Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrio de Nash Robusto Para Juegos Dinámicos Discretos de N-Participantes

por

M.C. Fernando Guerrero Vélez

en opción al grado de

Doctor en Ingeniería Física

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Octubre 2021

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrio de Nash Robusto Para Juegos Dinámicos Discretos de N-Participantes

por

M.C. Fernando Guerrero Vélez

en opción al grado de

Doctor en Ingeniería Física

con especialidad en Control Automático

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Octubre 2021

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Equilibrio de Nash Robusto Para Juegos Dinámicos Discretos de N-Participantes", realizada por el alumno M.C. Fernando Guerrero Vélez, con número de matrícula 1467565, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería Física, con orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga
Asesor

Dra. Victoria Celeste Rodríguez Carreón

Dr. Francisco Almaguer Martínez

Dr. Pablo César Rodríguez Ramírez

Dra. Nataliya Kalashnykova

Vo. Bo.

Dra. Edgar Martínez Guerra
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Enero 2021

Esta tesis esta dedicada a mi familia y a mi esposa,
por todo el apoyo que me han brindado.

Índice General

1 Introducción **1**
1.1 Antecedentes 3
1.2 Objetivos y Contribución 6

2 Marco Teórico **8**
2.1 Programación dinámica y principio del mínimo para juegos discretos 8
2.2 Equilibrio de Nash 11
2.2.1 Equilibrio de Nash en un juego discreto de suma cero 12
2.3 Equilibrio Stackelberg 15
2.3.1 Equilibrio de Stackelberg en un juego afín lineal cuadrático discreto 17

3 Derivación del Equilibrio de Nash Robusto Discreto Para un Juego Incierto **21**
3.1 Descripción del modelo y suposiciones iniciales 21
3.1.1 Equilibrio de Nash Robusto en Lazo Abierto 22
3.1.2 Condiciones Necesarias la Existencia del Equilibrio de Nash Robusto 24
3.1.3 Condiciones Suficientes para la Existencia del Equilibrio de Nash Robusto 27

4 Aplicación del Equilibrio de Nash Robusto para una Cadena de Suministros **33**
4.1 Parámetros de simulación 33
4.2 Resultados de la Simulación 35

Lista de Figuras

1.1 Juego matricial estático de 2 jugadores. 2
1.2 Juego dinámico de 1 etapa entre 2 jugadores A y B. 3
1.3 Tipos de juegos dinámicos y sus ramas de estudio. 4

2.1 Principio de programación dinámica: La suma de las trayectorias óptimas AB, BC, CD es la trayectoria óptima del sistema. 10

4.1 Evolución de x^1 y u^1 sin la consideración de perturbación de peor caso. 36
4.2 Evolución de x^2 y u^2 sin la consideración de perturbación de peor caso. 37
4.3 Evolución de x_w^1 y u_w^1 considerando la perturbación de peor caso. 37
4.4 Evolución de x_w^2 y u_w^2 considerando la perturbación de peor caso. 38

Agradecimientos

Primeramente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado la beca de doctorado y tener la oportunidad de lograr este grado académico.

Así mismo, quiero agradecer a la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), y al Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas (CICFIM) por brindarme el espacio y el apoyo necesario para llevar a cabo este proyecto.

Finalmente, deseo expresar mi gratitud a mi asesor de tesis, el Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga por haber sido un excelente mentor y apoyo, quién en todo momento estuvo dispuesto a orientarme para resolver dudas y continuar adelante, dentro y fuera del aula, así como por haberme dado la oportunidad de participar en otros de sus proyectos y enriquecer mi conocimiento a través de sus otros estudiantes.

Resumen

M.C. Fernando Guerrero Vélez.
Candidato para el grado de Doctor en Ingeniería Física
con orientacíon en Control Automático.

Universidad Autónoma de Nuevo León.
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Título del estudio:

EQUILIBRIO DE NASH ROBUSTO PARA JUEGOS
DINÁMICOS DISCRETOS DE N-PARTICIPANTES

Número de páginas: 48.

Objetivos y método de estudio: Encontrar acciones de control ante perturbaciones en un juego dinámico discreto mediante el cálculo de un equilibrio de Nash.

Contribuciones y conlusiones: Se han derivado las condiciones necesarias y suficientes del equilibrio de Nash robusto en un juego dinámico discreto sujeto a perturbaciones, obteniendo mediante la simulación de una cadena de suministros un desempeño superior de los controles para garantizar un mejor seguimiento de las trayectorias de estado del sistema.

Firma del asesor: _____

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga

Capítulo 1

Introducción

Un juego es una situación donde dos o mas participantes están envueltos en una situación de competición entre ellos. Puede ser un ambiente cooperativo, donde los participantes buscan alcanzar el mejor resultado posible para alcanzar una meta, y un ambiente no cooperativo en donde pueden ocurririr dos situaciones; la primera de ellas es que los participantes esten enfrentados entre sí, dando lugar a una relación de suma en términos de beneficios, es decir, lo que uno de estos jugadores gana, el otro lo pierde, siendo este tipo de juegos llamados *Juegos de Suma Cero*. Por otro lado, la segunda de estas situaciones es el caso donde las acciones de un jugador repercuten en los beneficios o pérdidas de los demás, dando lugar así a un escenario de competencia donde cada uno de los jugadores responde a las acciones de los otros para lograr el mejor beneficio posible.

Un juego puede ser *estático* o *dinámico*, es decir, en el primero las acciones de los jugadores son tomadas de manera independiente con base en su información actúal y no hay respuesta en consecuencia a esta acción por parte de otros jugadores. Por ejemplo, se puede mencionar el caso de 2 empresas competidoras A y B, las cuales tienen un beneficio total de $(A = 10, B = 15)$. Ante esta situación, la empresa A decide iniciar una campaña de publicidad para atraer clientes potenciales de su competidor B. Así mismo la empresa B tiene la opción de decidir si invertir también en publicidad, ante lo cual realiza las predicciones correspondiente. Los beneficios totales de ambas empresas después de los gastos de *marketing* se muestran en la Figura 1.1, en la cual se puede observar que la mejor estrategia de decisión para la empresa A y la empresa B es invertir en publicidad. Este tipo de juegos son también llamados juegos matriciales.

Empresa A \ Empresa B	Hacer Publicidad	No hacer Publicidad
Hacer publicidad	(12,16)	(13,9)
No hacer publicidad	(7,18)	(9,12)

Figura 1.1: Juego matricial estático de 2 jugadores.

En el caso de los juegos dinámicos, estos se dividen en intervalos de tiempo que pueden ser continuos o discretos, en los cuales, a partir de una condición inicial dada, el juego evoluciona de forma temporal de manera que en cada etapa del juego, los participantes deben evaluar sus estrategias para tomar una decisión que los situe en el mejor de los escenarios posibles previo a la etapa siguiente en respuesta a las acciones tomadas previamente por el resto de jugadores. Un ejemplo de esto sería la misma situación de las empresas competidoras A y B, pero en este caso, la empresa A anuncia su estrategia de hacer o no hacer publicidad, ante lo cual la empresa B reacciona a la acción de su competidor como se muestra en la Figura 1.2, donde es posible observar que dependiendo del número de etapas, la empresa A puede responder nuevamente a las estrategias adoptadas por B, y así sucesivamente obteniendo una estructura de árbol hasta una etapa final (juego dinámico finito), o perpetuando el juego dinámico mientras ambos jugadores puedan mantenerse compitiendo (juego dinámico infinito).

En general, la solución de un juego es alcanzable a través de distintas herramientas matemáticas las cuales son empleadas de acuerdo al número de participantes y al tipo de juego partícular (continuo o discreto). En general, Los juegos discretos de un jugador se estudian problemas de *optimización matemática*, en los cuales se busca seleccionar el mejor resultado con base en uno o varios criterios definidos, mientras que los juegos dinámicos de un solo participante son problemas típicamente estudiados mediante técnicas de *control óptimo*, los cuales buscan encontrar la mejor solución para un sistema que evoluciona en el timepo. Sin embargo, cuando los participantes en el juego (estático o dinámico) son 2 más jugadores, la solución de este

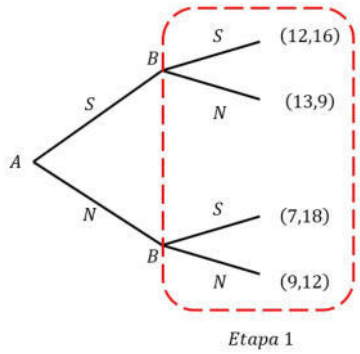

Figura 1.2: Juego dinámico de 1 etapa entre 2 jugadores A y B.

tipo de problemas recaen en una rama de las matemáticas conocida como *Teoría de juegos* (ver Figura).

La Teoría de Juegos es entonces la rama de la ciencia que estudia el comportamiento de dos o más agentes llamados *jugadores*, en una situación de interdependencia bajo el supuesto de que sus participantes se comportan de forma *lógica y racional* para elegir las acciones que los beneficien individual o cooperativamente a través de etapas sucesivas de toma de decisiones por parte de cada uno de sus integrantes. Además, en un juego dinámico, este puede estar sujeto a situaciones externas adversas (perturbaciones) para sus participantes, las cuales pueden influir en los resultados obtenidos, dando lugar a que los jugadores no tengan el absoluto control sobre sus beneficios. De esta manera, las acciones de los participantes están orientadas a maximizar sus ganancias y minimizar sus pérdidas. A este conjunto de acciones (también llamadas *estrategias o reglas de decisión*) utilizadas durante cada etapa del juego dinámico se le conoce como el *control óptimo* del jugador.

1.1 Antecedentes

El estudio de juegos dinámicos ha sido una ciencia que ha visto incrementada su relevancia de forma importante en las últimas decadas debido a que su estructura permite representar de forma adecuada el comportamiento estrategico entre diferentes agentes (jugadores) en situaciones de competición, conflictos o cooperación. Estas situaciones frecuentemente aparecen en una variedad de campos como la ingeniería, economía, biología, entre otros (ver

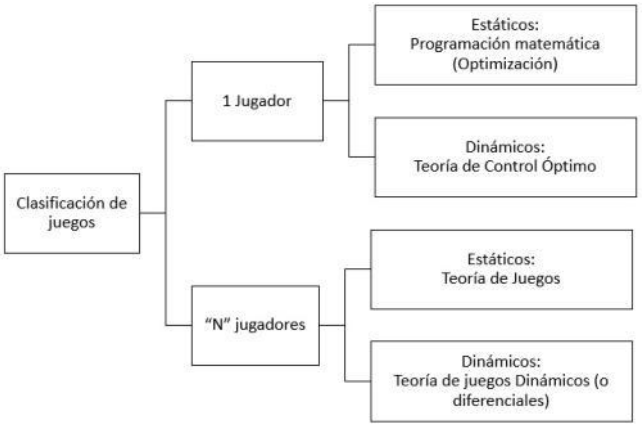

Figura 1.3: Tipos de juegos dinámicos y sus ramas de estudio.

[12], [20], y [21]). La obtención de las estrategias óptimas para problemas de un solo jugador está claramente definida mediante el *principio de optimalidad*, es decir, se hace el supuesto de que si la trayectoria óptima de un $puntoA$ a un $puntoC$, entonces las trayectorias desde $A-B$ y $B-C$ también son óptimas. Sin embargo, en los juegos dinámicos se suele considerar un tipo de solución conocido como "Equilibrio de Nash", el ocurre cuando los jugadores no tienen permitido cooperar y el cual representa una de las situaciones más importantes en el estudio de juegos dinámicos.

En esta clase de equilibrio no cooperativo, dos o más jugadores interactúan de manera que cada jugador busca maximizar sus ganancias y minimizar sus pérdidas a través de una función de costo (ver [12] y [22].) La mejor respuesta del jugador$-i$ *con respecto al* conjunto de acciones del resto de jugadores, lleva a una situación en la cual ninguno de los participantes en el juego tiene incentivos para abandonar su estrategia de respuesta. Si todos los participantes del juego dinámico calculan entonces su mejor respuesta ante las acciones de los participantes, entonces se alcanza una situación de *equilibrio de fuerzas* también llamado "Equilibrio de Nash". Retomando el ejemplo mostrado en la Figura 1.1, es posible observar que la mejor estrategia para las empresas A y B es invertir en publicidad, ya que independientemente de las acciones de su competidor, sus ganancias son máximas al elegir esta siuación. Esto lleva a que ambas empresas no tengan incentivos para elegir la otra estrategia, estableciendo así un punto de equilibrio de Nash.

Una de las carácterísticas deseadas en la obtención de las estrategias de

control en los juegos dinámicos, es la noción de "robustez en las estrategias", debido a que en la práctica es inevitable la presencia de incertidumbres o "ruidos". En trabajos como [5], [6], [7], se analiza el control robusto de sistemas en inexactitudes en los modelos, ruidos en los sensores, perturbaciones, no linealelidades del sistema, y dinámicas modeladas, agrupando todos estos elementos como una perturbación desconocida a la cual el control debe contrarrestar para reducir las afectaciones a los sistemas.

