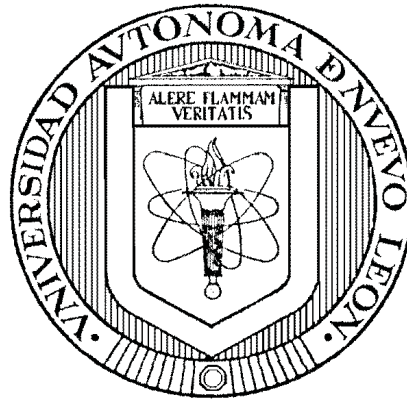


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



GENERACIÓN Y SEGUIMIENTO DE ESTRATEGIAS DE OPERACIÓN  
PARA EL AHORRO DE COMBUSTIBLE Y DISMINUCIÓN DE  
CONTAMINANTES EN MOTORES FUEL INJECTION

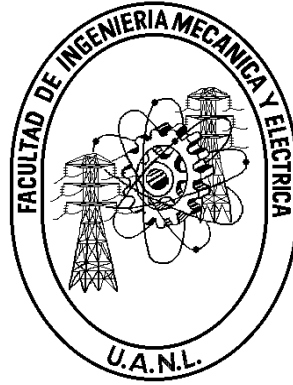
POR  
ING. OMAR JOSUÉ AMAYA MOLINA

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD  
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DEL 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



GENERACIÓN Y SEGUIMIENTO DE ESTRATEGIAS DE OPERACIÓN  
PARA EL AHORRO DE COMBUSTIBLE Y DISMINUCIÓN DE  
CONTAMINANTES EN MOTORES FUEL INJECTION

POR  
ING. OMAR JOSUÉ AMAYA MOLINA

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD  
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DEL 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Generación y seguimiento de estrategias de operación para el ahorro de combustible y disminución de contaminantes en motores fuel injection**” realizada por el alumno **Ing. Omar Josué Amaya Molina**, matrícula número **1572373** sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control Automático.

El Comité de Tesis

---

Asesor  
Dr. David Alejandro Díaz Romero

---

Coasesor:  
Dr. Efraín Alcorta García

---

Coasesor:  
Dr. Anand Sánchez Orta

---

Vo. Bo.  
Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios de Posgrado  
Cd. Universitaria, a Octubre del 2012

*Este trabajo se lo dedico a...*

# Agradecimientos

A CONACYT por el apoyo otorgado para llevar a cabo mis estudios de maestría sin los cuales no hubiera sido posible realizar este trabajo.

*“El hombre encuentra a Dios detrás de cada puerta que la ciencia logra abrir”*

**Albert Einstein**

Omar Josué Amaya Molina  
Septiembre del 2012

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Omar Josué Amaya Molina, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2011

**Profesor Asesor: David Alejandro Díaz Romero**

En este trabajo de investigación se presentan técnicas de control no lineal para el control de la velocidad aplicadas al modelo de un motor de combustión interna, con el fin de generar estrategias que nos puedan ayudar a la disminución de contaminantes emitidos a la atmósfera. El estudio del problema toma ventaja de la propiedad de planitud del sistema para generar una ley de control no lineal que nos pueda ayudar a generar trayectorias de seguimiento de velocidad de referencia de manera rápida y sencilla.

En la mayoría de los trabajos estudiados en la literatura no se consideran las variaciones de la dinámica de la temperatura en el múltiple de entrada del motor, mismas que repercuten en fluctuaciones de la velocidad a manera de perturbación, colocándolas por debajo o por encima de la referencia, el fenómeno toma más influencia debido a la temperatura inicial del múltiple la cual se percibe al momento de arrancar el motor.

Al incluir la dinámica de la temperatura se puede tener un control más preciso sobre las emisiones ya que se utiliza además la técnica de recirculación de gases de escape (EGR por sus siglas en inglés) que si bien, solo reducen las emisiones de  $NO_x$  un 40% una buena lógica de activación de la válvula resulta de gran ayuda.

# Índice General

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Índice General	VI
Índice de Tablas	IX
Índice de Figuras	X
Notación y acrónimos	XII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	3
1.1.1. Principales tecnologías disponibles . . . . .	3
1.2. Motivación . . . . .	5
1.3. Objetivo . . . . .	7
1.4. Organización de la tesis . . . . .	7
<b>2. Sistemas no lineales</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Modelo matemático . . . . .	10
2.3. Nociones de sistemas no lineales . . . . .	10
2.3.1. Puntos de equilibrio . . . . .	12
2.4. Sistemas lineales . . . . .	13
2.5. Nociones de geometría diferencial . . . . .	15

2.6.	Linealización por realimentación . . . . .	17
2.6.1.	Linealización entrada-estado . . . . .	17
2.6.2.	Linealización entrada salida . . . . .	19
2.7.	Conclusiones . . . . .	21
<b>3.</b>	<b>Sistemas planos</b>	<b>22</b>
3.1.	Introducción . . . . .	22
3.2.	Planitud diferencial . . . . .	23
3.3.	Planitud de sistemas linealizables por realimentación . . . . .	25
3.4.	Ley de control de prealimentación . . . . .	26
3.5.	Generación de trayectorias . . . . .	27
3.6.	Conclusiones . . . . .	28
<b>4.</b>	<b>Descripción del modelo del motor</b>	<b>29</b>
4.1.	Introducción . . . . .	29
4.2.	Acelerador . . . . .	30
4.3.	Múltiple de entrada . . . . .	31
4.4.	Flujo de aire al interior del cilindro. . . . .	32
4.5.	Carrera de admisión y compresión . . . . .	32
4.6.	Torque y aceleración . . . . .	34
4.7.	Simulación del sistema en lazo abierto . . . . .	35
<b>5.</b>	<b>Estrategias para el control del motor F.I.</b>	<b>37</b>
5.1.	Introducción . . . . .	37
5.2.	Linealización por realimentación estática . . . . .	38
5.2.1.	Asignación de polos para el control auxiliar $v$ . . . . .	42
5.3.	Observador como estimador de parámetros . . . . .	43
5.3.1.	Identificación de la función $\dot{m}_{ao}$ . . . . .	43
5.4.	Seguimiento de trayectorias . . . . .	46
5.4.1.	Modelo de referencia . . . . .	47
5.4.2.	Restricciones para la entrada de control $u$ . . . . .	49
5.5.	Trayectorias de pruebas . . . . .	50
5.6.	Linealización basada en planitud . . . . .	53



