de considerar únicamente las ganancias estáticas de los propulsores como se reporta en Chen *et al.* (2021).

Además de tomar en consideración la fuerza y el momento producidos en la dirección x de cada rotor n , se asume que sólo tiene un efecto en el desempeño



(a) Fuerza de empuje.

(b) Torque de arrastre.

FIGURA 3.6: Ajuste polinomial para el modelo de la hélice.

de la hélice su velocidad relativa con el viento en la dirección x . Por lo que resulta conveniente expresar la velocidad del rotor relativa al viento:

$$\begin{aligned} V_{R_n} &= R_{\{R_n \leftarrow b\}} (V_b + \omega_b \times r_n) \\ &= \begin{bmatrix} V_{\{x|R_n\}} & V_{\{y|R_n\}} & V_{\{z|R_n\}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.62)$$

dónde V_b y ω_b son el vector de velocidades axiales y angulares del vehículo, respectivamente; r_n es el vector de posición del rotor n en las coordenadas de la aeronave que es definido por:

$$r_n = \begin{bmatrix} r_{\{n,x\}} & r_{\{n,y\}} & r_{\{n,z\}} \end{bmatrix}^T \quad (3.63)$$

y $R_{\{R_n \leftarrow b\}}$ es la matriz de rotación para convertir las coordenadas del vehículo a las coordenadas del rotor y que es definida como:

$$R_{\{R_n \leftarrow b\}} = \gamma_n^T \quad (3.64)$$

dónde γ_n^T es la matriz traspuesta de la ecuación (3.59) que depende del ángulo de orientación η_n . Debe de aclararse que no se están tomando en cuenta las velocidades inducidas por la tasa de cambio $\dot{\eta}_n$, con el fin de simplificar el análisis y que no tiene relevancia para el mismo puesto que no induce una velocidad en la dirección x del

rotor. La velocidad del rotor en su dirección x estaría dada por:

$$V_{\{x|R_n\}} = \begin{bmatrix} c_{\eta_n} & s_{\eta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b + qr_{zn} - rr_{yn} \\ -w_b - pr_{yn} + qr_{xn} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

La Figura 3.7 ilustra la ecuación (3.65), al mostrar la relación entre la velocidad relativa del viento respecto a los rotores. Esta figura asume que la velocidad total del vehículo es igual a la velocidad relativa al viento, sin considerar una ráfaga.

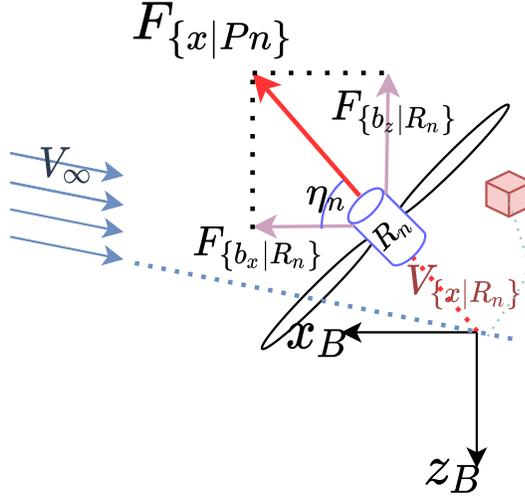


FIGURA 3.7: Velocidad del viento relativa a los rotores.

La estructura general para el ajuste polinomial a partir de los datos de simulación de la hélice es la siguiente :

$$\begin{bmatrix} F_{\{x|Pn\}} \\ Q_{\{x|Pn\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{F_x^R} & k_{\{F_x^R|V\}} & k_{\{F_x^R|V^2\}} & k_{\{F_x^R|\Omega V\}} \\ k_{Q_x^R} & k_{\{Q_x^R|V\}} & k_{\{Q_x^R|V^2\}} & k_{\{Q_x^R|\Omega V\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_n^2 \\ V_{\{x|R_n\}} \\ V_{\{x|R_n\}}^2 \\ \Omega_n V_{\{x|R_n\}} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

en dónde $F_{\{x|Pn\}}$ es la fuerza tangente al disco rotor producida por la hélice y $Q_{\{x|Pn\}}$ es el torque inducido por el arrastre de la hélice calculado por el ajuste polinomial. Dado que lo anterior no toma en cuenta la orientación de giro de cada rotor, es necesario expresar:

$$\begin{bmatrix} F_{\{x|R_n\}} \\ Q_{\{x|R_n\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\{x|Pn\}} \\ Q_{\{x|Pn\}} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

dónde $F_{\{x|R_n\}}$ y $Q_{\{x|R_n\}}$ son la fuerza y torque en la dirección x de cada rotor tomando en cuenta la orientación de giro de cada uno, especificado por el factor $(-1)^{n-1}$. Los coeficientes del ajuste polinomial son mostrados en la Tabla A.2. Para la manipulación algebraica que se realizará mas adelante, es conveniente expresar los coeficientes del ajuste polinomial por si solos como:

$$\begin{bmatrix} K_{\{F_x|P\}} \\ K_{\{Q_x|P\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{F_x^R} & k_{\{F_x^R|V\}} & k_{\{F_x^R|V^2\}} & k_{\{F_x^R|\Omega V\}} \\ k_{Q_x^R} & k_{\{Q_x^R|V\}} & k_{\{Q_x^R|V^2\}} & k_{\{Q_x^R|\Omega V\}} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

De igual forma es conveniente aislar el vector de variables para los coeficientes:

$$U_{P_n} = \left[\Omega_n^2 \quad V_{\{x|R_n\}} \quad V_{\{x|R_n\}}^2 \quad \Omega_n V_{\{x|R_n\}} \right]^T \quad (3.69)$$

Finalmente, el total de las fuerzas de propulsión se puede expresar como la sumatoria total de las fuerzas de cada hélice, es decir:

$$\begin{aligned} F_P &= \sum_{n=1}^3 F_{\{b|R_n\}} \\ &= \begin{bmatrix} X_T & Y_T & Z_T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.70)$$

El torque producido por la precesión giroscópica depende del momento angular en $[rad/s]$ de cada rotor, como se muestra en Simmons (2021):

$$h_{R_n} = I_{R_n} \Omega_{R_n} (-1)^{n-1} \quad (3.71)$$

dónde I_{R_n} es el momento de inercia del rotor, Ω_{R_n} es su velocidad angular y el factor $(-1)^{n-1}$ se refiere a la orientación del giro para cada rotor n . Pero se debe considerar también, que el momento angular anteriormente formulado se encuentra dado en las coordenadas locales del rotor, por lo que debemos pasarlo a las coordenadas del cuerpo del vehículo:

$$h_{\{b|R_n\}} = \begin{bmatrix} c_{\eta_n} h_{R_n} & 0 & -s_{\eta_n} h_{R_n} \end{bmatrix}^T \quad (3.72)$$

dónde c_{η_n} y s_{η_n} se refieren a las funciones coseno y seno evaluadas para el ángulo de orientación η_n para cada rotor. Finalmente, el torque producido por lo que llamamos efectos giroscópicos se expresa como en Simmons (2021):

$$M_{\{G|R_n\}} = \dot{h}_{\{b|R_n\}} + \omega_b \times h_{\{b|R_n\}} \quad (3.73)$$

dónde $\dot{h}_{\{b|R_n\}}$ es la tasa de cambio del momento angular del rotor en coordenadas del cuerpo, por lo que esta incluye la aceleración de rotor, así como la tasa de cambio del ángulo de orientación η_n ; y ω_b es el vector de velocidad angular del cuerpo de la aeronave $\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$. Expandiendo y agrupando términos se obtiene:

$$M_{\{G|R_n\}} = (-1)^{n-1} I_R K_{G_n} U_{\Omega_n,cs} \quad (3.74)$$

dónde K_G es una matriz definida como:

$$K_{G_n} = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\eta}_n + q) & 0 & -1 \\ r & p & 0 & 0 \\ -(\dot{\eta}_n + q) & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

dentro de la cuál $\dot{\eta}_n$ es la tasa de cambio del ángulo de posición de cada servomotor y $U_{\Omega_n,cs}$ es un vector que contiene las velocidad y aceleración angular de cada rotor n junto con orientación η :

$$U_{\Omega_n,cs} = \begin{bmatrix} \Omega_n c_{\eta_n} & \Omega_n s_{\eta_n} & \dot{\Omega}_n c_{\eta_n} & \dot{\Omega}_n s_{\eta_n} \end{bmatrix}^T \quad (3.76)$$

También se puede considerar el momento inducido por los servomotores al posicionar los rotores en alguna orientación deseada:

$$T_{\{\text{servo}|n\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_{bas} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\eta}_n \quad (3.77)$$

dónde $\ddot{\eta}_n$ es la aceleración angular del servomotor y J_{bas} es el momento de inercia de la plataforma basculante definido como:

$$J_{bas} = l_{\{x,R\}}^2 m_R \quad (3.78)$$

dónde $l_{\{x,R\}}$ es la separación entre el centro de masa del rotor y el eje de giro del servo, y m_R es la masa de cada rotor n . Debido a que el eje de rotación del servomotor se encuentra alineado al eje lateral del vehículo, el momento producido por la aceleración angular y momento de inercia del conjunto rotor sólo se ejerce como un momento de cabeceo.

La suma total de momentos producidos por la planta de propulsión está formulada como:

$$\begin{aligned} Q_P &= \sum_{n=1}^3 (r_n \times F_{\{b|R_n\}} + Q_{\{b|R_n\}} + M_{\{G|R_n\}} + T_{\{\text{servo}|n\}}) \\ &= \begin{bmatrix} Q_{\{b|Px\}} & Q_{\{b|Py\}} & Q_{\{b|Pz\}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.79)$$

Dentro de los efectos que se están modelando, de la planta de propulsión se está considerando el torque inducido por el servo motor descrito en la ecuación (3.77), por lo es necesario tener un modelo para la dinámica del mismo por lo que se propone un sistema de segundo orden:

$$\eta_n(s) = \left(\frac{\omega_\eta^2}{s^2 + 2\xi_\eta\omega_\eta s + \omega_\eta^2} \right) \eta_{\{ref,n\}}(s) \quad (3.80)$$

dónde ω_η y ξ_η están estimados en función de la velocidad de respuesta del servo de $0.13 \text{ [s/60}^\circ\text{]}$ reportada en la Tabla 2.4. Considerando esta velocidad de respuesta como la constante de tiempo, se estimó para el modelo de segundo orden los valores de $\xi_\eta = 0.98$ y $\omega_\eta = 14.6154$ con el fin de que el modelo sea casi críticamente amortiguado. La razón de tomar un modelo de segundo orden es para que durante la simulación la segunda derivada $\ddot{\eta}_n$ no induzca errores numéricos, a diferencia de utilizar un modelo de primer orden.

Para terminar de definir el modelo, para el sistema de propulsión se definirá un modelo para la respuesta dinámica del rotor, respecto a una referencia de velocidad que por simplicidad consideraremos al ancho del pulso del comando PWM que se le da al controlador de velocidad del motor. La dinámica del rotor depende de distintos factores, estimarla teóricamente involucraría una complejidad que no se planea abordar en este trabajo, por lo cuál se han consideran modelos dinámicos anteriormente en Mogensen (2016), Ke *et al.* (2018), Amezquita *et al.* (2019) y Simmons (2021). Se propone un modelo de primer orden con retardo para la dinámica del rotor:

$$\Omega_{R_n}(s) = \frac{e^{T_d s}}{\tau_r s + 1} \Omega_{\{ref|R_n\}}(s) \quad (3.81)$$

dónde T_d es el tiempo de retardo debido a los algoritmos de comunicación del controlador de velocidad; y τ es la constante de tiempo de rotor, que depende del tamaño

del rotor y en que rango de su referencia está operando. Los modelos reportados estiman esta constante τ de diferentes formas, en Mogensen (2016) podemos estimar $\tau = 0.0125$ a partir de la respuesta escalón que reportan pero sin considerar la carga del rotor o un retardo. En Simmons (2021) se estima $\tau = 0.127$ considerando la carga de la hélice y sin retardo, pero hay que señalar que lo anterior se reporta considerando que es un rotor de mayor masa en comparación al que se propone en este trabajo. Un tamaño de rotor similar al de este prototipo es reportado en Ke *et al.* (2018), dónde se reporta una variación de τ a lo largo del nivel de referencia PWM $[0.1, 1]$ que estima un valor ligeramente mayor de 0.25 a bajo del nivel de carga y abajo de 0.05 para un nivel de carga mayor al 50%. En vista de la gran variabilidad del parámetro, en este reporte solo se considerarán la dinámica del motor durante las simulaciones para evaluar su efecto final dentro dentro del esquema global de control. En este sentido, para la simulación reportada en este trabajo se utiliza una constante de tiempo $\tau_r = 0.025$ y con el tiempo de retardo $T_d = 2 \times 10^{-3}$, tomado de Amezcuita *et al.* (2019).

Las posiciones de los rotores son especificadas de forma general en la Tabla A.3, que en el caso de los rotores frontales, es decir $n = \{1, 2\}$, los parámetros correspondientes son:

$$r_n = \begin{bmatrix} r_{ax} & r_{ay}(-1)^{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.82)$$

dónde el factor $(-1)^{n-1}$ indica la simetría de la posición de los rotores frontales respecto al plano "xz". Los parámetros correspondientes para el rotor de cola serían:

$$r_3 = \begin{bmatrix} -r_{bx} & 0 & -r_{bz} \end{bmatrix}^T \quad (3.83)$$

Finalmente, se ha agrupado el resto de los parámetros que describen la dinámica del sistema de propulsión en la Tabla A.4.

3.6 ENTRADAS DEL SISTEMA

Se debe aclarar que para simplificar el análisis de los sistemas de control, el sistema de propulsión será compensado de manera modular, tratando de aislar la dinámica de vuelo de la aeronave. El objetivo es diseñar los canales de control para el vehículo utilizando las fuerzas y momentos de la planta de propulsión, considerando sus dinámicas transitorias como perturbaciones en la entrada. Este vector de entradas estaría dado por:

$$U = \left[U_X \quad U_Z \quad U_{Q_x} \quad U_{Q_y} \quad U_{Q_z} \right]^T \quad (3.84)$$

dónde se ha omitido la fuerza lateral Y_T puesto que en realidad no se tiene algún actuador que pueda ser orientado en la dirección lateral, ni tampoco alguna dinámica modelada que produzca fuerza en tal dirección.

Se han de considerar las fuerzas producidas por la interacción de las hélices con el flujo incidente, para ello se ha optado separar las componentes del modelo que describe dicha interacción. Primeramente, se describe las componentes descritas por los coeficientes que multiplican Ω_n^2 en la ecuación (3.66) y que se definen como:

$$U_{\{FQ\}_{\Omega^2}} = \left[MP \right] U_{\Omega_{cs}^2} \quad (3.85)$$

dónde $U_{\{FQ\}_{\Omega^2}}$ serían las fuerzas y momentos dependientes de $U_{\Omega_{cs}^2}$, que es el vector de velocidades angulares cuadráticas :

$$U_{\Omega_{cs}} = \left[c_{\eta_1} \Omega_1^2 \quad s_{\eta_1} \Omega_1^2 \quad c_{\eta_2} \Omega_2^2 \quad s_{\eta_2} \Omega_2^2 \quad c_{\eta_3} \Omega_3^2 \quad s_{\eta_3} \Omega_3^2 \right]^T \quad (3.86)$$

y $\left[MP \right]$ es la matriz de coeficientes y brazos de palanca que relaciona este vector $U_{\Omega_{cs}^2}$ con las fuerzas y momentos producidos en estado estacionario, es decir, sin una velocidad de flujo relativa al cuerpo de la aeronave:

$$\left[MP \right] = \begin{bmatrix} K_{F_x^R} & 0 & K_{F_x^R} & 0 & K_{F_x^R} & 0 \\ 0 & -K_{F_x^R} & 0 & -K_{F_x^R} & 0 & -K_{F_x^R} \\ -K_{Q_x^R} & -r_{ay} K_{F_x^R} & K_{Q_x^R} & r_{ay} K_{F_x^R} & -K_{Q_x^R} & 0 \\ 0 & r_{ax} K_{F_x^R} & 0 & r_{ax} K_{F_x^R} & -r_{bz} K_{F_x^R} & -r_{bx} K_{F_x^R} \\ -r_{ay} K_{F_x^R} & K_{Q_x^R} & r_{ay} K_{F_x^R} & -K_{Q_x^R} & 0 & K_{Q_x^R} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Esta matriz es comúnmente conocida como la matriz de propulsión, utilizada en otros trabajos como Chen *et al.* (2021) o Amezquita *et al.* (2017).

Ahora se considerarán las componentes producidas por la velocidad de flujo libre relativa a la hélice:

$$U_{FQV} = \left[MP \right]_V U_{V_{cs}} \quad (3.88)$$

dónde se utiliza el vector U_{FQV} para designar las fuerzas y momentos producidos por esta interacción, $U_{V_{cs}}$ es el vector que variables involucradas:

$$U_{V_{cs}} = \begin{bmatrix} c_{\eta_1} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ s_{\eta_1} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & c_{\eta_2} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & s_{\eta_2} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & c_{\eta_3} 1_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & s_{\eta_3} 1_{1 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{V_1} \\ U_{V_2} \\ U_{V_3} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

que a su vez contiene un conjunto de vectores internos denotados como U_{V_n} , definidos por:

$$U_{V_n} = \left[V_{\{x|R_n\}} \quad V_{\{x|R_n\}}^2 \quad \Omega_n V_{\{x|R_n\}} \right]^T \quad (3.90)$$

y la matriz $\left[MP \right]_V$ contiene los coeficientes y relaciones de posición para evaluar el vector $U_{V_{cs}}$:

$$\left[MP \right]_V = \begin{bmatrix} K_{F_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} & K_{F_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} & K_{F_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} \\ 0_{[1 \times 3]} & -K_{F_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} & -K_{F_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} & -K_{F_x^{PV}} \\ -K_{Q_x^{PV}} & -r_{ay} K_{F_x^{PV}} & K_{Q_x^{PV}} & r_{ay} K_{F_x^{PV}} & -K_{Q_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} \\ 0_{[1 \times 3]} & r_{ax} K_{F_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} & r_{ax} K_{F_x^{PV}} & -r_{bz} K_{F_x^{PV}} & -r_{bx} K_{F_x^{PV}} \\ -r_{ay} K_{F_x^{PV}} & K_{Q_x^{PV}} & r_{ay} K_{F_x^{PV}} & -K_{Q_x^{PV}} & 0_{[1 \times 3]} & K_{Q_x^{PV}} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

dónde cada elemento $K_{F_x^{PV}}$ y $K_{Q_x^{PV}}$ contienen los coeficientes correspondientes para cada vector U_{V_n} , y se definen como:

$$\begin{bmatrix} K_{F_x^{PV}} \\ K_{Q_x^{PV}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\{F_x^R|V\}} & k_{\{F_x^R|V^2\}} & k_{\{F_x^R|\Omega V\}} \\ k_{\{Q_x^R|V\}} & k_{\{Q_x^R|V^2\}} & k_{\{Q_x^R|\Omega V\}} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Para los momentos producidos por el cambio del momento angular se puede construir el siguiente vector a partir de la ecuación (3.74):

$$M_G = I_R \begin{bmatrix} K_{G_1} & -K_{G_2} & K_{G_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\Omega_{1,cs}} \\ U_{\Omega_{2,cs}} \\ U_{\Omega_{3,cs}} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

dónde cada K_{G_n} es definida en la ecuación (3.75) y cada variable $U_{\Omega_{n,cs}}$ es un vector definido por la ecuación (3.76).