Algunos desarrollos recientes relacionados con estas situaciones pueden encontrarse principalmente en juegos dinámicos de tiempo continuo. En [15], se presenta la noción de Equilibrio de Nash en lazo abierto (ENLA), dónde los parámetros del juego se dinámico se encuentran dentro de un escenario de peor caso, es decir, el resultado de la aplicación de cierta entrada de control (en términos del valor de la función de costo) es asociada con el valor menos favorable de un parámetro desconocido, pero acotado. El artículo de [8] también presenta un ENLA y desarrolla las condiciones de existencia y unicidad de un Equilibrio de Nash de peor caso (ENPC); sin embargo, en este caso los autores consideran que las incertidumbres pertenecen a un espacio de Hilbert, dónde estas actúan sumando la perturbación a las derivadas temporales de las variables de estado. Un problema similar es presentado en [13], donde el autor muestra las condiciones necesarias y suficientes para la solución de un problema de ENPC, el cual puede ser obtenido al encontrar el ENLA asociado a un juego diferencial de 2N restricciones de estado. Otros aproximaciones relacionadas incluyen: utilizar estrategias de Nash para diseñar controles robustos para sistemas lineales [25], o restricciones en el estado (ver [10],[19], [18] y [26]), o lidiar con estas incertidumbres al tratarlas como una entrada exógena de un jugador ficticio ([24]).
En general, trabajos como los mencionados se centran en analizar sistemas en tiempo continuo. A pesar de esta situación, no hay mucha información en la literatura sobre juegos dinámicos afectados por esta clase de perturbaciones, particularmente, en el área de juegos dinámicos discretos, donde esta información es aún más escasa y donde podría tener mayor implementación en los ámbitos de la ingeniería, electrónica e informática, donde las dinámicas prevalecientes son mayoritariamente discretas. Es necesario aclarar que las dinámicas sin modelar y otros tipos de incertidumbres variantes en tiempo pueden no tener tal propiedad por lo tanto se consideran incertidumbres sin estructura, es decir, no es posible expresar estas afectaciones como matrices que determinen la dirección en la cual va a existir la incertidumbre. Por este motivo, en este trabajo consideraremos este último tipo utilizando el principio del mínimo (Principio de Pontryagin) junto con un escenario

de perturbación de peor caso para calcular la maximización de la función Hamiltoniana correspondiente para cada jugador$-i$, de manera que esta aproximación nos brinda una trazabilidad analítica para este tipo de problemas con incertidumbres de estructura incierta.

1.2 Objetivos y Contribución

Este trabajo presenta la contraparte en tiempo discreto del equilibrio robusto de Nash en tiempo continuo para un juego lineal cuadrático como el planteado en ([8]) y ([13]). Considerando la filosofía de la incertidumbre de peor caso desde el punto de vista del jugador$-i$ (ver [8]), aquí se derivan las condiciones necesarias de la existencia del equilibrio robusto de Nash utilizando una aproximación mediante el principio del mínimo; tales condiciones son encontradas después en la solución de una ecuación tipo Riccati discreta con condiciones de frontera.

Además siguiendo la técnica de la función de valor (ver [2], [9] y [22]) junto con el método de completar cuadrados presentado en [2], derivamos las condiciones necesarias para que tal equilibrio exista. La importancia de resolver este tipo de problemas radica en que la matemática discreta se encuentra ampliamente difundida en las tecnologías digitales, ya que las computadoras realizan trabajan en estados discretos, y muchos de los sistemas modernos de control que son implementados en en la actualidad están basados en sistemas computacionales. Además, los controles digitales son utilizados para resolver todo tipo de tareas, desde problemas optimización, regulación de estados o seguimiento de objetivos. Vale la pena mencionar que las herramientas matemáticas relacionadas a los estados discretos son ampliamente aplicadas en la teoría de juegos, especialmente en casos dinámicos tales como: programación dinámica, programación lineal y optimización discreta (ver [18] y [19]).

En ([13]), el autor proporciona las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio de Nash robusto en lazo abierto para un escenario de peor caso en un juego dinámico lineal cuadrático en tiempo continuo con matrices constantes. Tal resultado depende de la invertibilidad y de ciertas matrices que utilizan la solución del hamiltoniano asociado del sistema de un juego incierto con parámetros constantes. Sin embargo, a criterio del autor de esta tesis, en la bibliografía existe poca información respecto a un juego de Nash en lazo abierto en tiempo discreto con incertidumbre determinísticas y matrices variantes en tiempo. Además, el hecho de que tengamos que lidiar con parámetros no constantes no permite que

las técnicas usadas en [13] sean del todo aplicables. Por este motivo, en este trabajo se derivan las estrategias robustas en lazo abierto para un juego de Nash y posteriormente son aplicadas a la coordinación de una cadena de suministros de dos niveles, en el cuál se considera que la demanda posee fluctuaciones estacionales inciertas, es decir, en el ejemplo se modela la demanda en dos componentes: una parte conocida with un comportamiento de demanda estacional conocida y una segunda parte formada por un comportamiento estacional incierto, el cuál se establece como una fluctuación desconocida (ver[20]).

Capítulo 2

Marco Teórico

En un proceso de toma de decisiones complejo como un juego dinámico, las pérdidas o ganancias no pueden ser predecidas con total certeza. Sin embargo, puede ser anticipadas observando el comportamiento registrado en un intervalo previo. La toma de decisiones debe realizarse a través de una función de costo que represente la suma de los costos obtenidos anteriormente con las expectativas de los costos futuros. Esta función de costos ponderada debe ser minimizada obteniendo así un beneficio óptimo, representando por lo tanto la trayectoria óptima entre la toma de decisiones pasadas como pauta para realizar una decisión óptima hacía el futuro, lo que da lugar al *principio de programación dinámica*.

2.1 Programación dinámica y principio del mínimo para juegos discretos

Analizaremos ahora una formulación para juegos dinámicos discretos diferente a la estructura de tipo árbol mencionada en el capítulo introductorio conocida como *Modelo de lazo* [22]. Para este caso, se considera un juego dinámico discreto de $N-$jugadores dividido en $K-$-etapas y con el vector de estrategias $\boldsymbol{U}_k^i$, donde $u_k^i \in \boldsymbol{U}_k^i$ representa la acción de control del jugador$-i$ en cada etapa del juego. La trayectoria del juego es representada por el conjunto x_k, el cual representa el *estado del juego dinámico* en el tiempo $k = [0, K]$. La ecuación en diferencias que representa la evolución del juego dinámico se define mediante una función que representa el proceso de decisiones que llevan el juego a un estado siguiente dada por

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k^1 ... u_1^N) \forall k \in \boldsymbol{K} \tag{2.1}$$

Además, se definira una funcional en tiempo discreto J_i, que representa el costo mínimo en la estregia de control obtenido por el jugador$-i$ conocida como *función de costos*, la cual es de carácter determinista en las $k-etapas$ del juego siempre que exista una función aditiva g_k:

$$J_k^i = \sum_{k=1}^{K} g_k(x_{k+1}, u_k^i, x_k) \tag{2.2}$$

El *principio de programación dinámica* es un método para obtener la trayectoria óptima de un sistema basado en el *principio de optimalidad*, el cual establece que sin importar las condiciones iniciales x_0 del sistema, la sucesiva elección de trayectorias óptimas hasta el estado final x_K representa la estrategia óptima del sistema.

El planteamiento del problema básico de programación dinámica puede observarse en [3], donde dado un sistema en tiempo discreto como (2.1), x_k es la trayectoria del jugador u_k^i, y las acciones de control del resto de jugadores, por simplicidad serán consideradas como una perturbación w_k para el jugador$-i$.

La función de costos que representa esta situación es la mostrada en (2.3), donde conocidendo el estado final x_K junto con el estado inicial x_0, se puede calcular las trayectorias óptimas entre las sucesivas etapas partiendo desde $k = K$ hacía atrás en el tiempo.

$$J_k^i(x_0) = E\left[g_K(x_K) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k\left(x_k, u_k^i, w_k\right)\right] \tag{2.3}$$

donde $g_K(x_K)$ como el costo terminal obtenido al final del proceso. Además, el valor esperado de la ecuación (2.3) se obtiene a través de las variables u_k y w_k, de manera que la función de costo óptima es

$$J_k^{i*}(x_0) = \underset{u \in U_k^i}{min} J_k^i(x_0) \tag{2.4}$$

De esta manera, al ser de carácter aditivo, la minimizacón de la función de costos (2.3) en cada etapa del tiempo nos permite obtener la trayectoria óptima del sistema (ver Figura 2.1).

Para demostrar este principio podemos referirnos nuevamente a [3], donde, para cada conjunto de estrategias $u_k^i \in U_k^i$, con $k = 0, 1, ..., K-1$ y la función

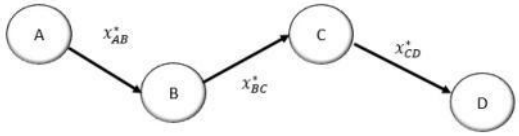

Figura 2.1: Principio de programación dinámica: La suma de las trayectorias óptimas AB, BC, CD es la trayectoria óptima del sistema.

de costo óptima (2.4), entonces el problema de control óptimo para el tiempo k se convierte en:

$$J_k^{i*}(x_0) = \underset{u \in U_k^i}{min} E\left[g_K(x_K) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k\left(x_k, u_k^i, w_k\right)\right] \tag{2.5}$$

Ahora, evaluando la ecuación (2.5) para $k = K$ tenemos que $J_k^{i*}(x_k) = g_K(x_K)$, es posible demostrar por inducción que las funciones de costo $J_k^{i*}(x_k) = J_k^i(x_k)$ obtenidas por el principio de programación dinámica, de modo que es posible trabajar de forma recursiva hacia atrás en el tiempo. Entonces, supongamos que para cierta k, se satisface que $J_{k+1}^{i*}(x_{k+1}) = J_{k+1}^i(x_{k+1})$, entonces

$$\begin{aligned}
J_k^{i*}(x_k) &= \underset{u_k, w_k}{min} E\left[g_k(x_k, u_k, w_k) + g_K(x_K) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k\left(x_k, u_k^i, w_k\right)\right] \\
= \underset{u_k, w_k}{min} E\left[g_k(x_k, u_k, w_k) + \underset{u_k, w_k}{min} E\left[g_K(x_K) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k\left(x_k, u_k^i, w_k\right)\right]\right] \\
&= \underset{u_k, w_k}{min} E\left[g_k(x_k, u_k, w_k) + J_{k+1}^{i*}(f_k(x_k, \mu_k, w_k))\right] \qquad (2.6) \\
&= \underset{u_k, w_k}{min} E\left[g_k(x_k, u_k, w_k) + J_{k+1}^{i}(f_k(x_k, \mu_k, w_k))\right] \\
&= J_k(x_k)
\end{aligned}$$

Por lo tanto este principio es utilizado en la teória de jugos partiendo de la condición final de la función de costos del sistema (*costo terminal*) y trabajando de manera recursiva hacía atrás en el tiempo para encontrar las estrategias óptimas en un juego dinámico.

Un tipo de problema que puede usarse para ilustrar los conceptos del principio de programación dinámica es un juego conocido como *Juego Afín Lineal Cuadrático*, en el cual la dinámica del sistema se representa mediante

la ecuación de estado

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + c_k \tag{2.7}$$

Para este tipo de juegos, la función $g_k(x_{k+1}, u_k, x_k)$ es descrita en [22] como:

$$g_k(x_{k+1}, u_k, x_k) = u_k^\top R_k u_k + \frac{1}{2} x_k^\top Q_k x_k, \qquad k \neq 1, K+1 \tag{2.8}$$

donde $A \in \Re$ es la matriz del sistema, $B \in \Re$ es la matriz de control, $R_k > 0$ y $Q_k \geq 0$ son matrices de pesos siendo A_k, B_k, R_k y Q_k de dimensiones apropiadas con $x_k \in \Re^n$, $u_k \in \Re^m$ $c_k \in \Re^n$.

El *principio del mínimo de Pontryagin* es un método que nos permite estimar el mejor control para llevar un sistema de un estado a otro. Para jugeos dinámicos discretos, este principio requiere encontrar la función Hamiltoniana del sistema

$$H_k^i \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i}, p_{k+1}^i \right) = g_k \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i} \right) + p_{k+1}^{i\top} f_k \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i} \right) \tag{2.9}$$

donde p_k es un conjunto finito de vectores $n-$dimensionales que representan los vectores de co-estado de H_k^i, la cual debe minimizarse para la acción de control u_k. Entonces, tomando como referencia el *Teorema 5.5* presentado en [22], tenemos que

$$x_{k+1}^* = f_k(x_k^*, u_k^*), \qquad x_1^* = x_1 \tag{2.10}$$

$$u_k^* = arg \min_{u_k \in \boldsymbol{U}_k} H_k(p_{k+1}, u_k, x_k^*) \tag{2.11}$$

$$p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(x_k^*, u_k^*) \left[p_{k+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} g_k(x_{k+1}^*, u_k^*, x_k^*) \right)^\top \right] + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_k(x_{k+1}^*, u_k^*, x_k^*) \right)^\top, \quad p_{K+1} = 0 \tag{2.12}$$

2.2 Equilibrio de Nash

El equilibrio de Nash es en la teória de juegos un tipo de solución en la cual dos o más jugadores en un juego no cooperativo se ven envueltos en una situación donde establecen su mejor estrategia de juego dadas las estrategias de los otros participantes, en consecuencia, cada jugador ya no tiene incentivos de forma individual para cambiar su estrategia, aún cuando la estrategia misma no represente el máximo beneficio (ver Figura 1.1), llegando a un punto de equilibrio conocido como Equilibrio de Nash. Para que exista dicho equilibrio, se debe considerar que:

- Los jugadores adoptan estrategias de forma racional.
- Cada jugador conoce las estrategias de sus competidores.
- Cada jugador adopta su mejor estrategia posible en respuesta a sus competidores.

El equilibrio de Nash para un juego dinámico discreto se establece midiendo la evolución en cada etapa del tiempo de la dinámica (2.1) a través de la *Función de Costos* definida en (2.2) con (2.8). Entonces, para un juego de N jugadores, desde la perspectiva del jugador$-i$ con un conjunto de estrategias $\boldsymbol{U}_k$, se constituye un equilibrio de Nash si y solo si se satisface la siguiente desigualdad:

$$J^{i*}\left(u_k^{i*}, u_k^{(j\neq i)*}\right) \leq J^i\left(u_k^i, u_k^{(j\neq i)*}\right) \tag{2.13}$$

con $j \neq i$ representando al resto de participantes tal que $N = i + \sum_{h=1}^{j} h$, y donde

$$J^{i*}\left(u_k^{i*}, u_k^{(j\neq i)*}\right) := \min_{u_k^i} \max_{u_k^{(j\neq i)*}} J^i\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}\right) \tag{2.14}$$

Las ecuaciones (2.13),(2.14) constituyen un tipo de solución conocida como *juego min-max*.

