

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

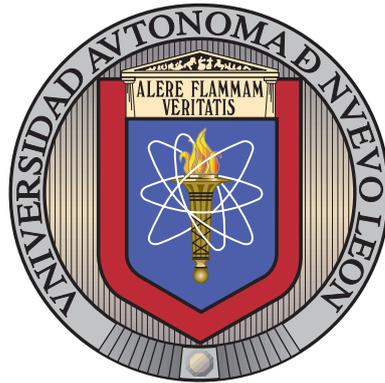


DIAGRAMA DE FASES DE LA QCD USANDO EL MODELO
NJL CON VOLUMEN FINITO

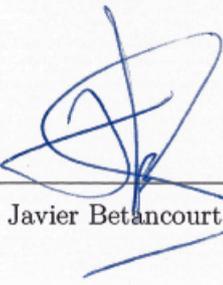
POR

FRANCISCO JAVIER BETANCOURT SOTOMAYOR

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA

DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD

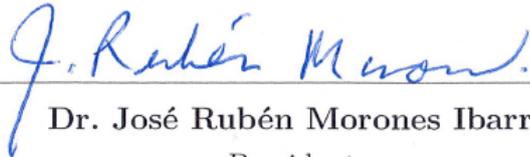
Declaro solemnemente que el documento que enseguida presento es fruto de mi propio trabajo, y hasta donde estoy enterado, no contiene material previamente publicado o escrito por alguien más, excepto aquellos materiales o ideas que por ser de otras personas les he dado el debido reconocimiento y los he citado cumplidamente en la bibliografía o las referencias. Declaro además que tampoco contiene material que haya sido aceptado para el otorgamiento de cualquier otro grado o diploma de alguna universidad o institución.



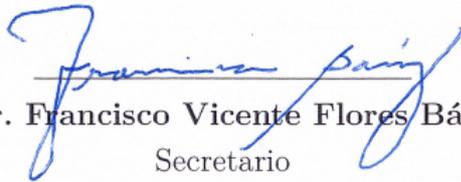
Francisco Javier Betancourt Sotomayor

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

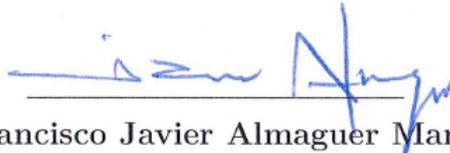
Aprobación de la Tesis
Diagrama de fases de la QCD usando el modelo NJL con volumen finito



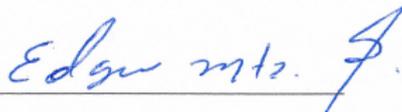
Dr. José Rubén Morones Ibarra
Presidente



Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Secretario



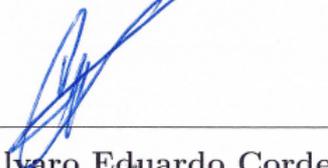
Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Primer Vocal



Dr. Edgar Martínez Guerra
Segundo Vocal



Dr. Omar González Amezcua
Tercer Vocal



Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirección de Estudios de Posgrado

Agradecimientos

Hace tiempo leí una nota en una revista acerca de la búsqueda del quark top. Había una foto con una gran cantidad de físicos trabajando en ese proyecto, yo quería formar parte de eso. No estoy involucrado en un proyecto similar pero hice un trabajo que me permite comprender la física alrededor de esa nota y mucho más. No lo hice yo solo. Hay muchas personas involucradas y no creo que haya suficiente espacio para mencionar a todos, pero en esta última etapa quisiera agradecer a mi familia que siempre me ha apoyado y creyeron en mi. A mi mamá y papá, a *Gabyss* y a Toño, a José, Cecy, José Antonio y Mateo.

Quisiera agradecer profundamente al Dr. Rubén Morones. En pocas palabras toda mi formación en física a este nivel es gracias a él. Agradezco la oportunidad que me dio de llegar aquí y de compartir todo lo necesario. De elaborar un plan de trabajo para mi proyecto y preparar los cursos desde lo básico de Mecánica Cuántica Relativista hasta los temas avanzados de Física. Al Dr. Javier Almaguer por su disposición en la revisión de este trabajo pero también por ser mi asesor en la maestría. Es muy valioso lo que aprendí bajo su tutela y espero en un futuro replicar eso mismo a las siguientes generaciones de estudiantes.

De igual modo al Dr. Edgar Martínez por revisar este trabajo, y en especial por el apoyo en estos últimos semestres y también por la empatía mostrada hacia mí, su calidad como ser humano es invaluable. También a los Doctores Francisco Flores por la revisión de este trabajo y los consejos para el envío del artículo y Omar González Amezcua por la revisión final de este trabajo.

Estoy cerrando un ciclo académico que comenzó con la licenciatura en Matemáticas por lo que agradezco a la UANL, a la FCFM, el CICFM y en particular a sus profesores. Al Dr. Alfredo Alanís y la Dra. Lilia López quienes me apoyaron durante toda la carrera y el posgrado con asesorías, consejos, libros y recomendaciones, les estoy muy agradecido. A mis maestras Mirthala[†], a la Dra. Nataliya Kalashnikova, Dra. Azucena Ríos, Dra. Esther Grimaldo, a Jenny y mis maestros Solís Alanís, al maestro Saucedo, al Dr. Héctor Flores, Dr. Cordero, Tenorio, José Jaime, Jesús Suárez, Arratia, al Dr. Fernando Camacho, Dr. Mikhail Basin, Dr. Fco. Cabrera, Dr. Javier Morales, Dr. Carlos Chávez Pech (Charly) y la Dra. Sandra, todos influyeron al día de hoy de alguna manera en mi forma de pensar y actuar. A mis compañeros de la carrera y posgrado Bere y Enrique, Daniel, Reyna y Fer, Abraham, Luis, Nana, a Mario y Rubí, a Dámaris y José, Edith, Lili, Jonathan, Fidel y a todos a quienes no mencioné pero que de alguna manera estuvieron ahí.

A CONACYT ya que definitivamente sin su apoyo mediante una beca nunca habría podido llegar hasta aquí. Espero que continuen con la formación de científicos de nivel ya que pienso que es la base para construir una gran nación.

Resumen

En este trabajo se estudian los efectos de un volumen finito en la transición de fase quiral para sistemas de quarks que interactúan fuertemente descritos por el modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) en $SU(2)$. Se obtiene el diagrama de fase y la posible localización del *critical end point* restringiendo el sistema en un volumen finito mediante el método llamado *Multiple Reflection Expansion*. Este método equivale a un modelo esférico y tiene dos tipos de restricción. Se propone para el mismo una aproximación a una geometría cúbica. Los resultados muestran una fuerte dependencia al tipo de restricción utilizada. Estableciendo condiciones a la frontera periódicas, antiperiódicas y de onda estacionaria se estudia la transición de fase quiral para un potencial químico-cero. De igual modo, se observa que el modelo es muy sensible al tipo de restricción utilizada.

Índice general

1. Introducción	8
2. Teoría Cuántica de Campos	18
2.1. QED y Campo de Dirac	19
2.2. La Lagrangiana de la QCD y sus características	21
3. Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita	26
3.1. La Función de Partición Z de Fermiones y Bosones	27
3.2. El Formalismo de la Path Integral	31
3.3. Formalismo de Tiempo Imaginario	34
3.4. Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita (TFT)	35
4. Rompimiento de Simetrías	40
5. El Modelo de Nambu y Jona-Lasinio	46
5.1. Historia y su Lagrangiana	47
5.2. El Modelo NJL como una herramienta para construir un diagrama de fase de materia hadrónica	49
5.3. Renormalización y Regularización	53
5.3.1. UV-cutoff	54
5.3.2. Regularización de Tiempo Propio	55
6. Diagrama de Fases	58
6.1. Transiciones de Fase	60
6.2. Susceptibilidad Quiral	61
6.3. Diagramas	63
7. Volumen Finito	70
7.1. Aproximación mediante densidad de estados MRE	71
7.1.1. La Densidad de Estados y cómo ésta determina la frontera de un volumen	71
7.1.2. Diagramas	74
7.2. Aproximación mediante Condiciones en la Frontera	96

8. Discusión / Conclusiones	103
A. Preliminares	107
B. Lagrangiana del Campo Escalar Libre	110
C. Cuantización del Campo Escalar	114
D. Representación de Schrödinger y Heisenberg	118
E. Unidades Naturales, Dimensión y Teorías Renormalizables	120
F. Densidad de Estados	122
G. Simetrías	123
H. Teorema de Noether	126
I. Simetría de Paridad	128
J. Simetría Quiral	130
K. El Valor Promedio Térmico	134
L. Funciones de Correlación y Sumas de Matsubara	135
M. Sobre el cálculo del segundo término del RHS de la ecuación 3.30	137
N. La Lagrangiana Euclidiana de Dirac con potencial químico μ	139
Ñ. Cálculo de parámetros según el esquema regularización	141
Ñ.1. UV-Cutoff	141
Ñ.2. Proper Time Regularization	142
O. La Identidad del PTR	144

Capítulo 1

Introducción

En febrero de 2022 se cumplieron cien años del experimento de Stern-Gerlach. En este, un haz colimado de átomos de plata se hizo pasar por un campo magnético inhomogéneo y se dividió en dos haces. La importancia de este experimento radica en que, para su explicación, se incorporó el concepto de cuantización espacial usado por Pauli cerca del año 1920 para intentar explicar -lo cual no logró- en la teoría ferromagnética una diferencia entre el momento magnético promedio de un átomo y el magnetón de Bohr, es decir, el momento magnético del electrón. Esta idea de la cuantización del espacio del magnetismo atómico pasó entre colegas entre ellos Otto Stern [1] quien consideró, según el modelo del átomo de Bohr, que un gas de átomos de hidrógeno debía ser magnéticamente birrefringente, es decir, que puede separarse en dos, ya que reconoció que de acuerdo al modelo de Bohr la cuantización del espacio debía de ser así por que la proyección del momento angular estaba limitada a valores de $\pm\hbar$. Este doble caracter hizo posible la decisiva prueba de la cuantización espacial usando la deflexión magnética de un haz de átomos. En el gradiente de un campo lo suficientemente fuerte las dos componentes orientadas opuestamente deberían ser deflectadas fuera del ancho del haz original [1]. Stern pensó que el éxito de este experimento determinaría de manera inequívoca si la teoría cuántica prevaleciera sobre la teoría clásica.

La explicación de cómo fue posible dividir el haz en dos cuando los átomos con orientaciones aleatorias entran en un campo y donde la densidad del haz era tan baja que no ocurrían colisiones que intercambiaran energía llegó tiempo después, en 1927, cuando se relacionó con la postulación del espín del electrón (1925), de hecho el momento angular de la plata no es $\pm\hbar$, es cero. El momento magnético es debido únicamente al momento angular del espín.

En la actualidad las partículas elementales se pueden clasificar según el espín: fermiones y bosones. Los primeros poseen un espín semientero ($1/2, 3/2, \dots$) mientras que los bosones tienen espín entero ($0, 1, 2, \dots$) y para hacernos una idea del por qué únicamente necesitamos dos tipos de partículas para describir lo que

nos rodea recordamos que la física estudia la materia y sus interacciones. En una visión moderna una interacción entre dos objetos (partículas) ocurre mediante el intercambio de una tercer partícula asociada al campo en el cual están interactuando, es decir, dos electrones que interactúan en un campo electromagnético tal vez experimenten un cambio en su trayectoria o velocidad, esto es debido a que al interactuar intercambian un fotón (virtual) el cual acarrea la energía que uno de los electrones cede al emitirlo y la transfiere al que la gana al absorberlo. De este modo tenemos dos elementos para construir la física desde este punto de vista, los fermiones son los bloques que constituyen la materia y los bosones son las partículas que intervienen en la interacción.

En la física de partículas se describen tres tipos de fuerzas fundamentales¹ mediante las cuales puede interactuar la materia, la electromagnética, la fuerza² fuerte y la débil y cada una de estas queda descrita por una Teoría Cuántica de Campos (*Quantum Field Theory* o QFT por sus siglas en inglés). Este tipo de teoría describe la interacción entre dos partículas mediante un mecanismo de intercambio de una tercer partícula entre éstas que está asociada al campo en el que están interactuando.

En el caso del electromagnetismo esta QFT se conoce como la Electrodinámica Cuántica (*Quantum Electrodynamics* o QED) donde las interacciones entre partículas cargadas eléctricamente están mediadas por el intercambio de *fotones virtuales*. Para la fuerza fuerte se utiliza la Cromodinámica Cuántica (*Quantum Chromodynamics*) y la partícula de interacción es llamada *gluón* y en el caso de la interacción débil son los bosones W^+ , W^- cargados eléctricamente y el Z^0 que es eléctricamente neutro. Estas partículas que median las interacciones son llamadas *bosones gauge*³ y tienen espín 1. Los fotones y gluones tienen masa cero y los bosones W^\pm y Z^0 poseen masas del orden de los 100 GeV [2].

En resumen, se considera que las partículas elementales son doce fermiones y seis⁴ bosones. Estos 12 fermiones se dividen en dos tipos: seis quarks llamados *up*, *down*, *strange*, *charm*, *top* y *bottom* todos ellos con carga eléctrica fraccionaria y seis leptones, tres con carga eléctrica -1 y son el electrón (e), el muón (μ) y el tau (τ) y los otros tres neutros: los neutrinos asociados a los tres anteriores, ν_e , ν_μ y ν_τ . Los bosones por su parte, los que median una interacción, y son de

¹El Modelo Estándar de la materia no incluye la interacción gravitacional

²Usaremos la palabra fuerza o interacción de manera indistinta.

³Por comodidad nos referiremos a ellos simplemente como bosones siempre que el término no se preste a confusión.

⁴No estamos considerando el gravitón que es el bosón asociado a la interacción gravitacional. En el Modelo Estándar no se toma en cuenta esta interacción. En teoría el gravitón tendría espín 2, y es eléctricamente neutro con masa-cero. También hay que considerar que cada partícula cuenta con su antipartícula.

cinco tipos, el fotón γ (eléctricamente neutro), los gluones g también neutros y los bosones Z^0 (neutro) y los W^\pm cargados eléctricamente. El último bosón es el Higgs, neutro y con espín cero.

Fermiones				Bosón	
quarks		leptones		escalar	gauge
u	d	e	ν_e	H	γ
c	s	μ	ν_μ		g
t	b	τ	ν_τ		W^\pm Z^0

Cuando se habla de teorías de campos es útil imaginarlas de la siguiente manera: el campo es «algo» que llena todo el espacio (el Universo), lo llena como el aire (o el agua) llena un recipiente o una habitación y este campo lo único que puede hacer es «ser perturbado» como cuando uno toca la superficie del agua. Esta imagen de un campo lo es en el sentido de poder asignarle a cada coordenada del espacio, que está «lleno» del campo, un número (por ejemplo, un campo real en matemáticas) y al ser perturbado el campo, en ese punto adquiere un nuevo valor, es decir, el campo tiene una nueva magnitud en ese punto en donde fue perturbado. En una teoría de campos, esta perturbación representa una partícula. Ahora bien, tenemos tres campos, el electromagnético, el fuerte y el débil, estos tres campos deben imaginarse de la misma manera, son independientes uno del otro y llenan todo el espacio. Hay que recalcar que sólo existen tres campos a diferencia de lo que se suele entender por campo en los primeros años de enseñanza en donde uno suele hacerse a la idea de que cada partícula genera su propio campo.

Por otro lado, obviando por un momento qué significa una perturbación del campo, las partículas «viven» en los campos, estas pueden o no interactuar con estos y lo pueden hacer con uno solo, con dos de ellos o con los tres, así un quark, por ejemplo, que tiene carga eléctrica y carga de color interactúa con el campo electromagnético y con el campo fuerte, o bien, visto desde la imagen del campo que permea todo el espacio, un quark es una perturbación del campo electromagnético y a la misma vez del fuerte.

En general, los fermiones son de dos tipos, los quarks (interactúan fuertemente) y los leptones (no experimentan interacción fuerte). La materia, en la forma en que la «conocemos» en la vida diaria, está formada de nucleones y electrones, un nucleón no es más que una partícula de las que forman el núcleo de un átomo, es decir, protones y neutrones, y a su vez, estos están formados de tres quarks cada uno los cuales están ligados mediante la interacción fuerte que resulta del intercambio de otras partículas, los gluones. Para poder observar o siquiera estudiar estas partículas se necesita mucha energía, de aquí que el experimento idóneo sea

el de hacer colisiones de núcleos atómicos.

Para conocer la estructura de la materia a nivel macroscópico, es deseable conocer en qué estado o fase se encuentra bajo ciertas condiciones termodinámicas. Un diagrama de fases nos permite estudiar bajo qué condiciones de presión y temperatura existe determinada fase de la materia, es decir, las propiedades termodinámicas de un sistema se muestran mejor en un *diagrama de fase* en un espacio de parámetros termodinámicos. Cada punto del diagrama corresponde a un estado termodinámico estable [3]. Una fase o estado en que se puede encontrar un sistema queda determinado por un parámetro de orden de manera que las fases de las que hablamos no necesariamente son estados físicos de la materia, sino que pueden ser fases «abstractas» como lo será el caso que nos ocupará este trabajo: fase de simetría quiral rota y restaurada.

Un modelo físico para describir un sistema debe de cumplir ciertas condiciones y en particular debe respetar ciertas simetrías, una de estas simetrías que se deben cumplir es la llamada quiral. Decimos que un objeto es quiral si no podemos distinguir si la imagen que observamos de este proviene de observarlo directamente o de su reflejo en un espejo. El que una simetría quiral se rompa o se restaure tiene consecuencias físicas que se resumen en el teorema de Goldstone y que involucra la aparición de los bosones de Goldstone [4, 5, 6].

La materia que experimenta estas fases está expuesta a condiciones extremas de densidad y de temperatura, condiciones que, de tal suerte, se presentan en las colisiones efectuadas en los LHC (*Large Hadron Collider*) y para representar de manera más precisa esta situación sería adecuado restringir el modelo a un volumen finito. En este caso existen varias maneras de hacerlo, una de ellas es incorporar una densidad de estados llamada *Multiple Reflection Expansion* (MRE), otra consiste en establecer condiciones de frontera.

En este trabajo presentamos un estudio del diagrama de fases de la QCD usando un modelo conocido como NJL en un volumen finito restringido a una forma esférica y cúbica mediante dos técnicas, la aproximación usando una densidad de estados MRE y mediante el establecimiento de condiciones a la frontera. Estos resultados están publicados en el artículo *Effects of a Finite Volume in the Phase Structure of QCD* [82] y como continuación a este trabajo publicado estudiamos el modelo NJL extendido al loop de Polyakov (PNJL) el cual incorpora una interacción del campo de los glouones, los resultados obtenidos restringidos a volumen finito MRE fueron publicados en el artículo *QCD phase diagram in a finite volume in the PNJL model* [83].

Generalidades

Como ya se ha mencionado, las propiedades termodinámicas de un sistema se pueden mostrar en un diagrama de fases el cual es un diagrama en el plano $\mu - T$ donde μ es el potencial químico y T la temperatura del sistema. La curva en este representa la frontera entre dos fases, es decir, ocurre una transición de fase. Estas transiciones de fase son singularidades termodinámicas del sistema, este sistema a considerar es materia que interactúa fuertemente descrita por la QCD y que se encuentra en equilibrio térmico y químico [7]. Por fase podemos considerar los estados de la materia como nos los muestra la experiencia diaria, es decir, sólido, líquido y gas. En particular a grandes densidades o altas temperaturas, o en ambos casos, en la materia hadrónica se define un estado de plasma de quarks y gluones (QGP) el cual es un sistema de quarks y gluones a densidad elevada y que se encuentra cerca del equilibrio térmico. Se considera casi como un gas ideal y que era predominante en el Universo en sus inicios (alrededor de 10^{-12} a 10^{-6} segundos). Conforme se fue enfriando el Universo hubo una transición de fase que llevó del QGP a la formación de hadrones.

Así, el plasma de quarks y gluones es un nuevo estado de la materia en condiciones extremas de temperatura y densidades y que se forma cuando los hadrones se disocian en los constituyentes que los forman (quarks y gluones) [8]. Este estado de la materia puede alcanzarse si las fuerzas de corto alcance de los nucleones pudieran superarse y éstos pudieran juntarse de modo que se fusionaran entre sí. Se propuso debía existir un plasma de quarks y gluones en el cual quarks y gluones ya no estaban confinados dentro de las dimensiones del nucleón, sino que estaban libres de moverse dentro de un volumen en el cual prevalecían ciertas condiciones de temperatura y/o densidad extremas [9]. Esto fue a fines de los años 70 y ya en 1991 [10] se mostró de manera indirecta mediante colisiones de sulfuro-tungsteno que la producción resultante de partículas Ξ^- relativas a la partícula $\bar{\Lambda}$ eran difíciles de explicar mediante modelos *non-QGP*, sólo la hadronización a partir de un QGP cerca del equilibrio podría explicar lo obtenido.

Por otro lado en el año 2000 [9] se mostró evidencia de «un nuevo estado de la materia encontrado en las colisiones de iones pesados en el ⁵ SPS » cuyas características son las predichas teóricamente como un plasma de quarks y gluones y concluyen que es necesario trabajar a más altas energías para completar la imagen y la caracterización de este posible QGP [9]. Acerca de las observaciones indirectas del QGP, de entre otros se puede revisar [9, 11, 12, 13, 14, 15].

La QCD es una teoría de campo gauge que describe las interacciones fuertes de

» ⁵SPS, *Super Proton Synchrotron* del CERN.

los quarks y los gluones y es la parte SU(3) del Modelo Estándar de la física de partículas⁶. En esta los quarks existen en tres *colores*, $N_c = 3$, y se dice que están en la representación fundamental del grupo SU(3) de color [16]. La QCD además es una teoría renormalizable (Apéndice E) y como todas las teorías de campo posee una constante de acoplamiento g que es una función de la escala de energía, $Q : g = g(Q)$. Una propiedad de la QCD, característica de las teorías gauge no-Abelianas⁷ es que la constante de acoplamiento tiende a cero con el inverso del logaritmo de la escala de energía. Cuando esta escala de energía tiende a infinito ocurre algo que se conoce como la propiedad de la *libertad asintótica* lo que implica que se utilicen teorías perturbativas sólo en altas energías, es decir, en procesos de transferencia de momentum altas o llamadas *hard processes*. Mediante la libertad asintótica en las teorías gauge no-Abelianas de las interacciones de las partículas elementales, Cabibbo y Parisi [17] interpretaron la temperatura de Hagedorn T_c como el límite en el cual, a partir de $T > T_c$, la materia hadrónica no podía existir. Esto implica que en un modelo de confinamiento de quarks existe una transición de fase de materia hadrónica a otra fase que después se denominó como fase de desconfinamiento. La temperatura de Hagedorn⁸ que es de alrededor de $T_H = 170 - 180$ MeV, implica una transición de fase de segundo orden entre la materia hadrónica y una fase de quark-gluón [8].

Cuando la escala de las energías disminuye entonces el valor de la constante de acoplamiento g se incrementa lo que lleva a que falle la teoría de perturbaciones como una expansión en series de potencias de $g^2(Q)$. Estos procesos *soft*, procesos de baja transferencia de momentum o de hadrones a bajas energías no se pueden estudiar mediante teorías de perturbaciones. La teoría de perturbaciones es irrelevante en física de hadrones a bajas energías [18]. Debido a esto último, se utilizan aproximaciones no-perturbativas de dos tipos: modelos que utilizan aproximaciones a la Lagrangiana de la QCD, o bien, una versión discretizada de la QCD conocida como *Lattice QCD* (LQCD).

Un diagrama de fases de la QCD describe situaciones como la región en el interior de una estrella de neutrones, esto se localiza en el diagrama donde la temperatura es baja y el potencial químico elevado. Esta región es de interés ya que tiene soluciones analíticas debido a la libertad asintótica de la QCD [19, 20]. Por otro lado,

⁶El Modelo Estándar es una teoría basada en la invariancia gauge SU(3)×SU(2)×U(1).

⁷Una teoría gauge es una teoría invariante ante ciertas transformaciones, éstas pueden ser conmutativas o no.

⁸La temperatura de Hagedorn se puede estimar a partir del espectro de las masas de hadrones y es una temperatura que el modelo de quarks predecía como límite para el cual los quarks podrían vagar libremente en el Universo. Esto antes de que se propusiera el concepto de libertad asintótica.

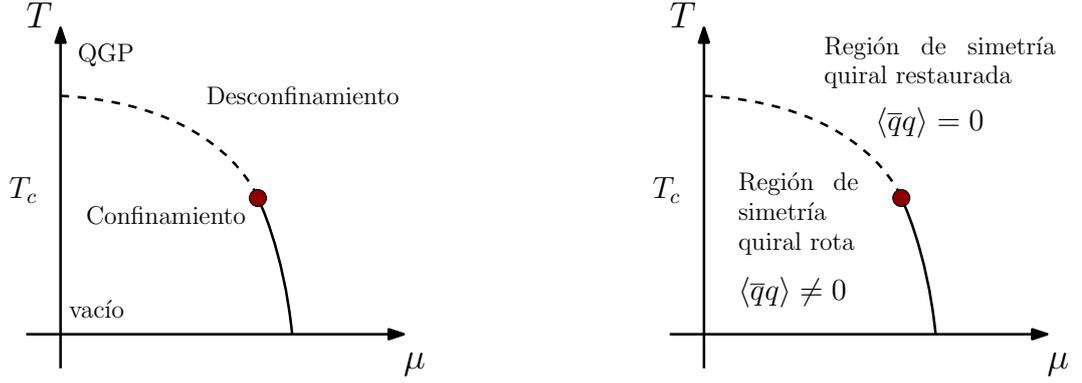


Figura 1.1: Bosquejo de Diagrama de Fases de la QCD para $m_q = 0$, en este caso se tiene una transición de fase de primer orden (línea continua) y una transición de fase de segundo orden (línea punteada). El lugar en que cambia el tipo de transición de fase se llama punto crítico (en color rojo). Izquierda, diagrama que representa las fases de confinamiento y desconfinamiento de quarks. Derecha, diagrama que representa las fases de simetría quiral rota y restaurada.

la región de temperaturas bajas de alrededor de 100 MeV y potencial químico de hasta 600 MeV representa situaciones de colisiones de iones pesados [7]. En esta región se cree que ocurre o termina la transición de fase de primer orden.

Acerca de las transiciones de fase se puede consultar [3, 7, 21, 22, 23, 24, 25] y en particular siguiendo a [8], el Modelo Estándar de la física de partículas predice una transición de fase de QGP a materia hadrónica y ocurre a $T < 200$ MeV, esto se relaciona con el rompimiento espontáneo de la simetría quiral de la QCD. En una transición de fase de primer orden, el QGP se enfría antes de que se formen burbujas de gas de hadrones.

Sabiendo que el potencial químico bariónico típico μ_B es mucho menor que la masa bariónica típica $\mu_B \approx 45$ MeV y es despreciable al inicio del Universo, se puede usar LQCD a $\mu = 0$. Los resultados confirman que el confinamiento de quarks en los hadrones es un fenómeno estrictamente de bajas temperaturas y da fuerte evidencia de que la transición de fase de la QCD es un crossover. Simulaciones numéricas de LQCD indican que a $\mu \approx 0$ MeV, las dos transiciones de fase que son posibles en la QCD, el desconfinamiento y la restauración de la simetría quiral, ocurren esencialmente en el mismo punto.

A temperatura cero y densidades equivalentes a la densidad nuclear, los quarks y los gluones se encuentran confinados en hadrones, no existe algo como un quark o un gluón libre propagándose en el vacío (Figura 1.1, izquierda). La situación cambia al incrementarse la temperatura por encima de cierto valor crítico T_c , del orden de 150 MeV, donde se podría tener un gas de quarks y gluones libres, el

llamado plasma de quarks y gluones. La misma situación puede ocurrir a temperatura cero con densidades muy elevadas. La ocurrencia de este cambio de fase es muy importante desde el punto de vista conceptual ya que implica la existencia de un nuevo estado de la materia. En el modelo cosmológico estándar, este estado de la materia ocurrió entre un período de tiempo de $10^{-6} - 10^{-5}$ s después del Big-Bang. Puede ocurrir en los núcleos de las estrellas de neutrones y también puede ocurrir en las colisiones de iones pesados [18].

Para obtener este diagrama de fase de la QCD, como se mencionó arriba, en un régimen de bajas energías es necesario utilizar modelos que aproximan a la Lagrangiana de la QCD. Hay de este tipo de modelos que incluyen un término quiral en la Lagrangiana. Esto impone una característica sobresaliente de la física de bajas energías y se describe en el Teorema de Goldstone: la existencia de una partícula ligera, el pión. Esta partícula presumiblemente es el bosón de Goldstone el cual debía de tener masa-cero para el caso de tener quarks u y d con masa-cero. Una Lagrangiana debe cumplir ciertas simetrías de la física para ser considerada como una buena representación de un fenómeno, en particular debe respetar una simetría quiral. Así que al agregar un término a la Lagrangiana y ésta deje de ser simétrica con respecto a una transformación se dice la simetría se ha roto. El teorema de Goldstone (Capítulo 4) dice que cuando esto ocurre deberá aparecer una partícula con masa-cero. La correspondiente simetría rota es la quiral.

Un diagrama de fases queda determinado por un parámetro de orden, es decir, dependiendo del comportamiento de este se tienen posibles fases en el diagrama. Para el caso de una simetría quiral el parámetro de orden es un objeto llamado condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$ y las fases que este parámetro define son llamadas de simetría quiral rota y restaurada, cuando el condensado tiene un valor distinto de cero y cuando vale cero, respectivamente (Figura 1.1 derecha).

Lo anterior se complementa con la posible generación de un QGP logrado mediante colisiones de iones pesados como las que se observan en el LHC y que producen materia hadrónica muy caliente y posiblemente QGP. La transición de materia hadrónica a un QGP según [27] ocurre a $T_c \approx 140$ MeV y en el límite quiral a $T \approx 128$ MeV. Más aún, ayudados por las simulaciones de *Lattice-QCD* (LQCD) a temperatura finita se tiene una buena herramienta para investigar los patrones de las fases de la QCD. EL modelo NJL incorpora una simetría quiral a la QCD de dos sabores y su rompimiento espontáneo ocurre a $T < T_c$. Los grados de libertad de los gluones son «integrados» y remplazados por una interacción local de cuatro puntos de corrientes de color de quarks. Los piones aparecen como bosones de Goldstone en $T < T_c$ [28]. Las transiciones de fase tienen una

naturaleza dual: Los hadrones (color simple) se descomponen produciendo un desconfinamiento de quarks y gluones, esto es lo que se conoce como transición de fase de desconfinamiento. La masa de los quarks dinámicamente generada se vuelve cero, esto es lo que se conoce como la fase de restauración de simetría quiral. La LQCD da valores de T_c para $\mu = 0$ y $2 + 1$ sabores de quarks. Y estos resultados de la QCD no se pueden obtener para $\mu \neq 0$ [29].

Finalmente, se ha hablado de que en el diagrama de fases se observan dos tipos de transición de fase, llamadas de primer orden y *crossover* (o en su defecto, de segundo orden si se está considerando el caso ideal $m_q = 0$ o límite quiral, ver capítulo 6) y ya se mencionó que en la región de $\mu = 0$ el tipo de transición de fase es un *crossover* y que en situaciones de μ elevadas la transición de fase que ocurre es de primer orden. El punto en el que ocurre ese cambio en el tipo de transición de fase se llama *critical point*. Este hipotético punto recibe el nombre de *critical end point* (CEP) [30, 31, 32], en particular, si se considera la simetría quiral, $m_q = 0$, recibe el nombre de *tricritical point* (TCP)[33]. Hay señales experimentales de la existencia del CEP y están relacionadas con un incremento en la detección de ciertas partículas conocidas con strangelets, aquellas que poseen un quark s , es decir, en las transiciones de fase debido a ciertas circunstancias matemáticas se tiene un proceso que favorece la aparición de estas partículas, esta observable física es importante para verificar si el modelo describe al experimento.

Estructura

Una teoría cuántica de campos (QFT) queda descrita por una Lagrangiana que describe la dinámica de las partículas dependiendo del tipo de campo a estudiar. En el capítulo 2 se justifica el uso de estas QFT y en las secciones 2.1 y 2.2 se muestran las Lagrangianas de la Electrodinámica Cuántica (QED) y la Cromodinámica Cuántica (QCD), respectivamente.

Estas teorías son, o están construidas, a temperatura y densidad cero. Una *Thermal Field Theory* (TFT) es una QFT a temperatura finita. En el Capítulo 3 se muestra cómo construirla en general. Esto se logra primero definiendo la función de partición del sistema, sección 3.1, y luego equiparándola a una QFT mediante el formalismo de la *Path Integral* (sección 3.2) en donde es necesario utilizar una herramienta conocida como *formalismo de tiempo imaginario* (sección 3.3). En particular se obtiene la función de partición de los fermiones a temperatura finita (sección 3.4) la cual es el punto de partida para construir el diagrama de fase que estamos buscando.

En el capítulo 4 se hace un paréntesis para aclarar el concepto de rompimiento de simetrías el cual es fundamental para explicar el porqué a pesar de que ciertas

leyes o principios de la física deben cumplirse, aparentemente en la práctica no se cumplen.

En el capítulo 5 describimos y justificamos el uso generalizado que se le ha dado al modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) y su Lagrangiana para describir fermiones a pesar de que fue diseñado originalmente para describir nucleones. En la sección 5.2 se muestra la manera usual de obtener la función de partición usando la Lagrangiana del modelo NJL. Para esto se hace uso de la *aproximación del campo medio* (MFA por sus siglas en inglés). De aquí, en esta misma sección, se obtiene la ecuación de gap. Esta ecuación tiene un término, conocido como energía de punto cero, el cual diverge. El modelo NJL debido a su estructura es no-renormalizable, es decir, no es posible remover estas divergencias. De aquí que se requiera un proceso para *regularizarlas* y así poder resolverlas. En las secciones 5.3.1 y 5.3.2 se muestra cómo se regularizan estos términos utilizando dos tipos de esquema, UV-cutoff y regularización de tiempo propio (PTR), existen otros esquemas de regularización pero estudiar todos estos esquemas no es el objetivo de este trabajo. En el capítulo 6 se muestra cómo se construye el diagrama de fase y cómo se localiza el CEP. De aquí el siguiente paso es restringir el modelo a una situación en un volumen finito (capítulo 7) y lo mostramos de dos maneras, una es la densidad de estados MRE (sección 7.1) y la otra estableciendo condiciones a la frontera (sección 7.2). Para facilitar la lectura de este trabajo se dejaron dentro del apéndice final diversos tópicos que complementan las ideas expuestas en este trabajo.

Capítulo 2

Teoría Cuántica de Campos

Por qué una QFT?

Para estudiar interacciones de, y entre partículas, es necesario establecer qué es o cómo representar matemáticamente una partícula y además es necesario contar con un modelo capaz de describir la dinámica de estas partículas. De tal suerte que es posible asociar una partícula con un campo.¹ En particular vamos a estudiar partículas a nivel atómico por lo que es necesario tener una teoría que sea cuántica (Mecánica Cuántica), además se necesita que todo observador esté de acuerdo con lo que decimos acerca de éstas, es decir, que sea lo mismo para un observador en reposo y un observador en movimiento, así que estas partículas deben ser relativistas, en nuestro caso con respecto a la Relatividad Especial. Así, una teoría de campos que es cuántica y además invariante Lorentz es lo que llamamos una Teoría Cuántica de Campos (QFT).

En la actualidad cada tipo de fuerza es descrita mediante una QFT y el modo en que se hace es considerando que las interacciones entre las partículas están mediadas por el intercambio de una partícula virtual. Esta característica evita la problemática de la acción a distancia. Esto se puede ilustrar usando un diagrama

¹Una manera sistemática de hacerlo es partir de la definición de campo escalar real $\varphi(x)$ y, a partir de este, construir su Lagrangiana correspondiente \mathcal{L} . De las ecuaciones de movimiento que se obtienen se prueba que para cada valor de momento \mathbf{p} , este campo satisface la ecuación del oscilador armónico con frecuencia $\omega_{\mathbf{p}}$. Esto prueba que el campo escalar es libre (las frecuencias no se superponen). Cuando se cuantiza este sistema es necesario introducir dos operadores a^\dagger y a y una relación de conmutación entre éstos, la manera de hacerlo es con la Hamiltoniana H asociada a \mathcal{L} . Reescribiendo el campo φ , ahora con los operadores a^\dagger y a se tiene que es posible obtener los estados de energía definida. De aquí ya es posible obtener el espacio de eigenestados de H usando los operadores llamados (convenientemente) de ascenso y descenso a^\dagger y a . De aquí, es posible calcular la energía de cada estado y lo que se obtiene es que cada estado $|p\rangle$ del campo tiene energía $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ y esta es exactamente la definición de una partícula relativista.

de Feynman (Figura 2.1) el cual muestra la interacción de dos partículas mediante el intercambio de un fotón. Al ser emitido el fotón por la primera partícula, en este caso un electrón, y ser absorbido por la segunda partícula se transfiere un momentum entre ambos lo cual es en sí la fuerza de interacción entre estas partículas.

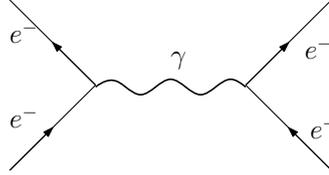


Figura 2.1: Diagrama que representa la dispersión de dos electrones e^- . En este diagrama el tiempo va de abajo hacia arriba y se muestra que la interacción de éstos se da mediante el intercambio de un fotón γ .

2.1. QED y Campo de Dirac

En una QFT para un campo escalar libre (apéndice B) se tiene que sus partículas son eléctricamente neutras y el *quanta* asociado es su propia antipartícula pero resulta ser que existen partículas/antipartículas con la misma masa, de aquí que exista la posibilidad de considerar dos grados de libertad para distinguirlas. Para considerar esto se utiliza una teoría en donde los campos son complejos y la distinción entre partícula y antipartícula se hace mediante un número cuántico que se conserva lo cual implica una simetría [5]. Al generalizar este campo complejo para campos con espín $1/2$, llamado campo espinorial de Dirac, se obtiene la base para trabajar las interacciones electromagnéticas y se resume en una teoría de campos o electrodinámica cuántica QED. En lo que sigue mencionamos los elementos que componen la Lagrangiana de esta QED.

La Lagrangiana de Dirac se puede interpretar a partir de los siguientes elementos, comenzando por el campo llamado espinor de Dirac ψ que es un objeto que tiene dos componentes llamados espinores de Weyl, w_L y w_R , convenientemente los índices vienen del inglés *left* y *right* [39]

$$\psi_a = \begin{pmatrix} w_L \\ w_R \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde $a = 1, \dots, 4$, es el índice espinorial y no suele escribirse a menos que se preste a confusión. Se definen las matrices de Dirac γ^μ , de 4×4 de la siguiente manera

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

con $i = 1, 2, 3$, la matriz identidad $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ y σ^i las matrices de Pauli (ecuación G.6). Estas matrices de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1} , \quad (2.3)$$

entonces este espinor de Dirac tiene la siguiente regla de transformación [4]

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \psi , \quad (2.4)$$

$$= e^{i\alpha} \psi , \quad (2.5)$$

siendo α independiente de las coordenadas x , con $\omega_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico y $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ una forma de escribir el álgebra de Lorentz. Más aún, si se define la matriz de quiralidad γ^5 este campo ψ se puede separar en una componente izquierda y una derecha, $\psi = \psi_I + \psi_D$ (Apéndice J) de modo que

$$\begin{aligned} \psi_I &= \begin{pmatrix} w_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5)\psi \\ \psi_D &= \begin{pmatrix} 0 \\ w_R \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5)\psi . \end{aligned} \quad (2.6)$$

También se define el espinor conjugado de Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. La Lagrangiana más sencilla que es posible escribir para este campo es de la forma [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi , \end{aligned} \quad (2.7)$$

esta es la Lagrangiana libre de Dirac. Este campo de Dirac consta de cuatro componentes reales las cuales describen una partícula cargada eléctricamente con espín 1/2, es decir con dos grados de libertad internos y de igual modo dos grados internos para su antipartícula.

