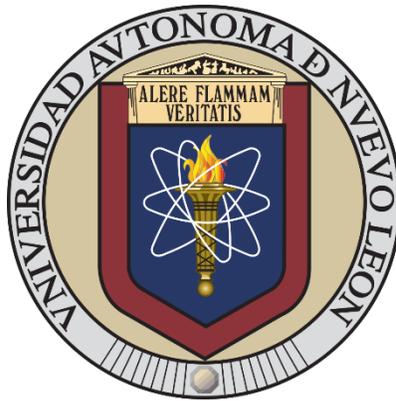


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO



ESTUDIO DE ESTABILIDAD DEL AMBIENTE DINÁMICO
ALREDEDOR DE KEPLER-223

Por

ADRIÁN FIERRO SALINAS

Como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRÍA EN ASTROFÍSICA PLANETARIA
Y TECNOLOGÍAS AFINES

Agosto, 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO



ESTUDIO DE ESTABILIDAD DEL AMBIENTE DINÁMICO
ALREDEDOR DE KEPLER-223

Por

ADRIÁN FIERRO SALINAS

Como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRÍA EN ASTROFÍSICA PLANETARIA
Y TECNOLOGÍAS AFINES

Agosto, 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Estudio de estabilidad del ambiente dinámico alrededor de Kepler-223», realizada por el alumno Adrián Fierro Salinas, no número de matrícula 1595097, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Astrofísica Planetaria y Tecnologías Afines.

El Comité de Tesis

Dr. Carlos Esteban Chávez Pech
Asesor de la tesis

Dra. Esmeralda Romero Hernández
Coordinador del Posgrado MAPTA

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, agosto 2022

ÍNDICE GENERAL

Capítulo	Página
1 Introducción.....	1
1.2 Motivación.....	5
1.3 Objetivo.....	6
1.4 Resumen	6
2 El problema de los 2, 3 y n cuerpos	7
3 Kepler-223	16
4 Resonancia orbital.....	21
5 Mercury: un conjunto de distintos tipos de integradores	25
6 Procedimiento y resultados.....	29
6.1 Procedimiento	29
6.2 Uso de C-Shell para barrido de las condiciones iniciales.....	32
6.3 Sistemas inestables	34
6.4 Resultados	35
7 Discusión y conclusiones.....	40
8 Bibliografía	43

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Datos para las condiciones iniciales a introducir en Mercury</i>	<i>29</i>
<i>Tabla 2. Características de cada uno de los servidores utilizados para hacer las integraciones.....</i>	<i>32</i>
<i>Tabla 3. Condiciones iniciales para el sistema de Kepler-223.....</i>	<i>33</i>

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Todas las secciones cónicas y la forma de obtenerlas a partir de un cono.</i>	11
<i>Figura 2. Representación artística de la Tierra y el Sol con sus respectivos puntos de Lagrange.....</i>	14
<i>Figura 3. Nuestro Sistema Solar es un ejemplo del problema de n cuerpos, siendo en este caso n=9, ya que se cuenta tanto el objeto central (el Sol) como los demás objetos que orbitan alrededor de este (los planetas).....</i>	14
<i>Figura 4. Representación del triángulo formado por la estrella y el exoplaneta con el que se obtiene el parámetro de impacto.....</i>	17
<i>Figura 5. Tránsito de los cuatro planetas de Kepler-223.....</i>	19
<i>Figura 6. Posiciones de Júpiter (círculo blanco) y un asteroide (círculo negro pequeño) con periodos en una proporción de 2:1</i>	23
<i>Figura 7. Gráfica de un integrador simpléctico en el espacio fase aplicado a un oscilador armónico. (Denker, 2012).....</i>	26
<i>Figura 8. Esfera de Hill de un cuerpo celeste y sus respectivos puntos lagrangianos L_1 y L_2.....</i>	27
<i>Figura 9. Archivo big.in.....</i>	29
<i>Figura 10. Archivo param.in.....</i>	30
<i>Figura 11. Shell utilizado para correr las integraciones de todos los planetas de Kepler-223.....</i>	34
<i>Figura 12. Estabilidad del planeta “Kepler-223b” en un diagrama de excentricidad vs semi-eje mayor</i>	36
<i>Figura 13. Mismo que para figura 12, pero para el planeta Kepler-223c.....</i>	37
<i>Figura 14. Mismo que para figura 12, pero para el planeta Kepler-223d.....</i>	38
<i>Figura 15. Mismo que para figura 12, pero para el planeta Kepler-223e.....</i>	39

1 Introducción

1.1 Antecedentes

Desde la antigüedad, el movimiento de los planetas ha sido un tema de interés para los filósofos y astrónomos.

Hace cientos de años no se tenían tantos instrumentos para realizar observaciones, por lo que el único medio que tenían para ver el cielo eran sus propios ojos, pero desde la invención del telescopio, por parte de Hans Lippershey, quien lo patentó en 1608, un año antes que Galileo Galilei. A partir de entonces y hasta la fecha, gracias a los constantes avances tecnológicos, la astronomía ha evolucionado sin parar, llegando al punto de tener telescopios controlados por computadora, telescopios gigantes (10 m), instrumentos cada vez más sensibles y el mayor avance de todos. El telescopio espacial, pues, al no verse perturbada la imagen por la atmósfera, ha permitido los mayores avances. Es gracias a esto que ahora podemos tener datos fiables para corroborar si alguna teoría física relacionada con este campo es válida. Un ejemplo de esto es la mecánica celeste (rama de la astronomía y la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos celestes, debido a fuerzas gravitacionales que se ejercen mutuamente): la ley de gravitación universal.

Después de muchos años intentando resolver el acertijo que era la gravedad, Isaac Newton finalmente logró publicar sus hallazgos sobre esto en su libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Dicho hallazgo era una expresión para la fuerza gravitatoria que ejercen los cuerpos. Para empezar se explicará el problema más básico: el problema de los dos cuerpos y después se procederá a extenderlo a una mayor cantidad de cuerpos.

El problema de los dos cuerpos es el punto de partida, debido a que se hace la simplificación de considerar solo dos objetos puntuales, uno central (la estrella) y otro que orbita alrededor de este último (el planeta), que interactúan únicamente bajo el efecto de la fuerza gravitacional, expresada de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r} \quad (1.1)$$

Donde G es la constante de gravitación universal con valor aproximado de $6.674 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos que están interactuando y r es la distancia entre ambos objetos.

Las ecuaciones de este problema en coordenadas polares tendrían la siguiente forma:

Para r :

$$m_2 \frac{d^2 r}{dt^2} = m_2 r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \quad (1.2)$$

Para θ :

$$-m_2 r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad (1.3)$$

Donde:

m_1 : masa de la estrella.

m_2 : masa del planeta.

r : variable radial.

θ : coordenada polar.

Al resolver este problema se obtienen resultados importantes, como son las leyes de Kepler, las cuales son indispensables para estudios relacionados con la mecánica celeste. También, se obtiene que, al resolver para θ , el momento angular se conserva, ya que da como resultado un valor constante de L , mientras que al resolver para r , se obtienen las curvas que siguen los cuerpos son cónicas, los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (1.4)$$

Que es el resultado para elipses.

Lo expresado anteriormente es la Primera Ley de Kepler. La Segunda Ley de Kepler nos dice que los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales y por último, la relación matemática dada a continuación, es la Tercera Ley de Kepler:

$$a^3 n^2 = G(m_1 + m_2) \quad (1.5)$$

Donde a es el semieje mayor de la órbita del planeta y n es la velocidad angular media, expresada de la siguiente manera:

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (1.6)$$

Donde P es el periodo del planeta.

A pesar de toda la importante información obtenida de este problema, estos resultados únicamente pueden aplicarse para sistemas de dos cuerpos. Para generalizar el problema hay que tomar el mismo problema de los dos cuerpos y expandirlo a n planetas, es decir, estaríamos hablando del problema de n cuerpos.

Debido a que este problema no puede ser resuelto de manera analítica, para sistemas en cualquier configuración se requiere el uso de herramientas computacionales y métodos numéricos. En este trabajo en específico se hace uso del programa llamado Mercury (Chambers 1999) que realiza las integraciones numéricas de dicho problema.

Ahora hablaremos brevemente del “Problema restringido de los tres cuerpos”, el cual, como su nombre lo dice, consiste ahora en tres cuerpos bajo la interacción gravitacional, pero la diferencia con este caso restringido es que se considera que uno de los cuerpos tiene masa despreciable y también se considera que las órbitas de dos de los cuerpos son circulares. De esta manera el problema es más fácil de resolver analíticamente y un resultado importante que nos brinda son los ya muy conocidos “Puntos de Lagrange”.

Si dos objetos están interactuando gravitacionalmente, las fuerzas de ambos cuerpos se sumen o se resten. Aquí es donde hacen su aparición los puntos de Lagrange. También existen regiones del espacio en las que esas fuerzas se anulen en su totalidad, esas regiones vendrían ser los puntos de Lagrange. Esto quiere decir que si un tercer objeto se encuentra en alguna de estas posiciones podrá permanecer estático porque no estaría actuando ninguna fuerza sobre él. Esto debido a los campos gravitacionales de ambas masas y a que giran alrededor del centro de masa, por lo que en el sistema de referencia que gira a la misma velocidad que las estrellas, hay puntos donde la fuerza centrífuga y la gravedad se anulan mutuamente. Existen únicamente 5 posiciones en las que ocurre esto, por lo que se concluye que solamente hay 5 puntos de Lagrange y se les conoce como puntos L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , y L_5 . Sin embargo, solo los puntos L_4 , y L_5 son estables, mientras que los puntos L_1 , L_2 , L_3 son inestables. Esto es que un cuerpo situado

en los primeros mantendría su posición a pesar de que pueda haber otras perturbaciones que lo afecten. En cambio, si se encontrara en alguno de los segundos, pequeñas alteraciones podrían llegar a sacarlo del equilibrio.

Para obtener resultados fieles a lo que ocurre, al final se recurre al problema de los n cuerpos y resolverlo con métodos numéricos.

Actualmente y gracias al avance de las computadoras, se puede atacar los problemas mediante el uso de análisis numérico o métodos numéricos, los cuales son algoritmos para resolver problemas utilizando aproximaciones numéricas, es decir que al usarlos no se obtendrá el resultado exacto del problema. La tecnología realmente nos ha facilitado muchas tareas.

Estos métodos, al igual que los avances en computación, han sido de mucha utilidad, ya que existen diversos problemas que únicamente se pueden solucionar de manera numérica como “Problema de los n cuerpos”.

Gracias a estos métodos numéricos podemos estudiar una gran cantidad de sistemas planetarios bastante interesantes de analizar debido a sus características únicas. Algunos de estos sistemas además son caóticos.

La teoría del caos es el estudio de sistemas en los que un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede llegar a causar que dichos sistemas evolucionen de maneras completamente diferentes. Tal es el caso del péndulo doble, el cual si cambias ligeramente la posición de inicio de alguna de las masas que lo conforman, el sistema evoluciona de maneras totalmente distintas.

De manera similar, en los sistemas planetarios ocurre algo parecido, ya que pueden suceder muchas cosas diferentes dependiendo de, por ejemplo, la distancia a la que esté algún planeta separado de su estrella, es decir, dependiendo del valor de su semi-eje mayor. Si el valor de este llega a ser muy bajo, puede que algunos de los cuerpos que forman el sistema lleguen a colisionar entre ellos o con el objeto central, destruyéndolo por completo o si, en caso contrario, llega a tener un alto valor, puede que eventualmente termine por alejarse cada vez más hasta que finalmente termine por dejar de forma parte del sistema planetario y salga eyectado al espacio interestelar. En algunas ocasiones los valores tienen que ser justamente los adecuados para que exista el equilibrio entre todos los objetos, como es el caso de las llamadas resonancias.