2.2.1 Equilibrio de Nash en un juego discreto de suma cero

Vamos a analizar un juego de Nash de suma cero de 2 jugadores para establecer la manera de trabajar el principio de mínima acción, partiendo del conjunto de ecuaciones (2.9)-(2.12), con la dinámica

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k^1 u_k^1 + B_k^2 u_k^2 + c_k \tag{2.15}$$

y sujeto a la funcional de costo

$$J(u^1, u^2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(x_{k+1}^\top Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^{1\top} u_k^1 - u_k^{2\top} u_k^2\right) \tag{2.16}$$

donde el Hamiltoniano toma la forma:

$$H_k^i\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, p_{k+1}^i\right) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\{(A_k x_k + B_k^1 u_k^1 + B_k^2 u_k^2 + c_k)^\top Q_{k+1}(A_k x_k + B_k^1 u_k^1 + B_k^2 u_k^2 + c_k)$$
$$+ u_k^{1\top} u_k^1 - u_k^{2\top} u_k^2\} \quad (2.17)$$

derivando la ecuación (2.17) respecto a u_k^2:

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k^2} = \frac{1}{2}\left\{2B_k^{2\top} Q_{k+1} x_{k+1} - 2u_k^2\right\} + p_{k+1}^\top B_k^2 = 0$$

entonces

$$u_k^2 = B_k^{2\top}\left[Q_{k+1} x_{k+1} + p_{k+1}\right] \quad (2.18)$$

siendo u_k^2 el control que maximiza la participación del jugador-2. Entonces el control que minimiza la función Hamiltoniana del jugador-1 se obtiene derivando H_k respecto a u_k^2:

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k^1} = \frac{1}{2}\left\{2B_k^{1\top} Q_{k+1} x_{k+1} + 2u_k^1\right\} + p_{k+1}^\top B_k^1 = 0$$

con

$$u_k^1 = -B_k^{1\top}\left[Q_{k+1} x_{k+1} + p_{k+1}\right] \quad (2.19)$$

Ahora, calculamos p_k mediante la ecuación (2.12):

$$p_k = \left[A_k^\top\right]\left[p_{k+1} + Q_{k+1} x_{k+1}\right] \quad (2.20)$$

(i) Para la etapa $k = K$, evaluamos las ecuaciones (2.19), (2.18) y (2.20) con la condición final dada en (2.12): donde se obtiene los controles y el coestado:

$$\begin{aligned} u_K^1 &= -B_K^{1\top} Q_{K+1} X_{K+1} \\ u_K^2 &= B_K^{2\top} Q_{K+1} X_{K+1} \\ p_K &= A_K^T Q_{K+1} x_{K+1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores en (2.15):

$$x_{K+1} = A_K x_K - B_K^1 B_K^{1\top} Q_{K+1} X_{K+1} + B_K^2 B_K^{2\top} Q_{K+1} X_{K+1} + c_K$$

donde al resolver para X_{K+1} se obtiene:

$$x_{K+1} = \Lambda_K^{-1} \left[A_K x_K + c_K \right] \tag{2.22}$$

con

$$\Lambda_K = I + \left(B_K^1 B_K^{1\top} - B_K^2 B_K^{2\top} \right) Q_{K+1} \tag{2.23}$$

por lo que el coestado p_K en la ecuación (2.21) toma la forma

$$p_K = A_K^\top Q_{K+1} \Lambda_K^{-1} \left[A_K x_K + c_K \right] \tag{2.24}$$

(ii) Para la etapa $k = K - 1$, evaluamos nuevamente las ecuaciones (2.19), (2.18) y (2.20), donde:

$$\begin{aligned} u_{K-1}^1 &= -B_{K-1}^{1\top} Q_K X_K \\ u_{K-1}^2 &= B_{K-1}^{2\top} Q_K X_K \\ p_{K-1} &= A_{K-1}^T \left[p_K + Q_K x_K \right] \end{aligned} \tag{2.25}$$

sustituyendo nuevamente las ecuaciones anteriores en (2.15), junto con (2.24):

$$\begin{aligned} x_K = A_{K-1} x_{K-1} - B_{K-1}^1 B_{K-1}^{1\top} \left[Q_K X_K + A_k^\top Q_{K+1} \Lambda_K^{-1} \left(A_K x_K + c_K \right) \right] \\ + B_{K-1}^2 B_{K-1}^{2\top} \left[Q_K X_K + A_k^\top Q_{K+1} \Lambda_K^{-1} \left(A_K x_K + c_K \right) \right] + c_{K-1} \end{aligned}$$

donde al resolver para X_K se obtiene:

$$\begin{aligned} x_K = \Lambda_{K-1}^{-1} [& A_{K-1} x_{K-1} + c_{K-1} \\ & - \left(B_{K-1}^1 B_{K-1}^{1\top} - B_{K-1}^2 B_{K-1}^{2\top} \right) m_K] \end{aligned} \tag{2.26}$$

con

$$\Lambda_{K-1} = I + \left(B_{K-1}^1 B_{K-1}^{1\top} - B_{K-1}^2 B_{K-1}^{2\top} \right) M_K \tag{2.27}$$

y con los nuevos términos

$$M_K = Q_K + AK^\top Q_{K+1}\Lambda_K^{-1}A_K \quad con \quad M_{K+1} = Q_{K+1} \tag{2.28}$$

y

$$m_K = A_K^\top M_{K+1}\Lambda_K^{-1}C_K \tag{2.29}$$

por lo que el coestado p_K en la ecuación (2.21) toma la forma

$$p_{K-1} = A_{K-1}^T\left[A_K^\top Q_{K+1}\Lambda_K^{-1}\left(A_K x_K + c_K\right) + Q_K x_K\right] \tag{2.30}$$

Es posible repetir el procedimiento anterior para una etapa posterior $k = K-2$, sin embargo, las ecuaciones obtenidas en las etapas $k = K$ y $k = K-1$ muestra la siguiente estructura recursiva:

$$x_{k+1} = \Lambda_k^{-1}\left[A_k x_k + \eta_k\right] \tag{2.31}$$

$$u_k^{1*} = -B_k^{1\top}\left[M_{k+1}\Lambda_k^{-1}A_k x_x + \xi_k\right] \tag{2.32}$$

$$u_k^{2*} = B_k^{1\top}\left[M_{k+1}\Lambda_k^{-1}A_k x_x + \xi_k\right] \tag{2.33}$$

$$\Lambda_k = \left[I + \left(B_k^1 B_k^{1\top} - B_k^2 B_k^{2\top}\right)M_{k+1}\right] \tag{2.34}$$

$$M_k = Q_k + A_k^\top M_{k+1}\Lambda_k^{-1}A_k, \quad M_{K+1} = Q_{K+1} \tag{2.35}$$

$$m_k = A_k^\top\left[\left(\Lambda_k^{-1}\right)^\top m_{k+1} + M_{k+1}\Lambda_k^{-1}c_k\right], \quad m_{K+1} = 0 \tag{2.36}$$

$$\xi_k = M_{k+1}\Lambda_k^{-1}\eta_k + m_{k+1} \tag{2.37}$$

$$\eta_k = c_k - \left(B_k^1 B_k^{1\top} - B_k^2 B_k^{2\top}\right)m_{k+1} \tag{2.38}$$

donde el conjunto de ecuaciones (2.31)-(2.38) corresponden con la misma estructura reportada en el *Teorema 6.6* de [22].

2.3 Equilibrio Stackelberg

El *Equilibrio de Stackelberg* es un tipo de solución en juegos dinámicos que se basa en un modelo no cooperativo de competencia entre 2 jugadores. A diferencia de los juegos de Nash, el equilibrio de Stackelberg es un juego dinámico secuencial y no simultaneo, donde uno de los agentes posee información privilegiada del juego dinámico (líder). Esta ventaja táctica le permite al líder del posicionarse en una posición privilegiada respecto a su competidor (seguidor), situación que obliga al segundo jugador a ajustar sus

estrategias a la estrategia del líder. En consecuencia, el líder del juego puede preveer con anticipación la mejor respuesta del seguidor y ajustar entonces las reglas del juego dinámico para lograr el comportamiento más favorable para si mismo. Entonces podemos resumir que en este tipo de equilibrio deben ocurrir las siguientes situaciones:

- El líder anuncia su estrategia dadas la estrategia óptima del seguidor.
- El equilibrio de Stackelberg, la estrategia anunciada por el líder es superior a la estrategía óptima del seguidor, obligándolo a elegir una estrategia con beneficios menores a los del líder.
- Los beneficios obtenidos en el equilibrio de Stackelberg son superiores a los obtenidos en el equilibrio de Nash.

Para un juego dinámico determinista discreto de dos jugadores, la dinámica en el equilibrio de Stackelberg esta dada por

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k^1, u_k^2), \quad x \in [1, K] \tag{2.39}$$

donde $x_k \in \Re^n$ representa el estado del sistema en la etapa k sujeta a la funcional de costos:

$$J^i(U_k^1, U_k^2) = \sum_{k=1}^{K} g^i(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) \tag{2.40}$$

siendo U_k^i con $i = 1, 2$, el conjunto de estrategias óptimas de los jugadores, con el jugador-1 considerando el líder del juego dinámico. Entonces, tomando como referencia el *Lema 7.1* de [22] se deben satisfacer las siguientes relaciones para el seguidor:

$$\bar{x_{k+1}} = f_k^\top(\bar{x_k}, u_k^1, u_k^2) \tag{2.41}$$

$$u_k^{2*} = arg \quad \underset{u_k^2 \in U_k^2}{min} H_k^2(p_{k+1}, u_k^1, u_k^2 \bar{x_k}) \tag{2.42}$$

$$p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(x_k, u_k^1, u_k^2)^\top \left[p_{k+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} g_k^2(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) \right)^\top \right]$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} g_k^2(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) \right]^\top ; \quad p_{K+1} = 0 \tag{2.43}$$

$$\tag{2.44}$$

donde la función Hamiltoniana para el seguidor es definida como:

$$H_k^2(x_k, u_k^1, u_k^2, p_{k+1}) = \\ g^i(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) + p_{k+1}^\top f_k(x_k, u_k^1, u_k^2) \quad (2.45)$$

De manera similar, para un equilibrio de Stackelberg discreto de 2 jugadores, se deben satisfacer las siguientes relaciones conforme al *Teorema 7.1* de [22]:

$$x_{k+1} = f_k^\top(x_k, u_k^1, u_k^2) \quad (2.46)$$

$$u_k^{1*} = arg \quad \min_{u_k^1 \in U_k^1} H_k^1(p_{k+1}, u_k^{1*}, u_k^{2*}, \lambda_k, \nu_k, \mu_k, x_k) \quad (2.47)$$

$$p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(x_k, u_k^1, u_k^2)^\top \left[p_{k+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} g_k^2(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) \right)^\top \right] \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} g_k^2(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) \right]^\top ; \quad p_{K+1} = 0 \quad (2.48)$$

2.3.1 Equilibrio de Stackelberg en un juego afín lineal cuadrático discreto

La dinamica es

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k^1 u_k^1 + B_k^2 u_k^2 \quad (2.49)$$

La funcion g_k general es

$$g_k^i(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) = \frac{1}{2} \left(x_{k+1}^\top Q_k^i x_k + u_k^{i\top} u_k^i + u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j \right) \quad (2.50)$$

g_k^2 para el seguidor

$$g_k^2(x_{k+1}, u_k^1, u_k^2, x_k) = \frac{1}{2} \left(x_{k+1}^\top Q_k^2 x_k + u_k^{2\top} u_k^2 + u_k^{1\top} R_k^{21} u_k^1 \right) \quad (2.51)$$

Hamiltoniano para el seguidor es

$$H_k^2 = \frac{1}{2} \left(x_{k+1}^\top Q_k^i x_k + u_k^{i\top} u_k^i + u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j \right) \\ + p_{k+1}^\top \left(A_k x_k + B_k^1 u_k^1 + B_k^2 u_k^2 \right) \quad (2.52)$$