El torque total producido por el movimiento de los servomotores está expresado como:

$$T_{servo} = -J_{baso} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

De este modo, las fuerzas y momentos producidos por la planta de propulsión pueden ser expresados como:

$$U = U_{\{FQ\}_{\Omega^2}} + U_{\{FQ\}_V} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{servo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_G \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Considerando ahora que el vector U actúa la dinámica de la aeronave, el sistema de control demandará un vector U_{ref} , que el sistema de propulsión debe proporcionar. Se propone calcular un vector \tilde{U}_{cs} tomando el vector de referencia:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{cs} &= [MP]^{-1} U_{ref} \\ &= [\tilde{U}_{c_1} \quad \tilde{U}_{s_1} \quad \tilde{U}_{c_2} \quad \tilde{U}_{s_2} \quad \tilde{U}_{c_3} \quad \tilde{U}_{s_3}]^T \end{aligned} \quad (3.96)$$

dónde $[MP]^{-1}$ es la matriz de propulsión inversa de la ecuación (3.87) que puede ser calculada como se explica en Penrose (1955). Utilizando las componentes de este vector de entradas se puede calcular un ángulo de orientación para cada rotor:

$$\tilde{\eta}_n = \text{atan} \left(\frac{\tilde{U}_{s_n}}{\tilde{U}_{c_n}} \right) \quad (3.97)$$

y una velocidad angular *virtual*:

$$\tilde{\Omega}_n = \sqrt[4]{\tilde{U}_{c_n}^2 + \tilde{U}_{s_n}^2} \quad (3.98)$$

que sería la velocidad angular ideal para cada hélice en vuelo estacionario. Los cálculos anteriores se realizaron para estimar la posición y velocidad de cada rotor independientemente del modo de vuelo en que se encuentre la aeronave. Podemos calcular la velocidad incidente en el eje x de cada hélice utilizando la ecuación (3.65) y sustituyendo el ángulo η_n por $\tilde{\eta}_n$:

$$\tilde{V}_{\{x|R_n\}} = \begin{bmatrix} c_{\tilde{\eta}_n} & s_{\tilde{\eta}_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b + qr_{zn} - rr_{yn} \\ -w_b - pr_{yn} + qr_{xn} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Habiendo declarado lo anterior, se puede expresar el vector que evalúa el efecto del viento en el modelo de propulsión para cada hélice:

$$\tilde{U}_{V_n} = \left[\tilde{V}_{\{x|R_n\}} \quad \tilde{V}_{\{x|R_n\}}^2 \quad \tilde{\Omega}_n \tilde{V}_{\{x|R_n\}} \right]^T \quad (3.100)$$

Y ahora se toma cuenta la orientación de cada rotor calculada en la ecuación (3.97):

$$\tilde{U}_{V_{cs}} = \begin{bmatrix} c_{\tilde{\eta}_1} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ s_{\tilde{\eta}_1} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & c_{\tilde{\eta}_2} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & s_{\tilde{\eta}_2} 1_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & c_{\tilde{\eta}_3} 1_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & s_{\tilde{\eta}_3} 1_{1 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{V_1} \\ \tilde{U}_{V_2} \\ \tilde{U}_{V_3} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Finalmente se puede expresar la pérdida respecto a las condiciones estáticas para las fuerzas y momentos producidos por cada rotor como:

$$\tilde{U}_{FQV} = \left[MP \right]_V \tilde{U}_{V_{cs}} \quad (3.102)$$

Por lo que es posible recalculer el comando para el sistema de propulsión considerando la pérdida de empuje debido a la velocidad relativa con el viento:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{cs} &= \left[MP \right]^{-1} (U_{ref} - \tilde{U}_{FQV}) \\ &= \left[\hat{U}_{c_1} \quad \hat{U}_{s_1} \quad \hat{U}_{c_2} \quad \hat{U}_{s_2} \quad \hat{U}_{c_3} \quad \hat{U}_{s_3} \right]^T \end{aligned} \quad (3.103)$$

De esta forma se puede calcular la velocidad de cada rotor que será requerida como:

$$\Omega_{\{ref,n\}} = \sqrt[4]{\widehat{U}_{c_n}^2 + \widehat{U}_{s_n}^2} \quad (3.104)$$

Y considerando que ángulo de orientación calculado en (3.97) difiere muy poco del que se obtendría si se utilizara las componentes del vector \widehat{U}_{cs} :

$$\eta_{\{ref,n\}} = \widetilde{\eta}_n \quad (3.105)$$

Por lo que finalmente, podemos expresar el vector de entradas U :

$$U(t) = U_{\{FQ\}_{\Omega^2}} + U_\delta \quad (3.106)$$

dónde el resto de las componentes de la ecuación (3.106) son tomados como una perturbación a la entrada, es decir:

$$U_\delta = U_{\{FQ\}_V} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{servo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_G \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Habiendo definido la dinámica del sistema de actuación se debe aclarar que no se habrán de considerar las derivadas respecto al vector de estado de la dinámica de vuelo del vehículo, al momento de realizar la linealización. Esto se hace con el fin de no hacer más complejo el análisis, por lo que se asumirá una dinámica de $(1 \rightarrow 1)$ entre las variables U_{ref} y U , justificado en la separación de ancho de banda entre los actuadores y la dinámica de vuelo del vehículo.

3.7 ECUACIONES DE ESTADO

Las ecuaciones de estado describen la dinámica de vuelo completa del sistema, o al menos, los fenómenos relevantes que se están modelando. Para comenzar el análisis, ha de definirse el vector de estado:

$$X(t) = [p \ q \ r \ u_b \ v_b \ w_b \ \phi \ \theta \ z]^T \quad (3.108)$$

el cuál engloba las velocidades angulares y axiales del cuerpo del vehículo, el ángulo de cabeceo, el de alabeo y la posición de altura del vehículo. La evolución de estas variables de estado es descrita por un conjunto de ecuaciones no-lineales, o bien, un vector de funciones que describen la tasa de cambio de cada variable:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= f[X(t), U(t)] \\ &= \left[\dot{p} \quad \dot{q} \quad \dot{r} \quad \dot{u}_b \quad \dot{v}_b \quad \dot{w}_b \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{z} \right]^T\end{aligned}\quad (3.109)$$

La tasa de cambio para cada velocidad angular son tomadas de la ecuación (3.6), que se obtuvo despejando para $\dot{\omega}_b$ a partir de la conservación del momento angular del vehículo (eq. 3.2) y es definida para cada una como:

$$\dot{p} = \frac{1}{I_x} (qr(I_y - I_z) + M_{(b|Ap)} + U_{Qx}) \quad (3.110)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y} (pr(I_z - I_x) + M_{(b|Aq)} + U_{Qy}) \quad (3.111)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_z} (qp(I_x - I_y) + M_{(b|Ar)} + U_{Qz}) \quad (3.112)$$

dónde I_x , I_y y I_z son las componentes diagonales del tensor de inercia del vehículo, las cuales se definen en la Tabla 2.14; $M_{(b|Ap)}$, $M_{(b|Aq)}$ y $M_{(b|Ar)}$ son los momentos aerodinámicos en cada eje del cuerpo, descritos en la ecuación (3.45); y U_{Qx} , U_{Qy} y U_{Qz} son los torques de entrada, contenidos en el vector U cuyas componentes son descritas en las ecuaciones (3.84) y (3.106). La tasa de cambio para cada velocidad axial son tomadas de la ecuación (3.5), que se obtuvo despejando para \dot{V}_b a partir de la conservación del momento lineal del vehículo (eq. 3.1) y es definida para cada una como:

$$\dot{u}_b = \frac{1}{m} (X_A + U_X) - w_b q + v_b r - g s_\theta \quad (3.113)$$

$$\dot{v}_b = \frac{1}{m} (Y_A) - u_b r + w_b p + g c_\theta s_\phi \quad (3.114)$$

$$\dot{w}_b = \frac{1}{m} (Z_A + U_Z) - v_b p + u_b q + g c_\theta c_\phi \quad (3.115)$$

dónde m es la masa del vehículo, la cuál se define en la Tabla 2.14; X_A , Y_A y Z_A son las fuerzas aerodinámicas en los ejes del cuerpo, descritas en la ecuación (3.44); U_X y U_Z son las fuerzas de entrada, contenidas en el vector U cuyas componentes son

descritas en las ecuaciones (3.84) y (3.106). Las tasas de cambio para los ángulos de orientación son obtenidas a partir de la ecuación (3.16) y se definen para cada una como:

$$\dot{\phi} = p - qs_{\phi}t_{\theta} + rc_{\phi}t_{\theta} \quad (3.116)$$

$$\dot{\theta} = qc_{\phi} - rs_{\phi} \quad (3.117)$$

Finalmente, la tasa de cambio la altura del vehículo en el marco inercial fijo se obtiene de la ecuación (3.14):

$$\dot{z} = -u_b s_{\theta} + v_b c_{\theta} s_{\phi} + w_b c_{\phi} c_{\theta} \quad (3.118)$$

Se ha omitido las ecuaciones para \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\psi}$ en este análisis puesto que no se realizará un análisis para el seguimiento de trayectoria.

3.8 LINEALIZACIÓN DEL MODELO

La linealización de las ecuaciones de estado es necesaria utilizar las herramientas de análisis de la teoría de control lineal, principalmente en el dominio frecuencia. Debido a que las funciones de estado son diferenciables en los puntos de equilibrio X_0 se pueden utilizar la expansión de series de Taylor para el vector de ecuaciones de estado $\dot{X}(t)$, como se muestra en Torkel y Lennart (2000):

$$\dot{X}_0(t) + \delta\dot{X}(t) = f[X_0(t), U_0(t)] + \left[\frac{\partial f}{\partial X} \right] \delta X + \left[\frac{\partial f}{\partial U} \right] \delta U + h.o.t.(t) \quad (3.119)$$

lo cuál, es válido para los casos de vuelo horizontal y para vuelo estacionario, teniendo que despreciar las fuerzas aerodinámicas en este último caso. Las variables que aparecen después del signo δ indican la diferencia respecto al punto de equilibrio denotado por \dot{X}_0 , X_0 y U_0 :

$$\delta X = X - X_0, \quad \delta\dot{X} = \dot{X} - \dot{X}_0, \quad \delta U = U - U_0 \quad (3.120)$$

El término denotado por $h.o.t.(t)$ agrupa los términos de orden mayor a uno, para las aproximaciones polinomiales de las derivadas de f , pues su nombre es un acrónimo

del inglés *high order terms*, los cuáles no se toman en cuenta para este análisis. Los términos de primer orden están agrupados en las matrices $[\frac{\partial f}{\partial X}]$ y $[\frac{\partial f}{\partial U}]$, cuyos elementos están definidos por las derivadas parciales del vector de funciones f , evaluado en los puntos de equilibrio:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{(X=X_0, U=U_0)}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j} \Big|_{(X=X_0, U=U_0)} \quad (3.121)$$

Por lo tanto, es necesario obtener los puntos de equilibrio para evaluar la linealización del modelo.

3.8.1 PUNTOS DE EQUILIBRIO

Las condiciones de vuelo que se analizarán están descritas por estados constantes, tanto el vuelo estacionario como el vuelo recto y nivelado. En ambos casos se utilizará un el subíndice 0 para designar que es un punto de equilibrio. Por lo tanto la condición de equilibrio se denota que:

$$\dot{X}_0 = 0_{[9 \times 1]} \quad (3.122)$$

dónde $0_{[9 \times 1]}$ denota un vector de dimensiones 9×1 con elementos iguales a cero. Utilizando este vector que indica un valor de cero para todas las variables de estado, podemos calcular el valor requerido de las variables de entrada para satisfacer esta condición. Tomando las ecuaciones (3.110), (3.111), (3.113) y (3.115), y despejando para cada variable de entrada:

$$U_0 = \begin{bmatrix} U_{X_0} \\ U_{Z_0} \\ U_{Q_{x_0}} \\ U_{Q_{y_0}} \\ U_{Q_{z_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(w_b q - v_b r + g s_\theta) - X_A \\ m(v_b p - u_b q - g c_\theta c_\phi) - Z_A \\ qr(I_z - I_y) - M_{(b|Ap)} \\ pr(I_x - I_z) - M_{(b|Aq)} \\ qp(I_y - I_x) - M_{(b|Ar)} \end{bmatrix}_{X=X_0} \quad (3.123)$$

dónde se indica que la expresión debe ser evaluada utilizando el punto de equilibrio para el vector de estado. Esta formulación es posible debido a que cada variable de entrada sólo tiene efecto para una función de estado en particular.

Ahora, considerando el equilibrio de la tasa de cambio nula de la velocidad lateral \dot{v}_b expresada en la ecuación (3.114), se obtiene la siguiente condición:

$$0 = \left[\frac{1}{m} Y_A - u_b r + w_b p + g c_\theta s_\phi \right]_{X=X_0} \quad (3.124)$$

dónde hay se debe notar que tanto en las condiciones de vuelo recto y nivelado, y vuelo estacionario no se experimentan velocidades angulares ni velocidad lateral, obteniendo así:

$$0 = [g c_\theta s_\phi]_{X=X_0} \quad (3.125)$$

anulando así la fuerza lateral aerodinámica, debido a la condición de vuelo recto, o bien, de vuelo estacionario, forzando a alguna de las variables a tomar un valor específico para satisfacer la condición. Por lo tanto, considerando que la aeronave no tiene que operar a altos ángulos de cabeceo, obtenemos que:

$$\phi_0 = 0 \quad (3.126)$$

con lo que se satisface así la condición de aceleración lateral cero para los dos modos de vuelo considerados en este análisis.

Para el caso de las tasas de los ángulos de orientación, expresadas en las ecuaciones (3.116) y (3.117), rápidamente se puede apreciar que la ausencia de velocidades angulares satisface la tasa de cambio nula para ambos ángulos:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 &= [p - q s_\phi t_\theta + r c_\phi t_\theta]_{X=X_0} \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= [q c_\phi - r s_\phi]_{X=X_0} \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

En el caso de la tasa de cambio de altura, expresada en la ecuación (3.118), esta condición depende del balance entre las velocidades longitudinal y vertical del cuerpo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= [-u_b s_\theta + v_b c_\theta s_\phi + w_b c_\phi c_\theta]_{X=X_0} \\ 0 &= [-u_b s_\theta + w_b c_\theta]_{X=X_0} \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$[w_b = u_b t_\theta]_{X=X_0}$$

dónde el balance entre la velocidad longitudinal y vertical de la aeronave está determinado por la tangente del ángulo de cabeceo θ . Como no se está considerando el cambio en la densidad del aire debido a la altura, la variable z puede tomar cualquier valor en el modelo. Por lo que de arbitrariamente se utilizará un valor igual a 0, es decir, ($z_0 = 0$). De esta forma se puede reescribir la ecuación (3.123), tomando las consideraciones hechas para las condiciones de equilibrio anteriores:

$$U_0 = \begin{bmatrix} U_{X_0} \\ U_{Z_0} \\ U_{Q_{x_0}} \\ U_{Q_{y_0}} \\ U_{Q_{z_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgs_\theta - X_A \\ -(mgc_\theta + Z_A) \\ 0 \\ -M_{(b|Aq)} \\ 0 \end{bmatrix}_{X=X_0} \quad (3.130)$$

dónde los momentos aerodinámicos en los ejes x y z tiene valor cero debido a la ausencia de velocidades angulares y velocidad axial lateral. Como se puede observar, el ángulo de cabeceo θ puede tomar distintos valores, produciendo diferentes requerimientos de equilibrio para el sistema de propulsión. Se va a establecer que este ángulo θ_0 tiene un valor igual a 0, es decir ($\theta_0 = 0$) para los puntos de equilibrio en las dos maniobras que se analizarán en este trabajo. Por lo tanto, para el caso del vuelo estacionario, el valor para el vector de estado se expresa como:

$$X_H = 0_{[9 \times 1]} \quad (3.131)$$

Para el caso del vuelo recto y nivelado, se debe establecer la velocidad a la que ha de operar el vehículo. Debido a que se fijó el ángulo de cabeceo $\theta = 0$, la velocidad de vuelo corresponde a la velocidad u_b . Se determinó una velocidad $u_{b_H} = 15.5 [m/s]$, con tal que el ángulo de deflexión de los rotores frontales fuera muy cercano a cero, como se puede apreciar en la Figura 2.14. Por lo que el vector estado en condiciones de vuelo recto y nivelado, está dado como:

$$X_{SLF} = [0 \ 0 \ 0 \ 15.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.132)$$

Finalmente, podemos obtener los valores requeridos en las entradas del sistema evaluando la ecuación (3.130) utilizando cada vector de estado en condiciones de equilibrio de las ecuaciones (3.131) y (3.132), obteniendo los siguientes vectores de entradas

para cada caso:

$$U_H = [U_0]_{X=X_H} \quad (3.133)$$

$$U_H = \begin{bmatrix} 0 & -22.563 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$U_{SLF} = [U_0]_{X=X_{SLF}} \quad (3.134)$$

$$U_{SLF} = \begin{bmatrix} 3.2609 & -3.4607 & 0 & -1.0274 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Con esto se definen las condiciones de equilibrio para ambos modos de vuelo y se pueden definir las aproximaciones del espacio lineal de estados para ambos casos.

3.8.2 ESPACIO LINEAL DE ESTADOS

La ecuación del espacio lineal de estados se expresa de forma general como:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (3.135)$$

dónde el vector de estados X de la aproximación, en realidad está dado por la diferencia entre el punto de equilibrio y el estado de la variable, como se expresa en la ecuación (3.120). Por lo tanto, la aproximación del espacio lineal de estados está dado por:

$$\begin{aligned} \delta\dot{X} &= A\delta X + B\delta U \\ \delta Y &= C\delta X + D\delta U \end{aligned} \quad (3.136)$$

dónde las matrices A y B se obtienen de la expansión en series de Taylor de la función de estado f , como se muestra en la ecuación (3.119) y se definen como :

$$A = \frac{\partial f}{\partial X}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial U} \quad (3.137)$$

El espacio de estados se obtiene evaluado estas matrices A y B con las condiciones de equilibrio en las condiciones de operación dadas, definidas por los vectores X_H y X_{SLF} en las ecuaciones (3.131) y (3.132), respectivamente.

El vector Y contiene las variables de estado del sistema que se quieren regular, y está definido como:

$$\delta Y = \begin{bmatrix} \delta u_b & \delta z & \delta \phi & \delta \theta & \delta r \end{bmatrix}^T \quad (3.138)$$

Para obtener este vector, las matrices C y D deben estar definidas como:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

$$D = 0_{[5 \times 5]} \quad (3.140)$$

Esta matriz D no posee un efecto en el modelo, podría ser omitida pero se ha especificado por formalidad en la notación. En el caso de la matriz C , pudiera seleccionarse una mayor cantidad de variables de salida, pero únicamente se han tomado las cuales han de ser reguladas directamente en los lazos de control.

3.8.2.1 VUELO ESTACIONARIO

Utilizando el vector X_H de equilibrio en vuelo estacionario de la expresión (3.131), para evaluar la matriz de derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial X}$, se obtiene:

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Se puede apreciar como el modelo en este punto de operación consiste básicamente en una serie de integradores. Para el caso de la matriz $\frac{\partial f}{\partial U}$ se obtienen los siguientes valores:

$$B_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.5263 \\ 0.4348 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4348 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Debido a que esta matriz B únicamente depende de las propiedades de masa e inercia del vehículo, será idéntica para el vuelo recto y nivelado.

3.8.2.2 VUELO RECTO Y NIVELADO

Utilizando el vector X_{SLF} de equilibrio en vuelo estacionario de la expresión (3.132), para evaluar la matriz de derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial X}$, se obtiene:

$$A_{SLF} = \begin{bmatrix} \overline{0.0347} & 0 & 1.2714 & 0 & 0.106 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{0.011} & \overline{0.593} & 2.2152 & 0.07 & 0.503 & 0 & 0 & 0 \\ 0.003 & 0 & \overline{0.1086} & 0 & \overline{0.24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0254 & \overline{0.183} & 0 & 0.52 & 0 & \overline{9.81} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{15.54} & 0 & \overline{0.12} & 0 & 9.81 & 0 & 0 \\ 0 & 15.54 & 0.1477 & \overline{1.07} & 0 & \overline{0.114} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \overline{15.54} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

dónde se ha utilizado la simbología $\overline{\#}$ para identificar un valor negativo, con el fin de compactar su representación gráfica. Como se mencionó anteriormente, la matriz

B_{SLF} es idéntica a la matriz B_H por solo depender de las propiedades de inercia y masa. Por lo cuál, se ha optado por identificar a ambas con la misma letra B :

$$B_{SLF} = B_H = B \quad (3.144)$$

3.8.3 MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Es necesario expresar el sistema en forma de funciones de transferencia, con el fin de analizarlo utilizando métodos basado en el dominio de la frecuencia. Las funciones de transferencia se pueden obtener a partir de las matrices del espacio de estados, como se explica en Kailath (1980) utilizando la siguiente ecuación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.145)$$

Considerando la matriz (3.139), la ecuación (3.145) produciría la siguiente matriz de transferencia:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Esta matriz de transferencia $G(s)$ expresa la relación entre las variables de entrada del sistema y las variables de salida:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\begin{bmatrix} u_b(s) \\ z(s) \\ \phi(s) \\ \theta(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_X(s) \\ U_Z(s) \\ U_{Qx}(s) \\ U_{Qy}(s) \\ U_{Qz}(s) \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

dónde se asume esta descripción es respecto al valor de equilibrio a partir del cuál se hace la linealización, por lo que se ha omitido señalar el símbolo δ de la ecuación (3.120).

3.8.3.1 VUELO ESTACIONARIO

Partiendo de la ecuación (3.145), la matriz de transferencia para la condición de vuelo estacionario se obtiene utilizando la matriz A_H de la expresión (3.141) y se encuentra dada por:

$$G_H(s) = C(sI - A_H)^{-1}B \quad (3.148)$$

dónde los elementos de $G_H(s)$ con valor diferente de cero están definidos en las expresiones (B.1) a la (B.6).

3.8.3.2 VUELO RECTO Y NIVELADO

Partiendo de la ecuación (3.145), la matriz de transferencia para la condición de vuelo recto y nivelado se obtiene utilizando la matriz A_{SLF} de la expresión (3.143) y se encuentra dada por:

$$G_{SLF}(s) = C(sI - A_{SLF})^{-1}B \quad (3.149)$$

dónde los elementos de $G_{SLF}(s)$ están definidos en las expresiones (B.8) a la (B.32).