Esta Lagrangiana es invariante ante transformaciones de fase globales $U(1)$ y para hacer que lo sea ante transformaciones de fase locales es necesario introducir una derivada a través de la sustitución mínima [34]

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \left(\partial_\mu + iqA_\mu \right) , \quad (2.8)$$

donde q es la carga del campo $\psi(x)$, esta sustitución garantiza una invariancia local y es llamada también transformación gauge [5]. El campo A_μ tiene la regla de transformación de fase local

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) . \quad (2.9)$$

De este modo se obtiene la Lagrangiana [4]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi , \quad (2.10)$$

donde el segundo término del RHS de la ecuación representa la interacción del fermión ψ con el campo electromagnético A_μ . Esta Lagrangiana es invariante bajo las transformaciones locales de fase del campo de Dirac ψ también conocidas como transformaciones gauge [4]

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hay que notar que no es posible agregar un término de masa para el campo A_μ ya que de este modo la Lagrangiana no sería invariante bajo las transformaciones locales (2.11), es decir, que al imponer invariancia local resultó en agregar un nuevo campo con masa-cero. En particular toda teoría que es invariante bajo estas transformaciones (2.11) se dice que es una teoría gauge.

Esta Lagrangiana de Dirac (ecuación 2.10) es función de campos clásicos, la versión cuantizada de los campos es en forma de operadores de creación y aniquilación del campo y se obtiene estableciendo relaciones de anticonmutación. En particular haber establecido la invariancia gauge resultó en la aparición del un bosón gauge cuyas propiedades experimentales son equivalentes a las del fotón [4].

Para completar el esquema se introduce la Lagrangiana de Maxwell² libre [5] $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es un tensor de fuerza del campo [5]. Así se tiene lo siguiente [39]

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m\bar{\psi}\psi . \quad (2.12)$$

Esta es la lagrangiana de la QED y lo anterior se resume en lo siguiente [34]: se busca un conjunto de transformaciones de fase globales que dejen invariante la Lagrangiana libre en cuestión lo que implica una cantidad que se conserva. De aquí estas transformaciones se generalizan a una invariancia de fase local mediante transformaciones gauge, de este procedimiento se puede observar la forma de la interacción.

2.2. La Lagrangiana de la QCD y sus características

Para la Electrodinámica Cuántica la forma de la interacción se obtiene de la teoría clásica de Maxwell y Lorentz pero para la interacción fuerte no existe alguna

²Mediante las ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange) de esta Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de Maxwell.

teoría clásica que pueda servir de guía para elaborar una teoría adecuada. Siendo así que es necesario postular interacciones y probarlas experimentalmente. Teóricamente se requiere que la teoría sea invariante-Lorentz y además local. Por local se quiere decir que la interacción involucra campos evaluados en el mismo punto, esto para evitar el problema de la acción a distancia.

Las otras dos interacciones son de naturaleza nuclear y son las llamadas *fuerte* y *débil*. Para interpretar la interacción que ocurre entre los nucleones (protones y neutrones) en 1935 Yukawa [35] propuso que la fuerza de interacción entre estos era, al igual que el electromagnetismo, descrita por un campo (partícula), pero en este caso el cuanto del campo debía tener masa, a diferencia de la masa-cero del fotón. Esto debido a que las fuerzas nucleares son de rango finito. La partícula se le llamó mesón π o pión (Figura 2.2). Con el descubrimiento de las partículas *extrañas* y la clasificación basada en el grupo SU(3), estos piones pasaron a ser un elemento de un multiplete y si el campo de un cuanto es en esencia diferente de la materia de cuantos, entonces el pión no debía aparecer en dicho multiplete. En los años 60 se propone el modelo de quarks [36, 37] en el que el pión aparece como un estado ligado, un par quark-antiquark, en este modelo la interacción fuerte no se da entre nucleones sino que se da entre quarks. Al tiempo existía evidencia de que los quarks poseen un número cuántico parecido a la carga eléctrica, excepto que tiene tres grados de libertad, es decir, tres tipos de carga (llamada «de color») además se proponía que los quarks no pueden ser observados de manera libre, la razón es que no es posible que existan estados con este número cuántico distinto de cero. Este número cuántico se conoce como el color y los hay rojo, azul y verde. De aquí que se proponga que el color da lugar a un campo cuántico sin masa y de spin 1, los quarks interactúan en este campo y los cuantos se llaman gluones, la teoría que describe la dinámica de este campo es la Cromodinámica Cuántica (QCD).

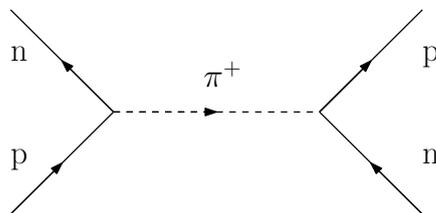


Figura 2.2: Diagrama de Feynman que muestra el intercambio de un cuanto del campo fuerte, en este caso un pión π^+ , entre un protón y un neutrón como lo propuso Yukawa.

En la QCD se considera que el color es como la carga eléctrica y da lugar a un campo dinámico con un cuanto de masa-cero análogo al fotón de la QED, este

cuanto es el gluón. Así como la interacción electrón-electrón se realiza mediante el intercambio de un fotón, la interacción quark-quark se realiza mediante el intercambio de un gluón. La diferencia es que los fotones no están cargados eléctricamente y por otro lado, debido a que la carga de color es una cantidad de tres componentes se tiene que los gluones acarrean carga de color y es de 8 tipos diferentes.

La QCD esta basada en dos premisas [4], la descripción de las interacciones fuertes proviene de una teoría local gauge y que la simetría debe ser una del tipo SU(3) exacta basada en los grados de libertad del color que acarrean los quarks y los gluones. Se asume también que los gluones «ven» color pero no sabor de modo que cada uno de los diferentes sabores de los quarks experimenta la misma interacción fuerte, excepto a lo debido a las diferencias de masa de estos.

Para comenzar una introducción acerca de una teoría que describa las interacciones fuertes se comienza por considerar que los nucleones y las demás partículas como el pión son en realidad estados ligados de partículas fundamentales (fermiones con espín 1/2) llamadas quarks. De estos quarks hay seis tipos diferentes o sabores y estos se distinguen por su masa y su carga eléctrica. Bajo este modelo, los hadrones están formados de estados ligados de tres quarks (bariones) o de dos quarks (mesones). Sumado a esto se tiene la teoría del color propuesta por Han, siendo este color una simetría gauge propuesta por Nambu y Greenberg en 1965 [38] donde se establece que además de los grados de libertad (g.l.) del espacio y del espín, los quarks poseen otro: el color y éste es de tres diferentes tipos denominados rojo, verde y azul. Para formular la Cromodinámica Cuántica (QCD) se hace una analogía con la Electrodinámica Cuántica (QED) comenzando con la conservación del color en similitud con la conservación de la carga eléctrica.

Siguiendo de cerca a Mandl [34], en la teoría del color el operador del color \hat{F} actúa sobre la función de onda del quark y este operador queda definido mediante matrices Hermitianas de 3×3 que resultan ser las matrices de Gell-Mann (G.9) y se escribe como

$$F_i = \frac{\lambda_i}{2} ; \quad i = 1, \dots, 8 . \quad (2.13)$$

En seguida se busca una transformación de simetría que de lugar a la conservación de la carga del color y para esto se parte de la Lagrangiana para el quark libre (ecuación 2.7), en este caso para cada color c y cada sabor f

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_r^f (i\cancel{\partial} - m_f) \Psi_r^f + \bar{\Psi}_g^f (i\cancel{\partial} - m_f) \Psi_g^f + \bar{\Psi}_b^f (i\cancel{\partial} - m_f) \Psi_b^f , \quad (2.14)$$

donde los índices de sabor $f = u, d, s, c, b, t$ corresponden a los quarks *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* y *top* (los últimos dos antes llamados *beauty* y *true*). En

delante estos índices se omiten por simplicidad a menos que se preste a confusión. El campo Ψ^f corresponde a los quarks de sabor y color f y c de la siguiente manera

$$\Psi^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f(x) \\ \psi_g^f(x) \\ \psi_b^f(x) \end{pmatrix} ; \quad \bar{\Psi}^f = \left(\bar{\psi}_r^f(x) \quad \bar{\psi}_g^f(x) \quad \bar{\psi}_b^f(x) \right) , \quad (2.15)$$

en forma compacta esta Lagrangiana (2.14) se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\rlap{-}/\partial - m) \Psi . \quad (2.16)$$

La conservación del color proviene de la invariancia de (2.16) bajo transformaciones de fase globales (G.7)

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha_a \lambda_a / 2} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha_a \lambda_a / 2} , \end{aligned} \quad (2.17)$$

que siguiendo el camino establecido por la QED se extiende esta simetría a transformaciones de fase locales (simetría gauge) SU(3) haciendo

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{ig_s \alpha_a \lambda_a / 2} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-ig_s \alpha_a \lambda_a / 2} , \end{aligned} \quad (2.18)$$

con g_s la constante de acoplamiento siendo un número real que es conocido como la carga del color, $\alpha_a(x)$ los parámetros reales (funciones reales) explícitamente indicando su carácter local en x y $a = 1, \dots, 8$. Así mismo remplazando la derivada ∂_μ por la derivada covariante

$$D^\mu \psi = \left[\partial^\mu + ig_s \frac{\lambda_a}{2} A_a^\mu \right] \psi , \quad (2.19)$$

en la Lagrangiana (2.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi}(x) [i\rlap{-}/\partial - m] \Psi , \\ &= \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I \end{aligned} \quad (2.20)$$

en donde la Lagrangiana de interacción es

$$\mathcal{L}_I = -g_s \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi A_a^\mu \quad (2.21)$$

y es de notar que aparece un nuevo campo, A_a^μ , el cual es un campo real gauge llamado gluón, es decir, extender la teoría libre a una interacción local con el campo en el que «vive» implica la introducción de un campo de interacción que en este caso es el campo A_a^μ y es llamado gluónico.

Esta Lagrangiana describe quarks y su interacción con el campo de los gluones (q - g) y para una completa descripción hace falta la interacción gluón-gluón

(g - g), ésta se obtiene, nuevamente, de una analogía con la QED en la que la auto-interacción del campo es $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, así que para la QCD se tiene que la Lagrangiana del gluón libre es

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G_a^{\mu\nu} , \quad (2.22)$$

donde

$$G_a^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu} + g_s f_{abc} A_b^{\mu\nu} A_c^{\mu\nu} \quad (2.23)$$

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\nu A_a^\mu - \partial^\mu A_a^\nu . \quad (2.24)$$

Finalmente la Lagrangiana de la Cromodinámica Cuántica es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}[i\not{D} - m]\Psi - \frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G_a^{\mu\nu} . \quad (2.25)$$

El segundo término del RHS de la ecuación (2.25), o bien, la ecuación (2.22) en forma explícita es

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{a\mu\nu}F_a^{\mu\nu} + g_s f_{abc} A_{a\mu} A_{b\nu} \partial^\mu A_c^\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f_{abc} f_{ade} A_b^\mu A_c^\nu A_{d\mu} A_{e\nu} , \quad (2.26)$$

y se observa que contiene la interacción de los ocho gluones de espín 1, estos gluones tienen carga de color no-cero y por tanto no pueden observarse como partículas libres debido al confinamiento de color. También se presenta la interacción g - g y esto genera vértices de tres y cuatro puntos (términos 2 y 3 del RHS de la ecuación). Otra característica fundamental es que la QCD es independiente del sabor, es decir, la fuerza y la forma de las interacciones q - g son independientes del sabor del quark. Esto tiene consecuencias para los quarks u y d ya que tienen casi la misma masa. En ciertas ocasiones, por simplicidad se considera, y en este trabajo se hará, que tienen la misma masa, a esto se le llama simetría de isospín y resulta ser una muy buena aproximación.

Las invariancias de fase local mostradas, $U(1)$ y $SU(3)$, corresponden a las teorías de campos de las interacciones electromagnéticas y fuertes. Para completar el cuadro se requiere una teoría análoga para las interacciones débiles. Esta teoría y su Lagrangiana tiene invariancia local $SU(2)$. En la actualidad se ha logrado unificar esta interacción junto con la electromagnética, el resultado es la teoría *electrodébil* y su Lagrangiana es invariante $SU(2) \times U(1)$, tiene la forma

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} , \quad (2.27)$$

una interpretación de cada término de esta Lagrangiana está fuera del alcance de este trabajo, para una consulta a nivel básico se puede encontrar en los textos que cubren temas de teorías gauge ya citados [4, 5, 6, 34, 39], también en [40, 41] que lo tratan dentro del Modelo Estándar.

Capítulo 3

Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita

La mecánica cuántica es un conjunto de procedimientos para calcular los valores esperados de las cantidades físicas u observables $\langle \hat{A} \rangle$. En la misma dirección, la QFT es un conjunto de procedimientos para calcular valores esperados de campos $\langle \hat{\phi} \rangle$. En la *Thermal Field Theory* (TFT) el problema es determinar el valor promedio térmico de los campos, $\langle \hat{\phi} \rangle_\beta$, en ocasiones se dice que la TFT es una QFT en un *baño térmico* o una QFT a temperatura finita.

Cuando se considera un sistema, por ejemplo un gas de electrones, éste se ve afectado por los choques lo cual interviene con la temperatura. Lo que queremos considerar son procesos fundamentales cuando hay un *medio*, es decir, que se encuentran a cierta temperatura. Esta es la diferencia con la QFT en la que se consideran procesos a temperatura cero.

En esta sección se introduce formalmente la temperatura a una Teoría Cuántica de Campos y se presenta de manera sistemática. Primero se observa que en mecánica estadística existe una llamada función de partición Z la cual expresada en forma de logaritmo, $\ln Z$, aparece en todas las variables termodinámicas de un sistema térmico, es decir, todas las propiedades térmicas de un sistema se pueden escribir en términos de esta función de partición Z . Esta función Z resulta ser, matemáticamente hablando, idéntica salvo por un factor i , a la expresión para calcular la amplitud de probabilidad de transición de un estado a otro de la QFT. Esto se logra haciendo un cambio de variable conocido como el Formalismo del Tiempo Imaginario, una continuación analítica del tiempo *real* a un tiempo *imaginario* y que consiste en efectuar un cambio de variable de modo que la expresión original que se encuentra en un espacio de Minkowsky se traslada a un espacio Euclidiano.

Este cambio, como se mencionó líneas arriba, involucra igualar numéricamente un término de temperatura con un término temporal de manera que la QFT ahora

será función de la temperatura.

3.1. La Función de Partición Z de Fermiones y Bosones

Función de Partición Z

Supongamos un gas en equilibrio a temperatura T en donde podemos tomar una molécula del gas y considerarla como un sistema pequeño en contacto con un gas térmico a temperatura T compuesto de las demás moléculas del gas. Se define la función de partición de una molécula a partir del cálculo de la probabilidad P_r de encontrar una partícula en cualquiera de sus estados cuánticos r , en donde su energía vale E_r , es decir [42]

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} , \quad (3.1)$$

de aquí, la suma extendida a todos los estados o también llamada función de partición Z de la molécula es

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r} , \quad (3.2)$$

donde E_r representa el valor de la energía de un estado particular y el parámetro $1/\beta$ se define como $1/\beta = kT$ en donde la magnitud T así definida proporciona una medida de la energía en unidades de la magnitud k . Este parámetro T se denomina temperatura absoluta del sistema en consideración.

La función de partición es una cantidad útil ya que de ésta se pueden obtener todas las propiedades termodinámicas de un sistema, por ejemplo, de la definición de probabilidad

$$P = \frac{n_i}{N} , \quad (3.3)$$

al multiplicar por la energía E_i y sumando sobre todos los estados i se puede calcular el valor promedio de la energía $\langle E \rangle$ (Apéndice K)

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i n_i E_i}{N} = \frac{\sum_i e^{-\beta E_i} E_i}{Z} , \quad (3.4)$$

que en forma compacta se puede escribir como

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z . \quad (3.5)$$

Así mismo la presión P se define como

$$P = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} , \quad (3.6)$$

donde la cantidad $\Omega = -T \ln Z$ recibe el nombre de potencial termodinámico. Para más propiedades se puede revisar [43].

La definición de Z se puede extender a [18]

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr} e^{-\beta H}, \quad (3.7)$$

donde $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ y $\langle n|n\rangle = 1$. Para el segundo y tercer término de la ecuación anterior se usa el hecho de que $f(\hat{A})|n\rangle = f(a)|n\rangle$, entonces tiene sentido decir

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_n \langle n | e^{-\beta E_n} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (3.8)$$

De manera natural en la ecuación anterior se introduce el potencial químico μ a través del Hamiltoniano $H \rightarrow H - \mu \hat{N}$ el cual es el trabajo necesario para agregar una partícula al sistema, $\mu = dW/dN$ (para H y el operador número N ver Apéndice C ecuaciones C.24 y C.25)

$$\begin{aligned} (\hat{H} - \mu \hat{N}) |n\rangle &= \hat{H}|n\rangle - \mu \hat{N}|n\rangle \\ &= n\hbar\omega |n\rangle - \mu n |n\rangle \\ &= n(\hbar\omega - \mu) |n\rangle \\ &= n(E_n - \mu) |n\rangle, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y entonces,

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\hbar\omega - \mu)n}. \quad (3.10)$$

La Función de Partición de Bosones y Fermiones

De manera general, para la función de partición (3.8) utilizando la relación para la energía de una partícula en el estado n dada por $E = \hbar\omega(n + 1/2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta \hbar\omega(n+1/2)} \\ &= e^{-\beta \hbar\omega/2} \sum_n e^{-\beta \hbar\omega n} \\ &= e^{-\beta \hbar\omega/2} (1 + e^{-\beta \hbar\omega} + e^{-2\beta \hbar\omega} + e^{-3\beta \hbar\omega} + \dots), \end{aligned}$$

esta última es una serie geométrica s_n en la que la razón r es $r = e^{-\beta \hbar\omega} \ll 1$, luego $s_n = 1/(1 - r)$, así

$$Z = e^{-\beta \hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}, \quad (3.11)$$

esta es la función de partición para los bosones (tiene la forma de la distribución de Bose-Einstein). Si se considera el potencial químico μ , usando (3.10) y despreciando el término de energía del vacío se tiene que

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\hbar\omega - \mu)}} . \quad (3.12)$$

De igual modo para los fermiones que, por el Principio de Exclusión, sólo pueden tener dos estados, $n = 0$ y 1 , es decir, la energía de un fermión $E_n = n\hbar\omega$ tiene dos posibilidades, $E_0 = 0$ y $E_1 = \hbar\omega$, luego

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^1 e^{\beta\hbar E_n} = e^0 + e^{-\beta\hbar\omega} \\ Z_f &= 1 + e^{-\beta\hbar\omega} , \end{aligned} \quad (3.13)$$

y considerando el potencial químico μ es

$$Z_f = 1 + e^{-\beta(\hbar\omega - \mu)} . \quad (3.14)$$

Degeneración de estados

Estos dos últimos resultados, ecuaciones (3.11) y (3.13), son para un sólo tipo de energía, es decir, todas las partículas tienen energía $E = \hbar\omega$ en cada uno de los n estados posibles, pero existe el caso en el que diferentes estados poseen el mismo valor de energía (o momento p), cuando ocurre esto se le conoce como degeneración de estados. Lo anterior se puede ilustrar con el ejemplo del sistema de una partícula en una caja cúbica. Este problema se resuelve usando la ecuación de Schrödinger en donde las soluciones de energía son función de tres números cuánticos independientes n_x , n_y y n_z . En la caja cúbica para cada triplete $\{n_x, n_y, n_z\}$ hay un valor de energía y un valor de la función de onda de manera que el estado fundamental de mínima energía corresponde a la terna $E_{111} = \{1, 1, 1\}$ (Figura 3.1). El primer estado excitado, es decir, cuando uno de estos valores es 2, es $E_{112} = E_{121} = E_{211}$, este nivel tiene la misma energía y son tres estados diferentes, cuando ocurre esto se le llama degeneración del nivel de energía, que en este ejemplo es 3. Se define la densidad de estados (Ecuación F.6, Apéndice F) como

$$dN_{estados} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3\vec{p} . \quad (3.15)$$

además el número de estados por intervalo de energía es

$$\frac{dN_{est}}{dE} \equiv \text{degeneración} = g(E) . \quad (3.16)$$

Regresando al caso de la función de partición de bosones y fermiones si estamos hablando de un cierto valor de momento p_1 , encontramos una función de partición

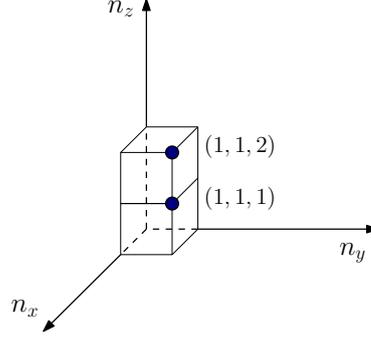


Figura 3.1: Sistema coordenado de los números cuánticos n_x , n_y y n_z . A partir de este sistema se construye una celda unitaria cúbica con los números cuánticos $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, \dots hasta llenar toda la región y construir una esfera de volumen $r^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$.

Z_1 , para otro valor de momento p_2 su respectiva Z_2 , entonces de la ecuación (3.12) con $\mu = 0$ se obtiene

$$Z_1 = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{p1}}} \quad , \quad Z_2 = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{p2}}} \quad .$$

En general, si consideramos todos los valores posibles de \mathbf{p} de una partícula, tendremos que

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{H}_{\mathbf{p}} \quad , \quad (3.17)$$

es decir, cada \hat{H} aporta un valor de energía por cada distinto \mathbf{p} y entonces se tiene que

$$\begin{aligned} Z &= \langle n | e^{-\beta \sum_j \hat{H}_j} | n \rangle = \langle n | e^{-\beta \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \dots} | n \rangle \\ &= \langle n | e^{-\beta \hat{H}_1} | n \rangle \langle n | e^{-\beta \hat{H}_2} | n \rangle \dots \\ &= Z_1 Z_2 \dots \quad , \end{aligned} \quad (3.18)$$

luego cada valor 1,2, ... representa un valor distinto de momento \mathbf{p} y podemos escribir la función de partición como un producto de éstas y a su vez el logaritmo de esta Z es la suma de estas funciones Z

$$Z = \prod_{\mathbf{p}} Z_{\mathbf{p}} \quad \longrightarrow \quad \ln Z = \sum_{\mathbf{p}} \ln Z_{\mathbf{p}} \quad , \quad (3.19)$$

donde cada estado con un valor particular \mathbf{p} , tiene una degeneración (3.15) y entonces se llega a

$$\ln Z = \int d^3\mathbf{p} \frac{V}{(2\pi)^3} \ln Z_{\mathbf{p}} \quad , \quad (3.20)$$

este último resultado para los bosones (3.12) es

$$\ln Z_b = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln \left[1 - e^{-\beta(E_p - \mu)} \right] , \quad (3.21)$$

y para los fermiones [43]

$$\ln Z = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)} \right] \quad (3.22)$$

3.2. El Formalismo de la Path Integral

Considerando el experimento de la doble rendija para electrones (Figura 3.2), la amplitud de probabilidad de transición de que el electrón inicie en el punto i y pase por el punto 1 se denota como $\langle 1|i\rangle$, y como $\langle f|1\rangle$ la amplitud de que pase por 1 y termine en f (ecuación A.14 del Apéndice A), de igual modo para el caso en el que la partícula haga el recorrido $i \rightarrow 2 \rightarrow f$, así, la amplitud de probabilidad de realizar la trayectoria de i a f es (ver ecuación A.14)

$$\langle f|i\rangle = \langle f|1\rangle\langle 1|i\rangle + \langle f|2\rangle\langle 2|i\rangle . \quad (3.23)$$

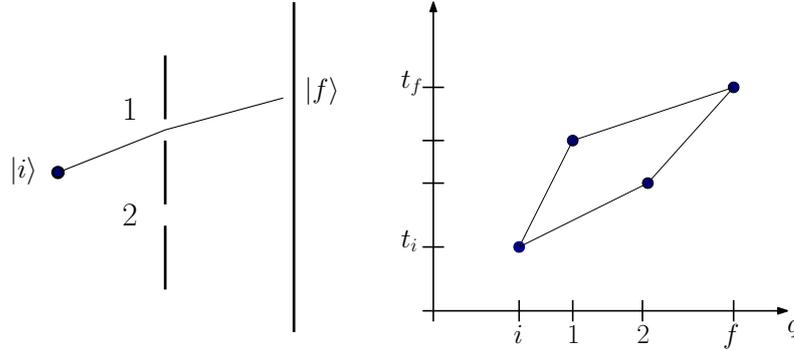


Figura 3.2: Izquierda, diagrama de la doble rendija. En la figura se representa la trayectoria que seguiría una partícula que inicia en i , pasa por la rendija 1 y termina en el punto f . Derecha, misma situación en un diagrama espacio q vs t . La amplitud de probabilidad de efectuar una transición desde el estado inicial i al estado final f es la suma de las amplitudes de transición de las dos posibles trayectorias $\langle f|i\rangle = \langle f|1\rangle\langle 1|i\rangle + \langle f|2\rangle\langle 2|i\rangle$.

De manera general, consideremos un sistema que inicialmente se encuentra en q_i al tiempo t_i , es decir, se encuentra en el estado $|q_i t_i\rangle$. La amplitud de probabilidad de efectuar una transición al estado $|q_f t_f\rangle$ es

$$A = \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle , \quad (3.24)$$

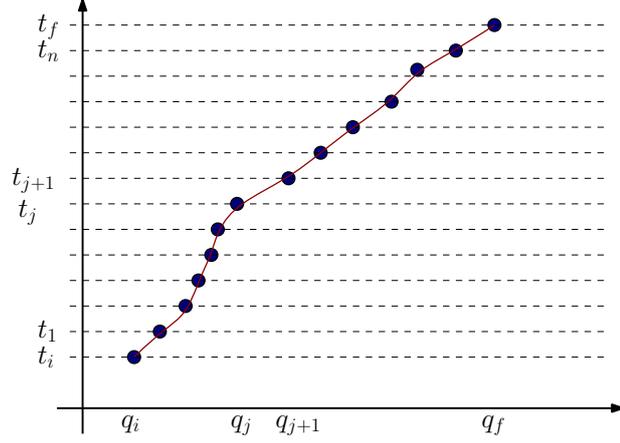


Figura 3.3: Propagación de una sola trayectoria desde el punto (q_i, t_i) hasta (q_f, t_f)

esta expresión se conoce también como el propagador y el objetivo es expresarlo como una integral de camino (*path integral*).

Primeramente dividamos el intervalo de tiempo $t_f - t_i$ en $n+1$ intervalos τ (Figura 3.3) de manera que el intervalo de tiempo es

$$\tau = t_{j+1} - t_j \quad , \quad (3.25)$$

entonces la amplitud de transición viene dada por

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle &= \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \\ &\quad \times \langle q_{n-1} t_{n-1} | \dots | q_1 t_1 \rangle \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle \quad , \end{aligned} \quad (3.26)$$

esta integral es sobre todas las posibles trayectorias.

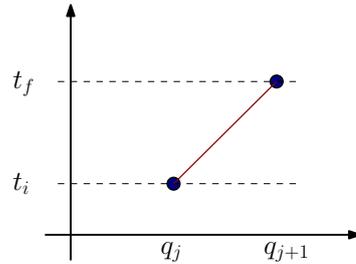


Figura 3.4: Una trayectoria arbitraria.

Para una trayectoria arbitraria (Figura 3.4) se tiene que (ver Apéndice D, ecuación (D.2))

$$\langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\tau} | q_j \rangle \quad , \quad (3.27)$$

que se resuelve desarrollando en serie

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\tau} | q_j \rangle \\ &\approx \langle q_{j+1} | (1 - i\hat{H}\tau) | q_j \rangle \\ &= \langle q_{j+1} | 1 | q_j \rangle - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle \quad , \end{aligned} \quad (3.28)$$

por ser ortogonales (ecuación A.7 del Apéndice A), el primer término del RHS de la ecuación es

$$\langle q_{j+1}|q_j\rangle = \delta(q_{j+1} - q_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} dp_j \quad , \quad (3.29)$$

y en el segundo término del RHS la Hamiltoniana es $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(q)$, luego la ecuación (3.28) es

$$\langle q_{j+1}|q_j\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} dp_j - i\tau \left\langle q_{j+1} \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(q) \right| q_j \right\rangle \quad . \quad (3.30)$$

Para el término $\left\langle q_{j+1} \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(q) \right| q_j \right\rangle$ se tiene que (ver Apéndice M)

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_j \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^2}{2m} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \\ \langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle &= \bar{V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} dp \quad , \end{aligned} \quad (3.31)$$

Así la ecuación (3.30) es

$$\langle q_{j+1}|q_j\rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ip(q_{j+1}-q_j)} \left[1 - i\tau \left(\frac{p^2}{2m} + \bar{V} \right) \right] \quad , \quad (3.32)$$

el término entre corchetes es la expansión de la exponencial y el término entre paréntesis es la definición de la Hamiltoniana, así que

$$\langle q_{j+1}|q_j\rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ip(q_{j+1}-q_j)} e^{-i\tau H} \quad , \quad (3.33)$$

esta es la amplitud de transición de un segmento de la trayectoria q_j a q_{j+1} . Si tomamos todos los segmentos, es decir, la ecuación (3.26) es

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int [Dq] [Dp] e^{ip(q_{j+1}-q_j)-i\tau H} \quad , \quad (3.34)$$

donde $[Dq] \equiv dq_1 dq_2 \dots dq_n$ y $[Dp] \equiv \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \dots \frac{dp_n}{2\pi}$, luego

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle &= \int [Dq] [Dp] \exp \left[i\tau \left(p \frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} - H \right) \right] \\ &= \int [Dq] [Dp] \exp \left[i\tau (p\dot{q} - H) \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.35)$$

en el último paso se hizo un paso al límite para obtener \dot{q} . De la hipótesis $H = p^2/2m - V$, calculamos una integral con respecto a dp y tomamos una j en particular, luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left[i\tau p_j \dot{q}_j - \frac{p_j^2}{2m} - V(q_j) \right] &= \frac{1}{2\pi} e^{-i\tau V(q_j)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \\
&\times \exp \left[-\frac{i\tau}{2m} (p_j^2 - 2m\dot{q}_j p_j + (m\dot{q}_j)^2 - (m\dot{q}_j)^2) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-i\tau V(q_j) + i\tau m\dot{q}_j^2/2} \int dp \exp \left[-\frac{i\tau}{2m} (p - m\dot{q})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp \left[i\tau \frac{1}{2} m\dot{q}_j^2 - i\tau V(q_j) \right] \int dp \exp \left[-\frac{i\tau}{2m} (p - m\dot{q})^2 \right] ,
\end{aligned}$$

la integral de la derecha, salvo el imaginario i , es de la forma de una integral gaussiana $\int e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{(\pi/\alpha)}$, y ésta al ser constante la renombramos como N_o . Finalmente, habíamos elegido un intervalo τ por lo que regresamos a $\tau \rightarrow dt$, para obtener

$$= \frac{1}{2\pi} N_o \exp \left\{ i \int dt \left[\frac{1}{2} m\dot{q}_j^2 - V(q_j) \right] \right\} , \tag{3.36}$$

y si barremos con todos los puntos j llegamos a

$$\begin{aligned}
\langle q_f | q_i \rangle &= N_o \int [Dq] \exp \left[i \int dt L \right] \\
\langle q_f | q_i \rangle &= N_o \int [Dq] e^{iS} ,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

que es la amplitud de transición.

3.3. Formalismo de Tiempo Imaginario

De la expresión para la amplitud de probabilidad de transición de un estado inicial a uno final (3.27)

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | q_i \rangle , \tag{3.38}$$

si $U(t_f - t_i) = e^{-iH(t_f - t_i)}$ es el operador de evolución temporal y consideramos una transición desde un estado inicial hacia el mismo estado, es decir, como si regresara al mismo estado lo que obtenemos es una expresión que en su forma es similar al concepto de función de partición Z

$$\langle q_i t_f | q_i t_i \rangle = \langle q_i | e^{-iH(t_f - t_i)} | q_i \rangle \longrightarrow Z , \tag{3.39}$$

de aquí comparando la ecuación (3.8) con la definición de función de partición $Z = \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle$ se observa la similitud entre $e^{-\beta H}$ y e^{-itH} cuando hacemos lo siguiente:

$$e^{-\beta H} = e^{-i(-i\beta)H} = e^{-itH} \text{ (Func. } Z) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-iH\tau} \text{ (Transic. de estados)} \tag{3.40}$$

con $t = -i\beta$ y $\tau = t_f - t_i$. A este proceso se le conoce como el formalismo del tiempo imaginario. A grandes rasgos este formalismo consiste en reescribir la expresión que está en el espacio de Minkowsky en su equivalente Euclidiana y para esto partimos de la métrica $s^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$ y si usamos $t = -i\beta$ escrita como

$$t = -i\tau , \quad (3.41)$$

con $\beta = \tau$, de aquí se obtiene una métrica Euclidiana ya que

$$s^2 = -(\tau^2 + \mathbf{x}^2) . \quad (3.42)$$

La ventaja de este cambio de variable es que se puede utilizar todo lo que sabemos acerca de la métrica Euclidiana salvo por el signo. En resumen lo que se hizo fue hacer una transformación $t \rightarrow it$ y a este nuevo tiempo imaginario que llamamos τ permite hacer una conexión entre el tiempo t y la temperatura $\beta = 1/T$.

Con lo anterior podemos escribir (3.37) para un campo φ como

$$Z = \int [D\varphi] e^{i \int \mathcal{L} d^4x} , \quad (3.43)$$

haciendo

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow it = \tau \\ t &= -i\tau \\ dt &= -id\tau , \end{aligned} \quad (3.44)$$

entonces

$$\int \mathcal{L} d^4x = \int \mathcal{L} dt d^3\mathbf{x} = \int \mathcal{L}_E(-d\tau) d^3\mathbf{x} , \quad (3.45)$$

con el subíndice E indicando que es en el espacio Euclidiano. Entonces para (3.43) se tiene que

$$Z = \int [D\varphi] e^{S_E} . \quad (3.46)$$

Con la acción Euclidiana

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_E . \quad (3.47)$$

3.4. Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita (TFT)

En esta sección se va a obtener la función de partición para un gas de fermiones en la teoría cuántica de campos.

Los fermiones quedan descritos por la Lagrangiana $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ y en el formalismo de tiempo imaginario es (ver ecuación N.9 del Apéndice N)

$$\mathcal{L}_E = \bar{\psi} \left[-\gamma^0 \partial_\tau + i\gamma^l \partial_l - m + \mu\gamma^0 \right] \psi , \quad (3.48)$$

entonces la función de partición (3.46) es

$$Z = N_o \int [D\bar{\psi}] [D\psi] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \left[-\gamma^0 \partial_\tau + i\gamma^l \partial_l - m + \mu\gamma^0 \right] \psi \right] \quad (3.49)$$

Para obtener la función de partición Z se escribe el campo en términos de una serie de Fourier

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \psi_{(\mathbf{p}, \omega_n)} \quad (3.50)$$

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n', \mathbf{p}'} e^{-i(\omega_{n'} \tau + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} \bar{\psi}_{(\mathbf{p}', \omega_{n'})} , \quad (3.51)$$

donde se usó $p_0 = i\omega_n$. Entonces el exponente de esta ecuación (3.49) es

$$\begin{aligned} S_E &= \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{V} \\ &\times \sum_{n', \mathbf{p}'} \sum_{n, \mathbf{p}} \bar{\psi}_{(\mathbf{p}', \omega_{n'})} e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \left[-\gamma^0 i\omega_n + i\gamma^l i p_l - m + \mu\gamma^0 \right] \psi_{(\mathbf{p}, \omega_n)} , \end{aligned} \quad (3.52)$$

cuyas integrales tienen soluciones de la siguiente forma

$$\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau} = \begin{cases} \beta & \text{si } \omega_n = \omega_{n'} \\ 0 & \text{si } \omega_n \neq \omega_{n'} \end{cases} , \quad (3.53)$$

y suponiendo un cubo de arista L

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{i(p_x - p'_x)x} = \begin{cases} V & \text{si } \mathbf{p} = \mathbf{p}' \\ 0 & \text{si } \mathbf{p} \neq \mathbf{p}' \end{cases} , \quad (3.54)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau} &= \beta \delta_{n n'} \\ \int d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} &= V \delta_{\mathbf{p} \mathbf{p}'} . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Estas soluciones en la ecuación (3.52) después de efectuar las sumas hacen que $n' \rightarrow n$ y $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ y entonces

$$Z = \int [D\bar{\psi}] [D\psi] e^{S_E} , \quad (3.56)$$

con

$$S_E = \beta \sum_{n, \mathbf{p}} \bar{\psi}_{(\omega_n, \mathbf{p})} \left[-\gamma^0 i\omega_n - \gamma^l p_l - m + \mu\gamma^0 \right] \psi_{(\omega_n, \mathbf{p})} . \quad (3.57)$$

Ahora bien, vamos a usar el siguiente resultado: para cualquier matriz cuadrada no-singular M se cumple que [4]

$$\int [D\bar{\psi}] [D\psi] e^{-\bar{\psi} M \psi} = \text{Det} M \quad , \quad (3.58)$$

así tenemos que, para una n y una \mathbf{p} fijas

$$Z = \text{Det} \left[\beta \left[(i\omega_n - \mu) \gamma^o + \gamma^l p_l + m \right] \right] \quad , \quad (3.59)$$

observando que β , al igual que las demás cantidades son matrices de 4×4 , es decir, es $\beta I_{4 \times 4}$, por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} Z &= \text{Det} [\beta I_{4 \times 4}] \text{Det} \left[(i\omega_n - \mu) \gamma^o + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x} + m \right] \\ &= \beta^4 \text{Det} \left[(i\omega_n - \mu) \gamma^o + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x} + m \right] \\ &= \beta^4 \left\{ \begin{array}{cccc} i\omega_n + m + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega_n + m + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_n + m - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega_n + m - \mu \end{array} \right\} \\ &+ \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & p_z & p_x - ip_y \\ 0 & 0 & p_x + ip_y & -p_z \\ -p_z & -(p_x - ip_y) & 0 & 0 \\ -(p_x + ip_y) & p_z & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (3.60) \end{aligned}$$

para el segundo término del RHS de la ecuación se utilizó $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x} = \gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y + \gamma^3 p_z$ siendo γ^a , $a = 1, 2, 3$ matrices de 4×4 . Después de resolver el determinante se obtiene

$$Z = \beta^4 \left[(i\omega_n - \mu)^2 - E_p^2 \right]^2 \quad , \quad (3.61)$$

con $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Del logaritmo de Z se puede obtener el potencial termodinámico, así el logaritmo de la función de partición (3.58) para todas las n y dejando pendiente la suma sobre todas las \mathbf{p} es

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \left[\int [D\bar{\psi}] [D\psi] e^{\bar{\psi} M \psi} \right] \\ &= \ln \left[\text{Det} M_1 \text{Det} M_2 \cdots \text{Det} M_n \right] \\ &= \sum_n \ln \left[\text{Det} M_n \right] \quad , \end{aligned}$$

entonces usando la solución del determinante, Ecuación (3.61), llegamos a

$$\ln Z = \sum_n \ln \beta^4 \left[(i\omega_n - \mu)^2 - E_p^2 \right]^2 \quad , \quad (3.62)$$

y para simplificar los cálculos se utiliza la propiedad $\ln x^n = n \ln x$ y entonces

$$\begin{aligned} \ln Z &= \sum_n \ln \beta^2 \left[(i\omega_n - \mu)^2 - E_p^2 \right] + \sum_n \ln \beta^2 \left[(i\omega_n - \mu)^2 - E_p^2 \right] \\ &= \sum_n \ln \left[\beta(i\omega_n - \mu + E_p) \beta(i\omega_n - \mu - E_p) \right] \\ &\quad + \sum_n \ln \left[\beta(i\omega_n - \mu + E_p) \beta(i\omega_n - \mu - E_p) \right] \end{aligned}$$

y como $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\omega_n$ entonces

$$\begin{aligned} &= \sum_n \ln \left[\beta(i\omega_n - \mu + E_p) \beta(-i\omega_n - \mu - E_p) \right] \\ &\quad + \sum_n \ln \left[\beta(i\omega_n - \mu + E_p) \beta(-i\omega_n - \mu - E_p) \right] \\ &= \sum_n \ln \beta^2 \left[(E_p - \mu)^2 - i^2 \omega_n^2 \right] + \sum_n \ln \beta^2 \left[(E_p + \mu)^2 - i^2 \omega_n^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Desde el punto de vista termodinámico se tiene la siguiente identidad

$$\ln \beta^2 \left[\omega_n^2 + (E_p \pm \mu)^2 \right] = \int_1^{\beta^2(E_p \pm \mu)^2} \frac{dx^2}{\beta^2 \omega_n^2 + x^2} \quad (3.64)$$

y tenemos una suma sobre n , entonces es

$$\sum_n \ln \beta^2 \left[\omega_n^2 + (E_p \pm \mu)^2 \right] = \int_1^{\beta^2(E_p \pm \mu)^2} \sum_n \frac{dx^2}{\beta^2 \omega_n^2 + x^2}, \quad (3.65)$$

con $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$, luego se usa la siguiente identidad [18]

$$\frac{1}{2x} \tanh \left(\frac{x}{2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2 \pi^2 + x^2}, \quad (3.66)$$

a su vez, la $\tanh x$ se puede reescribir como

$$\tanh \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}, \quad (3.67)$$

luego la ecuación (3.65) se resuelve

$$\begin{aligned} \sum_n \ln \beta^2 \left[\omega_n^2 + (E_p \pm \mu)^2 \right] &= \int_1^{\beta^2(E_p \pm \mu)^2} 2x \, dx \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{2}{e^x + 1} \right) \\ &= \beta(E_p \pm \mu) + 2 \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p \pm \mu)} \right] + \text{ctes.} \end{aligned} \quad (3.68)$$

luego la ecuación (3.63) es

$$\ln Z = \beta(E_p + \mu) + 2 \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)} \right] + \beta(E_p - \mu) + 2 \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)} \right] \quad (3.69)$$

Los términos constantes los omitimos ya que nos van a interesar cantidades que dependen de variables termodinámicas, y al no serlo después de derivar se convertirán en cero. Hay que recordar que teníamos una suma sobre \mathbf{p} pendiente que podemos reescribir como

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (3.70)$$

de esta manera terminamos el cálculo de $\ln Z$

$$\ln Z = V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 2 \left[\beta E_{\mathbf{p}} + \ln \left[1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)} \right] \right], \quad (3.71)$$

finalmente de

$$\Omega = -\frac{kT}{V} \ln Z, \quad (3.72)$$

con $k = 1$ la constante de Boltzmann en unidades naturales, $T = 1/\beta$ la temperatura y V el volumen se obtiene

$$\Omega = 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[E_{\mathbf{p}} + T \ln \left[1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)} \right] + T \ln \left[1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)} \right] \right], \quad (3.73)$$

hay que destacar el 2 que aparece fuera de la integral, son los grados de libertad (internos) de los fermiones, es el espín. El término $E_{\mathbf{p}}$ es la energía del vacío. Este es el potencial termodinámico Ω para los fermiones libres en una QFT. De este potencial termodinámico Ω se obtienen todas las propiedades termodinámicas de un gas libre de fermiones.