Para el control del seguidor, sustituimos x_{k+1} en H_k^2 y derivamos

$$\frac{\partial H_k^2}{\partial u_k^2} = u_k^{2*} + B_k^{2\top} \left(Q_{k+1}^2 x_{k+1} + p_{k+1} \right) = 0 \quad (2.53)$$

para el coestado del seguidor

$$p_k = A_k \left[p_{k+1} + Q^2_{k+1} x_{k+1} \right] \tag{2.54}$$

Evaluando en el tiempo final $k = K$

$$p_K = A_K \left[Q^2_{K+1} x_{K+1} \right] con p_{K+1} = 0 \tag{2.55}$$

Ahora construyendo el Hamiltoniano general del lider

$$\begin{aligned} H^1_k = g^1_k(f_k, u^1_k, u^2_k, x_k) + \lambda^\top_k f_k(x_k, u^1_k, u^2_k) \\ + \mu^\top_k F_k + \nu^\top_k (\nabla u^2_k H^2_k) \end{aligned} \tag{2.56}$$

con

$$F_k = \frac{\partial f^\top_k}{\partial x_k} p_{k+1} + \left[\frac{\partial g^2_k}{\partial x_k} \right]^\top y \tag{2.57}$$

y g^1_k para el lider

$$g^1_k(x_{k+1}, u^1_k, u^2_k, x_k) = \frac{1}{2} \left(x^\top_{k+1} Q^1_k x_k + u^{1\top}_k u^1_k + u^{2\top}_k R^{12}_k u^2_k \right) \tag{2.58}$$

por lo que sustituyendo H^1_k del lider queda como:

$$\begin{aligned} H^1_k = \frac{1}{2} \left(x^\top_{k+1} Q^1_k x_k + u^{1\top}_k u^1_k + u^{2\top}_k R^{12}_k u^2_k \right) \\ + \lambda^\top_k \left(A_k x_k + B^1_k u^1_k + B^2_k u^2_k \right) + \mu^\top_k \left(A^\top_k p_{k+1} \right) \\ + \nu^\top_k \left[u^2_k + B^{2\top}_k \left(Q^2_{k+1} x_{k+1} + p_{k+1} \right) \right] \end{aligned} \tag{2.59}$$

sustituyendo $x_k + 1$ y $p_k = Q^2_{k+1} x_{k+1} + p_{k+1}$ en la ecuacion anterior y derivando respecto a u^1_k, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^1_k}{\partial u^1_k} = B^{1\top}_k Q^1_{k+1} x_{k+1} + u^{1*}_l + B^{1\top}_k \lambda_k \\ + B^{1\top}_k \lambda_k + B^{1\top}_k Q^2_{k+1} A_k \mu_k + B^{1\top}_k Q^2_{k+1} B^2_k \nu_k = 0 \end{aligned} \tag{2.60}$$

similarmente, derivamos H^1_k respecto a u^2_k

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^1_k}{\partial u^2_k} = R^{12}_k u^{2*}_k + B^{2\top}_k Q^1_{k+1} \left(A_k x_k + B^1_k u^1_k + B^2_k u^2_k \right) \\ + B^{2\top}_k \lambda_k + B^{2\top}_k Q^2_{k+1} A_k \mu_k + \left(I + B^{2\top}_k Q^2_{k+1} B^2_k \right) \nu_k = 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Ahora la ecuacion para el coestado λ_k:

$$\begin{aligned}\lambda_{k-1}^\top = \frac{\partial H_k^1}{\partial x_k} = A_k^\top Q_{k+1}^1 \left(A_k x_k + B_k^1 u_k^1 + B_k^2 u_k^2\right) \\ + A_k^\top \lambda_k + A_k^\top Q_{k+1}^2 \left(A_k \mu_k + B_k^2 \nu_k\right) \ \ con \ \Lambda_K = 0\end{aligned} \tag{2.62}$$

y la ecuacion μ_k:

$$\mu_{k+1}^\top = \frac{\partial H_k^1}{\partial p_{k+1}} = \mu_k^\top A_k^\top + \nu_k^\top B_k^{2\top} \tag{2.63}$$

de donde se desprende que

$$\mu_{k+1} = A_k \mu_k + B_k^2 \nu_k \tag{2.64}$$

despejando ν_k de la ecuacion $dH1/Du2$

$$\begin{aligned}\nu_k = -\left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} \{R_k^{12} u_k^2 \\ + B_k^2 \left(Q_{k+1}^1 x_{k+1} + \lambda_k + Q_{k+1}^2 A_k \mu_k\right)\}\end{aligned} \tag{2.65}$$

y sustituyendo en $dH1/Du1$, despejando u_k^1

$$\begin{aligned}u_k^1 = -B_1^\top \left[Q_{k+1}^1 - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^1\right] x_{k+1} \\ - B_1^\top \left[I - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top}\right] \lambda_k \\ - B_1^\top \left[Q_{k+1}^2 - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^2\right] A_k \mu_k \\ + B_1^\top \left[Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1}\right] R_k^{12} u_k^2\end{aligned} \tag{2.66}$$

sustituyendo en $\lambda_{k-1}^\top$

$$\begin{aligned}\lambda_k^\top = A_k^\top \left[Q_{k+1}^1 - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^1\right] x_{k+1} \\ + A_k^\top \left[I - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top}\right] \lambda_k \\ + A_k^\top \left[Q_{k+1}^2 A_k - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 A_k\right] \mu_k \\ - A_k^\top \left[Q_{k+1}^2 B_k^{2\top} \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1}\right] R_k^{12} u_k^{2\top}\end{aligned} \tag{2.67}$$

y sustituyendo ν_k en μ_{k+1}

$$\mu_{k+1} = \left[I - B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^2\right] A_k \mu_k$$
$$B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} \left[R_k^{12} u_k^2 + B_k^{2\top} \left(Q_{k+1}^1 x_{k+1} + \lambda_k\right)\right] \quad (2.68)$$

Si se satisfacen las condiciones (2.62)-(2.68) en conjunto con (2.41)-(2.48), entonces se constituye el denominado equilibrio de Stackelberg en lazo abierto en la estrategia del líder de un juego dinámico.

Ahora, si definimos las expresiones $p_{k+1}^* = (P_{k+1} - Q_{k+1^2})x_{k+1}^*$,$\lambda_k = (\Lambda_{K+1} - Q_{k+1}{}^1)x_{k+1}^*$ y $\mu_k = M_k x_k^*$ y sustituimos los controles (2.66) y (2.53) en la ecuacin de estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* &= A_k B_k \\ &+ B_k^1\{-B_k^{1\top}\left[Q_{k+1}^1 - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^1\right] x_{k+1}^* \\ &- B_k^{1\top}\left[I - Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top}\right] \lambda_k \\ &- B_k^{1\top} Q_{k+1}^2 \left[I - B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} B_k^{2\top} Q_{k+1}^2\right] A_k \mu_k \\ &- B_k^{1\top} Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} R_k^{12} B_k^{2\top} \left(Q_{k+1}^2 x_{k+1}^* + p_{k+1}^*\right)\} \end{aligned}$$

donde despus de algunas manipulaciones podemos obtener la siguiente expresin, misma que puede encontrarse en el lema corolario 7.1 de [22]:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* = \{&I + B_k^2 B_k^{2\top} P_{k+1} + B_k^1 B_k^{1\top} Q_{k+1}^2 B_k^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} R_k^{12} B_k^{2\top} P_{k+1} \\ &+ B_k^1 B_k^{1\top} \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} \Lambda_{k+1}\}^{-1} \\ &\bullet \left[A_k - B_k^1 B_k^{1\top} Q_{k+1}^2 \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} A_k M_k\right] \quad (2.69) \end{aligned}$$

donde (2.69) puede simplificarse como $x_{k+1}^* = \phi_k x_k^*$ con:

$$P_k = A_k^\top P_{k+1} + A_k^\top Q_{k+1}^2 \phi_k \ ; P_{K+1} = Q_{K+1}^2 \quad (2.70)$$
$$\Lambda_k = A_k^\top \left[Q_k \phi_k + \Lambda_{k+1} + Q_{k+1}^2 A_k M_k - Q_{k+1}^2 B_k^2 N_k\right] \ ; \ \Lambda_{K+1} = Q_{K+1}^1 \quad (2.71)$$
$$M_{k+1} = A_k M_k - B_k^2 N_k \ ; \ M_1 = 0 \quad (2.72)$$
$$N_k = \left(I + B_k^{2\top} Q_{k+1}^2 B_k^2\right)^{-1} \left[B_k^2 \left(\Lambda_{k+1}\phi_k + Q_{k+1}^2 A_k M_k\right) - R_k^{12} B_k^{2\top} P_{K+1} \phi_k\right] \quad (2.73)$$

Capítulo 3

Derivación del Equilibrio de Nash Robusto Discreto Para un Juego Incierto

Dentro de un juego dinámico no cooperativo se establece un ambiente de rivalidad entre los diversos agentes que lo componen. Las acciones de cada jugador conllevan a que los beneficios obtenidos requieran de estrategias que se ajusten de manera competitiva a las de los otros jugadores. Esta relación entre los jugadores puede ser analizada mediante modelos que estudian como la competencia afecta el resultado de un sistema dinámico, donde en la mayoria de los casos tienden a llegar a un punto de estabilidad conocido como equilibrio de Nash. Sin embargo, todo juego dinámico está sujeto a la aparición de agentes externos que pueden influir de forma negativa en los beneficios obtenidos, de manera que cada jugador deberá ser capaz de anticipar en lo posible estas perturbaciones. A este tipo de juego le llamaremos *juego dinámico incierto*.

3.1 Descripción del modelo y suposiciones iniciales

Vamos a considerar un juego dinḿico con incrementos de tiempo discretos $\mathbb{T} = \{1..., T\}$; y un número de jugadores dado por $\mathbb{N} = \{1..., N\}$;, dónde la evolución temporal del juego es descrita por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k\right), \quad x(1) = x_1 \tag{3.1}$$

donde $x_k \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado que describe las variables del juego en cada instante de tiempo $k \in \mathbb{T}$; la función $u_k^i \in \boldsymbol{U}_k^i \subset \mathfrak{R}^{m_i}$ $i \in \mathbb{N}$ denota los controles o los vectores de decisión de cada N-jugador, elegibles de un conjunto de acciones de control admisibles $\boldsymbol{U}_k^i$, mientras que $w_k \in \mathfrak{R}^n$ es una perturbación finita discreta, es decir, pertenece al espacio de la suma de funciones cuadráticas $l_{p[1,T]}$, en el tiempo discreto $k \in \mathbb{T}$. La función $f_k : \mathfrak{R}^n \times U_k^1 \times \cdots \times U_k^N \times l_{p[1,T]} \to \mathfrak{R}^n$, es definida para cada $k \in \mathbb{T}$, que en conjunto con (3.1), es llamada ecuación de estado del juego dinámico con perturnación (ver [1], [21] y [22]). En este contexto, para un número fijo $k \in \mathbb{T}$ teneos la evolución temporal x_1, x_2, $\ldots$, x_T del juego, donde x_k es el estado del sistema en el tiempo k, en particular x_1 es llamado el *estado inicial* y x_T es llamado el *estado final*. El sistema en la etapa k se dice que está en el estado x_{k-1}, durante este periódo, los jugadores toman sus decisiones y el estado k termina inmediamente antes de que el sistema cambie al estado x_k. La evolución del sistema depende de las decisiones u_k^1, $\ldots$, u_k^N que cada uno de los N jugadores toma en la etapa k, para $k \in \{1, 2, \ldots, T\}$, por medio de la regla dada en (3.1). Cada jugador busca mejorar el desempeño de la siguiente función de costo objetivo:

$$J^i\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k\right) = \sum_{k=1}^{T} g_k\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k\right), \quad i \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

con la condición inicial x_1.

Suposiciones. Las funciones $f_k\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k\right)$ y $g_k\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k\right)$, son continuamente diferenciables en $\Re^n$.

En la sección siguiente se introducirá la incertidumbre de peor caso desde el punto de vista del *i-ésimo* jugador de acuerdo al conjunto de controles u_k^i (ver [8] y [12]).

3.1.1 Equilibrio de Nash Robusto en Lazo Abierto

Dados los controles $u_k^i \in \boldsymbol{U}_k^i$, una perturbación desconocida $w_k^{i*} \in \mathfrak{R}^n$ es llamada *perturbación de de peor caso* desde el punto de vista del jugador$-i$ si:

$$J^i\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}, w^{i,*}\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}\right)\right) := \max_{w \in l_p[1,T]} J^i\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}, w\right) \tag{3.3}$$

con ($i \in \mathbb{N}$); donde todos los jugadores consideran el escenario de la perturbación de peor caso desde su propio punto de vista. Entonces, debido a la

naturaleza no cooperativa del juego dinámico, esto lleva a cada jugador a plantear una estrategia de Nash al resolver un problema de control óptimo en cada etapa k, donde consideran que sus competidores están fijos en sus propias acciones (controles) de Nash.

Definición 1: Las estrategias de control se dice que forman un equilibrio de Nash robusto si para cada vector de estrategias admisibiles $(u_k^i, u_k^{j\neq i})$, para $i \in \mathbb{N}$; asumiendo la existencia de la correspondiente función de maximización $w_k^{i*} \in \mathfrak{R}^n$, desde el punto de vista del jugador $-i$, entonces se deben mantener las siguientes desigualdades:

$$J^i\left(u_k^{i,rn}, u_k^{j\neq i,rn}, w^{i,*}\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}\right)\right) \leq J^i\left(u_k^i, u_k^{j\neq i}, w\right) \tag{3.4}$$

donde $(u_k^{i,rn}, u_k^{j\neq i,rn})$ es el vector de estrategias de Nash Robustas para todo el conjunto de jugadores. Podemos observar que la función de costo es menor o igual cuando el jugador$-i$ minimiza su estrategia respecto al valor máximo de sus competidores, por lo que la ecuación 3.4 establece el equilibrio de Nash de un problema de minimización y maximización conocido como problema *min-max*.

Ahora, con el fin de encontrar la condición necesaria tal que este equilibrio de Nash *min-max* existe para escenario de lazo abierto, es posible aplicar herramientas de control óptimo, y dado que solo se conoce la condición inicial y no hay información del estado actúal de los jugadores, entonces podemos utilizar el *principio del máximo discreto* que aparece en [1], [11] y [21]), en el cual se considera la siguiente función Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H_k^i\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k^i, p_{k+1}^i\right) = \\ g_k\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k^i\right) + p_{k+1}^{i\top} f_k\left(x_k, u_k^i, u_k^{j\neq i}, w_k^i\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Teorema 1 (Condiciones Necesarias para un juego de Nash min-max) *Para un juego de Nash min-max de N-jugadores con perturbaciones en el que se pueda aplicar el prinicipio del máximo 3.5, entonces el juego dinámico descrito por* (3.1)-(3.2)*, donde T es finita y con el estado inicial x_0, entonces si u_k^{i*} y $w_k^{i*}, (i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{T})$; definen un equilibrio de Nash robusto en lazo abierto con la correspondiente trayectoria de estado x_{k+1}^*; entonces existe una secuencia finita de vectores p_k^i, para cada i-ésimo jugador tal que se*

satisfacen las siguientes condiciones:

$$u_k^{i*} = \min_{u^i \in U^i} H_k^i \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i}, w_k, p_{k+1}^i \right). \tag{3.6}$$

$$w_k^{i*} = \max_{w^i \in l_p[1,T]} H_k^i \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i}, w_k, p_{k+1}^i \right). \tag{3.7}$$

$$x_{k+1}^* = f_k \left(x_k^*, u_k^{i,rn}, u_k^{j \neq i,rn}, w_k^{i,*} \right) \tag{3.8}$$

donde p_{k+1}^i *es son los vectores de co-estado y* H_k^i *es el Hamiltoniano dado por*

$$p_k^i = \frac{\partial f_k^\top}{\partial x_k} \left[p_{k+1}^i + \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_{k+1}} \right)^\top \right] + \left[\frac{\partial g_k}{\partial x_k} \right]^\top \tag{3.9}$$

con condición inicial $p_{T+1}^i = 0$.