CAPÍTULO 4

DISEÑO DE CONTROLADORES

Para el diseño de los controladores se siguió una metodología de análisis multi-variable en el dominio de la frecuencia, mediante conceptos y herramientas teóricas que a continuación se describirán. De forma general, la metodología consiste en:

- Identificar los polos y los ceros de transmisión de la planta.
- Evaluar el acoplamiento relativo del sistema, mediante la matriz **RGA** en ambos modos de vuelo, para comprobar la factibilidad de un control descentralizado.
- Diseñar el controlador diagonal $K(s)$ partiendo de las ecuaciones de los canales, buscando obtener márgenes de estabilidad robustos. Primeramente asumiendo durante el diseño del compensador de cada canal en particular, un control ideal ($\omega_B = \infty$) para el resto de las variables.
- Evaluar los márgenes de estabilidad de los canales evaluándolos con el ancho de banda real (ω_B) de todos los canales.
- Analizar la robustez de cada canal, mediante la función de estructura multi-variable (**MSF**).
- Comprobar el diseño de los controladores, mediante pruebas de simulación, implementados en sistema no-lineal.

4.1 POLOS Y CEROS DE LA PLANTA

Para el caso del vuelo estacionario, la planta consiste únicamente en integradores, como se puede apreciar en las ecuaciones (3.141) y (B.1)-(B.6). También debe señalarse que en estas condiciones el sistema no posee ceros de transferencia, por lo que se puede decir que el sistema es de relativa simplicidad, prácticamente asemejándose al modelo de una aeronave multicóptero común.

Para las condiciones de vuelo recto y nivelado, los polos del sistema toman valores de mayor complejidad. Estos están se pueden apreciar en la ecuación (B.7) y en la Figura 4.1. Se pueden apreciar tres polos reales inestables y un par de polos complejos poco amortiguados, además de un integrados, un polo real y un par de polos complejos estables.

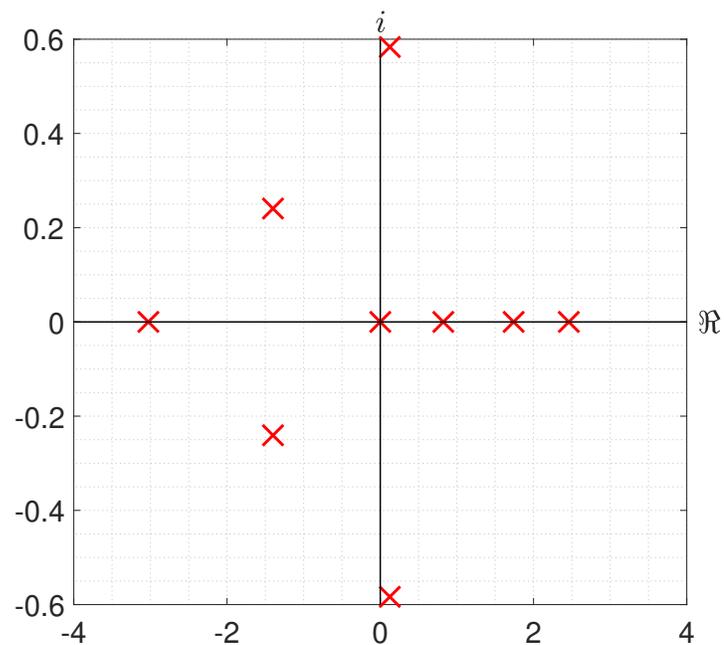


FIGURA 4.1: Polos del sistema en el plano complejo.

En estas condiciones de vuelo horizontal, la planta posee únicamente un zero de transmisión con valor de $s = -0.0935$. Los ceros de transmisión, describen el

acoplamiento de la planta y en caso de ser de fase no-mínima pueden marcar un límite al ancho de banda de los canales. Estos pueden ser calculados gracias a la descomposición de Smith-McMillan, como se explica en Kailath (1980).

4.2 ACOPLAMIENTO RELATIVO

Una forma de medir el acoplamiento interno de un sistema multivariable de control es mediante la matriz de ganancias relativas, o también conocida por sus siglas en inglés *Relative Gain Array Matrix*, matriz RGA. Esta, fue inicialmente presentada en Bristol (1966) para evaluar el acoplamiento en estado estacionario para combinaciones de entradas y salidas. La definición de la matriz RGA, para una matriz no-singular cuadrada G es descrita en Skogestad y Postlethwaite (2005) como:

$$\text{RGA}(G) = \Lambda(G) \triangleq G \times (G^{-1})^T \quad (4.1)$$

dónde (\times) representa una multiplicación elemento por elemento, también conocida como el producto de Schur. Tal y como se menciona en Skogestad y Postlethwaite (2005), el valor de esta matriz es de especial relevancia cuando esta es evaluada en la frecuencia del cruce para el ancho de banda del canal de apareamiento de entrada-salida. Pues, es preferible para un control descentralizado, valores cercanos a 1 en la frecuencia de cruce ω_{bw} del canal de apareamiento. También es conveniente la dominancia de esta magnitud unitaria en la diagonal de la matriz; lo cuál depende de la estructura particular de esta. Otra ventaja de esta herramienta teórica, es que puede utilizarse independientemente del compensador que se utilice para el canal, sólo deben de definirse los apareamientos entre variables.

Como se ha de observar en la Figura (4.2), la estructura dada a la matriz $G(s)$ de la ecuación (3.146) refleja esta dominancia en el peso de la diagonal principal. Además que, es evidente el apareamiento diagonal necesario para regular cada una de las variables del vector Y de la ecuación (3.147), para las condiciones de vuelo

estacionario.

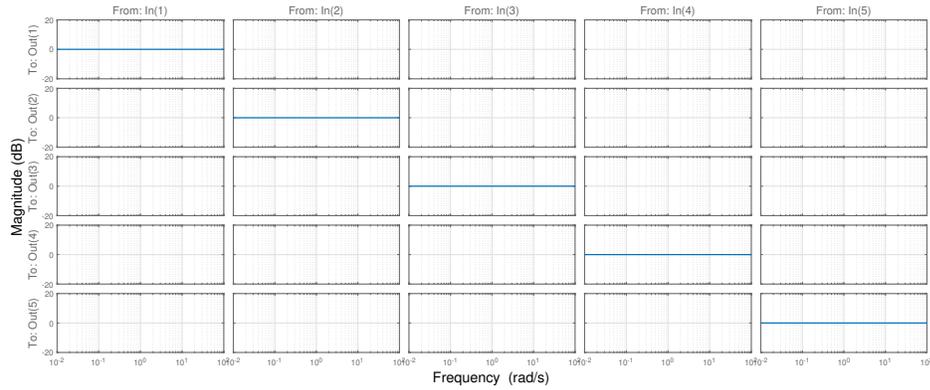


FIGURA 4.2: Magnitud de la matriz de ganancias relativas para el dominio de la frecuencia, en vuelo estacionario.

En el caso del vuelo recto y nivelado, la Figura 4.3 indica la magnitud su respectiva matriz RGA en el dominio de la frecuencia. Puede observarse que para las condiciones de estado estacionario, es decir $\omega = 0$, no hay como tal un desacoplamiento. Por lo que las referencias constantes que se proporcionen, deben satisfacer la condición de equilibrio para el estado al que se desea llegar. Además, se observa que sí hay desacoplo dinámico en los apareamientos de la diagonal del sistema, de forma general para frecuencias arriba de 10 [rad/s].

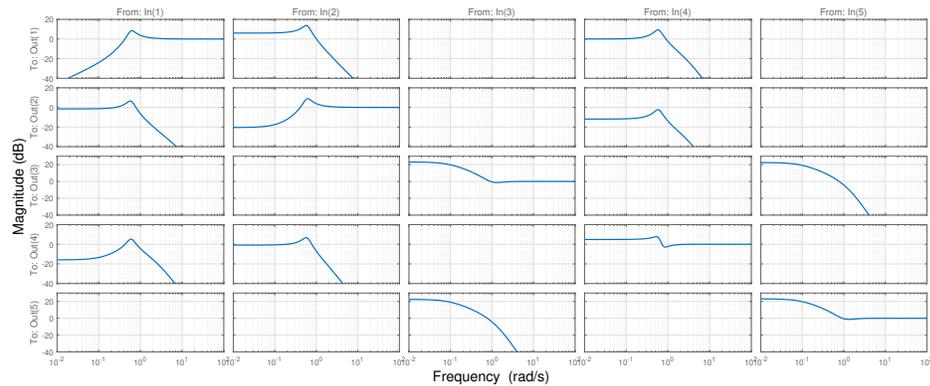


FIGURA 4.3: Magnitud de la matriz de ganancias relativas para el dominio de la frecuencia, en vuelo recto y nivelado.

Este análisis provee un fuerte indicador de que es posible implementar un sistema de control descentralizado para el vehículo. Lo cuál, será tomado como punto de partida para el diseño del sistema de control.

4.3 ECUACIONES DE LOS CANALES

Como se mencionó previamente, para realizar el diseño de los controladores se tendrá en consideración el acoplamiento de los apareamientos de entradas y salidas. Para ello, es conveniente formular las ecuaciones de un sistema lineal de múltiples entradas y múltiples salidas, también conocido como *MIMO* por sus siglas en inglés, *Multiple Input Multiple Output*.

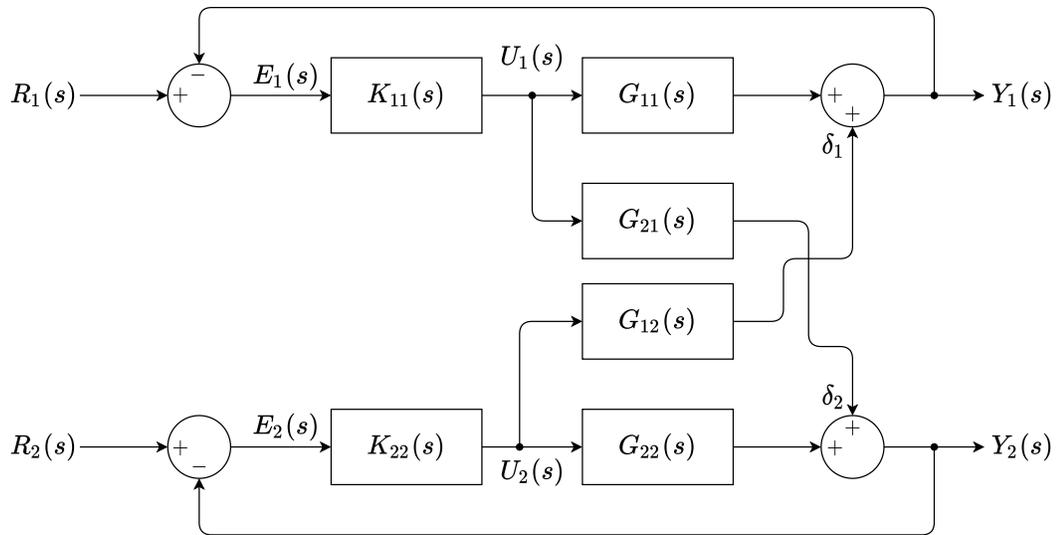


FIGURA 4.4: Diagrama de bloques general para un sistema MIMO en lazo cerrado.

La Figura 4.4 muestra el diagrama de bloques general para un sistema MIMO en lazo cerrado. Este diagrama asume un sistema cuya matriz de transferencia $G(s)$ es de dimensión $n \times n$, con controlador diagonal identificado por la matriz $K(s)$. Las

principales variables del sistema están dadas como:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s), \\ U(s) &= K(s)E(s), \\ E(s) &= R(s) - Y(s), \end{aligned} \tag{4.2}$$

dónde $Y(s)$ es el vector de variables de salida de longitud n , $U(s)$ es el vector de variables de entrada, también de longitud n ; $R(s)$ es el vector de referencias de la longitud y $E(s)$ es el vector de error para los controladores del sistema. La dinámica para el lazo cerrado se expresa como:

$$Y(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}R(s) \tag{4.3}$$

dónde I es una matriz diagonal unitaria de dimensión $n \times n$.

El diseño de los controladores del sistema se realizarán a partir de las ecuaciones de los canales. Las cuales se pueden obtener manipulando el sistema descrito en la Figura 4.4 mediante álgebra de bloques, tal y como se explica en Amézquita *et al.* (2013). De esta forma obtenemos el sistema representado como lo muestra la Figura 4.5.

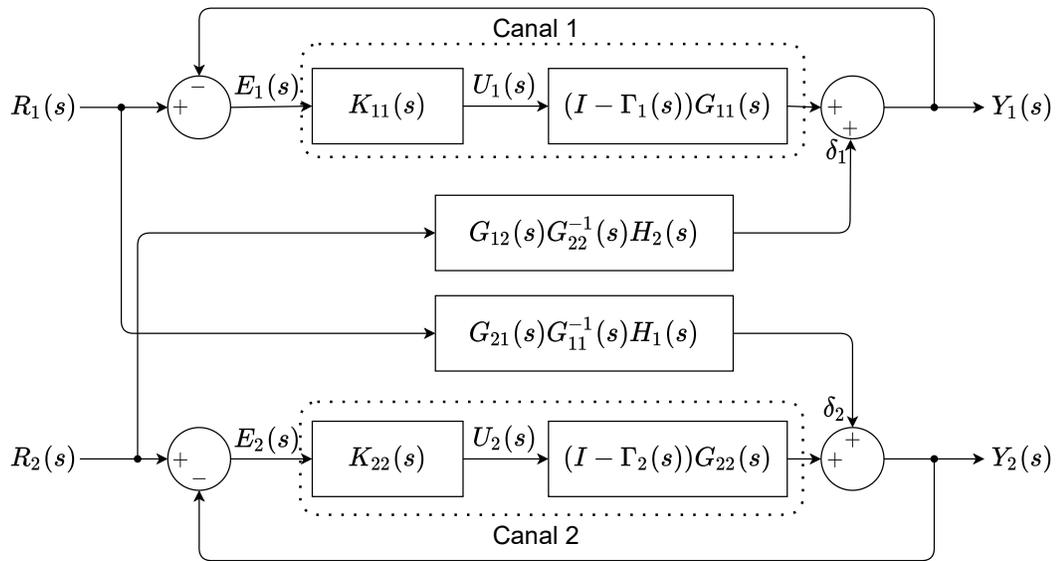


FIGURA 4.5: Canales de control para un sistema MIMO en lazo cerrado.

Para realizar esta manipulación algebraica, primeramente se ha dividido el sistema declarado en (4.2), tomando las variables declaradas en (4.2) y dividiéndolas en dos grupos:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ \hline G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{array} \right], \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} K_{11}(s) & 0 \\ \hline 0 & K_{22}(s) \end{array} \right], \quad E(s) = \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix}.$$

Habiendo definido estas variables, se puede expresar la ecuación para el canal 1, mostrado en la Figura 4.5 y es definida como:

$$C_1(s) = (I - \Gamma_1(s))G_{11}(s)K_{11}(s) \quad (4.5)$$

dónde Γ_1 es conocida como *función de estructura multivariable* ó **MSF** por sus siglas en inglés; y se describe en Amézquita *et al.* (2013) junto con su relación con la matriz RGA. Esta función MSF es obtenida mediante la manipulación algebraica de las ecuaciones (4.4) buscando obtener una expresión directa entre la referencia $R_1(s)$ y la salida $Y_1(s)$. La expresión para la función MSF, $\Gamma_1(s)$, es definida como:

$$\Gamma_1(s) = G_{12}(s)G_{22}^{-1}(s)H_2(s)G_{21}(s)G_{11}^{-1}(s), \quad (4.6)$$

dónde $H_2(s)$ es el lazo cerrado de la matriz diagonal $G_{22}(s)K_{22}(s)$, expresado como:

$$H_2(s) = G_{22}(s)K_{22}(s)(I + G_{22}(s)K_{22}(s))^{-1}. \quad (4.7)$$

Se puede observar en de la ecuación del canal 1, la ecuación (4.5), que la estabilidad del canal depende tanto de la función en lazo abierto de la diagonal de la matriz de transferencia, $G_{11}(s)$, como del controlador $K_{11}(s)$ y del factor $(1 - \Gamma_1(s))$. Y como se aprecia en la ecuación de $\Gamma_1(s)$, la ecuación (4.6), esta función depende de la función $H_2(s)$, que es expresada en la ecuación (4.7) y depende a su vez del otro controlador de la diagonal, de $K_{22}(s)$. Por lo tanto, diseñar de forma exacta los controladores $K_{11}(s)$ y $K_{22}(s)$, involucraría resolver un sistema de ecuaciones para ambas funciones, buscando obtener márgenes robustos de estabilidad. Esto supone

un análisis de mayor complejidad, y se propone resolver el problema haciendo uso de la relación de la función MSF con la matriz RGA . Esta relación es analizada en Amézquita *et al.* (2013), dónde fundamentalmente cada elemento de la matriz RGA es definido como:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{(1 - \gamma_{ij}(s))} \quad (4.8)$$

dónde γ_{ij} es la función MSF para cada elemento λ_{ij} , de la matriz RGA . Para el caso del primer elemento, es decir el elemento $(1, 1)$, la expresión de su correspondiente función MSF es:

$$\gamma_{11}(s) = G_{12}(s)G_{22}^{-1}(s)IG_{21}(s)g_{11}^{-1}(s) \quad (4.9)$$

dónde $g_{11}(s)$ expresa el primer elemento de la matriz de transferencia $G(s)$ e I es una matriz de identidad de tamaño $n - 1$. Se debe notar que omitir la matriz de identidad I , no afecta la expresión, puesto que en este caso, $G_{21}(s)$ realmente es un vector de longitud $n - 1$. La razón para incluir la matriz I en la expresión (4.9) es para compararla con la expresión (4.6), dónde en lugar de la identidad, se tiene $H_2(s)$, que es definida en la ecuación (4.7). Como se puede apreciar, matriz $H_2(s)$ representa el lazo cerrado para la diagonal de la matriz $G(s)$, sin tomar en cuenta el primer elemento de la matriz, ni el acoplamiento entre las variables, es decir, como si se tomara cada apareamiento en particular sin considerar el resto de los apareamientos.

Esta equivalencia de $H_2(s)$ a la matriz de identidad en la ecuación (4.9) puede ser interpretada como un ancho de banda infinito para $H_2(s)$, pues eso significaría que el sistema responde con una dinámica de $1 \rightarrow 1$ sin decaer conforme aumenta el régimen en frecuencia. Por lo tanto, de la función MSF de canal 1, por poner un ejemplo, podría formularse primeramente sin considerar la función $H_2(s)$ durante el diseño del compensador de este canal y viceversa. Para luego considerar las funciones de $H_1(s)$ y $H_2(s)$ en una segunda iteración, ya utilizando los compensadores calculados previamente. Se puede apreciar en la ecuación (4.5), que el factor $(I - \Gamma_1(s))$ es parecido a una retroalimentación positiva y puede inducir ceros de fase no-mínima en la ecuación del canal (eq. 4.5). Por lo tanto, es importante analizar la robustez

de $\Gamma_1(s)$, para así, determinar también la robustez del canal.

4.4 ESTABILIDAD DE LOS CANALES

Como se mencionó en la sección anterior, los compensadores de cada canal pueden ser diseñados tomando la ecuación de cada canal, la cuál se define en la ecuación (4.5) para el elemento (1,1) de la matriz $G(s)$. También debe asumirse inicialmente que la función MSF coincide con la ecuación (4.9), que es tomada del elemento λ_{11} de la matriz RGA . Por lo que, la ecuación del canal de cada variable puede obtenerse a partir de esta misma expresión (4.5), reacomodando los elementos de la matriz $G(s)$. Obteniendo así, las expresiones para las funciones MSF de cada variable en las ecuaciones (C.1) a la (C.5) y las expresiones de cada canal, definidas en las ecuaciones (C.11) a la (C.15).

Recordando que para el caso de un sistema SISO, dónde la función de lazo abierto para un sistema está dada por $C(s)$, el lazo en retroalimentación se expresa como:

$$CL(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)} \quad (4.10)$$

dónde, los polos del lazo cerrado están dados por los ceros del factor $(1 + C(s))$, el cuál es evaluado por el criterio de estabilidad de Nyquist en el dominio de la frecuencia para determinar la presencia de ceros inestables. De esta forma, este criterio provee una herramienta analítica para determinar la estabilidad de un sistema en retroalimentación. Este criterio de estabilidad obedece la siguiente ecuación:

$$\#Z_{RHP} = \#P_{RHP} + \#N \quad (4.11)$$

dónde $\#Z_{RHP}$ es el número de polos inestables del canal en retroalimentación, $\#P_{RHP}$ es el número de polos inestables del canal en lazo abierto y $\#N$ es el número de rodeos a -1 en sentido horario y en el plano complejo, cuando se evalúa la función de transferencia del canal ($C(s)$) en el dominio de la frecuencia.