El problema cuando se incluyen las interacciones entre las partículas del gas implica una Lagrangiana compuesta de un término libre \mathcal{L}_o , que ya tratamos en esta sección, y un término de interacción \mathcal{L}_{int} de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_{int} \\ S &= \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}_o + \int d^4x \mathcal{L}_{int}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Calcular la función de partición utilizando una Lagrangiana de este tipo es un problema difícil de resolver y lo que se acostumbra es hacer una expansión en serie alrededor de un parámetro de manera que

$$Z = \int [D\varphi] e^{i(S_o + S_{int})} \quad (3.75)$$

$$Z = \int [D\varphi] e^{iS_o} \left[1 + \dots \right], \quad (3.76)$$

al hacer este desarrollo se tiene un 1 «más las contribuciones del campo φ ». En sí, el problema consiste en calcular, o determinar, la contribución a la función de partición Z de esta interacción y esto se hace mediante una aproximación y en muchos casos se utiliza la Teoría del Campo Medio (*Mean Field Approximation* MFA). En la Sección 5.2 se utiliza esta aproximación para obtener este potencial termodinámico a partir de una teoría con interacción.

Capítulo 4

Rompimiento de Simetrías

Una invariancia ante una transformación matemática se conoce como una simetría (Apéndice G), por ejemplo, decimos que una Lagrangiana es invariante ante una transformación (o es simétrica ante esa transformación), si al aplicar esta transformación, la nueva Lagrangiana tiene la misma forma matemática que la original, más aún, esta invariancia implica una ley de conservación o regla de selección. El resultado anterior se conoce como el Teorema de Noether: a toda simetría continua de una Lagrangiana en una teoría de campos le corresponde una cantidad conservada (apéndice H).

Existen varias maneras en que se manifiestan las simetrías, las principales son el modo Wigner, el modo Goldstone y el modo Higgs y lo que las diferencia es la estructura del vacío [4]. La importancia de lo anterior recae en la manera en que se construyen las QFT ya que éstas se construyen a partir del vacío. Cada estado de una QFT se construye a partir del vacío (el estado de menor energía) mediante la aplicación de los operadores de creación y aniquilación. De este modo, si una Lagrangiana es invariante ante una transformación de simetría U , entonces es del modo Wigner si también el vacío, $|0\rangle$, es invariante ante esa transformación, es decir, $U|0\rangle = |0\rangle$. Si, por otro lado, el vacío no es invariante, es decir, $U|0\rangle \neq |0\rangle$ se dice que es del modo Goldstone o del modo Higgs dependiendo de si la transformación U es global o local, respectivamente.

Acerca del vacío, cabe mencionar que cuando tratamos con una teoría de campos el campo es algo que existe siempre y llena todo el espacio y las perturbaciones en este campo es lo que llamamos las partículas. Ahora bien, este campo posee su energía mínima, es decir, el valor esperado del vacío (VEV). Como es un campo cuántico, entonces tiene pequeñas fluctuaciones (las partículas) de manera que todo campo A se puede escribir como

$$A = f + \text{VEV} , \tag{4.1}$$

donde f es el valor de la fluctuación alrededor del vacío, es decir, el valor del

campo (la partícula).

Más a detalle, si consideramos una Lagrangiana con interacción $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$ con el campo escalar real φ (ver Apéndice E ecuaciones (E.6) y (E.7)), esta Lagrangiana es invariante ante la transformación discreta $\varphi \rightarrow -\varphi$ y si graficamos el potencial $V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$ restringiendo a $\lambda > 0$ ya que de lo contrario la función no tiene un mínimo por lo que no habría estabilidad y la estabilidad de los sistemas es importante para construir teorías físicas. Entonces se tienen dos posibilidades, que $\mu^2 > 0$ y $\mu^2 < 0$ (Fig.4.1).

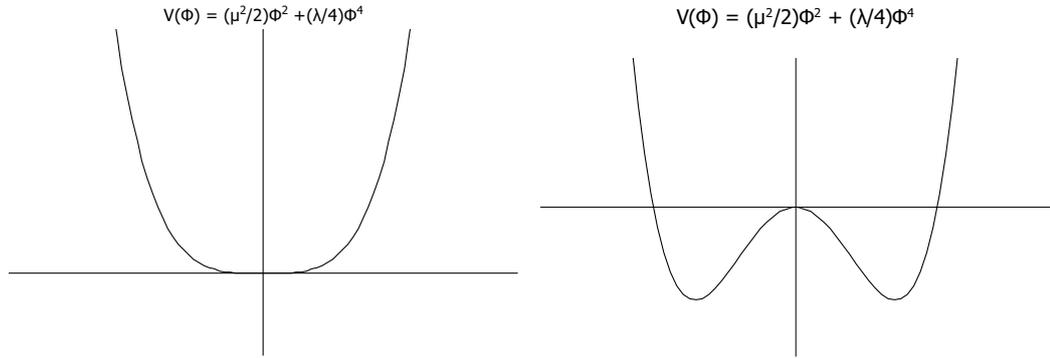


Figura 4.1: Potencial $V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$. a) Izquierda, para $\mu^2 > 0$. b) Derecha, cuando $\mu^2 < 0$.

En el primer caso, se tiene que μ^2 es un número real y si estudiamos los extremos del potencial minimizándolo, es decir $dV/d\varphi = 0$, se tiene que

$$\left. \frac{dV(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \right|_{\langle\varphi(x)\rangle} = 0 \quad (4.2)$$

de aquí vemos que $\mu^2\langle\varphi(x)\rangle + \lambda\langle\varphi(x)\rangle^3 = 0$ y entonces un punto crítico es $\langle\varphi(x)\rangle = 0$, y ya que $\langle\varphi(x)\rangle = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda} = \pm v$ con λ y $\mu^2 > 0$ entonces v es imaginario y esta solución no se considera. En este caso hay un mínimo, el cero, y éste es el vacío del modelo, es decir, $\langle\varphi(x)\rangle = 0$.

Dado un nivel de energía, si es no-degenerado el correspondiente eigenestado de energía es único e invariante bajo la transformación de simetría de la Lagrangiana. Por otro lado, si el nivel de energía es degenerado, entonces los eigenestados correspondientes no son invariantes ante la transformación [34], en particular si elegimos uno de estos estados degenerados como el estado fundamental, entonces este estado ya no será simétrico como sí lo es la Lagrangiana. Esta manera de obtener un estado fundamental (o vacío) se conoce como *rompimiento espontáneo*

de la simetría (RES). La asimetría no es debida a que se agregó un término extra a la Lagrangiana sino que es debida a la elección arbitraria de uno de los estados degenerados.

En el ejemplo anterior, cuando $\mu^2 > 0$ el vacío es cero y éste es simétrico con respecto a la transformación, de aquí que decimos que esta situación es el modo Wigner. Por otro lado, cuando $\mu^2 < 0$, el mínimo ya no está en cero sino que está en $\pm v = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ y hay un máximo en cero (ver Fig. 4.1b). Eligiendo el valor del vacío, por ejemplo v , entonces $\varphi = \phi + v$ (4.1), así aunque la Lagrangiana es invariante ante la transformación de paridad, al elegir el vacío esto ya no se cumple ya que el potencial V toma la forma de

$$V = \frac{\mu^2}{2}(\phi^2 + 2\phi v + v^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi^4 + 4\phi^3 v + 6\phi^2 v^2 + 4\phi v^3 + v^4), \quad (4.3)$$

y al hacer $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ se tiene que $V \neq V'$. En este caso, la Lagrangiana es invariante ante una transformación *global*, es decir, $\varphi \rightarrow -\varphi$ no depende de x , de ahí que sea global. Pero cuando $\mu^2 < 0$, y eligiendo un vacío resulta que \mathcal{L} ya no es invariante ante esta transformación, luego estamos en el modo Goldstone.

De entre lo que se puede concluir de lo anterior, lo más relevante con respecto a este trabajo es que existe una *transición de fase* de un vacío simétrico a un vacío degenerado y esto depende de un *parámetro de orden*, que en este caso es μ^2 [4]. En estas teorías QFT los términos de masa siempre están relacionados con el término de campo al cuadrado. Entonces de la ecuación (4.3) se observa que aparecieron dos términos de masa y son debidos a un rompimiento espontáneo de la simetría.

La Lagrangiana libre del campo complejo es [6]

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^* \varphi, \quad (4.4)$$

y se forma a partir de dos campos escalares φ_1 y φ_2 y se escribe como una suma de las dos Lagrangianas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2)$ en donde los campos φ_1 y φ_2 forman un complejo mediante las relaciones $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$ y $\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$.

Un campo escalar complejo es una combinación de campos escalares reales por lo que tiene las mismas propiedades bajo las transformaciones de Lorentz, este campo significa específicamente que son dos campos reales con la misma masa, es decir, el mismo coeficiente en su término cuadrático. Esto permite asociar a φ con una partícula y a φ^* con su antipartícula. El término $\varphi^* \varphi$ es un número real y esta \mathcal{L} aunque posee términos complejos, es una Lagrangiana real. Este

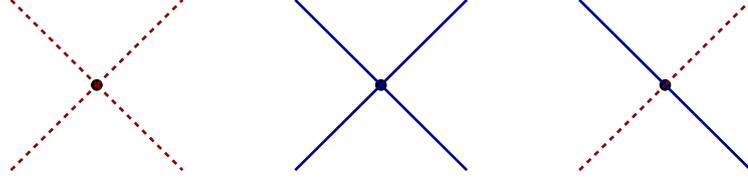


Figura 4.2: Interacción de cuatro campos en un punto x que representa cada término de $\varphi_1^4 + \varphi_2^4 + 2\varphi_1^2\varphi_2^2$. El orden de cada uno de los tres diagramas corresponde con cada término de la expresión del potencial. Entonces el campo φ_1^4 está representado como una interacción de cuatro campos φ_1 (líneas punteadas rojas) en el mismo punto x . De igual modo el campo φ_2 es la línea continua azul y el tercer diagrama son dos líneas punteadas rojas, es decir φ_1^2 y dos azules que son φ_2^2 .

término, $\varphi^*\varphi$, lo tomaremos como el módulo al cuadrado.

Esta Lagrangiana libre (4.4) posee simetría global $U(1)$, es decir, es invariante ante transformaciones de fase

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x), \quad (4.5)$$

y si introducimos un término de interacción tenemos

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2, \quad (4.6)$$

este término de interacción al desarrollarlo tenemos $(\varphi^*\varphi)^2 = \varphi_1^4 + \varphi_2^4 + 2\varphi_1^2\varphi_2^2$, es decir, son tres tipos de interacción, cuatro escalares del tipo 1 interaccionan en un mismo punto x , los mismo para el 2, y un término mezclado (Fig. 4.2).

Por comodidad definimos $\rho = +\sqrt{\varphi^*\varphi}$, y es positivo ya que lo definimos como el módulo. Entonces el potencial lo tenemos en la forma ya conocida $V(\rho) = \mu^2\rho^2 + \frac{\lambda}{2}\rho^4$ y de nuevo tenemos dos casos a considerar con $\lambda > 0$, $\mu^2 > 0$ y $\mu^2 < 0$. Para $\mu^2 > 0$ el mínimo del potencial $V(\rho)$ es $\partial_\rho V = 2\mu^2\rho + 2\lambda\rho^3 = 0$ por lo que $\rho = 0$ (Fig. 4.3) y como la Lagrangiana y el vacío satisfacen la simetría (4.5) decimos que la simetría está en el modo Wigner [4].

Para el caso de $\mu^2 < 0$ ocurre que el vacío es degenerado con un número infinito de puntos, el mínimo ocurre en un círculo de radio

$$\rho = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (4.7)$$

cuya ecuación del lugar geométrico $\rho = \sqrt{-\mu^2/\lambda} e^{i\alpha}$. Donde $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\mu^2/\lambda$, es decir, el mínimo ocurre en un círculo (Fig. 4.3).

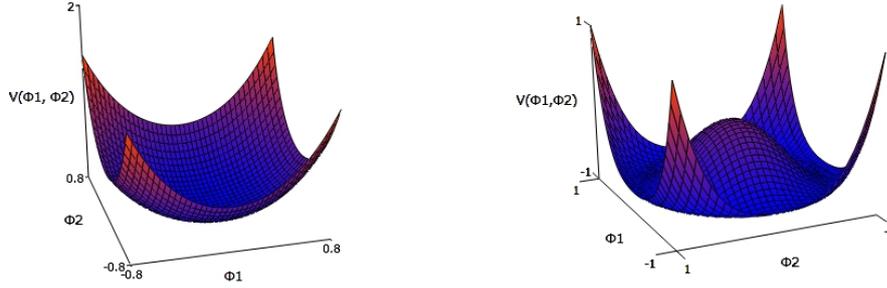


Figura 4.3: Izquierda, el potencial V tiene un mínimo en 0. Derecha, el potencial V tiene un mínimo en $|\varphi| = \rho$ y un máximo local en $\varphi = 0$

Se puede investigar el espectro de partículas haciendo una perturbación del vacío. Primero elegimos un punto como el vacío por lo que rompemos espontáneamente la simetría. Considerar una perturbación en el vacío implica un desplazamiento y esto equivale a generar partículas, y en este caso podemos desplazarnos en dos direcciones ortogonales: radial y angular. Lo que ocurre es que al desplazarnos en dirección angular no hay cambio de energía, entonces no hay trabajo efectuado, entonces desplazarse de esa manera genera partículas porque nos estamos desplazando del vacío pero éstas tienen masa-cero. A estas partículas se les llama bosones de Goldstone.

Por otro lado, desplazarse en la dirección radial implica un cambio de energía, es decir, una partícula con masa. Más a detalle: introducimos los campos $\sigma(x)$ y $\eta(x)$ para representar este desplazamiento a partir del vacío v , es decir [4]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x) + i\eta(x)) , \quad (4.8)$$

luego, en la Lagrangiana (4.6) se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) + \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \eta(x) \right] - \frac{\mu^2}{2} \left[v^2 + 2v\sigma(x) + \sigma^2(x) + \eta^2(x) \right] - \frac{\lambda}{2} \left[(v + \sigma(x))^4 + 2(v^2 + \sigma(x))^2 + \eta^4(x) \right] , \quad (4.9)$$

y para identificar a las partículas asociadas a los campos σ y η nos concentramos en los términos cuadráticos de éstos, es decir, σ^2 y η^2 . Al desarrollar (4.9) se obtiene el término de masa para el campo $\sigma(x)$ es $-\mu^2\sigma(x)/2$, es decir, $m = \sqrt{\rho^2\lambda}$, decimos que el campo $\sigma(x)$ ha adquirido masa espontáneamente o que la masa ha sido generada dinámicamente.

Por otro lado, no aparece asociado ningún término cuadrático del campo η , el que estos bosones no adquieran masa en el rompimiento espontáneo de la simetría se

establece como un teorema [4]:

Teo. *Teorema de Goldstone.* Si una transformación de simetría global y continua global se rompe espontáneamente, por cada generador del grupo continuo que se rompa aparecerá en la teoría un bosón sin masa. A estos bosones se les conoce como bosones de Goldstone.

Este teorema, se fundamenta en el hecho de que si la Lagrangiana es invariante ante una transformación de simetría entonces existe un espectro de estados degenerados, pero eso sólo se manifiesta cuando el vacío también es invariante ante esa transformación de simetría [44]. En caso de no ser invariante se dice que ocurrió un rompimiento espontáneo de la simetría.

En resumen, a partir de un campo escalar complejo, definido mediante dos campos reales degenerados en masa, se le incorpora una interacción de modo que el potencial cambia dando como resultado que la simetría ya no está presente en el estado fundamental y esto se manifiesta con un cambio en las masas. El hecho de que nunca se hayan observado bosones de Goldstone implica que al elaborar una teoría con rompimiento espontáneo de simetría, ésta teoría no debe generar bosones de Goldstone.

Capítulo 5

El Modelo de Nambu y Jona-Lasinio

En el Capítulo 3 se construyó el potencial termodinámico Ω para el campo de los fermiones (ecuación 3.73) del cual se pueden obtener propiedades termodinámicas de un sistema formado por estas partículas. Este potencial se obtuvo a partir de una Lagrangiana para los fermiones libres también llamada Lagrangiana de Dirac (ecuación 2.7). Para obtener una descripción más realista es necesario considerar que las partículas están interaccionando entre ellas y esto queda determinado agregando un término de interacción en la Lagrangiana libre. En esta sección se va a presentar la Lagrangiana del modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) y se va a utilizar como una alternativa para obtener el potencial termodinámico de los fermiones con interacción. Parte de este trabajo es estudiar el diagrama fases de un sistema de dos quarks que interactúan entre sí, este diagrama en el plano $\mu - T$ representa las condiciones necesarias para que se tenga una determinada fase ya sea de rompimiento de simetría quiral, o bien de restauración de esta simetría. El que exista o no esta simetría implica como veremos en la Sección 5.2 la existencia o no de un condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Este condensado es resultado de hacer una suposición muy importante en la solución del problema: existe un campo de fondo con el cual interaccionan las partículas del modelo, en nuestro caso los quarks q . Si existe el condensado, es decir, su valor es diferente de cero, $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, entonces las partículas, cuya masa original, m_o , interactuaron con el campo y tendrán un incremento en su masa a un nuevo valor $M = m_o - G\langle \bar{q}q \rangle$, esta masa m_o también es conocida como *bare mass* o *current quark mass*. Esta suposición de la existencia de un campo de fondo es una teoría conocida como Teoría del Campo Medio (*Mean Field Approximation* o MFA). Comenzamos la sección con el modelo NJL y en seguida se obtiene la función de partición usando MFA lo cual deja el problema listo para poder obtener el diagrama de fases en el siguiente capítulo.

5.1. Historia y su Lagrangiana

El modelo original de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) es una teoría dinámica de partículas elementales en la cual nucleones y mesones se derivan a partir de un campo espinorial fundamental [45]. En este se muestra una analogía entre las partículas de Dirac y las excitaciones de las quasi-partículas que aparecen en la teoría BCS de la superconductividad, ésta dice que se produce una energía de *gap* entre el estado base y los estados excitados de un superconductor. Este *gap* es debido a la interacción entre electrones mediada por los fonones y produce pares correlacionados de electrones con momentum opuesto.

Estas excitaciones en un superconductor están descritas por las ecuaciones $E\psi_{p+} = \epsilon_p\psi_{p+} + \varphi\psi_{-p-}^*$ y $E\psi_{-p-}^* = -\epsilon_p\psi_{-p-}^* + \varphi\psi_{p+}$, con φ una constante y ϵ_p la energía cinética. La analogía se hace evidente al observar la partícula de Dirac descrita con $E\psi_1 = \sigma \cdot p\psi_1 + m\psi_2$ y $E\psi_2 = -\sigma \cdot p\psi_2 + m\psi_1$. En la teoría BCS el parámetro del *gap* φ está determinado como una representación de la interacción electrón-electrón, es decir, esta energía φ es creada por la interacción. En el modelo NJL se asume que la masa de la partícula de Dirac es también debida a una interacción, en este caso, de fermiones desnudos (*bare mass*) de masa-cero. La Lagrangiana del modelo NJL es de la forma [46]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2], \quad (5.1)$$

donde se observa una interacción de cuatro nucleones ψ y además posee un grupo γ_5 -gauge. El modelo NJL puede construirse de modo que incorpora todas las simetrías globales de la QCD incluyendo la simetría quiral. Del rompimiento de esta última simetría ocurre la generación dinámica de la masa de los fermiones. Este modelo NJL también muestra el mecanismo del RES, sin embargo debido a que incorpora una interacción local, no confina quarks [47]. De aquí que la aplicación de éste se restrinja a fenómenos los cuales no dependan del mecanismo de confinamiento [48]. También se tiene que la interacción quark-antiquark puede ser atractiva y da lugar a un condensado de quarks en el vacío. El modelo NJL se construye incorporando una interacción de los quarks de cuatro puntos por lo que se convierte en un modelo no-renormalizable [49] (ver Apéndice E) por lo que debe de tratarse como una teoría efectiva. Es necesario especificar algún esquema de regularización para poder resolver las integrales divergentes que aparecen. En la práctica se introduce un cut-off para regularizar la teoría, es decir, se utiliza una longitud de escala característica para la interacción. Lo anterior resulta en que los resultados físicos obtenidos dependan del método de regularización y de ahí, de los parámetros utilizados en el modelo.

El condensado de quarks en la Lagrangiana del modelo NJL

La Lagrangiana de Dirac con masa cero tiene simetría quiral (Apéndice J) y entonces existen dobletes de partículas con paridades opuestas. Esto quiere decir que si tenemos un hadrón descrito por ψ_o entonces debería existir otro hadrón con la misma masa descrito por la función $Q_5\psi_o$ con paridad opuesta. Como esto no se observa se concluye que la simetría quiral debe de «romperse». Se dice que en la naturaleza nunca se observa y así es que hay que «romper espontáneamente» la simetría. En resumen, hay dos maneras de romper la simetría quiral, una de ellas es establecer una masa distinta de cero, $m \neq 0$, a esto se le conoce como rompimiento explícito de la simetría. Por otro lado, y es lo que nos interesa, queremos que nuestra teoría sea quiral pero que la simetría se rompa espontáneamente.

Sabemos del teorema de Goldstone (Capítulo 4) que si una transformación continua U rompe la simetría, por cada generador de esta U aparece un bosón sin masa. Esto ocurre cuando el vacío no es invariante ante dicha transformación U . En nuestro caso, al elegir el vacío de la teoría, si este vacío es invariante ante una transformación continua $U = e^{i\epsilon_a T_a}$ entonces $U|0\rangle = |0\rangle$, luego

$$\begin{aligned} e^{i\epsilon_a T_a}|0\rangle &= |0\rangle \\ (1 + i\epsilon_a T_a)|0\rangle &= |0\rangle \\ |0\rangle + i\epsilon_a T_a|0\rangle &= |0\rangle \\ \text{entonces } T_a|0\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

es decir, los generadores T_a de la transformación aniquilan al vacío. Por otro lado, si el vacío no es invariante ante la transformación, es decir, $U|0\rangle \neq |0\rangle$ se tiene que

$$\begin{aligned} e^{i\epsilon_a T_a}|0\rangle &\neq |0\rangle \\ \text{entonces } T_a|0\rangle &\neq 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

en este caso, los generadores de la transformación no aniquilan al vacío. De aquí se tiene que, por cada generador que no aniquile al vacío va a aparecer una partícula (un bosón) sin masa llamado bosón de Goldstone.

De la Lagrangiana del modelo NJL (ecuación 5.6), $\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi - \bar{\psi}m_o\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2]$ hay que elegir el vacío. Se considera que el vacío es por convención, es decir, al aplicar el operador de paridad al vacío se obtiene de nuevo el vacío, $P|0\rangle = |0\rangle$. De los posibles términos a elegir el cuarto del RHS de la ecuación no respeta paridad ya que

$$\begin{aligned}
P\langle 0|i\bar{\psi}\gamma^5\psi|0\rangle &= \langle 0|i\bar{\psi}\gamma^o\gamma^5\gamma^o\psi|0\rangle \\
&= -\langle 0|i\bar{\psi}\gamma^5\psi|0\rangle ,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

en la última igualdad se utilizó el hecho de que las matrices gamma anticonmutan y que $(\gamma^o)^2 = 1$, además de que $P\psi = \gamma^o\psi$ (Ecuación I.8 del Apéndice I). Por otro lado, el término $\bar{\psi}\psi$ si respeta paridad

$$\begin{aligned}
P\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle &= \langle 0|\bar{\psi}\gamma^o\gamma^o\psi|0\rangle \\
&= \langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle ,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

de aquí que a $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_o$ podemos tomarlo como el vacío y en particular se le llama el *condensado*. La interpretación que se da es que el vacío, que es el estado de menor energía, no está vacío, hay algo, y se le llama el condensado.

5.2. El Modelo NJL como una herramienta para construir un diagrama de fase de materia hadrónica

La Lagrangiana del modelo Nambu y Jona-Lasinio (NJL) en SU(2) para un campo de fermiones q es [46, 80]

$$\mathcal{L}_{NJL} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{int} , \tag{5.6}$$

donde \mathcal{L}_{Dirac} es la Lagrangiana de la ecuación de Dirac (2.7) y el término de interacción es \mathcal{L}_{int}

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q \tag{5.7}$$

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau q)^2] , \tag{5.8}$$

el campo q es el campo de los quarks y al estar trabajando en SU(2) es un doblete $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. El término \mathcal{L}_{int} consiste de una interacción de cuatro campos en un sólo punto relacionados a una constante efectiva de acoplamiento fuerte G . $m = \text{diag}[m_u, m_d]$ es la matriz de masas. Cuando se dice que se tiene simetría exacta de isospín, entonces $m_u = m_d = m$.

Para obtener la función de partición Z y después el potencial termodinámico Ω a partir de esta Lagrangiana con interacción (5.6) se resuelve (3.75), es decir,

$$Z = \int [D\bar{q}][Dq] e^{i(S_o + S_{int})} = \int [D\bar{q}][Dq] e^{iS_o} e^{iS_{int}} , \tag{5.9}$$

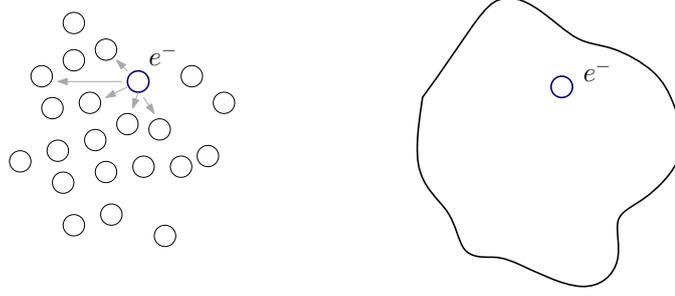


Figura 5.1: Izquierda, un electrón interacciona con cada una de las partículas. Derecha, en la MFA, este electrón interacciona con un campo promedio debido a cada una de las demás partículas.

con

$$S = S_o + S_{int} = \int d^4x \bar{q}(i\gamma^\mu \partial - m)q + G[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \tau q)^2] . \quad (5.10)$$

Y ya se resolvió el término libre S_o en el Capítulo 3 para los fermiones ψ (Ecuaciones 3.71 y 3.73), a continuación se hará lo mismo para la parte de interacción (ecuación 5.8) y para resolver se utiliza una aproximación conocida como aproximación del campo medio (MFA) en donde se considera que las partículas interactúan con un campo de fondo y además se introduce como definición que el vacío sea el estado de menor energía, de este modo el vacío queda definido como $\langle \bar{q}q \rangle_o = \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$, ecuación (5.5) que es el valor esperado en el vacío (VEV).

La idea del campo medio proviene de una simplificación del problema al resolver las interacciones entre muchas partículas. Entonces, en lugar de decir que una partícula interacciona con cada una de las demás partículas, se considera que interacciona con el promedio debido a todas las demás. A esto se le conoce como Mean Field Theory (Figura 5.1).

Así, de la ecuación (5.8), se elige el término $G(\bar{q}q)^2$ el cual es una interacción y se va a estudiar haciendo un desarrollo de Taylor alrededor del vacío $\langle \bar{q}q \rangle$, es decir, $f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \dots$, con $f = (\bar{q}q)^2$ y el vacío $x_o = \langle \bar{q}q \rangle$, así se tiene que

$$(\bar{q}q)^2 = \langle \bar{q}q \rangle^2 + 2\langle \bar{q}q \rangle [\bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle] + \dots , \quad (5.11)$$

y sólo nos quedamos con los términos a primer orden, entonces

$$(\bar{q}q)^2 = 2\langle \bar{q}q \rangle \bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle^2 , \quad (5.12)$$

así la Lagrangiana de NJL toma la forma

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_o)q + G[2\langle \bar{q}q \rangle \bar{q}q - \langle \bar{q}q \rangle^2] , \quad (5.13)$$

de aquí se define la masa dinámicamente generada M ,

$$M = m_o - 2G\langle \bar{q}q \rangle , \quad (5.14)$$

ya que surgió de una interacción del campo de los quarks con el campo de fondo, es decir, el condensado.

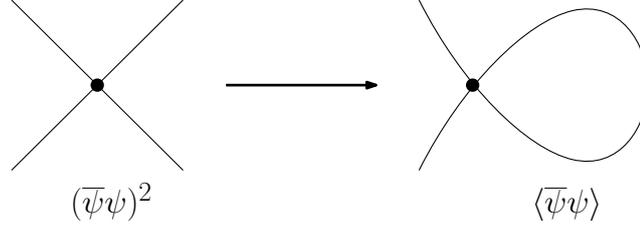


Figura 5.2: Resultado de la aplicación del MFA en la interacción de cuatro campos en un punto, $(\bar{\psi}\psi)^2$. Este resultado es una linealización de la interacción y es lo que se conoce como el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

Este proceso en donde la interacción de cuatro campos $(\bar{q}q)^2$ en un punto se transforma en un lazo (*loop*) se le llama linealización de la interacción y esquemáticamente se muestra en la Figura 5.2 [47]. En particular, el condensado de quarks en la MFA se define como la traza del propagador de Dirac $S_F(x-y)$ que al ser un lazo cerrado tiene su línea fermiónica que inicia y termina en el mismo punto $x-x=0$, es decir, para un campo de fermiones cualquiera ψ se tiene que [48]

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i\text{Tr}[S_F(0)] , \quad (5.15)$$

con

$$S_F(0) = i\langle 0|T[\psi(x)\bar{\psi}(x)]|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \right] , \quad (5.16)$$

en la literatura se suele identificar al condensado como $\sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, salvo por una constante.

Con la definición (5.14) en la lagrangiana (5.13) se puede escribir ésta en términos de la masa dinámicamente generada M de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu + M)q - \frac{(M - m_o)^2}{4G} , \quad (5.17)$$

Al igual que se hizo para calcular la función de partición Z de la Lagrangiana libre, para esta Lagrangiana se hace la rotación de Wick (formalismo de tiempo imaginario) (Ver Sección 3.3) $t \rightarrow it = \tau$ lo que equivale a hacer $d^4x = dt d^3\mathbf{x} = \beta V \sum_{n,p}$ que para el primer término del RHS de la ecuación (5.17) se procede igual que al obtener (3.57)

$$\bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu + M)q - \frac{(M - m_o)^2}{4G} \longrightarrow \bar{q}\left(-i\gamma^o\omega_n - \gamma^l p_l + M\right)q - \frac{(M - m_o)^2}{4G}, \quad (5.18)$$

y esta última expresión es de la forma de $\bar{q}Aq$ donde A es una matriz de 4×4 que al reescribirlo en (5.9) es

$$Z = N_o \int [D\bar{q}][Dq] e^{-i\beta\sum_n -\bar{q}A_nq} e^{-\beta V(M-m_o)^2/4G}, \quad (5.19)$$

y el logaritmo de esto último

$$\ln Z = \ln \left[\int [D\bar{q}][Dq] e^{-i-\bar{q}A_1q} e^{-i-\bar{q}A_2q} \dots e^{-i-\bar{q}A_nq} \times e^{-\beta V(M-m_o)^2/4G} \right], \quad (5.20)$$

de aquí es posible utilizar $\int D\bar{q} Dq e^{-\bar{q}Aq} = \text{Det} A$, (Ecuación 3.58), así llegamos a

$$\ln Z = \sum_{n,p} \ln \left[\beta^4 \left[(i\omega_n - \mu)^2 - E_p^2 \right]^2 - \frac{\beta V(M - m_o)^2}{4G} \right] \quad (5.21)$$

en esta expresión se incluyó el potencial químico μ mediante $\omega \rightarrow i\omega - \mu$. Finalmente utilizando

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \longrightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \quad (5.22)$$

similarmente a la ecuación (3.71) se llega a

$$\ln Z = 2\beta V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)} \right] + \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)} \right] \right\} - \frac{\beta V(M - m_o)^2}{4G}, \quad (5.23)$$

de este modo, el potencial termodinámico es

$$\Omega = -2N_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + T \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)} \right] + T \ln \left[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)} \right] \right\} + \frac{(M - m_o)^2}{4G}. \quad (5.24)$$

donde N_c y N_f son los grados de libertad del color y el sabor, respectivamente. Imponiendo para el sistema la condición de equilibrio

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0, \quad (5.25)$$

se obtiene la ecuación de gap

$$M = m_o - 4GN_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left[1 - f^{(+)} - f^{(-)} \right], \quad (5.26)$$

con las definiciones

$$f^{(\pm)}(T, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(E_p \pm \mu)} + 1} . \quad (5.27)$$

Esta es una ecuación de gap a temperatura y potencial químico finitos. El término $d^3\mathbf{p}$ se puede escribir como $d^3\mathbf{p} = dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 4\pi r^2 dr$, y entonces la ecuación (5.26) se puede escribir como

$$M = m_o - 4GN_c N_f M \int \frac{dp p^2}{2\pi^2} \frac{1}{E_p} [1 - f^{(+)} - f^{(-)}] . \quad (5.28)$$

Esta ecuación tiene la solución trivial $M = 0$, además $M = 0$ si y sólo si $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$. Para $m \neq 0$ se ve que el condensado es distinto de cero, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, por lo que esto destruye la simetría quiral. Para estudiar las fases de la simetría quiral lo que se estudia es cuándo este campo es cero y cuándo no lo es. En resumen supusimos un campo de fondo el cual tiene el efecto en la Lagrangiana de generar un término de masa.

5.3. Renormalización y Regularización

El término de energía de punto-cero de la ecuación de gap (5.28) es una integral divergente, ya que, de

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} = \int_0^\infty \frac{dp p^2}{2\pi^2} \frac{1}{E_p} , \quad (5.29)$$

para $p \gg 1$, se tiene que el término de energía es $E = \sqrt{p^2 + M^2} \rightarrow \sqrt{p^2} = p$ por lo que

$$\int_0^\infty \frac{dp p^2}{2\pi^2} \frac{1}{E_p} \rightarrow \int_0^\infty dp p = \frac{1}{2} p^2 \Big|_0^\infty , \quad (5.30)$$

luego es cuadráticamente divergente.

En las QFT relativistas las divergencias de este tipo siempre aparecen y el proceso sistemático para eliminar estos infinitos es llamado *renormalización* y una teoría que admite un algoritmo consistente para remover divergencias se dice que es renormalizable. Las teorías fundamentales como QCD, QED y la teoría débil deben ser renormalizables [4]. Reemplazar integrales divergentes con integrales renormalizadas es equivalente a agregar términos a la Lagrangiana, a estos términos se les llama contratérminos (*counterterms*). En ocasiones estas integrales no pueden ser suprimidas con la introducción de un número infinito de constantes arbitrarias. De aquí se define una teoría renormalizable como aquella en la cual las divergencias ultravioletas pueden removerse mediante la introducción de un número

finito de parámetros tomados experimentalmente. En particular, la interacción de contacto provoca que el modelo NJL (ecuación 5.8) sea *no-renormalizable* debido a que los diagramas de loop producen divergencias que no pueden ser canceladas agregando contratérminos. En vez de esto, es necesario agregar nuevos operadores que cancelen estas divergencias [47, 50]. En caso de que un modelo o teoría sea no-renormalizable se aplican procedimientos para que la integral no sea divergente, a estos procedimientos se les llama métodos de *regularización*. De lo anterior se establece que es necesario especificar un procedimiento de regularización [48] para obtener integrales finitas.

Existen varios métodos o esquemas de regularización los cuales determinan la solución de la ecuación del sistema [47], es decir, dependiendo del esquema de regularización elegido, será la solución obtenida. Entre estos se encuentran, principalmente, el cutoff ultravioleta (UV-cutoff) el cual es físicamente intuitivo y tiene la desventaja de no ser Lorentz-covariante, su argumento a favor es que a temperatura y potencial químico finitos, el sistema de cualquier modo ya no es Lorentz-covariante [51], es decir, al trabajar en un medio desaparece la invarianza de Lorentz. Por otro lado, el método de *Regularización de Tiempo Propio* sí preserva la covarianza-Lorentz y consiste en utilizar una identidad que proviene de la función Gamma para redefinir el término de energía el cual es el que ocasiona que la integral sea divergente.

Para un estudio más detallado de los métodos mencionados se puede consultar [49, 51, 52] y el clásico [47], en estos queda de manifiesto que un modelo queda determinado por el método de regularización y que este se elige dependiendo del problema a resolver.

Todos estos esquemas de regularización requieren de dos parámetros, la constante de acoplamiento G y el cutoff Λ . Tradicionalmente estos se fijan en base a la constante de decaimiento del pión f_π y el valor empírico del condensado $\langle \bar{q}q \rangle$ y se determinan haciendo $T = 0$ y $\mu = 0$ de modo que reproduzcan lo que se conoce de la LQCD (Sección 6.1).

5.3.1. UV-cutoff

Una manera de tratar con estas integrales divergentes es «cortándolas» usando un *cutoff* 3-Dimensional, éste actúa como una escala para el momentum en el cual la teoría es válida. Este UV-cutoff o también llamado cutoff 3-Dimensional, destruye la invarianza Lorentz pero esto no es relevante ya que cuando se trabaja con temperatura finita de igual modo se destruye esta invarianza Lorentz. Como menciona [53], este esquema es aceptable si se asume que el cutoff es mucho mayor que el momentum del sistema.

