

# Optimización estructural del codo de una prensa mecánica mediante análisis topológico

Francisco Ramírez Cruz, Héctor Alfonso García Mendoza, Fco. Eugenio López Guerrero, Francisco Javier De la Garza Salinas  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
prof.dr.ramirez@gmail.com

## RESUMEN

*En este trabajo se presenta el desarrollo de un método de optimización topológica basado en un modelo de elementos finitos para maximizar la energía de deformación sobre la estructura de trabajo de un codo de una prensa mecánica. El propósito es minimizar la cantidad de material, maximizar la rigidez y proveer información para su rediseño para su fabricación. Los resultados muestran un aumento de 57.89% en el factor de seguridad. Así mismo, se minimizó el esfuerzo máximo en un 37.86%, y la mejora en la reducción del volumen del componente fue de 11.66%.*

## PALABRAS CLAVE

Optimización topológica, energía de deformación, elemento finito.

## ABSTRACT

*This work presents the development of a topological optimization method based on a finite element model to maximize the deformation energy generated on the working structure of the elbow of a mechanical press. The purpose is to minimize the amount of material, maximize stiffness, and provide information for its redesign for its fabrication. The results an increase of 57.89% in the safety factor. Likewise, the maximum stress was minimized by 37.86%, and the improvement in volume of the component was 11.66%.*

## KEYWORDS

Topological optimization, deformation energy, finite element.

## INTRODUCCIÓN

El objetivo de la optimización del diseño de elementos de máquinas es obtener un conjunto de valores para las variables involucradas que minimizan una función objetivo y satisfacen un conjunto de restricciones. El proceso de optimización se puede llevar a cabo considerando tres categorías: por parámetros, forma, y topología.<sup>1</sup>

Los resultados del análisis estructural se utilizan convencionalmente por los diseñadores con el propósito de mejorar el desempeño mecánico,<sup>2</sup> mientras que la integración de las herramientas de generación automática se ha vuelto más importante para ahorrar además material y energía,<sup>3</sup> sistematizado para acortar el tiempo de desarrollo de productos (figura 1).

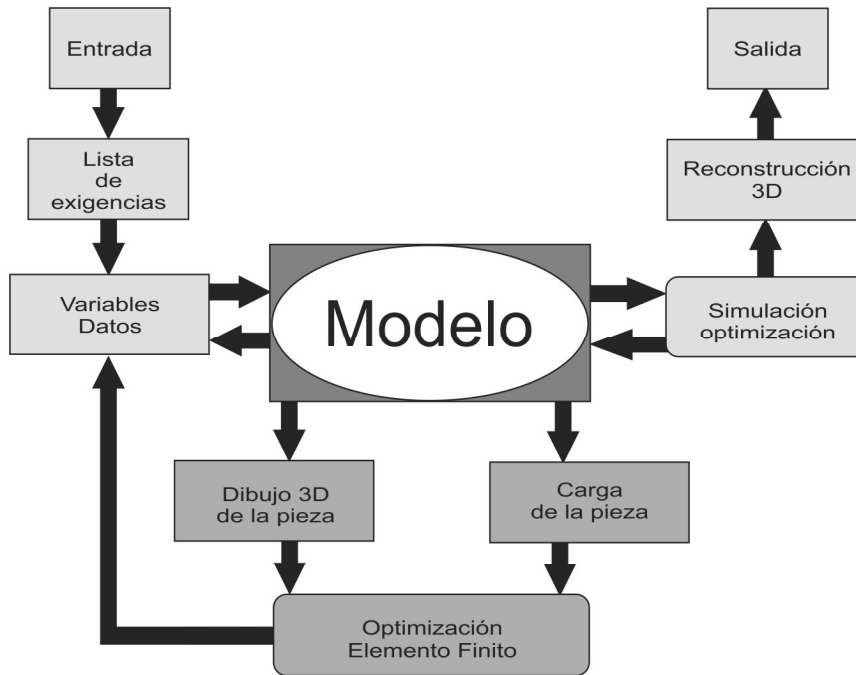


Fig. 1. Proceso del diseño computarizado.<sup>4</sup>

Las piezas mecánicas tienen transiciones geométricas, como muescas y orificios, en las que se producen concentraciones de esfuerzo locales que afectan la resistencia del componente en términos de servicio.<sup>3,5</sup> La optimización de la forma reduce esas transiciones, al mismo tiempo que evita el sobredimensionamiento, el cual es uno de los métodos de simplificación para mejorar la resistencia del componente y para facilitar su manufactura. Tener material en sitios del componente estructural que no soportan carga se asocia a un mayor costo de material aunque pudiera reducir el costo de producción. Aunque retirar el material de esos sitios implicaría una reducción de peso, es común que en las propuestas de diseño se incluyan aspectos relacionados con el costo de la producción por la modificación de la manufactura, de manera que la manufacturabilidad del producto debe ser evaluada<sup>5</sup> como una restricción al diseño mecánico óptimo.