3.1.2 Condiciones Necesarias la Existencia del Equilibrio de Nash Robusto

Supongamos ahora que la dinámica del juego es dominada por una ecuación en diferencias *variante en tiempo*, es decir:

$$f_k \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i}, w_k \right) = A_k x_k + \sum_{i=1}^{N} B_k^i u_k^i + c_k + D_k w_k. \tag{3.10}$$

donde A_k, B_k^i son las matrices del juego y del control variantes en tiempo (con dimensiones apropiadas ($i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{T}$)), c_k es una *señal exógena conocida* y D_k es la matriz de la perturbación finita y desconocida w_k definida con anterioridad. Entonces el costo de cada jugador $-i$ esta definido como una función cuadrática con forma:

$$\begin{aligned} g_k \left(x_k, u_k^i, u_k^{j \neq i}, w_k \right) &= \frac{1}{2} x_{k+1}^\top Q_{k+1}^i x_{k+1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j - \frac{1}{2} w_k^\top R_k^{wi} w_k). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Además, suponenos que las matrices satisfacen las condiciones siguientes:

$$Q_{k+1}^i = Q_{k+1}^{i\top} \geq 0, R_k^{ij} = R_k^{ij,\top} \geq 0, \tag{3.12}$$

$$R_k^{ii} = R_k^{ii,\top} > 0, R_k^{wi} = R_k^{wi,\top} > 0 \tag{3.13}$$

Utilizando el *Teorema 1*, obtenemos un conjunto de ecuaciones que deben satisfacerse en cada una de las k etapas del juego, donde además deben cumplirse las matrices de dimensión correspondientes definidas a continuación:

$$G_k^i = B_k^i \left(R_k^{ii}\right)^{-1} B_k^{i\top} \tag{3.14}$$

$$G_k^w = D_k \left(R_k^{wi}\right)^{-1} D_k^\top \tag{3.15}$$

La solución para los N controles de Nash *min-max* en lazo abierto del problema lineal cuadrático (LQ) afín mencionado en (3.10)-(3.11) se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 2 (Ecuaciones de Recursividad para un juego LQ afín) *Suponga que el juego discreto LQ afín de N-jugadores dado por* (3.10)-(3.11)*, si las ecuaciones* (3.12)-(3.13) *se satisfacen, entonces también se satisface la siguiente ecuación en diferencias acoplada con condiciones:*

$$M_k^i = Q_k^i + A_k^\top M_{k+1}^i \left[\Lambda_k^w\right]^{-1} A_k \ ; \ M_{T+1}^i = Q_{T+1}^i \tag{3.16}$$

admite una solución con la matriz siguiente:

$$\Lambda_k^w = I + \left[\sum_i^N G_k^i - G_k^w\right] M_{k+1}^i; \tag{3.17}$$

que es de dimensiones apropiadas, definida de manera recursiva e invertible. Entonces el juego min-max satisface la solución única de un equilibrio de Nash Robusto en lazo abierto dada por las matrices siguientes:

$$\alpha_k^i(x_1) = u_k^{i*} = -\left(R_k^{ii}\right)^{-1} B_k^{i\top} \left[M_{k+1}^i (\Lambda_k^w)^{-1} A_k x_k + \zeta_k^{wi}\right] \tag{3.18}$$

y la incertidumbre de peor caso con respecto al jugador $-i$:

$$\beta_k^j(x_1) = w_k^{i*} = \left(R_k^{wi}\right)^{-1} D_k^\top \left[M_{k+1}^i (\Lambda_k^w)^{-1} A_k x_k + \zeta_k^{wi}\right] \tag{3.19}$$

donde $\alpha_k^i \in U_k^i$ es el conjunto de estrategias admisibles del jugador $-i$, y la correspondiente trayectoria de estado:

$$x_{k+1}^* = \left[\Lambda_k^w\right]^{-1} \left[A_k x_k^* + \sigma_k^w\right] \tag{3.20}$$

con las matrices siguientes:

$$\sigma_k^w = C_k - \left[\sum_{i=1}^N G_k^i - G_k^w\right] \tag{3.21}$$

$$\zeta_k^{wi} = M_{k+1}^i \left(\Lambda_k^w\right)^{-1} \sigma_k^w + m_{k+1}^{wi} \tag{3.22}$$

$$m_k^{wi} = A_k^\top \left[m_{k+1}^{iw} + M_{k+1}^i \left(\Lambda_k^w\right)^{-1} \sigma_k^w\right] \ ; \ m_{T+1}^w = 0 \tag{3.23}$$

Demostración 1 *A continuación vamos a esbozar la demostración del Teorema 2 utilizando el problema de valor en la frontera* (3.1)-(3.9)*. Entonces el Hamiltoniano* (3.5) *junto con la ecuación* (3.11) *se convierte en*

$$H_k^i = \frac{1}{2}x_{k+1}^\top Q_{k+1}^i x_{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j - \frac{1}{2}w_k^\top R_k^{wi} w_k) + p_k^{i\top} x_{k+1}. \tag{3.24}$$

Ahora, trabajando hacía atrás en el tiempo y sustituyendo (3.10) *en* (3.24) *obtenemos el control minimax para cada etapa k. Esto nos lleva a obtener la solución x_k, para $k = 1, 2, ...T$ como se muestra a continuación:*

(i) Para k=T, sustituimos x_{T+1} en (3.24) *y los controles min-imax son obtenidos a través de la derivada de la funcional H_T^i con respecto a u_T^i y w_T^i*

$$u_T^i = -\left(R_T^{ii}\right)^{-1} B_T^{i\top}\left[Q_{T+1}^i x_{T+1}\right] \tag{3.25}$$

$$w_T^i = \left(R_T^{wi}\right)^{-1} D_T^\top\left[Q_{T+1}^i x_{T+1}\right] \tag{3.26}$$

Ahora, reemplazando (3.25)-(3.26) *en H_T^i y resolviendo x_{T+1}, se obtiene*

$$x_{T+1} = [\Lambda_T^w]^{-1}\left[A_T x_T + \sigma_T^w\right] \tag{3.27}$$

donde

$$\Lambda_T^w = I + \left(\sum_{i=1}^{N} G_T^i - G_T^w\right) M_{T+1}^i \tag{3.28}$$

y $\sigma_T^w = C_T$.

(ii) Para k=T-1. Procedemos de la misma manera que en la etapa $k = T$, entonces, usando x_T, los controles min-max para esta etapa son

$$u_{T-1}^i = -\left(R_{T-1}^{ii}\right)^{-1} B_{T-1}^{i\top}\left[Q_T^i x_T + P_T\right] \tag{3.29}$$

$$w_{T-1}^i = \left(R_{T-1}^{wi}\right)^{-1} D_{T-1}^\top\left[Q_T^i x_T + P_T\right] \tag{3.30}$$

Con $P_T = A_T^\top Q_T x_{T+1}$. Después, usando las ecuaciones (3.29)-(3.30) *y resolviendo esta vez para x_T, se obtiene*

$$x_T = \left[\Lambda_{T-1}^w\right]^{-1}\left[A_{T-1}x_{T-1} + \sigma_{T-1}^w\right] \tag{3.31}$$

donde

$$\Lambda_{T-1}^{w} = I + \left(\sum_{i=1}^{N} G_{T-1}^{i} - G_{T-1}^{w} \right) M_T \tag{3.32}$$

y

$$\sigma_T^{w} = C_{T-1} - \left(\sum_{i=1}^{N} G_{T-1}^{i} - G_{T-1}^{w} \right) m_T^{wi} \tag{3.33}$$

Como se puede observar, las ecuaciones anteriores muestran una estructura similar a la que aparece en la etapa $k = T$, por lo que podemos deducir que las ecuaciones anteriores estan formadas por una estructura que se repite en cada etapa en el tiempo, con la aparición de términos adicionales a su etapa correspondiente, los cuales a su vez muestran una estructura reconocible como $M_T^i = Q_T + A_T^\top Q_{T-1} \left[\Lambda_T^w\right]^{-1} A_T$ y $m_T^{wi} = A_T^\top Q_{T+1}^i \left[\Lambda_T^w\right]^{-1} C_T$, lo cual sugiere que necesitamos más iteraciones para observar el comportamiento dinámico completo para todo valor k. Por este motivo, el mismo proceso iterativo se repite para la etapa $k = T - 2$. Después de esta etapa, es fácil observar que las ecuaciones u_k^i, w_k^i, Λ_k^w, M_k^i, m_k^{wi} y σ_k presentan la misma estructura que aquella presente en $k = T - 1$, por lo que podemos concluir que para el resto de etapas anteriores a $k = T - 2$ se forman las ecuaciones recursivas (3.16)-(3.23).

A pesar de este resultado, el *Teorema 1* nos proporciona solamente las condiciones necesarias, pero no sufcientes para la existencia del equilibrio robusto de Nash, por lo que necesitamos encontrar estas condiciones para garantizar por completo la existencia del equilibrio de Nash robusto.

3.1.3 Condiciones Suficientes para la Existencia del Equilibrio de Nash Robusto

Buscamos escribir una función de costo para el jugador$-i$ como una función cuadrática de las variables de control, por este motivo, definimos una *función de valor* con forma cuadrática:

$$V_k^i = \frac{1}{2} x_k{}^\top E_k^i x_k + e_k^{i\top} x_k + d_k^i \tag{3.34}$$

donde $E_k^i \in \Re^{nxn}$, $w_k^i \in \Re^n$ y $d_k^i \in \Re$. La solución para este problema es presentada en el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sea E_k^i la solución de las siguientes ecuaciones simétricas en diferencias y de tipo Riccati:*

$$\begin{aligned} E_k^i = A_k^\top E_{k+1}^i A_k + Q_k^i - A_k^\top E_{k+1}^i B_k^i (S_k^i)^{-1} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k \\ -A_k^\top E_{k+1}^i D_k (\Psi_k^i)^{-1} D_k^\top E_{k+1}^i A_k \ ; \ E_T^i = Q_T^i, \ i \in N \end{aligned} \tag{3.35}$$

existe para todo $(k \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{N})$, donde podemos asumir que las matrices $\Phi_k^i = B_k^{i\top} E_{k+1}^i B_k^i + R_k^{ii}$ y $\Psi_k^i = D_k^\top E_{k+1}^i D_k^i - R_k^{wi}$, son invertibles,entonces las siguientes ecuaciones son solucionables para cualquiera de los controles y la incertidumbre $\left(u_k^i, w_k^i\right)$ $(i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{T})$,, entonces trabajando de forma recursiva hacía atrás en el tiempo:

$$e_k^{i\top} = \eta_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k + e_{k+1}^{i\top} A_k + C_k^\top E_{k+1}^i A_k \tag{3.36}$$

$$-w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i B_k^i = \eta_k^{i\top} E_{k+1}^i B_k^i + e_{k+1}^{i\top} B_k + C_k^\top E_{k+1}^i B_k^i \tag{3.37}$$

$$C_k^\top E_{k+1}^i D_k + \eta_k^{i\top} E_{k+1}^i D_k + e_{k+1}^{i\top} D_k = 0 \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} \Delta d_k^i = -\frac{1}{2}\Bigg(\eta_k^{i\top} E_{k+1}^i \eta_k^i + C_k^\top E_{k+1}^i C_k + 2 e_{k+1}^{i\top} \eta_k^i \\ +2 e_{k+1}^{i\top} C_k + 2 C_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^{i\top} + \sum_{j \neq i}^{N} u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j \Bigg) \end{aligned} \tag{3.39}$$

con $e_{T+1} = 0; d_{T+1} = 0$. Entonces la función de costo para el jugador $-i$ es escrita como

$$\begin{aligned} J^i = \sum_{k=1}^{T} \Bigg\{ \left\| \left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Phi_k^i\right)^{1/2} u_k^i \right\|^2 \\ + \left\| \left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Psi_k^i\right)^{1/2} w_k^i \right\|^2 \Bigg\} \\ + \frac{1}{2} x_1^\top E_1^i x_1 + e_1^{i\top} x_1 - d_1^i \end{aligned} \tag{3.40}$$

Demostración 2 *La demostración del teorema anterior sigue la misma estrategia planteada en [2] y [9]. Utilizamos Δ como el operador de diferencia, donde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, entonces para la función de valor* (3.34)*, definimos*

la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}\Delta V_k^i &= \frac{1}{2}x_{k+1}^\top E_{k+1}^i x_{k+1} + e_{k+1}^{i\top} x_{k+1} + d_{k+1}^i \\ &\quad -\frac{1}{2}x_k^\top E_k^i x_k - e_k^{i\top} x_k - d_k^i \\ &= \frac{1}{2}\left[x_{k+1}^\top E_{k+1}^i x_{k+1} - x_k^\top E_k^i x_k\right] \\ &\quad + \left[e_{k+1}^{i\top} x_{k+1} - e_k^{i\top} x_k\right] + \Delta d_k^i + \varphi^i - \varphi^i \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde φ^i *es el término correspondiente con la funcional de costo asociada a* (3.11)

$$\begin{aligned}\varphi^i &= \frac{1}{2}\Bigg[x_{k+1}^\top Q_{k+1}^i x_{k+1} + u_k^{i\top} R_k^{ii} u_k^i \\ &\quad + \sum_{j\neq i}^{N}(u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j - w_k^{i\top} R_k^{wi} w_k^i)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.42}$$