5.7. Conclusiones . . . . .	58
<b>6. Efecto de la dinámica de la temperatura y EGR en el modelo</b>	<b>59</b>
6.1. Introducción . . . . .	59
6.2. Modelo simplificado para control y observación . . . . .	60
6.3. Efecto de la temperatura en la dinámica del modelo . . . . .	61
6.4. Efecto de la válvula EGR en la dinámica del modelo . . . . .	62
6.5. Conclusiones . . . . .	65
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>66</b>
7.1. Trabajo futuro . . . . .	67
<b>A. Geometría diferencial</b>	<b>68</b>
A.1. Realimentación dinámica y estática . . . . .	69
A.2. Difeomorfismo . . . . .	69
A.3. Derecha inversa . . . . .	73
<b>B. Observadores</b>	<b>74</b>
B.1. Observador como estimador de parámetros . . . . .	74
<b>C. Motores de combustión interna</b>	<b>77</b>
C.1. Eficiencia volumétrica . . . . .	77
C.2. Proceso de intercambio de gases ( $\dot{m}_{ao}$ ) . . . . .	78
C.3. Proceso de admisión y exhaustión en un motor SI . . . . .	79
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Índice de Tablas

1.1. Principales gases contaminantes . . . . . 2

# Índice de figuras

1.1. Combustión en los motor a gasolina y Diésel . . . . .	2
2.1. Representación de un sistema no lineal en diagrama de bloques. . . . .	11
2.2. Representación de un sistema lineal en diagrama de bloques. . . . .	14
3.1. Correspondencia entre trayectorias y curvas arbitrarias. . . . .	25
4.1. Esquema básico de un motor de 4 cilindros . . . . .	30
4.2. Ciclo de cuatro tiempos . . . . .	33
4.3. Velocidad del cigüeñal en lazo abierto. . . . .	36
4.4. Torque de carga $\tau_l$ . . . . .	36
4.5. Presión del múltiple de entrada en lazo abierto. . . . .	36
5.1. Representación en diagrama de bloques de la realimentación. . . . .	42
5.2. Estimación de la función $\dot{m}_{ao}$ . . . . .	45
5.3. Error de estimación $\dot{m}_{ao}$ . . . . .	45
5.4. Velocidad regulada. . . . .	46
5.5. Presión en el múltiple de entrada para la velocidad regulada. . . . .	46
5.6. Ángulo del acelerador para velocidad regulada. . . . .	46
5.7. Calibración de la constante de tiempo $\tau$ para el seguimiento de escalón de referencia. . . . .	50
5.8. Ángulo del acelerador. . . . .	50
5.9. Seguimiento de la velocidad de referencia $y_{d1}$ . . . . .	51
5.10. Presión del múltiple de entrada para la referencia $y_{d1}$ . . . . .	51
5.11. Posición del acelerador para alcanzar la referencia $y_{d1}$ . . . . .	51
5.12. Seguimiento de la velocidad de referencia $y_{d2}$ . . . . .	52
5.13. Presión del múltiple de entrada para la referencia $y_{d2}$ . . . . .	52

5.14. Posición del acelerador para alcanzar la referencia  $y_{d2}$ . . . . . 52

5.15. Realimentación basada en planitud. . . . . 54

5.16. Velocidad regulada mediante la ley de control basada en planitud. . . . . 55

5.17. Presión del múltiple de entrada para la ley de control basada en planitud. . . . . 55

5.18. Posición del acelerador para la ley de control basada en planitud. . . . . 55

5.19. Seguimiento de la velocidad de referencia  $y_{d1}$  basada en planitud. . . . . 56

5.20. Presión del múltiple de entrada para la referencia  $y_{d1}$ . . . . . 56

5.21. Ángulo del acelerador para la referencia  $y_{d1}$ . . . . . 56

5.22. Seguimiento de la velocidad de referencia  $y_{d2}$ . . . . . 57

5.23. Presión del múltiple de entrada para la referencia  $y_{d2}$ . . . . . 57

5.24. Ángulo del acelerador para la referencia  $y_{d2}$ . . . . . 57

6.1. Diagrama simplificado de los múltiples . . . . . 60

6.2. Variación de la presión en el múltiple de entrada debida a la temperatura. . . . . 61

6.3. Velocidad del motor debida a cambios en la presión del múltiple de entrada. . . . . 61

6.4. Condiciones de velocidad para la activación de la valvula EGR . . . . . 63

6.5. Masas de aire de recirculación . . . . . 63

6.6. Temperatura en el múltiple de entrada por el uso de la EGR . . . . . 64

6.7. Presión en el múltiple de entrada debido a el uso de la valvula EGR . . . . . 64

C.1. Sistema cilindro-pistón. . . . . 80

# Notación y acrónimos

MCI	Motor de combustión interna.
FI	Fuel injection.
EGR	Exhaust gas recirculation.
EPA	Environmental protection agency.
EURO	Norma europea de contaminación.
HCCI	Homogeneous charge compression ignition.
SCR	Reducción catalítica selectiva.
IMC	Modelo interno de control.
VNT	Turbina de geometría variable.
SISO	Single input single output.
$\mathbb{R}$	Campo de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con elementos reales.
$\dot{x}$	La derivada respecto al tiempo de la variable $x$ .
$\in$	Pertenece a.
$u$	Entrada del sistema.
$U$	Señal de control en el punto de equilibrio.
$y$	Salida del sistema.
$\rightarrow$	Tiende a.
$C^\infty$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables.

$A$	Matriz de estado.
$B$	Matriz de entrada.
$C$	Matriz de salida.
$D$	Matriz de transmisión directa.
$L_f h$	Derivada de Lie.
$\rho$	Grado relativo.
$v$	Entrada de control auxiliar
$z_p$	Salida plana.
$y_r$	Señal de referencia deseada.
$\dot{m}_{ai}$	Flujo de masa dentro del múltiple de entrada.
$\dot{m}_{ao}$	Flujo de aire de salida del múltiple de entrada.
$\dot{m}_{out}$	Flujo de gas de escape a la atmósfera.
$\dot{m}_{egr}$	Flujo de gas de recirculación.
$m_a$	Masa de aire en el cilindro para combustión.
$\lambda$	Relación aire combustible.
$\sigma$	Avance de la chispa.
$\theta$	Ángulo del acelerador.
$P_m$	Presión en el múltiple de entrada.
$P_{atm}$	Presión atmosférica.
$R$	Constante específica de los gases.
$T_{min}$	Temperatura del múltiple de entrada.
$V_{min}$	Volumen en el múltiple de entrada.
$\omega$	Velocidad angular.
$\dot{\omega}$	Aceleración angular del motor.
$\tau_{eng}$	Torque generado por el motor.
$\tau_l$	Torque de carga variable.
$J$	Momento de inercia del motor.