Los resultados de la optimización topológica a menudo brindan soluciones que pueden considerarse complejas para los métodos de manufactura convencional, tales como estructuras de armadura, cavidades, superficies curvas, por lo que los diseños mecánicamente óptimos requieren el desarrollo de métodos modernos de manufactura.<sup>6,7</sup> Tomando en cuenta esto, los programas computacionales para la optimización topológica han evolucionado de tal manera que consideran diferentes procesos de manufactura dentro de las restricciones de diseño.<sup>8,9</sup>

## OBJETIVO

El objetivo de este trabajo consiste en diseñar un componente mecánico que presente el mejor desempeño, mediante un análisis topológico. La mejora se evalúa comparando el diseño original contra el que resulta de esta propuesta, utilizando el análisis de esfuerzos según el criterio de von Mises.

## METODOLOGÍA

Inicialmente se requiere determinar una geometría que representa el espacio de diseño y las condiciones de frontera, así como la función objetivo y su restricción volumétrica. Posteriormente se rediseña la geometría resultante del proceso iterativo de la optimización tomando en cuenta el método de fabricación.<sup>10</sup> Por último, se evalúa el desempeño mecánico del componente original y el resultado topológico de este estudio para compararlos (figura 2).

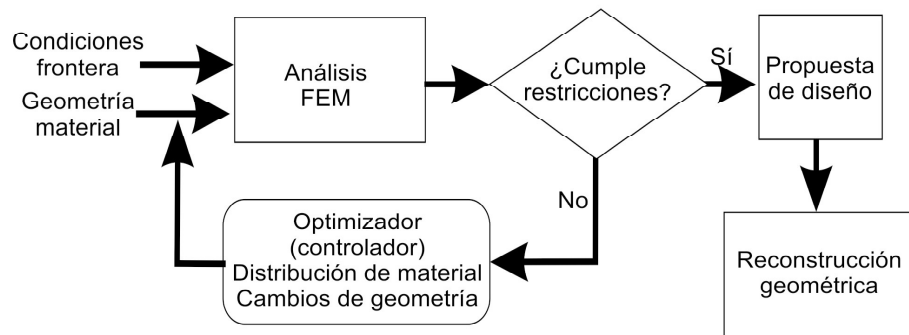


Fig. 2. Diagrama de flujo para optimización topológica.

## Método de elementos finitos

El método de elementos finitos es una técnica numérica para resolver problemas que se pueden describir por ecuaciones diferenciales parciales o que pueden ser formulados por medio de una minimización de un funcional (cálculo variacional). La mayoría de los métodos de optimización emplean este método para el análisis topológico.<sup>5</sup> La premisa básica es que una región de solución que se describe con funciones continuas, puede ser modelada reemplazándola con un arreglo de elementos discretos, pudiendo incluso variar las condiciones de los elementos individualmente o en grupos de acuerdo con las ecuaciones constitutivas que se empleen en el problema.<sup>3</sup>

En primer término, la expresión para la energía potencial resultante puede escribirse de la forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (1)$$

Donde:

$\mathbf{Q}$  es el vector de desplazamientos global

$\mathbf{F}$  es el vector de carga global

$\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez estructural

Minimizando la energía potencial total resultan las ecuaciones de equilibrio expresadas de forma matricial:

$$\mathbf{K} * \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (2)$$

Una vez efectuada dicha minimización se resuelven, mediante un programa computacional, las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos del continuo, los esfuerzos, reacciones, entre otros.