En el caso de regularizar mediante el UV-cutoff se elimina la divergencia acotando el límite superior de las integrales utilizando un cutoff ultravioleta Λ_{UV} de modo que $\mathbf{p}^2 < \Lambda_{UV}^2$ [47] que resulta que es

$$\int_0^{\Lambda_{UV}} \frac{dp}{2\pi^2} p^2, \quad (5.31)$$

así, la ecuación (5.28) toma la forma de

$$M = m_o - 4GN_c N_f \int_0^{\Lambda_{UV}} \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2}{E} M \left[1 - f^{(+)} - f^{(-)} \right], \quad (5.32)$$

de este modo se elimina la divergencia de las integrales que resulta de valores grandes de p . Para el cálculo de los parámetros Λ_{UV} y G bajo este esquema de regularización se obtiene que (Apéndice Ñ.1)

$$\begin{aligned} \Lambda_{UV} &= 653.331 \text{ MeV} \\ G &= 4.92 \times 10^{-6} \text{ MeV} \\ M &= 313.519 \text{ MeV} \\ m_q &= 5.5 \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (5.33)$$

y como referencia, en el límite quiral

$$\begin{aligned} \Lambda_{UV} &= 653.331 \text{ MeV} \\ G &= 5.0163 \times 10^{-6} \text{ MeV} \\ M &= 313.519 \text{ MeV} \\ m_q &= 0 \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.3.2. Regularización de Tiempo Propio

Otro método de regularización es el llamado Regularización de Tiempo Propio o PTR (*Proper Time Regularization*). Este método lo que hace es agregar un término el cual se anula para valores muy grandes de momentum p lo que permite tomar en cuenta todos sus valores [54]. En particular en donde encontramos divergencias es en expresiones como la obtenida para el condensado [55] (Ecuación 5.16)

$$\langle \bar{q}q \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{p} + M}{p^2 + M^2} \right] = \int \frac{-idp_4 d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{4M}{p_E^2 + M^2}, \quad (5.35)$$

esta ecuación es la energía de punto cero, como se había mencionado en (5.29), y considerando los grados de libertad del color y sabor, N_c y N_f respectivamente, se escribe como

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4MN_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + M^2}. \quad (5.36)$$

de aquí se reescribe el propagador usando las frecuencias de Matsubara las cuales están definidas como [55]

$$\begin{aligned} p_4 &= \omega_n = (2n + 1)\pi T \\ dp_4 &\rightarrow \Delta p_4 = \Delta\omega_n = 2\Delta n\pi T , \end{aligned} \quad (5.37)$$

(la n es de $-\infty$ a ∞) luego en la ecuación (5.35) haciendo $\Delta n = 1$ se tiene que

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4MN_c N_f T \sum_n \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + M^2} , \quad (5.38)$$

de aquí es posible utilizar la siguiente identidad para una función $f(p^2)$ que no tiene polos (Apéndice O) [49, 51, 55, 80]

$$\frac{1}{[f(p^2)]^n} = \int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau f(p^2)} \frac{1}{(n-1)!} , \quad (5.39)$$

que para nuestro caso en la ecuación (5.38), para $n = 1$, es

$$\frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + M^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + M^2)} , \quad (5.40)$$

es decir, reemplazar el término de energía en la ecuación (5.35) usando la identidad (5.40) regulariza la ecuación (5.35), sin embargo esta integral (5.40) es divergente para $\tau = 0$ por lo que se toman como límites de integración valores $\tau \in (\tau_{UV}, \infty)$, donde se define esta cota como $\tau_{UV} = 1/\Lambda^2$ de aquí que la ecuación (5.38) toma la forma de

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4MN_c N_f T \sum_n \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{\tau_{UV}}^\infty d\tau e^{-\tau(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + M^2)} . \quad (5.41)$$

Esta es la forma regularizada utilizando PTR del propagador del fermión en SU(2). Para hacer cálculos numéricos es más sencillo realizarlos escribiendo el término de la suma como una función Θ de Jacobi la cual se define como

$$\Theta_2[z, q] \equiv \sum_n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} , \quad (5.42)$$

para esto de nuevo se utiliza la relación (5.37)

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\tau\omega_n^2} &= \sum_n e^{-\tau(2n+1)^2\pi^2 T^2} = \sum_n e^{-4\pi^2 T^2 \tau (n+1/2)^2} \\ &= \sum_n q^{(n+1/2)^2} , \end{aligned} \quad (5.43)$$

en el último paso se definió $q = e^{-4\pi^2 T^2 \tau}$ para que con $z = 0$ se pueda escribir como

$$\sum_n e^{-\tau\omega_n^2} = \Theta_2[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau}] , \quad (5.44)$$

De manera que la ecuación (5.41) toma la forma

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4MN_c N_f T \int_{\tau_{UV}}^{\infty} d\tau e^{-\tau M^2} \Theta_2 \left[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau} \right] \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau \mathbf{p}^2}. \quad (5.45)$$

Con esta ecuación es posible hacer cálculos numéricos en el esquema de regularización PTR con temperatura finita.

Capítulo 6

Diagrama de Fases

El modelo NJL considera únicamente la interacción entre quarks y la fase que se puede estudiar en este esquema es la de simetría quiral ya sea rota o bien, restaurada. La materia hadrónica está compuesta de quarks y gluones por lo que es necesario hacer modificaciones al modelo NJL para poder tener una mejor comprensión de lo que se requiera estudiar. El modelo NJL extendido a un loop de Polyakov es una modificación que incorpora la interacción de los gluones a la de los quarks. En condiciones extremas de temperatura y densidad se predice que la materia hadrónica experimentaría un cambio a una fase de desconfinamiento de quarks y gluones. Se piensa que este cambio de fase ocurre a la misma T y μ en que ocurre la fase de restauración de la simetría quiral. De aquí la importancia de estudiar esta fase. En este trabajo nos enfocamos en este régimen NJL.

A temperatura cero y densidades del orden de la densidad nuclear, los quarks y gluones se encuentran confinados: los hadrones. No existe tal cosa como los quarks o gluones libres en el vacío. Pero a temperaturas por encima de cierto valor crítico $T_c \approx 150$ MeV se puede tener un gas de quarks y gluones llamado plasma de quarks-gluones.

Lo mismo ocurre en la línea de temperatura cero y densidades muy altas, o bien, para temperaturas y densidades altas. La consecuencia de esto es que implica un nuevo estado de la materia. Se piensa que este tipo de materia prevaleció alrededor de 10^{-6} a 10^{-5} s después del Big Bang. También se piensa que existe en los núcleos de las estrellas de neutrones y que se produce en las colisiones de iones pesados [18].

La ecuación de gap es una ecuación de estado y como tal describe el comportamiento de, en este caso, los quarks bajo ciertas condiciones de temperatura y densidad, gráficamente, el diagrama $\mu - T$ llamado diagrama de fases describe los estados termodinámicos del sistema bajo condiciones de, en este caso, temperatura y potencial químico y muestra una curva de valores T y μ para los cuales

se divide el plano en dos regiones. Matemáticamente hablando, la superior representa las condiciones necesarias de temperatura y densidad para que exista un condensado $\langle \bar{q}q \rangle$ igual a cero y por otro lado, la región inferior representa las condiciones necesarias para que el condensado sea distinto de cero (fase hadrónica). Así, la curva representa la línea de transición de fase entre dos estados de materia que consiste únicamente de quarks, el estado en que está rota la simetría y el estado en que se restaura la simetría quiral (Figura 6.1). La región donde el condensado es distinto de cero está relacionada con el rompimiento de la simetría quiral mientras que la región donde el condensado es cero es la fase llamada de restauración de la simetría. El condensado de quarks es el parámetro de orden de la simetría quiral y cambios grandes en el parámetro de orden indican cambios de fase en el sistema [56] (y Sección 5.2).

Las transiciones de fase son singularidades termodinámicas del sistema, este sistema descrito por la QCD en equilibrio térmico está caracterizado por los valores de T y μ [7]. Estas transiciones de fase son de tres tipos, de primer y segundo orden y además *crossover*. En la Figura 6.1 la curva representa la transición de fase y siguiéndola de derecha a izquierda tenemos que comienza para valores grandes de potencial μ como una transición de fase de primer orden y en algún momento puede ocurrir que cambie a segundo orden. Una manera de determinar este cambio de tipo de fase es usando el concepto de susceptibilidad. Una singularidad en esta susceptibilidad se interpreta como un cambio en el tipo de fase y el que sea un cambio de primer a segundo orden sólo ocurre en el límite quiral [3, 57]. En caso contrario, cuando en el sistema no existe simetría quiral ($m_q \neq 0$) la transición de fase de segundo orden se reemplaza por un *crossover*. Esta zona de *crossover* se puede interpretar como los valores de T y μ donde las dos fases coexisten [51]. Para una referencia histórica acerca del concepto de transiciones de fase de primer y segundo orden ver [24]. El punto donde cambia el tipo de transición de fase es conocido como *Critical Point*, este punto es una singularidad bien definida en el diagrama de fase [7]. En el caso de límite quiral el punto del diagrama en donde cambia de fase de primer orden a segundo orden se le llama *Tri-Critical Point*. Acerca del diagrama y transiciones de fases de la QCD se puede consultar [7, 46, 58, 59, 26].

En este capítulo se exponen los distintos elementos que componen el diagrama de fases y las transiciones de fase que muestra, el concepto de susceptibilidad, el cual es una herramienta para la determinación de estas fases y finalmente se muestra el diagrama de fase correspondiente al modelo NJL para dos casos, el límite quiral ($m_o = 0$), y para $m_o = 5$ MeV.

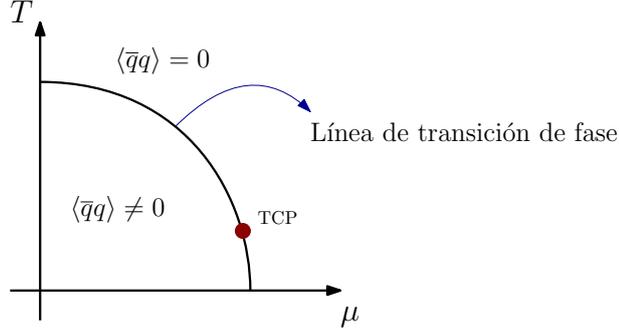


Figura 6.1: Bosquejo de Diagrama de Fase. Se muestra el plano $\mu - T$ para la ecuación de gap (5.26) con $m_o = 0$. La región donde $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ se dice que es una fase donde la simetría quiral no existe (hubo un rompimiento de simetría) y $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ donde se ha restaurado la simetría. El tricritical point (TCP) se indica con el punto rojo. Este lugar separa las transiciones de fase de primer y segundo orden.

6.1. Transiciones de Fase

El bosquejo de diagrama de fases de la Figura 6.1 muestra el caso en el que $m_o = 0$, es decir, la masa corriente de los quarks es cero lo que implica que es posible que la ecuación de gap (5.26) tenga soluciones para M además de la trivial.

Para construir este diagrama se puede observar que, al tener dos parámetros libres, la T y μ y fijar uno de estos, por ejemplo μ , se toma un conjunto de valores de T y se resuelve la ecuación (5.26) para M . Conforme T aumenta, la masa dinámicamente generada M disminuye por lo que en algún momento, para un valor de T , la masa M será cero y por lo tanto el condensado $\langle \bar{q}q \rangle$ es cero, (ecuación 5.14), este valor de T y su correspondiente μ representan el punto de la curva del plano $T - \mu$ del diagrama de fase. Para los siguientes valores de T las soluciones serán cero y es la región superior del diagrama de fase de la Figura 6.1, al repetir el ejercicio para todos los valores de μ de algún intervalo se obtiene la línea de transición de fase y el diagrama está completo.

La región por debajo de la curva corresponde a la fase de rompimiento de simetría quiral, es decir, existe un condensado distinto de cero y en el otro caso, por encima de la curva se tiene la región de restauración de la simetría quiral que es el caso en que el condensado «no existe», es decir, tiene valor cero.

En el límite quiral, es decir cuando la masa de los quarks es $m_o = 0$, las transiciones de fase pueden ser de primer o de segundo orden y el punto en la curva donde cambia el orden de la transición recibe el nombre de punto crítico triple (*tricritical point*) [3, 60]. Por otro lado, para valores de masa de los quarks finitos

y potencial químico cero se tiene que la restauración de la simetría quiral ocurre mediante un crossover [61]. Según los resultados obtenidos de la *lattice QCD* (ver siguiente apartado) la fase en valores de μ cercanos a cero es de segundo orden, por lo que hacia valores mayores de μ ocurre un cambio de fase a primer orden. Por otro lado, cuando la masa de los quarks es diferente de cero, la transición de fase de segundo orden es remplazada por una región llamada *crossover*. Así, *lattice QCD* prescribe que en $\mu = 0$ la transición de fase es un crossover por lo que hacia valores mayores de μ aparece una transición de fase de primer orden. El punto en donde ocurre este cambio de tipo de fase es conocido como CEP (del inglés *Critical End Point*). Acerca de las transiciones de fase también se puede consultar [19, 25, 26].

Lattice QCD

Las teorías perturbativas son utilizadas en las regiones consideradas como de libertad asintótica, por otro lado, en el régimen de confinamiento de quarks es necesario utilizar teorías no-perturbativas. Las teorías conocidas como *lattice gauge theories* proporcionan un método numérico sistemático para trabajar en estos regímenes [4]. Wilson propuso en [62] un mecanismo, una teoría gauge, de confinamiento de quarks que muestra cómo cuantizar una teoría de campos gauge en una retícula discreta en el espacio-tiempo Euclidiano. Lattice QCD es una técnica basada en primeros principios utilizada para calculos relacionados con interacciones fuertes usando simulaciones numéricas de Monte-Carlo para resolver integrales de trayectoria (*path integrals*) en un espacio Euclidiano [63]. La construcción del diagrama de fases de la QCD y en particular la localización del CEP es uno de los objetivos de la LQCD. En este mismo [63] se reporta como $T < 135 - 140$ MeV y $\mu < 300$ MeV mientras que la temperatura crítica cuando el potencial químico es cero es $T_c = 156.5 \pm 1.5$ MeV. Así mismo para determinar el orden de la transición de fase en $\mu = 0$ y $\mu \neq 0$ la única técnica sistemática conocida que puede dar una respuesta final es la LQCD [25]. LQCD ha sido decisiva en predecir que una transición de fase debe ocurrir a altas temperaturas y/o densidades. Para estudiar acerca del tema, además de lo ya citado, ver [64, 65].

6.2. Susceptibilidad Quiral

Antes de estudiar las transiciones de fase se introduce el concepto de susceptibilidad quiral [66, 67]

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial m_o}, \quad (6.1)$$

donde m_o es la masa corriente de los quarks. La susceptibilidad determina la tasa de cambio del potencial termodinámico con respecto al parámetro de orden¹ y singularidades en esta susceptibilidad corresponden a cambios abruptos en la transición de fase.

Antes de calcular la susceptibilidad volvamos a la ecuación de gap $\partial\Omega/\partial M$ (Ecuación 5.26) y calculemos ahora

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial M^2}, \quad (6.2)$$

recordando que $\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} = \frac{\partial\Omega}{\partial M}$ ya que $M = m_o - 2G\sigma$. De aquí obtenemos

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial M^2} = 1 + 4GN_c N_f \frac{\partial}{\partial M} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^{(+)} - f^{(-)}] \right\}. \quad (6.3)$$

A continuación calculamos la susceptibilidad

$$\frac{\partial M}{\partial m_o} = 1 - 4GN_c N_f \frac{\partial}{\partial m_o} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^{(+)} - f^{(-)}], \quad (6.4)$$

y nos ayudamos con la regla de la cadena $\frac{\partial}{\partial m_o} = \frac{\partial}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial m_o}$ para obtener

$$\frac{\partial M}{\partial m_o} = 1 - 4GN_c N_f \frac{\partial}{\partial M} \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^{(+)} - f^{(-)}] \right\} \frac{\partial M}{\partial m_o}, \quad (6.5)$$

de aquí llegamos a

$$\frac{\partial M}{\partial m_o} = \left(1 + 4GN_c N_f \frac{\partial}{\partial M} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - f^{(+)} - f^{(-)}] \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

y usando (6.3) tenemos la susceptibilidad

$$\chi = \frac{1}{\frac{\partial^2\Omega}{\partial M^2}}. \quad (6.7)$$

Como ya se mencionó, la susceptibilidad está relacionada con los cambios de fase y en la práctica se calcula a partir de la ecuación de gap (Ecuación 5.26), de aquí tenemos que para cada valor de temperatura T y potencial químico μ es posible calcular una susceptibilidad quiral. De aquí que para un valor de μ se calcule una susceptibilidad para cada T en un cierto rango de valores. Estos valores de χ irán

¹En esta definición hay que recordar que la ecuación de gap proviene del potencial termodinámico y esta ecuación tiene como solución a M . De igual modo el parámetro de orden es el condensado de quarks el cual es función de la masa corriente de los quarks m_o , es decir, $\langle \bar{q}q \rangle = (M - m_o)/2G$.

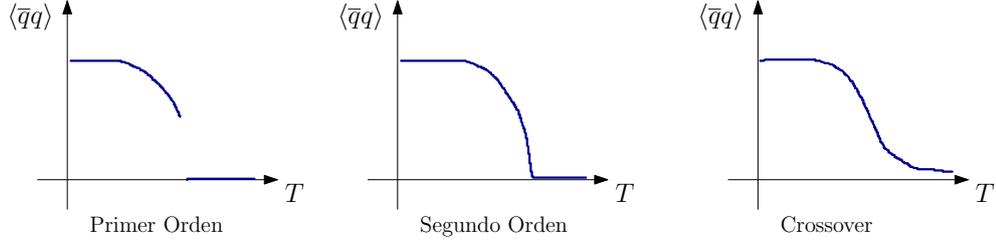


Figura 6.2: Transiciones de Fase

creciendo o decreciendo, según sea el caso y, si en algún momento se observa una “divergencia”, en ese valor de T y μ ocurre un cambio de fase y se puede localizar en el diagrama de fases. Este valor corresponde al CEP. Al ir incrementando los valores de μ , si se encuentra ese valor que diverge, de ahí en adelante es posible que aparezcan más divergencias pero lo que se busca es el primer valor para el cual aparece. En este trabajo la meta es estudiar las transiciones quirales analizando el comportamiento del condensado $\langle \bar{q}q \rangle$ como función de la temperatura T y el potencial químico μ .

6.3. Diagramas

Parámetro de Orden en función de Temperatura

Como se mencionó anteriormente, la Lagrangiana del modelo NJL presenta simetría quiral si la masa de los quarks es cero, $m_o = 0$, y al considerar temperatura y potencial químico finitos esta simetría cambia a un estatus conocido como simetría rota, es decir, incorporar la termodinámica al modelo requiere para su solución establecer la condición de que existe un campo de fondo (MFA) y una de las consecuencias al resolver el problema es que aparece un término de masa que rompe la simetría, este término es el condensado de quarks. El parámetro de orden en este caso es este condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$ y se interpreta como sigue: si $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ se tiene que la simetría está rota, de otro modo, si $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ se dice que la simetría quiral se restaura.

La cuestión de en qué condiciones de T y μ se presenta esta simetría rota y en qué valores se restaura se resuelve observando el diagrama de la Fig. 6.3 en donde se muestra el condensado de quarks en función de la temperatura para un valor fijo de potencial químico, $\mu = 0$, de aquí se observa que el valor de la masa dinámicamente generada M disminuye al aumentar la temperatura T , esto es consistente con lo mostrado en [68]. Esta masa M al ser proporcional al condensado de quarks, es decir, al parámetro de orden (ecuación 5.14) encontramos que en algún momento llega a ser cero y en este caso se restaura la simetría quiral.

Para el caso ideal en que la Lagrangiana es quiral *per se*, es decir la masa de los quarks es cero $m_o = 0$, se restaura la simetría a partir de $T = 190$ MeV (curva negra).

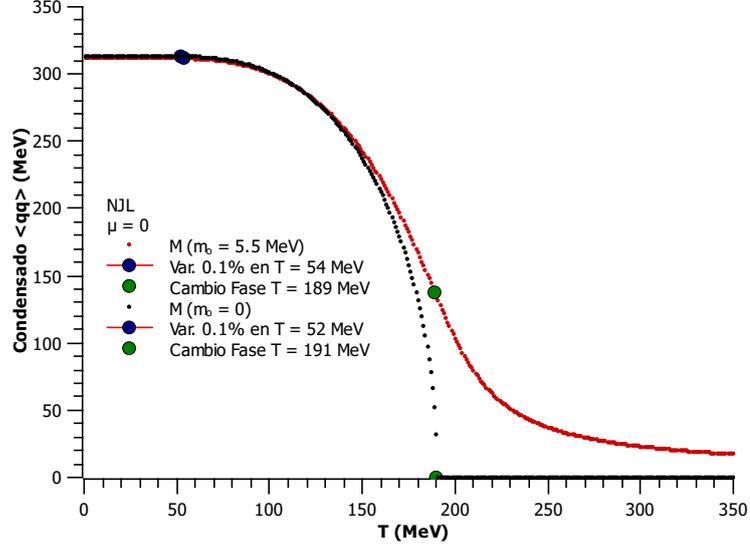


Figura 6.3: Parámetro de orden $\langle \bar{q}q \rangle$ en función de la temperatura T con valor de potencial químico $\mu = 0$. En color negro se describe su comportamiento cuando masa de los quarks es cero $m_o = 0$ (límite quiral) y en color rojo cuando la masa es $m_o = 5.5$ MeV.

Esta curva se obtuvo resolviendo para M la ecuación de gap (5.26) con los parámetros (5.33) y (5.34) con $\mu = 0$ y con valores de T hasta 350. Como se observa en ésta, a partir de $T = 190$ MeV el condensado toma el valor cero y eso indica que se restauró la simetría quiral, es decir, hubo una transición de fase.

Así mismo, en esta Fig. 6.3 se muestra el mismo ejercicio pero con una masa de los quarks de 5.5 MeV (curva roja). Ambas curvas (negra y roja) comienzan, para $T = 0$, en un valor de masa dinámicamente generada de aproximadamente 313 MeV (313.518 MeV para la curva de $m_o = 0$ y 312.07 para $m_o = 5.5$ MeV), esto es consistente con los parámetros calculados de manera analítica en (5.33) y (5.34). Este valor de M significa que al colocar un quark de masa cero (o 5.5 MeV) en un sistema descrito por la Lagrangiana del modelo NJL, este quark interactúa con el campo de fondo (MFA) y el resultado es que adquiere masa y ahora es de 313.518 MeV (o 312.07 MeV) con el consecuente rompimiento de la simetría quiral.

Para restaurar esta simetría hay que incrementar la temperatura. En el caso de una masa $m_o = 5.5$ MeV no es posible alcanzar este cero ya que por construcción, la ecuación de gap (5.26) nunca alcanza el valor de $M = 0$. Para resolver esta situación se utiliza el concepto de susceptibilidad quiral χ visto en la Sección (6.2). Como se menciona en [23], la susceptibilidad se relaciona con el recíproco

de la segunda derivada del potencial termodinámico con respecto al parámetro de orden, ecuación (6.7), es decir, el punto de inflexión o cambio en la concavidad implica que χ diverge, así que el cero que buscábamos al resolver la ecuación de gap se convierte en una divergencia en la susceptibilidad. En la figura 6.3 el cambio de fase para el caso de $m_o = 5.5$ MeV (curva roja) se localiza en $T = 189$ MeV y se encontró buscando el punto de inflexión de esta curva.

En la Figura 6.4 se muestra este parámetro de orden en función de la temperatura para distintos valores de potencial μ y se observa la diferencia de valores de temperatura para los cuales el valor de la masa M comienza a descender, se necesita menos temperatura para que la masa M comience a descender conforme el potencial μ aumenta.

También es de notar que el punto de inflexión de cada curva conforme el potencial μ aumenta se mueve hacia valores menores de temperatura, es decir, se reestablece la simetría en valores cada vez menores de temperatura. Finalmente, se observa cómo las curvas a partir de la que corresponde a $\mu = 327$ presentan un «salto» en sus valores precisamente en el lugar que corresponde al punto de inflexión. De la diferencia entre valores consecutivos en esta zona se obtiene una pendiente de 88.44° (para $\mu = 327$ MeV), es decir, tiende a una divergencia y esta situación se asocia con la χ que da lugar a la localización del CEP que se describe en la siguiente sección. En realidad este «salto» no está ocurriendo sino que es consecuencia de la resolución numérica del cálculo, es decir, se está haciendo para valores discretos de temperatura «de uno en uno», por lo que debe interpretarse como los valores de la pendiente entre dos puntos consecutivos.

Este punto de inflexión no es más que un cero en la segunda derivada de la función que representa la curva mostrada en esta Fig. 6.4, este cero está relacionado con el concepto de susceptibilidad quiral (Sección 6.2) de aquí que nos de una pista sobre dónde buscar el CEP.

Una interpretación de la simetría quiral restaurada es que los quarks se pueden distinguir de dos tipos, *izquierdos* y *derechos*, por otro lado, hablar de una simetría quiral rota consiste en que aparece el condensado de quarks y se piensa que es la región en donde los quarks están confinados, debería de ser la fase hadrónica y los quarks son todos iguales, es decir, ya no se pueden distinguir izquierdos de derechos, es decir, no tienen una quiralidad definida. En general, se piensa que lo anterior sería posible en una teoría que considere confinamiento de quarks. Es posible construir una extensión al modelo NJL la cual incluye un término conocido como loop de Polyakov, esta extensión considera al confinamiento y en esta se busca, entre otras cosas, relacionar el rompimiento/restauración de simetría quiral con el confinamiento/desconfinamiento de quarks.

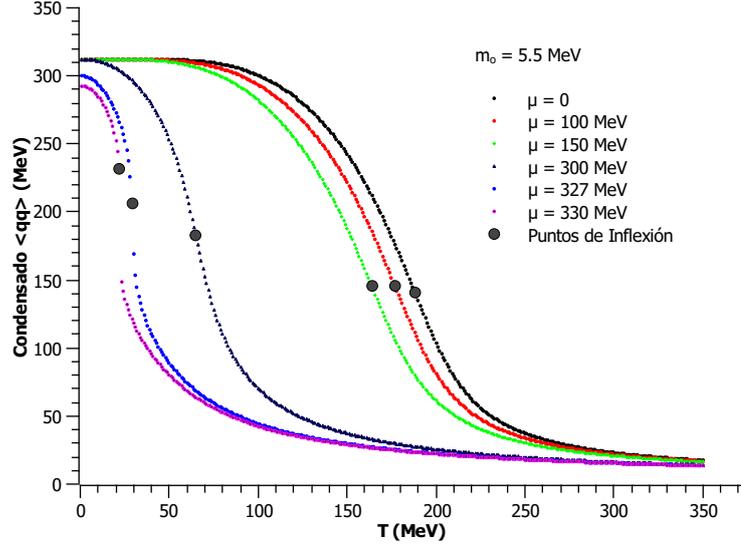


Figura 6.4: Parámetro de orden en función de la temperatura para diferentes valores de potencial químico, μ . El punto de inflexión se indica en color negro.

Diagrama de Fase y Susceptibilidad

El diagrama de fases como ya se mencionó se construye a partir de la ecuación de gap. Para el caso en que $m_o = 0$ (límite quirral) resolver la ecuación de gap (5.26) implica encontrar los ceros de M . De estos valores de M lo que nos interesa es si éstos son cero o no lo son, más aún, partiendo de $\mu = 0$ y $T = 0$, conforme aumenta T lo que utilizamos es el primer valor cero de M . Esto divide al plano $\mu - T$ en dos regiones: aquella en que hay valor de M y en donde no lo hay, estas regiones son las fases de simetría rota y restaurada, respectivamente. Este caso se muestra en la Figura 6.5 (curva negra). El caso en que $m_o = 5.5$ MeV se muestra en la curva roja y para obtenerlo, como se mencionó en la sección anterior, se resuelve la ecuación 6.7 para χ que depende, nuevamente de T y μ . En este caso cambia la mecánica por que lo que buscamos es en qué valor de T para un valor de μ fijo la susceptibilidad χ alcanza su valor máximo. Cada uno de estos pares de T y μ , donde χ es máximo, son la curva roja de la Figura 6.5.

Del diagrama de fase (Fig. 6.1) sabemos que la región arriba de la curva corresponde a la fase de simetría restaurada y debajo de esta es la región de simetría rota y el tipo de transición de fase para $\mu = 0$ es de segundo orden (según LQCD) y conforme aumenta este potencial químico μ llega un momento en que esta transición de fase es de 1er orden, el lugar geométrico de la curva en donde ocurre este cambio es único y se conoce como Critical End Point (CEP) y en términos de la susceptibilidad este corresponde al valor de T y μ en el cual la susceptibilidad quirral χ diverge. A la fecha no existe un consenso acerca de cómo obtener este punto, de hecho depende del tipo de esquema de regularización utilizado [69].

Para determinar la localización del CEP, en este caso lo que hicimos fue que para

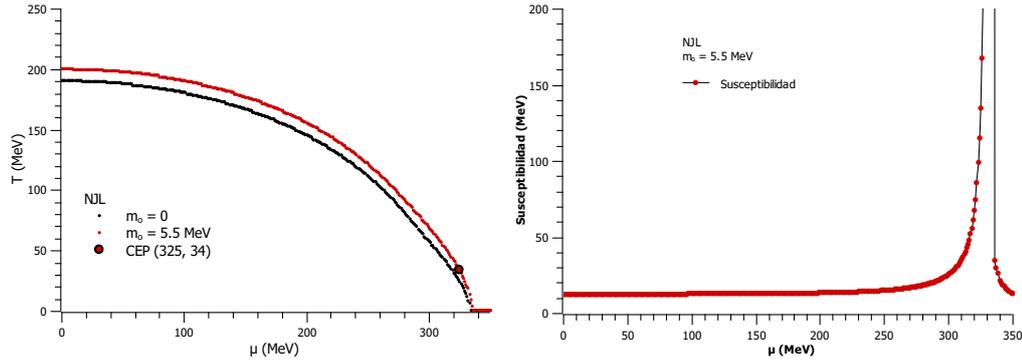


Figura 6.5: Izquierda. Diagrama de fases del modelo NJL para dos casos: masa $m_o = 0$ en color negro y una masa de quarks de 5.5 MeV en color rojo. Derecha. Diagrama que muestra el valor de susceptibilidad correspondiente a cada punto del diagrama de fase.

cada μ se tiene una curva de susceptibilidad χ y se analizó valor por valor la diferencia entre sus valores consecutivos, es decir sus pendientes. De ahí que si se obtuviera un valor de 90° , este sería el que se está buscando como singularidad del parámetro de orden.

En la Figura 6.6 se muestran las curvas de susceptibilidad para distintos valores de μ . Elegimos las curvas de $\mu = 325, 326, 327$ y 328 de la siguiente manera: cada μ tiene un valor de χ_{max} en el rango de temperaturas de 0 a 350 MeV, ese valor máximo corresponde a un par (μ, T) , es decir, la curva del diagrama de fase. La diferencia de valores consecutivos de χ , ordenados de manera ascendente según su valor correspondiente de μ , representa la pendiente de una tangente. Los mayores valores de esta pendiente fueron

$$\begin{aligned}
 m_{325} &= 19.6 & \text{para} & \quad \mu = 325 \\
 m_{326} &= 32.5 & \text{para} & \quad \mu = 326 \\
 m_{327} &= 34.4 & \text{para} & \quad \mu = 327 \\
 m_{328} &= 3168.8 & \text{para} & \quad \mu = 328 \\
 m_{331} &= 4069411584 & \text{para} & \quad \mu = 331
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Lo anterior se observa también en el panel derecho de la Figura 6.5. Esta curva muestra el valor de la susceptibilidad que corresponde a cada par $\mu - T$ del diagrama de fase del panel izquierdo, por ejemplo, el primer punto del diagrama de fase corresponde a $(0, 201)$ y la susceptibilidad que le corresponde a este par de parámetros es 12.832 MeV, ese es el primer punto (μ, χ) de la curva del panel derecho, es decir, es $(0, 12.832)$. Entonces en la curva del panel derecho de la Fig. 6.5 para cada par de puntos consecutivos de la curva se calcula la pendiente. De esta

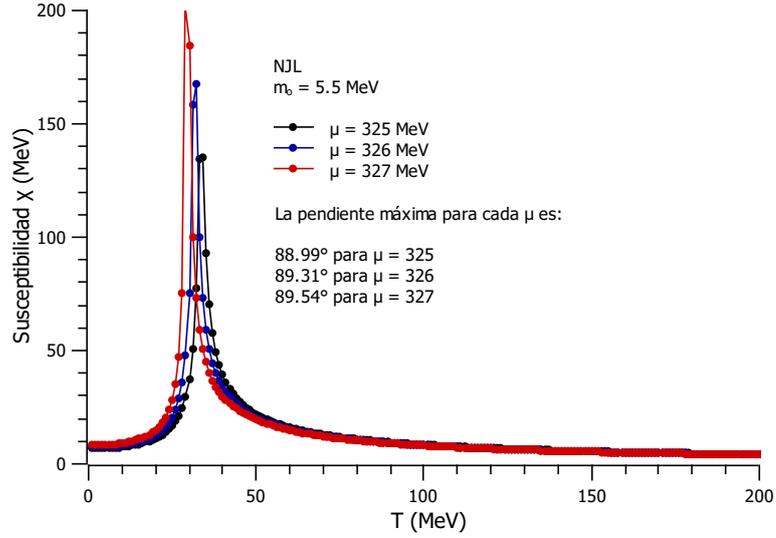


Figura 6.6: Curvas de susceptibilidad quiral χ para diferentes valores de potencial químico μ . Se muestran con su respectivo valor de pendiente (en grados). Se busca el primer valor de μ que presenta una divergencia (valores de pendiente cercanos a 90°).

manera cuando la diferencia entre puntos consecutivos diverge (es muy grande) nos da una pista para localizar el CEP en los valores de μ correspondientes. Más adelante se aclara por qué no simplemente tomar el valor de μ que corresponde al mayor valor de susceptibilidad en esta gráfica como el CEP, o bien, por qué no tomar el valor de μ en donde la pendiente entre valores consecutivos de χ tiende a diverger (pendientes cercanas a 90°).

Con lo anterior se analizó cada curva de manera individual y es lo que se muestra en la Figura 6.6. De nuevo, la diferencia de valores consecutivos de χ nos da la pendiente de la curva de susceptibilidad. Es fácil calcular en grados este valor de pendiente y buscamos algo lo más cercano a 90° . Como puede observarse en la figura, los valores de la pendiente aumentan progresivamente conforme T aumenta y en $\mu = 325$ ya se alcanza el valor de 88.99° . Consideramos en este caso que este valor ya es prácticamente un valor de χ que diverge aunque si analizamos la curva de χ para $\mu = 331$ la pendiente máxima es de 89.99° .

La realidad es que nunca alcanzaremos el valor exacto de 90° y es cuestión de criterio elegir uno u otro valor cercano a este 90° . Es por esta razón que no incluimos la curva que corresponde a $\mu = 331$ en la Fig. 6.6, si seguimos aumentando el valor de μ posiblemente nos acerquemos al 90 pero nunca lo alcanzaremos.

Ahora bien, por qué no elegimos desde un principio el valor de divergencia (mayor pendiente) tomando los valores obtenidos en la Ecuación (6.8) o por qué no tomar

el mayor valor de susceptibilidad de la curva del panel derecho de la Figura 6.5. La razón es porque estos valores corresponden a los máximos de cada conjunto de valores de susceptibilidad para cada μ . El que haya una gran diferencia entre estos máximos no nos parece una garantía de que alguna de las curvas de la Figura 6.6 sea una que represente la divergencia que buscamos. De aquí concluimos que el CEP ocurre a temperatura $T = 34$ MeV y potencial químico $\mu = 325$ MeV y eso está indicado en el diagrama de fase de la Figura 6.5. Valores similares se obtienen, por ejemplo en [70].

Capítulo 7

Volumen Finito

En la termodinámica estándar no se considera volumen finito. Cuando se habla de un gas en un recipiente nunca se ponen condiciones a la frontera. Cuando se estudia un sistema de quarks mediante colisiones en los RHIC las partículas se encuentran a grandes velocidades y gran parte de la energía se convierte en energía térmica de agitación, y se piensa que de esta se produce el plasma de quarks y gluones (QGP). Esta situación se estudia como si se encontrara en un medio infinito. Una situación más realista es considerar que el volumen donde se produce el QGP es finito.

Es razonable pensar que las propiedades termodinámicas de un sistema con volumen finito dependen del tamaño de este y también de su forma geométrica. A continuación se muestra cómo estudiar lo anterior y los resultados obtenidos mediante dos tipos distintos de realización de un volumen finito. En la primera sección se muestra una aproximación conocida como *Multiple Reflection Expansion* (MRE) en la que se hace uso del concepto de densidad de estados (volumétrica) la cual funge como aproximación a un volumen finito. El otro tipo de aproximación, que se muestra en la siguiente sección, es el intuitivo establecimiento de condiciones a la frontera en el sistema, en este trabajo exploramos las Condiciones Periódicas y Antiperiódicas a la frontera (PBC y APBC, por sus siglas en inglés, respectivamente) y las Condiciones de Onda Estacionaria (SWC). Lo anterior se sigue trabajando con el modelo NJL que para la aproximación MRE se regulariza mediante el corte UV y para el caso de condiciones a la frontera se regularizó mediante PTR.

Modelo de la Gota Líquida y MRE

La idea de utilizar la aproximación MRE [71] proviene de la propuesta de estudiar un tipo de materia llamada *Strange Quark Matter*¹ (SQM) a volumen finito partiendo de que el modelo de la bolsa del MIT (*MIT bag model*) se puede estudiar utilizando un método de aproximación llamado Multiple Reflection Expansion (MRE) el cual conduce al modelo de la gota líquida que a la vez se utiliza para estudiar (y reproduce bien los resultados) partículas del tipo *strangelets*, es decir, paquetes o pedazos de materia de quarks *up*, *down* y *strange* [72]. Se especula que este tipo de materia se forma en las colisiones de altas energías (HEHIC). De estas colisiones si se forma un plasma de quarks y gluones (QGP), después de enfriarse se forma SQM, es decir, la materia sometida a condiciones extremas de temperatura y densidad que proviene de colisiones de hadrones en altas energías forma un QGP el cual al enfriarse produce un tipo de partícula llamado *strangelet*, estas partículas se estudian bien utilizando el modelo MRE ya que éste se reduce, bajo ciertas condiciones, al modelo de la gota líquida [71, 73].

El mismo tipo de situación se puede abordar utilizando un modelo llamado de *cáscara* (*shell model*) en donde se resuelve la ecuación de Dirac aplicando *bag boundary conditions*, este problema es complicado de resolver inclusive a temperatura cero. De aquí que la aproximación MRE se propuso como alternativa a este método [71].

7.1. Aproximación mediante densidad de estados MRE

7.1.1. La Densidad de Estados y cómo ésta determina la frontera de un volumen

La densidad volumétrica de estados en el espacio de momentos es el número de estados por intervalo unitario de momentos viene dada por (Ecuación F.6)

$$dN_{vol} = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p} . \quad (7.1)$$

y el diferencial $d^3\mathbf{p}$, se puede escribir como $d^3\mathbf{p} = 4\pi p^2 dp$. Así se puede definir una densidad volumétrica de estados de la forma

$$\rho(p) = \frac{1}{V} \frac{dN_{vol}}{dp} = \frac{1}{2\pi^2} p^2 , \quad (7.2)$$

esta definición se puede extender hacia una expresión en el marco de la aproximación MRE con el fin de considerar un volumen finito [71, 72, 74, 75]. Esta

¹Materia que está formada de la misma cantidad de quarks *up*, *down* y *strange*.

aproximación conduce a un modelo de gota líquida (liquid drop model), es decir, una esfera de radio R en donde se considera que existe materia formada de quarks confinada en un volumen finito. Esta densidad de estados consiste de tres términos, uno asociado a la densidad volumétrica, otro corresponde a la densidad superficial y el tercero a la contribución de la curvatura, de este modo podemos escribir

$$\rho_{MRE} = \rho_{vol} + \rho_{surf} + \rho_{curv} , \quad (7.3)$$

los últimos dos términos dependen de un parámetro α el cual Kiriyama en [75] siguiendo a Balian y Bloch [76] asocian con la función de onda del quark confinado en el volumen finito. Esto es debido a que en su forma original, los términos ρ_{surf} y ρ_{curv} de esta densidad de estados dependen de un parámetro que en [71, 72] se relacionan con la masa de las partículas, pero bajo esta consideración al analizar el diagrama de fase no aparece la transición de fase de segundo orden que se espera debe aparecer [75]. Esta densidad de estados MRE [71, 72, 74, 75] es de la forma de

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 + \frac{6\pi^2}{pR} f_s \left(\frac{p}{\alpha} \right) + \frac{12\pi^2}{(pR)^2} f_c \left(\frac{p}{\alpha} \right) \right] , \quad (7.4)$$

donde

$$f_s \left(\frac{p}{\alpha} \right) = -\frac{1}{8\pi} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{p}{\alpha} \right) \right] \quad (7.5)$$

$$f_c \left(\frac{p}{\alpha} \right) = \frac{1}{12\pi^2} \left[1 - \frac{3p}{2\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \arctan \left(\frac{p}{\alpha} \right) \right) \right] , \quad (7.6)$$

son las contribuciones superficial y de curvatura ya mencionadas arriba. En Madsen [72] se muestra cómo obtener estas últimas ecuaciones (7.5) y (7.6).