# Capítulo 1

## Introducción

El motor de combustión interna (MCI) es imprescindible en la sociedad actual, ya que es una de las principales fuentes de potencia cuyo uso va desde la propulsión marina, estaciones de generación eléctrica, herramientas manuales, e intermedias a estas se encuentran los motores de automoción usados en automóviles camiones y motocicletas. Al motor de combustión interna se le augura su uso al menos en los próximos 20 años [1], [2] debido a la integración y abaratamiento de tecnologías cero emisiones para locomoción terrestre (motores eléctricos).

El sistema de inyección de combustible (FI) es utilizado tanto en motores a gasolina como en Diésel, aunque en estos últimos este sistema fue siempre utilizado. La diferencia que existe entre ambos es el tipo de ciclo; el de gasolina es de explosión de la mezcla aire-combustible y el de Diésel es de combustión espontánea debido a la alta presión en el interior del cilindro, (Figura 1.1).

Si la combustión en los motores fuera completa y estequiométrica, es decir una proporción ideal de aire con combustibles compuestos exclusivamente de carbono e hidrógeno ( $C_aH_b$ ), las emisiones resultantes serían únicamente nitrógeno ( $N_2$ ), dióxido de carbono ( $CO_2$ ) y vapor de agua ( $H_2O$ ). Pero esto no es así, la combustión siempre es incompleta.

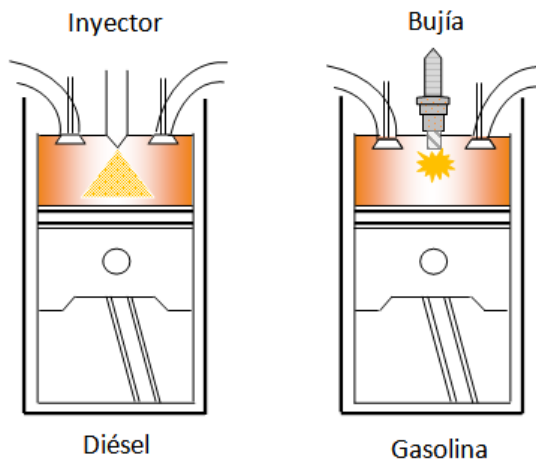


Figura 1.1: Combustión en los motor a gasolina y Diésel

Entre las emisiones contaminantes arrojadas por los MCI destacan por cantidad y toxicidad las mostradas en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1: Principales gases contaminantes

Contaminante	Causa	Propiedades
$NO_x$	Altas temperaturas de combustion	Tóxico
$CO, CO_2$	Motores de encendido por chispa	Asfixiante
$SO_2$	Contenido de azufre en combustibles	Irritante de la mucosa
$HC$	Combustion incompleta	Cancerígeno

Aunque actualmente la cantidad de emisiones de un automóvil son relativamente insignificantes, las grandes concentraciones en las ciudades implican una elevada contaminación atmosférica. Por lo que existen normas y legislaciones para regular tal problema de las cuales destacan entre otras las siguientes: TIER, EPA, EURO, cada vez más rigurosas, obligando a investigadores y técnicos en el desarrollo de nuevas tecnologías y con ello, nuevas estrategias de control así como también nuevos procesos de combustion HCCI.



## 1.1. Antecedentes

Desde su invención, hace más de 130 años, el motor de combustión interna ha sido modificado para adaptarse a nuevas exigencias que el paso del tiempo le ha impuesto. Las dos condiciones actuales más importantes son: la emisión de contaminantes y el consumo de combustible.

### 1.1.1. Principales tecnologías disponibles

Los desarrollos tecnológicos que han permitido conseguir una reducción en las emisiones contaminantes se pueden dividir en dos grandes grupos [3]:

1. **Soluciones activas:** Son estrategias de reducción de emisiones directamente en el interior del cilindro mediante la modificación en los sistemas de gestión de aire y de inyección tales como [3]:
  - **Turbo de sobrealimentación:** Con turbinas de geometría fija, variable [4], con enfriador y en los últimos tiempos sobrealimentación en varias etapas, tiene como función aprovechar la energía residual de los gases de escape, tanto en presión como en temperatura para introducir más aire dentro del cilindro, consiguiendo con este fin una mejora volumétrica, el efecto sería como manejar una mayor cilindrada.
  - **Recirculación de Gases de Escape EGR:** Sus posteriores evoluciones (EGR refrigerado [5], EGR de baja presión), así como la introducción de sistemas de distribución variable que flexibilizan el proceso de renovación de la carga. Se trata de un dispositivo anticontaminante que, en determinadas circunstancias, hace que parte de los gases de escape vuelvan a entrar en la cámara de combustión. Disminuyendo la temperatura de combustión y por tanto los gases emitidos a la atmósfera sean menos nocivos, debido a que el aire que ingresa ahora en los cilindros tiene menos porcentaje de oxígeno comparado con el exterior, lo que ayuda a reducir la emisión de óxido

de nitrógeno  $NO_x$ . El uso de catalizadores en los motores Diésel no es efectivo para la eliminación del  $NO_x$ , por lo que es necesario el sistema EGR. En los motores a gasolina, se usan en combinación con las nuevas tecnologías de inyección directa.

- **Inyección:** Lo que respecta a las soluciones referidas a los sistemas de inyección cabe destacar el incremento generalizado de la presión de inyección, la reducción en el diámetro de las toberas, el incremento en el número de orificios de las toberas y, por último y de manera destacada, la introducción de estrategias de inyección múltiple. Este cambio en la tecnología implica que se puede modular el proceso de mezcla y, por tanto, los procesos de combustión y emisiones.

2. **Soluciones pasivas:** Estas estrategias están basadas en la reducción de contaminantes por medio de la eliminación o retención y posterior eliminación de las emisiones contaminantes una vez producidas en el interior de la cámara de combustión, mediante la instalación de dispositivos de post-tratamiento específicos en la línea de escape. Dentro de este tipo de soluciones pasivas la distinción se realiza en función del contaminante que eliminan [3].

- **Filtro de partículas** Almacena y posteriormente quema las partículas de hollín generadas durante algunas fases de la combustión. Utiliza un sistema llamado regeneración y emplea un aditivo a base de cerina que ayuda a bajar la temperatura de combustión y a elevar la velocidad de combustión del hollín acumulado en filtro.
- **Reducción catalítica selectiva SCR:** Reduce las emisiones que se producen durante la combustión de un motor mediante un convertidor catalítico integrado en el sistema de escape. El funcionamiento a simple vista resulta muy sencillo puesto que lo que hace es convertir el  $NO_x$  en nitrógeno diatómico ( $N_2$ ) y agua ( $H_2O$ ) mediante un agente reductor llamado urea.