### Optimización topológica

Desde su introducción por Bendsøe,<sup>1</sup> el método de optimización topológica ha ganado una gran popularidad en la academia y la industria, y actualmente se aplica al diseño de estructuras automotrices y de aviones, así como en materiales, mecanismos y diseño de sistemas micro electromecánicos (MEMS).<sup>11, 12</sup> Es una técnica dentro del campo de análisis mecánico y uno de los objetivos consiste en minimizar el peso, manteniendo la funcionalidad mecánica.<sup>13</sup>

Por lo general en un problema de optimización topológica, el objetivo principal es minimizar la energía  $C(\mathbf{x})$  teniendo en cuenta la distribución del material, la cual puede definirse como:

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (3)$$

Esta energía de deformación es el producto de dos vectores y se asemeja al trabajo realizado por el vector de fuerza  $\mathbf{F}$  a lo largo de los desplazamientos calculados  $\mathbf{u}$ . Por lo tanto la expresión dada es en realidad un potencial de trabajo similar a las formulaciones comunes para el equilibrio de la energía potencial en un sistema. De este modo el vector de fuerza  $\mathbf{F}$  es igual al desplazamiento multiplicado por la matriz de rigidez estructural  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{K}$  es la rigidez global y está en función de las variables de diseño:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4)$$

La transformación de la función objetivo puede ser escrita como en la ecuación (5). La energía de deformación aquí es una combinación lineal de las energías de deformación de cada elemento formulado en el modelo de elementos finitos.

$$\min: C(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e(\mathbf{x}_e) \mathbf{u}_e \quad (5)$$

Puesto que es un valor normalizado, la variable de diseño sólo puede oscilar entre los valores 0 (sin efecto) y 1 (sólido). Para la prevención de posibles singularidades en las matrices del sistema, las densidades no están restringidas a cero, pero sí por un límite inferior como se muestra en la ecuación (6).

$$0 < x_{min} \leq x \leq 1 \quad (6)$$

Debido a que en la optimización topológica existe una redistribución de material se debe tomar en cuenta la razón entre el volumen deseado  $V(\mathbf{x})$  y el volumen original  $V_0$ :

$$\frac{V(\mathbf{x})}{V_0} = f \quad (7)$$

El planteamiento del problema de optimización topológica completa para minimizar la energía de deformación se representa por la función objetivo, en este caso minimizar la energía de deformación, limitada a las funciones de razón de volumen y la ecuación de equilibrio del sistema, queda como sigue:

$$\min_x C(x) = \sum_{e=1}^N u_e^T K_e(x_e) u_e \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{V(x)}{V_0} = f \\ K(x) u = F \\ 0 < x_{\min} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

### CASO DE ESTUDIO

El caso de estudio es un codo perteneciente a una prensa mecánica, este componente representa el medio que transmite la carga efectiva de trabajo y que por lo tanto es en donde se genera la mayor energía de deformación de la máquina (figura 3).

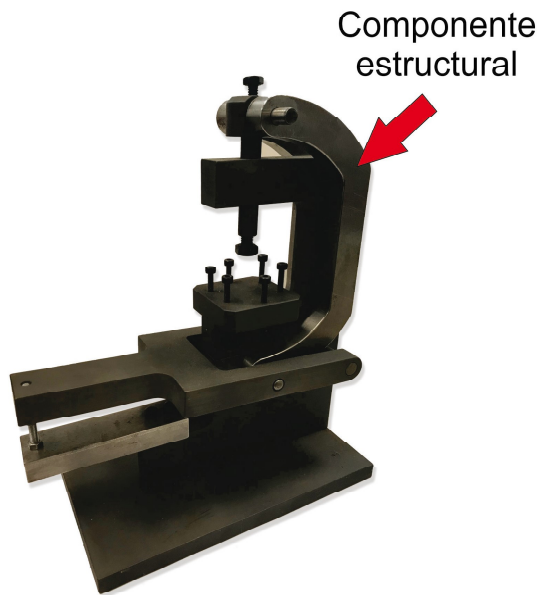


Fig. 3. Prensa mecánica "El "codo" muestra el componente estructural.

Para llevar a cabo la mejora en la pieza de estudio se definió un espacio de diseño que mantiene las distancias entre centros de los agujeros pivote del codo original así como también el espesor (figura 4). El modelado con elementos finitos con las condiciones de frontera aplicadas al segmento simétrico del codo se muestra en la figura 5. Las condiciones de frontera para la optimización dentro del espacio de diseño son el empotramiento con restricción de movimiento en los tres grados de libertad traslacionales.