En el caso de la función MSF , también se utiliza el criterio de estabilidad de Nyquist para evaluar la robustez de la estructura, puesto que el factor $(1 - \gamma)$ en la ecuación del canal MIMO expresado en la ecuación (4.5), asemeja la ecuación de los polos de un canal SISO en lazo cerrado $(1 + C(s))$. Por lo tanto la ecuación de Nyquist indicaría la presencia de ceros inestables en el factor $(1 - \gamma)$, y por lo tanto, ceros inestables en la ecuación del canal (ec. 4.5). Como en este caso la función que se evalúa tiene signo negativo, el número de rodeos $\#N$ son contados al rededor de 1. De esta forma podemos cuantificar los ceros de fase de mínima $\#Z$ inducidos por γ en la ecuación del canal, en base al número de rodeos $\#N$ y el número de polos inestables $\#P$ de γ . Algo importante que señalar es el hecho que los polos γ contienen los ceros de la función de transferencia en lazo abierto de la variable del canal respecto a la correspondiente variable de entrada, como se puede apreciar por el factor g_{11}^{-1} en la ecuación (4.9).

Para cada canal se diseñó un compensador de fase y ganancia mediante la técnica de *Bode Shaping*, analizando cada uno en condiciones de vuelo horizontal y posteriormente en vuelo estacionario, procurando que el mismo compensador pudiera operar ambos modos de vuelo con buenos márgenes de estabilidad. Estos márgenes de estabilidad se busca establecerlos lo suficientemente robustos para poder manejar la incertidumbre que pueda presentarse, procurando obtener un margen de fase mínimo mayor a 50° y un margen de ganancia mínimo mayor a $12dB$. Los compensadores que a continuación se presentarán, se diseñaron considerando las ecuaciones de la función MSF γ para cada variable, reportadas en (C.1), (C.2), (C.3) (C.4) y (C.5); dónde en cada ecuación se considera un ancho de banda infinito para el resto de las variables, *i.e.*, $H(s) = I$. Posterior al diseño los compensadores se evaluó la ecuación de cada canal, con las funciones $H(s)$ reportadas en (C.16), (C.17), (C.18), (C.19) y (C.20), para así evaluar su efecto en la función γ y en los márgenes de estabilidad de cada canal.

Se presentará para cada canal el efecto del resto de los lazos de control previamente diseñados. Debido al alto grado de los polinomios de las funciones de transfe-

rencia que se utilizan, el software dónde se computa la operación para las funciones gamma γ carece de la precisión para calcular las raíces de dichos polinomios. Razón por la cuál se optó por diseñar inicialmente los controladores evaluando las funciones de forma numérica para el diseño de los compensadores de los canales, como se muestra en la Figura 4.7a a manera de ejemplo para el caso de u_b y para corroborar la robustez de la estructura sí se evaluó las funciones γ_H , tomando en cuenta los compensadores diseñados considerando las funciones MSF ideales. Para cada caso se analizará la robustez de la estructura y después el diseño del compensador del canal.

4.4.1 VELOCIDAD LONGITUDINAL

A diferencia de el modelo reportado en (B.1), la función de transferencia en lazo abierto para la velocidad longitudinal respecto a la fuerza de propulsión en el eje x , se muestra en su forma reducida como:

$$\frac{u_b(s)}{U_X(s)} = \frac{0.43478s(s + 2.865)(s - 2.731)}{(s + 3.026)(s - 2.461)(s^2 - 0.2489s + 0.3559)} \quad (4.12)$$

Como se mencionó anteriormente, la función MSF ideal del canal no se obtuvo de forma precisa pero sí la que toma en cuenta el resto de los compensadores. Sus polos y ceros se muestran como:

$$\gamma_{u_b^H} = \frac{-0.079(s+2.06)(s-0.6059)(s^2+1.131s+0.3347)(s^2+5.848s+8.946)(s^2-10.55s+93.05)}{s(s+2.865)(s-2.731)(s^2+0.4237s+0.05062)(s^2+5.669s+9.08)(s^2+3.13s+4.15)} \quad (4.13)$$

Los ceros de la función de transferencia de la ecuación (4.12), están contenidos en los polos $s(s + 2.865)(s - 2.731)$ de γ , por lo cuál, estos se cancelarán en la ecuación del canal.

En la Figura 4.6 puede apreciarse como la función MSF en el diagrama de Nyquist realiza dos rodeos a 1, tanto para el caso ideal como para el caso con los anchos de banda reales para el resto de los canales. Considerando las frecuencias

negativas y que la función γ_{u_b} proviene del estado estacionario con ángulo de (-180°) , debido a la ganancia negativa de la función en la ecuación (4.13).

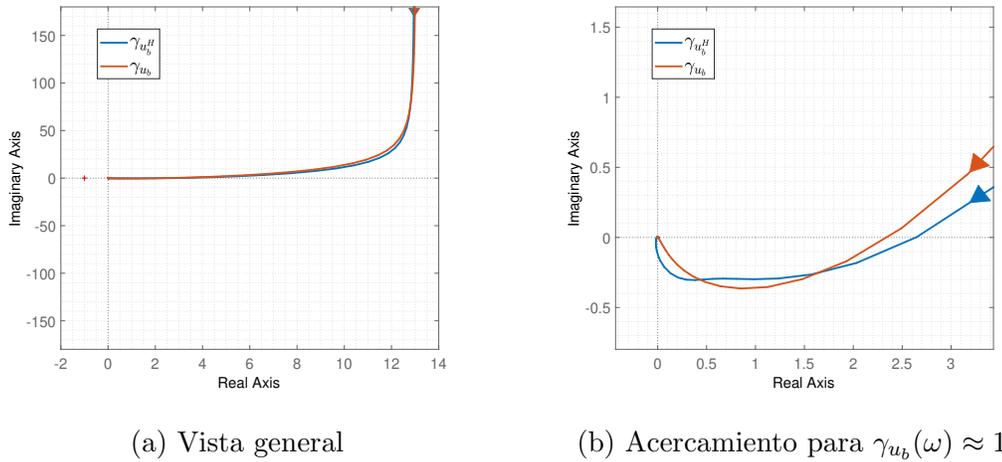


FIGURA 4.6: Diagrama de Nyquist de γ_{u_b} .

Dado que la función $\gamma_{u_b^H}$ contiene un polo inestable y que el diagrama de Nyquist hace dos rodeos a 1, se espera obtener tres ceros inestables en el factor $1 - \gamma_{u_b^H}$:

$$1 - \gamma_{u_b^H} = \frac{(s+3.026)(s+8.985)(s+19.75)(s+23.36)(s+29.23)(s-2.461)(s+0.4175)(s+114.3)(s^2-0.2489s+0.3559)(s^2+2.669s+2.479)(s^2+6.032s+10.12)}{s(s+114.3)(s+29.21)(s+23.35)(s+19.81)(s+9.028)(s+2.865)(s-2.731)(s^2+0.4237s+0.05062)(s^2+5.669s+9.08)(s^2+3.13s+4.15)} \quad (4.14)$$

dónde se puede apreciar que los tres ceros inestables $(s-2.461)(s^2-0.2489s+0.3559)$ que se esperaban por los rodeos a 1, cancelan los polos inestables de la función en lazo abierto, mostrada en la ecuación (4.12).

El compensador para el canal de u_b se diseñó buscando obtener una frecuencia de cruce en $\omega_B = 3.1 [rad/s]$ y con una margen de fase de 76° , como se puede apreciar en la Figura 4.7a. Este controlador consiste en una ganancia, y un compensador de adelanto centrado en la frecuencia de cruce deseada:

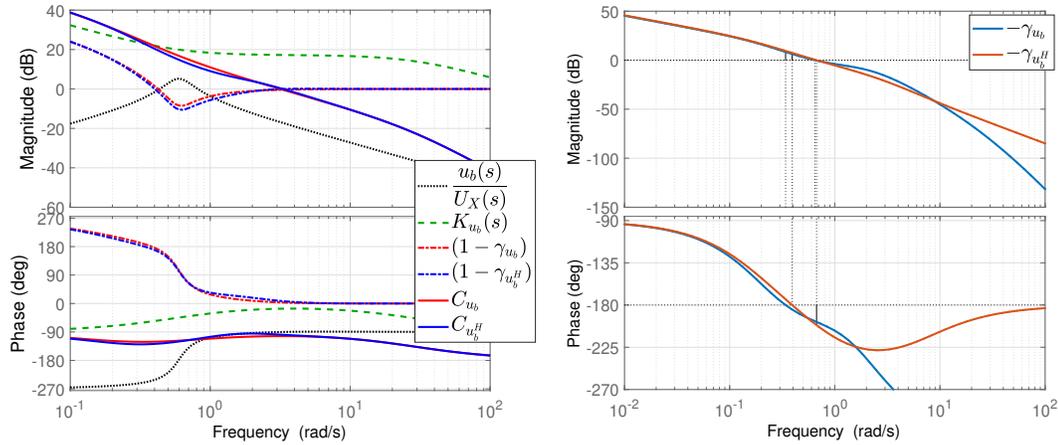
$$K_{u_b}(s) = \frac{10^{\left(\frac{46.21}{20}\right)}(s + 0.565)}{s(s + 28.32)} \quad (4.15)$$

Según la ecuación del canal, definida de forma general en la expresión (4.5),

para u_b los polos y ceros del canal resultan como:

$$C_{u_b^H} = \frac{88.873(s+0.565)(s+0.4175)(s+8.985)(s+19.75)(s+23.36)(s+29.23)(s+114.3)(s^2+2.669s+2.479)(s^2+6.032s+10.12)}{s(s+114.3)(s+29.21)(s+28.32)(s+23.35)(s+19.81)(s+9.028)(s^2+0.4237s+0.05062)(s^2+5.669s+9.08)(s^2+3.13s+4.15)} \quad (4.16)$$

dónde se puede apreciar que resulta completamente de fase mínima, pues el factor $(1 - \gamma_{u_b^H})$ canceló las inestabilidades de la función en lazo abierto $(\frac{u_b(s)}{U_X(s)})$.



(a) Diseño del canal u_b .

(b) Robustez de $(-\gamma_{u_b})$

FIGURA 4.7: Diagramas de Bode del canal y función MSF para u_b . Ver Tabla 4.1 para consultar márgenes de estabilidad.

Para el caso de la robustez de la estructura, es necesario que el número de rodeos en sentido anti-horario se mantenga cómo 0, para que no inducir ceros en el denominador de la ecuación del canal, que en estas condiciones no presenta inestabilidades. La Figura 4.7b muestra el cruce de la función γ_{u_b} con la línea de cero dB. Los márgenes de estabilidad del canal y la estructura se encuentran condensados en la Tabla 4.1.

4.4.2 ALTURA

A diferencia de el modelo reportado en (B.3), la función de transferencia en lazo abierto para la altura respecto a la fuerza de propulsión en el eje z , se muestra

Función	MG [dB]	MF [°]	ω_B [rad/s]
$-\gamma_{u_b}$	-7.4363	-21.3911	0.6704
$-\gamma_{u_b^H}$	-8.3952	-17.1958	0.6459
C_{u_b}	Inf	76.8173	3.1631
$C_{u_b^H}$	Inf	81.1204	3.3035

TABLA 4.1: Margenes de estabilidad para canal y estructura de u_b

en su forma reducida como:

$$\frac{z(s)}{U_Z(s)} = \frac{0.43478(s - 2.554)(s + 3.015)(s - 0.2665)}{s(s + 3.026)(s - 2.461)(s^2 - 0.2489s + 0.3559)} \quad (4.17)$$

Como se mencionó anteriormente, la función MSF ideal del canal no se obtuvo de forma precisa pero sí la que toma en cuenta el resto de los compensadores. Sus polos y ceros se muestran como:

$$\gamma_{z^H} = \frac{2.22e-16(s-2.162e04)(s+2.209e04)(s+23.38)(s+3.885)(s+3.103)(s+2.113)(s-1.337)(s+0.5602)^2(s+0.4659)(s^2+134.8s+4636)(s^2+469.8s+4.772e08)}{(s+114.3)(s+29.22)(s+24.74)(s+19.89)(s+3.015)(s+1.844)(s+1.063)(s+0.5602)^2(s-2.554)(s-0.2665)(s+0.08779)(s^2+6.667s+12.97)} \quad (4.18)$$

Los ceros de la función de transferencia de la ecuación (4.17), están contenidos en los polos $(s - 2.554)(s + 3.103)(s - 0.2665)$ de γ_{z^H} ; por lo cuál, estos se anulan en la ecuación del canal.

En la Figura 4.8 puede apreciarse como la función MSF en el diagrama de Nyquist realiza un rodeo a 1, tanto para el caso ideal como para el caso con los anchos de banda reales para el resto de los canales.

Dado que la función γ_{z^H} contiene dos polos inestables y que el diagrama de Nyquist hace un rodeo a 1, se espera obtener tres ceros inestables en el factor $1 - \gamma_{uz^H}$:

$$1 - \gamma_{z^H} = \frac{(s+3.026)(s+1.948)(s+0.6807)(s+0.5602)^2(s-2.461)(s+19.87)(s+24.73)(s+29.23)(s+114.3)(s^2-0.2489s+0.3559)(s^2+6.925s+13.79)}{(s+114.3)(s+29.22)(s+24.74)(s+19.89)(s+3.015)(s+1.844)(s+1.063)(s+0.5602)^2(s-2.554)(s-0.2665)(s+0.08779)(s^2+6.667s+12.97)} \quad (4.19)$$

dónde se puede apreciar que los tres ceros inestables $(s - 2.461)(s^2 - 0.2489s + 0.3559)$ que se esperaban por el rodeo a 1, cancelan los polos inestables de la función en lazo abierto, mostrada en la ecuación (4.17).

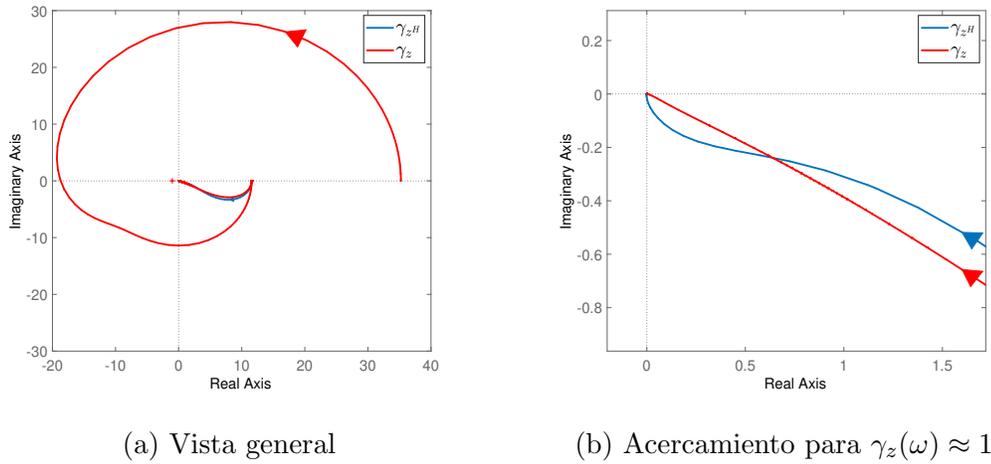


FIGURA 4.8: Diagrama de Nyquist de γ_z .

El compensador para el canal de z se diseñó buscando obtener una frecuencia de cruce en $\omega_B = 2.53 \text{ [rad/s]}$ y con una margen de fase de 52° , como se puede apreciar en la Figura 4.9a. Este controlador consiste en una ganancia, un integrador y un compensador de adelanto centrado en la frecuencia de cruce deseada:

$$K_z(s) = \frac{10^{(\frac{65}{20})}(s + 0.5605)^2}{s(s + 17.71)^2} \quad (4.20)$$

Según la ecuación del canal, definida de forma general en la expresión (4.5), para z los polos y ceros del canal resultan como:

$$C_{zH} = \frac{773.16(s+1.948)(s+0.6807)(s+0.5602)^2(s+19.87)(s+24.73)(s+29.23)(s+114.3)(s^2+6.925s+13.79)}{s^2(s+114.3)(s+29.22)(s+24.74)(s+19.89)(s+17.71)^2(s+1.844)(s+1.063)(s+0.08779)(s^2+6.667s+12.97)} \quad (4.21)$$

dónde se puede apreciar que resulta completamente de fase mínima, pues el factor $(1 - \gamma_{zH})$ canceló las inestabilidades de la función en lazo abierto $(\frac{z(s)}{U_z(s)})$.

Para el caso de la robustez de la estructura, es necesario que el número de rodeos en sentido anti-horario se mantenga cómo 0, para que no inducir ceros en el denominador de la ecuación del canal, que en estas condiciones no presenta inestabilidades. La Figura 4.9b muestra el cruce de la función γ_z con la línea de cero dB. Los márgenes de estabilidad del canal y la estructura se encuentran condensados en la Tabla 4.2.

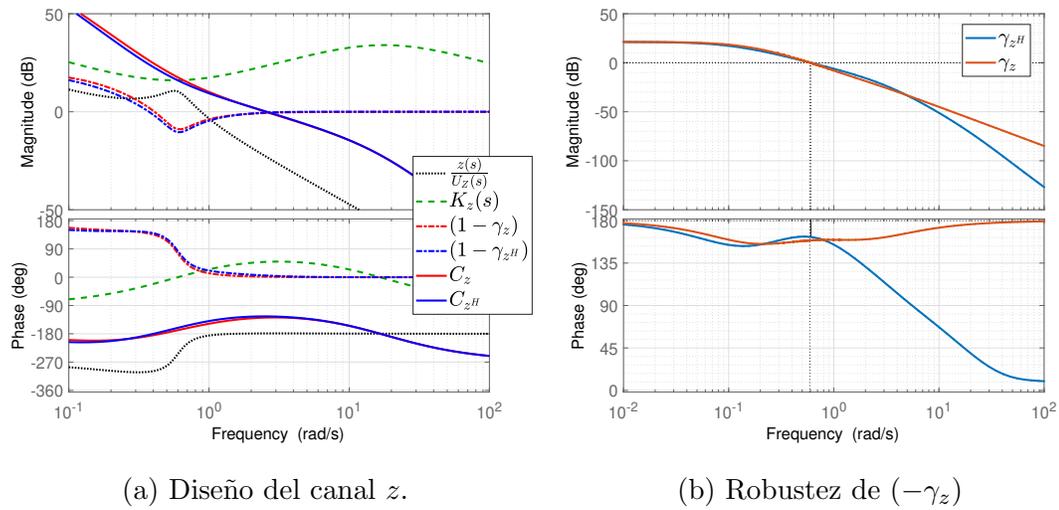


FIGURA 4.9: Diagramas de Bode del canal y función MSF para z . Ver Tabla 4.2 para consultar márgenes de estabilidad.

Función	MG [dB]	MF [°]	ω_B [rad/s]
$-\gamma_z$	-30.9336	-21.0112	0.5910
$-\gamma_{z^H}$	-21.2697	-17.2984	0.6037
C_z	22.1203	51.5408	2.5302
C_{z^H}	22.1034	55.3953	2.582

TABLA 4.2: Margenes de estabilidad para canal y estructura de z

4.4.3 ÁNGULO DE ALABEO

A diferencia de el modelo reportado en (B.4), la función de transferencia en lazo abierto para el ángulo de alabeo respecto al torque de propulsión en el eje x , se muestra en su forma reducida como:

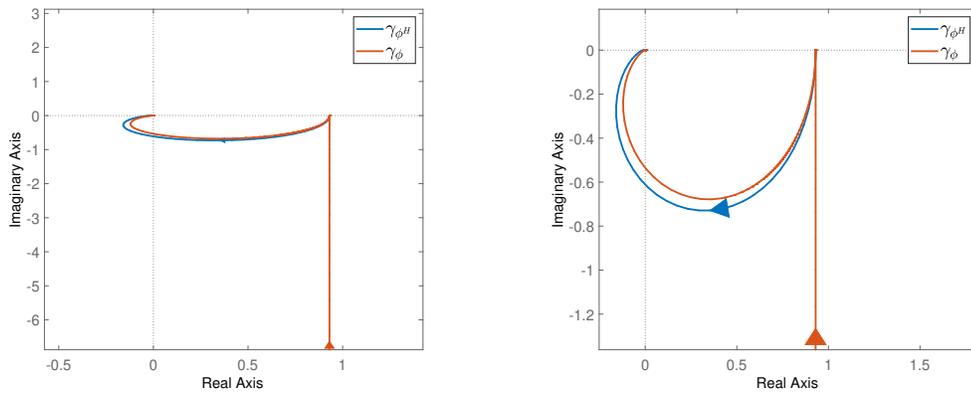
$$\frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} = \frac{25(s + 2.035)(s - 1.833)}{(s - 1.74)(s - 0.8228)(s^2 + 2.8s + 2.018)} \quad (4.22)$$

Como se mencionó anteriormente, la función MSF ideal del canal no se obtuvo

de forma precisa pero sí la que toma en cuenta el resto de los compensadores. Sus polos y ceros se muestran como:

$$\gamma_{\phi^H} = \frac{-6.6613e-16(s-6601)(s+6637)(s+73.48)(s+73.47)(s+28)(s-27.92)(s+3.194)(s-1.199)(s^2+36.08s+4.381e07)}{(s+4.575)(s+2.035)(s-0.9754)(s-1.833)(s+73.48)^2(s^2+1.072s+1.191)(s^2+27.5s+207.6)} \quad (4.23)$$

Los ceros de la función de transferencia de la ecuación (4.22), están contenidos en los polos $(s + 2.035)(s - 1.833)$ de γ_{ϕ^H} ; por lo cuál, estos se anulan en la ecuación del canal. En la Figura 4.10 puede apreciarse el diagrama de Nyquist de la función γ_{ϕ^H} no realiza rodeos a 1, pero pareciera hacer un rodeo en el caso ideal γ_{ϕ} considerando la ganancia positiva el número par de signos negativos en γ_H tiene tanto en el denominador, como en el numerador. Esto puede ser debido a un error numérico en el caso ideal.