La densidad de estados ρ_{MRE} al ser una ecuación cuadrática abre la posibilidad de obtener valores negativos de p así que para evitar estos valores físicamente no aceptables se define un IR-cutoff como límite inferior de la integral de momento y es el mayor de los ceros de (7.4), así la ecuación de gap (5.28), o bien, la (5.32) ya regularizada utilizando el método UV-cutoff queda de la forma

$$M = m_o + 4GN_c N_f \int_{\Lambda_{IR}}^{\Lambda_{UV}} dp \rho_{MRE}(p) f(T, \mu, p) . \quad (7.7)$$

Finalmente se establecen las condiciones a la frontera en las que el parámetro α , como ya se mencionó, no depende de la masa de la partícula así que si se establecen las condiciones de frontera de Dirichlet con α el parámetro, $\alpha \rightarrow \infty$, luego las contribuciones a la densidad de estados de superficie y curvatura [75], ecuaciones (7.5) y (7.6) serán

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_s \left(\frac{p}{\alpha} \right) = -\frac{1}{8\pi} \quad (7.8)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_c \left(\frac{p}{\alpha} \right) = \frac{1}{12\pi^2} , \quad (7.9)$$

y de aquí se puede calcular el IR-cutoff, la mayor de las raíces de la ecuación (7.4)

$$\Lambda_{IR} = \frac{1.8}{R} , \quad (7.10)$$

luego de usar (7.8) y (7.9), en la ecuación (7.4) se tiene que

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{3\pi}{4pR} + \frac{1}{(pR)^2} \right] , \quad (7.11)$$

esta es una densidad de estados que caracteriza un volumen esférico finito de radio R . En el caso opuesto, estableciendo las condiciones de Neumann, haciendo $\alpha \rightarrow 0$ se equipara a ser consistente con el MIT bag model [75] y lo que se obtiene es

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_S \left(\frac{p}{\alpha} \right) = 0 \quad (7.12)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_C \left(\frac{p}{\alpha} \right) = -\frac{1}{24\pi^2} , \quad (7.13)$$

de igual modo, se obtiene el IR-cutoff

$$\Lambda_{IR} = \frac{1}{\sqrt{2}R} . \quad (7.14)$$

Con lo anterior, la densidad de estados es

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{1}{2(pR)^2} \right] . \quad (7.15)$$

Con estas dos ecuaciones, (7.11) y (7.15) y la regularización elegida, que en este caso es UV-cutoff, es posible estudiar la estructura de la fase del sistema.

Una restricción adicional al modelo MRE para obtener un cubo

La manera usual de estudiar un problema restringido a un volumen finito es establecer lo que se conoce como las condiciones a la frontera y en algunas ocasiones la forma del volumen no es relevante mientras que en otros casos es posible establecer fronteras de volúmenes cuya forma representa esferas o cubos. En la sección anterior, aunque no se establecieron condiciones a la frontera, la restricción de volumen corresponde a una figura esférica. En esta sección extenderemos esta definición para obtener una burda aproximación a una figura cúbica haciendo dos sencillos cambios en la densidad de estados ρ_{MRE} . Primero redefinimos el término de superficie ρ_{surf} para considerar la superficie de un cubo de arista L y después estableceremos que el factor de curvatura es cero. De esta manera construimos una densidad de estados que representa una rudimentaria aproximación de un

volumen finito. La idea es investigar si sigue siendo una buena aproximación como alternativa para representar un volumen finito.

Como ya se mencionó en la sección anterior (Ecn. 7.3) la densidad de estados está formada por tres términos, densidad de estados volumétrica, superficial y de curvatura, ρ_{vol} , ρ_{surf} y ρ_{curv} . Ahora bien, de la densidad volumétrica de estados (Ecn. 7.1) por analogía podemos escribir una densidad de estados superficial

$$dN_s = \frac{A}{(2\pi)^2} d^2\mathbf{p} , \quad (7.16)$$

donde A representa el área total de la superficie en consideración. El diferencial $d^2\mathbf{p}$ también se puede escribir como $d^2\mathbf{p} = 2\pi p dp$. En particular si esta área la tomamos como la de un cubo de arista L , entonces $A = 6L^2$ y entonces el término superficial de la ecuación (7.3) se puede obtener al escribir la ecuación (7.16) como

$$\frac{dN_s}{dp} = \frac{2\pi A p}{(2\pi)^2} = \frac{6L^3 p}{2\pi L} , \quad (7.17)$$

y de aquí podemos escribir esta última ecuación para darle la forma de $\rho = \frac{1}{V} \frac{dN}{dp}$, es decir,

$$\rho_{surf} = \frac{1}{V} \frac{dN_s}{dp} = \frac{6p}{2\pi L} \quad (7.18)$$

finalmente si tomamos el factor de superficie como $f_S = -1/8\pi$ (Ecn. 7.8) para la condiciones de Dirichlet y el factor de curvatura como cero, $f_C = 0$, entonces llegamos a

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{3}{4Lp} \right] , \quad (7.19)$$

esta densidad de estados representa una forma cúbica de una manera burda pero numéricamente hablando creemos que es una buena aproximación a la situación buscada. El límite inferior, Λ_{IR} que se obtiene de resolver la ecuación (7.19) es

$$\Lambda_{IR} = \frac{3}{4L} . \quad (7.20)$$

7.1.2. Diagramas

Una vez establecido lo anterior es posible estudiar un sistema formado de quarks u y d en condiciones extremas pero finitas de temperatura y densidad y además confinadas en un volumen de forma esférica finita de radio R . La ecuación de gap a resolver para M es

$$M - m_o + GN_c N_f \int_{\Lambda_{IR}}^{\Lambda_{UV}} dp \frac{M}{E} \rho_{MRE} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(E+\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \right] = 0 , \quad (7.21)$$

con m_o la masa corriente de los quarks (*bare mass*), $N_c = 3$ y $N_f = 2$ los grados de libertad de los quarks de color (*red, green* y *blue*) y sabor (u y d), respectivamente, G la constante de acoplamiento y Λ_{UV} el UV-*cutoff*, $\beta = 1/T$ es la temperatura, μ el potencial químico ambos en MeV. La densidad de estados ρ_{MRE} será dependiendo del tipo de volumen a restringir y es según las ecuaciones (7.11), (7.15) y (7.19) y según sea el caso² se elige el cutoff inferior Λ_{IR} de las ecuaciones (7.10), (7.14) y (7.20).

Los parámetros utilizados, dependiendo del radio R de la esfera y usando las condiciones de Dirichlet (Ecuación 7.11) para aproximar mediante MRE se muestran en la tabla 7.1 y fueron calculados (ver Apéndice Ñ.1) usando $f_\pi = 92$ MeV, $\langle \bar{u}u \rangle = -(244.7)^3$ y $m_\pi = 138$ MeV y considerando una masa corriente de los quarks de $m_o = 5.5$ MeV, de igual modo, para el límite quiral, $m_o = 0$, los parámetros usados se encuentran en la Tabla 7.2. En las Tablas 7.3 y 7.4 se encuentran los parámetros correspondientes utilizando condiciones de Neumann (Ecuación 7.15) y para el cubo ver Tabla 7.6. Para

Tabla 7.1: Parámetros para representar en el modelo NJL una simetría esférica usando MRE_D para para de los quarks $m_o = 5.5$ MeV.

R (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
40	5.47186×10^{-6}	629.015	326.2
30	5.47176×10^{-6}	629.019	326.196
25	5.47163×10^{-6}	629.024	326.191
20	5.47134×10^{-6}	629.034	326.18
10	5.46716×10^{-6}	629.186	326.022

Tabla 7.2: Parámetros para representar en el modelo NJL una simetría esférica usando MRE_D para para de los quarks $m_o = 0$ MeV.

R (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
30	5.5656×10^{-6}	629.019	326.196
20	5.56517×10^{-6}	629.034	326.18
10	5.56097×10^{-6}	629.186	326.022

²En delante siempre y para cualquier caso utilizaremos los subíndices D y N para distinguir la restricción de Dirichlet de la de Neumann.

Tabla 7.3: Parámetros para representar en el modelo NJL una simetría esférica usando MRE_N para para de los quarks $m_o = 5.5$ MeV.

R (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
30	5.47192×10^{-6}	629.013	326.202
20	5.47190×10^{-6}	629.014	326.201
10	5.47164×10^{-6}	629.023	326.192
5	5.46961×10^{-6}	629.097	326.115
1	5.21743×10^{-6}	638.72	316.733
0.5	4.21313×10^{-6}	688.428	282.229

Tabla 7.4: Parámetros para representar en el modelo NJL una simetría esférica usando MRE_N para para de los quarks $m_o = 0$ MeV.

R (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
30	5.56577×10^{-6}	629.013	326.202
20	5.56574×10^{-6}	629.014	326.201
10	5.56548×10^{-6}	629.023	326.192
1	5.30963×10^{-6}	638.72	316.733

Tabla 7.5: Parámetros verificar qué diferencia existe al incrementar el tamaño del radio. La casilla marcada como «sin MRE» corresponde al caso del modelo NJL sin volumen. Hay que notar que la única diferencia es en la constante de acoplamiento fuerte G .

R (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
sin MRE	5.47193×10^{-6}	629.013	326.203
1000	5.56578×10^{-6}	629.013	326.203
100	5.56578×10^{-6}	629.013	326.203

Tabla 7.6: Parámetros para representar en el modelo NJL una simetría cúbica usando MRE para para de los quarks $m_o = 5.5$ MeV.

L (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
1000	5.47193×10^{-6}	629.013	326.203
100	5.47193×10^{-6}	629.013	326.203
30	5.47192×10^{-6}	629.013	326.202
20	5.47189×10^{-6}	629.014	326.201
10	5.47159×10^{-6}	629.025	326.190
7	5.47092×10^{-6}	629.049	326.165
5	5.46917×10^{-6}	629.113	326.098
1	5.17435×10^{-6}	640.463	315.163

Tabla 7.7: Parámetros para representar en el modelo NJL una simetría cúbica usando MRE para para de los quarks $m_o = 0$.

L (fm)	G (MeV ⁻²)	Λ (MeV)	M (MeV)
30	5.56576×10^{-6}	629.013	326.202
20	5.56573×10^{-6}	629.014	326.201
10	5.56543×10^{-6}	629.025	326.19
5	5.56299×10^{-6}	629.113	326.098
1	5.26625×10^{-6}	640.463	315.163

Parámetro de orden en función de la temperatura

En la Figura 7.1 se muestra el parámetro de orden en función de la temperatura para el modelo NJL restringiendo el espacio a un volumen finito mediante la aproximación MRE para una forma esférica con distintos radios y una forma cúbica para distintos tamaños de arista L . En el caso de la esfera con los dos criterios para calcular la densidad de estados ρ_{MRE} , Dirichlet y Neumann, además el caso del límite quiral o bien cuando la masa corriente de los quarks es $m_o = 5.5$ MeV. Se observa que el valor del condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$, que es equivalente a la masa dinámicamente generada M , disminuye conforme aumenta la temperatura T y de igual modo disminuye conforme disminuye el radio de la esfera, así mismo para el límite quiral el valor de la temperatura en la cual se restaura la simetría quiral disminuye conforme disminuye el radio de la esfera. Esto es muy evidente cuando se representa la esfera usando la aproximación MRE con la restricción de Dirichlet, MRE_D (diagramas de arriba en la Fig.7.1) mientras que en el caso de Neumann, MRE_N no se observa una clara diferencia para distintos radios, sólo al utilizar un radio de 1 fm se observa una diferencia y esto es tanto en el límite quiral ($m_o = 0$) como en $m_o = 5.5$ MeV.

En el caso de un cubo el comportamiento es similar, a menor radio, menor es valor de la masa dinámicamente generada y sólo es en el caso de un cubo de arista $L = 1$ fm en donde se puede considerar que en todo momento la fase es de simetría quiral restaurada.

En la Figura 7.2 y la Tabla 7.8 se muestra un resumen de los valores de esta masa dinámicamente generada para T y $\mu = 0$ en el panel izquierdo para el límite quiral y en el derecho cuando la masa corriente de los quarks es $m_o = 5.5$ MeV. Se observa que en el caso de la esfera $_N$ a volúmenes muy pequeños el valor de esta masa M ya es prácticamente el mismo que el que toma cuando no se considera un volumen finito, 10 y 5 fm para el límite quiral y cuando $m_o = 5$ MeV, respectivamente, por otro lado, en la esfera $_D$ aún en $R = 30$ f representa el 88 % del valor de la masa M a volumen infinito.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la existencia del condensado de quarks implica rompimiento de la simetría quiral, así en los pánels izquierdos de la Figura 7.1, se observa que al disminuir el tamaño del volumen, disminuye la temperatura a la cual se restaura la simetría, esto es en el límite quiral. Para el caso en que la masa corriente de los quarks es distinta de cero (lado derecho), esta restauración de la simetría se puede determinar observando la inflexión de la curva del condensado. Este valor disminuye conforme disminuye el valor del radio y tiene sentido, al disminuir el tamaño del recipiente, se necesita menos temperatura para cambiar la fase de la materia contenida en este.

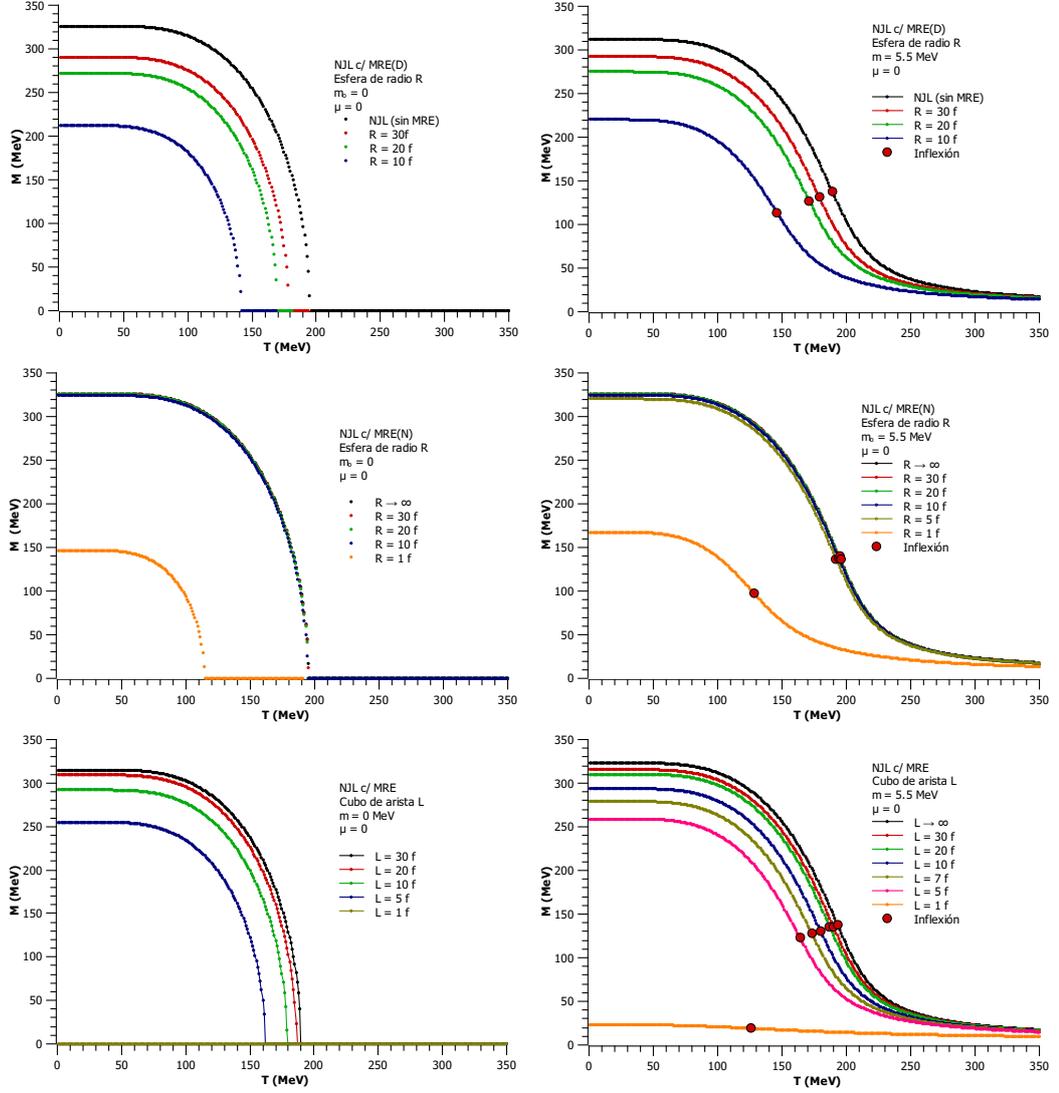


Figura 7.1: Parámetro de orden en función de la temperatura para $\mu = 0$. Modelo NJL a volumen finito usando aproximación MRE para distintos radios R de esfera. Arriba para condiciones de Dirichlet y centro de Neumann. Izquierda límite quiral. Derecha masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV. Abajo un cubo usando aproximación MRE para distintas aristas L . En rojo se indica el lugar del punto de inflexión. En el caso de $m_o \neq 0$ este punto indicaría la restauración de la simetría quiral. En el caso de $m_o = 0$, paneles izquierdos, la restauración de esta simetría ocurre cuando el condensado quiral, $\langle \bar{q}q \rangle \propto M$, es igual a cero.

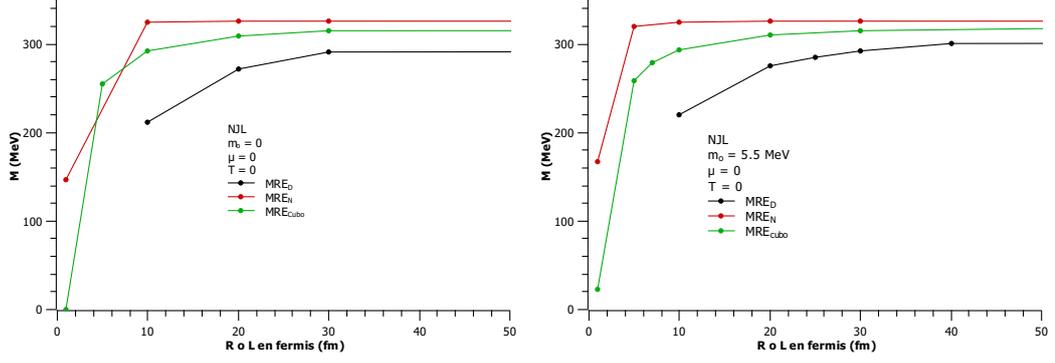


Figura 7.2: Masa dinámicamente generada calculada para $\mu = 0$ y $T = 0$ según el tamaño del volumen de la esfera o el cubo. Izquierda, límite quiral. Por ejemplo, la curva en color negro muestra los valores de esta masa M para radios de 10, 20, 30 y un $R \rightarrow \infty$, para MRE_D . En este caso se observa que a partir de un $R = 30$ fm la masa M es equivalente al caso de un volumen infinito. Por otro lado, para la esfera MRE_N esto ocurre ya a partir de un $R = 10$ fm

En la figura 7.3 y la tabla 7.9 se resume lo anterior para el caso en equilibrio de $\mu = 0$. A mayor volumen, mayor temperatura en la que ocurre la restauración de la simetría quiral y nuevamente en el caso de la esfera_N los valores son mayores con respecto a la restricción de Dirichlet y para el cubo los valores son intermedios con respecto a los dos tipos de esfera, en particular es notable la similitud entre las curvas de las figuras 7.2 y 7.3.

Al considerar un potencial finito, es decir $\mu \neq 0$, el comportamiento del condensado cuando el volumen cambia es similar al caso en que no hay restricción de volumen (Sección 6.3). En las Figs. 7.4 y 7.5 se muestra en detalle esta situación para ambos casos, MRE_D y MRE_N , para distintos valores de potencial químico μ y distintos radios R de esfera. En la Figura 7.6 se muestra el cubo.

En todos los casos se superponen las curvas de condensado en función de la temperatura para diversos valores de μ , desde el caso de equilibrio $\mu = 0$, pasando por un valor alto de $\mu = 300$ MeV y en el siguiente valor se colocó el valor de μ en donde se propone que ocurre el CEP (de la curva de susceptibilidad de la Figura 7.9 se localiza el valor de T en el cual la susceptibilidad crece de manera que la pendiente entre valores consecutivos sea cercana a 90° . Este valor de T tiene asociado un valor de μ que es precisamente con este par (μ, T) que se construye el diagrama de fase y es el que se graficó en esta figura). También se muestra una curva para un potencial μ mayor, todo esto para estudiar el comportamiento del condensado conforme aumentamos la diferencia de potencial químico hasta

Tabla 7.8: Masa dinámicamente generada (T y $\mu = 0$) considerando el modelo NJL restringido a un volumen finito utilizando aproximación MRE para una esfera de radio R y un cubo de arista L . Panel de arriba en el límite quiral, panel abajo masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV.

NJL MRE ($m_o = 0, T = 0, \mu = 0$)			
Masa M en MeV			
R/L (f)	Esfera $_D$	Esfera $_N$	Cubo
$R \rightarrow \infty$	315.718	326.188	322.87
30	290.658	326.025	315.036
20	272.155	325.779	309.364
10	212.156	324.44	291.952
5	–	–	254.968
1	–	146.87	0

NJL MRE ($m_o = 5.5$ MeV, $T = 0, \mu = 0$)			
Masa M en MeV			
R/L (f)	Esfera $_D$	Esfera $_N$	Cubo
$R \rightarrow \infty$	316.191	326.188	323.024
40	300.976	–	–
30	292.413	326.032	315.541
25	285.5	–	–
20	275.015	325.82	310.139
10	220.146	324.679	293.63
7	–	–	279.077
5	–	320.158	259.022
1	–	167.325	23.0668

llegar a valores extremos. En ambos casos, MRE_D y MRE_N , las curvas se van comportando según lo esperado, al acercarse a cierto valor de potencial μ se tiene una divergencia y coincide, o bien, sugiere que ahí se encontrará el CEP (curvas en color verde para los radios 40, 30 y 25 fm) en el caso de $R = 20$ fm no hay un claro indicio de divergencia, es decir, las curvas son suaves y en particular, más adelante, veremos que en una esfera con este radio no se manifiesta el CEP.

Para el caso de Neumann, ocurre lo mismo con la diferencia de que para distintos radios, 30, 20 y 5 fm, no hay prácticamente diferencia y en la curva verde se observa un indicio de divergencia, los puntos «se despegan», si el radio es 1 fm las curvas del condensado son suaves por lo que no hay indicios de que ocurra que exista el CEP.

En el caso del cubo, Figura 7.6, se muestra la misma situación, para $L = 30, 20$ y 10 fm la curva en color verde corresponde al potencial μ que se estableció corresponde al CEP. En el caso de $L = 7$ fm todas las curvas son «suaves», es

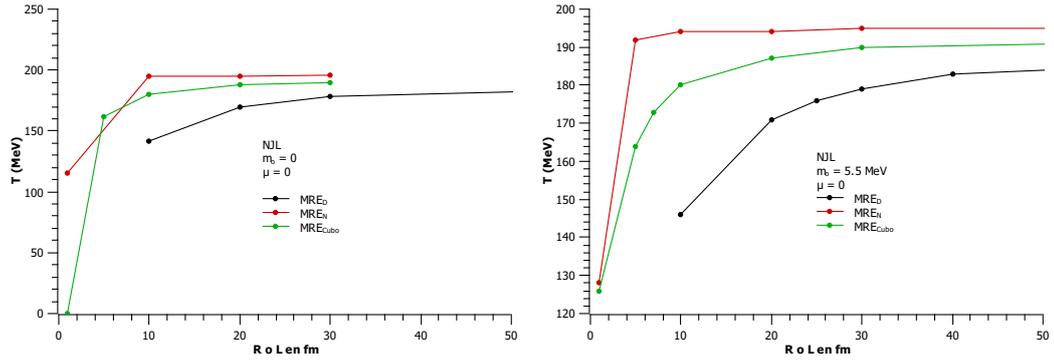


Figura 7.3: Temperatura en la cual ocurre el cambio de fase de simetría rota a restaurada en $\mu = 0$ según el modelo NJL a volumen finito usando aproximación MRE para una esfera y un cubo. Izquierda en el límite quiral es la temperatura en la cual el condensado quiral (o bien la masa M) toma el valor cero. Derecha, masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV, en este caso es la temperatura en la cual ocurre el cambio de concavidad de la curva de la masa M .

decir, no hay indicios de divergencia y esto se confirma también en la siguiente sección.

Hasta este punto el análisis es la solución de la ecuación de gap y de ésta, la información es el valor del condensado dependiendo de los valores de T y μ dados. Si este condensado es distinto de cero la fase del sistema es de simetría quiral rota y si es cero, la simetría está restaurada y es claro de la ecuación de gap (7.21) que si $m_o \neq 0$, entonces M nunca puede valer cero. De aquí que en este momento no nos sea posible determinar si la simetría se restaura. Ya en la sección 6.2 vimos cómo salvar esta dificultad utilizando el concepto de susceptibilidad quiral, el cual implica cómo varía el potencial termodinámico con respecto al parámetro de orden, en ese caso el condensado quiral. Una vez calculada la susceptibilidad quiral χ se puede construir el diagrama de fase y de aquí poder determinar la localización del CEP en caso de que exista.

En las Figuras 7.4, 7.5 y 7.6 se apuntó que a partir de cierto valor μ se localizaba o podía localizar el CEP bajo cierto comportamiento de los valores calculados del condensado, esto contraponiéndose con lo dicho líneas arriba. Como ya se refirió anteriormente, esto solo es una pista que se puede extraer del cálculo del condensado y se vuelve evidente sólo después de calcular la susceptibilidad quiral, de aquí que no parece ser utilizado como una manera de determinar si existe o no aunque en esencia la susceptibilidad quiral y el punto de inflexión del condensado son los mismo. Los autores consideramos que ambos modos se complementan. En la siguiente sección se estudia a fondo la susceptibilidad para este caso de volumen finito y la determinación del CEP.

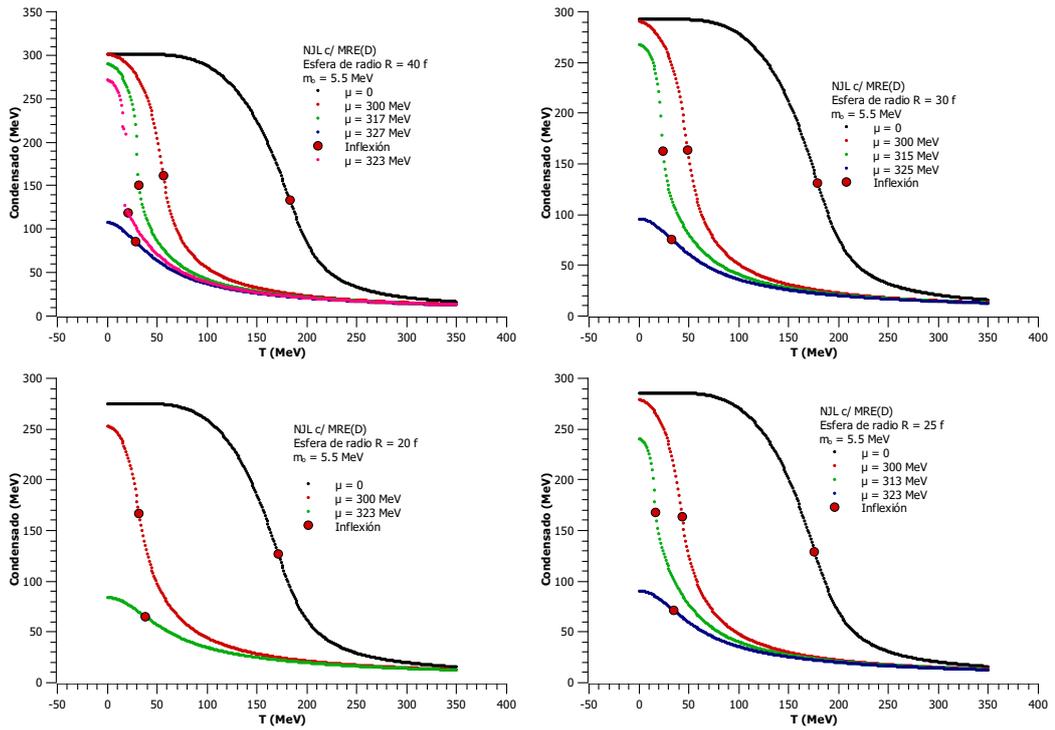


Figura 7.4: Parámetro de orden en función de la temperatura para diferentes valores de potencial μ . Arriba a la izquierda y en sentido de las manecillas del reloj de $R = 40$ hasta 20 fm. Esfera de radio R en el modelo NJL_D con masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV. En rojo se indica el punto de inflexión de la curva. Cambios bruscos en el condensado están relacionados con el cambio de fase

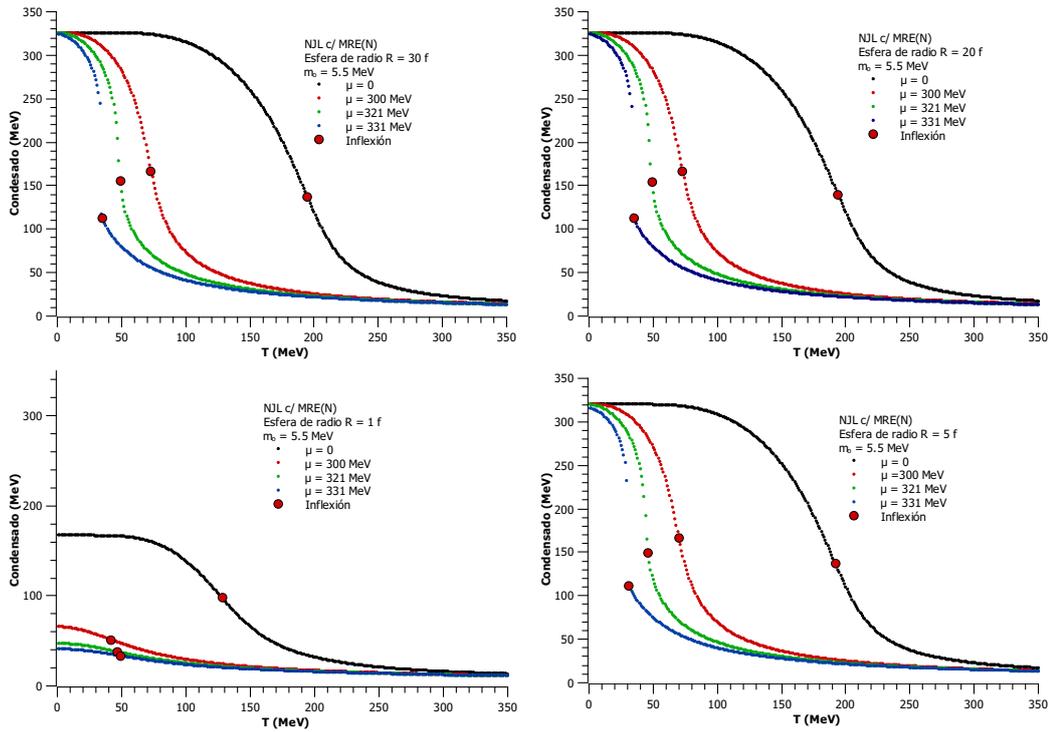


Figura 7.5: Parámetro de orden en función de la temperatura para diferentes valores de potencial químico μ . Arriba a la izquierda y en sentido de las manecillas del reloj de $R = 30, 20, 5$ y 1 fm. Esfera de radio R en el modelo NJL_N con masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV.

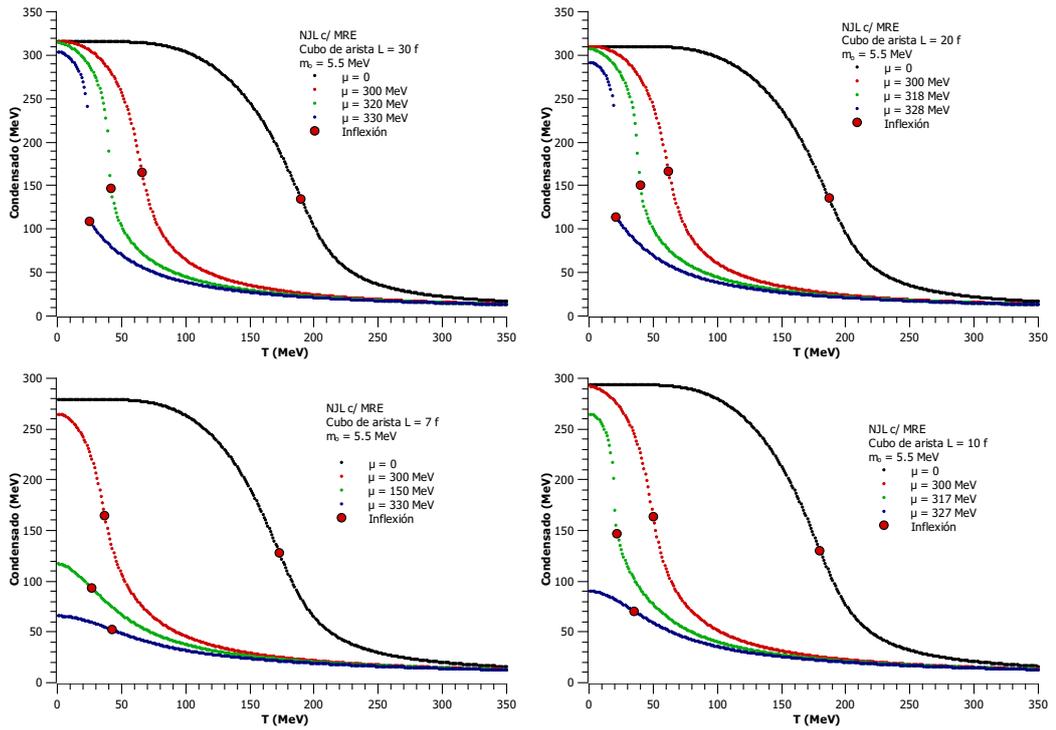


Figura 7.6: Parámetro de orden en función de la temperatura modelo NJL a volumen finito de forma cúbica de arista L utilizando aproximación MRE para diferentes valores de potencial químico con masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV. De arriba a la izquierda y en sentido de las manecillas del reloj de $L = 30, 20, 10$ y 7 fm.

Tabla 7.9: Temperaturas en las que ocurre el cambio de fase de simetría quiral. Izquierda, límite quiral. Derecha, masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV. Modelo NJL restringido a volumen finito utilizando aproximación MRE para esfera y cubo de diferentes tamaños con potencial químico $\mu = 0$.

NJL MRE ($m_o = 0, \mu = 0$)				NJL MRE ($m_o = 5.5$ MeV, $\mu = 0$)			
Temp / cambio de fase en MeV				Temp / Inflexión en MeV			
R/L (fm)	MRE _D	MRE _N	Cubo	$R \rightarrow \infty$	MRE _D	MRE _N	Cubo
$R \rightarrow \infty$	191	–	–	$R \rightarrow \infty$	189	195	193
30	178	196	190	40	183	–	–
20	170	195	188	30	179	195	190
10	142	195	180	25	176	–	–
5	–	–	162	20	171	194	187
1	–	115	0	10	146	194	180
				7	–	–	173
				5	–	192	164
				1	–	128	126

Susceptibilidad Quiral y Temperatura crítica

Como ya se vió anteriormente la susceptibilidad quiral χ nos da información acerca del comportamiento de las soluciones de la ecuación de gap y divergencias en esta χ implican ceros en la ecuación de gap y éstos a su vez implican cambios en la fase de la que se esté tratando.

La temperatura crítica T_c como la define [88] es aquella en la cual ocurre el «pico» de la susceptibilidad quiral, por otro lado, en [69] esta temperatura crítica se define como aquella que «corresponde al valor de la temperatura a potencial químico cero donde se encuentra la zona de coexistencia de fases», esta zona de coexistencia de fases es la zona llamada de *crossover* que es la que ocurre cuando en el modelo se considera la masa corriente de los quarks diferente de cero. Esta zona precisamente es la que determina la curva del diagrama de fase el cual se construye a partir de la susceptibilidad quiral, y siendo más precisos este diagrama se construye con el valor máximo (el «pico») de cada susceptibilidad quiral, es decir, ambas definiciones son equivalentes aunque de inicio no lo parecieran. Mencionamos esto ya que en la sección anterior obtuvimos una temperatura en la cual suponemos ocurre el cambio de fase de simetría quiral para $\mu = 0$ y dependiendo de si es $m_o = 0$ o si es $m_o \neq 0$, entonces esta temperatura es aquella en la que ocurre que el condensado vale cero o tiene un cambio de concavidad, respectivamente. Lo anterior resulta ser similar a la definición de temperatura crítica T_c .

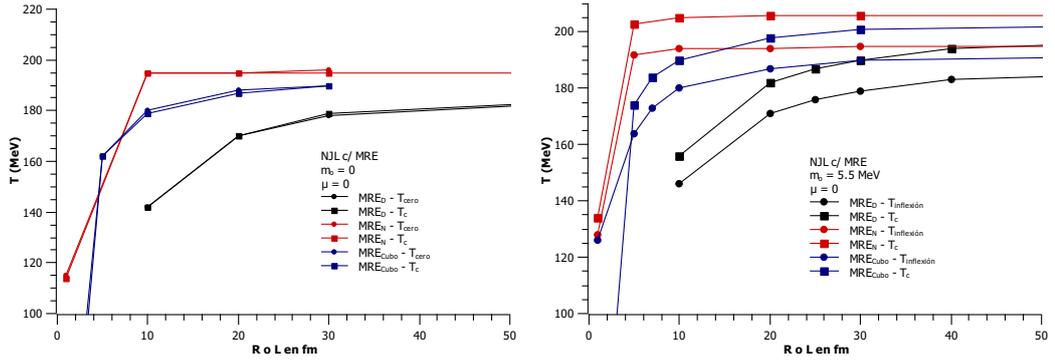


Figura 7.7: Comparación entre temperaturas, para $\mu = 0$, panel izquierdo cuando el condensado se hace cero vs la temperatura crítica. Panel derecho, temperatura en la que ocurre la inflexión de la curva del condensado vs la temperatura crítica.

En la Tabla 7.10 se muestran estos valores de T_c para $\mu = 0$ para los diferentes tamaños de volumen y en la Figura 7.7 se muestra la comparación entre estos dos conceptos, es decir, la temperatura a la cual el condensado se hace cero (Figura 7.3 y Tabla 7.9) vs la temperatura crítica que es la cual en la que ocurre que la susceptibilidad alcanza el máximo cuando $m_o = 0$ y la temperatura a la cual ocurre la inflexión en la curva del condensado vs esta temperatura crítica. En el lado izquierdo se muestra el caso en el límite quiral y cada color representa un tipo de geometría y los círculos corresponden a la temperatura cero que se vio en la sección anterior y los rectángulos corresponden a la T_c . Como se puede observar la diferencia entre ambas curvas es muy pequeña. En el lado derecho de la figura se muestra el caso $m_o = 5.5$ MeV, si se leen los valores de manera individual, es decir, por ejemplo para $R_D = 30$ fm se tienen temperaturas de 179 y 190 MeV y para cada R existen diferencias de alrededor de esa magnitud y en la figura es lo que se observa, ambas curvas tienen un patrón similar.

De aquí se puede concluir que en el límite quiral para determinar la temperatura en la cual ocurre el cambio de fase no hay diferencia entre usar la susceptibilidad quiral o bien, localizar el punto en el cual el condensado se hace cero. En el caso de una masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV ocurre que hay una cierta diferencia entre usar la susceptibilidad quiral y el punto de inflexión. Lo interesante es que la magnitud de la diferencia es casi la misma al ir incrementando el tamaño del volumen y no importando su forma.

Esta es una razón por la cual consideramos que el punto de inflexión de la curva del condensado (o en su caso, el cero) nos da una idea muy cercana a la localización del CEP.

Tabla 7.10: Temperatura crítica a $\mu = 0$. Izquierda, límite quiral. Derecha, masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV. Modelo NJL restringido a volumen finito utilizando aproximación MRE para esfera y cubo de diferentes tamaños con potencial químico $\mu = 0$.

NJL MRE ($m_o = 0, \mu = 0$)				NJL MRE ($m_o = 5.5$ MeV, $\mu = 0$)			
Temp. Crítica T_c en MeV				Temp. Crítica T_c en MeV			
R/L (fm)	MRE _D	MRE _N	Cubo	R/L (fm)	MRE _D	MRE _N	Cubo
30	179	195	190	40	194	–	–
20	170	195	187	30	190	206	201
10	142	195	179	25	187	–	–
5	–	–	162	20	182	205	198
1	–	114	16	10	156	205	190
				7	–	–	184
				5	–	203	174
				1	–	134	15

Diagrama de Fase para NJL utilizando MRE

En la Figura 7.8 se muestra el diagrama de fase para una región esférica de diferentes radios y una cúbica para diferentes longitudes de arista L utilizando el modelo NJL y restringiendo su volumen mediante la aproximación MRE_(D) (arriba), MRE_(N) (centro) según si se utiliza la restricción de Dirichlet o Neumann y en el panel inferior un cubo MRE.