Después de sustituir la ecuación (3.10) *en* (3.41) *y agrupando términos, se encuentra:*

$$\begin{aligned}\Delta V_k^i &= \frac{1}{2}x_k^\top \left[A_k^\top E_{k+1}^i A_k - E_k^i + Q_k^i\right] x_k \\ &+\Delta d_k^i - \varphi^i + x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i B_k^i u_k^i + \frac{1}{2}u_k^{i\top} R_k^{ii} u_k^i \\ &+x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i + \frac{1}{2}u_k^{i\top} B_k^{i\top} E_{k+1}^i B_k^i u_k^i \\ &+\eta_k^\top E_{k+1}^i B_k^i u_k^i + \frac{1}{2}\eta_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i + e_{k+1}^{i\top} A_k x_k \\ &+e_{k+1}^{i\top} B_k^i u_k^i + e_{k+1}^{i\top}\eta_k^i - e_k^{i\top} x_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N} u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j \\ &+x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i D_k w_k^i + C_k E_{k+1}^i B_k^i u_k^i + e_{k+1}^{i\top} D_k w_k^i \\ &+C_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i + w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i B_k^i u_k^i + x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i C_k^i \\ &+w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i + \frac{1}{2}C_k^\top E_{k+1}^i C_k + w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i C_k \\ &+\frac{1}{2}w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i D_k w_k^i + e_{k+1}^{i\top} C_k - \frac{1}{2}w_k^{i\top} R_k^{wi} w_k^i \end{aligned} \tag{3.43}$$

Con el fin de simplificar la manipulación de términos, se realizará el siguiente cambio de notación para los términos debidos a las acciones de los

j−jugadores:

$$\sum_{i=1}^{N} B_k^i u_k^i = B_k^i u_k^i + \sum_{j\neq i}^{N} B_k^j u_k^j = B_k^i u_k^i + \eta_k^i \tag{3.44}$$

$$\Phi_k^i = B_k^{i\top} E_{k+1}^i B k^i + R_k^{ii} \tag{3.45}$$

$$\Psi_k^i = D_k^\top E_{k+1}^i D k - R_k^{wi} \tag{3.46}$$

La ecuación (3.43) *consiste en la función de valor definida por función de costo cuadrática y la planta x_k, situación que puede considerarse como un problema estacionario para cada etapa k. Para minimizar la función de costo cuadrática*(3.11) *a través del conjunto de estrategias admisibles E_k^i, entonces definimos $(\Phi_k^i)^{-1/2}(\Phi_k^i)^{1/2} = I$ y $(\Psi_k^i)^{-1/2}(\Psi_k^i)^{1/2} = I$, con la finalidad de epresar los términos cuadráticos para u_k^i y w_k^i como un polinomio cuadrático el cuál obedece las reglas del método para completar cuadrados mencionado en [2]. Entonces, sumando y restando los términos siguientes a la ecuación* (3.43)*:*

$$\pm \left[\left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k\right]^\top \left[\left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k\right] \tag{3.47}$$

$$\pm \left[\left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k\right]^\top \left[\left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k\right] \tag{3.48}$$

lo cual resulta en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
2\Delta V_k^i = x_k^\top \left[A_k^\top E_{k+1}^i A_k - E_k^i + Q_k^i\right] x_k \\
+2x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i + 2\eta_k^\top E_{k+1}^i B_k^i u_k^i + \eta_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i \\
+2e_{k+1}^{i\top} A_k x_k + 2e_{k+1}^{i\top} B_k^i u_k^i + 2e_{k+1}^{i\top} \eta_k^i - 2e_k^{i\top} x_k \\
+2\Delta d_k^i - 2\varphi^i + \sum_{j\neq i}^{N} u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j + 2x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i C_k^i \\
+2C_k E_{k+1}^i B_k^i u_k^i + 2w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i B_k^i u_k^i \\
+2w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i + C_k^\top E_{k+1}^i C_k + 2C_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^i \\
+2w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i C_k + 2e_{k+1}^{i\top} D_k w_k^i + 2e_{k+1}^{i\top} C_k \\
\pm \left[\left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k\right]^\top \left[\left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k\right] \\
+2x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i B_k^i (\Phi_k^i)^{-1/2}(\Phi_k^i)^{1/2} u_k^i + u_k^{i\top} \Phi_k^i u_k^i \\
\pm \left[\left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k\right]^\top \left[\left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k\right] \\
+2x_k^\top A_k^\top E_{k+1}^i D_k (\Psi_k^i)^{-1/2}(\Psi_k^i)^{1/2} w_k^i + w_k^{i\top} \Psi_k^i w_k^i
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Entonces, después de algunas simplificaciones en las operaciones, podemos expresar la ecuación anterioremente mencionada como la siguiente ecuación en diferencias

$$
\begin{aligned}
\Delta V_k^i = -\varphi^i + \frac{1}{2}x_k^\top \Big[& A_k^\top E_{k+1}^i A_k - E_k^i + Q_k^i \\
& - A_k^\top E_{k+1}^i B_k^i \left(\Phi_k^i\right)^{-1} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k \\
& - A_k^\top E_{k+1}^i D_k \left(\Psi_k^i\right)^{-1} D_k^\top E_{k+1}^i A_k \Big] x_k \\
& + \Big[\eta_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k + e_{k+1}^{i\top} A_k - e_k^{i\top} + C_k^\top E_{k+1}^i A_k \Big] x_k \\
& + \Big[C_k^\top E_{k+1}^i D_k \eta_k^{i\top} E_{k+1}^i D_k + e_{k+1}^{i\top} D_k \Big] w_k^i \\
& + \Big[\eta_k^{i\top} E_{k+1}^i B_k^i + e_{k+1}^{i\top} B_k^i + C_k^\top E_{k+1}^i B_k^i \\
& + w_k^{i\top} D_k^\top E_{k+1}^i B_k^i \Big] u_k^i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^{N} u_k^{j\top} R_k^{ij} u_k^j \\
& + \frac{1}{2} \eta_k^{i\top} E_{k+1} \eta_k + e_{k+1}^{i\top} \eta_k^i + \Delta d_k^i + e_{k+1}^{i\top} C_k \\
& + C_k^\top E_{k+1}^i \eta_k^\top + \frac{1}{2} C_k^\top E_{k+1}^i C_k \\
& + \left\| \left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Phi_k^i\right)^{1/2} u_k^i \right\|^2 \\
& + \left\| \left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Psi_k^i\right)^{1/2} w_k^i \right\|^2
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Observamos que cada uno de los resultados del polinomio cuadrático son similares, pero difieren en su contribución total a la función ΔV_k^i debido a los signos opuestos en Φ_k y Ψ_k. Ahora, partiendo de la ecuación (3.50) *podemos notar que los términos lineales y cuadráticos para x_k, u_k^i, w_k^i y d_k^i deben resolverse para encontrar una solución al problema* (3.41)*, convirtiéndose entonces en el conjunto de ecuaciones* (3.35)-(3.39)*. Por lo tanto, tenemos:*

$$
\begin{aligned}
\Delta V_k^i = -\varphi^i & + \left\| \left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Phi_k^i\right)^{1/2} u_k^i \right\|^2 \\
& + \left\| \left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Psi_k^i\right)^{1/2} w_k^i \right\|^2
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Podemos resumir la ecuación (3.51) *para expresarla en la forma de la función*

J^i para la totalidad de la duración del juego dinámico, lo que resulta en:

$$\sum_{k=1}^{T} \Delta V_k^i = \sum_{k=1}^{T} \left(V_{k+1}^i - V_k^i\right) = V_{T+1}^i - V_1^i$$
$$= \frac{1}{2} x_{T+1}^\top E_{T+1}^i x_{T+1} - \frac{1}{2} x_1^\top E_1^i x_1 - e_1^{i\top} x_1 - d_1^i \tag{3.52}$$

Evaluando la ecuación (3.51) *para* $k = 1...T$ *y comparando con* (3.52)*, podemos resolver para* $x_{T+1}^\top E_{T+1}^i x_{T+1}$*. Si* $E_{T+1}^i = Q_{T+1}^i$*, entonces comparando la ecuación anterior con la función de costo correspondiente con* (3.11)*, después de algunas operaciones podemos obtener la siguiente relación*

$$J^i = \sum_{k=1}^{T} \Bigg[\left\| \left(\Phi_k^i\right)^{-1/2} B_k^{i\top} E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Phi_k^i\right)^{1/2} u_k^i \right\|^2$$
$$+ \left\| \left(\Psi_k^i\right)^{-1/2} D_k^\top E_{k+1}^i A_k x_k + \left(\Psi_k^i\right)^{1/2} w_k^i \right\|^2 \Bigg]$$
$$+ \frac{1}{2} x_1 E_1^i x_1 + e_1^{i\top} x_1 + d_1^i \tag{3.53}$$

Capítulo 4

Aplicación del Equilibrio de Nash Robusto para una Cadena de Suministros

En la actualidad, la demanda de bienes y servicios ha experimentado un incremento sin precedentes a raíz de la globalización de los mercados y los cambios en los hábitos de consumo de la población. Por tal motivo, la necesidad de aumentar la eficacia de los servicios de logística de las empresas juega un papel de vital importancia en la competencia de mercado, lo que ha llevado a un incremento de la complejidad en los procesos de logística. Por este motivo, la implementación de una cadena de suministro permite a las empresas tener un control estratégico de inventarios, tiempos, producción de bienes y distribución para garantizar la satisfaccón del cliente final.

4.1 Parámetros de simulación

Una cadena de suministros es un conjunto de elementos que permiten a una empresa u organización mantener la logística de sus productos y servicios en tiempo y forma de manera que puedan mantener la satisfacción de sus clientes. En este sentido, los problemas de cadena de suministros (CS) enfrentan problemas de diversas etapas (transportación, almacenamiento, organización, venta) pasando por el fabricante y proveedor hasta el consumidor final. Esta clase de interacción con intermediarios puede ser modelada como un problema de juegos dinámicos con N jugadores que buscan maximizar sus ganancias y minimizar sus costos, es decir, de manera simple, el

problema puede entenderse como la diferencia entre los ingresos y egresos de cada jugador.

Para este ejemplo vamos a considerar un problema de CS como el presentado en [20], donde el proveedor busca satisfacer las ordenes de un agente minorista para una temporada completa. El proveedor entonces fabrica un producto específico a una tasa de producción dada por u_k^i y es vendido a un precio p_k^1 para satisfacer la tasa de compra u_k^2 del minorista; donde este último busca satisfacer la demanda del cliente final. De esta manera, ambos jugadores buscan minimizar sus costos por almacenamiento al determinar la tasa adecuada de producción/venta y compra/venta. Además, cada jugador busca minimizar el efecto de un tasa de venta inesperada al tener artículos suficientes en su inventario, *i.e.*, $x_k^i \geq 0$ y $u_k^1, u_k^2 \geq 0$ $\forall k \in [1, T]$, por lo que la dinámica del juego puede expresarse como

$$x_k^1 = u_k^1 - u_k^2 \tag{4.1}$$

$$x_k^2 = u_k^2 - \gamma_k - w_k \tag{4.2}$$

donde γ_k es la función de demanda estacional del minorista descrita con anterioridad, y w_k representa una fluctuación desconocida (pero acotada) de la demanda que afecta la tasa de venta del minorista. También debemos considerar el cambio en la función de demanda del minorista debido al precio (el cual varía según el periódo estacional). Estas suposiciones son entonces definidas como

$$p^2(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}(6k + 90) & 1 \leq k < 5 \\ -3k + 39 & 5 \leq k < 6 \\ \frac{9}{2}k - 6 & 6 \leq k < 8 \\ -15k + 150 & 8 \leq k < 9 \\ \frac{20k}{3} - 45 & 9 \leq k < 12 \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} -5p_k^2 + 135 & 1 \leq k < 5 \\ -12p_k^2 + 303 & 5 \leq k < 6 \\ -\frac{26}{9}p_k^2 + \frac{1005}{9} & 6 \leq k < 8 \\ -\frac{37}{15}p_k^2 + \frac{1485}{15} & 8 \leq k < 9 \\ -5p_k^2 + 135 & 9 \leq k < 12 \end{cases}$$

donde $p^2(k)$ es la función de precio del minorista, $p_k^1 = 0.8p_k^2$ es la función de precios del proveedor, mientras que la fluctuación desconocida, pero acotada será representada por $w_k = 2 * sin(k/2) * \exp(-k/2)$.