Existen sistemas planetarios en configuraciones llamadas resonancias orbitales. La resonancia orbital es la relación entera que hay entre los periodos orbitales de dos o más planetas. Un ejemplo de esto, es la resonancia que está presente entre Neptuno y Plutón, la cual es una resonancia 3:2 (esto es que Neptuno completa tres veces su órbita, mientras que Plutón lo haría en la misma cantidad de tiempo).

Se pueden hacer análisis sobre nuestro Sistema Solar. Análisis precisos porque las distancias que hay entre nosotros y los planetas son relativamente pequeñas, pero también hay muchos planetas extrasolares que son de interés.

Desde hace siglos se tenía pensada la posibilidad de que existieran planetas lejos de nosotros, pero nunca se habían obtenido pruebas contundentes como para decir que eran reales. Es bastante curioso porque en estos tiempos ya se habla en demasiados artículos de investigación, conferencias, etc., sobre estos cuerpos, pero no fue sino hasta el siglo pasado que se demostró en forma (con observaciones) que, en efecto, todo lo que se tenía pensado era verdad, existían planetas fuera del Sistema Solar: los planetas extrasolares.

Fue 1992 el año en que se descubrió un sistema de planetas con masas similares a la de la Tierra orbitando alrededor del pulsar PSR B1257+12. Fue hasta 1995 se descubrió que un planeta con masa similar a la de Júpiter orbitando alrededor una estrella de secuencia principal de tipo solar (Mayor y Queloz han sido los ganadores del premio Nobel de Física por este estudio).

En este trabajo nos enfocamos al estudio del sistema llamado Kepler-223 que posee 4 planetas en resonancia.

1.2 Motivación

Hay una gran cantidad de sistemas planetarios en el universo y se vuelve de interés el saber más al respecto sobre ellos. En este caso el tema de interés es la estabilidad de la resonancia de los planetas del sistema Kepler-223, así como obtener información sobre su ambiente dinámico. Al analizar cada vez más sobre diferentes aspectos podemos conocer más acerca de los cuerpos celestes que existen y de esta manera contribuir al conocimiento científico.

1.3 Objetivo

El objetivo es analizar el ambiente dinámico del sistema y asimismo la estabilidad de las resonancias de sus planetas, ya que es bastante interesante saber por qué es tan estable el sistema (su estrella tiene 6 Gyr), qué características tiene, así como las interacciones que hay entre sus planetas. Todo lo anterior realizado usando el programa Mercury, un código escrito en el lenguaje de programación Fortran y que contiene varios tipos de integradores dependiendo de las condiciones de lo que se estudia. Con los resultados de este código, procederemos a obtener gráficas que nos brinden información acerca de estas resonancias.

1.4 Resumen

En la sección 2 se hablará más a detalle sobre las características de la estrella Kepler-223 y también los planetas que la orbitan.

En la sección 3 se abordará la información acerca de lo que es una resonancia y se darán algunos ejemplos.

En la sección 4 se hablará más al respecto sobre Mercury, sus características, especificaciones y demás.

En la sección 5 se presentarán los resultados obtenidos y por último en la sección 6 se procederá a obtener conclusiones con estos resultados y comentarios finales, así como posibles estudios futuros.

2 El Problema de los 2, 3 y n cuerpos

Para comenzar, necesitamos partir desde los fundamentos, esto es, el problema de los 2 cuerpos, por lo que se procederá a resolverlo con detalle.

Consideremos 2 cuerpos con masa m_1 y m_2 separados el uno del otro por una distancia r que únicamente son afectados por la interacción gravitacional. Teniendo esto en consideración, tenemos que la energía cinética del sistema sería:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$$

Y utilizando coordenadas polares, tendríamos que

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y) \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Por lo que al hacer el cambio las derivadas de x y y , al elevarlas al cuadrado y sumarlas quedarían así

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2$$

Así que ahora teniendo esta nueva forma, tenemos que las energías cinética y potencial pueden ser expresadas como:

$$T = \frac{1}{2} m_2 (r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$$

$$V = - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Una vez conocidas las expresiones de ambas energías, podemos encontrar el valor del lagrangiano

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_2 (r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Sabiendo esto, encontraremos las ecuaciones de movimientos para cada coordenada (r y θ). La expresión general para esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} q_1 &= r \\ q_2 &= \theta \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la primera coordenada tenemos que para r :

$$m_2 \ddot{r} = m_2 r \dot{\theta}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Y para θ :

$$-m_2 r^2 \ddot{\theta} = 0$$

Lo que conlleva a

$$m_2 r^2 \dot{\theta} = \text{constante} = L$$

Donde L es el momento angular. Esto demostraría que el momento angular se conserva en el problema de los dos cuerpos.

Este último resultado puede ser expresado también de la siguiente manera:

$$\frac{L}{m_2} = r^2 \dot{\theta} = \text{constante} \quad (2.2)$$

Al obtener el diferencial del área se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{L}{m_2}$$

Si integramos de ambos lados obtenemos lo siguiente

$$A = \frac{1}{2} \frac{L}{m_2} t$$

Que vendría a ser la Segunda Ley de Kepler: “el vector posición barre áreas iguales en tiempos iguales”, que es justamente lo que expresa esa ecuación, ya que el área es directamente proporcional al tiempo.

Ahora, retomando el resultado que teníamos para r (ec. 2.1)

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_1}{r^2} \\ \ddot{r} &= r \left(\frac{L^2}{m_2^2 r^4} \right) - \frac{Gm_1}{r^2} \\ \ddot{r} &= \frac{L^2}{m_2^2 r^3} - \frac{Gm_1}{r^2} \end{aligned}$$

Al hacer un cambio de variable, de tal manera que

$$u = \frac{1}{r} \tag{2.3}$$

Podemos darle a las ecuaciones otra forma más fácil de resolver

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{Gm_1 m_2}{L^2}$$

De nuevo aplicamos otro cambio de variable. Esta vez de la forma

$$u' = \frac{u - Gm_1 m_2^2}{L^2}$$

Con esto ahora la ecuación se transforma en

$$\frac{du'}{d\theta} = -u'$$

Y al resolverla obtenemos que

$$u' = A \cos(\theta - \varpi)$$

Donde A es constante y ϖ es la fase o longitud del pericentro.

Una vez obtenido nuestro resultado, lo que nos interesa es regresar a la variable original, así que primero tendremos que volver a u

$$u - \frac{Gm_1m_2^2}{L^2} = A \cos(\theta - \varpi)$$

Y al volver a nuestra variable r , tenemos finalmente el resultado deseado

$$r = \frac{\left(\frac{L^2}{Gm_1m_2^2}\right)}{1 + \frac{AL^2}{Gm_1m_2^2} \cos(\theta - \varpi)}$$

Donde

$$p = \left(\frac{L^2}{Gm_1m_2^2}\right)$$

$$e = \frac{AL^2}{Gm_1m_2^2}$$

Siendo p el semilatus rectum y e la excentricidad.

Una vez asignados estos valores, tenemos la forma final del resultado de nuestra ecuación diferencial para r

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}$$

Que es la ecuación de las cónicas descritas desde el foco. Entonces tenemos distintos casos para esto

- Si $e = 0$, entonces la trayectoria trazada es una circunferencia y $p = a$.
- Si $0 < e < 1$, entonces la trayectoria trazada es una elipse y $p = a(1 - e^2)$.
- Si $e = 1$, entonces la trayectoria trazada es una parábola y $p = 2q$, donde q es el periápside, es decir, la distancia más corta al objeto central.

- Si $e > 1$, entonces la trayectoria trazada es una hipérbola y $p = a(e^2 - 1)$.

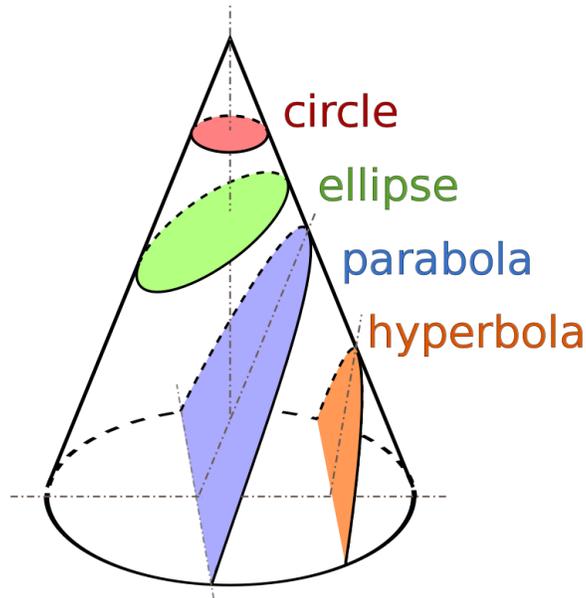


Figura 1. Todas las secciones cónicas y la forma de obtenerlas a partir de un cono. (Imagen obtenida de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section#/media/File:Conic_Sections.svg)

Por lo que para elipses la ecuación tomaría la forma

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}$$

que es la ecuación de la elipse.

Si tomamos la forma original, aún podemos encontrar más información.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}$$

Si derivamos esto con respecto al tiempo y hacemos diferentes sustituciones podemos llegar a

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m_2 r} = \frac{Gm_1 m_2}{L} (1 + e \cos(\theta - \varpi))$$

Algo más que podemos obtener es la magnitud del vector velocidad:

$$|\vec{v}|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Al sustituir los valores de las respectivas derivadas, al final tenemos que el valor para elipses es el siguiente:

$$|\vec{v}|^2 = Gm_1 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Con esto podemos expresar la cantidad de energía total del sistema de la siguiente manera

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V$$

Y se puede demostrar que:

$$E = \frac{1}{2}m_2 \left[Gm_1 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \right] - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} = \text{constante}$$

Lo que nos confirma que en este problema también se cumple la conservación de la energía.

Y de nuevo aplicando el cambio de variable (ec. 2.3) podemos encontrar la siguiente expresión

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{2m_2}{L^2} (E + Gm_1m_2u) - u^2}$$

Al resolver esta ecuación obtenemos una nueva forma para el momento angular

$$L = \sqrt{aGm_1m_2^2(1 - e^2)}$$

Al sustituir esta expresión y todos los valores en la ecuación 2.2 y al resolver, tenemos finalmente que

$$a^3 n^2 = Gm_1$$

Que es la Tercera Ley de Kepler.

Como pudimos observar de todo este procedimiento, resolver el problema de los dos cuerpos nos brindó información bastante importante para estudios de mecánica celeste, ya que se pudieron encontrar las 3 leyes de Kepler y todo lo que conlleva su existencia, además del hecho de saber que en este tipo de sistemas la energía, así como el momento angular, se conservan.

A pesar de la importancia del problema de los dos cuerpos, no nos dice todo lo que necesitamos, ya que, como dice su nombre, solo funciona para casos en los que únicamente hay 2 objetos ejerciéndose efectos gravitacionales mutuamente. Por esto es que se procede a trabajar en el problema de los 3 cuerpos.

El problema de los 3 cuerpos no puede ser resuelto analíticamente, pero se pueden llegar a hacer consideraciones para encontrar información útil. Estas consideraciones son que uno de los cuerpos no tiene masa y que los dos que sí tienen masa se encuentran en una órbita circular. A esto se le llama “el problema circular restringido de los tres cuerpos”.

Algo a destacar de este problema es la inclusión del concepto del Radio de Hill (concepto que se abarcará con más detalle más adelante) y también el descubrimiento de los puntos lagrangianos, regiones del espacio en las que los efectos gravitacionales se vuelven nulos o insignificantes. Y así como en el problema de los 2 cuerpos obtuvimos que la energía y el momento angular se conservan, en este problema la cantidad que se conserva es la Constante de Jacobi.