Como se puede observar, a menor volumen la temperatura en que ocurre el cambio de fase de simetría quiral disminuye, en esta figura se muestra el caso de un sistema de quarks con masa corriente $m_o = 5.5$ MeV. A la izquierda se muestra como referencia el límite quiral y a la derecha el caso $m = 5.5$ MeV y como era de esperarse, a menor radio con un potencial fijo μ , la temperatura en la cual la simetría quiral está rota, o se restaura, disminuye. En todos los casos las curvas se comportan de manera similar, es decir, no se traslapan o presentan saltos salvo al final, al llegar a los valores más bajos de temperatura, en todos los casos los valores obtenidos numéricamente comienzan a mostrar algunas irregularidades esto debido a que el método de solución ya no encuentra soluciones y ya sea que las omite, o bien, arroja resultados que no convergen.

En el caso de MRE_(N) (centro) todas las curvas se puede decir que se superponen, no fue posible modificar la escala para mostrar alguna diferencia perceptible aunque en la tabla de valores se observa la diferencia, que es en ocasiones es de alrededor de 1 MeV. Como en el caso del diagrama de condensado vs temperatura, para radio de 1 fm ya se observa una diferencia. En este caso se pudieron

obtener diagramas de fase para tamaños de radio de 1 fm inclusive.

Para el caso del cubo (abajo) hay diagrama de fase al menos para volúmenes de cubos de arista $L = 5$ fm o más, para $L = 1$ fm si hay soluciones pero son casi cero. Hacemos esta aclaración ya que hay casos en que para cierto tamaño de volumen no hay soluciones numéricas, o bien, existen sólo para cierto intervalo de valores de potencial químico μ y este no fue el caso, hay soluciones en todo el intervalo de μ y no son cero, son valores casi cero.

Finalmente, en esta misma figura, se muestra la localización del CEP el cual, a menor radio se presenta a menor potencial químico y temperatura y para el caso $MRE_{(D)}$ no existe para el radio de 20 fm y menores a este.

Es importante aclarar que la elección de los radios es completamente arbitraria y por ejemplo, en el caso $MRE_{(D)}$ se observa que para $R = 25$ fm existe CEP pero en $R = 20$ fm ya no aparece, es natural preguntarse en qué valor exacto existe y en que valor de R ya no existe. Esta pregunta se puede responder resolviendo para valores de R cada vez menores en una unidad, pero no hay garantía de encontrar el valor exacto, podría ser un valor de R no-entero. Los autores consideramos que determinar el valor exacto podría ser de alguna manera infructuoso considerando que la localización del CEP se determinó de manera arbitraria para valores en los cuales la pendiente se acerca a 89° , lo cual es una aproximación.

Acerca del CEP en el caso de MRE_N , como se observa en la Fig.7.8 todas las curvas propuestas para los radios propuestos, a excepción de $R = 1$ fm, presentan existencia de CEP y prácticamente en la misma localización, esta variación es consistente con lo esperado, es decir, la temperatura de la localización disminuye en 2 MeV de un radio $R \rightarrow \infty$ a $R = 5$ fm. Para el cubo existe CEP hasta volúmenes de arista al menos $L = 10$ fm o más, ya en 7 y menores no existe.

Cómo determinar el CEP en estas curvas. A partir de la susceptibilidad asociada a cada par (μ, T) del diagrama de fase se traza la Figura 7.9 en donde se muestra el comportamiento de las susceptibilidades máximas para cada potencial químico μ en función de la temperatura. Para el caso de MRE_D en una esfera de diferentes radios (arriba a la izquierda) se observa que las curvas para radios infinito, 40, 30 y 25 fm presentan comportamiento asintótico y éste indica la posible existencia del CEP³. Para localizarlo sistemáticamente tomamos como referencia el lugar de la curva en donde ocurre el crecimiento mayor. En el caso, por ejemplo, de $R = 30$ fm, ocurre en $\mu = 317$ MeV donde el crecimiento es de 89.62° (Fig.7.9).

³En realidad determinar «a simple vista» si es asintótico o no presenta cierta dificultad. Al ser resultados numéricos, nos limitamos a verificar la diferencia entre puntos consecutivos.

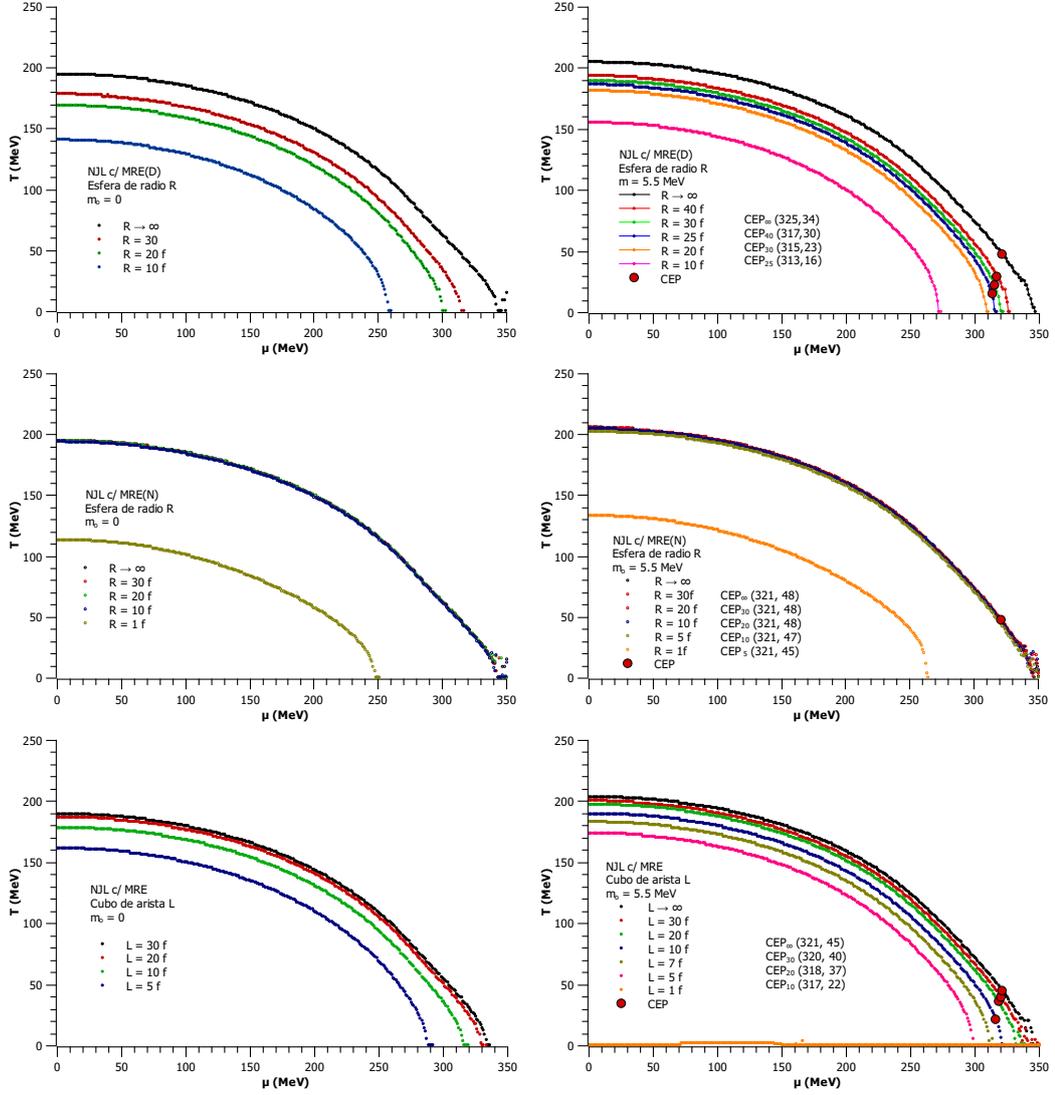


Figura 7.8: Diagrama de Fase para un sistema restringido a una región esférica de radio R utilizando el modelo NJL con aproximación MRE en condiciones de Dirichlet arriba izquierda y derecha, masa corriente cero y 5.5 MeV. Centro, MRE_N con masa-cero y masa corriente $m_o = 5.5$ MeV a la izquierda y derecha, respectivamente. Abajo, cubo de lado L . En rojo se indica la localización del CEP. Como referencia en el panel de arriba a la izquierda se graficó como $R \rightarrow \infty$ el NJL sin MRE mientras que en los páneles del centro y abajo se utilizó $R = 100$ fm que para fines prácticos debía considerarse como un valor infinito.

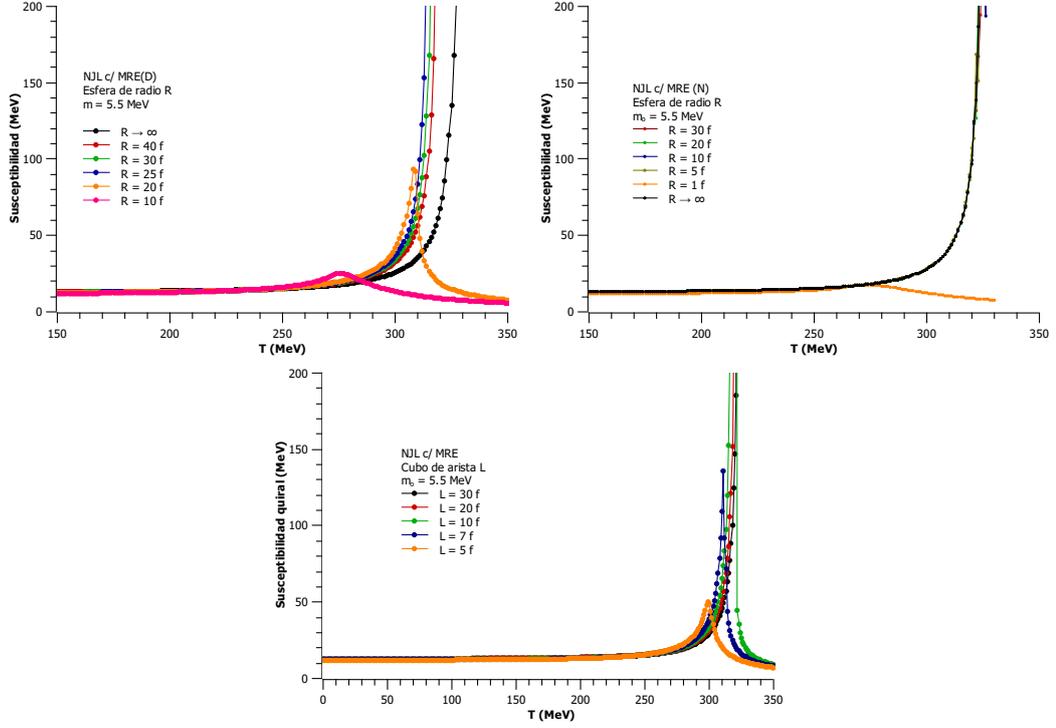


Figura 7.9: Comportamiento de la susceptibilidad quiral para diferentes radios R de esfera utilizando el modelo NJL con MRE. Izquierda, MRE_D . Para un radio de esfera infinito y de tamaño 30 f se observa el comportamiento asintótico que indica la posible existencia del CEP. En $R = 20$ fm la curva parece tener un crecimiento asintótico pero numéricamente la inclinación máxima es de 85.5° , mientras que para $R = 10$ fm apenas alcanza los 34.02° . Derecha, MRE_N . Para distintos radios en un espectro de 5 fm hasta un radio de 100 fm (que tomamos como infinito) no se observa variación alguna. Sólo el radio de 1 fm muestra un comportamiento diferente. Abajo, para el cubo de arista L se observa posible comportamiento asintótico en $L = 30, 20, 10$ y 7 fm. A detalle en $L = 7$ (Figura 7.12) se muestra que no lo es, por lo que no se presenta CEP.

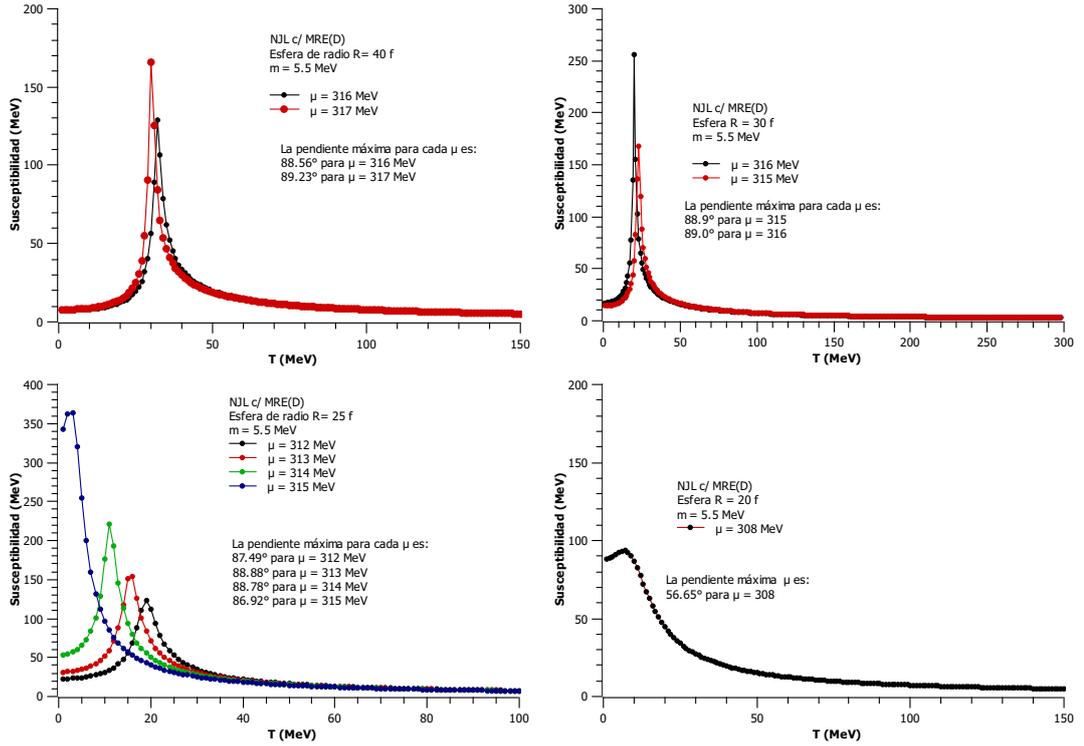


Figura 7.10: Susceptibilidad para distintos valores de potencial μ en el caso de una esfera en la aproximación MRE_D para el modelo NJL con masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV. Arriba izquierda esfera de radio $R = 40$ fm. Derecha esfera de radio $R = 30$ fm. Abajo izquierda, para $R = 25$ fm, susceptibilidad quiral para $\mu = 312$ al 315 MeV y se alcanzan 88.88° . Derecha, $R = 20$ fm la máxima inclinación se localiza en $\mu = 308$ y es de 56.65° .

Al analizar la susceptibilidad de manera individual, es decir, para $\mu = 317$ y en valores cercanos a este, se grafica cada susceptibilidad en función de la temperatura como se muestra en la Figura 7.10. En esta se observa que prácticamente hay una divergencia⁴ desde $\mu = 315$ MeV, recordando que las estamos considerando cuando el crecimiento alcanza los 89° y además que la localización del CEP se está tomando como el lugar donde ocurre la primer divergencia en las susceptibilidades, por esta razón no fue necesario analizar la curva para $\mu = 317$ que es el lugar donde supusimos que se encontraría. De aquí que se proponga como la localización del CEP en $\mu = 315$ es en donde se marcó en la Figura 7.8. En resumen, de la gráfica de la susceptibilidad máxima de la Fig. 7.9 buscamos en qué valor de μ hay un crecimiento muy grande y a partir de este valor, de manera individual, se explora para cada μ cercana a esta cuándo ocurre una divergencia. La primera que se localiza es la que corresponde al CEP buscado.

Regresando a la Figura 7.9 para $R = 20$ fm tenemos que el mayor crecimiento fue de 85.5° en $\mu = 308$ MeV y a pesar de que es un incremento considerable no es suficiente para considerar que existe una divergencia y por lo tanto para este caso el CEP no existe. Esto se muestra en la gráfica de abajo a la derecha de la Figura 7.10 en donde aparece la curva de susceptibilidad quiral para este potencial de 308 MeV, el crecimiento máximo entre dos puntos consecutivos de esta apenas alcanza los 56.65° por lo que, como habíamos supuesto observando la Figura 7.9, no existe CEP para este radio $R = 20$ fm. De igual modo, para $R = 10$ fm no existe CEP (no se muestra en la figura).

En la Figura 7.11 se muestra la mismo para el caso de MRE_N y como ha ocurrido desde el condensado, no hay variaciones apreciables en los diagramas, decimos pues que con esta restricción el modelo no es sensible al tamaño del volumen. De igual modo se muestran los resultados para el cubo en la Figura 7.12.

En la Tabla 7.11 se resume la localización de los CEP propuestos para este modelo NJL con volumen finito considerando la aproximación MRE y masa de los quarks de $m_o = 5.5$ MeV.

Es pertinente hacer una aclaración referente a esta sección. Acerca de la localización del CEP, a la fecha no existe un consenso acerca de cómo determinar si existe o no el CEP en el caso de un volumen infinito (es decir, sin restricciones de volumen) ni tampoco de la manera en que se determine su localización. A esto hay que sumarle que el tipo de regularización usada y los parámetros calculados para resolver la ecuación de gap hacen que las soluciones varíen dependiendo del caso.

⁴De nuevo, realizar una resta entre valores consecutivos de susceptibilidad y buscar la mayor de estas.

Existen trabajos extensos que estudian las diferencias en las soluciones obtenidas dependiendo del tipo de regularización [47, 51, 49, 77]. Estos tipos de regularización se utilizan dependiendo del tipo de método utilizado para resolver el modelo, si se resuelve usando LQCD, o bien, métodos perturbativos o no-perturbativos. Así mismo no se está considerando la intensidad o la magnitud del valor de la susceptibilidad. En particular hay un detalle acerca de la temperatura en la cual ocurre la divergencia de la susceptibilidad. Cuando se establece que una curva de susceptibilidad presenta una divergencia para cierto potencial μ , esta divergencia ocurre en cierto valor de temperatura, pero esta temperatura no es la misma que la que corresponde al diagrama de fase, esto es porque el diagrama de fase se construye con la temperatura en que ocurre el máximo de la susceptibilidad pero ya se vio que la divergencia de la susceptibilidad puede ocurrir antes de llegar a esta temperatura en que ocurre el máximo.

En [51] se propone construir el diagrama de fases con un criterio distinto al usual definiendo un criterio global y otro local. El resultado de esto son dos diagramas de fase que superpuestos, al incrementar el valor de μ se van «acercando» de manera que a partir de cierto valor de potencial μ coinciden y al seguir incrementándose μ se convierten en una sola línea. Lo relevante de esto es que ese punto de convergencia es el CEP.

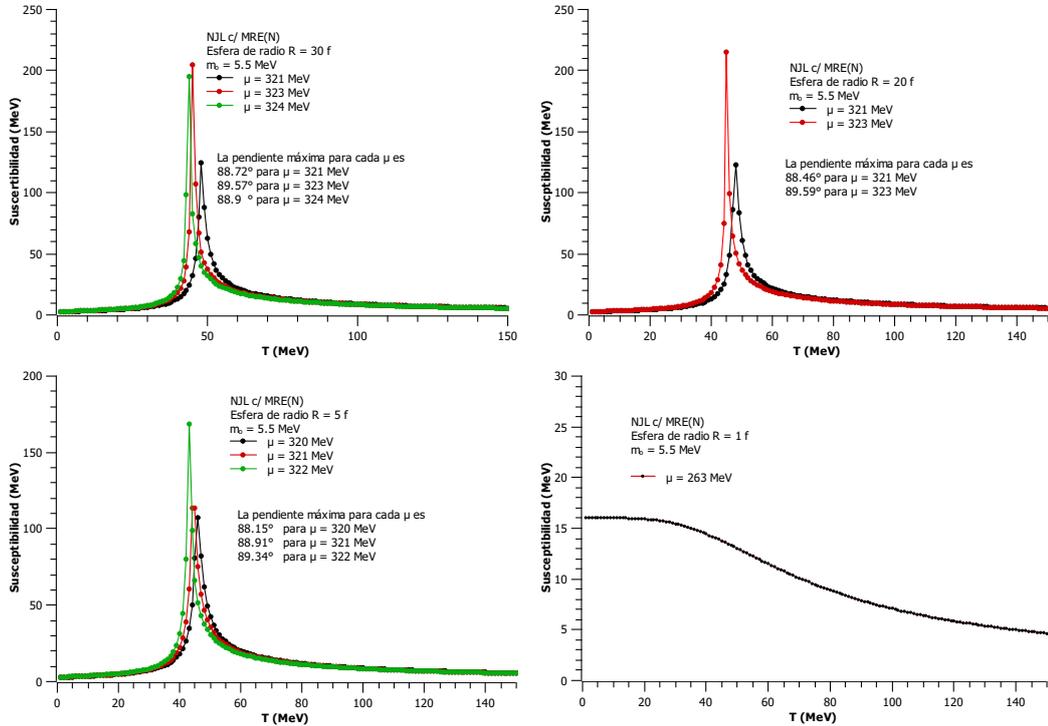


Figura 7.11: Susceptibilidad quiral para el caso de una esfera en la aproximación MRE del modelo NJL utilizando condiciones de Neumann y con masa corriente de los quarks de 5.5 MEV. En $L = 1$ fm no se observa una divergencia en esta susceptibilidad luego no hay condiciones para afirmar que exista CEP.

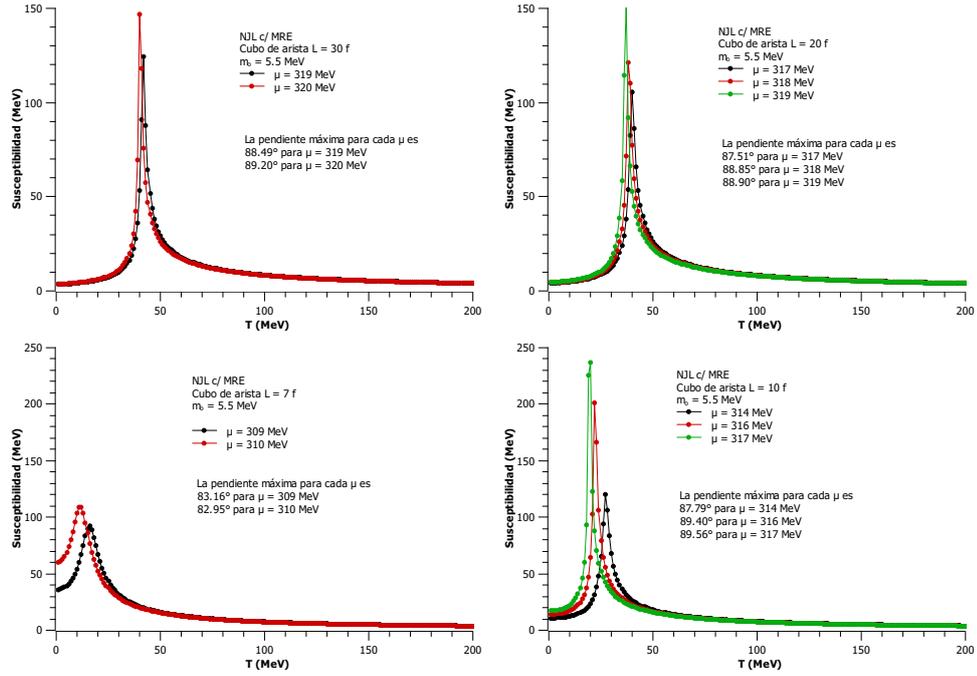


Figura 7.12: Susceptibilidad quiral cubo de arista L obtenido de aproximación MRE. En sentido de las manecillas del reloj longitudes $L = 30, 20, 10$ y 7 fm. Valores de pendiente cercanos a 89° se consideraron como divergencias. En $L = 7$ fm el máximo valor alcanzado no se considera como tal.

Tabla 7.11: CEP para distintos tamaños de volumen y distintas aproximaciones MRE de una esfera de radio R y cubo de arista L .

NJL MRE _D Esfera		NJL MRE _N Esfera		NJL MRE Cubo	
R (fm)	CEP (μ, T)	R (fm)	CEP (μ, T)	R (fm)	CEP (μ, T)
$R \gg 1$	(325, 34)	$R \gg 1$	(321, 48)	$R \gg 1$	(321, 45)
40	(317, 30)	30	(321, 48)	30	(320, 40)
30	(315, 23)	20	(321, 48)	20	(318, 37)
25	(313, 16)	10	(321, 47)	10	(316, 22)
$R \leq 20$	–	5	(321, 45)	$R \leq 7$	–
		$R \leq 1$	–		

7.2. Aproximación mediante Condiciones en la Frontera

Para hacer un estudio de un sistema con volumen finito además de obtenerlo a partir de la aproximación MRE, es posible hacerlo estableciendo condiciones en la frontera en el sistema.

Dependiendo del método de solución, es aceptado usar condiciones periódicas y antiperiódicas a la frontera (PBC y APBC, por sus siglas en inglés respectivamente) según si se utilizan LQCD o teorías efectivas. Hasta la fecha no hay un consenso sobre el tipo de condiciones a la frontera que se deben usar. Siguiendo a Wang [55] estos dos esquemas no satisfacen el requisito de encerrar en un volumen finito materia en algún estado o fase, es decir, esta condición implica que el campo de los quarks tome valor cero fuera de cierta frontera definida. Esto se logra estableciendo condiciones de onda estacionarias (SWC).

A continuación se va a restringir mediante condiciones a la frontera la ecuación de gap (5.26) para $\mu = 0$ y temperatura finita

$$M - m_o + 4GN_c N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left[1 - f^{(+)} - f^{(-)} \right] = 0 . \quad (7.22)$$

El esquema de regularización que usaremos será el llamado *Proper Time Regularization* o PTR (Sección 5.3.2) por lo que la ecuación de gap (7.22) ya regularizada usando la ecuación (5.45) tiene la forma

$$M = m_o - 4GN_c N_f MT \int_{\tau_{UV}}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau M^2} \Theta_2[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau}] e^{-\tau p^2} . \quad (7.23)$$

Condiciones Periódicas a la Frontera (PBC)

Sin perder generalidad, para una función $f(x)$ con x en una dimensión y un periodo espacial L que en nuestro caso definirá el tamaño de un volumen, una condición periódica a la frontera significa que los valores de f se repiten en intervalos de x a $x + L$, es decir, $f(x) = f(x + L)$, a L se le llama el periodo de la función y en nuestro caso será el tamaño o la frontera del volumen que utilizemos. Así para una función de la forma $f_p(x) = e^{ipx}$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} e^{ipx} &= e^{ip(x+L)} = e^{ipx} e^{ipL} \\ 1 &= e^{ipL} , \end{aligned} \quad (7.24)$$

y como $e^{i2n\pi} = 1$, se tiene que $pL = 2n\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, entonces el momentum p depende de n , así que

$$p_n = \frac{2n\pi}{L} \longrightarrow p_n^2 = \frac{4n^2\pi^2}{L^2} , \quad (7.25)$$

luego, para la suma de todas las n es

$$\sum_n p_n^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_n n^2, \quad (7.26)$$

donde p es un 3-momentum de modo que $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$. Luego utilizando la relación $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_p$ se establece la discretización de la integral y usando (7.26) se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau p^2} &\rightarrow \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} e^{-\tau p^2} = \frac{1}{L^3} \sum_{n_x n_y n_z} \exp \left[\frac{-4\pi^2\tau}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \right] \\ &= \frac{1}{L^3} \left[\sum_n e^{-4\pi^2 n^2 \tau / L^2} \right]^3, \end{aligned} \quad (7.27)$$

lo anterior es siempre que ocurra que $n_x = n_y = n_z$ y, usando la función de Jacobi $\Theta_3[0, q] = \sum_n q^{n^2}$ la podemos escribir de una manera que es fácil de manipular numéricamente, así definiendo $q \equiv e^{-4\pi^2\tau/L^2}$ se tiene que

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau p^2} \rightarrow \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} e^{-\tau p^2} = \frac{1}{L^3} \left\{ \Theta_3[0, e^{-4\pi^2\tau/L^2}] \right\}^3. \quad (7.28)$$

Por lo tanto, la ecuación de gap (7.23) restringida a condiciones periódicas a la frontera es

$$M = m_o - 4GN_c N_f MT \int_{\tau_{UV}}^{\infty} d\tau e^{-\tau M^2} \Theta_2[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau}] \frac{1}{L^3} \left\{ \Theta_3[0, e^{-4\pi^2 \tau / L^2}] \right\}^3. \quad (7.29)$$

Condiciones Antiperiódicas a la Frontera (APBC)

De igual modo, para las condiciones antiperiódicas a la frontera que se definen como $f_p(x) = -f_p(x + L)$, es decir, en cada intervalo de tamaño x a $x + L$, la función f toma los mismos valores pero con signo opuesto, de aquí se obtiene el resultado siguiente

$$\begin{aligned} e^{ipx} = -e^{ip(x+L)} &= -e^{ipx} e^{ipL} \\ -1 &= e^{ipL}, \end{aligned}$$

y en este caso, $e^{i(2n+1)\pi} = -1$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, por lo que $pL = (2n + 1)\pi$ y entonces

$$p_n = \frac{(2n + 1)\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.30)$$

y la forma que se necesita es p^2 por lo que para todos los valores de n se llega a

$$\sum_n p_n^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_n \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (7.31)$$

así que podemos escribir

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau p^2} &\rightarrow \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} e^{-\tau p^2} = \frac{1}{L^3} \sum_{n_x n_y n_z} \exp \left[\frac{-4\pi^2}{L^2} \left[(n_x + 1/2)^2 + (n_y + 1/2)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (n_z + 1/2)^2 \right] \right] \\ &= \frac{1}{L^3} \left[\sum_n e^{(-4\pi^2\tau/L^2)(n+1/2)^2} \right]^3 \end{aligned} \quad (7.32)$$

de tal suerte que la función Θ_2 de Jacobi se define, a diferencia de Θ_3 , para incrementos de $(n + 1/2)$ y es de esta manera

$$\Theta_2[z, q] = \sum_n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz}, \quad (7.33)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, haciendo $q = e^{(-4\pi^2\tau/L^2)}$ y $z = 0$, entonces

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau p^2} \rightarrow \frac{1}{L^3} \Theta_2[0, e^{(-4\pi^2\tau/L^2)}] \quad (7.34)$$

La ecuación de gap restringida a condiciones antiperódicas a la frontera que se obtiene es

$$M = m_o - 4GN_c N_f MT \int_{\tau_{UV}}^{\infty} d\tau e^{-\tau M^2} \Theta_2[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau}] \frac{1}{L^3} \left\{ \Theta_2[0, e^{(-4\pi^2\tau/L^2)}] \right\}^3. \quad (7.35)$$

Condiciones de Onda Estacionarias (SWC)

Las SWC imponen la condición de que la partícula no escape de la caja de lado L , es decir, se establecen cuando la función (el campo) vale cero en los extremos de un intervalo de longitud L , $f(x=0) = f(x=L) = 0$, así se tiene que $e^{ipL} = 0$ de donde se desprende que, $p_n = n\pi/L$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\sum_n p_n^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_n n^2, \quad (7.36)$$

y de igual modo como se hizo para obtener (7.28) y (7.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau p^2} &\rightarrow \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} e^{-\tau p^2} = \frac{1}{L^3} \sum_{n_x n_y n_z} \exp \left[-\frac{\pi^2\tau}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \right] \\ &= \frac{1}{L^3} \left[\sum_n e^{-\pi^2\tau n^2/L^2} \right]^3, \end{aligned} \quad (7.37)$$

nuevamente, con la función Θ_3 de Jacobi se tiene que

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-\tau\mathbf{p}^2} \rightarrow \frac{1}{L^3} \left\{ \Theta_3 \left[0, e^{-\pi^2\tau/L^2} \right] \right\}^3, \quad (7.38)$$

de aquí la ecuación de gap que se obtiene es

$$M = m_o - 4GN_c N_f M \int_{\tau_{UV}}^{\infty} d\tau e^{-\tau M^2} \Theta_2 \left[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau} \right] \frac{1}{L^3} \left\{ \Theta_3 \left[0, e^{-\pi^2\tau/L^2} \right] \right\}^3. \quad (7.39)$$

Es común encontrar la última expresión de la función Θ_3 de la siguiente manera $\Theta_3[z, q] = 1 + 2 \sum q^{n^2} \cos(2nz)$ y si $z = 0$ obtenemos

$$\frac{\Theta_3[0, q] - 1}{2} = \sum_n q^{n^2} = \sum_n e^{-\pi^2 \tau n^2 / L^2}, \quad (7.40)$$

de modo que la ecuación de gap restringida a las condiciones de onda estacionaria toma la forma

$$M = m_o - 4GN_c N_f M \int_{\tau_{UV}}^{\infty} d\tau e^{-\tau M^2} \Theta_2 \left[0, e^{-4\pi^2 T^2 \tau} \right] \frac{1}{8L^3} \left\{ \Theta_3 \left[0, e^{-\pi^2\tau/L^2} \right] - 1 \right\}^3. \quad (7.41)$$

De esta manera se impuso la restricción en que los quarks no pueden escapar de la caja de lado L .

En una caja cúbica de lado L el valor mínimo de p correspondiera a $n = 1$, de aquí que para las tres condiciones (7.25), (7.30) y (7.36), respectivamente, se tiene que

$$(PB) : p_{min} = \frac{2\pi}{L} \quad (APB) : p_{min} = \frac{3\pi}{L} \quad (SW) : p_{min} = \frac{\pi}{L}, \quad (7.42)$$

de igual modo, el valor máximo del 3-momentum p corresponde al cutoff Λ_{UV} , es decir, $p_{max} = \Lambda_{UV}$, por lo que

$$(PB) : n_{max} = \frac{L}{2\pi} \Lambda_{UV} \quad (APB) : n_{max} = \frac{L}{2\pi} \Lambda_{UV} - \frac{1}{2} \quad (SW) : n_{max} = \frac{L}{\pi} \Lambda_{UV}, \quad (7.43)$$

este valor máximo para n se utiliza para resolver la ecuación de gap sin usar la función de Jacobi, ecuaciones (7.27, 7.32, 7.37)

Diagramas

Los cálculos bajo el esquema de regularización en PTR no son sensibles al cambio de parámetros así que bajo el supuesto de que la constante de acoplamiento G no

depende del tamaño del volumen [55, 78] se obtuvo un solo juego de parámetros (Apéndice Ñ.2)

$$\begin{aligned}\Lambda &= 1025.83 \text{ MeV}^{-2} \\ G &= 3.68639 \times 10^{-6} \text{ MeV} \\ M &= 221.574 \text{ MeV} ,\end{aligned}\tag{7.44}$$

acerca de la obtención de estos parámetros también se puede consultar a [47, 53, 51, 49], en este caso se consideró $f_\pi = 92 \text{ MeV}$, $m_\pi = 138 \text{ MeV}$ y $m_o = 5.5 \text{ MeV}$.

En la Figura 7.13 se muestra el comportamiento de la masa dinámicamente generada M en función de la temperatura con potencial químico $\mu = 0$ para diferentes tamaños de volumen de longitud L y las tres restricciones PBC, APBC y SWC. En los tres casos representados la masa corriente de los quarks es $m_o = 5.5 \text{ MeV}$ y se observa el comportamiento típico de un crossover en la transición de fase quiral. Contrario a lo que se ha estado mostrando, para el caso de PBC (arriba a la izquierda en la figura) al disminuir el volumen, se incrementa la masa M , en particular para representar un volumen infinito tomamos $L = 1000 \text{ fm}$ y no hay diferencia apreciable entre este tamaño, el $L = 20$, $L = 10$ hasta $L = 5 \text{ fm}$, en $L = 4 \text{ fm}$ comienza a apreciarse un cambio pero en la gráfica no es posible distinguirlo, ya $L = 3 \text{ fm}$ se muestra en la gráfica y $L = 2 \text{ fm}$ y $L = 1 \text{ fm}$ presentan valores considerablemente altos para la masa M , estos valores de masa se resumen en la Tabla 7.12. Las temperaturas de restauración de simetría quiral se muestran a detalle en la Tabla 7.13 y en este caso esta temperatura no es sensible al tamaño del volumen salvo en el caso de tener $L = 1 \text{ fm}$.

Para las condiciones antiperiódicas (APBC) la situación es la que ya se ha mostrado, por ejemplo, usando la aproximación MRE (ver Sección 7.1.2) ya a partir de una $L = 5 \text{ fm}$ no hay diferencia entre ésta y valores mayores de L , y por el otro lado, al disminuir la longitud la masa disminuye y es apreciable para cada L . Al llegar a una $L = 1 \text{ fm}$ se puede decir que siempre se tiene la fase de simetría quiral restaurada. Las temperaturas de restauración de simetría quiral siguen rondando el mismo valor de 190 MeV (Tabla 7.13).

Finalmente para las condiciones de onda estacionarias (SWC), abajo en la figura, se obtiene de nuevo lo esperado, a menor volumen, menor masa M y también se requiere menor temperatura para restaurar la simetría quiral salvo el caso $L = 5 \text{ fm}$ el cual ya se puede considerar que en todo momento presenta fase de simetría quiral restaurada. Es de notar que para estas condiciones (SWC) a partir de $L = 200 \text{ fm}$ ya comienzan a equipararse los valores de M pero aún hay diferencia ligeramente apreciable para valores de $L = 200, 400$ y 600 fm , a partir de 600

y hasta 1000 fm ya la diferencia es alrededor de 0.7 MeV, esta es la razón por la cual consideramos para los tres casos (PBC, APBC y SWC) que un volumen infinito era para una $L = 1000$ fm.

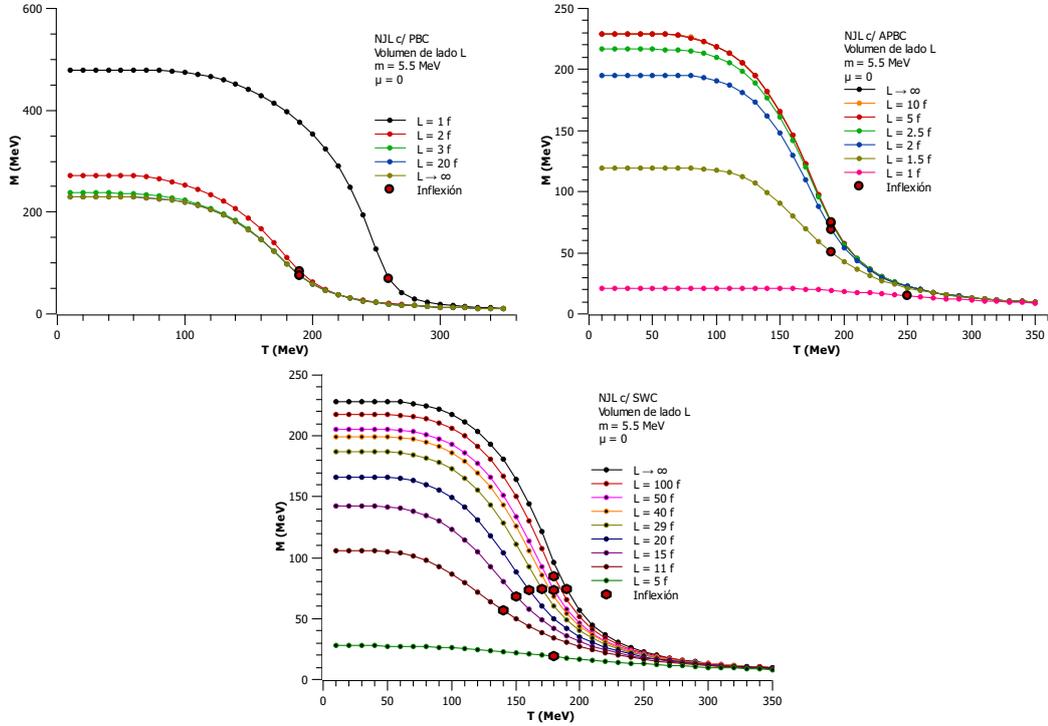


Figura 7.13: Masa dinámicamente generada en función de la temperatura con potencial químico $\mu = 0$ para modelo NJL restringido a un volumen finito para diferentes tamaños L y con distintas condiciones a la frontera. Arriba, periódicas (PBC) y antiperiódicas (APBC). Abajo, condiciones de onda estacionaria (SWC). Se muestra en el círculo rojo el punto de inflexión de la curva, es decir, el cambio de fase quiral.