Las soluciones pasivas como método de reducción de el contaminante deseado tienen una alta eficiencia comparadas con las soluciones activas, sin embargo se tienen inconvenientes derivados de su aplicación, tales como: aumento del consumo de combustible y regeneración de filtros, que se ven reflejados en el aumento del costo del motor, debido a la tecnología instalada, lo que implica un mayor coste de mantenimiento para el usuario final.

## 1.2. Motivación

El los últimos 30 años el motor de combustión interna se ha adecuado a los requisitos ambientales y por ende su rendimiento ha mejorado considerablemente, como consecuencia la sofisticación en las estrategias de control y de combustión ha aumentado durante este periodo, siendo estas las claves en el cumplimiento de tales exigencias.

Las siguiente lista corresponde a una revisión de algunos trabajos relacionados para el control de la velocidad del motor de combustión interna y de algunos aditamentos pasivos.

- **Mohammad Khalid Khan, et al, *Robust speed control of an automotive engine using second order sliding modes, 2001***

Tratan el problema de control de velocidad del motor de un automóvil, utilizando un algoritmo basado en técnicas de modos deslizantes llamado “super twisting” el cual no requiere de las derivadas de tiempo de las variable de deslizante, la cual implica la estimación de la aceleración del motor. Asociado a esto la propiedad de planitud permite la la construcción del controlador por modos deslizantes utilizando solo la medida de la velocidad del motor y por tanto no requiere el uso de observadores.

- **R. Nitsche et al *Nonlinear internal model control of diesel air systems, 2007***  
Propone la combinación de dos enfoques conocidos: Modelo interno de control (IMC) y

control de prealimentación basado en planitud. Para tratar el problema de control y el de seguimiento de trayectorias de la presión de sobrealimentación de un motor Diésel turbocargado con turbina de geometría variable (VNT). La idea principal del IMC es la de incluir el modelo de la planta en el controlador de realimentación. Si el modelo representa perfectamente a la planta y no ocurren perturbaciones entonces el IMC genera una ley de control de prealimentación pura.

- **Jonathan Chauvin, et al, *Motion planning for experimental airpath control of a diesel homogeneous charge-compression ignition engine, 2008***

En el cual presentan una estrategia basada en la planeación de trayectorias para el control de flujo de aire de un motor Diésel turbocargado equipado con EGR. Cuyo objetivo es gestionar el aire y las masas de gases quemados en el cilindro. El modelo considerado usa solamente la ecuación de balance de masas para el múltiple de entrada. Las dinámicas completamente actuadas son fácilmente invertibles, lo que implica la implementación de leyes de control directas en lazo abierto. El enfoque es complementado con tablas experimentales de consulta, derivadas de las necesidades del conductor al problema de diseñar transiciones entre los puntos de operación.

Es difícil concebir el motor de combustión interna de hoy día sin el uso de *sistemas electrónicos de control*, estos han sido un factor importante en el ahorro de combustible y en el cumplimiento de las normas anticontaminación cada vez más exigentes. Estos sistemas monitorean todas las entradas de sensores en los puntos críticos del motor, con el fin de calcular los parámetros de funcionamiento y controlar las variables del motor, asegurando un rendimiento óptimo.

### 1.3. Objetivo

El objetivo principal de esta tesis es la generar estrategias de control de velocidad para motores FI que puedan ayudar a la disminución de consumo de energía y por ende contaminantes, principalmente  $NO_x$ . Utilizando controladores basados en técnicas no lineales, tales como geometría diferencial, y especialmente aprovechando la propiedad de *planitud* la cual conduce a un interesante punto de vista de diseño de control y planificación de trayectorias.

### 1.4. Organización de la tesis

En el segundo capítulo se presenta los conceptos básicos de sistemas no lineales, las notaciones de los vectores, matrices y espacios que los componen, se describen en forma breve conceptos tales como: modelos matemáticos, puntos de equilibrio y sistemas lineales, ya que todas estas definiciones serán utilizados como una herramienta para el estudio de los temas subsecuentes así como también en el tratamiento del modelo matemático del motor de combustión interna FI.

En el tercer capítulo se introduce a la *planitud diferencial*, se plantean las condiciones suficientes y necesarias para que un sistema sea *diferencialmente plano*, se demostrará que si un sistema no lineal es linealizable por realimentación, entonces posee la propiedad de planitud diferencial, se muestra *grosso modo* la *equivalencia geométrica* de las *curvas de salidas planas* y su correspondencia con los espacios de *estados* y de *entradas*, que nos ayudaran a generar *trayectorias* para llevar a los sistemas no lineales de un punto a otro en el caso de que así se requiera, además de como es posible aprovechar esta propiedad para generar una ley de control de *prealimentación* que nos permita mejorar el desempeño y (la estabilidad) del modelo en el seguimiento de una trayectoria cualquiera.

En el cuarto capítulo se describen los 5 elementos clave y las ecuaciones empíricas que conforman el modelo matemático del motor FI, y simulaciones del sistema en lazo abierto.

El quinto capítulo se divide en dos partes, en la primera, se linealiza al modelo del motor de combustión interna FI por medio de la técnica de *realimentación* de la *salida* que nos va a permitir resolver el problema de *regulación* a una determinada velocidad constante para el motor, posteriormente para tratar el problema de *seguimiento de trayectorias* se hace uso de un *modelo de referencia* que nos provee un estimado de la aceleración angular del motor necesaria para lograr el seguimiento de una referencia dada. Se hace uso de un observador para *estimar* la cantidad de aire que deja el múltiple de entrada  $\dot{m}_{ao}$ . En la segunda parte de este capítulo se encuentra la *salida plana* del modelo del motor FI que parametriza a los estados y entradas del mismo, lo cual nos permitirá la construcción de una *ley de control de prealimentación* para estabilizar al sistema, para la construcción de dicha ley se requiere el uso del parámetro estimado  $\dot{m}_{ao}$  mediante un *observador*, el problema de seguimiento de trayectorias para esta segunda parte del capítulo se resuelve con el mismo modelo de referencia mencionado anteriormente. Finalmente se compara el desempeño de ambos controles.

En el sexto capítulo se hace la adición de la *dinámica de la temperatura* del múltiple de entrada del modelo del MCI, y se diseñará una estrategia de activación de la válvula EGR bajo ciertas condiciones de demanda de velocidad del conductor, y mediante simulación se observa la repercusión de dicha válvula en la temperatura del múltiple.

En el séptimo y último capítulo se presentan las conclusiones y trajo a futuro.