La tabla I muestra los parámetros utilizados en el programa de elementos finitos, así como también las propiedades mecánicas del material (aluminio 6061).

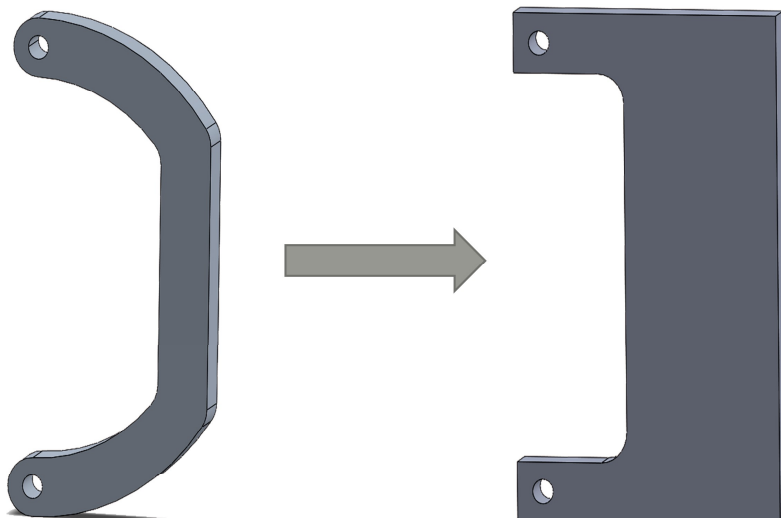


Fig. 4. Espacio de diseño.

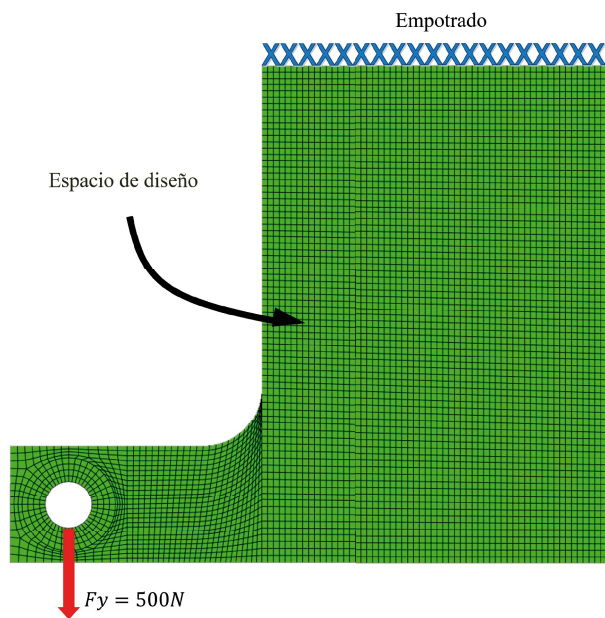


Fig. 5. Espacio de diseño modelado con elementos finitos y condiciones frontera.

Tabla I. Parámetros utilizados en el programa de MEF.

Tipo de análisis	Estático
Tipo de malla	Cuadrilátero 4 nodos
Material	Aluminio 6061
Número de elementos	5617
Número de nodos	5818
Coefficiente de Poisson	0.33
Módulo de elasticidad (MPa)	69000
Densidad (Kg/mm <sup>3</sup> )	2700

La carga (500 N) se aplica sobre uno de los barrenos pivote en dirección paralela al eje de carga de la máquina. La función objetivo para el espacio de diseño propuesto es minimizar la energía de deformación del componente. La restricción es minimizar el volumen del componente para mantener un peso aproximado al de la pieza original por lo que se propone un 30% del volumen inicial del caso de estudio.

En la figura 6 se observa la iteración 8 de 15 del proceso de optimización topológica. Las oquedades amorfas que se generan con el transcurso de la optimización representan los espacios de la pieza en los que no se concentra un esfuerzo lo suficientemente importante para mantenerse por lo cual se generan huecos en la estructura.

La figura 7 muestra la geometría final resultante del proceso de optimización topológica con la máxima reducción de volumen.

La gráfica de la figura 8 muestra el cambio de volumen a lo largo de las iteraciones del problema. La curva se aproxima al valor programado de la reducción del volumen total establecido como parámetro de optimización.