(a) Vista general

(b) Acercamiento para $\gamma_{\phi}(\omega) \approx 1$

FIGURA 4.10: Diagrama de Nyquist de γ_{ϕ} .

Dado que la función γ_{ϕ^H} contiene dos polo inestables y que su diagrama de Nyquist no hace rodeos a 1, se espera obtener dos ceros inestables en el factor $(1 - \gamma_{\phi^H})$:

$$1 - \gamma_{\phi^H} = \frac{(s+4.526)(s-1.74)(s-0.8228)(s+73.48)^2(s+0.1057)(s^2+2.8s+2.018)(s^2+27.51s+207.7)}{(s+4.575)(s+2.035)(s-0.9754)(s-1.833)(s+73.48)^2(s^2+1.072s+1.191)(s^2+27.5s+207.6)} \quad (4.24)$$

dónde se puede apreciar que los dos ceros inestables $(s - 1.74)(s - 0.8228)$ que se esperaban, cancelan los polos inestables de la función en lazo abierto, mostrada en la ecuación (4.22).

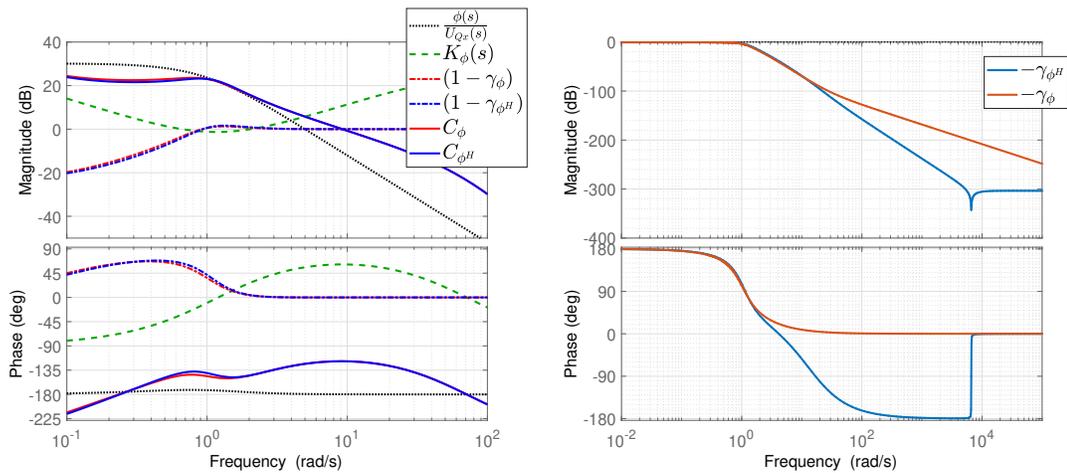
El compensador para el canal de ϕ se diseñó buscando obtener una frecuencia de cruce en $\omega_B = 9.25 [rad/s]$ y con una margen de fase de 60° , como se puede apreciar en la Figura 4.11a. Este controlador consiste en una ganancia, un integrador y un compensador de adelanto centrado en la frecuencia de cruce deseada:

$$K_\phi(s) = \frac{10^{\left(\frac{66}{20}\right)}(s + 1.165)^2}{s(s + 73.48)^2} \quad (4.25)$$

Según la ecuación del canal, definida de forma general en la expresión (4.5), para ϕ los polos y ceros del canal resultan como:

$$C_{\phi H} = \frac{49882(s+1.165)^2(s+4.526)(s+0.1057)(s^2+27.51s+207.7)}{s(s+4.575)(s-0.9754)(s+73.48)^2(s^2+1.072s+1.191)(s^2+27.5s+207.6)} \quad (4.26)$$

dónde se puede apreciar que resulta un polo inestable, pero al mismo tiempo es completamente de fase mínima, pues el factor $(1 - \gamma_{\phi H})$ anuló los ceros inestables de la función en lazo abierto $\left(\frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)}\right)$.



(a) Diseño del canal ϕ .

(b) Robustez de $(-\gamma_\phi)$

FIGURA 4.11: Diagramas de Bode del canal y función MSF para ϕ . Ver Tabla 4.3 para consultar márgenes de estabilidad.

Para el caso de la robustez de la estructura, es necesario que el número de rodeos en sentido anti-horario se mantenga cómo 0, para que no inducir ceros en el denominador de la ecuación del canal, que en estas condiciones no presenta inestabilidades. La Figura 4.11b muestra el cruce de la función γ_ϕ con la línea de cero

dB. Los márgenes de estabilidad del canal y la estructura se pueden consultar en la Tabla 4.2.

Función	MG [dB]	MF [°]	ω_B [rad/s]
$-\gamma_\phi$	-Inf	Inf	-
$-\gamma_{\phi^H}$	0.6282	Inf	-
C_ϕ	-22.5685	61.5893	9.2401
C_{ϕ^H}	-21.6604	61.5643	9.2392

TABLA 4.3: Margenes de estabilidad para canal y estructura de ϕ

4.4.4 ÁNGULO DE CABECEO

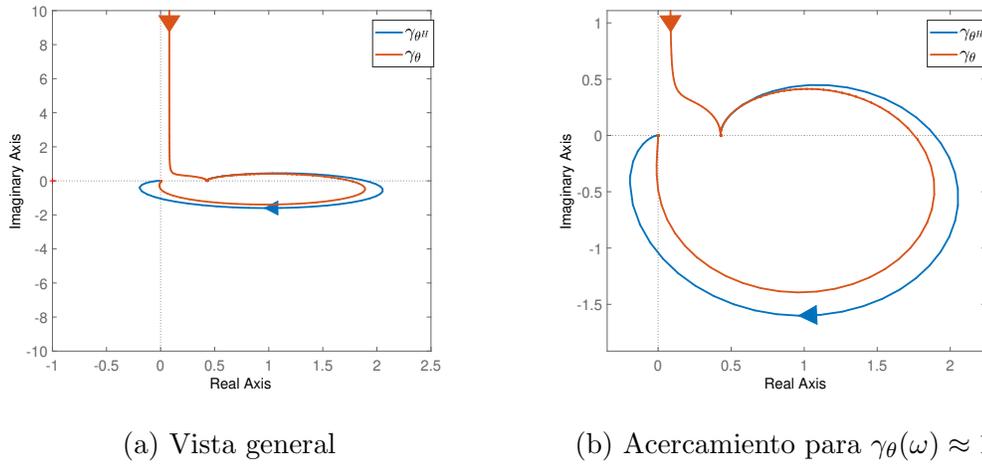
A diferencia de el modelo reportado en (B.5), la función de transferencia en lazo abierto para el ángulo de cabeceo respecto al torque de propulsión en el eje y , se muestra en su forma reducida como:

$$\frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} = \frac{16.667(s^2 + 0.3056s + 0.5918)}{(s + 3.026)(s - 2.461)(s^2 - 0.2489s + 0.3559)} \quad (4.27)$$

Como se mencionó anteriormente, la función MSF ideal del canal no se obtuvo de forma precisa pero sí la que toma en cuenta el resto de los compensadores. Sus polos y ceros se muestran como:

$$\gamma_{\theta^H} = \frac{1.1102e-16(s-1866)(s+23.14)(s+10.65)(s+3.232)(s+0.5649)(s+0.4168)(s^2+169.2s+7154)(s^2+1.034s+0.4164)(s^2+9631s+4.281e07)(s^2-7675s+3.483e07)}{(s+24.8)(s+23.33)(s+9.034)(s+2.84)(s+0.3841)(s-2.654)(s+84.58)^2(s^2+1.742s+1.056)(s^2+0.3056s+0.5918)(s^2+4.584s+5.962)} \quad (4.28)$$

Los ceros de la función de transferencia de la ecuación (4.27), están contenidos en los polos $(s^2 + 0.3056s + 0.5918)$ de γ_{θ^H} ; por lo cual, estos se anulan en la ecuación del canal. En la Figura 4.12 puede apreciarse el diagrama de Nyquist de la función MSF realiza dos rodeos a 1 en sentido horario, tanto para el caso ideal como para el caso con los anchos de banda reales para el resto de los canales.


 FIGURA 4.12: Diagrama de Nyquist de γ_θ .

Dado que la función γ_{θ^H} contiene un polo inestable y que el diagrama de Nyquist hace dos rodeos a 1, se espera obtener tres ceros inestables en el factor $(1 - \gamma_{\theta^H})$:

$$1 - \gamma_{\theta^H} = \frac{(s+3.026)(s+9.041)(s+23.33)(s+24.8)(s-2.461)(s+0.3796)(s+84.58)^2(s^2+1.498s+0.7462)(s^2-0.2489s+0.3559)(s^2+5.001s+8.222)}{(s+24.8)(s+23.33)(s+9.034)(s+2.84)(s+0.3841)(s-2.654)(s+84.58)^2(s^2+1.742s+1.056)(s^2+0.3056s+0.5918)(s^2+4.584s+5.962)} \quad (4.29)$$

dónde se puede apreciar que los tres ceros inestables $(s-2.461)(s^2-0.2489s+0.3559)$ que se esperaban por los rodeos a 1, cancelan los polos inestables de la función en lazo abierto, mostrada en la ecuación (4.27).

El compensador para el canal de θ se diseñó buscando obtener una frecuencia de cruce en $\omega_B = 14.15$ [rad/s] y con una margen de fase de 52° , como se puede apreciar en la Figura 4.13a. Este controlador consiste en una ganancia, un integrador y un compensador de adelanto doble centrado en la frecuencia de cruce deseada:

$$K_\theta(s) = \frac{10^{(\frac{76}{20})}(s+2.384)^2}{s(s+84.58)^2} \quad (4.30)$$

Según la ecuación del canal, definida de forma general en la expresión (4.5), para θ los polos y ceros del canal resultan como:

$$C_{\theta^H} = \frac{1.0516e05(s+2.384)^2(s+0.3796)(s+9.041)(s+23.33)(s+24.8)(s^2+1.498s+0.7462)(s^2+5.001s+8.222)}{s(s+24.8)(s+23.33)(s+9.034)(s+2.84)(s+0.3841)(s-2.654)(s+84.58)^2(s^2+1.742s+1.056)(s^2+4.584s+5.962)} \quad (4.31)$$

dónde se puede apreciar que resulta un polo inestable, pero al mismo tiempo es completamente de fase mínima, pues el factor $(1 - \gamma_{\theta H})$ anuló los ceros inestables de la función en lazo abierto $(\frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)})$.

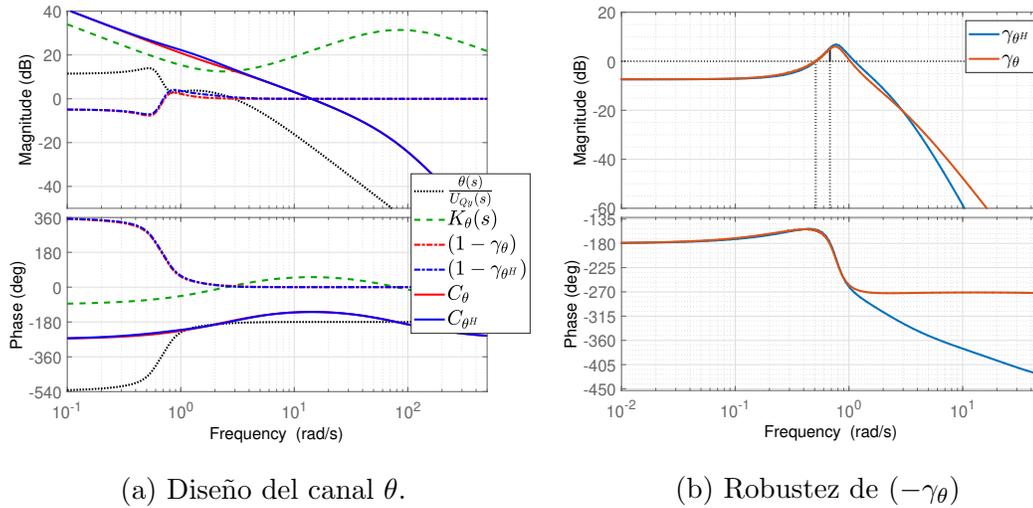


FIGURA 4.13: Diagramas de Bode del canal y función MSF para θ . Ver Tabla 4.4 para consultar márgenes de estabilidad.

Para el caso de la robustez de la estructura, es necesario que el número de rodeos en sentido anti-horario se mantenga cómo 0, para que no inducir ceros en el denominador de la ecuación del canal, que en estas condiciones no presenta inestabilidades. La Figura 4.13b muestra el cruce de la función γ_{θ} con la línea de cero dB. Los márgenes de estabilidad del canal y la estructura se pueden consultar en la Tabla 4.4.

4.4.5 TASA DE GUIÑADA

A diferencia de el modelo reportado en (B.6), la función de transferencia en lazo abierto para tasa de guiñada r respecto al torque de propulsión en el eje z , se

Función	MG [dB]	MF [°]	ω_B [rad/s]
$-\gamma_\theta$	-4.8871	23.9539	0.5052
$-\gamma_{\theta H}$	-5.5523	25.413	0.5162
C_θ	-13.8715	51.9244	14.1511
$C_{\theta H}$	-14.2709	51.8308	14.1535

TABLA 4.4: Márgenes de estabilidad para canal y estructura de θ

muestra en su forma reducida como:

$$\frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} = \frac{10.526(s - 0.9704)(s^2 + 1.099s + 1.069)}{(s - 1.74)(s - 0.8228)(s^2 + 2.8s + 2.018)} \quad (4.32)$$

Como se mencionó anteriormente, la función MSF ideal del canal no se obtuvo de forma precisa pero sí la que toma en cuenta el resto de los compensadores. Sus polos y ceros se muestran como:

$$\gamma_{rH} = \frac{-1.0827e-13(s+6487)(s-6484)(s+28)(s-27.92)(s-1.199)(s+1.165)^2(s^2+3.11s+4.206e07)}{(s+96)(s+38.59)(s+9.269)(s+2.767)(s-0.9704)(s-1.827)(s^2+2.388s+1.453)(s^2+1.099s+1.069)} \quad (4.33)$$

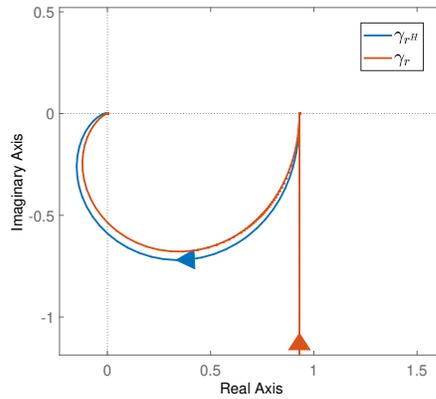
Los ceros de la función de transferencia de la ecuación (4.32), están contenidos en los polos $(s - 0.9704)(s^2 + 1.099s + 1.069)$ de γ_{rH} ; por lo cuál, estos se anulan en la ecuación del canal. En la Figura 4.14 puede apreciarse el diagrama de Nyquist de la función MSF no realiza rodeos a 1 en sentido anti-horario.

Dado que la función γ_{rH} contiene dos polo inestables y que el diagrama de Nyquist no hace rodeos a 1, se espera obtener dos ceros inestables en el factor $(1 - \gamma_{zH})$:

$$1 - \gamma_{rH} = \frac{(s+2.351)(s+0.7536)(s-0.8228)(s-1.74)(s+9.279)(s+38.59)(s+96)(s+0.1038)(s^2+2.8s+2.018)}{(s+96)(s+38.59)(s+9.269)(s+2.767)(s-0.9704)(s-1.827)(s^2+2.388s+1.453)(s^2+1.099s+1.069)} \quad (4.34)$$

dónde se puede apreciar que los dos ceros inestables $(s - 0.9704)(s - 1.827)$, cancelan los polos inestables de la función en lazo abierto, mostrada en la ecuación (4.32).

El compensador para el canal de r se diseñó buscando obtener una frecuencia de cruce en $\omega_B = 10$ [rad/s] y con una margen de fase de 55° , como se puede

FIGURA 4.14: Diagrama de Nyquist de γ_r .

apreciar en la Figura 4.15a. Este controlador consiste en una ganancia proporcional, un integrador y un compensador de adelanto centrado en la frecuencia de cruce deseada:

$$K_r(s) = \frac{10^{\left(\frac{30}{20}\right)}(s + 3.194)}{s(s + 31.94)} \quad (4.35)$$

Según la ecuación del canal, definida de forma general en la expresión (4.5), para r los polos y ceros del canal resultan como:

$$C_{rH} = \frac{332.87(s+96)(s+38.59)(s+9.279)(s+3.194)(s+2.351)(s+0.7536)(s+0.1038)}{s(s+96)(s+38.59)(s+31.94)(s+9.269)(s+2.767)(s-1.827)(s^2+2.388s+1.453)} \quad (4.36)$$

dónde se puede apreciar que resulta un polo inestable, pero al mismo tiempo es completamente de fase mínima, pues el factor $(1 - \gamma_{rH})$ anuló los ceros inestables de la función en lazo abierto $\left(\frac{r(s)}{U_{Qz}(s)}\right)$.

Para el caso de la robustez de la estructura, es necesario que el número de rodeos en sentido anti-horario se mantenga cómo 0, para que no inducir ceros en el denominador de la ecuación del canal, que en estas condiciones no presenta inestabilidades. La Figura 4.15b muestra el cruce de la función γ_r con la línea de cero dB. Los márgenes de estabilidad del canal y la estructura se pueden consultar en la Tabla 4.5.

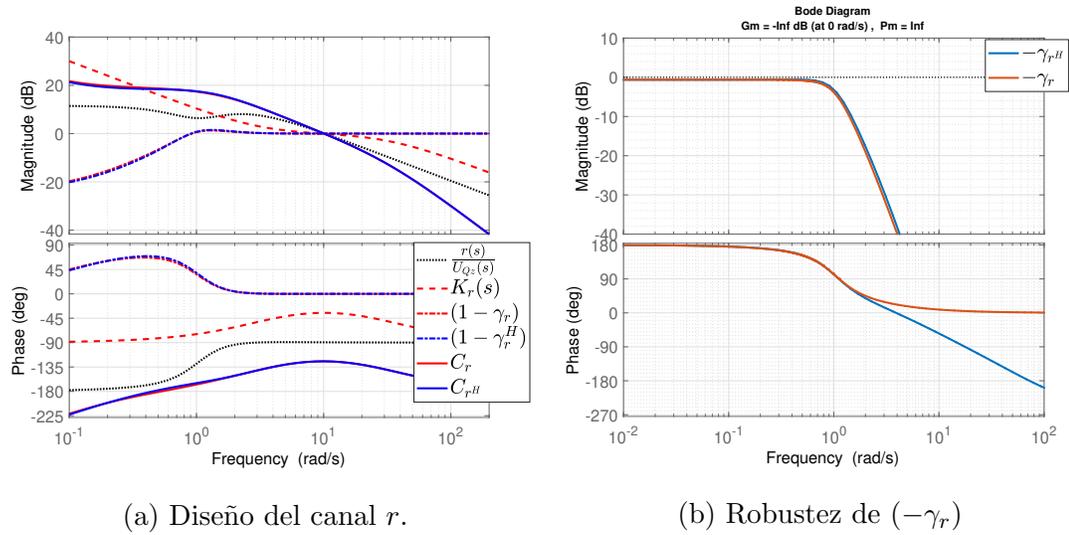


FIGURA 4.15: Diagramas de Bode del canal y función MSF para r . Ver Tabla 4.5 para consultar márgenes de estabilidad.