# Capítulo 2

## Sistemas no lineales

### 2.1. Introducción

En este capítulo se presentan conceptos fundamentales en el área de control no lineal, ya que con la ayuda de estos será posible hacer una extensión al estudio de sistemas que gozan de la propiedad de *planitud diferencial* la cual se abordará posteriormente.

La teoría de sistemas de control se ocupa de analizar y diseñar componentes que actúen en un determinado sistema, de tal manera que este tenga un comportamiento deseado [6]. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento.

La teoría de sistemas no lineales de control ha experimentado en las últimas dos décadas una gran expansión reflejada por un número rápidamente creciente de artículos y libros de texto de carácter científico, esto debido a el crecimiento de la tecnología que es cada vez mas sofisticada.

## 2.2. Modelo matemático

El punto de partida en el análisis de un sistema real de control es su representación por un modelo matemático, obtenido mediante leyes o relaciones de tipo físico, químico, entre otras. Es decir una representación abstracta realizada en términos de simbología matemática (ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, en diferencias, etc).

Este modelo debe representar las propiedades “más importantes” relativas al comportamiento dinámico (en el tiempo) del sistema, para tener una idea de como regular o controlar el sistema real.

## 2.3. Nociones de sistemas no lineales

Los sistemas no-lineales con una sola entrada y una sola salida (SISO) pueden ser representados por,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

Donde  $\dot{x} = dx/dt$  representa la tasa de variación de la variable  $x$  respecto al tiempo,  $x(t)$  es una función vectorial que representa el *estado del sistema*  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ; la *entrada* del sistema esta dada por  $u(t)$  la cual es una función escalar  $u(t) \in \mathbb{R}$ . La variable  $y(t)$  es también una función escalar que describe la salida del sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}$ .

Las funciones  $f(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  son funciones continuas, diferenciables al menos una vez con respecto a cada uno de sus argumentos, definidas de tal forma que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

El sistema no lineal se puede representar mediante el diagrama de bloques mostrado en la Figura 2.1



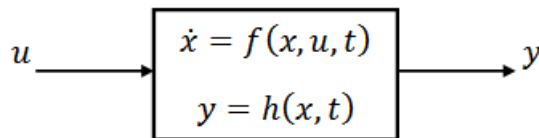


Figura 2.1: Representación de un sistema no lineal en diagrama de bloques.

Si se considera el sistema

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.3.2)$$

en donde se ha supuesto que no interesa expresar la salida y que la entrada es función de los estados, entonces:

**Definición 2.3.1.** *Un sistema es autónomo si la expresión (2.3.2) es independiente del tiempo. Es decir  $\dot{x} = f(x)$ , caso contrario el sistema es no autónomo.*

En general, un sistema no-lineal debe tener las siguientes propiedades para cada entrada  $u(t)$ . Refiérase al Apéndice A.

- i) Existencia: tener a lo menos una solución (continuidad de  $f$ ).
- ii) Unicidad: tener sólo una solución (condición de Lipschitz).

El sistema no lineal de una entrada y una salida SISO dado por (2.3.1) puede ser representando de la forma afín (lineal en el control) como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

donde  $f(x) \in C^\infty$  y  $g(x) \in C^\infty$  son campos vectoriales, esta representación sera empleada en capítulos posteriores.

### 2.3.1. Puntos de equilibrio

Los *puntos de equilibrio* o *trayectorias de equilibrio* de un sistema no lineal se obtienen al resolver la ecuación  $\dot{x} \equiv 0$ , en la expresión (2.3.1). Entonces se tiene lo siguiente:

$$f(X(U), U) \equiv 0 \quad (2.3.4)$$

donde se ha reemplazado el estado  $x(t)$  por  $x(t) = X = X(U)$ .

A partir de (2.3.4) resulta evidente que, para calcular el punto de equilibrio  $(X, U)$ , se tiene que resolver una ecuación implícita que depende de la señal de control en el equilibrio, dada por el valor de  $U$ .

Considerando el sistema de ecuaciones diferenciales descritas por (2.3.1) que poseen puntos de equilibrio constantes, los cuales están dados por:

$$u(t) = U; \quad x(t) = X(U); \quad y(t) = Y(U) = h(X(U)) \quad \forall \quad t. \quad (2.3.5)$$

Por lo que el punto de equilibrio está parametrizado en función de la señal de control constante  $U$ .

Pueden existir múltiples puntos de equilibrio, con o sin sentido físico, o incluso pudiera no existir tal punto de equilibrio constante (caso patológico).

Los siguientes ejemplos fueron tomados de [6]

**Ejemplo 2.3.1.** *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{x(t)} + u(t) \\ y &= x(t) \end{aligned}$$

Si  $u = U = 0$ , no existe ningún punto de equilibrio para la variable de estado  $x(t)$ , sin embargo, si  $u = U \neq 0$  entonces sí existe un punto de equilibrio, el cual toma valor  $x(t) = X(U) = -1/U$

**Ejemplo 2.3.2.** *El sistema*

$$\dot{x} = u(x^2 - 2)$$

$$y = x$$

tiene para  $u = U \neq 0$  dos puntos de equilibrio ubicados en  $x = \pm\sqrt{2}$ . Pero, si  $u = U = 0$  entonces el sistema tiene infinitos puntos de equilibrio, ya que para cualquier  $x = X = cte$ , se cumple que  $dx/dt = 0$ .

## 2.4. Sistemas lineales

El concepto de punto de equilibrio es importante tanto en sistemas lineales como no lineales, ya que si se linealizan las ecuaciones descritas por (2.3.1) alrededor de un punto de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.4.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.4.2)$$

donde  $A(t)$  se denomina matriz de estado  $B(t)$ , matriz de entrada,  $C(t)$  matriz de salida y  $D(t)$  matriz de transmisión directa. En la figura 2.2 se muestra la representación del sistema lineal por medio de diagrama de bloques

Un sistema es lineal si se aplica el principio de superposición, es decir, la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entrada diferentes es la suma de las

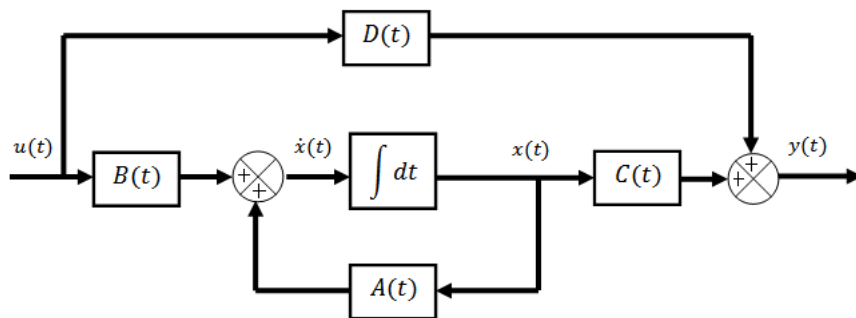


Figura 2.2: Representación de un sistema lineal en diagrama de bloques.

dos respuestas individuales. Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

Si las funciones vectoriales  $f$  y  $g$  de (2.3.3) no involucran el tiempo  $t$  explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante en el tiempo, en este caso las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2) se reescriben como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.4.4)$$

La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles.