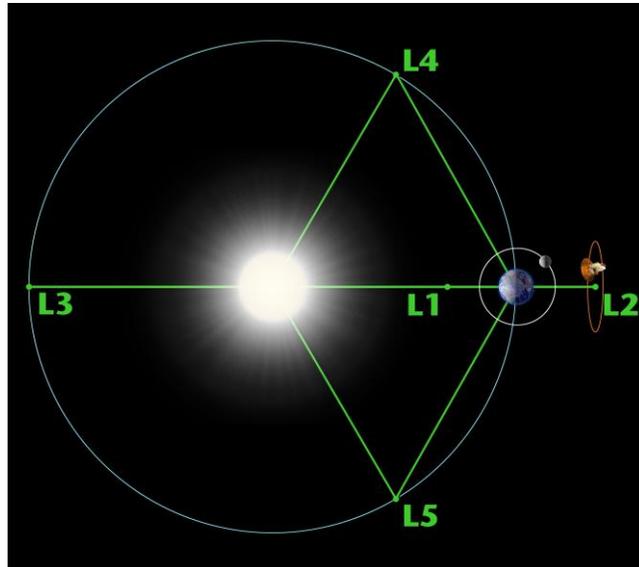


Figura 2. Representación artística de la Tierra y el Sol con sus respectivos puntos de Lagrange. (Imagen obtenida de NASA Solar System Exploration: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point>)

Y pasando ya a un caso más general, se encuentra el problema de n cuerpos. Este problema es generalizar los problemas anteriores a un número mucho mayor de objetos que interactúan entre sí. Al igual que el problema de los 3 cuerpos, este tampoco puede resolverse de manera analítica, por lo que la única manera de poder encontrar una solución es utilizar métodos numéricos (los que serán abarcados en la sección 5).

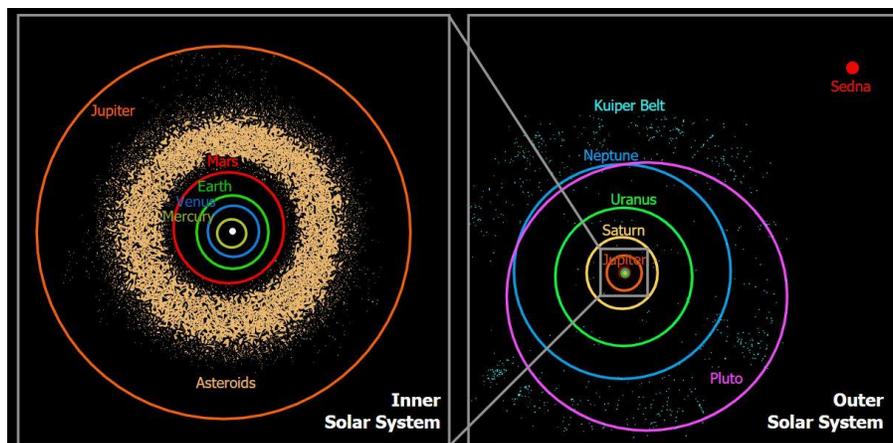


Figura 3. Nuestro Sistema Solar es un ejemplo del problema de n cuerpos, siendo en este caso $n = 9$, ya que se cuenta tanto el objeto central (el Sol) como los demás objetos que orbitan alrededor de este (los planetas). (Imagen obtenida de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_System#/media/File:Oort_cloud_Sedna_orbit.svg)

Como se mencionó en la introducción, los sistemas planetarios evolucionan de manera caótica, esto es, el problema de los n cuerpos. Esto quiere decir que pequeños cambios en las condiciones iniciales podrían traducirse a que el sistema pueda evolucionar de manera totalmente distinta, esto hace que sean muy sensibles a pequeñas perturbaciones. También, como se dijo, un ejemplo de esto es el péndulo doble, ya que cada vez que se pone en movimiento, el sistema termina moviéndose de formas muy diferentes.

En mecánica celeste la teoría del caos se manifiesta de tal forma que, al analizar algún sistema planetario, uno puede notar que si se cambian ligeramente los parámetros, los cálculos podrían resultar distintos, así que dos condiciones iniciales cercanas pueden diferir mucho con el tiempo.

El caos puede influir al momento de hacer simulaciones porque si se llega a dar el caso en que cometes un pequeño error en las condiciones iniciales, esto puede resultar en algo totalmente distinto. Por esto mismo es que hay que tener mucho cuidado al momento de introducir los datos, como los elementos orbitales, las masas de los cuerpos, etc.

3 Kepler-223

Desde que se descubrió la existencia de los exoplanetas o planetas extrasolares, se encontró que se mueven en órbitas elípticas alrededor de un cuerpo central siguiendo las Leyes de Kepler y en algunos casos pueden llegar a presentar resonancias orbitales, las cuales se abordarán más adelante. Esto confirmaba todavía más el hecho de que las leyes de la física se cumplen incluso en cuerpos celestes que se encuentran muy alejados de nosotros y que se pueden descubrir de varias maneras.

Existen distintas maneras de detectar estos planetas extrasolares o exoplanetas. Uno de ellos es la Variación de Tiempo de Tránsito (VTT) o Transit-timing Variation (TTV). Pero antes de explicar en qué consiste este método necesitamos saber en lo que se basa: los tránsitos.

En astronomía, un tránsito se presenta cuando un planeta, visto desde la Tierra, bloquea la luz de su estrella al pasar entre esta última y el observador, bloqueando así un poco de su luz. Esta caída en el brillo o luminosidad de la estrella puede ser detectada y de esta forma podrían detectarse exoplanetas. Sin embargo, esto solo es posible con planetas que orbiten de esa manera específica, ya que si quisiéramos averiguar más información sobre un planeta que en ningún momento es visible, esto no funcionará.

Para esto es importante tener en cuenta las ecuaciones relacionadas con el método. Para empezar, el método de tránsito es muy útil para calcular el radio de un exoplaneta. Suponiendo que el disco estelar es de brillo uniforme y sin tomar en cuenta algún flujo proveniente del planeta, el cociente de flujos quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{R_p^2}{R_*^2}$$

Donde ΔF es el cambio de flujo observado, F el flujo de la estrella, R_p el radio del exoplaneta y R_* el radio de la estrella.

También existe el parámetro de impacto que es la distancia proyectada en el cielo entre el centro de la estrella y el centro del planeta. Si suponemos una órbita circular, podemos obtener una expresión para el parámetro de impacto, b , dada por:

$$b = \frac{a \cos(i)}{R_*}$$

En esta ecuación, b puede tomar valores desde 0 hasta 1.

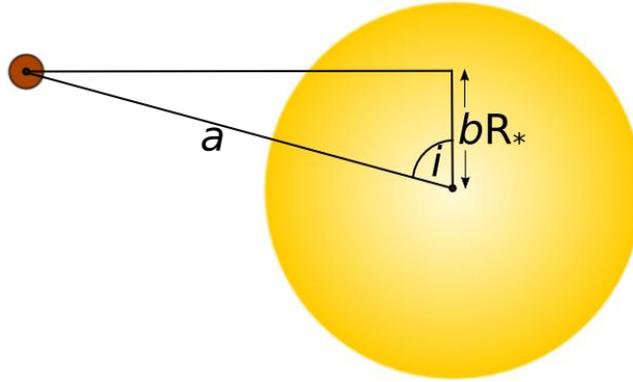


Figura 4. Representación del triángulo formado por la estrella y el exoplaneta con el que se obtiene el parámetro de impacto. (Imagen obtenida de: <https://www.paulanthonywilson.com/wp-content/uploads/2014/08/impact->

Este parámetro podemos usarlo para calcular el tiempo de duración de tránsito. Dicho tiempo está dado por la expresión

$$T_{dur} = \frac{P}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2}}{a} \right)$$

Donde P es el periodo del exoplaneta y a es su semi-eje mayor.

Ahora, teniendo lo anterior en cuenta, podemos definir el método de Variación de Tiempo de Tránsito. Como dice su nombre, este método consiste en medir las variaciones de los tiempos de un planeta que transita. Esto quiere decir que, por ejemplo, si tuviéramos un sistema planetario con un solo planeta los tiempos de sus tránsitos serían exactamente los mismos, ya que no hay nada más afectando, sin embargo, en sistemas con más planetas, al haber atracción gravitacional mutua entre todos los elementos de este, esto hace que los tiempos de los tránsitos varíen, debido a que no estarían orbitando siempre a la misma velocidad. Esto es bastante útil para detectar planetas de tamaño similar a la Tierra y en sistemas gravitacionales en los que los planetas estén muy cerca unos de otros, ya que de esta manera las influencias de la gravedad son más notorias. Ese es el caso del sistema planetario a estudiar en esta ocasión: Kepler-223. También, es importante mencionar que, a pesar de que en la

mayoría de casos los planetas de un sistema orbitan una única estrella (como es el caso de Kepler-223), no siempre ocurre de esta manera. Se puede dar el caso en que, por ejemplo, estén orbitando a una estrella binaria, es decir, que orbiten alrededor de dos estrellas, las que a su vez orbitan un centro de masa.

Asimismo es algo muy sorprendente que a pesar de lo lejos que estamos de todos estos objetos, podamos estudiarlos de manera tan eficaz. Sin duda la ciencia ha hecho avances muy grandes con el paso de los siglos y uno de estos es la creación de métodos para detectar los objetos anteriormente mencionados. Al principio era bastante complicado asegurar la existencia de algún planeta, pero gracias a los avances en las técnicas de observación y mejores instrumentos, la década pasada ha sido el periodo de tiempo en el que más planetas extrasolares fueron confirmados, siendo descubiertos más de 1500 en el año 2016 de los más de 4000 conocidos en la actualidad.

Kepler-223 o KOI-730 es un sistema planetario que consiste de esta estrella y de 4 planetas conocidos hasta ahora (Kepler-223b, Kepler-223c, Kepler-223d y Kepler-223e), cuyos cocientes de sus periodos orbitales se estimaron que eran de $P_c/P_b=1.3336$, $P_d/P_c=1.5015$ y $P_e/P_d=1.3339$. Todos ellos fueron descubiertos utilizando el método de tránsito. Sumado a esto, se sabe que la estrella Kepler-223 tiene coordenadas celestes: ascensión recta de 298.318359° y declinación 47.279491° y además su magnitud es de 15.344 y la distancia a la que se encuentra de la Tierra es de aproximadamente 2000 pc.

Al principio se creía que Kepler-223 contenía dos planetas coorbitales, es decir, que se encuentran a la misma o aproximadamente la misma distancia de su estrella, esto es que están mutuamente en una resonancia de 1:1. Dichos planetas estarían en resonancia junto a los otros dos, esto daría como resultado en aquel entonces una resonancia total de 6:4:4:3. Este sistema habría sido el primer ejemplo de planetas coorbitales. Se conocen distintos cuerpos celestes en el Sistema Solar, pero no se había observado que sucediera con planetas. Más tarde, con posteriores observaciones, se llegó a los resultados que actualmente se conocen, los cuales se mencionan más adelante en esta sección.

Algo que es importante mencionar, es el hecho de que este sistema planetario indica claramente la manera en que fue formado. Según menciona (Mills et al. 2016), al hacer simulaciones numéricas para intentar dar con la estructura de Kepler-223, la hipótesis de la migración resultó ser la indicada para obtener los resultados esperados. Esto quiere decir que la configuración actual se logró debido a que los planetas fueron

interaccionando con un disco de gas y/o planetesimales, lo que iría cambiando poco a poco sus semi-ejes mayores hasta que eventualmente se terminaron de colocar a las distancias precisas para que todos estuvieran en resonancia entre sí. Gracias a esto ahora se tendría una pista sobre cómo fue que todos los planetas y su respectiva estrella consiguieron estar acomodados de esa manera, pero a pesar de esto aún habría un par de incógnitas sobre esto, como por ejemplo, todos los parámetros de migración del disco y las condiciones iniciales exactas que llevaron a concluir con la formación de Kepler-223.