Tabla 7.12: Masa dinámicamente generada. Modelo NJL a volumen finito de tamaño L con masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV y utilizando condiciones de frontera.

NJL PBC		NJL APBC		NJL SWC	
$m_o = 5.5$ MeV		$m_o = 5.5$ MeV		$m_o = 5.5$ MeV	
L (fm)	M (MeV)	L (fm)	M (MeV)	L (fm)	M (MeV)
$L \rightarrow \infty$	229.476	$L \rightarrow \infty$	229.476	$L \rightarrow \infty$	228.326
20	229.476	40	229.476	600	227.558
10	229.477	30	229.476	400	226.594
5	229.8	20	229.476	200	223.686
4	231.015	10	229.476	100	217.788
3	237.443	5	229.21	50	205.655
2	272.455	4	228.329	40	199.411
1	479.664	2.5	216.548	29	187.223
		2	195.495	20	166.252
		1.5	119.477	15	142.312
		1	21.1399	11	105.958
				5	27.5529

Tabla 7.13: Temperatura de cambio de fase quiral considerando el cambio de concavidad en la curva del condensado. Modelo NJL a volumen finito de tamaño L con masa corriente de los quarks $m_o = 5.5$ MeV y utilizando condiciones de frontera.

NJL PBC		NJL APBC		NJL SWC	
L (fm)	T (MeV)	L (fm)	T (MeV)	L (fm)	T (MeV)
$L \rightarrow \infty$	190	$L \rightarrow \infty$	190	$L \rightarrow \infty$	190
20	190	40	190	600	190
10	190	30	190	400	190
5	190	20	190	200	190
4	190	10	190	100	180
3	190	5	190	50	180
2	190	4	190	40	180
1	260	2.5	190	29	170
		2	190	20	160
		1.5	190	15	150
		1	—	11	140
				5	—

Capítulo 8

Discusión / Conclusiones

Se estudiaron los efectos en la transición de fase en materia hadrónica en condiciones extremas de temperatura y densidad pero con valores finitos y usando el modelo NJL para SU(2) restringido a un volumen finito mediante la aproximación MRE. Este modelo considera únicamente la interacción de dos quarks por lo que los cambios de fase se limitan a la simetría quiral. Estos efectos se pueden estudiar obteniendo el valor de la masa dinámicamente generada, también con la obtención de la temperatura en la cual ocurre el cambio de fase y la determinación de los tipos de cambio de fase que ocurren lo cual se resume determinando la existencia del CEP. La manera en que se incorporó la restricción a un volumen finito fue utilizando una aproximación conocida como densidad de estados ρ_{MRE} y la otra fue estableciendo en el sistema condiciones a la frontera, periódicas (PBC), antiperiódicas (APBC) y de onda estacionaria (SWC). En este último, al establecer estas condiciones de frontera lo que se hace es discretizar el espacio de modo que el volumen generado corresponde a un cubo de arista L . Por otro lado, en la aproximación MRE debido a la forma en que se construye la densidad de estados, el volumen corresponde a una esfera de radio R y para resolver la ecuación de gap usando esta densidad ρ_{MRE} se procede de dos maneras distintas, haciendo que un parámetro tienda a cero (condición de Dirichlet), o bien, que tienda a infinito (condición de Neumann), de esta manera el problema se resuelve de manera numérica. Aprovechando la estructura del término de densidad de estados MRE en este trabajo se propuso una modificación a ésta para representar, de manera aproximada, un cubo de arista L .

La masa dinámicamente generada M está directamente relacionada con el condensado de quarks y cuando el potencial químico es cero, $\mu = 0$, y se está en el límite quiral, $m_o = 0$, se observa que conforme el volumen disminuye, disminuye el valor de la masa M y también el valor de temperatura a la cual se restaura la simetría quiral. Esto ocurre independientemente de la forma y tamaño del volumen. La diferencia es que en el caso MRE_N no hay variación apreciable al

cambiar el volumen. El patrón de la curva cuando $m_o = 5.5$ MeV es similar a su correspondiente caso cuando $m_o = 0$, inclusive la temperatura de restauración de la simetría es casi la misma independientemente de la masa corriente de los quarks m_o , en este MRE_N a partir de un tamaño de 5 fm ya no hay diferencia con el caso a volumen infinito. Por otro lado los esquemas MRE_D y el cubo MRE son sensibles al tamaño e inclusive para un radio y una L de 30 fm existe diferencia con un volumen infinito.

En el caso de las condiciones a la frontera es de notar que para PBC el comportamiento es opuesto a lo esperado, es decir, a mayor volumen ocurre que la masa M es menor y al menos para tamaños de entre 1 fm y $R \gg 1$ siempre ocurre que la simetría quiral se puede romper. Lo anterior a lo que en [78] se menciona como efecto del «modo cero fermiónico» que está presente al usar estas condiciones periódicas a la frontera. Los casos APBC y SWC se comportan como uno esperaría, es decir, a menor volumen, menor masa M y menor temperatura de desconfinamiento. En particular APBC no es sensible al tamaño del volumen a partir de 5 fm y en el otro extremo, en 1 fm nunca se esta en fase de simetría rota. Para SWC ocurre diferente, todavía en radios de 100 fm hay diferencia con un radio infinito y ya a partir de 5 fm no hay rompimiento de simetría quiral. En estos tres esquemas las temperaturas de cambio de fase en PBC y APBC son 190 MeV salvo el caso de PBC con 1 fm en el que es de 260 MeV. En el caso de SWC están entre 190 y 140 MeV.

Al variar el potencial químico μ se observa que en algún momento cambia el tipo de transición de fase. El lugar exacto en que ocurre este cambio se conoce como el CEP. Para localizarlo se utilizó la susceptibilidad quiral y en particular se estudió su comportamiento en función de la temperatura y el potencial químico para diferentes formas y tamaños de volumen. Divergencias en la susceptibilidad quiral implican un cambio en el tipo de fase.

Se obtuvieron diagramas de fase para el MRE, de nuevo el MRE_N no es sensible al tamaño del volumen, desde $R = 5$ fm prácticamente no hay diferencia con el caso de volumen infinito, mientras que en la esfera MRE_D y el cubo MRE aún para tamaños de 30 fm la diferencia es perceptible.

Así mismo se determinó la existencia del CEP, y en caso afirmativo, se obtuvieron sus coordenadas. Comenzando por el MRE_N se encontró que el CEP ocurre en $R = 5$ fm y mayores, siendo que para distintos radios éste ocurre al mismo potencial $\mu = 321$ MeV y una ligera variación en la temperatura de 2 MeV. Para la esfera MRE_D el CEP se encontró para esferas con radios de $R = 25$ fm y mayores. Para el cubo MRE ocurre para $L = 10$ fm y mayores. Los potenciales μ en los

que aparece el CEP en estos dos casos aunque varían, no es mucha la diferencia, 8 MeV para MRE_D y 4 MeV para el cubo MRE. Las temperaturas en las cuales ocurre el CEP disminuyen conforme disminuye el tamaño del volumen.

De todo lo anterior deben tenerse en cuenta varios aspectos como el del hecho de que a la fecha no existe un consenso acerca de la manera en que se determina la existencia del CEP. También, como es bien sabido, los parámetros y el tipo de renormalización utilizado determinan al modelo. De esto último hay que hacer notar que la literatura en que nos basamos para representar el volumen finito con la aproximación MRE no se especifica si los parámetros del modelo cambiaban para cada tamaño de volumen. Consideramos que era necesario y lo implementamos en el cálculo de parámetros del UV-cutoff y los resumimos en las tablas 7.1 a 7.7, siendo estos valores parte del modelo que utilizamos aquí.

En este trabajo se presentó de manera detallada una metodología para construir un diagrama de fases de la QCD usando el modelo NJL en SU(2), así mismo se muestra de manera explícita cómo determinar el CEP, en caso de existir, y su localización en dicho diagrama. Lo anterior con y sin restricciones de volumen finito usando la aproximación MRE y se mostró la diferencia que existe en este diagrama para diferentes tamaños de volumen y dos tipos de forma, esférica y cúbica, siendo esta última algo nuevo usando este modelo MRE.

Como ya se mencionó en la Introducción, los resultados de este trabajo están publicados en [82]. El modelo NJL aquí presentado es limitado en cuanto a que no considera la interacción con los gluones y de aquí la propiedad del confinamiento de los quarks. Esto se logra utilizando una extensión al modelo incorporando el loop de Polyakov (PNJL) [83]. Desde luego, de manera natural, lo anterior se puede seguir refinando al incorporar una simetría SU(3) y de aquí, considerar la interacción de un campo electromagnético para estudios posteriores. Lo anterior se puede estudiar en [84, 85] y acerca del modelo PNJL en [86, 87, 88, 89].

Bosones y fermiones son dos tipos de partículas fundamentales y lo que las diferencia es su espín. La interpretación de la separación de un haz en dos haces como debido a una propiedad intrínseca de las partículas llamada el espín, como ha ocurrido en la historia, ha abierto nuevas áreas de investigación y nos lleva, por ejemplo, a preguntarnos cómo era la materia en los orígenes del Universo. Por el nivel de complejidad que representan, no pretendemos resolver cuestiones de este tipo pero el hecho de que sigan abiertas preguntas como la existencia del QGP o existencia de estrellas de quarks, y que el espín de la partícula sea parte de la solución de estas preguntas hace del experimento de Stern y Gerlach, a cien años de efectuado, de una relevancia que merece recordar.

Apéndice A

Preliminares

Cantidades como la posición o el momento de una partícula las cuales pueden ser medidas experimentalmente, son llamadas *observables*. Estas observables en mecánica cuántica son representadas por operadores los cuales son cantidades que operan sobre funciones y que generan una nueva función. Así el operador posición y el operador momento son, respectivamente, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ y $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\partial_{\mathbf{x}}$.

Se define el valor esperado de la observable A en el tiempo t para un sistema en el estado $\psi(\mathbf{x}, t)$ y representado como \hat{A} de la siguiente manera [79]

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d^3\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}, t) \hat{A} \psi(\mathbf{x}, t) . \quad (\text{A.1})$$

Estas observables son números reales por lo que su valor esperado debe ser un número real y así esta \hat{A} debe cumplir que

$$\int d^3\mathbf{x} \psi^* \hat{A} \psi = \int d^3\mathbf{x} \psi (\hat{A} \psi)^* = \int d^3\mathbf{x} (\hat{A} \psi)^* \psi . \quad (\text{A.2})$$

Un operador que satisface lo anterior para todos los estados ψ se dice que es Hermitiano. Y de aquí se establece que las observables deben ser representadas por operadores Hermitianos.

Esta *media* de \hat{A} (Ecuación A.1) es el resultado de repetidas mediciones de la observable A y de aquí la desviación estandar de esta medición es

$$(\Delta A)^2 = \int d^3\mathbf{x} \psi^* (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \psi , \quad (\text{A.3})$$

de aquí, si ψ tiene un único valor A , entonces $\Delta A = 0$ por lo que, al cumplirse (A.2) se obtiene

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \int d^3\mathbf{x} \psi^* (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi = \int d^3\mathbf{x} [(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi]^* [(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi] \\ &= \int d^3\mathbf{x} |(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \psi|^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

y entonces para que lo anterior se anule, se debe cumplir que:

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad \text{y} \quad \langle A \rangle = a, \quad (\text{A.5})$$

La ecuación $\hat{A}\psi = a\psi$ es la ecuación de eigenvalores del operador \hat{A} y a es el eigenvalor de ψ .

Notación de Dirac

Acerca de la notación de Dirac puede consultarse en [79] que es de dónde está basada esta sección.

Dirac introdujo el símbolo $| \rangle$ llamado «operador ket» para especificar el estado o bien, la función de onda de un sistema. Así una función de onda ψ que se encuentra en el estado a de modo que $\psi_a = |\psi_a\rangle = |a\rangle$, siendo la última igualdad usada cuando no se presta a confusión. De igual modo, una función que está en un cierto estado determinado por tres números n, l, m se puede escribir como $|\psi_{nlm}\rangle = |n, l, m\rangle$.

De lo anterior se puede definir el producto escalar de dos kets $|a\rangle$ y $|b\rangle$ el cual se escribe como $\langle b|a\rangle$ y se define como

$$\langle b|a\rangle = \int d^3\mathbf{x} \psi_b^*(\mathbf{x})\psi_a(\mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

El ket $|a\rangle$ está normalizado si $\langle a|a\rangle = 1$ y dos kets son ortonormales si $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle = 0$, es decir,

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}. \quad (\text{A.7})$$

De la definición de operador \hat{A} actuando sobre una función de onda ψ que especifica el estado de un sistema y que resulta en un nuevo estado ψ' , es decir, $|\psi'\rangle = |\hat{A}\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$ y de aquí se tiene que el producto escalar con $|\psi\rangle$ es

$$\langle \psi|\psi'\rangle = \langle \psi|A\psi'\rangle = \langle \psi|A|\psi\rangle \quad (\text{A.8})$$

este producto escalar sigue las propiedades conocidas del producto escalar real y en particular es hermítico, es decir, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$, por lo que se tiene lo siguiente

$$\langle \varphi|A|\psi\rangle^* = \langle \varphi|A\psi\rangle^* = \langle A\psi|\varphi\rangle. \quad (\text{A.9})$$

El término $\langle A\psi|\phi\rangle$ es el elemento matricial del operador A entre los estados ψ y φ . Finalmente, de la relación (A.2) que es válida para cualesquier dos estados se

desprende que

$$\langle \varphi | A \psi \rangle = \langle A \varphi | \psi \rangle \quad (\text{A.10})$$

además

$$\langle \varphi | A \psi \rangle = \langle \psi | A | \varphi \rangle^* . \quad (\text{A.11})$$

Amplitud de Probabilidad

En procesos de colisiones de partículas el estado $|i\rangle$ define el estado inicial del sistema y se considera que esto ocurre mucho tiempo antes de la colisión, es decir, ($t_i = -\infty$). Este estado especifica a un número definido de partículas con sus propiedades y lo suficientemente alejadas entre sí de manera que no interactúan entre ellas. Esto se define como $|\psi(-\infty)\rangle = |i\rangle$. De igual modo, el estado $|\psi(\infty)\rangle = |f\rangle$ es aquel en el que se encuentra el sistema mucho tiempo después en que ocurrió la colisión (dispersión). La matriz S relaciona $|\psi(\infty)\rangle$ con $|\psi(-\infty)\rangle$ y se define como [79]

$$|\psi(\infty)\rangle = S|\psi(-\infty)\rangle = S|i\rangle , \quad (\text{A.12})$$

La probabilidad de transición de que un sistema se encuentre en el estado $|i\rangle$ y después de la colisión se encuentre en $|f\rangle$ se define como

$$\left| \langle f | \psi(\infty) \rangle \right|^2 \quad (\text{A.13})$$

y entonces, la amplitud de probabilidad es

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | \psi(\infty) \rangle . \quad (\text{A.14})$$

Apéndice B

Lagrangiana del Campo Escalar Libre

En esta sección se describe una partícula relativista, que de hecho es una onda y la conexión con un campo, el cual es un objeto que oscila como una cuerda, es decir, se comporta como una onda. De ahí que una partícula tenga una equivalencia con un campo.

Partimos de la definición de partícula relativista con 4-momentum $p = (E, \mathbf{p})$. Esta satisface que $p^2 = p^\mu p_\mu = m^2$ si tiene energía

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (\text{B.1})$$

por lo que $\hat{H} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ y entonces esta partícula relativista tiene estados de energía definida $|\mathbf{p}\rangle$.

El Campo

Un campo $\varphi(x) = \varphi(t, \mathbf{x})$ lo podemos definir como una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio y en cada instante del tiempo. El campo más sencillo asigna un número a cada punto x y si es tal que cumple $\varphi(x) = \varphi^*(x)$, entonces dicho campo es un campo real.

Si este campo es relativista debe ser invariante ante la transformación

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad , \quad (\text{B.2})$$

conocida como transformación de Lorentz.

Para un campo $\varphi(x)$ tenemos un número en cada sitio x , y estas transformaciones de Lorentz (3 rotaciones y 3 empujes o *boost*) garantizan que al hacer rotaciones

y/o *boost* este número no cambia, es decir,

$$\varphi(x) = \varphi'(x') , \quad (\text{B.3})$$

es decir, cambia la función matemática $\varphi \rightarrow \varphi'$ y cambia el nombre del punto $x \rightarrow x'$ pero el valor en ese punto sigue igual.

Un campo real que se transforma de esta manera recibe le nombre de campo escalar real.

La Lagrangiana de un Campo Escalar

La dinámica de un campo se describe mediante la acción

$$S = \int dx \mathcal{L} , \quad (\text{B.4})$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ es la Lagrangiana que describe el sistema.

Al establecer que S sea Lorentz-invariante y sabiendo que dx lo es, entonces \mathcal{L} debe serlo también, es decir, $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ debe ser una combinación de φ y $\partial_\mu \varphi$ que resulte ser un escalar. El campo φ ya es un escalar pero $\partial_\mu \varphi$ no lo es, sin embargo es un escalar si lo escribimos como

$$\partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi = \left(\partial_t \varphi \right)^2 - (\nabla \varphi)^2 . \quad (\text{B.5})$$

De este modo, la Lagrangiana que por definición es $L = T - V$, la podemos escribir como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) , \quad (\text{B.6})$$

y es un escalar y por tanto es Lorentz-invariante.

La forma más sencilla del potencial $V(\varphi)$ puede ser un polinomio y necesitamos hallar el mínimo de este potencial V por lo que descartamos que sea una constante, de igual modo, descartamos que sea de la forma de un término lineal, $V = C\varphi$, ya que en esta forma de potencial siempre se puede redefinir el cero.

La siguiente posibilidad es una expresión cuadrática, $V = C\varphi^2$, y de este potencial cuadrático queremos el mínimo por lo que $\partial^2 V = 2C > 0$, es decir, el coeficiente C debe ser real y mayor que cero, para enfatizar esto, por comodidad, lo podemos escribir como $C = \frac{1}{2}m^2$, siendo m por lo pronto un número real que después resulta ser la masa del campo.

Con lo anterior, la Lagrangiana del campo escalar $\varphi(x)$ puede tener la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 . \quad (\text{B.7})$$

Esta Lagrangiana, y más específicamente, la Hamiltoniana H , nos dice cuánta energía tiene el campo φ , en particular, el término $V = \frac{1}{2}m^2$ nos dice el valor mínimo que tiene el campo por el sólo hecho de poseer masa.

Las ecuaciones de movimiento de esta Lagrangiana son

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right) \varphi(\vec{x}, t) = 0 \quad , \quad (\text{B.8})$$

esta ecuación es llamada ecuación de Klein-Gordon (KG).

La solución de la ecuación de KG se puede obtener de varias maneras, por ejemplo, utilizando funciones de Green, o bien, usando una transformada de Fourier en 4 dimensiones, en este caso usaremos una transformada de Fourier espacial.

En este caso se propone una solución, que en realidad es una representación de Fourier de la solución $\varphi(\mathbf{x}, t)$ y es una suma sobre p para la parte espacial

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{p}, t) \quad , \quad (\text{B.9})$$

luego, sustituyendo lo anterior en la ecuación de movimiento (B.8), se tiene que en el espacio de momentos,

$$\left(\partial_t + p^2 + m^2\right) \varphi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad , \quad (\text{B.10})$$

esta ecuación es la ecuación del oscilador armónico (OA) que al interpretarla nos dice que cada punto del espacio de momentos oscila con una frecuencia $\omega_{\mathbf{p}} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, o mejor dicho, para cada valor de \mathbf{p} , el campo $\varphi(\mathbf{p}, t)$ satisface la ecuación del OA con frecuencia ω . Encontramos que para cada valor de \mathbf{p} la solución $\varphi(\mathbf{p}, t)$ satisface la ecuación del OAS y es

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{p}, t) \quad . \quad (\text{B.11})$$

Se concluye que la solución más general de la ecuación de KG es una superposición lineal de osciladores armónicos simples desacoplados $\varphi(\mathbf{p}, t)$ cada uno vibrando con una frecuencia $\omega_{\mathbf{p}}$. Estos modos de Fourier no interactúan entre sí, es decir, se superponen sin interferirse y de ahí se dice entonces que el campo escalar es *libre*.

La descripción Hamiltoniana del sistema se obtiene de la manera usual definiendo el momento canónico conjugado del campo $\varphi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \quad , \quad (\text{B.12})$$

en cada punto x tenemos un π con su correspondiente φ y el Hamiltoniano se construye de la manera usual, cada π se multiplica por $\dot{\varphi}$ y se suman todos, luego se resta la \mathcal{L} , así que $H = \int d^3x \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}$, entonces

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) . \quad (\text{B.13})$$

Apéndice C

Cuantización del Campo Escalar

La cuantización canónica consiste en escribir la Hamiltoniana H del sistema en términos de operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert y que describen los estados del sistema, $H = \{|\psi\rangle\}$. Este sistema está determinado por las cantidades q y p de manera que al cuantizar se hace lo siguiente

$$q_n(t) , p_n(t) \longrightarrow \hat{q}_n , \hat{p}_n = \frac{\hbar}{i} \partial_x , \quad (\text{C.1})$$

en esta formulación lo que se hizo fue hacer a q un operador multiplicativo y a p un operador diferencial. Estos operadores son independientes del tiempo y son tales que cumplen las siguientes reglas de conmutación

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_n] = i\delta_{nn'} \quad [\hat{q}_n, \hat{q}_{n'}] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_{n'}] , \quad (\text{C.2})$$

con δ la delta de Kronecker que vale 1 si $n = n'$ y de otro modo vale cero. La cuantización del sistema ocurre cuando se construye un espacio de Hilbert donde los objetos satisfacen estas reglas de conmutación (C.2). La evolución de los estados $|\psi(t)\rangle$ se genera por el operador Hamiltoniano $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \equiv H(\hat{q}, \hat{p})$ a través de $i\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ que es la ecuación de Schrödinger.

Regresando al OAS, se introducen los operadores a y a^\dagger

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) , \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) , \quad (\text{C.3})$$

y que son tales que

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad ; \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) , \quad (\text{C.4})$$

de aquí se obtiene la relación de conmutación $[\varphi, p] = i$ lo que es equivalente a [39]

$$[a, a^\dagger] = 1 , \quad (\text{C.5})$$

a continuación se identifica a $\hat{q} \rightarrow \hat{\varphi}(x)$ y a $\hat{p} \rightarrow \hat{\pi}(x)$, de este modo, de un caso discreto se pasa al continuo y así tenemos las siguientes reglas de conmutación llamadas *equal-time commutation relations*

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ ; \quad [\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})] = 0 = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] \ , \quad (\text{C.6})$$

en esta última relación y a continuación dejaremos de indicar los operadores \hat{p} para escribirlos como p , a menos que se preste a confusión. De esta forma podemos expresar la solución de la ecuación de KG como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right] \ , \quad (\text{C.7})$$

de igual modo se tiene que

$$\pi(\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left[a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x} \right] \ , \quad (\text{C.8})$$

Lo que se ha obtenido es la cuantización del campo escalar. Esta solución no depende del tiempo por lo que no puede ser solución de una teoría relativista.

En la mecánica cuántica de Schrödinger los operadores no dependen del tiempo. La representación donde los operadores dependen del tiempo se conoce como representación de Heisenberg, y en esta representación los estados son los que no dependen del tiempo. Para pasar de la representación de Schrödinger a la de Heisenberg se define una transformación que incluye un factor de evolución temporal y en general tiene la forma (ver Apéndice D)

$$q_n(t) \equiv e^{iHt} q_n e^{-iHt} \ ; \quad p_n(t) \equiv e^{iHt} p_n e^{-iHt} \ , \quad (\text{C.9})$$

en donde H es el operador Hamiltoniano y entonces se imponen reglas de conmutación a tiempos iguales

$$[q_n(t), p_{n'}(t)] = i\delta_{n,n'} \ ; \quad [q_n(t), q_{n'}(t)] = 0 = [p_n(t), p_{n'}(t)] \ , \quad (\text{C.10})$$

así transformamos a los operadores $\varphi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ en operadores que dependen del tiempo mediante

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(x) = e^{iHt} \varphi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \ , \quad (\text{C.11})$$

y de igual modo los operadores a_p y a_p^\dagger en el esquema de Heisenberg son

$$e^{iHt} a_p e^{-iHt} = a_p e^{-itE_p} \ ; \quad e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = a_p^\dagger e^{itE_p} \quad (\text{C.12})$$

las relaciones de conmutación del cuadro de Heisenberg son entonces

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] &= 0 = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] , \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

donde δ , en este caso, es una delta de Dirac. Estas relaciones escritas de esta manera son útiles cuando se trabaja en relatividad especial.

De este modo usando (C.11), (C.12) en (C.7) se obtiene

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right] , \quad (\text{C.14})$$

con $\omega_p = E_p = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Este resultado es la solución completa de la ecuación de Klein-Gordon expresada como una combinación lineal de soluciones para valores particulares de \mathbf{p} . Así mismo, esta $\varphi(x)$ se está expresando como una combinación de las soluciones para partículas y otra para antipartículas.

Finalmente, el Hamiltoniano del OAS reescrito en términos de operadores x y p es

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{\mathbf{x}}^2 , \quad (\text{C.15})$$

y utilizando las relaciones (C.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\omega}{4}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \frac{\omega}{4}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ &= \omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2\right) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$(\text{C.17})$$

de esta última relación se define el operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Con esta relación es posible generar el conjunto de eigenestados de H comenzando por definir la manera en que actúan los operadores a y a^\dagger sobre los estados $|n\rangle$ del sistema. El operador de ascenso a^\dagger actúa de la siguiente manera

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle , \quad (\text{C.18})$$

y el operador de descenso a , actuando sobre el estado n es

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle . \quad (\text{C.19})$$

El estado base $|0\rangle$ se define de modo que este sea «aniquilado» por el operador que previamente se ha llamado «de descenso», es decir,

$$\hat{a}|0\rangle \equiv 0 , \quad (\text{C.20})$$

para calcular la energía de este estado se aplica esta \hat{H} al vacío para obtener

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \omega(a^\dagger a + 1/2)|0\rangle \\ &= \omega a^\dagger a|0\rangle + \omega/2|0\rangle \\ &= \frac{\omega}{2}|0\rangle \end{aligned} \tag{C.21}$$

en general un operador actuando en el vacío no es cero, por lo que el vacío tiene energía y es $E = \omega/2$ y se llama energía de punto cero. A partir de aquí se puede generar el primer estado excitado $|1\rangle$, utilizando el operador «de ascenso» y se define como

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle \equiv |1\rangle , \tag{C.22}$$

y tiene energía $E = \omega(1 + 1/2)$. Así, el n -ésimo estado excitado es

$$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle , \tag{C.23}$$

y tiene energía $E = \omega(n + 1/2)$. Por lo que los eigenestados del Hamiltoniano son

$$\hat{H}|n\rangle = (n + 1/2)\omega|n\rangle , \tag{C.24}$$

con $n = 1, 2, \dots$. Los eigenestados del operador \hat{N} son

$$\begin{aligned} N|n\rangle &= a^\dagger a|n\rangle \\ &= a^\dagger \sqrt{n} |n - 1\rangle \\ &= n |n\rangle , \end{aligned} \tag{C.25}$$

Así se resuelve el problema del oscilador armónico simple, introduciendo estos operadores de manera que se encuentran los valores de la energía del Hamiltoniano.

Apéndice D

Representación de Schrödinger y Heisenberg

En el formalismo de la mecánica cuántica de Schrödinger las funciones de onda dependen del tiempo $\psi(x, t)$ y los operadores no. En esta representación la dinámica de las partículas satisface la siguiente ecuación [4]

$$i\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = H\psi(x, t) , \quad (\text{D.1})$$

de igual modo, se tiene una representación en la que los operadores dependen del tiempo, mientras que la función de onda no. Esta recibe el nombre de representación de Heisenberg en donde el estado $\psi_S(x, t)$ se relaciona con el estado ψ_H

$$\psi_S(t) = e^{-iHt}\psi_S(x, 0) = e^{-iHt}\psi_H , \quad (\text{D.2})$$

donde $\psi_H \equiv \psi_S(x, 0)$. En particular (D.2) es solución de (D.1) [5]. De igual modo, los operadores en el cuadro de Schrödinger O_S se relacionan con los de Heisenberg $O_H(t)$ mediante

$$O_H(t) = e^{iHt}O_S e^{-iHt} , \quad (\text{D.3})$$

donde al establecer a H como un operador Hermitiano se tiene que la transformación $U = e^{iHt}$ es unitaria. De (D.3) se obtiene la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = i[H, O_H(t)] . \quad (\text{D.4})$$

Al ser la representación de Heisenberg dependiente del tiempo es preferible usarla cuando se trata de teorías de campo relativistas.

Finalmente, los elementos matriciales de un operador A que son de la forma [5]

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) A \psi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} , \quad (\text{D.5})$$

donde el operador A no depende del tiempo y de manera equivalente

$$\begin{aligned} \langle \varphi | A | \psi \rangle &= \int \varphi^*(\mathbf{x}, 0) e^{iHt} A e^{-iHt} \psi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \\ &= \int \varphi^*(\mathbf{x}, 0) A(t) \psi(\mathbf{x}, 0) d^3\mathbf{x} , \end{aligned}$$

es decir, con el operador $A(t)$ dependiente del tiempo, son equivalentes.

Apéndice E

Unidades Naturales, Dimensión y Teorías Renormalizables

En las unidades naturales se considera que

$$\hbar = c = k = 1 , \quad (\text{E.1})$$

con $\hbar = h/2\pi$, la constante de Planck reducida, c la velocidad de la luz y k la constante de Boltzmann.

De este hecho se ve que $E = m$, es decir, en las unidades naturales se considera que la energía equivale a la masa por lo que todo lo podemos medir en términos de la masa del protón y en estas unidades el protón tiene una energía de 1 GeV = 1.8×10^{-27} kg. Más aún, ya que $\hbar c = 197.3$ MeV·fm (1 fermi (f) o femtómetro fm = 1×10^{-15} m) entonces

$$1\text{fm} = \frac{1}{197.3}\text{MeV}^{-1} , \quad (\text{E.2})$$

así, $1 \text{ GeV}^{-1} = 0.1973 \times 10^{-15}$ m. De igual modo se puede obtener $1 \text{ GeV} = 1.2 \times 10^{13}$ K.

La dimensión de estas cantidades se escribe utilizando la notación “[]” o bien como $\text{dim}()$. Las cantidades $\hbar = c = k = 1$, son adimensionales. Recordando que $E = \hbar\omega$, entonces \hbar es energía \times tiempo, así

$$\text{dim}(\hbar) = [\hbar] = 0 = [E] \times [T] , \quad (\text{E.3})$$

ya que $[M]$ y $[E]$ se consideran como unidades de dimensión independientes del conjunto de unidades naturales, y concluimos que E equivale dimensionalmente a M , entonces se puede establecer que $[E] = [M] = 1$, así de (E.3) se ve que la energía y el tiempo deben tener dimensiones recíprocas, entonces $[T] = -1$. De lo anterior, como $c = d/t$, entonces la distancia tiene dimensión $[d] = -1$.

La Densidad Lagrangiana \mathcal{L} tiene dimensión 4 ya que

$$\mathcal{L} = \frac{\text{Lagrangiana } L}{\text{Volumen } V} \longrightarrow [\mathcal{L}] = \frac{[L]}{[V]^{-1}} = \frac{[1]}{[3]^{-1}} = 4, \quad (\text{E.4})$$

y de aquí, la acción $S = \int d^4\mathcal{L}$ es cero.

En resumen se tiene que

$$\begin{aligned} [E] &= [M] = [p] = 1 \\ [d] &= [T] = -1 \\ [\mathcal{L}] &= 4 \\ [S] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Para la Lagrangiana \mathcal{L} del campo escalar libre (Apéndice B) (como en gran parte de la literatura, aquí utilizamos la palabra «Lagrangiana» en vez de «Densidad Lagrangiana» a menos que se preste a confusión) ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - \frac{m^2}{2}\varphi^2(x), \quad (\text{E.6})$$

como $\dim(\mathcal{L}) = 4$, entonces la dimensión del campo escalar es $\dim(\varphi) = 1$, más aún, la dimensión de ∂_μ es también 1, $[\partial_\mu] = 1$. En general, para una Lagrangiana con interacción

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) + C_1\varphi(x) + C_2\varphi^2(x) + \cdots + C_n\varphi^n(x), \quad (\text{E.7})$$

donde la interacción se representa con el polinomio $C_1\varphi(x) + C_2\varphi^2(x) + \cdots + C_n\varphi^n(x)$, decimos que una teoría es renormalizable si $\dim(C_n) \geq 0$.

Apéndice F

Densidad de Estados

A partir del operador \hat{p} se obtienen sus eigenfunciones correspondientes

$$p_x \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{F.1})$$

luego se resuelve la ecuación de eigenfunciones $\hat{p}_x f(x) = p f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{df}{dx} &= p f \\ \ln f &= \frac{i}{\hbar} p x, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

así, la solución es de la forma $f(x) = e^{ipx/\hbar}$. Y buscamos que estas sean periódicas de manera que $f(x) = f(x + L)$ entonces

$$\begin{aligned} e^{ipx/\hbar} &= e^{ipx/\hbar} e^{ipL/\hbar} \\ 1 &= e^{ipL/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

y usando la igualdad $1 = e^{i2n\pi}$ se tiene que

$$e^{ipL/\hbar} = e^{i2n\pi/\hbar}, \quad (\text{F.4})$$

entonces $p_x = \frac{2n\pi\hbar}{L}$ son los eigenvalores de \hat{p} . Para cada estado n existe un valor p_n . De aquí podemos decir que el número de estados que hay en un intervalo $\Delta N_{\text{estados}}$ es igual al número de diferentes n que se tienen, es decir,

$$\Delta N_{\text{estados}} = \frac{\Delta p L}{2\pi\hbar}, \quad (\text{F.5})$$

y si se está en un espacio de tres dimensiones se tiene que

$$\Delta N_{\text{estados}} = \frac{L^3}{2\pi\hbar} \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \longrightarrow dN_{\text{estados}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 \mathbf{p} \quad (\text{F.6})$$

en la última igualdad se hizo un paso al límite. Esta es la densidad de estados.

Apéndice G

Simetrías

Decimos que una función, un campo, una ecuación o cualquier objeto matemático es simétrica con respecto a transformación U si al aplicarla, éste resulta tener la misma forma y decimos que es invariante ante la transformación U , es decir, el campo ϕ es invariante ante la transformación U si

$$\phi \rightarrow \phi' = U\phi = \phi . \quad (\text{G.1})$$

En el contexto de las QFT, estas transformaciones son matrices de $n \times n$ y forman un grupo de Lie el cual es un grupo cuyos elementos están etiquetados por un número finito de parámetros continuos y tienen una ley de multiplicación que depende suavemente (en el sentido de una función) de los parámetros. Estos grupos se conocen como grupos analíticamente continuos.

En particular, los grupos de Lie llamados $SU(N)$ [4, 6] poseen una representación fundamental en términos de $N^2 - 1$ matrices unitarias de $N \times N$, es decir, matrices tales que $1 = U^\dagger U$. A este grupo se le llama $U(N)$ y si el determinante de éstas es 1 se les llama especiales (S), de ahí la designación $SU(N)$. Estos grupos dependen de $N^2 - 1$ parámetros reales y tienen la forma de

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = e^{i\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_N X_N} = e^{i\alpha_a X_a} , \quad (\text{G.2})$$

donde X_a son matrices de traza-cero y también los generadores del grupo.

Las simetrías en la física son muy importantes debido a que en este contexto dan lugar a un resultado conocido como el Teorema de Noether el cual se expone en el Apéndice H.

Simetría $U(1)$

Si se tiene un sólo generador constante X independiente de las coordenadas espacio-temporales, el grupo de transformaciones tiene un sólo parámetro real

α y es de la forma

$$U = e^{iX\alpha} , \quad (\text{G.3})$$

esta es la llamada simetría U(1) e implica invariancia de transformaciones de fase globales (el que α no dependa de las coordenadas espacio-temporales le da el caracter de global).

Simetría SU(2)

Si tenemos un doblete de quarks u y d escrito de la forma

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{G.4})$$

una transformación $\psi' = V\psi$ representada por matrices unitarias de 2×2 , del grupo SU(2) es de la forma

$$\mathbf{V} = e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2} ; \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) , \quad (\text{G.5})$$

al parámetro α se le suele llamar ángulo de fase y las matrices de Pauli, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, son los generadores de la transformación (del grupo). Los operadores $\boldsymbol{\tau}$ son matrices de traza-cero que no necesariamente conmutan y de aquí, que de ser el caso, se utilice el término invarianza de fase no-Abeliana.

Las matrices de Pauli¹ son:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{G.6})$$

Así SU(2) es un grupo no-Abeliano. En particular el grupo SU(2) es una simetría de rotación en el espacio de isospin.

Simetría SU(3)

De igual modo una transformación de SU(3) aplicada a un triplete de quarks q tiene la forma

$$q' = \mathbf{W}q; \quad \mathbf{W} = e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\lambda}/2} , \quad (\text{G.7})$$

con las matrices de Gell-Mann λ siendo los generadores que a su vez son matrices Hermitianas de 3×3 con traza-cero y esta transformación ahora involucra ocho

¹Las matrices de Pauli se suelen representar como τ^a cuando operan en el espacio de isospín y como σ^a cuando operan en el espacio del espín [4].

ángulos de fase. Estos generadores de SU(3) en su representación fundamental de tres dimensiones definen el álgebra de SU(3) mediante la relación de conmutación

$$[\lambda_a/2, \lambda_b/2] = if_{abc}\lambda_c/2 ; \quad a, b, c = 1, 2 \dots, 8 , \quad (\text{G.8})$$

donde f_{abc} es la llamada constante de estructura de SU(3).

Las matrices de Gell-Mann son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Una simetría exacta de $SU(3)_f$, así como $SU(2)_f$, implica que los estados de sabor u,d,s son degenerados en masa. En particular esto no es el caso, ya que las masas de los quarks u y d son del orden de 5-10 MeV y la masa del quark s es de 150 MeV. Aún así, es posible considerar esta simetría ya que la masa típica de un hadrón es del orden de 1 GeV así que se tiene una buena aproximación al utilizar una simetría de sabor $SU(3)_f$.

Apéndice H

Teorema de Noether

Vamos a establecer el teorema de la siguiente manera: Si tenemos una Lagrangiana invariante ante una transformación del campo $\phi^i \rightarrow \phi'^i = \phi^i + \delta\phi^i$, de modo que

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0, \quad (\text{H.1})$$

entonces existe una corriente conservada J^μ .

Para probar esto tomamos la ecuación (H.1)

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i + \delta\phi^i, \phi_{,\mu}^i + \delta\phi_{,\mu}^i) - \mathcal{L}(\phi^i, \phi_{,\mu}^i) = 0 \quad (\text{H.2})$$

donde $\phi_{,\mu} = \partial_\mu\phi$, luego recordando que una serie de Taylor de $f(x, y)$ en el entorno de (a, b) es $f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \dots$, así que en (H.1) es

$$0 = \mathcal{L}(\phi^i, \phi_{,\mu}^i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i}\delta\phi_{,\mu}^i - \mathcal{L}(\phi^i, \phi_{,\mu}^i), \quad (\text{H.3})$$

entonces

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\right)\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i}\delta\phi_{,\mu}^i = 0, \quad (\text{H.4})$$

luego recordando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i} = 0, \quad (\text{H.5})$$

al sustituir en la ecuación (H.4) se tiene que

$$\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i}\right)\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i}\delta\phi_{,\mu}^i = 0, \quad (\text{H.6})$$

luego reescribiendo

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}^i}\delta\phi^i\right) = 0, \quad (\text{H.7})$$

donde se observa que hay una cantidad que se conserva. Y era lo que se quería probar.

Ahora bien, si lo reescribimos como $\partial_\mu J^\mu = 0$ se define la corriente de conservación

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_{,\mu}} \delta \phi^i , \quad (\text{H.8})$$

y separando los índices obtenemos

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 , \quad (\text{H.9})$$

y es la ecuación de continuidad que de paso podemos integrar con respecto al volumen $d^3\mathbf{r}$, es decir

$$\int \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3\mathbf{r} + \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d^3\mathbf{r} = 0 , \quad (\text{H.10})$$

en el segundo término del LHS de la ecuación se utiliza el teorema de Gauss, donde la superficie S delimita al volumen V y entonces se elige una superficie lo suficientemente grande de manera que el flujo sea $J = 0$, es decir,

$$\int \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3\mathbf{r} + \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (\text{H.11})$$

lo anterior se puede lograr ya que se puede elegir la frontera del mismo Universo en donde no hay corrientes, es decir, no cargas, de manera que este segundo término es cero y así se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int J^0 d^3\mathbf{r} = 0 , \quad (\text{H.12})$$

así definimos la corriente Q que es la cantidad conservada

$$Q \equiv \int J^0 d^3\mathbf{r} \quad (\text{H.13})$$

esta integral es una constante y se llama la carga del campo.