Sin embargo fenómenos no lineales como equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos, se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como: sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible

de alto rendimiento, entre otros. Estos fenómenos no se pueden describir mediante dinámica de modelos lineales, por lo que es una razón ineludible para el uso de conceptos y herramientas de sistemas no lineales de control.

## 2.5. Nociones de geometría diferencial

En esta sección se presentan matemáticas básicas y definiciones que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, para mayores detalles puede consultar [6, 7].

Un **campo vectorial**  $f$  sobre un conjunto abierto (denominado vecindad)  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es una función que asocia unívocamente una dirección a cada punto  $p$  de  $U$ , un vector  $f_p$  del espacio tangente.

La **diferencial** de una función suave  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  está definida en coordenadas locales como:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n$$

Si  $(U, \varphi)$  es una carta de coordenadas en una vecindad de  $U$  del punto  $p(p \in U)$ , y  $x_1(p), \dots, x_n(p)$ , son las coordenadas locales, un campo vectorial  $f$ , el cual está expresado como:

$$f = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Si  $f$  es una función suave sobre  $U$  que es una vecindad del punto  $p$ , entonces se define la *derivada direccional* de la función  $h$  con respecto al campo vectorial  $f$ , la cual se designa mediante  $L_f h$ , llamada la **derivada de Lie** de la función  $h$  a lo largo del campo  $f$ , y se expresa como sigue:

$$L_f h = f_1(x) \frac{\partial h}{\partial x_1}(p) + \dots + f_n(x) \frac{\partial h}{\partial x_n}(p)$$

Cuando se tienen derivadas de Lie repetidas a lo largo del mismo campo vectorial  $f$ , se denota como:

$$L_f^i h = f(L_f^{(i-1)} h), \forall i \geq 1; \quad L_f^0 h = h$$

y para cualquier otro campo vectorial  $f_0, f_2, \dots, f_n$  se tiene

$$L_{f_n} \dots L_{f_2} L_{f_1} (L_{f_0} h)$$

se definen los *paréntesis* de Lie entre dos campos vectoriales  $f$  y  $g$  como:

$$[f, g](h) = L_f L_g h - L_g L_f h$$

que en coordenadas locales en una vecindad  $U$ , se tiene que:

$$[f, g](h) = \left( \frac{dg}{dx} \right) f - \left( \frac{df}{dx} \right) g$$

donde  $\frac{dg}{dx}$  es la matriz Jacobiana, de  $g$  definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Para paréntesis de Lie repetidos se adopta la siguiente notación:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f g &= [f, g] \\ &\vdots \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g]; \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Donde  $ad$  proviene de adjunta.

## 2.6. Linealización por realimentación

Esta técnica es una alternativa al método de *linealización aproximada*, la cual se conoce como linealización exacta, que surgió de la extensión de los resultados de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales, tales como controlabilidad y observabilidad del sistema.

Este tipo de realimentación la podemos clasificar en dos grupos: linealización entrada-estado (exacta), y linealización entrada-salida, en la que solo la respuesta entrada-salida se linealiza mientras que una parte del sistema permanece no lineal.

### 2.6.1. Linealización entrada-estado

El sistema dado por (2.3.3) con  $m = 1$ ,  $k = 1$ , es linealizable por realimentación estática alrededor de un punto de equilibrio  $x_0$  si en un entorno  $U$  de  $x_0$  existen:

- (i) Una transformación de coordenadas de  $\mathbb{R}^n : z = \phi(x)$ .
- (ii) Una realimentación estática  $u = \alpha(x) + \beta(x)\nu$ , donde  $\nu \in \mathbb{R}^m$  es una nueva variable de entrada.

y sea  $h(x)$  la función generadora de la transformación, válida alrededor de un punto de  $x$  del espacio, reduciendo al sistema (2.3.3) a la forma canónica controlable de Brunovsky de tal manera que en las nuevas coordenadas  $z = \phi(x)$ , el sistema que le corresponde en lazo cerrado es lineal y controlable

$$\dot{z} = A_c z + B_c v$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.1)$$

y rango  $[B_c \ A_c B_c \ A_c^2 B_c \ \dots \ A_c^{n-1} B_c] = n$ .

La función  $h(x)$  existe si se satisfacen las condiciones del siguiente teorema, refiérase [7] para la demostración del mismo:

**Teorema 2.6.1.** *Linealización por realimentación.*

- (i) *La matriz formada por el conjunto de vectores  $\{g \ ad_f g \ \dots \ ad_f^{n-2} g \ ad_f^{n-1} g\}$  posee rango  $n$  en un entorno de  $x_0$ , (independencia lineal).*
- (ii) *La distribución  $D = \text{span} \{g \ ad_f g \ \dots \ ad_f^{n-2} g\}$  es involutiva en un entorno de  $x_0$ .*

Las dos condiciones anteriores permiten determinar un sistema de coordenadas  $z = \phi(x)$ , con:

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

donde  $h(x)$  es una función definida en un entorno de  $x_0$  que satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\langle dh, g \rangle, \langle dh, ad_f g \rangle, \dots, \langle dh, ad_f^{n-2} g \rangle = 0 \quad (2.6.2)$$

$$\langle dh, ad_f^{n-1} g \rangle \neq 0 \quad (2.6.3)$$



donde  $\langle h, ad_f^k g \rangle$  denota la derivada en la dirección del campo vectorial  $ad_f^k g$  de la función  $h$ . De tal manera que, en la construcción del sistema de coordenadas  $\phi$ , las dificultades se reducen al cálculo de  $h(x)$ .

## 2.6.2. Linealización entrada salida

El número de veces que hay que derivar  $h(x)$  del sistema (2.3.3) hasta que aparezca la entrada de control, con un coeficiente no nulo define el grado relativo  $\rho$ , con  $1 \leq \rho \leq n$  del sistema, en los casos bien definidos debe satisfacer la relación  $\rho \leq n$ .