Función	MG [dB]	MF [°]	ω_B [rad/s]
$-\gamma_r$	-Inf	Inf	-
$-\gamma_r^H$	0.6282	Inf	-
C_r	-18.6289	55.4804	10.0572
C_{r^H}	-18.4236	55.4635	10.0562

TABLA 4.5: Márgenes de estabilidad para canal y estructura de r

4.4.6 MÁRGENES DE ESTABILIDAD DE LOS CANALES

En el caso del modo de vuelo estacionario, se revisó la estabilidad de canales utilizando los mismos compensadores diseñados para el vuelo recto y nivelado, corroborando que los márgenes de estabilidad de cada canal contaran con valores aceptables. Los diagramas de Bode que corroboran lo anterior pueden consultarse en las Figuras C.1a, C.1b, C.1c, C.1d y C.1e. La Tabla 4.6 reporta los márgenes de estabilidad para cada canal, de acuerdo con el diseño teórico reportado en la sección

pasada.

Función	MG [dB]	MF [°]	ω_B [rad/s]
Vuelo recto y nivelado			
$C_{u_b^H}$	Inf	81.1204	3.3035
C_{z^H}	22.1034	55.3953	2.582
C_{ϕ^H}	-21.6604	61.5643	9.2392
C_{θ^H}	-14.2709	51.8308	14.1535
C_{r^H}	-18.4236	55.4635	10.0562
Vuelo estacionario			
$C_{u_b^H}$	-Inf	73.5	3.17
C_{z^H}	-17.7	48.8	2.53
C_{ϕ^H}	-23.4	61.3	9.24
C_{θ^H}	20.2	51.9	14.6
C_{r^H}	-Inf	54.9	10.4

TABLA 4.6: Márgenes de estabilidad de los canales.

Como se puede observar en la Tabla 4.6, los canales cuentan con márgenes robustos de estabilidad. Sin embargo, las funciones MSF para los canales de ϕ y r muestran un valor muy cercano a 1 para bajas frecuencias (Tablas 4.3 y 4.5), indica la posibilidad de que ante perturbaciones se induzcan ceros de fase no-mínima por en factor $(1 - \gamma)$. Por consiguiente, ha de analizarse las respuestas de las salidas y los actuadores tanto en el modelo lineal, como en el modelo no-lineal, para evaluar la factibilidad de implementar este sistema de control en el prototipo físico.

4.5 SIMULACIÓN DEL MODELO LINEAL

Se incluyen los resultados de la simulación lineal en vuelo recto y nivelado con tal de evaluar la robustez del sistema de control en el modelo lineal. Sin embargo, no se incluyen los resultados del vuelo estacionario por la simplicidad del modelo que lo constituye, puesto que no hay un acoplamiento de sus variables.

Las variables de salida del sistema en retroalimentación fueron simuladas considerando referencias tipo escalón, calculando las respuestas para la referencia individual de cada canal. La figura 4.16 muestra la respuesta de las variables de salida para cada referencia.

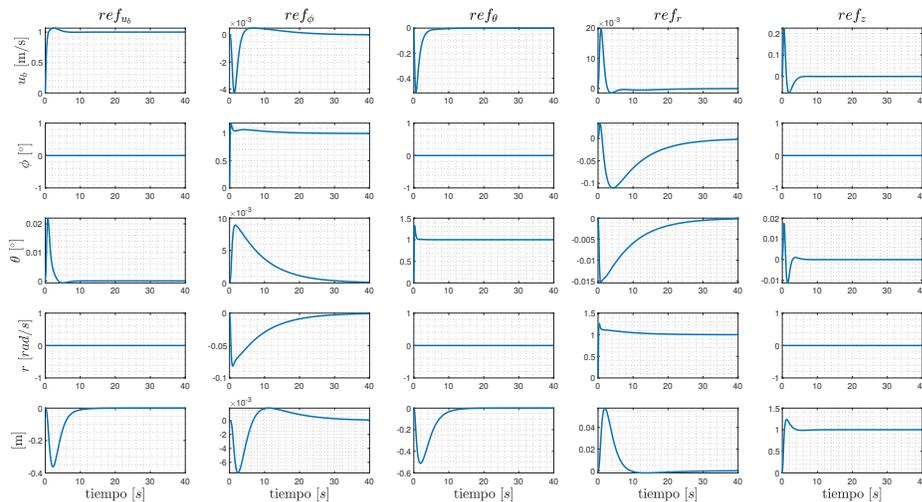


FIGURA 4.16: Respuesta del sistema para referencias de escalón individuales.

Por otra parte, también se simuló la respuesta que tendrían las variables de entrada considerando las mismas referencias de escalón consideradas para las variables de salida. Estas pueden ser apreciadas en la Figura 4.17.

Se puede apreciar que para el caso del canal de r , se tiene un largo tiempo de estabilización en general para su variable de entrada U_{Qz} . Esto puede ser un indicio de que la planta es especialmente sensible ante perturbaciones en esta variable de en-

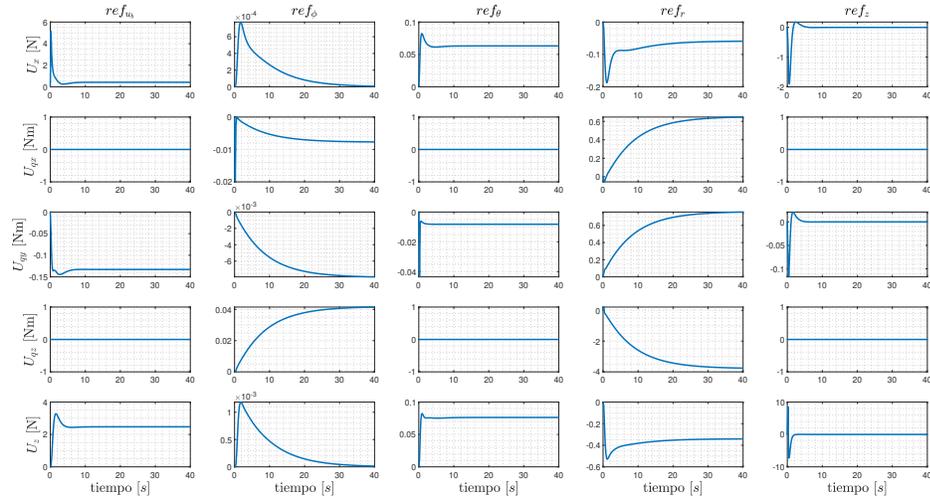


FIGURA 4.17: Respuesta de las variables de entrada U , para referencias de escalón individuales.

trada. Aunque, bien podría considerarse que esta velocidad de giro es relativamente alta para el tipo de aeronave que este prototipo es. En el siguiente apartado se analizarán los resultados de la simulación no-lineal, es decir, el sistema de control lineal diseñado en este capítulo, implementado en el modelo no-lineal completo reportado en el capítulo 3.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 SIMULACIÓN NO-LINEAL

La simulación del modelo no-lineal principalmente consiste en la transición del vuelo estacionario a vuelo recto y nivelado, considerando las dinámicas no modeladas en la aproximación lineal. El comando para realizar esta maniobra es dado como una referencia suavizada de escalón, partiendo la condición de equilibrio en vuelo estacionario hasta 15.54 m/s. Este valor de velocidad es tomado del punto de equilibrio determinado en la expresión (3.132). Para el resto de los canales de control simplemente se les da una referencia igual a cero, que se espera que sistema de control mantenga regulado. Se realizó esta simulación no-lineal considerando tres variantes de forma general:

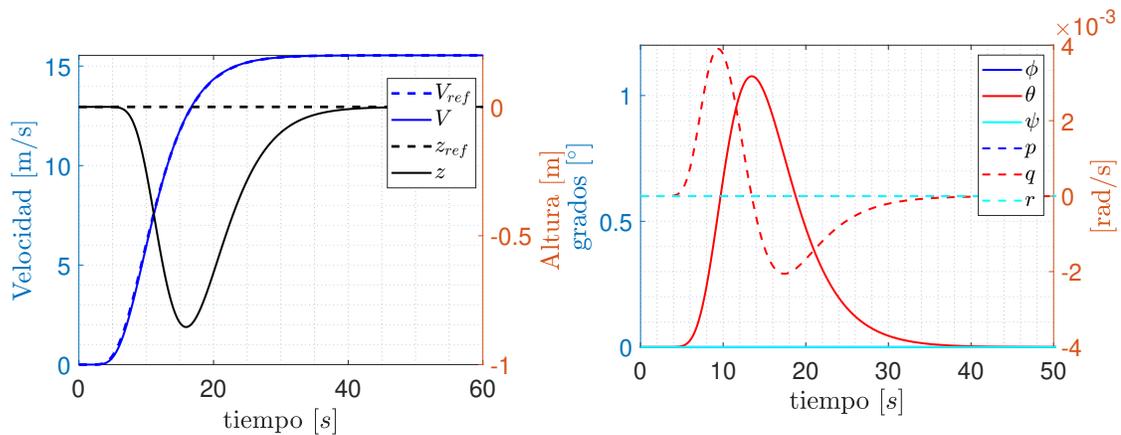
- Idealizando las respuesta de los actuadores con una dinámica $1 \rightarrow 1$ respecto a la señal demandada por el sistema de control, sin tomar en cuenta la dinámica del sistema propulsión.
- Tomando en cuenta la dinámica del sistema de propulsión, pero solo considerando las ganancias estáticas de los rotores para calcular las referencias del los servomotores y controladores de velocidad individuales de cada rotor.

- Tomando en cuenta la dinámica del sistema de propulsión, y considerando la velocidad de flujo relativa a cada rotor para calcular las referencias de los servomotores y controladores de velocidad individuales de cada rotor.

El modelo dinámico de la planta de propulsión toma en cuenta los momentos producidos por el cambio de momento angular de los rotores (ecuación 3.74), los torques reactivos de los servomotores (ecuación 3.94) y el empuje dinámico de las hélices, modelado por ajuste polinomial en la expresión (3.66). Se debe recordar que el se está incluyendo el efecto que tendría la interacción de los rotores con la geometría alar.

5.1.1 ACTUACIÓN IDEAL

Como se mencionó anteriormente, el modelo de actuación ideal ignora la dinámica del sistema de propulsión. Por ende, los resultados obtenidos, se asemejan a los de la simulación del modelo lineal (Figura 4.16). Los resultados más relevantes de esta simulación se pueden observar en la Figura 5.1.



(a) Incremento de velocidad longitudinal. (b) Ángulos de orientación y velocidades angulares.

FIGURA 5.1: Resultados de simulación con dinámica de actuación $1 \rightarrow 1$.

Se puede apreciar que para el incremento en velocidad, el vehículo tiene una

ligera elevación alcanzando poco mas de 0.8 metros. Esta perturbación en la altura es compensada por el sistema, pero tarda en regresar a la referencia debido al bajo ancho de banda del canal de z actuado por U_z (Figura 5.2a). Para el caso de los ángulos de orientación y velocidades angulares, como se esperaba sólo se perturbaron el ángulo y la tasa de cabeceo, que en el caso del primero apenas alcanzó poco más de un grado durante el incremento de velocidad (Figura 5.2b).

5.1.2 MODELO CON MATRIZ DE PROPULSIÓN ESTÁTICA

Se realizó una simulación dónde la estimación de las referencias de los servomotores y controladores de velocidad de cada rotor se calculaban directamente con las ecuaciones (3.97) y (3.98), en vez de utilizar (3.104) y (3.105). Esto se hizo con el objetivo de evaluar cómo se desempeñaría el prototipo sin considerar la perdida de empuje ocasionada por la orientación de cada rotor respecto a la dirección del flujo libre.

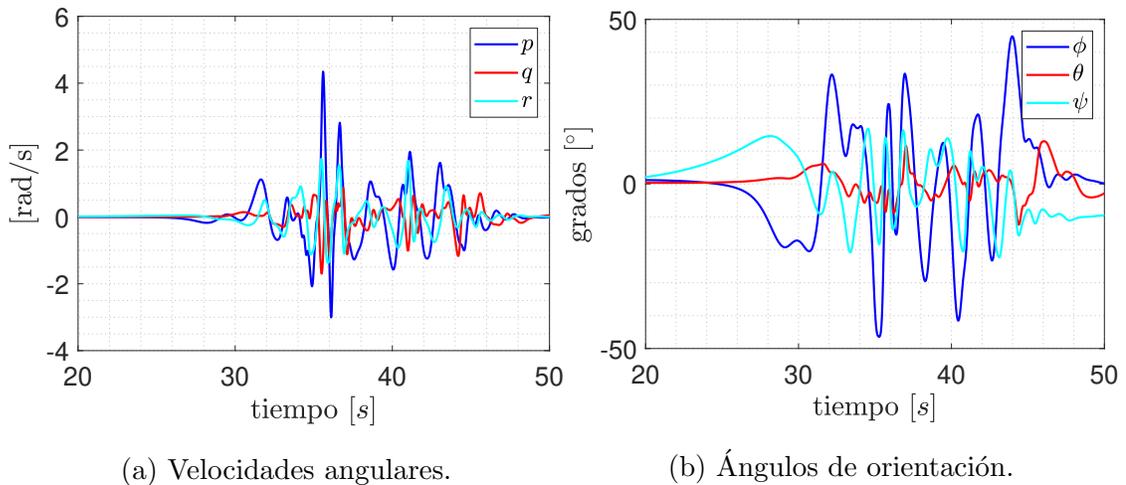


FIGURA 5.2: Resultados de simulación sin corrección por pérdidas de empuje dinámico.

Para este caso, se puede observar en la Figura 5.2 que el sistema apenas es estabilizado. Se puede ver que el problema surge precisamente después de alcanzar

la velocidad final, después de los 20 segundos. En general se tiene un mal desempeño, los altos ángulos de cabeceo indican que la perturbación ocasionada por la dinámica del sistema de propulsión no debe ser despreciada.

5.1.3 MODELO CON CORRECCIÓN DE EMPUJE DINÁMICO

Durante la ejecución de las simulaciones se observó que era posible utilizar una corrección extra además de la propuesta en la Sección 3.6. Por lo que se reporta ambos métodos para la corrección del empuje dinámico, ambos hechos con base al modelo de desempeño de la hélice.

5.1.3.1 CORRECCIÓN INICIAL

Como se ha mencionado anteriormente, el método inicial para la corrección del empuje dinámico consiste en calcular los comandos de posición y velocidad de los rotores necesarios para satisfacer el vector de entrada demandado por el sistema de control U_{ref} , primeramente sin considerar las pérdidas de empuje dinámico como se hace en la ecuación (3.96). Posteriormente, a partir de ese estado calculado para la velocidad y orientación de los rotores, se considera la pérdida que tendría debido al flujo de viento incidente, como se muestra en la ecuación (3.100). Y, considerando la diferencia entre el vector de referencia y este vector de pérdidas por empuje dinámico, se recalcula las velocidades de los rotores necesarias para satisfacer el vector de referencias, como se muestra en la ecuación (3.96).

Se debe aclarar que esta corrección no es numéricamente precisa, debido a que considera la velocidad de los rotores previa al valor recalculado por la corrección. La Figura 5.3 muestra los resultados de la simulación de la transición de vuelo estacionario a vuelo vertical utilizando la corrección descrita para compensar la pérdida del empuje dinámico. Se puede observar que comparando los resultados con

el modelo sin corrección (Figura 5.2), se tiene una mejor respuesta, con ángulos de alabeo menores a 5° . Se debe notar que la presencia de estas oscilaciones, es debido a la desviación de las entradas de control proporcionadas por el sistema de propulsión, respecto a la referencia demandada por el sistema de control, puesto que la referencia de entrada para los controladores de lazo cerrado únicamente incrementa la variable de velocidad.

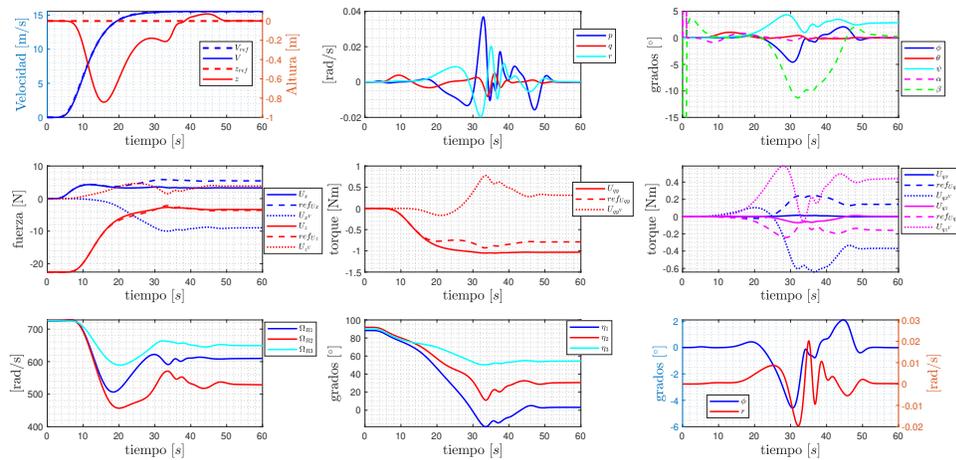


FIGURA 5.3: Simulación del vuelo en transición, considerando la primer corrección para el empuje dinámico.

En esta simulación puede observarse con claridad, el acoplamiento existente entre el ángulo de alabeo ϕ y la velocidad angular r , variables que se aislaron en la parte inferior derecha de la Figura 5.3. Se puede observar que cuando se está por alcanzar el valor final de la velocidad en estado estacionario, las perturbaciones en el sistema de propulsión U_δ afectan este par de variables. Esto ocasiona un lapso de tiempo de aproximadamente 30 segundos hasta que el sistema de control alcanza el estado estacionario.

5.1.3.2 SEGUNDA CORRECCIÓN

Debido al relativo éxito de la corrección teórica anterior, se optó por agregar una segunda corrección, utilizando una estrategia similar. Tomando los elementos del vector \widehat{U}_{cs} de la ecuación (3.96), se calculó una velocidad virtual similar a la de la ecuación (3.98):

$$\widehat{\Omega}_n = \sqrt[4]{\widehat{U}_{c_n}^2 + \widehat{U}_{s_n}^2} \quad (5.1)$$

y un nuevo ángulo de orientación virtual para cada rotor:

$$\widehat{\eta}_n = \text{atan} \left(\frac{\widehat{U}_{s_n}}{\widehat{U}_{c_n}} \right) \quad (5.2)$$

De esta forma se puede calcular un nuevo vector \widehat{U}_{FQV} para el cálculo de la pérdida de empuje debido a la velocidad relativa a las rotores, similar al calculado en la ecuación (3.100). De esta forma se puede calcular un nuevo vector para el cálculo los comandos de velocidad de los motores, similar al vector \widehat{U}_{cs} de la ecuación (3.96):

$$\begin{aligned} \check{U}_{cs} &= [MP]^{-1} (U_{ref} - \widehat{U}_{FQV}) \\ &= [\check{U}_{c_1} \quad \check{U}_{s_1} \quad \check{U}_{c_2} \quad \check{U}_{s_2} \quad \check{U}_{c_3} \quad \check{U}_{s_3}]^T \end{aligned} \quad (5.3)$$

Finalmente, la velocidad de referencia para cada rotor estaría dada por:

$$\Omega_{\{ref,n\}} = \sqrt[4]{\check{U}_{c_n}^2 + \check{U}_{s_n}^2} \quad (5.4)$$

y el ángulo de orientación de cada rotor seguiría estando dado como en la primer estimación:

$$\eta_{\{ref,n\}} = \widetilde{\eta}_n \quad (5.5)$$

Se observó que utilizar el ángulo recalculado por la corrección, induce cambios muy abruptos en la orientación de los rotores y genera más perturbaciones.

La Figura 5.4 muestra los resultados de la simulación para la maniobra de vuelo en transición, considerando la segunda corrección para el empuje dinámico, descrita anteriormente. Se puede observar una notable mejora en la respuestas de los ángulos de orientación y velocidades angulares, con aproximadamente una atenuación en un

orden de magnitud para las velocidades angulares y una atenuación a un %50 para los ángulos de orientación.

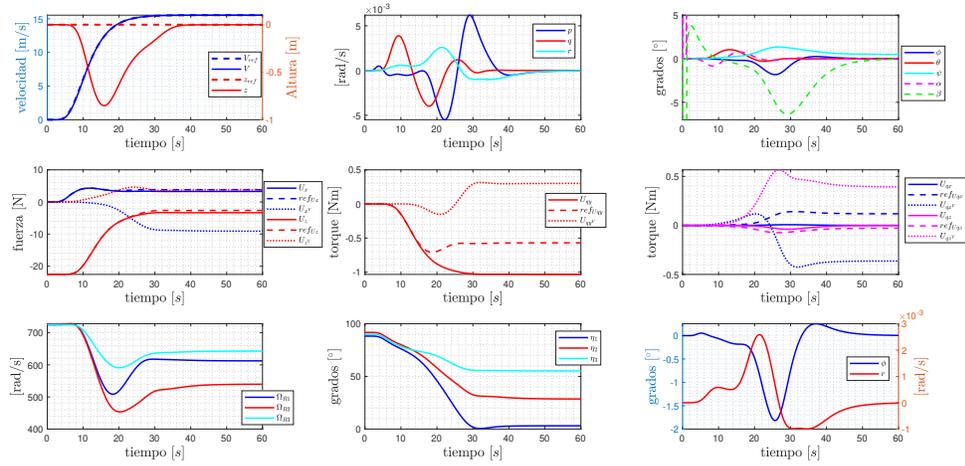


FIGURA 5.4: Simulación del vuelo en transición, considerando la segunda corrección para el empuje dinámico.