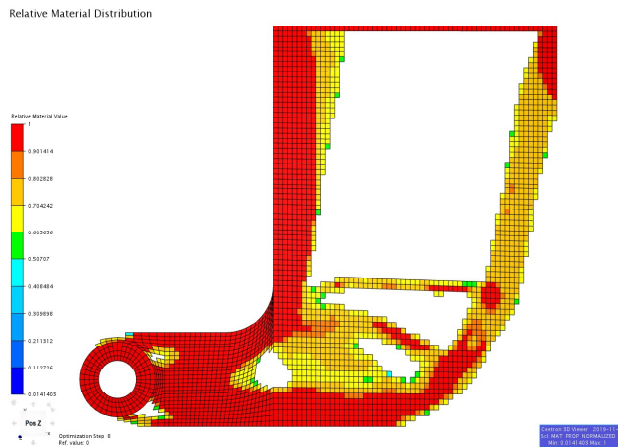


Fig. 6. Iteración 8 de 15.

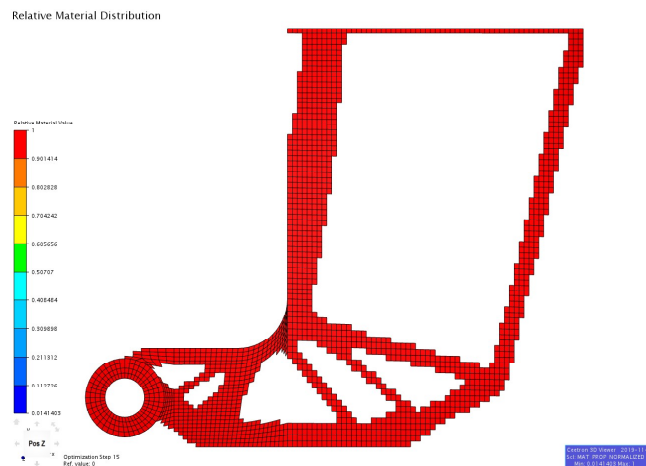


Fig. 7. Iteración 15 de 15.

En la gráfica de la figura 9 se presenta la evolución del comportamiento de la densidad de energía de deformación en relación con la variable de diseño por cada iteración.

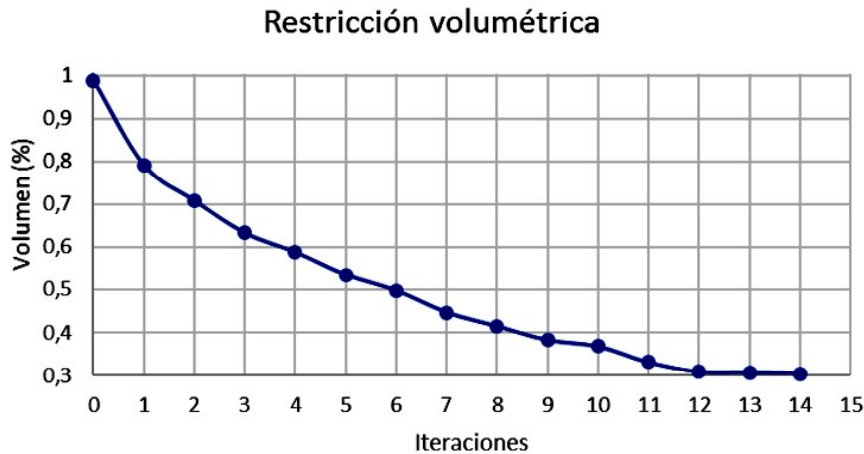


Fig. 8. Cambio de volumen por iteración.