Formalmente se debe derivar la salida hasta obtener

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u \quad (2.6.4)$$

donde  $y^\rho = \frac{d^\rho y}{dt^\rho}$  se busca que en lazo cerrado el sistema se comporte como una cadena de integradores de orden  $\rho$ , por lo que se puede establecer una dinámica de la forma

$$y^\rho = v \quad (2.6.5)$$

donde  $v$  es la señal lineal de control, utilizando (2.6.4) y (2.6.5) se obtiene el control

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [v - L_f^\rho h(x)] \quad (2.6.6)$$

con  $u$  como una función no lineal de los estados. Con la dinámica lineal en lazo cerrado dada por (2.6.5), la señal de regulación  $v$  se escoge de forma que la salida  $y(t)$  tienda a cero o a un valor dado

$$v = -k_1 y - k_2 \dot{y} - \dots - k_\rho y^{(\rho-1)} \quad (2.6.7)$$

Entonces la dinámica del sistema en lazo cerrado queda descrita por

$$y^{(\rho)} + k_\rho y^{(\rho-1)} + \dots + k_2 \dot{y} + k_1 y = 0 \quad (2.6.8)$$

donde la elección de  $k_1, k_2, \dots, k_\rho$  sea tal que el polinomio característico asociado sea Hurwitz. con la ayuda de (2.6.5) es posible definir una transformación de estados de  $x$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y = h(x) \\ \xi_2 &= \dot{y} = L_f h \\ &\vdots \\ \xi_\rho &= y^{(\rho-1)} = L_f^{(\rho-1)}\end{aligned}\tag{2.6.9}$$

la dinámica de los estados transformados queda definida por (2.6.4) y (2.6.9) como

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 = L_f h \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_\rho \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u\end{aligned}$$

Los estados transformados  $\xi$  pertenecen a un espacio de dimension  $\rho$ . Si  $\rho < n$  entonces el sistema en lazo cerrado tiene una dinámica interna de orden  $n-\rho$ , que luego de la transformación se hace inobservable. Por lo que la estabilidad para la dinámica interna solo es valida localmente es decir solo en los puntos de operación.

si  $\rho = n$  es posible lograr una realimentación exacta o linealización entrada-estado. Solo en casos muy especiales es posible linealizar al sistema (2.3.3) cuando la función generadora  $h(x)$  coincide con la salida del sistema.

## 2.7. Conclusiones

En este capítulo se han presentado las herramientas matemáticas fundamentadas de la *geometría diferencial* la cual trata sobre curvas y superficies, las funciones que las definen y *transformaciones entre las coordenadas del espacio de estados*, con el fin de analizar las propiedades de interés por ejemplo controlabilidad y observabilidad, o para mostrar si ciertos problemas de control tienen solución.

Dichas herramientas son útiles para el diseño de *leyes de control de realimentación* para sistemas modelados por ecuaciones diferenciales no lineales afines a la entrada con el fin de linealizarlos, ya sea de forma parcial o total.

Al obtener la dinámica resultante lineal, permite el uso de la teoría de sistemas lineales para dar solución a problemas de control como: seguimiento asintótico, rechazo de perturbaciones entre otros. Un inconveniente del método es que se requiere el conocimiento del modelo exacto del sistema.

# Capítulo 3

## Sistemas planos

### 3.1. Introducción

La planitud diferencial [8] fue introducida en 1991 por Michel Fliess, Pierre Rouchon, Philippe Martin y Jean Lévine, usando el formalismo de la *geometría diferencial* tales como *difeomorfismos* (Apéndice A), *espacios tangentes y cotangentes*, *campo vectorial* etc., donde se hace un énfasis especial en la integrabilidad de una *familia de campos vectoriales* o *distribuciones*. El concepto en su inicio surgió asociado al problema de la equivalencia de un sistema no lineal con un sistema lineal, vinculado a las linealizaciones por *realimentación estática y dinámica* (Apéndice A), posteriormente se relacionó con el problema de planeación o generación de trayectorias.

A grandes rasgos un sistema no lineal es plano si se puede encontrar un conjunto de salidas diferencialmente independientes, en número igual a la dimensión del espacio de entradas, de tal forma que todas las variables del sistema (estados y entradas) puedan expresarse en función de la salida plana y de un número finito de sus derivadas. Por lo que problemas de control como *estabilización asintótica hacía un punto de equilibrio*, *transición entre dos puntos estacionarios*, *seguimiento de trayectorias* y otros, se trasladan al espacio de salidas planas, ya que al no estar

dichas salidas sujetas a dinámica alguna son teóricamente fáciles de resolver.

En lo que respecta a sistemas lineales, *todos*, siempre y cuando sean controlables pueden ser vistos como planos. En realidad, cualquier sistema que pueda ser transformado en un sistema lineal por *cambio de coordenadas, transformación estática realimentada o transformación dinámica realimentada* es también plano [9, 10].

Las aplicaciones de la planitud a problemas de interés de la ingeniería han crecido de manera constante en los últimos años. Es importante señalar que muchas clases de sistemas comúnmente usados en la teoría de control no lineal son planos. Entonces, muchos de los sistemas para los cuales fuertes técnicas de control no lineal están disponibles son de hecho sistemas planos [9].

## 3.2. Planitud diferencial

El conjunto de ecuaciones diferenciales representadas en la forma a afín (2.3.3) con estados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y control  $u = (u_1, \dots, u_m)$ , con  $m \leq n$  y campos vectoriales  $f(x)$ ,  $g(x) \in C^\infty$  son definidos en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , y  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  también  $C^\infty$ .

Es diferencialmente plano si y solo si existe una variable de salida  $z_p = (z_{p1}, \dots, z_{pm})$  llamada salida plana tal que:

1. La salida plana  $z_p$  puede ser representada en términos del estado  $x$

$$z_p = \Phi(x) \tag{3.2.1}$$

2. El estado  $x$ , la entrada  $u$  y sus derivadas respecto al tiempo, pueden ser representadas en términos de  $z_p$  y un número finito de sus derivadas respecto al tiempo  $\dot{z}_p, \dots, z_p^{(n)}$ :

$$x = \psi_1(z_p, \dot{z}_p, \dots, z_p^{(n-1)}) \tag{3.2.2}$$

$$u = \psi_2(z_p, \dot{z}_p, \dots, z_p^{(n)}) \tag{3.2.3}$$

3. Si las condiciones (3.2.2) y (3.2.3) se satisfacen, entonces la salida  $z_p$  puede ser representada por:

$$z_p = h(\psi_1(z_p, \dots, z_p^{(n-1)}), \psi_2(z_p, \dots, z_p^{(n)})) \quad (3.2.4)$$