En general, la implementación de esta corrección para el sistema de propulsión tuvo buenos resultados. Pueden observarse respuestas más suaves, tanto para las variables de estado del sistema, como para las variables del sistema de propulsión.

CAPÍTULO 6

MANUFACTURA

Un criterio que se utilizó para el diseño de la aeronave reportado en el capítulo 2, es que se utilizara manufactura aditiva para el prototipado. Por lo cuál, se restringió las dimensiones de las piezas del diseño a las dimensiones del volumen de impresión de las máquinas de impresión del grupo trabajo, la cuál se puede apreciar en la Figura 6.1. El volumen de impresión cuenta con una base circular de 28 cm, y una altura de 33 cm.



FIGURA 6.1: Impresora 3D Rostock Max V2

6.1 PIEZAS IMPRESAS

El fuselaje de la aeronave se elaboró mediante manufactura aditiva, explorando esta posibilidad de prototipado que permite tener cierta libertad de diseño respecto a su geometría.



(a) Ala central.



(b) Ala intermedia derecha.



(c) Ala intermedia izquierda.



(d) Ala central, sección posterior.



(e) Punta de ala derecha.



(f) Punta de ala izquierda.



(g) Tapa de ala central.



(h) Aleta vertical.



(i) Base basculante de motor.



(j) Soporte fijo de rotor trasero.

FIGURA 6.2: Componentes hechos por manufactura aditiva.

Se puede observar en la Figura 6.2j la base dónde se instala el rotor trasero, así como los refuerzos estructurales de tubos de fibra de carbono atornillados en los extremos de la pieza. Todas las piezas son ensambladas acoplándolas a los tubos de fibra de carbono.



(a) Ala central con los refuerzos de tubos de fibra de carbono.



(b) Instalación de las secciones interalares



(c) Ensamble de ala central posterior.



(d) Ensamble de ala central con tapa abierta.



(e) Cuerpo completo ensamblado.



(f) Aplicación de pintura para dar mejor acabado superficial.

FIGURA 6.3: Ensamble de piezas impresas a tubos de fibra de carbono.

El ensamble consiste primeramente en acoplar los tubos de fibra de carbono de 10 mm de diámetro a la sección del ala central (Figura 6.3a) y posteriormente se instalan las piezas laterales (Figura 6.3b). Luego, se ensambla la sección central posterior con la tapa y una sección de tubo de fibra de 6 mm de diámetro (Figura 6.3c) y se acopla al ensamble alar frontal (Figura 6.3d). Las superficies verticales se

ensamblan a la base del rotor trasero, y luego se acoplan al resto del vehículo, así como las bases de los rotores laterales (Figura 6.3e). Se debe mencionar que se aplicó una capa de pintura tipo esmalte en aerosol al prototipo ensamblado previamente ligado, para dar un acabado superficial uniforme (6.3f).

Finalmente, se instalaron los actuadores en el modelo de pruebas como lo muestra la figura 6.4a. También se comprobó su compatibilidad con el banco de pruebas que se cuenta en el laboratorio de investigación del CIHA, como se observa en la figura 6.4b.



(a) Prototipo con actuadores instalados.



(b) Prototipo instalado dentro de la sección de pruebas del túnel de viento.

FIGURA 6.4: Prototipo con actuadores instalados.

Para la realización de las pruebas experimentales en condiciones estáticas y dentro del túnel de viento, únicamente operar el sistema de actuación; sin considerar por el momento los dispositivos necesarios para realizar las pruebas de vuelo, como sería el caso de la computadora de vuelo, unidades de medición inercial y otros sensores. Para el control de los dispositivos se elaboró un circuito mostrado en el esquemáticos de la Figura ??, donde se puede apreciar que una batería LiPo dentro del prototipo suministra la potencia eléctrica, y un regulador de voltaje alimenta el circuito de control de los motores brushless y a los servomotores. Las señales de control son agrupadas en un conector Sub-D9, para ser generadas en una unidad de control externa. Se debe aclarar que los controladores de velocidad empleados para el prototipo deben ser alimentados tanto en el circuito de electrónica de potencia por la batería, como en el circuito de control por el regulador de voltaje; puesto que no

posee un regulador interno, sino que ambos circuitos se encuentran eléctricamente aislados y entrelazados por opto-acopladores.

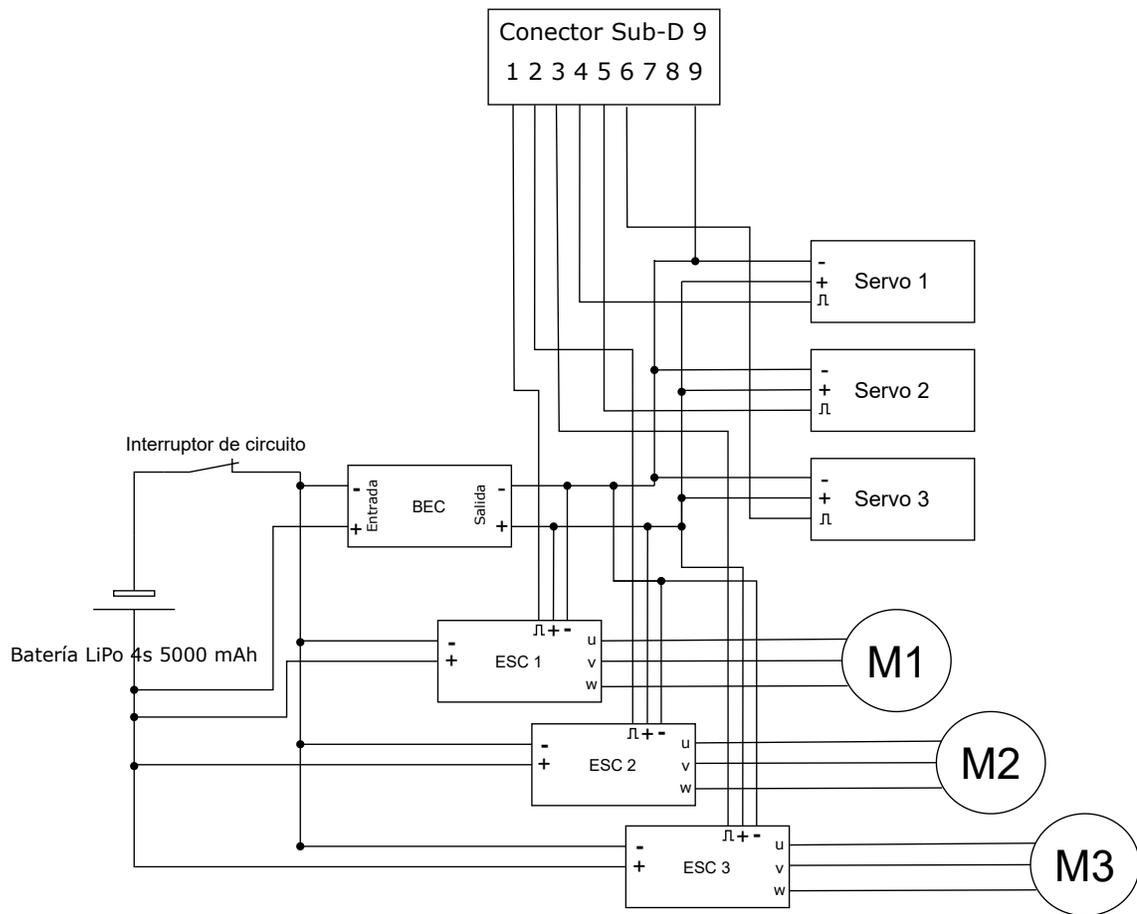


FIGURA 6.5: Diagrama esquemático de las conexiones de los actuadores

Debido al tiempo disponible sólo se reporta el trabajo hasta esta etapa, habiendo dejado listo el prototipo para la fase experimental. Aquí concluye la etapa de manufactura.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

Se comprobó que un esquema de control lineal descentralizado puede operar una aeronave de las características presentadas en este trabajo. Esto es debido principalmente a dos factores:

- No se tiene que considerar superficies de control para el vuelo crucero, debido a que la aeronave es operada completamente por la planta de propulsión en todo el régimen de vuelo de la aeronave. Por lo tanto, no se hace un intercambio de en el apareamiento de entradas y salidas.
- El sistema no presentó un acoplamiento muy marcado en las condiciones de vuelo recto y nivelado, en términos de la matriz RGA. Por lo que fue posible utilizar un control descentralizado tanto en vuelo estacionario, como en vuelo crucero, utilizando los mismos lazos de control.

La velocidad de las dinámicas longitudinal y lateral permitió que el ancho de banda de los controladores fuera lo suficientemente bajo para que los acusadores pudieran satisfacer los requerimientos. Se identificó que tanto la velocidad de respuesta de los rotores y los servomotores son cruciales para el funcionamiento del sistema; en especial los servomotores, puesto que con un modelo de segundo orden planteado en la sección del modelado, la frecuencia de corte no debe bajar de 20 rad/s.

Se observó una MSF sensible a perturbaciones de entrada para los apareamientos de (r/U_{Qz}) y (ϕ/U_{Qx}) , debido al acoplamiento relativo entre ambos canales. A pesar que ambas pueden alcanzar un error de cero en condiciones de equilibrio, se observa que la función MSF para ambos canales tiende a 1 en bajas frecuencias. Además, el modelo de propulsión propuesto, junto con la corrección del empuje dinámico, no elimina completamente las perturbaciones generadas por la orientación de cada rotor respecto al viento y son precisamente estas variaciones son las que afectan en mayor medida a los torques U_{Qx} y U_{Qz} . Se puede intuir que estas variables (U_{Qx} y U_{Qz}) son especialmente sensibles por la asimetría en el número de actuadores que posee el vehículo, analizando los resultados de mejores características producidos por el modelo con la segunda corrección. Esta asimetría de fuerzas y momentos aumenta debido a la interacción del flujo relativo con las hélices, debido a que cada rotor posee un punto de equilibrio diferente.

7.1 TRABAJO A FUTURO

Se identificaron dos principales áreas que desarrollar para trabajo futuro, generalizadas en diseño y control:

- Optimizar la geometría aerodinámica para reducir el arrastre total del vehículo. Una opción viable sería no reducir la superficie alar, pero buscar aumentar la razón de aspecto reduciendo la cuerda utilizando una configuración biplano.
- Incluir en el modelo la interacción del flujo inducido por los rotores en el ala.
- Optar por una configuración de rotores contra-rotativos, para el caso de una aeronave actuada solamente por la planta de propulsión. De esta forma se reducirían las perturbaciones ocasionadas por el sistema de actuación al poder contrarrestar el torque reactivo del rotor de cola.
- Buscar reducir el acoplamiento lateral del actual controlador, mediante la eli-

minación del integrador en el controlador del ángulo de alabeo. Esto atenuaría en cierta medida el efecto de las perturbaciones de entrada en el ángulo de alabeo, pues sería permisible tener un ligero error en el estado estacionario para esta variable.

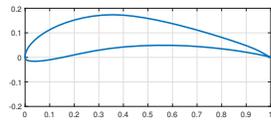
- Investigar cómo reducir el acoplamiento en la dinámica lateral. Es posible que retirando las superficies verticales se reduzca el acoplamiento entre el ángulo de alabeo y la tasa de guiñada. También se podría agregar un ángulo de diedro al ala en diseño futuros para mejorar la estabilidad lateral.
- Analizar las condiciones de equilibrio para la maniobra de viraje coordinado, para delimitar las referencias para la tasa de guiñada y el ángulo de alabeo.
- Sería conveniente formular un conjunto de ecuaciones del control de altura mediante el ángulo de cabeceo, conforme la aeronave gana velocidad. Esto puede ser posible haciendo una manipulación no-lineal para generar las referencias en el esquema lineal propuesto en este trabajo. Es necesario investigar aún más para llevar esto a cabo.
- Es necesario formular las ecuaciones para el seguimiento de trayectorias, pues el esquema de control propuesto únicamente regula la aeronave para mantener la aeronave en vuelo, dentro de su régimen de operación.
- , Comparar el modelo de propulsión teórico que se reporta en este trabajo respecto a mediciones en el banco de pruebas del túnel de viento, para evaluar la efectividad de la corrección propuesta de empuje dinámico reportada en la sección 3.6.

APÉNDICE A

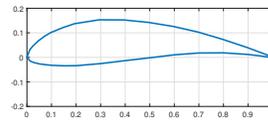
PARÁMETROS Y COEFICIENTES CONSTANTES

A.1 PERFILES AERODINÁMICOS

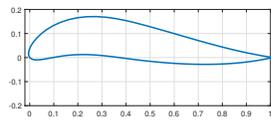
Los perfiles presentados en la Figura A.1 fueron los considerados para el diseño del prototipo reportado.



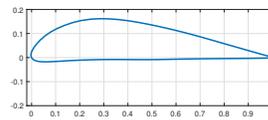
(a) Perfil Eppler 420.



(b) Perfil Göttingen 226.



(c) Perfil NACA 55116.



(d) Perfil InterW.

FIGURA A.1: Perfiles aerodinámicos del ala.

A.2 COEFICIENTES AERODINÁMICOS

Los coeficientes aerodinámicos del ajuste polinomial (ec. (3.54)) para cada superficie aerodinámica i están condensados en la Tabla A.1, donde el símbolo \square , representa el respectivo coeficiente indicado en cada renglón de la tabla en la primer columna $\{L, D, Y, C_{Mq}, C_{Mp}, C_{Mr}\}$.

	i	$K_{\{i\square_0\}}$	$K_{\{i\square \alpha_I\}}$	$K_{\{i\square \alpha_{II}\}}$	$K_{\{i\square \beta_I\}}$	$K_{\{i\square \beta_{II}\}}$	$K_{\{i\square \alpha\beta\}}$
L	wr	0.7376	0.0419	2.4974e-4	-0.0131	-2.0257e-4	-5.3881e-4
	wl	0.7376	0.0419	2.4974e-4	0.0131	-2.0257e-4	5.3698e-4
	vr	0	0.0275	0	0	0	0
	vl	0	0.0275	0	0	0	0
D	wr	0.1282	0.0099	5.0366e-4	-0.0023	1.1047e-5	-3.2259e-4
	wl	0.1282	0.0099	5.0366e-4	0.0023	1.1047e-5	3.2259e-4
	vr	0.0182	-3.2770e-5	2.0173e-4	0	0	0
	vl	0.0182	-3.2770e-5	2.0173e-4	0	0	0
Y	wr	0	6.9085e-21	4.1468e-21	9.7722e-4	8.7080e-21	6.3607e-5
	wl	0	6.9085e-21	4.1468e-21	9.7722e-4	8.7080e-21	6.3607e-5
	vr	0	0	0	0	0	0
	vl	0	0	0	0	0	0
C_{Mq}	wr	-0.1161	-0.0017	-9.1668e-5	0.0079	-2.9790e-5	3.4923e-4
	wl	-0.1161	-0.0017	-9.1668e-5	-0.0079	-2.9790e-5	-3.4923e-04
	vr	-0.01412	6.8355e-4	0	0	0	0
	vl	-0.01412	6.8355e-4	0	0	0	0
C_{Mp}	wr	-1.9557e-4	4.2251e-4	9.5570e-6	0.0016	-1.3166e-5	6.2041e-5
	wl	1.9557e-4	-4.2251e-4	-9.5570e-6	0.0016	1.3166e-5	6.2041e-5
	vr	0	0	0	0	0	0
	vl	0	0	0	0	0	0
C_{Mr}	wr	0.0075	-3.5917e-4	1.6527e-5	-6.1147e-4	1.3461e-5	-6.4534e-5
	wl	-0.0075	3.5917e-4	-1.6527e-5	-6.1147e-4	-1.3461e-5	-6.4534e-5
	vr	0	0	0	0	0	0
	vl	0	0	0	0	0	0

TABLA A.1: Coeficientes para las fuerzas y momentos aerodinámicos.

A.3 PARÁMETROS DEL SISTEMA DE PROPULSIÓN

El sistema de propulsión es descrito a continuación mediante tres tablas, una contiene los coeficientes del ajuste polinomial (Tabla A.2), otra contiene la posición de los rotores respecto al centro de gravedad (Tabla A.3) y la otra contiene los parámetros constantes que definen la dinámica de los servo motores y de los rotores (Tabla A.4), expresadas en las ecuaciones (3.80) y (3.81).

Parámetro	$k_{\{\square \Omega^2\}}$	$k_{\{\square v\}}$	$k_{\{\square v^2\}}$	$k_{\{\square \Omega v\}}$
F_x^R	1.429e-05	-0.009863	-0.009739	-0.0002295
Q_x^R	2.296e-07	0.0002424	-0.0003279	1.912e-06

TABLA A.2: Coeficientes del ajuste polinomial de la hélice (eq. 3.66).

Parámetro	Valor
r_{ax} [m]	0.1615
r_{ay} [m]	0.26184
r_{az} [m]	0
r_{ax} [m]	0.323
r_{ay} [m]	0
r_{az} [m]	0.04

TABLA A.3: Posición de rotores respecto al centro de gravedad.

Parámetro	Valor
I_R [m^2kg]	5.45×10^{-5}
$l_{\{x,R\}}$ [m]	0.045
m_R [kg]	0.08
ω_η [rad/s]	25
ξ_η	0.8
τ_r	0.025
T_d	0.002

TABLA A.4: Características dinámicas del sistema de propulsión.

APÉNDICE B

MODELO LINEALIZADO

B.1 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

A partir del espacio de estados para las condiciones de operación establecidas en vuelo estacionario y vuelo horizontal, se obtuvieron las funciones de transferencias de acuerdo con la ecuación (3.145).

B.1.1 VUELO ESTACIONARIO

La matriz G_H contiene las funciones de transferencia del modo estacionario de vuelo.

$$G_H(1, 1) = \frac{u_b(s)}{U_X(s)} = \frac{0.4348s^8}{s^9} \quad (\text{B.1})$$

$$G_H(1, 4) = \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} = \frac{-163.5s^6}{s^9} \quad (\text{B.2})$$

$$G_H(2, 2) = \frac{z(s)}{U_Z(s)} = \frac{0.4348s^6}{s^9} \quad (\text{B.3})$$

$$G_H(3, 3) = \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} = \frac{25s^7}{s^9} \quad (\text{B.4})$$

$$G_H(4, 4) = \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} = \frac{16.667s^7}{s^9} \quad (\text{B.5})$$

$$G_H(5, 5) = \frac{r(s)}{U_X(s)} = \frac{10.526s^8}{s^9} \quad (\text{B.6})$$

B.1.2 VUELO RECTO Y NIVELADO

$$a(s) = s(s + 3.026)(s - 1.74)(s - 2.461)(s - 0.8228)(s^2 + 2.8s + 2.018)(s^2 - 0.2489s + 0.3559) \quad (\text{B.7})$$

$$G_{SLF}(1, 1) = \frac{u_b(s)}{U_X(s)} = \frac{0.43478s^2(s+2.865)(s-2.731)(s-1.74)(s-0.8228)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.8})$$

$$G_{SLF}(1, 2) = \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} = \frac{0.23042s(s+3.059)(s-3.047)(s-1.74)(s-0.8228)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.9})$$

$$G_{SLF}(1, 3) = \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} = \frac{0.0019163s(s-34.12)(s+2.28)(s+0.01802)(s^2+35.11s+450.5)}{a(s)} \quad (\text{B.10})$$

$$G_{SLF}(1, 4) = \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} = \frac{0.013893s(s-1887)(s-1.74)(s-0.8228)(s+0.7622)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.11})$$

$$G_{SLF}(1, 5) = \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} = \frac{0.26713s(s-0.9045)(s+0.4388)(s^2+3.34s+4.106)(s^2+0.4537s+25.86)}{a(s)} \quad (\text{B.12})$$

$$G_{SLF}(2, 1) = \frac{z(s)}{U_X(s)} = \frac{-0.46714(s+1.979)(s-1.974)(s-1.74)(s-0.8228)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.13})$$

$$G_{SLF}(2, 2) = \frac{z(s)}{U_Z(s)} = \frac{0.43478(s+3.015)(s-2.554)(s-1.74)(s-0.8228)(s-0.2665)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.14})$$

$$G_{SLF}(2, 3) = \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} = \frac{0.011156(s-29.57)(s+25.66)(s+4.429)(s-1.065)(s+0.6364)}{a(s)} \quad (\text{B.15})$$

$$G_{SLF}(2, 4) = \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} = \frac{0.053902(s-586.6)(s-1.74)(s-0.8228)(s-0.7079)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.16})$$

$$G_{SLF}(2, 5) = \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} = \frac{1.5551(s+2.378)(s+1.065)(s^2-1.826s+0.851)(s^2-1.492s+5.092)}{a(s)} \quad (\text{B.17})$$

$$G_{SLF}(3, 1) = \frac{\phi(s)}{U_X(s)} = \frac{0}{a(s)} \quad (\text{B.18})$$

$$G_{SLF}(3, 2) = \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} = \frac{0}{a(s)} \quad (\text{B.19})$$

$$G_{SLF}(3, 3) = \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} = \frac{25s(s+3.026)(s+2.035)(s-1.833)(s-2.461)(s^2-0.2489s+0.3559)}{a(s)} \quad (\text{B.20})$$

$$G_{SLF}(3, 4) = \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} = \frac{0}{a(s)} \quad (\text{B.21})$$

$$G_{SLF}(3, 5) = \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} = \frac{13.384s(s+3.026)(s-2.461)(s-1.199)(s^2-0.2489s+0.3559)}{a(s)} \quad (\text{B.22})$$

$$G_{SLF}(4, 1) = \frac{\theta(s)}{U_X(s)} = \frac{0.96312s(s-1.74)(s-0.8228)(s-0.122)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.23})$$

$$G_{SLF}(4, 2) = \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} = \frac{0.21889s(s+2.515)(s-1.74)(s-0.8228)(s^2+2.8s+2.018)}{a(s)} \quad (\text{B.24})$$

$$G_{SLF}(4, 3) = \frac{\theta(s)}{U_{Q_x}(s)} = \frac{-0.044673s(s-400.1)(s+2.139)(s^2+0.2323s+0.2934)}{a(s)} \quad (\text{B.25})$$

$$G_{SLF}(4, 4) = \frac{\theta(s)}{U_{Q_y}(s)} = \frac{16.667s(s-1.74)(s-0.8228)(s^2+2.8s+2.018)(s^2+0.3056s+0.5918)}{a(s)} \quad (\text{B.26})$$

$$G_{SLF}(4, 5) = \frac{\theta(s)}{U_{Q_z}(s)} = \frac{-6.24s(s-0.9126)(s^2+0.2229s+0.5113)(s^2+2.813s+2.584)}{a(s)} \quad (\text{B.27})$$

$$G_{SLF}(5, 1) = \frac{r(s)}{U_X(s)} = \frac{0}{a(s)} \quad (\text{B.28})$$

$$G_{SLF}(5, 2) = \frac{r(s)}{U_Z(s)} = \frac{0}{a(s)} \quad (\text{B.29})$$

$$G_{SLF}(5, 3) = \frac{r(s)}{U_{Q_x}(s)} = \frac{0.075514s(s+28)(s-27.92)(s+3.026)(s-2.461)(s^2-0.2489s+0.3559)}{a(s)} \quad (\text{B.30})$$

$$G_{SLF}(5, 4) = \frac{r(s)}{U_{Q_y}(s)} = \frac{0}{a(s)} \quad (\text{B.31})$$

$$G_{SLF}(5, 5) = \frac{r(s)}{U_{Q_z}(s)} = \frac{10.526s(s+3.026)(s-2.461)(s-0.9704)(s^2-0.2489s+0.3559)(s^2+1.099s+1.069)}{a(s)} \quad (\text{B.32})$$