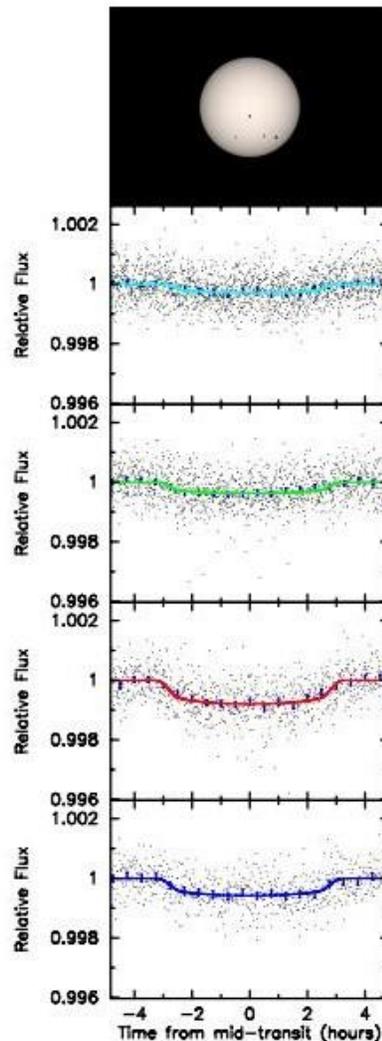


Figura 5. Tránsito de los cuatro planetas de Kepler-223. La primera imagen es una imagen artística de cómo se vería el tamaño de los planetas comparado con su estrella. Las gráficas muestran el flujo de la estrella como función del tiempo. Como se puede apreciar, hay un decaimiento en este último cuando pasan por en frente, lo que daría paso a la detección de estos. (Lissauer et al. 2014).

La estrella Kepler-223 posee un tipo espectral similar al del Sol (G5V), teniendo una masa de $1.125 M_{\odot}$ y un radio de $1.714 R_{\odot}$, siendo M_{\odot} la masa de nuestro Sol y R_{\odot} el valor de su radio, por lo que la masa de Kepler-223 vendría a ser 1.125 veces la del Sol y su radio 1.714 mayor que el de este. Se estima que de acuerdo con los modelos tiene una edad de 6 Gyr. Como se puede notar, su masa no difiere mucho al del Sol, pero como se aprecia, la diferencia entre sus radios es aun mayor, siendo el radio de Kepler-223 cerca del doble que el del Sol, por lo que podríamos decir que está un poco más inflada que nuestra estrella.

Ahora hablando de sus planetas, en el artículo de (Mills, 2016) se reportan valores de $2.99 R_{\oplus}$, $3.44 R_{\oplus}$, $5.24 R_{\oplus}$ y $4.60 R_{\oplus}$ para sus radios y de $7.4 M_{\oplus}$, $5.1 M_{\oplus}$, $8.0 M_{\oplus}$ y $4.8 M_{\oplus}$ para sus masas, siendo M_{\oplus} el valor de la masa de la Tierra, por lo que vendrían a ser súper Tierras o sub Neptunos, además de eso, la peculiaridad que tienen es que se encuentran en resonancia unos con otros, siendo de 8:6:4:3, esto es que por cada 8 órbitas del objeto más interno, Kepler-223b, por 6 órbitas del planeta que sigue en distancia a la estrella, Kepler-223c, 4 de Kepler-223d y 3 órbitas de Kepler-223e, siendo este sistema extrasolar el primero en ser descubierto que posee exactamente 4 planetas en resonancia. Las órbitas de estos planetas resonantes son bastante cercanas una de otra. Cabe destacar que a pesar de que son más grandes que la Tierra, todos orbitan más cerca de su estrella que Mercurio del Sol, siendo los valores de los semi-ejes mayores de cada uno de los planetas menores a 0.15 UA (unidades astronómicas) y sabiendo que Mercurio (planeta más cercano al Sol) posee un semi-eje mayor de aprox. 0.387 UA. Y sobre su estructura interna, los modelos predicen que para esas masas y esos radios cada uno de ellos posee un núcleo sólido y están rodeados por gas.

Pero lo que realmente nos concierne para este estudio son las resonancias orbitales y el ambiente dinámico, mencionados con anterioridad. Lo primero será abordado a continuación.

4 Resonancia orbital

Gracias al descubrimiento de las leyes de Newton en el siglo 17, tanto las 3 del movimiento como la de gravitación universal, hemos podido entender un poco más sobre el universo que habitamos. Desde el movimiento de una pelota al ser lanzada hasta el movimiento de los planetas. También gracias a esto comprendemos que todo cuerpo que posea masa ejerce una fuerza de atracción sobre cualquier otro.

En algunos sistemas planetarios (como en el que estudiamos) ocurre que los periodos de unos o todos los planetas pertenecientes a estos están relacionados por medio de números enteros. Esto quiere decir que sus periodos están relacionados por medio de una razón o fracción. A este fenómeno se le denomina “resonancia orbital”. Algo importante que mencionar es que esto no es exclusivo de los planetas, sino que también se puede dar el caso en satélites.

La resonancia puede darse por la relación entre los movimientos de rotación (el movimiento que realiza un cuerpo al girar sobre su propio eje) y de traslación (el movimiento de un planeta alrededor de un objeto central o estrella trazando una órbita). Un ejemplo de lo anterior es el movimiento de la Luna, ya que, como se sabe, la misma cara de ella siempre está volteando hacia la Tierra. Esto se traduce a una resonancia 1:1 entre su rotación y su traslación, es decir, que por cada vuelta que dio alrededor de la Tierra, también terminó de dar una vuelta completa sobre su propio eje (Murray y Dermott, 1999). Pero en este trabajo solo se hará énfasis en las resonancias que ocurren debido a los periodos orbitales.

En el Sistema Solar existen varios ejemplos de objetos en resonancia. Uno de los más conocidos es la que existe entre Neptuno y Plutón, cuyos periodos se encuentran mutuamente en una resonancia de 3:2, por lo que cada vez que Neptuno da 3 vueltas al Sol, Plutón dará 2. También existen los casos de las lunas de Saturno como Mimas y Tetis que se encuentran en una resonancia de 4:2, Encélado y Dione con una resonancia de 2:1, Titán e Hiperión que se encuentran mutuamente en una resonancia orbital de 4:3 y Janus y Epimetheus en 1:1 (llamada resonancia troyana). También podemos agregar el caso de Júpiter que se encuentra en resonancia 1:1 con asteroides troyanos. Todas estas resonancias pueden ser representadas también como cocientes o fracciones. Si tomamos el caso de las lunas de Saturno quedarían de la siguiente manera:

$$\frac{n_M}{n_{Te}} = 2.003139$$

$$\frac{n_E}{n_D} = 1.997431$$

$$\frac{n_{Ti}}{n_H} = 1.334342$$

Donde n_M , n_{Te} , n_E , n_D , n_{Ti} y n_H son las velocidades angulares medias de Mimas, Tetis, Encélado, Dione, Titán e Hiperión respectivamente. Es importante mencionar que a pesar de que en este caso se usan las velocidades angulares medias, las resonancias también pueden ser expresadas por medio de los respectivos periodos. Esto último se aplicó a Kepler-223. Como se puede notar, para el primer par de lunas la división de sus velocidades angulares dan como resultado 2.003139, lo que sería la resonancia de 4:2, es decir, dividir 4 entre 2, lo que daría aproximadamente 2. Para la segunda pareja (la resonancia de 2:1), también daría como resultado aproximadamente 2. Mientras que para el tercer caso el resultado de dividir las velocidades angulares nos daría 1.334342, que sería aproximadamente el resultado de dividir 4 entre 3, es decir, una resonancia de 4:3.

Para que dos objetos sean resonantes mutuamente se necesitan condiciones muy específicas como la distancia de separación entre cada uno de los objetos cercanos (no solo los resonantes), sus masas y sus órbitas.

Todavía se siguen encontrando fenómenos y cuerpos celestes de interés relacionados con sus elementos, como es el caso de las resonancias mencionadas anteriormente y los satélites naturales de los planetas.

Las cantidades físicas de la naturaleza no son exactas, así que en algunos casos los objetos celestes pueden no estar exactamente en resonancia, pero los valores medidos de sus periodos se pueden encontrar lo suficientemente cerca de esto que no estaría mal referirnos a ellos con esta terminología. Tal es el caso de Júpiter y Saturno, quienes se encuentran cerca de una resonancia 5:2. Ambos experimentan los efectos de esta, así que podemos decir que sí se encuentran en este estado a pesar de no ser exactamente el caso. La consecuencia más notable de este efecto es el hecho de que Saturno no tiene asteroides troyanos.

A lo mencionado se le llama “resonancia entre dos cuerpos”, debido a que solamente están involucrados 2 objetos celestes en dicha resonancia, pero también se puede dar el caso en que 3 o más cuerpos estén involucrados, a esto último se le denomina “cadenas de resonancia”.

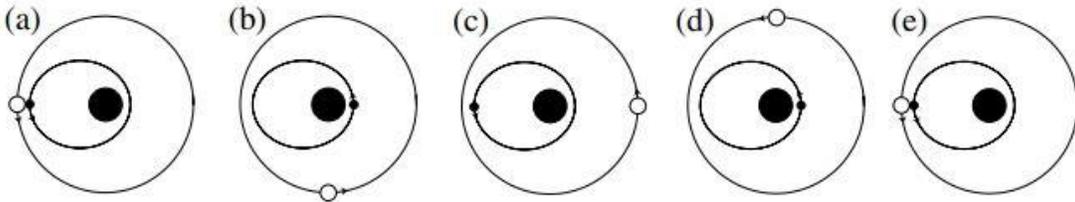


Figura 6. Posiciones de Júpiter (círculo blanco) y un asteroide (círculo negro pequeño) con periodos en una proporción de 2:1. Siendo T_J el periodo de Júpiter, entonces: (a) $t=0$, (b) $t=1/4T_J$, (c) $t=1/2T_J$, (d) $t=3/4T_J$, (e) $t= T_J$. (Murray, 1999)

En nuestro sistema solar también hay ejemplos de cadenas resonancia, como es el caso de las lunas de Júpiter: Ganímedes, Europa e Io, las cuales se encuentran en una resonancia de 1:2:4, por lo que cada que Ganímedes da una vuelta alrededor de Júpiter, Europa da 2 e Io daría 4.

Es en estos satélites naturales en los que fue descubierto dicho fenómeno y puede que esto nos indique la posibilidad de que en el pasado Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno se hayan encontrado en una configuración similar. Esto es conocido como el modelo de Nice (Tsiganis et al. 2005).

Con el paso de los años y con el descubrimiento de más cuerpos celestes, se llegó a saber que existe resonancia orbital más allá de donde podemos observar a simple vista, es decir, en los exoplanetas. Un sistema ya muy conocido es TRAPPIST-1, que posee siete planetas con masas de entre 0.09 y 1.6 M_{\oplus} . Una de las razones por las que es conocido es debido a que algunos de sus planetas están en la zona habitable y por la posibilidad de que puedan tener agua. Pero también algo que lo vuelve realmente único es que todos sus planetas se encuentran en resonancia. Esto es realmente sorprendente, de hecho esta es la cadena resonante conocida con un mayor número de cuerpos en resonancia hasta la fecha. El sistema a estudiar, Kepler-223, es de mucho interés ya que de los 4 planetas que se han detectado hasta ahora, todos se encuentran en resonancia.