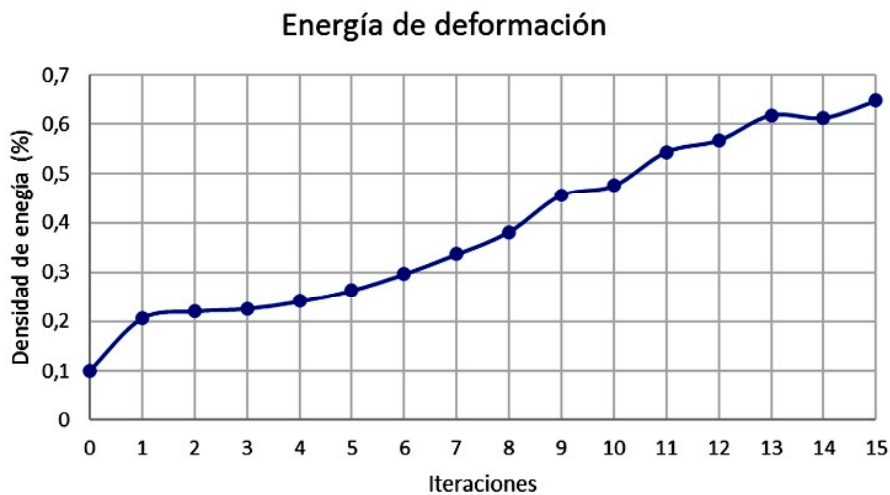


Fig. 9. Relación entre la densidad de energía de deformación por iteración.

### RECONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

La geometría resultante representa el concepto de diseño para la fabricación (figura 7). El siguiente paso consiste en analizar la viabilidad para su manufactura y plantear los cambios geométricos que sean necesarios para asegurar la fabricación.

Para llevar a cabo esta reconstrucción, se realizó una serie de trazos tangentes al contorno de la geometría resultante, y se aplicó la operación espejo para completar la geometría optimizada como se ve en la figura 10.

Una vez reconstruida la geometría se procede a realizar el análisis de elemento finito con las condiciones frontera que se muestran en la figura 11, para validar el diseño óptimo obtenido.



En la tabla II se pueden observar los parámetros utilizados en el programa de elementos finitos con respecto a la geometría óptima y el mismo material (aluminio 6061).

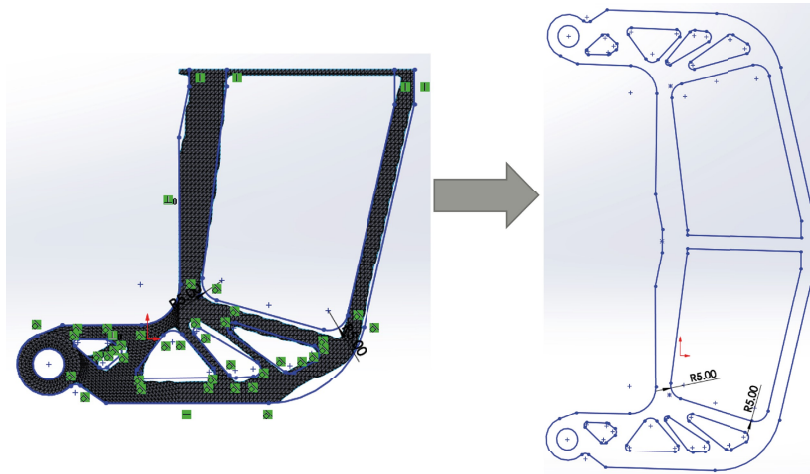


Fig. 10. Reconstrucción de la geometría optimizada.

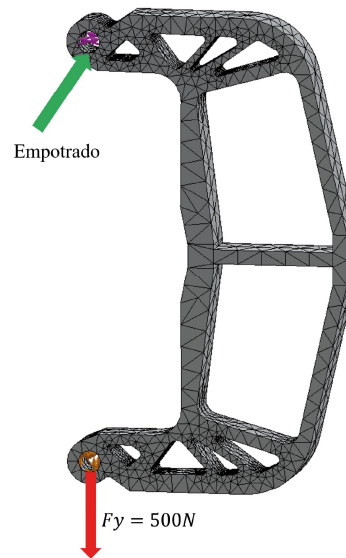


Fig. 11. Mallado de geometría óptima y condiciones de frontera.

Tabla II. Parámetros utilizados en el programa de MEF (Geometría óptima).

Tipo de análisis	Estático
Tipo de malla	Malla sólida
Número de elementos	12741
Número de nodos	22000

La figura 12 muestra el resultado del análisis de elemento finito y distribución de esfuerzo von Mises de la geometría óptima.

En la tabla III se pueden observar los resultados generados por el programa de análisis de elemento finito.