Apéndice I

Simetría de Paridad

Sabemos que, en general, el operador de paridad actúa como $Pf(x) = f(-x)$, es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} P\psi(x) &= \psi'(x') \\ &= \psi'(-\mathbf{x}, t) , \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

cambia la ψ , la x , pero el tiempo sigue igual. Queremos que la ecuación de Dirac sea invariante ante paridad, entonces necesitamos saber cómo actúa este operador P en la solución ψ de la ecuación de Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_o)\psi = 0$ la escribimos de la siguiente forma

$$(i\gamma^o\partial_o + i\gamma^l\partial_l - m_o)\psi = 0 , \quad (\text{I.2})$$

así que queremos transformar esta ecuación mediante paridad, $\psi \longrightarrow \psi'$ de manera que para

$$(i\gamma^o\partial_o - i\gamma^l\partial_l - m_o)\psi' = 0 , \quad (\text{I.3})$$

la solución ψ' sea tal que ambas (I.2) y (I.3) sean equivalentes.

Definimos, por comodidad, $P\psi(x) = \psi'(x') = S_P\psi(x)$ y entonces en (I.3) se tiene que

$$(i\gamma^o\partial_o - i\gamma^l\partial_l - m_o)S_P\psi(x) = 0 , \quad (\text{I.4})$$

luego aplicando S_P^{-1} a la izquierda

$$iS_P^{-1}\gamma^o S_P\partial_o\psi(x) - iS_P^{-1}\gamma^l S_P\partial_l\psi - m_o S_P^{-1}S_P\psi = 0 , \quad (\text{I.5})$$

para que lo anterior sea invariante ante P es necesario que

$$\begin{aligned} S_P^{-1}\gamma^o S_P &= \gamma^o \\ S_P^{-1}\gamma^l S_P &= -\gamma^l . \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Esto se logra haciendo $S_P = \gamma^o$ ya que

$$\gamma^o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad (\gamma^o)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{I.7})$$

luego las relaciones (I.6) se cumplen y así se define el operador de paridad en la solución ψ de la ecuación de Dirac como de manera que

$$P\psi(x) = \gamma^o\psi(x) . \quad (\text{I.8})$$

Apéndice J

Simetría Quiral

Quiral es una palabra que proviene del griego $\chi\epsilon\rho\iota$ (cheri - mano) y el sufijo *al* que expresa *relación a*. La quiralidad se considera como una asimetría similar a la que se observa con la de las manos. Cuando se habla partículas y su quiralidad es como si éstas fueran como manos, tendríamos izquierdas y derechas, y por otro lado si no hay quiralidad definida es como si tuviéramos esferas idénticas o indistinguibles.

La matriz γ^5 de 4×4 se define como

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{J.1})$$

con $\mathbf{1}$ matriz identidad de 2×2 , y cumple que $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ y además $(\gamma^5)^2 = 1$. Esta γ^5 representa una transformación que se asocia con la quiralidad de una función. Este operador γ_5 se asocia con una propiedad que tienen algunos campos, que es que en una Lagrangiana para un campo ψ que está a energías muy elevadas, $E \gg m$, se tiene que

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (\text{J.2})$$

es decir, las partículas en una Lagrangiana no se mezclan. Los subíndices L y R significan izquierdo y derecho.

Los operadores ψ_L y ψ_R son operadores de proyección y definidos de la siguiente manera es posible probar (J.2)

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi; \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad (\text{J.3})$$

De esta manera para las partículas de Dirac, cuando se desprecia su masa la Lagrangiana se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R, \quad (\text{J.4})$$

esto es, se pueden separar las partículas derechas e izquierdas.

Ahora bien, esta Lagrangiana de Dirac para partículas sin masa

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi , \quad (\text{J.5})$$

es invariante ante la transformación de fase quirral

$$\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5} \psi(x) . \quad (\text{J.6})$$

Para probar esto primero obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' &= \psi'^\dagger \gamma_0 = (e^{i\alpha\gamma_5} \psi)^\dagger \gamma_0 \\ &= \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5} \gamma_0 \\ &= \psi^\dagger (1 - i\alpha\gamma_5) \gamma_0 , \end{aligned} \quad (\text{J.7})$$

en el último paso se desarrolló en serie, finalmente como γ_0 y γ_5 anticonmutan se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' &= \psi^\dagger \gamma_0 (1 + i\alpha\gamma_5) \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} . \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

En seguida sustituimos (J.6) y (J.8) en (J.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}' i \gamma^\mu \partial_\mu \psi' \\ &= \bar{\psi} (1 + i\alpha\gamma_5) i \gamma^\mu \partial_\mu (1 + i\alpha\gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{J.9})$$

$$= \bar{\psi} (1 + i\alpha\gamma_5) (1 - i\alpha\gamma_5) i \gamma^\mu \partial_\mu , \quad (\text{J.10})$$

el último paso fue posible ya que γ_5 y γ^μ anticonmutan, $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$, luego multiplicando los términos a primer orden se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= \mathcal{L} , \end{aligned} \quad (\text{J.11})$$

es decir, la Lagrangiana de Dirac sin masa es invariante ante transformaciones de fase quirales, así que del teorema de Noether hay una cantidad que se conserva.

La corriente de Noether para este caso es (H.8)

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \delta \psi , \quad (\text{J.12})$$

hay que recordar que $\psi_{,\mu} = \partial_\mu \psi$ y entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu , \quad (\text{J.13})$$

y la variación del campo $\delta\psi$ es

$$\begin{aligned}\delta\psi = \psi' - \psi &= e^{-i\alpha\gamma_5}\psi - \psi \\ &= (1 - i\alpha\gamma_5)\psi - \psi \\ &= -i\alpha\gamma_5\psi ,\end{aligned}\tag{J.14}$$

luego la ecuación (J.12) es

$$J^\mu = \alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi ,\tag{J.15}$$

esta es la corriente de Noether y en particular la constante α resulta ser la carga eléctrica. Enseguida para la corriente conservada Q se utiliza J^0 , esto es

$$\begin{aligned}J^0 &= \alpha\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi \\ &= \alpha\psi^\dagger\gamma_5\psi\end{aligned}\tag{J.16}$$

luego

$$Q_5 = \int \psi^\dagger\gamma_5\psi d^3\mathbf{x}\tag{J.17}$$

donde el índice 5 alude a la quiralidad de la transformación.

La presencia de un término de masa en la Lagrangiana (J.5) destruye la simetría quiral de fase, es decir, en

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi ,\tag{J.18}$$

el término de masa de la forma $\bar{\psi}m\psi$ no es invariante ante la transformación quiral de fase $\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x)$. Siguiendo lo hecho en (J.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{\psi}m\psi &\longrightarrow \bar{\psi}'m\psi' = \bar{\psi}(1 + i\alpha\gamma_5)m(1 + i\alpha\gamma_5)\psi \\ &= \bar{\psi}m\psi + \bar{\psi}(\alpha\gamma_5 + \alpha^2m)\psi \\ &\neq \bar{\psi}m\psi ,\end{aligned}\tag{J.19}$$

es decir, los términos de masa en la Lagrangiana de Dirac destruyen la simetría quiral.

En las interacciones fuertes el pión $\pi^{+, -, 0}$ es una partícula de 140 MeV de masa, siendo que el estándar de masas son del orden de la del protón que es alrededor de 938 MeV, entonces en muchos casos la masa del pión se considera como una masa-cero. La cuestión de partículas sin masa no significa que sea masa-cero, sino que la masa es despreciable frente a volúmenes de energía de los procesos. En los quark, la masa, es la conocida como *current mass*, el término proviene del término de corriente J de las simetrías del teorema de Noether. Esta masa

es de alrededor de 4 o 5 MeV y comparado con la referencia 938 MeV del protón puede considerarse en una primera aproximación como si no tuvieran masa.

A este tipo de simetrías que aparecen cuando no hay masa, como la simetría quiral, se les llama *aproximadas* y estas simetrías, contrario a lo que pudieramos pensar, es lo más fundamental en la naturaleza. Todas las simetrías, excepto la de Lorentz y las Gauge que son exactas, son de mucha importancia y cuando éstas se rompen se obtienen muchos resultados.

Apéndice K

El Valor Promedio Térmico

Sabemos que

$$Z = \sum_k e^{\beta E_k} = \sum \langle i | e^{-\beta \hat{H}} | i \rangle = \text{Tr} [e^{-\beta H}] , \quad (\text{K.1})$$

y el promedio térmico de la energía en la temperatura β es [42]

$$\langle E \rangle_\beta = \sum_k \frac{n_k E_k}{N} = \sum_k P_{(E_k)} E_k , \quad (\text{K.2})$$

donde $P_{(E_k)}$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en un estado de energía E_k , entonces de la definición de probabilidad (ecuación 3.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_\beta &= \sum_k \frac{e^{-\beta E_k}}{Z} E_k \\ &= \frac{1}{Z} \sum_k e^{-\beta E_k} E_k \\ &= \frac{1}{Z} \sum \langle i | e^{-\beta \hat{H}} H | i \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} E] , \end{aligned} \quad (\text{K.3})$$

el último paso es debido a que cualquier función de cualquier operador \hat{A} que actúa sobre las eigenfunciones del operador cumple que $f(\hat{A})|\varphi_a\rangle = f(a)|\varphi_a\rangle$, entonces

$$e^{-\beta \hat{H}} \hat{H} | i \rangle = e^{-\beta E_i} E_i \quad (\text{K.4})$$

Entonces, en general, para cualquier operador \hat{A} se tiene que el valor esperado de cualquier operador, o bien, el valor promedio térmico es

$$\langle \hat{A} \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} \hat{A}] . \quad (\text{K.5})$$

Apéndice L

Funciones de Correlación y Sumas de Matsubara

En QFT el promedio térmico de un operador (ver Apéndice K) es de la forma

$$\langle \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}(\mathbf{y}, 0) \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{y}, 0) \right], \quad (\text{L.1})$$

luego aprovechando la propiedad cíclica de la traza $\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[BCA]$, entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{y}, 0) e^{-\beta H} \right] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\varphi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} e^{\beta H} \varphi(\mathbf{y}, 0) e^{-\beta H} \right] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\varphi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} e^{i(-i\beta H)} \varphi(\mathbf{y}, 0) e^{-i(i\beta H)} \right], \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

recordando que para un operador de evolución temporal $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$, la evolución en el tiempo se puede hacer como

$$|\psi(-t)\rangle = e^{-iH(-t)}|\psi(0)\rangle, \quad (\text{L.3})$$

y entonces en la última igualdad (ecuación L.2), el término $e^{i(-i\beta H)}\varphi(\mathbf{y}, 0)e^{-i(i\beta H)}$ que es de la forma de transformación de un operador \hat{A} en mecánica cuántica $\hat{A}' = UAU^{\dagger}$, se convierte en

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}(\mathbf{y}, 0) \rangle_{\beta} &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\varphi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} \varphi(\mathbf{y}, i\beta) \right] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \varphi(\mathbf{y}, i\beta) \varphi(\mathbf{x}, t) \right], \end{aligned} \quad (\text{L.4})$$

en este último paso hemos supuesto que $\varphi(\mathbf{y}, i\beta)$ y $\varphi(\mathbf{x}, t)$ describen bosones y por esta razón conmutan, es decir, se cumple

$$\left[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, i\beta) \right] = 0, \quad (\text{L.5})$$

en caso de que fueran fermiones entonces sería

$$\{\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, i\beta)\} = 0 . \quad (\text{L.6})$$

En general el resultado (L.4) se conoce como funciones de correlación y se calculan en diferentes puntos

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{y}, 0) \rangle = \pm \langle \varphi(\mathbf{y}, i\beta) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle , \quad (\text{L.7})$$

es decir, hay dos resultados, los campos bosónicos son periódicos y los fermiónicos son antiperiódicos con periodo $i\beta$ y a toda función periódica en el tiempo se le puede asociar una frecuencia ω de manera que

$$\begin{aligned} e^{i\omega\tau} &= e^{i\omega(\tau+\beta)} \\ e^{i\omega\tau} &= e^{i\omega\tau} e^{i\omega\beta} \\ 1 &= e^{i\omega\beta} , \end{aligned} \quad (\text{L.8})$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2n\pi}{\beta} , & \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \\ \omega_n &= 2n\pi T , \end{aligned} \quad (\text{L.9})$$

con $\beta = 1/T$. Para el caso de los fermiones la función es

$$e^{i\omega\tau} = -e^{i\omega(\tau+\beta)} , \quad (\text{L.10})$$

y entonces

$$-1 = e^{i\omega\beta} , \quad (\text{L.11})$$

luego

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2(n+1)\pi}{\beta} , & \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \\ \omega_n &= 2(n+1)\pi T . \end{aligned} \quad (\text{L.12})$$

Apéndice M

Sobre el cálculo del segundo término del RHS de la ecuación 3.30

Para calcular el producto $\langle q_{j+1} | \hat{p}^2 | q_j \rangle$ se utiliza $\int dp |p\rangle \langle p| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \hat{p}^2 | q_j \rangle &= \int dp dp' \langle q_{j+1} | \hat{p} | p \rangle \langle p | p' \rangle \langle p' | \hat{p} | q_j \rangle \\ &= \int dp dp' \langle q_{j+1} | p \rangle \delta(p - p') \langle p' | p' \rangle \langle p' | q_j \rangle , \\ &= \int dp dp' pp' \langle q_{j+1} | p \rangle \langle p' | q_j \rangle \delta(p - p') , \end{aligned} \quad (\text{M.1})$$

en el penúltimo paso hay que observar que $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ y que para $\langle p' | \hat{p}$ se hace

$$\begin{aligned} \hat{p}|p\rangle &= p|p\rangle \\ [\hat{p}|p\rangle]^\dagger &= [p|p\rangle]^\dagger \\ \langle p | \hat{p}^\dagger &= \langle p | p^* \\ \langle p | \hat{p} &= \langle p | p \quad . \end{aligned}$$

así, utilizando la ecuación (3.29) se tiene que la ecuación (M.1) es

$$\langle q_{j+1} | \hat{p}^2 | q_j \rangle = \int dp dp' pp' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_{j+1}q_{j+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip'_j q_j} \delta(p - p') .$$

En lo siguiente por comodidad se omite el índice de p y se integra dp'

$$\langle q_{j+1} | \hat{p}^2 | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp p^2 e^{ip(q_{j+1}-q_j)} . \quad (\text{M.2})$$

Para el potencial $\langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle$, al no saber dónde se evalúa \hat{V} , entonces se hace

un promedio

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle &= \langle q_{j+1} | \frac{1}{2} \hat{V}(q) + \frac{1}{2} \hat{V}(q) | q_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle q_{j+1} | \hat{V}(q_{j+1}) | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | \hat{V}(q_j) | q_j \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [V(q_{j+1}) + V(q_j)] \langle q_{j+1} | q_j \rangle \\ &= \bar{V}(q_j) \delta(q_{j+1} - q_j) \\ &= \bar{V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} dp ,\end{aligned}\tag{M.3}$$

en el último paso de nuevo se utilizó la ecuación (3.29).

Apéndice N

La Lagrangiana Euclidiana de Dirac con potencial químico μ

Se introduce el potencial químico μ en la Hamiltoniana libre haciendo [43]

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_o - \mu N = \sum_i \Pi_i \dot{\psi}_i - \mathcal{L}_o , \quad (\text{N.1})$$

donde la Lagrangiana de Dirac libre es

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi , \quad (\text{N.2})$$

con $\dot{\psi}_i = \partial_o \psi_i$ y el momento generalizado

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \\ &= \bar{\psi} i \gamma^o = i \psi^\dagger \end{aligned} \quad (\text{N.3})$$

en la última igualdad se usó $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^o$ y $\gamma^o \gamma^o = 1$. Entonces la Hamiltoniana (N.1) usando (N.2) y (N.3) es

$$\mathcal{H}_o = i \psi^\dagger \partial_o \psi - \left[\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \right] + \mu N , \quad (\text{N.4})$$

enseguida reagrupando el término $\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^o \partial_o + \gamma^l \partial_l$ se obtiene

$$\mathcal{H}_o = -\bar{\psi} [i\gamma^l \partial_l - m] \psi + \mu N , \quad (\text{N.5})$$

esta Hamiltoniana libre de nuevo en (N.1) despejando para \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}_o = i \psi^\dagger \partial_o \psi - \left[-\bar{\psi} (i\gamma^l \partial_l - m) \psi \right] + \mu N , \quad (\text{N.6})$$

si al primer término del RHS de la ecuación se le multiplica por $1 = \gamma^o \partial_o$ y se reagrupan términos y además recordando que la densidad N de partículas es $N = \psi^\dagger \psi$ se obtiene

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^o \partial_o + i\gamma^l \partial_l - m] \psi + \mu N . \quad (\text{N.7})$$

Ahora para el formalismo de tiempo imaginario, $t \rightarrow it = \tau$, entonces $dt = -i d\tau$ y de esto último es útil hacer

$$\partial_o \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} i = i \partial_\tau \psi , \quad (\text{N.8})$$

así se llega a

$$\mathcal{L}_E = \bar{\psi} [-\gamma^o \partial_\tau + i\gamma^l \partial_l - m + \mu \gamma^o] \psi , \quad (\text{N.9})$$

que es la Lagrangiana Euclidiana de Dirac o en el tiempo imaginario.

Apéndice Ñ

Cálculo de parámetros según el esquema regularización

Ñ.1. UV-Cutoff

Como ya se mencionó, para regularizar el modelo NJL es necesario establecer tres parámetros, la constante de acoplamiento G , el parámetro del cutoff Λ y la masa “desnuda” (*bare mass*) de los quarks [46]. Siguiendo de cerca a Klevansky [47], estos parámetros se pueden calcular estableciendo un sistema de ecuaciones adecuado a este caso.

Sabiendo que el condensado de quarks es el parámetro de orden de la transición de fase con ecuación

$$\langle \bar{q}q \rangle + 6M \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} = 0, \quad (\tilde{\text{N}}.1)$$

la constante de decaimiento del pión f_π se calcula mediante

$$f_\pi^2 - N_c M^2 \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^3} = 0, \quad (\tilde{\text{N}}.2)$$

y con la ecuación de gap con masa corriente de quarks en cero, $m_o = 0$, para calcular la constante de acoplamiento fuerte G

$$M - m_o + 4GN_c N_f M \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} = 0, \quad (\tilde{\text{N}}.3)$$

se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (M, G, Λ) , el cual se puede resolver numéricamente tomando en cuenta que la integral de la ecuación ($\tilde{\text{N}}.1$) es analítica y se expresa como

$$\int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{M^2 + \Lambda^2} - M^2 \sinh^{-1} \frac{\Lambda}{M} \right] \quad (\tilde{\text{N}}.4)$$

que de igual modo se obtiene para la integral de la ecuación ($\tilde{\text{N}}.2$)

$$\int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^3} = -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\Lambda}{\sqrt{M^2 + \Lambda^2}} - \sinh^{-1} \frac{\Lambda}{M} \right]. \quad (\tilde{\text{N}}.5)$$

Con estas ecuaciones y conociendo los valores experimentales de la constante f_π y el condensado $\langle \bar{q}q \rangle$, por ejemplo, $f_\pi = 93$ MeV y $\langle \bar{q}q \rangle = -(250)^3$ MeV³ se obtiene lo siguiente que $\Lambda = 653.331$ MeV y $G = 4.9283 \times 10^{-6}$ MeV⁻².

Ñ.2. Proper Time Regularization

En el caso de PTR siguiendo a Cui en [80] quien presenta una manera alternativa a Klevansky para el cálculo de estos parámetros, la diferencia radica en que agrega un cutoff IR, $\Lambda_{IR} = 235$ MeV esto es para eliminar la parte del confinamiento en la interacción de los quarks [80, 81]. Este valor corresponde a 0.84 fm el cual es aproximadamente el radio del nucleón.

Al igual que en el cálculo de parámetros para el UV-cutoff se resuelve un sistema de tres ecuaciones acopladas con tres incógnitas las cuales son en este caso las siguientes

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -\frac{3M}{2\pi^2} \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} d\tau \frac{e^{-\tau M^2}}{\tau^2} \\ &= \frac{3M^3}{2\pi^2} \left[\Gamma\left[-1, \frac{M^2}{\Lambda_{UV}}\right] - \Gamma\left[-1, \frac{M^2}{\Lambda_{IR}}\right] \right], \end{aligned} \quad (\tilde{N}.6)$$

esta para el condensado de quarks donde la función gamma se define de la manera usual $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$, mientras que para la constante de decaimiento del pión basada en la relación de Gell-Mann, Oakes, Renner, se utiliza la siguiente ecuación

$$f_\pi^2 - \frac{3M^2}{4\pi^2} \left[\Gamma\left[0, \frac{M^2}{\Lambda_{UV}}\right] - \Gamma\left[0, \frac{M^2}{\Lambda_{IR}}\right] \right] = 0, \quad (\tilde{N}.7)$$

Finalmente la ecuación de gap

$$M - m_o + \frac{3GM^3}{\pi^2} \left[\Gamma\left[-1, \frac{M^2}{\Lambda_{UV}}\right] - \Gamma\left[-1, \frac{M^2}{\Lambda_{IR}}\right] \right] = 0, \quad (\tilde{N}.8)$$

siendo M , G y Λ_{UV} los parámetros a calcular, la masa dinámicamente generada, la constante de acoplamiento y el cutoff UV, respectivamente. Las constantes $m_\pi = 138$ MeV y $f_\pi = 92$ MeV son la masa y la constante de decaimiento del pión las cuales se toman experimentalmente. Con estos valores, por ejemplo para una masa de los quarks de 5.5 MeV se obtiene

$$\begin{aligned} M &= 221.574 \text{ MeV} \\ \Lambda &= 1025.83 \text{ MeV} \\ G &= 3.68639 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2} \\ -\langle \bar{u}u \rangle^{-1/3} &= 244.707 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\tilde{N}.9)$$

Con las mismas constantes usando el sistema de ecuaciones propuesto por Klevansky [47] obtuvimos

$$\begin{aligned}M &= 199.204 \text{ MeV} \\ \Lambda &= 1056.06 \text{ MeV} \\ G &= 3.3167 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2} \\ -\langle \bar{u}u \rangle^{-1/3} &= 244.707 \text{ MeV} ,\end{aligned}\tag{Ñ.10}$$

hay que recordar que los parámetros hacen al modelo y no al revés [47].

Apéndice O

La Identidad del PTR

Si partimos de la expresión

$$I = \int_0^{\infty} d\tau \tau^{n-1} e^{\tau f(p^2)} , \quad (\text{O.1})$$

y usando la definición de la función Γ

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} dx x^p e^{-x} = p\Gamma(p) , \quad (\text{O.2})$$

con el siguiente cambio de variable

$$u = \tau f(p^2) \rightarrow \tau = \frac{u}{f(p^2)} \\ d\tau = \frac{du}{f(p^2)} ,$$

entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \left[\frac{u}{f(p^2)} \right]^{n-1} e^{-u} \frac{du}{f(p^2)} \\ &= \frac{1}{[f(p^2)]^n} \int_0^{\infty} du u^{n-1} e^{-u} \\ &= \frac{1}{[f(p^2)]^n} \Gamma(n) \\ &= \frac{1}{[f(p^2)]^n} (n-1)! , \end{aligned} \quad (\text{O.3})$$

así que

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{n-1} e^{\tau f(p^2)} = \frac{1}{[f(p^2)]^n} . \quad (\text{O.4})$$

Bibliografia

- [1] Friedrich, B., Herschbach, D., Stern and Gerlach: How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics, *Physics Today*, v.56, 53-59 (2003). 56. 10.1063/1.1650229.
- [2] Thomson, M., *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press (2013), United Kingdom
- [3] Stephanov, M., QCD phase diagram: an overview, *PoS LAT2006*, 024 (2006) doi:10.22323/1.032.0024, arXiv:hep-lat/0701002.
- [4] Guidry, M., *Gauge Fields Theories an Introduction with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., printed in the U.S.A. (1991).
- [5] Aitchison, I., Hey, A., *Gauge Theories in Particle Physics Vol 1*, (2003) Taylor & Francis Group, New York
- [6] Ryder, L., *Quantum Field Theory, Second Edition*, Cambridge University Press 1985, 1996.
- [7] Stephanov, M.A., QCD phase diagram and the critical point, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Volume 153, January 2004, Pages 139–156, <https://doi.org/10.1143/PTPS.153.139>
- [8] Pasechnik, R., Sumera, M., Phenomenological Review on Quark-Gluon Plasma: Concepts vs. Observations, *Universe* 3 (2017) 1, 7, doi: 10.3390/universe3010007.
- [9] Heinz, U., Evidence for a new state of matter: An Assessment of the results from the CERN lead beam program, arXiv:nucl-th/0002042 [nucl-th]
- [10] Abatzis, S. , Antinori, F. , Barnes, R.P., The WA85 collaboration, The Xi-, anti-xi-, Lambda and anti-Lambda production in sulphur - tungsten interactions at 200-GeV/c per nucleon, *Phys.Lett.B* 270 (1991) 123-127, 1991. <https://doi.org/10.17182/hepdata.29306>

- [11] Adcox, K., et al., Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration, Nucl.Phys.A 757 (2005) 184-283, doi: 10.1016/j.nuclphysa.2005.03.086
- [12] Back, B., et al., The PHOBOS Perspective on Discoveries at RHIC, Nuclear Physics A 757(1-2):28-101, doi:10.1016/j.nuclphysa.2005.03.084
- [13] Arsene, I., et al., Quark Gluon Plasma and Color Glass Condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment, Nuclear Physics A 757(1-2):1-27, doi:10.1016/j.nuclphysa.2005.02.130
- [14] Bass, S.A., Gyulassy, M., Stöcker, H., Greiner, W., Signatures of quark-gluon plasma formation in high energy heavy-ion collisions: a critical review, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 25 (1999) R1–R57.
- [15] Antorini, F., The WA97 Collaboration, Transverse mass spectra of strange and multi-strange particles in Pb-Pb collisions at 158 A GeVc, European Physics Journal C (2000)
- [16] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020) and 2021 update.
- [17] Cabibbo, N., Parisi, G., Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation, Phys.Lett.B 59 (1975) 67-69, doi: 10.1016/0370-2693(75)90158-6
- [18] LeBellac, M., Thermal Field Theory, Cambridge University Press 2000.
- [19] Rischke, D., The Quark-Gluon Plasma in Equilibrium, Prog.Part.Nucl.Phys.52:197-296, (2004), doi: 10.1016/j.ppnp.2003.09.002, arXiv:nucl-th/0305030v2.
- [20] Rajagopal, K., Wilczek, F., The Condensed matter physics of QCD, arXiv: High Energy Physics - Phenomenology (2000) pp.2061-2151
- [21] Fukushima, K., Chiral symmetry and heavy-ion collisions, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 35 104020 (2008)
- [22] Fukushima, K., Hatsuda, T., The phase diagram of dense QCD, Rept.Prog.Phys. 74 (2011) 014001, doi: 10.1088/0034-4885/74/1/014001.

- [23] Zhao, Y., Chang, L., Liu, Y., Chiral susceptibility and chiral phase transition in Nambu-Jona Lasinio model, *Eur. Phys. J. C* (2008) 56: 483–492, DOI 10.1140/epjc/s10052-008-0673-8 .
- [24] Jaeger, G. The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution, *Arch Hist Exact Sc.* 53, 51–81 (1998).
- [25] Aoki, Y., Endrodi, G., Fodor, Z. et al. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature* 443, 675–678 (2006). <https://doi.org/10.1038/nature05120>
- [26] Rajagopal, K., Mapping the QCD phase diagram, *Nuclear Physics* (1999), 661, 150-161, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(99\)85017-9](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(99)85017-9)
- [27] Gottlieb, S., et al., Thermodynamics of lattice QCD with two light quarks on a $16^3 \times 8$ lattice. II, *Phys. Rev. D* 55, 6852 (1997).
- [28] Ratti, C., Thaler, M., Weise, W., Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model, *Phys.Rev.D* 73 (2006) 014019, doi: 10.1103/PhysRevD.73.014019
- [29] Ayala, A., Bashir, A., Cobos-Martínez, J.J., Hernández-Ortiz, S., Raya, A., The effective QCD phase diagram and the critical end point, *Nuclear Physics B*, Volume 897, 2015, pp.77-86, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2015.05.014>.
- [30] Fujii, H., Scalar density fluctuation at the critical end point in the Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* 67, 094018 (2003), doi: 10.1103/PhysRevD.67.094018, arXiv:hep-ph/0302167v2
- [31] Morones, J.R., et al., Chiral symmetry restoration and the critical end point in QCD, *Open Physics*, vol. 15, no. 1, 2017, pp. 1039-1044., <https://doi.org/10.1515/phys-2017-0130>
- [32] Czopowicz, T., Overview of experimental critical point search, *Springer Proc.Phys.* 250 (2020) 379-388, doi: 10.1007/978 – 3 – 030 – 53448 – 6_0
- [33] Hatta, Y., Ikeda, T., Universality, the QCD critical/tricritical point and the quark number susceptibility, *Phys.Rev. D*67 (2003) 014028, doi:10.1103/PhysRevD.67.014028, arXiv:hep-ph/0210284v2
- [34] Mandl, F., Shaw, G., *Quantum Field Theory*, 2nd ed., 2010 John Wiley & Sons, Ltd.

- [35] Yukawa, H., On the Interaction of Elementary Particles. I. Proc.Phys.Math.Soc.Jap. 17 (1935) 48-57, Prog.Theor.Phys.Suppl. 1 1-10 DOI: 10.1143/P TPS.1.1 <https://doi.org/10.1143/P TPS.1.1>
- [36] Gell-Mann, M., A Schematic Model of Baryons and Mesons, Phys.Lett. 8 (1964) 214-215 DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3
- [37] Zweig, G., An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2, Part of Developments in the Quark Theory of Hadrons, pp.22-101 VOL. 1. 1964 - 1978, Report number: CERN-TH-412, NP-14146, PRINT-64-170
- [38] Greenberg O.W., Color Charge Degree of Freedom in Particle Physics. In: Greenberger D., Hentschel K., Weinert F. (eds) Compendium of Quantum Physics (2009). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7_32.
- [39] Peskin, M., Schroeder, D., An Introduction to Quantum Field Theory, (1995) Westview Press.
- [40] Langacker, P., The Standard Model and Beyond, Second Edition, 2017 by Taylor & Francis Group, LLC, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742
- [41] Langacker, P., Introduction to the Standard Model and Electroweak Physics, Part of Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics on The dawn of the LHC era (TASI 2008): Boulder, USA, June 2-27, 2008, arXiv:0901.0241v1 [hep-ph]
- [42] Reif, F., Física Estadística, Berkeley Physics Course - volumen 5, Editorial Reverté, S.A., 1993.
- [43] Kapusta, J.I., Gale, C., Finite-Temperature Field Theory, Principles and Applications, Cambridge University Press, New York.
- [44] Klevansky, S., Chiral symmetry breaking in hot matter, Lecture Notes in Physics, Vol. 516 (Springer, Heidelberg), p113 (1998), arXiv:hep-ph/9810399
- [45] Nambu, Y., Jona-Lasinio, G., Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity I, Phys. Rev. 122 (1961), 345-358.
- [46] Buballa, M., NJL-Model Analysis of Dense Quark Matter, Phys. Rep., 407(2005)205

- [47] Klevansky, S., The Nambu-Jona-Lasinio Model of Quantum Chromodynamics, *Rev. Mod. Phys.* 64, 649 (1992).
- [48] Vogl, U., Weise, W., The Nambu and Jona Lasinio Model: Its Implications for Hadrons and Nuclei. *Prog.Part.Nucl.Phys.* 27 (1991) 195-272. DOI: 10.1016/0146-6410(91)90005-9
- [49] Kohyama, H., Kimura, D., Inagaki, T., Regularization Dependence on Phase Diagram in Nambu-Jona-Lasinio Model, *Nuclear Physics B* 896(2015)682–715
- [50] Andersen, J., Naylor, R., Phase Diagram of QCD in a Magnetic Field: A Review, *Rev. Mod. Phys.* 88, 025001 (2016)
- [51] Morones, R., Mata-Carrizal, B., Valbuena-Ordoñez, E., Garza-Aguirre, A., Dependence of the Crossover Zone on the Regularization Method in the Two-Flavor Nambu-Jona-Lasinio Model, *Open Physics*, vol. 18, no. 1, 2020, pp. 089-103. <https://doi.org/10.1515/phys-2020-0010>
- [52] Blaschke, D., Volkov, M.K., Yudin, V., Coexistence of color superconductivity and chiral symmetry breaking within the NJL model,(2003) [arxiv.hep-ph/9812503](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9812503).
- [53] Cui, ZF., Zhang, JL. & Zong, HS. Proper time regularization and the QCD chiral phase transition. *Sci Rep* 7, 45937 (2017). <https://doi.org/10.1038/srep45937>
- [54] Kohyama, H., Kimura, D., Inagaki, T., Regularization dependence on phase diagram in Nambu-Jona-Lasinio model, (2015) *Nuclear Physics B* 153(C), <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2015.05.015>
- [55] Wang, Q., Xia, Y., Zong, H., Nambu–Jona-Lasinio model with proper time regularization in a finite volume, *Modern Physics Letters A* Vol. 33, No. 39, 1850232 (2018), <https://doi.org/10.1142/S0217732318502322>
- [56] Sasaki, C., Friman, B., Redlich, K., Susceptibilities and the Phase Structure of Chiral Model with Polyakov Loops, <https://doi.org/10.1142/S0218301307007878>, *International Journal of Modern Physics E* Vol. 16, No. 07n08, pp. 2319-2324 (2007)

- [57] Fukushima, K., Chiral Symmetry and Heavy-Ion Collisions, Journal of Physics G, (2008) vol.35, DOI:10.1088/0954-3899/35/10/104020
- [58] Stephanov, M.A., QCD phase diagram: An Overview. Part of Proceedings, 24th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2006) : Tucson, USA, July 23-28, 2006 Published in: PoS LAT2006 (2006) 024, DOI: 10.22323/1.032.0024
- [59] Meyer-Ortmanns, H. Phase transitions in quantum chromodynamics, Rev. Mod. Phys. 68, 473 (1996). DOI:10.1103/RevModPhys.68.473
- [60] Stephanov, M.A., Rajagopal, K., Shuryak, E., Signatures of the Tricritical Point in QCD, Phys.Rev.Lett. 81 (1998) 4816-4819
- [61] Bazavov, A., et al., Chiral crossover in QCD at zero and non-zero chemical potentials, Physics Letters B, Volume 795, 2019, Pages 15-21, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.05.013>. (<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319303223>)
- [62] Wilson, K.G., (1974) Confinement of quarks. Physical Review D, 10(8), 2445–2459. doi:10.1103/physrevd.10.2445
- [63] Ding H.-T., New developments in lattice QCD on equilibrium physics and phase diagram, Nucl. Phys. A, 00 (2020) 1. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2020.121940
- [64] Ukawa, A., Lectures on lattice QCD at finite temperature, Part of Phenomenology and lattice QCD. Proceedings: Uehling Summer School, Seattle, USA, Jun 21-Jul 2, 1993, 0211-304 Contribution to: Uehling Summer School on Phenomenology and Lattice QCD, 0211-304
- [65] Borsányi, S., Fodor, Z., Hoelbling, C. et al., Is there still any T_c mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III, J. High Energ. Phys. 2010, 73 (2010). [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2010\)073](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2010)073)
- [66] Lu, Z., Xia, Ch., Ruggieri, M., Thermodynamics and susceptibilities of isospin imbalanced QCD matter, European Physical Journal C 80(1)(2020)
- [67] Xu, SS., Yin, PL. Zong, HS. Susceptibilities and the critical band of crossover region in the QCD phase diagram. Eur. Phys. J. C 79, 399(2019), <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6915-0>

- [68] Blanquier, E., The Polyakov, Nambu and Jona-Lasinio model and its applications to describe the sub-nuclear particles, (2013), arXiv preprint arXiv:1510.07736, (2015).
- [69] Mata, B., Estudio del Diagrama de Fases de la Cromodinámica Cuántica en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio con diferentes métodos de regularización, Tesis Doctoral.
- [70] Scavenius, O., Mócsy, A., Mishustin, I.N., Rischke, D.H., Chiral Phase Transition within Effective Models with Constituent Quarks
- [71] He, Y.B., Chao W.Q., Gao C.S., Li, X.Q., Cold Strangelets Formation with Finite Size Effects in High Energy Heavy-Ion Collisions, (1996)
- [72] Madsen, Shell Model versus Liquid Drop Model for Strangelets (1994) Phys. Rev. D 50, 3328, DOI:10.1103/PhysRevD.50.3328
- [73] Kiriyaama, O., Hosaka, A., Chiral phase properties of finite size quark droplets in the Nambu–Jona-Lasinio model, Physical Review D (2003) 67. DOI:10.1103/PhysRevD.67.085010
- [74] Kiriyaama, O., Colour-superconducting strangelets in the Nambu-Jona-Lasinio model, Physical Review D Vol72 (2005)
- [75] Kiriyaama, O., Kodama, T., Koide, T., Finite-size effects on the QCD phase diagram, 2006, arXiv:hep-ph/0602086.
- [76] Balian, R., Bloch, C., Distribution of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a Finite Domain I. Three-Dimensional Problem with Smooth Boundary Surface, Annals of Physics 0003-4916, 2 Vol60 (1970), doi 10.1016/0003-4916(70)90497-5
- [77] Meissner, Th., Ruiz Arriola, E., Goeke, K., Regularization scheme dependence of vacuum observables in the Nambu-Jona-Lasinio model, Z. Physik A - Atomic Nuclei 336, 91–96 (1990), <https://doi.org/10.1007/BF01904166>
- [78] Wang, Q., Xia, Y., Zong, H., Finite volume effects with stationary wave solution from Nambu-Jona-Lasinio model, arXiv: High Energy Physics - Phenomenology (2018).
- [79] Mandl, F., Quantum Mechanics, John Wiley & Sons Ltd., England 1992.

- [80] Cui, Z., Du, Y., Zong, H., The two-flavor NJL model with two-cutoff proper time regularization, *International Journal of Modern Physics: Conference Series* Vol. 29, 1460232 (2014), <https://doi.org/10.1142/S2010194514602324>
- [81] Ebert, D., Feldmann, T., Extended NJL model for light and heavy mesons without q-q thresholds, *Physics Letters B* (1996) Vol388, pp.154-160. DOI:10.1016/0370-2693(96)01158-6
- [82] Mata B., Valbuena E., Garza A.J., Betancourt, F.J., Morones-Ibarra J.R., Effects of a Finite Volume in the Phase Structure of QCD, *Universe* **8**, no.5, 264 (2022) doi:10.3390/universe8050264
- [83] Betancourt, F.J., Saucedo, J. R., Flores-Ocampo, F., Flores-Baez, F.V. , Paz, A., and Morones-Ibarra, J.R. *Open Phys.* **20**, no.1, 377-389 (2022) doi:10.1515/phys-2022-0039
- [84] Gastineau, F., Nebauer, R., Aichelin, J., Thermodynamics of the three-flavor Nambu–Jona-Lasinio model: Chiral symmetry breaking and color superconductivity, *Physical Review C*, Volume 65, 045204, DOI: 10.1103/PhysRevC.65.045204
- [85] Abreu, L., Correa, E., Linhares, C., Malbouisson, A., Finite-volume and magnetic effects on the phase structure of the three-flavor Nambu–Jona-Lasinio model, *Physical Review D* 99, 076001 (2019) DOI: 10.1103/PhysRevD.99.076001
- [86] Pan, Z., Cui, Z., Chang, Ch., Zong, H., Finite-volume effects on phase transition in the Polyakov-loop extended Nambu-Jona-Lasinio model with a chiral chemical potential, arXiv:1611.07370v1 [hep-ph]
- [87] Zhao Y., Yin, P., Yu, Z., Zong, H., Finite volume effects on chiral phase transition and pseudoscalar mesons properties from the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model, *Nuclear Physics B*952 (2020) 114919, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2020.114919>
- [88] Fukushima, K., Chiral effective model with the Polyakov loop, *Phys.Lett.B*591:277-284, (2004), arXiv:hep-ph/0310121
- [89] Valbuena, E. Mata, B., Influence of the Effective Potential on the Crossover Width in the Two Flavor Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio Model, *Advances in High Energy Physics* Volume 2020, 6760547, <https://doi.org/10.1155/2020/6760547>