4.2 Resultados de la Simulación

La simulación del juego dinámico en tiempo discreto dado por (4.1)-(4.4), donde el proveedor y el minorista buscan minizar su tasa de compra e inventario almacenado a través de la función de costo del proveedor

$$J^1 = Q_T^1(x_T^1)^2 + \sum_{k=1}^{T-1}\left[\frac{c_k^1}{4}(u_k^1)^2 + \frac{h_k^1}{2}(x_k^1)^2 - \frac{0.85p_k^1}{2}(w_k)^2\right] \quad (4.3)$$

y del minorista

$$J^2 = Q_T^2(x_T^2)^2 + \sum_{k=1}^{T-1}\left[\left(\frac{p_k^1 + c_k^2}{4}\right)(u_k^2)^2 + \frac{h_k^2}{2}(x_k^2)^2 - \frac{1.2p_k^2}{2}(w_k)^2\right] \quad (4.4)$$

donde ck^1 es el costo de producción del proveedor, $p_k^1 + c_k^2$ es el costo de compra del minorista y h_k^i es el costo de almacenamiento en inventarios. Por simplicidad, hemos asumido que Q_T^1, Q_T^2 son escalares positivos y $c_k^1 = 3$, $c_k^2 = 2$, $h_k^1 = 7$, $h_k^2 = 9$ son constantes a lo largo del año. Ahora, observando la ecuación(3.11) junto con (4.3) y (4.4), se obtiene el siguiente resultado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_k \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_k \end{bmatrix} \qquad R_k^{11} = c_k^1/2$$

$$R_k^{22} = (p_k^1 + c_k^2)/2 \quad R_k^{w1} = 0.85p_k^1 \quad R_k^{w2} = 1.2p_k^2$$

$$Q_k^1 = h_k^1/2 \quad Q_k^2 = h_k^2/2$$

La simulación se realizó mediante el código presente en el *Anexo* al final de este documento. Se consideraron considerando dos casos; el primero de ellos sin perturbación y el segundo considerando una perturbación de peor caso. La Figura **??**fig1 y la Figura 4.2 representan la evolución dinámica de los estados x_k^1 y x_k^2 debidos a los controles de Nash u^1 y u^2 en la ausencia de una perturbación w_k. Como podemos observar, los controles óptimos son positivos como se esperaba, y estos tratan de seguir la función de demanda γ_k, pero en ambo casos, los estados x_k^1 y x_k^2 son insuficientes para satisfacer

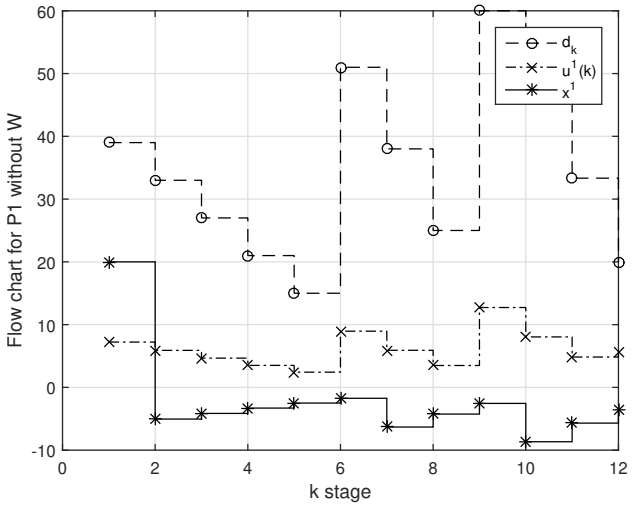

Figura 4.1: Evolución de x^1 y u^1 sin la consideración de perturbación de peor caso. .

la demanda.

Por otro lado, las Figuras 4.3 y 4.4 presentan la evolución del estado tanto del proveedor como del minorista en el escenario de perturbación de peor caso w_k. Al igual que en el caso previo, ambos controles u_w^1 y u_w^2 son positivos y siguen la función de demanda, pero la evolución de los estados x_w^1 y x_w^2 son mayores que en el caso sin perturbación, de manera que es fácil notar en la Figura 4.4, que el estado del minorista $x_w^2 \geq x^2$, lo que significa que el inventario del minorista aún así es incapaz de seguir completamente la curva de demanda del consumidor, pero las pérdidas debidas a la falta de iventario son mucho menores que aquellas en el caso donde no se considera la perturbación.

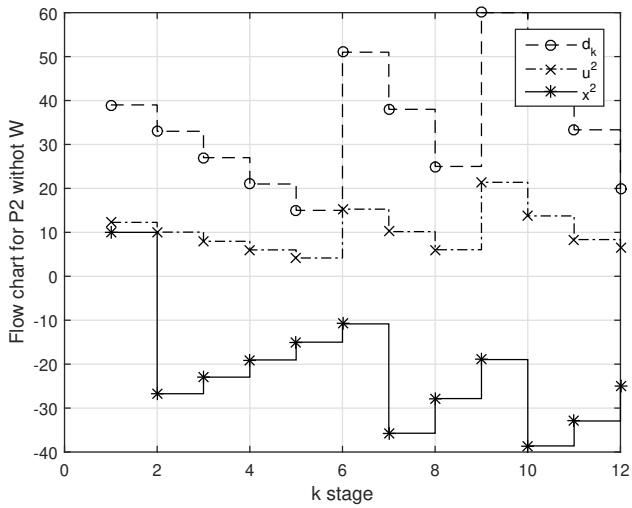

Figura 4.2: Evolución de x^2 y u^2 sin la consideración de perturbación de peor caso. .

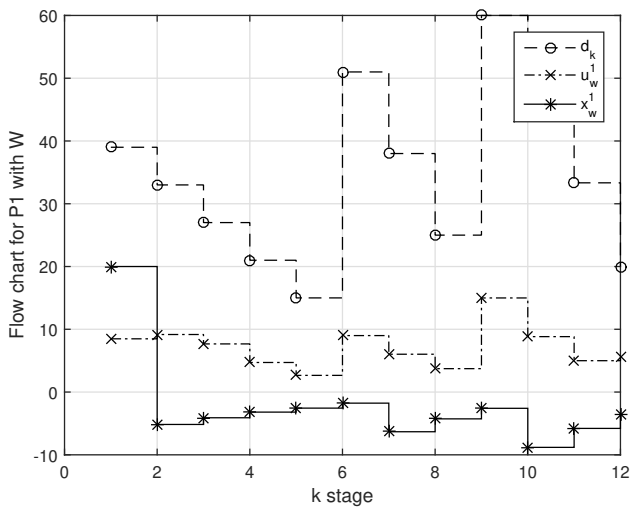

Figura 4.3: Evolución de x_w^1 y u_w^1 considerando la perturbación de peor caso. .

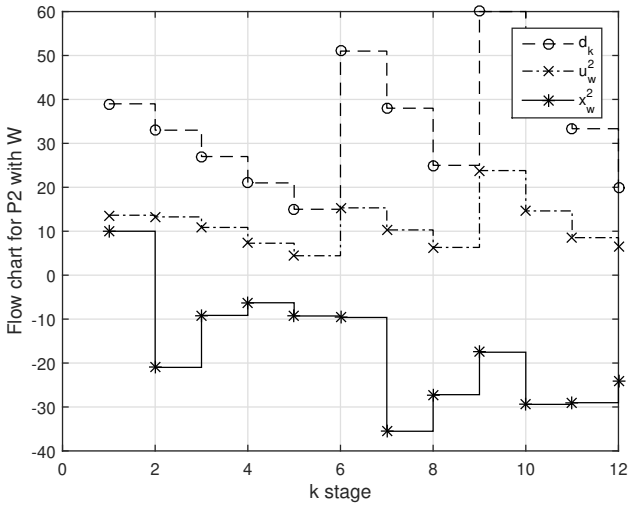

Figura 4.4: Evolución de x_w^2 y u_w^2 considerando la perturbación de peor caso. .

Conclusiones y Trabajo futuro

En este trabajo de tesis se ha presentado análisis para la derivación de las condiciones necesarias y sufucientes para un equilibrio de Nash con perturbaciones (Nash robusto). En dicho equilibrio se considera la aparición de dinámicas no modeladas y señales exógenas imprevistas como perturbaciones acotadas que afectan a los beneficios obtenidos en un juego dinámico.

El enfoque de este trabajo se centró en los juegos dinámicos discretos debido a su potencial implementación en áreas como la electrónica, robótica, etcetera, debido a la naturaleza discreta de estas ramas de la ingeniería, así como a la relativa escasa información para sistemas dinámicos discretos presente en la literatura científica al momento de la realización de esta tésis.

Se realizó una simulación para verificar el desempeño del equilibrio de Nash robusto en comparación con un equilibrio de Nash sin perturbaciones, aplicado a un ejemplo de cadena de suministros con fluctuaciones por temporada en la demanda de un cierto artículo. Los resultados permiten observar que los controles obtenidos mediante el enfoque robusto muestran una mejoría en el seguimiento de dichas perturbaciones en contraste con los controles que no toman en cuenta estas perturbaciones.

El enfoque de equilibrio de Nash Robusto presentado en esta tesis también fue sometido en el *International Journal of Control, Automation and Systems* con el título *Open Loop Robust Equilibria in Uncertain Discrete Time Games* siendo publicado el 21 de octubre de 2020.

Así mismo se encuentra en fase desarrollo un esquema para una planta multimodelo afín lineal cuadrática de tiempo discreto similar a la estudiada en este trabajo, con la intención de encontrar los controles óptimos con una metodología más directa y acorde a los métodos y procedimientos desarrollados en esta tesis, como una extensión del trabajo presentado para el caso continuo para dicha planta.