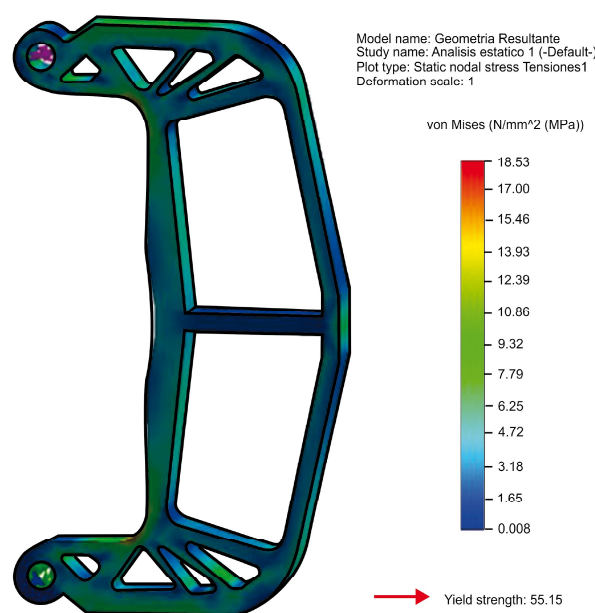


Fig. 12. Distribución de esfuerzos de la geometría óptima.

Tabla III. Resultados del programa de MEF (Geometría óptima).

Tipo de análisis	Estático
Límite elástico (MPa)	55.15
Esfuerzo máximo (MPa)	18.14
Factor de seguridad	3
Peso de la pieza (gramos)	171.62
Volumen (mm <sup>3</sup> )	63561.14

## COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Se realizó un análisis de elemento finito a la pieza original, esto con el fin de comparar resultados contra la geometría óptima (figura 13).

En la tabla IV se pueden observar los parámetros utilizados en el programa de elementos finitos para el codo original. El resultado del análisis de elemento finito se muestra en la figura 14. La distribución del esfuerzo de von Mises se concentra sobre la transición del arco interno hacia el lado recto del codo.

En la tabla V se pueden observar los resultados generados por el programa de análisis de elemento finito, y en la tabla VI se muestra la comparación de los resultados del análisis de elemento finito entre la pieza original y la geometría resultante del estudio de optimización.

Como se puede observar en la tabla comparativa, el proceso de optimización topológica mostró mejores resultados al momento de comparar la geometría resultante del optimizador contra la original, sobre todo en el valor de factor de seguridad que como se puede notar aumentó 57.89%. El esfuerzo máximo se redujo en 37.86%. La reducción de volumen, y en consecuencia de peso, del componente fue de 11.66% con respecto de la geometría original.

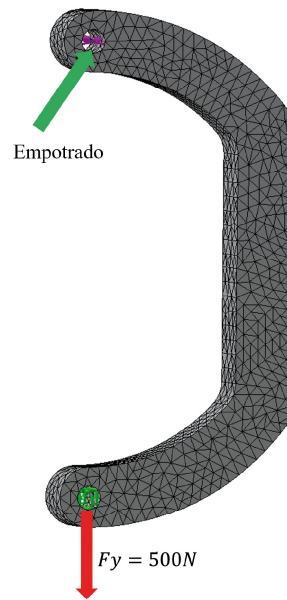


Fig. 13. Mallado de geometría original.

Tabla IV. Parámetros utilizados en el programa de MEF

Tipo de análisis	Estático
Tipo de malla	Malla sólida
Número de elementos	10511
Número de nodos	16788

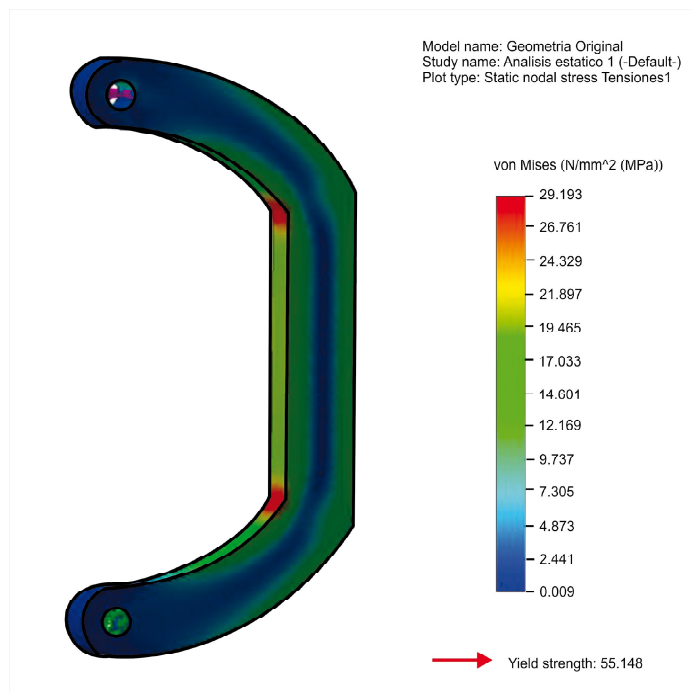


Fig. 14. Distribución de esfuerzos von Mises pieza original.