Recapitulando y aplicado a nuestro sistema, las resonancias orbitales pueden ser expresadas como fracciones y a su vez como proporciones, lo cual se aplica también a Kepler-223 (como se vio en la sección anterior), siendo sus resonancias pudiendo ser escritas como 6:4:4:3 o

$$\frac{P_c}{P_b} = 1.3336$$

$$\frac{P_d}{P_c} = 1.5015$$

$$\frac{P_e}{P_d} = 1.3339$$

Para esto se necesita el uso de métodos numéricos y herramientas computacionales, los cuales nos serán de mucha utilidad para obtener más información sobre la dinámica de Kepler-223.

5 Mercury: un conjunto de distintos tipos de integradores

Gracias al avance de las computadoras ahora somos capaces de resolver problemas que hace siglos se consideraban imposibles o muy complicados de hallar una solución, pero gracias a eso y a la invención de los métodos numéricos actualmente podemos hacerlo.

Un método numérico consiste en un modelo matemático capaz de encontrar una solución aproximada de un problema de interés. Estos surgen de la necesidad de querer obtener resultados de problemas que por otros medios serían imposibles de resolver. Debido a esto se crearon procedimientos iterativos para poder obtener respuestas. Algunos ejemplos de esto son: el método de Newton para resolver ecuaciones polinómicas, la regla de Simpson para resolver integrales y el método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Al principio todos estos métodos eran hechos manualmente, por lo que era demasiado tardado resolver un solo problema. Esto cambiaría con la creación de las computadoras, puesto que las máquinas pueden hacerlos de manera más rápida y eficiente. Desde entonces y conforme han ido mejorando las computadoras, este ha sido el método preferido para utilizar los métodos numéricos, reduciendo así considerablemente el tiempo que tiene ser invertido en esto. De esta manera un procedimiento que podría llevar meses de manera manual, se puede realizar en unos cuantos minutos. Algunos de estos métodos han sido programados en Mercury, el programa que se usará aquí, al lograr unir varios de ellos en un solo código y de esta manera elegir el más conveniente para el problema en cuestión.

Para empezar, necesitamos saber lo que es un integrador simpléctico o algoritmo de integración simpléctica. Estos son utilizados para resolver las ecuaciones de movimiento de Hamilton y logran conservar bastante bien el valor del Hamiltoniano, esto quiere decir que se conserva la energía y a su vez el momento angular del sistema a estudiar porque resuelve una ecuación muy similar a la que se está tratando. Estoy es muy útil para hacer simulaciones como los tratados en este trabajo, es decir, de mecánica celeste o de dinámica planetaria, los cuales requieren hacer cálculos equivalentes a escenarios que evolucionan por un tiempo de miles o hasta millones de años con bastante precisión, ya que mientras menos exactitud haya en estos cálculos, más diferente será el resultado de lo esperado, debido a que este tipo de sistemas son caóticos y cualquier ligera variación podría conllevar a algo que no se busca. Es por eso que es tan importante en estos problemas asegurar la conservación de la energía. También cabe recalcar que los integradores simplécticos funcionan en el espacio fase, esto quiere decir en pocas palabras que los resultados que arroje se tendrán que graficar poniendo en el eje y a los momentos y en el eje x a la posición, por lo que para el caso

de Kepler-223, Mercury nos dará los resultados de manera que se puedan graficar como e vs a (excentricidad vs semi-eje mayor).

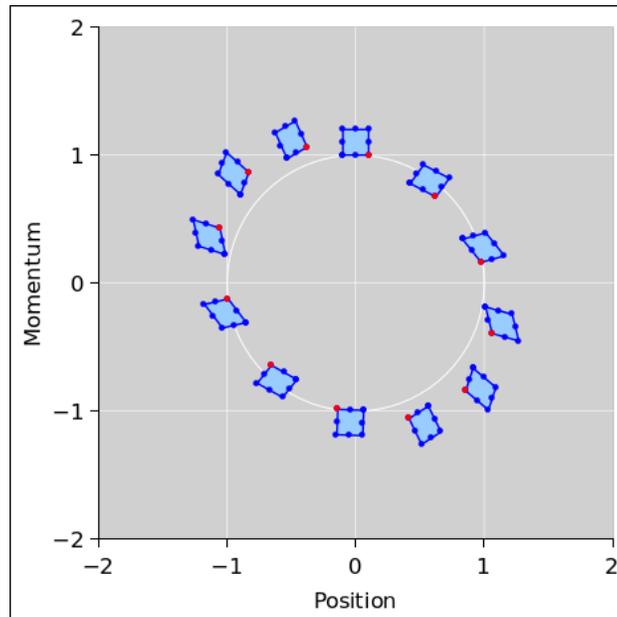


Figura 7. Gráfica de un integrador simpléctico en el espacio fase aplicado a un oscilador armónico. (Denker, 2012).

<https://www.av8n.com/physics/img48/symplectic-harm.png>

También existe el integrador de Bulirsch-Stoer, el cual es un integrador de paso adaptativo, lo que quiere decir, que el mismo programa irá cambiando el tamaño del paso a medida que avanza la simulación, ya sea haciéndolo más pequeño o más grande, todo con el objetivo de obtener la precisión deseada y hacerlo lo más rápido posible. Esto quiere decir que el programa irá modificando únicamente este parámetro dentro de unos ciertos límites dependiendo de la precisión que se desea conseguir. Y también este programa conserva muy bien la energía y el momento angular.

Ahora, sabiendo esto, introducimos a Mercury, un programa escrito en Fortran que consiste de un conjunto de varios integradores distintos: Bulirsch-Stoer, MVS (integrador simpléctico), Bulirsch-Stoer 2 y RA15 de Everhart (RADAU). Sumado a esto, posee una opción para usar un integrador híbrido, lo que quiere decir que se hará uso de Bulirsch-Stoer y de un integrador simpléctico para un mismo problema, dependiendo de las condiciones de este.

Para entender mejor cómo el integrador híbrido cambia de un integrador a otro, introduciremos el concepto de Esfera de Hill. La Esfera de Hill es una región con forma esférica de un cuerpo sometido a la fuerza gravitacional de otro objeto más grande al que orbita. Esta región vendría a ser la zona en la que los efectos gravitacionales del cuerpo más pequeño tendrían efectos más significativos. Y como se puede apreciar en la figura 8, los puntos lagrangianos L_1 y L_2 estarían ambos posicionados sobre la misma recta. A la esfera cuyo centro es el objeto menos masivo y cuyo radio corresponde al punto L_2 se le denomina Radio de Hill.

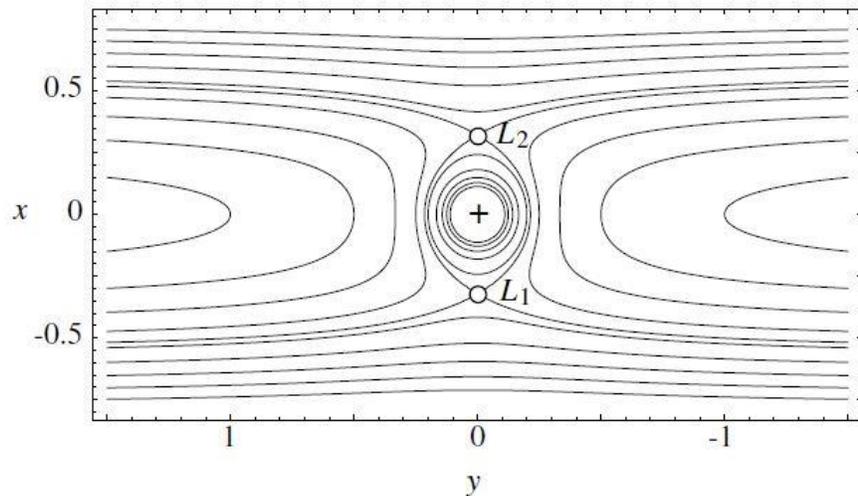


Figura 8. Esfera de Hill de un cuerpo celeste y sus respectivos puntos lagrangianos L_1 y L_2 .

El integrador utilizado para la simulación de ese trabajo fue el híbrido, debido a que permite encuentros cercanos. Lo que ocurre al utilizarlo es que cuando los planetas están alejados unos de otros se utiliza el integrador simpléctico (que es más rápido) y cuando se acercan una distancia, dada por el radio de Hill, se cambia a utilizar el Bulirsch-Stoer (que es más lento, pero más preciso), este último sí puede modelar de manera correcta encuentros cercanos, ya que si se eligiera utilizar el simpléctico en la totalidad del problema, los cálculos irían acumulando cada vez más el error en dichos encuentros cercanos y terminaría por ser inservible para estos propósitos. Esto es algo bastante útil para estudios de este estilo porque ambos integradores se complementan de una manera muy eficaz, con tal de obtener la mayor precisión y de esta forma tener datos más fieles a la realidad y así poder aportar algo que pueda servir en posibles estudios futuros. Se optó por usar este tipo de integrador debido a que, como se mencionó en la sección 2, los planetas de Kepler-223 tienen órbitas muy cercanas unas

de otras, por lo que es verdaderamente necesario tomar los encuentros cercanos en consideración.

En caso de que no se considere esto último y resulte que haya múltiples encuentros cercanos entre los cuerpos, el integrador simpléctico continuamente estaría cambiando el valor del Hamiltoniano con tal de poder seguir realizando las integraciones, pero esto haría que no se conservara la energía en nuestro problema lo que generaría mucho porcentaje de error, por eso es que es muy útil el integrador híbrido de Mercury, ya que dependiendo de la situación se cambia a uno u otro para tener una mucho mejor eficiencia.

A pesar de que existen más formas de resolver esta clase de problemas, como por ejemplo, usando el método de Runge-Kutta, este no suele ser muy utilizado en problemas de mecánica celeste que involucren extensos tiempos de simulación, ya que no conserva tan bien la energía después de un tiempo. Al principio el programa resuelve todo bien hasta pasado cierto punto en el que la solución comienza a alejarse del valor real con bastante notoriedad, por lo que para los propósitos de este trabajo de los códigos más óptimo que se pueden usar son como los del Mercury porque están diseñados específicamente para este tipo de problemas, el cual no es el caso del Runge-Kutta.

Algo que también a tener cuenta es que en los problemas de n cuerpos se trata con sistemas caóticos, esto significa que un pequeño cambio en las condiciones iniciales podría llevar a un resultado completamente distinto, por lo que se tienen que escoger con cuidado y tener cuidado al momento de escribirlas para que no haya errores al introducirlas al programa.

Utilizando el programa Mercury se obtuvieron resultados sobre el sistema planetario que es objeto de estudio. Dichos resultados, así como el procedimiento que se siguió serán mostrados en la siguiente sección.