APÉNDICE C

ECUACIONES PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES

C.1 FUNCIONES MSF

$$\gamma_{u_b} = \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{z(s)}{U_X(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{u_b(s)}{U_X(s)} \right)^{-1} \quad (C.1)$$

$$\gamma_z = \begin{bmatrix} \frac{z(s)}{U_X(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{r(s)}{U_Z(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{z(s)}{U_Z(s)} \right)^{-1} \quad (C.2)$$

$$\gamma_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\phi(s)}{U_X(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} \right)^{-1} \quad (C.3)$$

$$\gamma_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\theta(s)}{U_X(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma_r = \begin{bmatrix} \frac{r(s)}{U_X(s)} \\ \frac{r(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.5})$$

$$\gamma_{u_b^H} = \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_z(s) \frac{z(s)}{U_X(s)} \\ H_\phi(s) \frac{\phi(s)}{U_X(s)} \\ H_\theta(s) \frac{\theta(s)}{U_X(s)} \\ H_r(s) \frac{r(s)}{U_X(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{u_b(s)}{U_X(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.6})$$

$$\gamma_{z^H} = \begin{bmatrix} \frac{z(s)}{U_X(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{u_b}(s) \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} \\ H_\phi(s) \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} \\ H_\theta(s) \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} \\ H_r(s) \frac{r(s)}{U_Z(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{z(s)}{U_Z(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.7})$$

$$\gamma_{\phi^H} = \begin{bmatrix} \frac{\phi(s)}{U_X(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{u_b}(s) \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} \\ H_z(s) \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} \\ H_\theta(s) \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} \\ H_r(s) \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma_{\theta^H} = \begin{bmatrix} \frac{\theta(s)}{U_X(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_X(s)} & \frac{r(s)}{U_Z(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{u_b}(s) \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} \\ H_z(s) \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} \\ H_\phi(s) \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} \\ H_r(s) \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.9})$$

$$\gamma_{r^H} = \begin{bmatrix} \frac{r(s)}{U_X(s)} \\ \frac{r(s)}{U_Z(s)} \\ \frac{r(s)}{U_{Qx}(s)} \\ \frac{r(s)}{U_{Qy}(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{u_b(s)}{U_X(s)} & \frac{u_b(s)}{U_Z(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{u_b(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{z(s)}{U_X(s)} & \frac{z(s)}{U_Z(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{z(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\phi(s)}{U_X(s)} & \frac{\phi(s)}{U_Z(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\phi(s)}{U_{Qy}(s)} \\ \frac{\theta(s)}{U_X(s)} & \frac{\theta(s)}{U_Z(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qx}(s)} & \frac{\theta(s)}{U_{Qy}(s)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{u_b}(s) \frac{u_b(s)}{U_{Qz}(s)} \\ H_z(s) \frac{z(s)}{U_{Qz}(s)} \\ H_\phi(s) \frac{\phi(s)}{U_{Qz}(s)} \\ H_\theta(s) \frac{\theta(s)}{U_{Qz}(s)} \end{bmatrix} \left(\frac{r(s)}{U_{Qz}(s)} \right)^{-1} \quad (\text{C.10})$$

C.2 ECUACIONES DE LOS CANALES

$$C_{u_b}(s) = (1 - \gamma_{u_b}) \frac{u_b(s)}{U_X(s)} K_{u_b}(s) \quad (\text{C.11})$$

$$C_z(s) = (1 - \gamma_z) \frac{z(s)}{U_Z(s)} K_z(s) \quad (\text{C.12})$$

$$C_\phi(s) = (1 - \gamma_\phi) \frac{\phi(s)}{U_{Q_x}(s)} K_\phi(s) \quad (\text{C.13})$$

$$C_\theta(s) = (1 - \gamma_\theta) \frac{\theta(s)}{U_{Q_y}(s)} K_\theta(s) \quad (\text{C.14})$$

$$C_r(s) = (1 - \gamma_r) \frac{r(s)}{U_{Q_z}(s)} K_r(s) \quad (\text{C.15})$$

C.3 FUNCIONES H

$$H_{u_b} = \frac{\frac{u_b(s)}{U_X(s)} K_{u_b}(s)}{1 + \frac{u_b(s)}{U_X(s)} K_{u_b}(s)} \quad (\text{C.16})$$

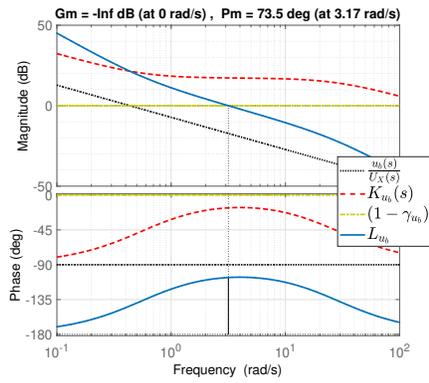
$$H_z = \frac{\frac{z(s)}{U_Z(s)} K_z(s)}{1 + \frac{z(s)}{U_Z(s)} K_z(s)} \quad (\text{C.17})$$

$$H_\phi = \frac{\frac{\phi(s)}{U_{Q_x}(s)} K_\phi(s)}{1 + \frac{\phi(s)}{U_{Q_x}(s)} K_\phi(s)} \quad (\text{C.18})$$

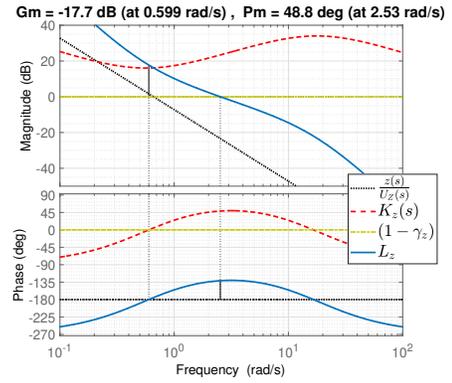
$$H_\theta = \frac{\frac{\theta(s)}{U_{Q_y}(s)} K_\theta(s)}{1 + \frac{\theta(s)}{U_{Q_y}(s)} K_\theta(s)} \quad (\text{C.19})$$

$$H_r = \frac{\frac{r(s)}{U_{Q_z}(s)} K_r(s)}{1 + \frac{r(s)}{U_{Q_z}(s)} K_r(s)} \quad (\text{C.20})$$

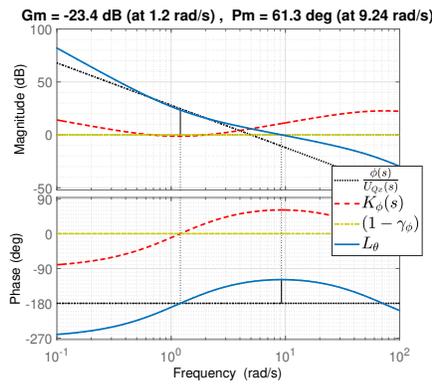
C.4 DIAGRAMAS DE BODE (VUELO ESTACIONARIO)



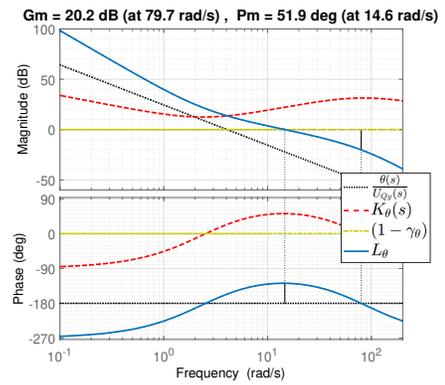
(a) Canal de u_b .



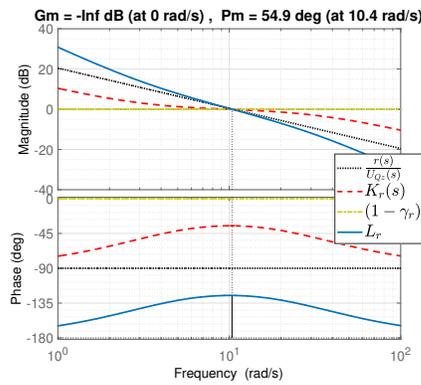
(b) Canal de z .



(c) Canal de ϕ .



(d) Canal de θ .



(e) Canal de r .

FIGURA C.1: Diagramas de Bode de los canales de control en vuelo estacionario.

BIBLIOGRAFÍA

- ABHISHEK, A., M. R. KRISHNA, S. SINHA y J. BHOWMIK (2017), «Design , Development and Flight Testing of a Novel Quadrotor Convertiplane Unmanned Air Vehicle Design , Development and Flight Testing of a Novel Quadrotor Convertiplane Unmanned Air Vehicle», en *AHS International 73rd Annual Forum and Technology Display*, May, AHS International.
- AIR-FORCE, U. (2015), «Bell Helicopter Textron XV-3», URL <https://www.nationalmuseum.af.mil/Visit/Museum-Exhibits/Fact-Sheets/Display/Article/195785/bell-helicopter-textron-xv-3/>.
- AMEZQUITA, L., D. HERNANDEZ-ALCANTARA, C. SANTANA-DELGADO, R. COVARRUBIAS-FABELA, O. GARCIA-SALAZAR y A. M. RAMIREZ-MENDOZA (2019), «Improved model for micro-UAV propulsion systems: Characterization and applications», *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **56**(3), págs. 2174–2197.
- AMEZQUITA, L., E. LICEAGA-CASTRO, M. GONZALEZ-SANCHEZ, O. GARCIA-SALAZAR y D. MARTINEZ-VAZQUEZ (2017), «Towards a standard design model for quad-rotors: A review of current models, their accuracy and a novel simplified model», *Progress in Aerospace Sciences*, **95**, págs. 1–23.
- AMÉZQUITA, L., C. UGALDE-LOO, E. LICEAGA-CASTRO y J. LICEAGA-CASTRO (2013), «The Multivariable Structure Function As an Extension of the Rga Matrix: Relationship and Advantages», *Cybernetics and Physics*, **2**(2), págs. 53–62.

- ANDERSON, J. D. (2011), *Fundamentals of aerodynamics*, McGraw-Hill.
- APC-PROPELLERS (2021), «Performance data of the 10x5E blade», URL https://www.apcprop.com/files/PER3_10x5E.dat.
- BRISTOL, E. H. (1966), «On a new measure of interaction for multivariable process control», *IEEE Transactions on Automatic Control*, **11**(1), págs. 133–134.
- CALZADA, R. (2003), «XV-15 Tiltrotor», URL https://www.nasa.gov/centers/dryden/multimedia/imagegallery/XV-15/XV-15_proj_desc.html.
- CARLSON, S. (2014), «A hybrid tricopter/flying-wing VTOL UAV», en *52nd Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc.
- CETINSOY, E., S. DIKYAR, C. HANCER, K. T. ONER, E. SIRIMOGLU, M. UNEL y M. F. AKSIT (2012), «Design and construction of a novel quad tilt-wing UAV», *Mechatronics*, **22**(6), págs. 723–745, URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechatronics.2012.03.003>.
- CHEN, C., J. ZHANG, N. WANG y L. SHEN (2021), «Conversion control of a tilt tri-rotor unmanned aerial vehicle with modeling uncertainty», *International Journal of Advanced Robotic System*, (August), págs. 1–14.
- COOK, M. V. (2007), *Flight Dynamics Principles*.
- DRELA, M. (1989), «XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils», en T. J. Mueller (editor), *Low Reynolds Number Aerodynamics*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, págs. 1–12.
- DUKE, E. L., R. F. ANTONIEWICZ y K. D. KRAMBEER (1988), «Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model», *Publication 1207*.
- FERGUSON, S. W. (1983), «A mathematical model for real time flight simulation of a generic tilt-rotor aircraft», *Informe técnico*, Ames Research Center, Moffett Field. California.

- HARRIS, F. D. (2003), «An Overview of Autogyros and The McDonnell XV-1 Convertiplane», .
- HE, G., L. YU, H. HUANG y X. WANG (2020), «A Nonlinear Robust Sliding Mode Controller with Auxiliary Dynamic System for the Hovering Flight of a Tilt Tri-Rotor UAV», .
- HERNANDEZ-GARCIA, R. G. y H. RODRIGUEZ-CORTES (2015), «Transition flight control of a cyclic tiltrotor UAV based on the Gain-Scheduling strategy», *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2015*.
- HITEC-RCD (2021), «Product description of mini servomotor HS-5087MH», URL <https://hitecrcd.com/products/servos/digital/micro-mini-wing/hs-5087mh/product>.
- HOCHSTENBACH, M., C. NOTTEBOOM, B. THEYS y J. D. SCHUTTER (2015), «Design and Control of an Unmanned Aerial Vehicle for Autonomous Parcel Delivery with Transition from Vertical Take-off to Forward Flight VertiKUL , a Quadcopter Tailsitter», *International Journal of Micro Air Vehicles*, **7**(4), págs. 395–406.
- HOUARI, A., I. BACHIR, D. K. MOHAMED y M. K. MOHAMED (2020), «PID vs LQR controller for tilt rotor airplane», **10**(6), págs. 6309–6318.
- KAILATH, T. (1980), *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- KDE-DIRECT (2021a), «Product description of brushless motor KDE2315XF-965», URL <https://www.kdedirect.com/collections/uas-multi-rotor-brushless-motors/products/kde2315xf-965>.
- KDE-DIRECT (2021b), «Product description of the brushless motor ESC KDEXF-UAS35», URL <https://www.kdedirect.com/collections/uas-multi-rotor-electronics/products/kdexf-uas35>.

- KE, Y., K. WANG y B. M. CHEN (2018), «Design and Implementation of a Hybrid UAV With Model-Based Flight Capabilities», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, **23**(3), págs. 1114–1125.
- MANN, R. A. (1974), «Classical Dynamics of Particles», .
- MANTHA, R. (2015), «Development of an Unmanned Aerial Vehicle - A Tricopter», *Informe Técnico April*, AMRITA SCHOOL OF ENGINEERING.
- MARCO, A. D., V. CLAUDIO y E. L. DUKE (2007), «A General Solution to the Aircraft Trim Problem», (August).
- MCRUER, D. T., D. GRAHAM y I. ASHKENAS (1973), «Aircraft Dynamics and Automatic Control», .
- MOGENSEN, K. (2016), «Motor-control considerations for electronic speed control in drones», *Analog Applications Journal*, págs. 1–7, URL <http://www.ti.com/lit/an/slyt692/slyt692.pdf>.
- MURAOKA, K., N. OKADA, D. KUBO y M. DAISUK (2012), «Transition flight of quad tilt wing VTOL UAV», *28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012, ICAS 2012*, **4**, págs. 3242–3251.
- NAM, K. J., J. JOUNG y D. HAR (2020), «Tri-Copter UAV with Individually Tilted Main Wings for Flight Maneuvers», *IEEE Access*, **8**, págs. 46 753–46 772.
- ONER, K., E. CETINSOY, E. SIRIMOĞLU, C. HANÇER, M. ÜNEL, M. F. AKŞIT, K. GÜLEZ y I. KANDEMİR (2012), «Mathematical modeling and vertical flight control of a tilt-wing UAV», *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, **20**(1), págs. 149–157.
- PAPACHRISTOS, C. (2013), «Linear Quadratic Optimal Trajectory – Tracking Control of a Longitudinal Thrust Vectoring – Enabled Unmanned Tri – TiltRotor», .

- PAPACHRISTOS, C., K. ALEXIS y A. TZES (2011), «Design and experimental attitude control of an unmanned Tilt-Rotor aerial vehicle», *IEEE 15th International Conference on Advanced Robotics: New Boundaries for Robotics, ICAR 2011*, págs. 465–470.
- PAPACHRISTOS, C., K. ALEXIS y A. TZES (2012), «Towards a high-end unmanned tri-TiltRotor: Design, modeling and hover control», *2012 20th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2012 - Conference Proceedings*, págs. 1579–1584.
- PENROSE, R. (1955), «A generalized inverse for matrices», *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**(3), pág. 406–413.
- REDGRAVE, H. (2015), *Engineering models of aircraft propellers at incidence*, <http://theses.gla.ac.uk/6799/>, University of Glasgow.
- SATO, M. y K. MURAOKA (2015), «Flight controller design and demonstration of quad-tilt-wing unmanned aerial vehicle», *Journal of Propulsion and Power*, **31**(5), págs. 1071–1082.
- SIMMONS, B. M. (2021), «System Identification for Propellers at High Incidence Angles», (January).
- SKOGESTAD, S. y I. POSTLETHWAITE (2005), *Multivariable Feedback Control*.
- STEPNIEWSKI, W. Z. y C. N. KEYS (1984), *Rotary-Wing Aerodynamics*, Dover publications.
- TORKEL, G. y L. LENNART (2000), *Control Theory Multivariable and Nonlinear Methods*, tomo 53, Taylor & Francis, London, [arXiv:1011.1669v3](https://arxiv.org/abs/1011.1669v3).
- VOGELTANZ, T. (2019), «Conceptual design and control of twin-propeller tail-sitter mini-UAV», *CEAS Aeronautical Journal*, **10**(3), págs. 937–954, URL <http://dx.doi.org/10.1007/s13272-019-00388-z>.

- WANG, Z., J. LI y D. DUAN (2020), «Manipulation strategy of tilt quad rotor based on active disturbance rejection control», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, **234**(3), págs. 573–584.
- WARREN, M. M., F. K. KOZEL, E. Q. LI, C. S. HALL y B. J. GERMAN (2019), «Design and control evaluation of a novel subscale quad-tiltrotor», *AIAA Scitech 2019 Forum*, (January), págs. 1–13.
- YANGUO, S. y W. HUANJIN (2009), «Design of Flight Control System for a Small Unmanned Tilt Rotor Aircraft», **22**(3), págs. 250–256, URL [http://dx.doi.org/10.1016/S1000-9361\(08\)60095-3](http://dx.doi.org/10.1016/S1000-9361(08)60095-3).
- ZENG, C., R. ABNOUS, K. GABANI, S. CHOWDHURY y V. MALDONADO (2020), «A new tilt-arm transitioning unmanned aerial vehicle: Introduction and conceptual design», *Aerospace Science and Technology*, **99**, pág. 105 755, URL <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105755>.