Tabla V. Resultados del programa de MEF (Geometría original).

Tipo de análisis	Estático
Límite elástico (MPa)	55.15
Esfuerzo máximo (MPa)	29.19
Factor de seguridad	1.9
Peso de la pieza (gramos)	194.28
Volumen (mm <sup>3</sup> )	71947.56

Tabla VI. Comparación de resultados.

	Pieza original	Pieza óptima	Mejora (%)
Tipo de análisis	Estático	Estático	X
Límite elástico (MPa)	55.15	55.15	X
Esfuerzo máx (MPa)	29.19	18.14	37.86
Factor de seguridad	1.9	3	57.89
Peso de la pieza (gr)	194.26	171.62	11.66
Volumen (mm <sup>3</sup> )	71947.56	63561.14	11.66

## CONCLUSIONES

A través de los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos del codo de una prensa mecánica se comprobó que es posible lograr una distribución mejorada de la energía de deformación. Los resultados del proceso de optimización topológica satisfacen restricciones de volumen. El rediseño de elementos mecánicos a través de un análisis topológico representa un recurso para obtener componentes mejorados en los que se maximiza la rigidez y minimiza el volumen.

## RECONOCIMIENTOS Y EQUIPO UTILIZADO

Este trabajo fue realizado en el marco de la línea de generación y aplicación de conocimiento LGAC L2: “Optimización geométrica de productos” del Cuerpo Académico “Sistemas Integrados de Manufactura” de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, UANL. Se utilizó el equipo de las instalaciones del Departamento de Mecatrónica de la FIME-UANL.

## REFERENCIAS

1. Bendsøe MP, Sigmund O (2003) *Topology Optimization Theory, Methods, and Applications*, second edition edn. Springer Verlag, Berlin.
2. Sigmund O, Clausen PM (2007) Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (13-16):1874-1889.
3. Ramírez C. Fco., López G. E. Fco., Romero M. I. C., Garza D. J. Fco. y Castillo O. L. J (2010) “Relación de la geometría de elementos mecánicos con el cambio de formas en la naturaleza como criterios de diseño”. SOMIM.

4. Michael Brand, “Grundlagen FEM mit SolidWorks 2010”, Berechnungen verstehen und effektiv anwenden. Vieweg+Teubner (2011).
5. Matthijs Langelaar, (2017) An additive manufacturing filter for topology optimization of print ready designs, *Structural Multidisciplinary Optimization* 55:871–883.
- 6.. Lian, H., Christiansen, A. N., Tortorelli, D. A., Sigmund, O., & Aage, N. (2017). Combined shape and topology optimization for minimization of maximal von Mises stress. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(5), 1541-1557.
7. Waqas Saleem, Hu Lu, Fan Yuqing. (2008) Topology Optimization- Problem Formulation and Pragmatic Outcomes by integration of TOSCA and CAE tools. *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*.
8. Cortés C. J. G, y Rodenas G. J. J. (2010) Desarrollo de un programa de optimización de forma de componentes mecánicos mediante optimización topológica adaptativa. SOMIM.
9. Hus M. y Hus Y. (2005) Generalization of two and three dimensional structural topology optimization. *Engineering Optimization* Vol. 37, No. 1, 83–102.
10. Ramírez C. Fco., López G. E. Fco. y Salazar C. A. (2013) Mejora estructural de un soporte tipo balancín a través de un análisis topológico. SOMIM.
11. Zheng B, Chang CJ, Gea HC (2009) Topology optimization with design dependent pressure loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 38(6):535-543.
12. Zuo KT, Chen LP, Zhang YQ, Yang J (2007) Study of key algorithms in topology optimization. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 32(7):787-796.
13. Zhang H, Zhang X, Liu S (2008) A new boundary search scheme for topology optimization of continuum structures with design dependent loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37(2):121-129.