6 Procedimiento y resultados

6.1 Procedimiento

Para comenzar, se necesita saber las condiciones iniciales a introducir en el programa, las cuales se encuentran en la siguiente tabla que nos brinda información sobre el sistema planetario Kepler-223:

Parameter name	DEMCMC result			
Spectroscopic stellar mass, M_* (M_\odot)	1.125 ^{+0.094} _{-0.073}			
Stellar radius, R_* (R_\odot)	1.72 ^{+0.07} _{-0.14}			
	Kepler-223 b	Kepler-223 c	Kepler-223 d	Kepler-223 e
Orbital period, P (d)	7.38449 ^{+0.00022} _{-0.00022}	9.84564 ^{+0.00052} _{-0.00051}	14.78869 ^{+0.00030} _{-0.00027}	19.72567 ^{+0.00055} _{-0.00054}
Eccentricity, e	0.078 ^{+0.015} _{-0.017}	0.150 ^{+0.019} _{-0.051}	0.037 ^{+0.018} _{-0.017}	0.051 ^{+0.019} _{-0.019}
Inclination, $ i - 90 $ (°)	0.0 ^{+1.8}	0.0 ^{+1.3}	2.06 ^{+0.26} _{-0.32}	2.00 ^{+0.21} _{-0.27}
Mass, M (M_\oplus)	7.4 ^{+1.3} _{-1.1}	5.1 ^{+1.7} _{-1.1}	8.0 ^{+1.5} _{-1.3}	4.8 ^{+1.4} _{-1.2}
Radius, R (R_\oplus)	2.99 ^{+0.18} _{-0.27}	3.44 ^{+0.20} _{-0.30}	5.24 ^{+0.26} _{-0.45}	4.60 ^{+0.27} _{-0.41}
Density, ρ (g cm^{-3})	1.54 ^{+0.63} _{-0.35}	0.71 ^{+0.33} _{-0.20}	0.31 ^{+0.12} _{-0.07}	0.28 ^{+0.12} _{-0.08}

Tabla 1. Datos para las condiciones iniciales a introducir en Mercury.
(Mills et al. 2016)

En el programa Mercury, existen dos archivos llamados big.in y param.in que son fundamentales para realizar las integraciones. En estos se tienen que introducir datos sobre los planetas y su respectiva estrella, ya que de aquí el código tomará la información para poder obtener los resultados. Dichos archivos son mostrados a continuación:

```
)O+_06 Big-body initial data (WARNING: Do not delete this line!!)
) Lines beginning with `)' are ignored.
)-----
style (Cartesian, Asteroidal, Cometary) = Ast
epoch (in days) = 0
)-----
k223b   m=1.96E-05  r=0.5  d=1.54
0.0771864 0.0771557 0.0 42.3736 0.0 286.16737 0 0 0
k223c   m=1.57E-05  r=0.5  d=0.71
0.09350 0.137317 0.0 77.3807 0.0 354.65805 0 0 0
k223d   m=1.57E-05  r=0.5  d=0.31
0.122635 0.0262488 2.02 40.3645 0.0 241.93289 0 0 0
k223e   m=2.03E-05  r=0.5  d=0.28
0.148597 0.0481041 1.95 69.3045 0.0 40.19536 0 0 0
```

Figura 9. Archivo big.in.

```

)O+_06 Integration parameters (WARNING: Do not delete this line!!)
) Lines beginning with `)' are ignored.
)-----
) Important integration parameters:
)-----
algorithm (MVS, BS, BS2, RADAU, HYBRID etc) = Hybrid
start time (days)= 0
stop time (days) = 365.25d8
output interval (days) = 365.25d4
timestep (days) = 0.03
accuracy parameter=1.d-13
)-----
) Integration options:
)-----
stop integration after a close encounter = no
allow collisions to occur = yes
include collisional fragmentation = no
express time in days or years = years
express time relative to integration start time = yes
output precision = medium
< not used at present >
include relativity in integration= no
include user-defined force = no
)-----
) These parameters do not need to be adjusted often:
)-----
ejection distance (AU)= 100
radius of central body (AU) = 0.008
central mass (solar) = 1.125
central J2 = 0
central J3 = 0
central J4 = 0
< not used at present >
< not used at present >
Hybrid integrator changeover (Hill radii) = 3.
number of timesteps between data dumps = 1000
number of timesteps between periodic effects = 100

```

Figura 10. Archivo param.in.

Algo muy importante que mencionar, es que en estos archivos de texto al principio aparecen tres líneas que dan una advertencia que dice que no sean borradas, esto debido a que si se llegara a hacer el programa podría no funcionar de manera adecuada. La siguiente línea nos pregunta el formato en el que ingresaremos los datos de entrada: Cartesian, que vendría a ser en coordenadas cartesianas (posiciones y velocidades en sistema de coordenadas x,y,z), Asteroidal (los elementos orbitales) o Cometary (elementos orbitales de cometas). Para este caso se usó el formato Asteroidal, es decir, que se introdujeron los elementos orbitales de cada planeta del sistema.

La línea que sigue nos pide el tiempo en que las condiciones iniciales son válidas. Seguido de esto hay otra separación y luego empieza la sección en la que se escriben los elementos orbitales. Para cada planeta se usan dos líneas: en la primera se le da al archivo el nombre del objeto en cuestión, luego se da la respectiva masa en masas solares (que en este caso tuvimos que cambiar las unidades de masas terrestres, que es como aparecen en el artículo, a masas solares), seguida por la máxima distancia (r) en la que a partir de la cual se tomaría la interacción gravitatoria como un encuentro cercano en radios de Hill, para terminar con el último dato que es la densidad (d) del cuerpo celeste en g/cm^3 .

Finalmente en la próxima línea se escriben los elementos orbitales del planeta: a (semi-eje mayor en unidades astronómicas, el cual tuvo que ser calculado utilizando la tercera ley de Kepler, debido a que en el artículo utilizado como referencia no mencionan ninguno de estos valores, pero sí nos dan la información suficiente para hallarlos), e (excentricidad de la órbita), I (inclinación en grados), g (argumento del pericentro en grados), n (longitud del nodo ascendente en grados) y M (anomalía media en grados).

Ahora para el archivo `param.in` lo que se modificó fue lo siguiente: en “algorithm” se cambió a “Hybrid” ya que, como se mencionó anteriormente, el integrador que usaremos será el híbrido. “Start time” y “stop time”, que sería el inicio y el final de la integración, es decir, cuánto tiempo simulará el programa. “Output interval”, que es cada cuánto tiempo escribe el programa. “Timestep”, el tiempo de paso del programa. “Accuracy parameter”, la precisión deseada. Y más abajo en el archivo: “ejection distance”, la distancia a la que se toma en cuenta que un planeta fue eyectado del sistema. “Radius of central body”, el radio de la estrella en unidades astronómicas. “Central mass”, la masa de la estrella en masas solares. “Number of time steps between data dumps” se cambió a 100 000 para que el programa no escriba tan seguido y no pesen tanto los archivos generados.

Los datos sobre los planetas y la estrella que fueron introducidos en estos archivos fueron obtenidos de la *Tabla 1*. Sin embargo, no para todos fue este el caso porque hay algunos que se tienen que seleccionar manualmente o se tiene que tener un criterio para elegirlos, tales como “start time”, “stop time” y “output interval” que aparecen en `param.in`.

Todo lo comentado en esta sección sería lo ideal para hacer una sola simulación para las condiciones aportadas por el artículo, pero lo que nos interesa es saber la estabilidad alrededor de dichas condiciones y esto se logra al ingresar distintos valores para la

excentricidad y el semi-eje mayor, para que de esta manera se puedan saber las regiones cercanas a la órbita en la que se mantendrían las resonancias y ver si son estables. Para esto se crearon varios archivos con distintos valores para lo mencionado usando el software Mathematica, resultando en un total de 11565 integraciones. Si hacemos esto manualmente el proceso sería demasiado tardado porque habría que correr el programa Mercury una vez y luego manualmente cambiar los valores y de nuevo correrlo, así que mejor se opta por crear un Shell.

6.2 Uso de C-Shell para barrido de las condiciones iniciales

Un Shell es un programa con el que, por medio de comandos, se puede acceder a las distintas funciones del sistema operativo y de esta manera poder automatizar tareas repetitivas. Es decir que el Shell abre una interfaz para introducir comandos para programar lo que hacen, por lo que tendrá sus propias funciones y sintáxis. Dichos comandos manipularán acciones específicas de la computadora, según lo que se le ordene que haga, como correr programas, por ejemplo. (Esto es, un intérprete de comandos).

Quantity	Product Name
3	Supermicro A+ Server AS-1042G-LTF Quad Socket G34 1400W 1U Rackmount Server Barebone System (Black)
12	AMD Opteron 6376 Sixteen-Core Processor 2.3GHz Socket G34 w/o Fan, Retail
15	Kingston ValueRAM KVR13R9D4/16 DDR3-1333 16GB/2Gx72 ECC/REG CL9 Server Memory
6	Seagate ST2000DM001 2TB 7200RPM SATA3/SATA 6.0 GB/s 64MB Hard Drive (3.5 inch)

Tabla 2. Características de cada uno de los servidores utilizados para hacer las integraciones.

Así pues, se introducen las instrucciones para que el Shell pueda sobrescribir los archivos de entrada para introducir las condiciones iniciales correctas y que también pueda abrir y ejecutar el Mercury en repetidas ocasiones. De esta manera no hay que reemplazar los datos uno por uno a mano ni tampoco abrir y ejecutar los programas de uno en uno. Sumado a esto, hay que hacer este último proceso para cada planeta, es decir, que hay que dejar los datos del primer planeta fijos y variar los de los demás.

Una vez que esto termina de hacerse, ahora hay que hacerlo para el segundo y así sucesivamente hasta terminar de analizar todo el sistema.

Todas las integraciones se realizaron en dos servidores exclusivos para este tipo de investigación. Las características de los servidores se muestran en la tabla 2 y sus especificaciones son las siguientes.

- 3 servidores de marca Supermicro y con Quad socket, esto es, que se le pueden colocar 4 procesadores.
- 12 procesadores AMD Opteron 6376, de los cuales cada uno posee 16 cores y son repartidos en 4 procesadores.
- 15 memorias RAM Kingston de 16 GB. Cada servidor tiene 5 memorias de estas, así que en total serían 80 GB para cada uno.
- 6 discos duros Seagate de 2 TB de memoria, de los cuales serían 2 por cada servidor, lo que da un total de 4 TB por servidor.

Cada servidor entonces cuenta con 64 cores, por lo que se optó por repartir las integraciones de manera equitativa en 50 cores, dejando así, 16 disponibles para el correcto funcionamiento del sistema operativo. Esto da un total de aproximadamente 237 integraciones por cada core, para que esto nos dé el total de 11565 que ya se había comentado. Esto quiere decir que tendremos una cantidad total de 11565 condiciones iniciales.

Se procedió de la siguiente manera, se fijaron las condiciones iniciales (c.i.) de 3 planetas (por ejemplo: c, d y e) y se hizo variar las c.i. de un solo planeta (en este caso el b) en los intervalos que aparecen en la *Tabla 3*.

Planeta	Valores de semi-eje mayor (UA)	Valores de excentricidad
Kepler-223b	[0.0763707,0.0779858]	[0.0,0.902722]
Kepler-223c	[0.09268,0.09430]	[0.0,0.803304]
Kepler-223d	[0.121819,0.123434]	[0.0,0.9055836]
Kepler-223e	[0.147781,0.149396]	[0.0,0.962082]

Tabla 3. Condiciones iniciales para el sistema de Kepler-223, es decir, los valores que se barren para el semi-eje mayor y excentricidad de cada planeta para determinar las regiones en las que hay más estabilidad.

```

#!/bin/csh

@ nfin = 237

@ nini = 1

while ($nini < $nfin)
cp All_bigs/big"$nini".in grupol/
  @ nini++
end

#!/bin/csh

@ nfin = 237

@ nini = 1

while ($nini < $nfin)
rm *.dmp *.tmp *.out mercury element *.aei

  set nomin="big$nini.in"
  cp ./nomin ./big.in
  gfortran mercury6_5.for -o mercury
  ./mercury
  set nomsal2="info$nini.ou"
  echo $nomsal2
  mv ./info.out ./nomsal2
  @ nini++
end

```

Figura 11. Shell utilizado para correr las integraciones de todos los planetas de Kepler-223.

La figura 11 representa el proceso que sigue C-Shell para correr las respectivas integraciones, en este caso haría desde la número 1 hasta la 237, por lo que habría 50 de estos archivos para enviar cada una a un core distinto.

6.3 Sistemas inestables

Una vez que se terminaron de realizar dichas integraciones se procedió a realizar una búsqueda con la terminal para verificar cuáles de los archivos generados fueron inestables, es decir, en los que por alguna razón hubo colisiones o algo similar. Esta búsqueda se realizó con el comando de Linux `grep "hit" grupo1/info*.ou`. Y una vez obtenido esto, a su vez se tienen las estables, estas son las que no salieron en la búsqueda con el uso del comando antes mencionado y dependiendo del planeta con el

que se esté tratando (Kepler-223b, Kepler-223c, Kepler-223d o Kepler-223e) se cambiará el nombre de “grupo1” para buscar lo que se requiera.