Anexos

En este capítulo se detalla el código en Matlab utilizado para la simulación presentada en el Capítulo 4.

```
%Programa Cadena Suministro Nash Robusto 2 Jugadores
clear all; clc;
%
%Definimos variables de conteo de ecuaciones recursivas
k0 = 1; % Instante inicial k_0
F = 12; % Etapa Final.
%
%Definimos las variables de la cadena de suministro
h1=7;  %Costo almacenamiento de P1
h2=9;  %Costo almacenamiento de P2
c1=3;  %Costo de produccion de P1
c2=2; %Costo de orden de compra de P2 (envio)
%
for i=k0:F
if i<5; %Enero a abril
p2(i) = (6*i+90)/5;
d(i) = -5*p2(i)+135;
elseif i==5; %Mayo
p2(i) = -3*i+39;
d(i) = -12*p2(i) + 303;
elseif i>=6 & i<8; %Junio a Julio
p2(i) = 4.5*i-6;
d(i) = -(26/9)*p2(i) + (1005/9);
elseif i==8; %Agosto
p2(i) = -15*i+150;
d(i) = -(37/15)*p2(i) + (1485/15);
elseif  i>=9 %& i<13; %Septiembre a Diciembre
p2(i) = (20/3*i)-45;
d(i) = -2*p2(i) + 90;
end
p1(i)=0.8*p2(i);
%p1(k)=12;
e(i)=2*sin(0.5*i)*exp(-i/10);
%e(i)=0;
end
%
%% Definimos las matrices del sistema y la funcion de costo de P1 y P2
%
%       x1_{k+1} = u1_{k} - u2_{k}
%       x2_{k+1} = u2{k} - d_{k} - e_{k}
%
%donde d(i) corresponde a la Matriz C variante en tiempo y
%e_(k) = w_(k) = sen(k)*exp(-2k/3) a la Matriz D.
%
A=[0 0;0 0];
B1=[1;0];
B2=[-1;1];
%
%Ciclo que calcula elementos de las matrices C y D variantes en k
for i=k0:F
C11(i)=0;
C21(i)=-d(i);
D11(i)=0;
```

```
D21(i)=-e(i);

end
[n,n] = size(A);
I = eye(n);
%
%Jugador P1(Supplier)
for k=k0:F
R11(k)=c1/2;
Rw1(k)=0.85*p1(k);    %REVISAR si podemos poner e(k)
end
Q1=[h1/2 0;0 h1/2];         %REVISAR
%
%Jugador P2(Retailer)
for k=k0:F
R22(k)=(p1(k)+c2)/2;
Rw2(k)=1.2*p2(k);     %REVISAR
end
Q2=[h2/2 0;0 h2/2];         %REVISAR
%
%% Definimos las condiciones de Frontera del Sistema
%
%Condiciones finales
Q1Fplus1=[8 0;0 8];
Q2Fplus1=[8 0;0 8];
m1Fplus1=[0;0];
m2Fplus1=[0;0];
%
%Condiciones iniciales
inicialx1=20;
inicialx2=10;
%
%% Se calculan G1,G2,Gw1 y Gw2 variantes en tiempo
%
for k=k0:F
% Matrices variantes en tiempo
D=[D11(k);D21(k)];
R11aux = [R11(k)];
R22aux = [R22(k)];
Rw1aux = [Rw1(k)];
Rw2aux = [Rw2(k)];
%
G1aux = B1*inv(R11aux)*B1.';
G2aux = B2*inv(R22aux)*B2.';
Gw1aux = D*inv(Rw1aux)*D.';
Gw2aux = D*inv(Rw2aux)*D.';
%
%Elementos de G1
G1e11(k)=G1aux(1);
G1e21(k)=G1aux(2);
G1e12(k)=G1aux(3);
G1e22(k)=G1aux(4);
%Elementos de G2
G2e11(k)=G2aux(1);
G2e21(k)=G2aux(2);
G2e12(k)=G2aux(3);
G2e22(k)=G2aux(4);
%Elementos de Gw1
Gw1e11(k)=Gw1aux(1);
Gw1e21(k)=Gw1aux(2);
Gw1e12(k)=Gw1aux(3);
Gw1e22(k)=Gw1aux(4);
%Elementos de Gw2
Gw2e11(k)=Gw2aux(1);
Gw2e21(k)=Gw2aux(2);
Gw2e12(k)=Gw2aux(3);
Gw2e22(k)=Gw2aux(4);
end
%
%% Condiciones finales para P1 y P2
%
%C.F. para Jugador 1
M1kplus1 = Q1Fplus1;
M1k11(F+1) = Q1Fplus1(1);
M1k21(F+1) = Q1Fplus1(2);
M1k12(F+1) = Q1Fplus1(3);
```

```
M1k22(F+1) = Q1Fplus1(4);
%C.F. para Jugador 2
M2kplus1 = Q2Fplus1;
M2k11(F+1) = Q2Fplus1(1);
M2k21(F+1) = Q2Fplus1(2);
M2k12(F+1) = Q2Fplus1(3);
M2k22(F+1) = Q2Fplus1(4);
%
%C.F. para Jugador 1
m1kplus1 = m1Fplus1;
m1k11(F+1) = m1Fplus1(1);
m1k21(F+1) = m1Fplus1(2);
%C.F. para Jugador 2
m2kplus1 = m2Fplus1;
m2k11(F+1) = m2Fplus1(1);
m2k21(F+1) = m2Fplus1(2);
%
%% Se calculan las ecuaciones recursivas
%
for k=F:-1:k0
%Matrices C,D,G1,G2 y Gw1,Gw2 variantes en tiempo
C=[C11(k);C21(k)];
D=[D11(k);D21(k)];
G1=[G1e11(k) G1e12(k);G1e21(k) G1e22(k)];
G2=[G2e11(k) G2e12(k);G2e21(k) G2e22(k)];
Gw1=[Gw1e11(k) Gw1e12(k);Gw1e21(k) Gw1e22(k)];
Gw2=[Gw2e11(k) Gw2e12(k);Gw2e21(k) Gw2e22(k)];
%
%Ecuacion para P1
Lambda1k = I+(G1+G2-Gw1)*M1kplus1;
Lambda1k11(k) = Lambda1k(1);
Lambda1k21(k) = Lambda1k(2);
Lambda1k12(k) = Lambda1k(3);
Lambda1k22(k) = Lambda1k(4);
%Ecuacion para P2
Lambda2k = I+(G1+G2-Gw2)*M2kplus1;
Lambda2k11(k) = Lambda2k(1);
Lambda2k21(k) = Lambda2k(2);
Lambda2k12(k) = Lambda2k(3);
Lambda2k22(k) = Lambda2k(4);
%
%Ecuacion para P1
M1k = Q1 + A.'*M1kplus1*inv(Lambda1k)*A;
M1k11(k) = M1k(1);
M1k21(k) = M1k(2);
M1k12(k) = M1k(3);
M1k22(k) = M1k(4);
%Ecuacion para P2
M2k = Q2 + A.'*M2kplus1*inv(Lambda2k)*A;
M2k11(k) = M2k(1);
M2k21(k) = M2k(2);
M2k12(k) = M2k(3);
M2k22(k) = M2k(4);
%
%Ecuacion para P1
eta1k = C-(G1+G2-Gw1)*m1kplus1;
eta1k11(k) = eta1k(1);
eta1k21(k) = eta1k(2);
%Ecuacion para P2
eta2k = C-(G1+G2-Gw2)*m2kplus1;
eta2k11(k) = eta2k(1);
eta2k21(k) = eta2k(2);
%
%Ecuacion para P1
m1k = A.'*(m1kplus1 + M1kplus1*inv(Lambda1k)*eta1k);
m1k11(k) = m1k(1);
m1k21(k) = m1k(2);
%Ecuacion para P2
m2k = A.'*(m2kplus1 + M2kplus1*inv(Lambda2k)*eta2k);
m2k11(k) = m2k(1);
m2k21(k) = m2k(2);
%
%Ecuacion para P1
ji1k = M1kplus1*inv(Lambda1k)*eta1k + m1kplus1;
ji1k11(k) = ji1k(1);
ji1k21(k) = ji1k(2);
```

```
%Ecuacion para P2
ji2k = M2kplus1*inv(Lambda2k)*eta2k + m2kplus1;
ji2k11(k) = ji2k(1);
ji2k21(k) = ji2k(2);
%
%Aqui se actualizan los valores para P1
M1kplus1 = M1k;
m1kplus1 = m1k;
%Aqui se actualizan los valores para P2
M2kplus1 = M2k;
m2kplus1 = m2k;
end
%
%% Resolvemos x_{k+1} en tiempo directo para P1 y P2
%
% Condiciones Iniciales P1
x1p1(1) = inicialx1;
x2p1(1) = inicialx2;
xkp1 = [x1p1(1);x2p1(1)];
% Condiciones Iniciales P2
x1p2(1) = inicialx1;
x2p2(1) = inicialx2;
xkp2 = [x1p2(1);x2p2(1)];
%
for k=k0:F-1
%Matrices C,D,G1,G2 y Gw1,Gw2 variantes en tiempo
C=[C11(k);C21(k)];
D=[D11(k);D21(k)];
G1=[G1e11(k) G1e12(k);G1e21(k) G1e22(k)];
G2=[G2e11(k) G2e12(k);G2e21(k) G2e22(k)];
Gw1=[Gw1e11(k) Gw1e12(k);Gw1e21(k) Gw1e22(k)];
Gw2=[Gw2e11(k) Gw2e12(k);Gw2e21(k) Gw2e22(k)];
%
% Estado x_(k+1) visto desde perspectiva de P1
Lambda1k = [Lambda1k11(k) Lambda1k12(k);Lambda1k21(k) Lambda1k22(k)];
m1kplus1 = [m1k11(k+1);m1k21(k+1)];
eta1k = C - (G1+G2-Gw1)*m1kplus1;
xkp1 = [x1p1(k);x2p1(k)];
xkplus1p1 = inv(Lambda1k)*(A*xkp1 + eta1k); %Ecuacion (29)
x1p1(k+1) = xkplus1p1(1);
x2p1(k+1) = xkplus1p1(2);
%
% Estado x_(k+1) visto desde perspectiva de P2
Lambda2k = [Lambda2k11(k) Lambda2k12(k);Lambda2k21(k) Lambda2k22(k)];
m2kplus1 = [m2k11(k+1);m2k21(k+1)];
eta2k = C - (G1+G2-Gw2)*m2kplus1;
xkp2 = [x1p2(k);x2p2(k)];
xkplus1p2 = inv(Lambda2k)*(A*xkp2 + eta2k); %Ecuacion (29)
x1p2(k+1) = xkplus1p2(1);
x2p2(k+1) = xkplus1p2(2);
end
%
%% Aqui calculamos los controles u_{k} y w{k} para P1 y P2
%
for k=k0:F
% Matriz D variante en tiempo
D=[D11(k);D21(k)];
%Variables Auxilares
R11aux = [R11(k)];
R22aux = [R22(k)];
Rw1aux = [Rw1(k)];
Rw2aux = [Rw2(k)];
%
%Controles para P1
Lambda1k = [Lambda1k11(k) Lambda1k12(k);Lambda1k21(k) Lambda1k22(k)];
M1kplus1 = [M1k11(k+1) M1k12(k+1);M1k21(k+1) M1k22(k+1)];
ji1k = [ji1k11(k);ji1k21(k)];
xkp1 = [x1p1(k);x2p1(k)];
u1 = -inv(R11aux)*B1.'*(M1kplus1*inv(Lambda1k)*A*xkp1 + ji1k);
u1k(k) = u1(1);
w1 = -inv(Rw1aux)*D.'*(M1kplus1*inv(Lambda1k)*A*xkp1 + ji1k);
w1k(k) = w1(1);
%
%Controles para P2
Lambda2k = [Lambda2k11(k) Lambda2k12(k);Lambda2k21(k) Lambda2k22(k)];
M2kplus1 = [M2k11(k+1) M2k12(k+1);M2k21(k+1) M2k22(k+1)];
```

```
ji2k = [ji2k11(k);ji2k21(k)];
xkp2 = [x1p2(k);x2p2(k)];
u2 = -inv(R22aux)*B2.'*(M2kplus1*inv(Lambda2k)*A*xkp2 + ji2k);
u2k(k) = u2(1);
w2 = -inv(Rw2aux)*D.'*(M2kplus1*inv(Lambda2k)*A*xkp2 + ji2k);
w2k(k) = w2(1);
end
%
%% Aqui Sustituimos los Controles Optimos con Perturbacion
%
x1opP1(1)=20;
x2opP1(1)=10;
xkopP1=[x1opP1(1);x2opP1(1)]; %x1(1)=40
%
for k=k0:F-1
u1op=[u1k(k)];
u2op=[u2k(k)];
C=[C11(k);C21(k)];
D=[D11(k);D21(k)];
wop=[w2k(k)];
%
%Para P1
x1kplus1op = A*xkopP1 + B1*u1op + B2*u2op + C + D*wop;
x1opP1(k+1) = x1kplus1op(1);
x2opP1(k+1) = x1kplus1op(2);
xkopP1=x1kplus1op;
end
%
%% Aqui graficamos x_{k}, u{k} y w{k}
%
xx=linspace(1,12,12);
figure(4)
title('Flow chart for P1')
y1=[d.' u1k.' x1opP1.'];
art=stairs(xx,y1)
art(1).Marker = 'o';
art(1).LineStyle = '--';
art(1).Color = 'k';
art(2).Marker = 'x';
art(2).LineStyle = '-.';
art(2).Color = 'k';
art(3).Marker = '*';
art(3).LineStyle = '-';
art(3).Color = 'k';
xlabel ('k stage')
ylabel('Flow chart for P1 with W')
grid on
legend('d_{k}','u_{w}^{1}','x_{w}^{1}')
%
figure(5)
title('State Evolution x2')
y2=[d.' u2k.' x2opP1.'];
zap=stairs(xx,y2)
zap(1).Marker = 'o';
zap(1).LineStyle = '--';
zap(1).Color = 'k';
zap(2).Marker = 'x';
zap(2).LineStyle = '-.';
zap(2).Color = 'k';
zap(3).Marker = '*';
zap(3).LineStyle = '-';
zap(3).Color = 'k';
xlabel ('k stage')
ylabel('Flow chart for P2 with W')
grid on
legend('d_{k}','u_{w}^{2}','x_{w}^{2}')
%
```

Bibliografía

[1] A.E. Bryson Jr., *Dynamic Optimization*, First Edition, Addison-Wesley, Menlo Park California, 1999.

[2] A.S. Poznyak, *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Enginers, Volume 1: Deterministic Techniques*, Elsevier Ltd., 2008.

[3] Dimitri P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, vol. 1, Third Edition, Athena Scientific, Belmont Massachusetts, 2005.

[4] F.A. Miranda, F. Castaños, A. Poznyak, "Min-max piecewise constant optimal control for multi-model linear systems",*IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol.33, no.4, pp.1157-1176, 2016

[5] G. Barbaraci, G. Virz' Mariotti, "Influence of Uncertainties on Rotating Flexible Shaft Suspended by 4-Axis Radial Active Magnetic Bearings", *Stochastic Mechanics*, Vol. 3, no.4, pp. 18-25, 2012.

[6] G. Barbaraci, G. Virz' Mariotti, "Influence of Uncertainties on PD Tuning", *Power Transmissions: Proceedings of the 4th International Conference*, held at Sinaia, Romania, June 20 -23, pp.211-219, 2013.

[7] G. Barbaraci, G. Virz Mariotti, "Robust Control for a Suspended Rotating Shaft by Radial Active Magnetic Bearing", *Balkan Journal of Mechanical Transmissions*, vol. 1, no. 1, pp.4-11, 2011.

[8] G. Jank and G. Kun, "Optimal control of disturbed linear-quadratic differential games", *European Journal of Control*. vol. 8, no. 2, pp. 152-162, 2002.

[9] G. Jank and H. Abou-Kandil, "Existence and uniqueness of open-loop nash equilibria in linear-quadratic discrete time games", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 2, pp. 267-271, 2003.

[10] H. Kebriaei and L. Iannelli "Discrete-Time Robust Hierarchical Linear-Quadratic Dynamic Games", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no 3, pp. 902-909, 2018.

[11] I. Ross, *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*, 2nd Edition, Collegiate Publishers, New York, 2015.

[12] J. Engwerda, *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, John Wiley and Sons Ltd, 2005.

[13] J.C. Engwerda, "Robust open-loop nash equilibria in the noncooperative LQ game revisited", *Optimal Control Applications & Methods*, vol. 38, no. 5, pp. 795-813, 2017.

[14] M. Jiménez and A. Poznyak "ϵ-Equilibrium LQ Differential Games with Bounded Uncertain Disturbance: Robustness of Standard Strategies and New Strategies with Adaptation" *International Journal of Control*, Vol. 79, no 7, pp 786-797, 2006.

[15] M. Jiménez-Lizárraga and A. Poznayk, "Robust nash equilibrium in multi-model LQ differential games: analysis and extraproximal numerical procedure", *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 28, no. 2, pp. 117-141, 2007.

[16] M. Jungers, E. Castelan, E. De Pieri, and H. Abou-Khandil, "Bounded nash type controls for uncertain linear systems", *Automatica*, vol. 44, no.7, pp. 1874-1879, 2008.

[17] M. Pachter and K. D. Pham, "Discrete-Time Linear-Quadratic Dynamic Games", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 146, pp 151179, 2010.

[18] P.V. Reddy and G. Zaccour, "Feedback Nash Equilibria in Linear-Quadratic Difference Games With Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no 2, pp. 590-604, 2017.

[19] P.V. Reddy and G. Zaccour, "Open-loop nash equilibria in a class of linear-quadratic difference game with constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no.9, pp.2559-2564, 2015.

[20] S. Jorgensen, "Optimal production, purchasing and pricing: A differential game approach", *European Journal of Operational Research*, vol. 24, No.1, pp. 64-76, 1986.

[21] S. Sethi and G. Thompson, *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*, 2nd Edition, Springer, New York, 2005.

[22] T. Basar and G.J. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2nd Edition, Academic Press, New York, 1995.

[23] Tim J. Boonen, Athanasios A Pantelous, Renchao Wu, "Non-cooperative dynamic games for general insurance markets", *Insurance: Mathematics and economics*, vol. 78,, pp. 123-135, 2017.

[24] W.A. van den Broek, J.C. Engwerda and J. Schumacher, "Robust equilibria in indefinite linear-quadratic differential games", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 19, no. 3, pp.565-595, 2003.

[25] X. Chen and K. Zhou, "Multiobjective H2=H1 control design", *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 40, no.2, pp. 628-660, 2002.

[26] Y. Wu 1, M. Toyoda and T. Shen, "Linear dynamic games with polytope strategy sets", *IET Control Theory & Applications*, vol 11, no 13, pp. 2146-2151, 2017.