6.4 Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos con unas simulaciones de 100,000 años en el espacio fase, es decir, que los resultados están graficados en “e” vs “a”. Las condiciones iniciales de la *Tabla 3* fueron elegidas de tal manera que a los valores de excentricidad versus semi-eje mayor de la *Tabla 1* se les sume y reste el valor de 3 veces el radio de Hill de cada planeta, siendo estos dos últimos para cada uno los valores extremos.

Exploramos desde órbita circular hasta excentricidades mayores a 0.9 para explorar todos los posibles planetas, incluyendo los muy excéntricos o muy circulares. Destacando que mientras más grande la excentricidad las órbitas se tienden a cruzar, los sistemas tienden a ser inestables, a menos que estén en resonancia.

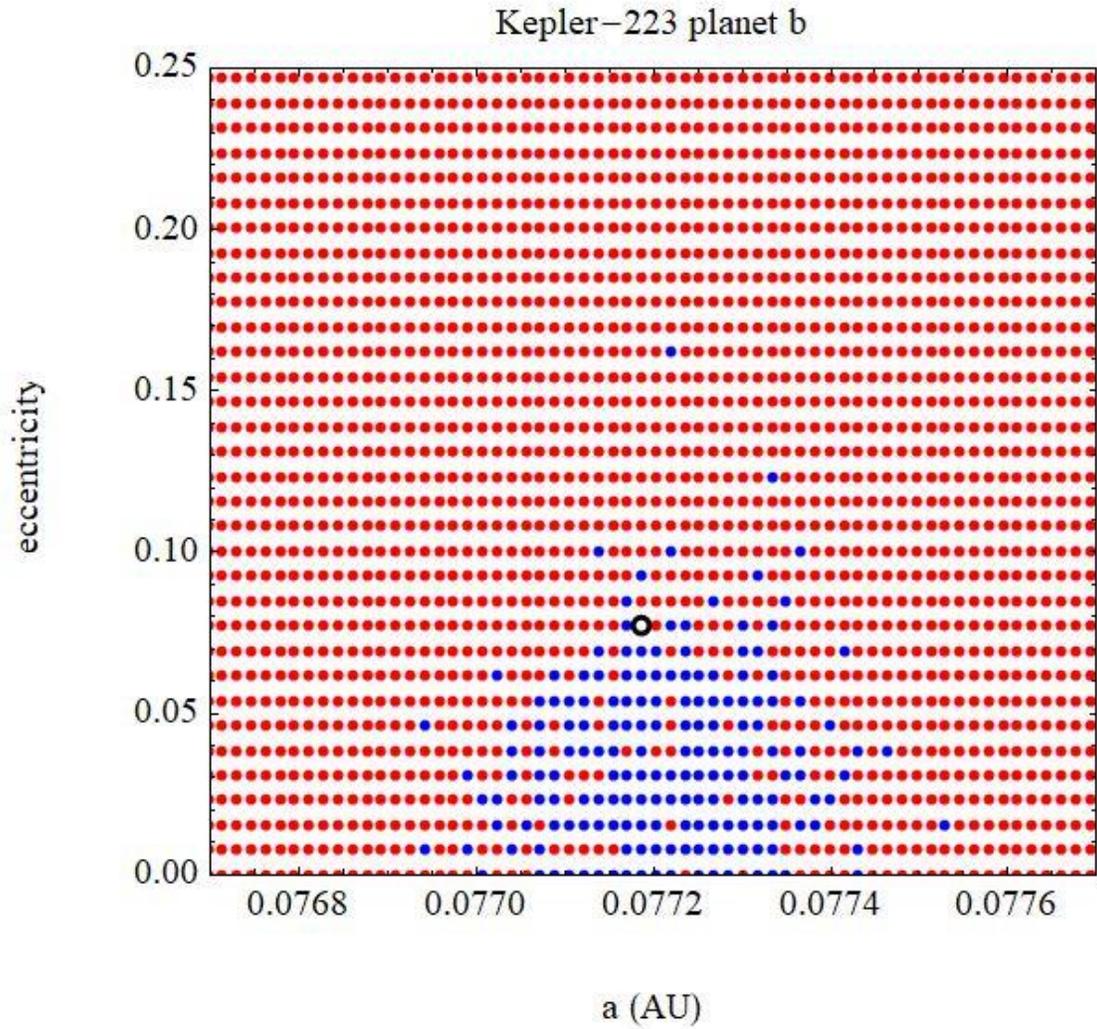


Figura 12. En esta figura se explora la estabilidad del planeta “Kepler-223b” en un diagrama de excentricidad vs semi-eje mayor, este último en unidades astronómicas (AU, por sus siglas en inglés) para el planeta. El círculo de color negro que aparece con coordenadas (0.077 AU, 0.078) corresponde a la condición normal inicial publicada del planeta Kepler-223b. Los puntos azules son los estables y los rojos los inestables.

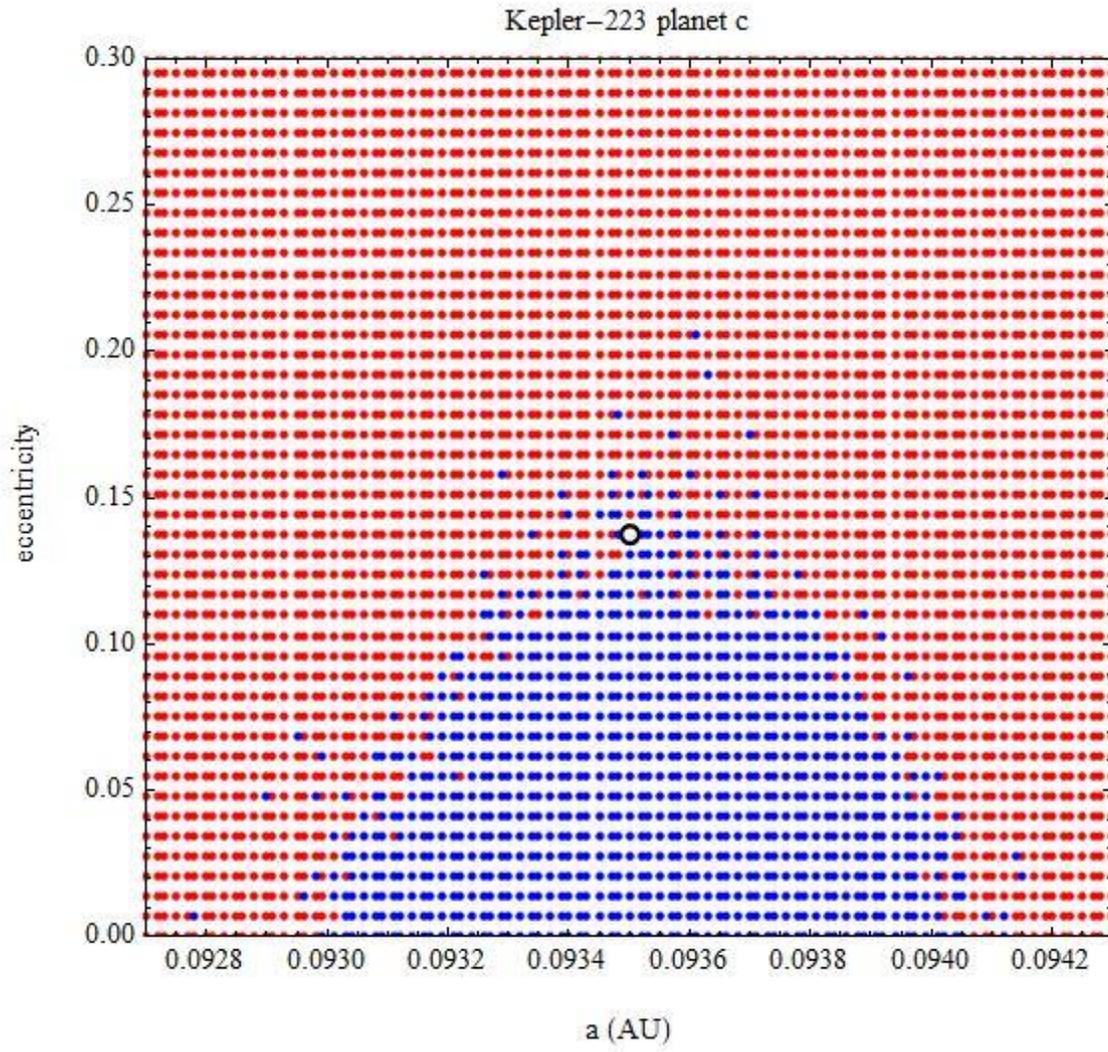


Figura 13. Mismo que para figura 12, pero para el planeta Kepler-223c.

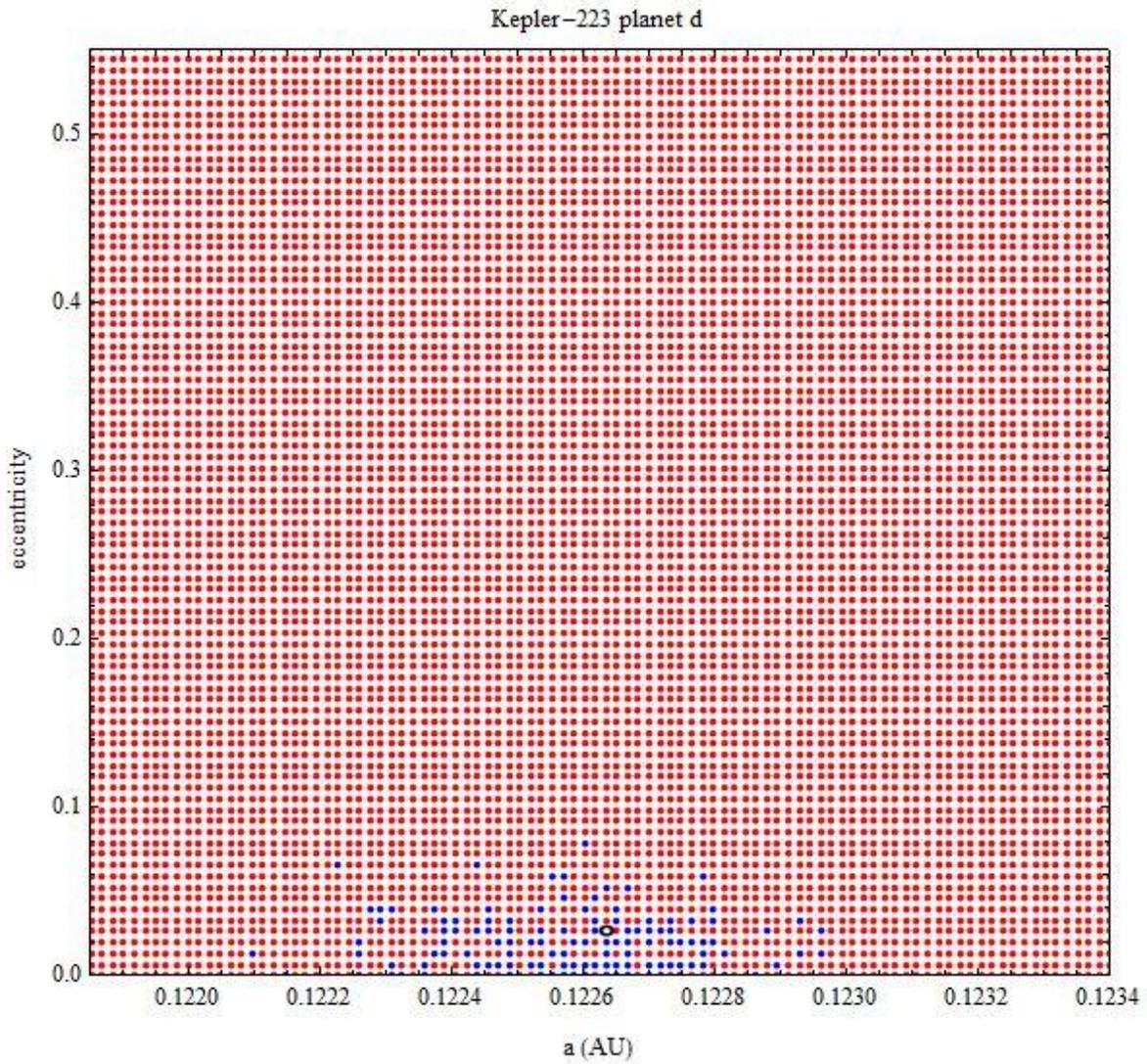


Figura 14. Mismo que para figura 12, pero para el planeta Kepler-223d.

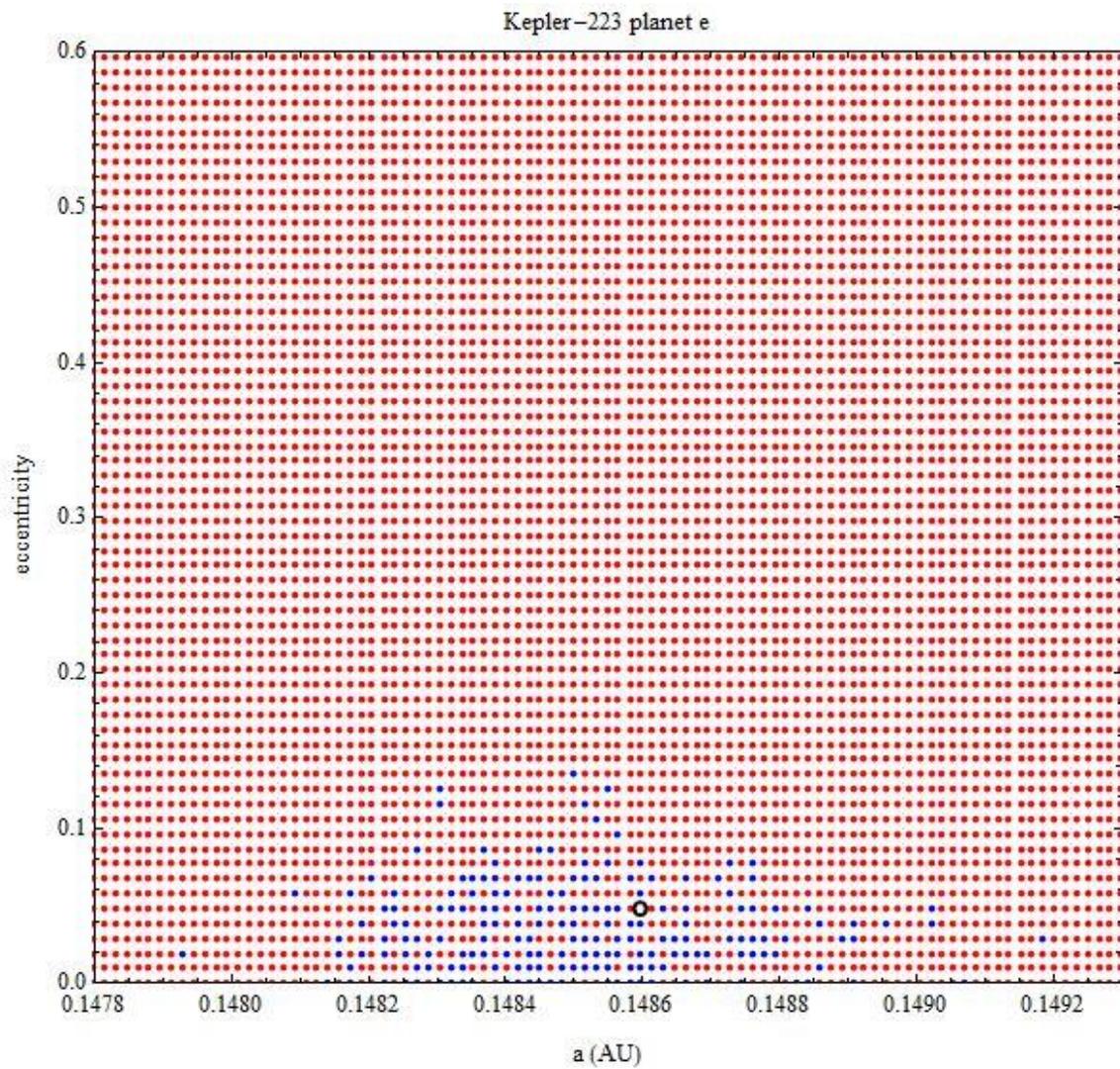


Figura 15. Mismo que para figura 12, pero para el planeta Kepler-223e.

7 Discusión y conclusiones

En esta investigación por primera vez se ha estudiado el ambiente dinámico en el que están inmersos los 4 planetas que se han descubierto hasta la fecha del sistema Kepler-223.

Para poder tener los resultados de manera gráfica se utilizó Mathematica. Se desarrolló un código en Shell que permitía reconocer qué regiones en el espacio eran estables y cuáles no lo eran, así como graficar y localizar el planeta en esta. En las figuras 12 a 15 podemos ver que se grafica la excentricidad contra semi-eje mayor. También se aprecian regiones de distintos colores, siendo las de color rojo las zonas en donde existe inestabilidad para las resonancias y las de color azul lo contrario, es decir, las regiones en las que dé estabilidad para dichas resonancias orbitales y los círculos blancos con contorno negro representan a cada planeta del sistema. En Mercury cuando dos masas colisionan esto aparece en el archivo “info.out” como “planet b was hit by planet c at time...” y cuando hay eyecciones aparece “planet a was ejected from the integration” también en el archivo “info.out”.

De lo anterior, se puede observar claramente que todos los planetas se encuentran dentro de sus respectivas islas de estabilidad, pero a diferencia de lo que uno esperaría de un sistema planetario de esta edad (aprox. 6 Gyr), se encuentran ubicados en un lugar relativamente cercano a la inestabilidad (frontera entre puntos rojos y azules). Con estas condiciones un ligero cambio en alguna de sus excentricidades o semiejes mayores podría alterar todo el sistema, haciendo que algún planeta sea expulsado y muy probablemente eyectando eventualmente a todos los demás planetas, debido a que cada miembro de este está muy cercano al otro (menos de 0.1 UA de separación entre cada planeta). Conociendo lo longevo que es (6 Gyrs), uno pensaría que cada planeta se encontraría más hacia el centro de sus islas, pero la realidad es que están casi en los bordes de estas.

Como se muestra en la figura 12, el planeta Kepler-223b se localiza en la parte superior izquierda de su área de estabilidad. Esta área no tiene una forma tan definida, sin embargo, sí lo suficiente para poder identificarla. Los bordes están algo dispersos y el planeta tiene unos pocos puntos rojos cerca.

Kepler-223c se encuentra en la orilla superior izquierda de su respectiva área de estabilidad. Dicha área es más grande que en los otros casos y el planeta se encuentra en una zona que, a pesar de estar en el borde, tiene puntos más estables.

El área de estabilidad de Kepler-223d tiene una forma más compleja que la de Kepler-223c. Los puntos azules se aglomeran en una región, pero alrededor de estos también hay rojos. Esta área posee zonas donde hay puntos inestables. Su topografía es compleja y el planeta se encuentra rodeado tanto de puntos estables como de inestables, aunque la mayoría son estables, pero tiene frontera con puntos inestables.

En el caso de Kepler-223e hay un área más definida y el planeta se encuentra en la parte superior de derecha de la misma. A su alrededor hay una cantidad aproximadamente similar de puntos estables e inestables. Pero sabemos que si el planeta llegara a ser perturbado, podría llegar a perder su estabilidad.

Este sistema tiene áreas de estabilidad interesantes con formas peculiares. La de Kepler-223c podría ser considerada como un área con topografía más típica de los sistemas estables, pero Kepler-223e tiene una topografía más compleja y el planeta no se ubica tan claramente en configuraciones estables, sino que también puede estar en configuraciones inestables. Las áreas con formas más complejas las poseen los planetas más externos, mientras que las de los internos tienen formas más definidas.

Sabemos casi con seguridad que el sistema se seguirá manteniendo como lo ha hecho hasta ahora porque tiene bastante tiempo. Esto quiere decir que todo lo que podría haber ocurrido dentro de este ya ocurrió. Si algún planeta tuviera que haber sido eyectado o que las condiciones hubieran sido distintas, como por ejemplo, las ideales para que no existiera resonancia orbital, hubiera ocurrido hace mucho tiempo. Ahora mismo que han pasado tantas cosas dentro de él, es casi imposible que se vaya a perder la estabilidad.

También se puede apreciar que la estabilidad se encuentra alrededor de la resonancia, ya que si eso no fuera el caso, dicho sistema no se encontraría en este mencionado estado orbital.

Existe la posibilidad de que el sistema tenga planetas que todavía no haya sido descubierto, siendo más probable el caso de que sea externo a los 4 ya conocidos y que esté perturbándolos. Y a su vez, debe ser muy estable debido a la edad de dicho sistema. Este sería un buen trabajo a futuro.

Podemos concluir entonces que Kepler-223 mantendrá su estado actual, siempre y cuando no ocurra algún suceso ajeno a él que pueda alterarlo completamente junto con sus elementos.

8 Bibliografía

- Polashenski, Michael J. (2001). A Brief History of the Telescope and Ideas for Use in the High School Physics Classroom. *ASTR699*, 2, 3.
- Murray C. D., Dermott S. F. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 9, 10, 11, 12, 116, 117, 323.
- Whiteside, D.T. (1970). Before the Principia: the maturing of Newton's thoughts on dynamical astronomy, 1664-1684. *Journal for the History of Astronomy*, 14.
- Sean M. Mills, et. al. (2016). A resonant chain of four transiting, sub-Neptune planets. *Nature* 533, 509, 510.
- Lissauer, J. J. (2014). Validation of Kepler's multiple planet candidates. II. Refined statistical framework and descriptions of systems of special interest. *The Astrophysical Journal* 784(1), 28, 48.
- Kepler-223 b. 10 de junio de 2020, de NASA Sitio web:
- MacDonald, Mariah G., Dawson, Rebeka I. (2018). Three pathways for observed resonant chains. *The Astronomical Journal* 156(5), 8.
- Candy, Jeff (1991). Symplectic integrators for long-term integrations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 52, 221.
- Brugnano, Luigi, et. al. (2012). On the Existence of Energy-Preserving Symplectic Integrators Based upon Gauss Collocation Formulae. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50(6), 2897,2914.
- Chambers, J. E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 304, 793, 795
- Mills, Sean Martin (2017). Detecting and interpreting the dynamical evolution of transiting multiplanet systems. 41, 75.
- Marcus Chown. (2011). Two planets found sharing one orbit. 19 de enero de 2021, de New Scientist Sitio web: <https://www.newscientist.com/article/dn20160-two-planets-found-sharing-one-orbit/>
- Encyclopaedia Britannica. (1998). Chaos theory. 26 de enero de 2021, de Encyclopaedia Britannica Sitio web: <https://www.britannica.com/science/chaos-theory>
- Fractal Foundation. What is Chaos Theory?. 26 de enero de 2021, de Fractal Foundation Sitio web: <https://fractalfoundation.org/resources/what-is-chaos-theory/>
- Holman, Mathew J. & Murray, Norman W. (2004). The Use of Transit Timing to Detect Extrasolar Planets with Masses as Small as Earth. 2

- Transit Method. Mayo 11, 2021, de Las Cumbres Observatory Sitio web: <https://lco.global/spacebook/exoplanets/transit-method/>