Si el mapeo de salida  $h$  es no dependiente en la entrada  $z_p = h(x)$ , (3.2.4) puede en general, ser expresada por alguna función  $h_\psi$  la cual no necesita derivadas de  $z_p$  mayores que  $n$

$$z_p = h_\psi(z_p, \dots, z_p^{(q)}), \quad \text{con } q \leq n \quad (3.2.5)$$

La salida plana  $z_p$  y sus derivadas respecto al tiempo  $z_p^{(i)}$  con  $i = 1, \dots, n$  describe las dinámicas del sistema, ya que su conocimiento es suficiente para calcular todas las otras variables del sistema  $x, u, z_p$

**Nota 3.2.1.** *Las siguientes notas fueron tomadas de la revisión y conclusión de varios trabajos entre ellos [11, 8]*

- *Las salidas planas  $z_p, \dots, z_{pm}$  son diferencialmente independientes, por lo tanto no satisfacen ecuación diferencial alguna.*
- *No existe una salida plana única, por lo que puede variar la elección de la misma, aunque es conveniente elegir las de tal forma que tengan un significado físico asociado al problema.*
- *No existe un criterio, o algoritmo para determinar la planitud de un sistema dado, sin embargo la clase de sistemas diferencialmente planos es bastante amplia.*

Geoméricamente la planitud diferencial, utilizada con el objetivo de generar trayectorias para los sistemas es la siguiente: las funciones  $h_\psi, \psi_1, \psi_2$ , de las relaciones (3.2.2), (3.2.3) y (3.2.5) constituyen un difeomorfismo local entre el espacio de estados, de entradas, y el espacio de salidas planas. En este difeomorfismo se establece una correspondencia entre las curvas  $(x, u)$

(Figura 3.1) que constituyen trayectorias del sistema y curvas arbitrarias  $z_p$  en el espacio de menor dimensión de las salidas planas [11, 12].

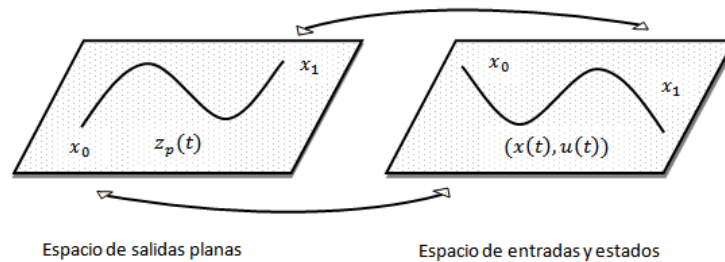


Figura 3.1: Correspondencia entre trayectorias y curvas arbitrarias.

Las condiciones iniciales establecidas para las trayectorias  $(x, u)$  conducen a condiciones que deben ser satisfechas por las curvas  $z_p$ . En el espacio de salidas planas el problema de encontrar estas curvas  $z_p$  es teóricamente más fácil de resolver, por lo que una vez parametrizadas estas  $z_p$  de alguna manera, bastará proyectarlas hacia el espacio de estados y de entradas para obtener las trayectorias  $x, u$  deseadas.

### 3.3. Planitud de sistemas linealizables por realimentación

Si el sistema (2.3.3) es linealizable por realimentación estática en  $x_o$ , entonces es diferencialmente plano en un entorno de  $x_o$ . Sea  $h(x)$  la función que en las condiciones de (i) *independencia lineal*, e (ii) *involutividad* del Teorema 2.6.1, satisface las ecuaciones (2.6.2), (2.6.3). De acuerdo al mismo teorema la transformación:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= h(x) \\
 z_2 &= \dot{z}_1 = L_f^2 h(x) \\
 &\vdots \\
 z_n &= \dot{z}_{n-1} = z_1^{(n-1)} = L_f^{n-1} h(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

define una transformación de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ , y por lo tanto es un difeomorfismo alrededor de  $x_o$ . Esto significa que es posible invertir localmente las relaciones (3.3.1) para obtener  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como funciones de  $z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(n-1)}$ . Además, puesto que el sistema (2.3.3), con salida  $z_p = h(x)$ , posee grado relativo igual a  $n$  en  $x_o$ ,

$$z_1^{(n)} = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u \quad (3.3.2)$$

con  $L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0$  en un entorno de  $x_o$  [11].

En consecuencia, las relaciones (3.3.1) y su inversa constituyen las funciones  $h_\psi$  y  $\psi_1$  de las relaciones (3.2.4), (3.2.3) mientras que, despejando  $u$  de (3.3.2), se obtiene la función  $\psi_2$  de la relación (3.2.3). Por lo tanto, el sistema (2.3.3) es diferencialmente plano con salida plana  $z_p = h(x)$  [11].

**Nota 3.3.1.** *En un sistema linealizable por realimentación estática se requieren  $(n - 1)$  derivadas de la salida plana  $z_p$ , para obtener las variables de estado  $x_1, \dots, x_n$ , y  $n$  derivadas de  $z_p$  para expresar las variables de control  $u$ .*

### 3.4. Ley de control de prealimentación

Si el sistema (2.3.3) es plano, es posible generar una ley de control de prealimentación  $u = u_d$ , tal que la salida plana  $z_p$  siga una trayectoria deseada  $z_d$  exactamente [13].

Se asume que los requerimientos del control están dados en términos del comportamiento de la salida plana  $z_p(t)$ , este comportamiento deseado  $z_d$  es  $(n - 1)$  veces continuamente diferenciable, y que todas las  $z_p^{(i)}$  con  $i = 0, \dots, n$  son conocidas.

Entonces, la entrada de control  $u = u_d$  puede ser determinada mediante (3.2.3):

$$u_d(t) = \psi_2(z_d(t), \dots, z_d^{(n)}(t)) \quad (3.4.1)$$



**Definición 3.4.1. Controlador de prealimentación perfecto [13]:** Dada una trayectoria  $n$ -veces diferenciable  $z_d(t)$  con derivadas conocidas  $z_d^{(i)}$  con  $(i = 1, \dots, n)$ , se consigue por el sistema (2.3.3) exactamente

$$z_p(t) = z_d(t) \quad (3.4.2)$$

mediante el control  $u(t) = u_d(t)$  de (3.4.1) si la condición inicial de la trayectoria dada  $z_d(t)$  coincide con la condición inicial del sistema.

La ecuación (3.4.1) es la *derecha inversa* [13] de el sistema no lineal descrito por (2.3.1) con respecto a su salida plana  $z_p$  para dadas  $n$ -veces trayectorias diferenciables.

### 3.5. Generación de trayectorias

El problema estándar de seguimiento de una salida de referencia consiste en diseñar una realimentación que garantice una solución acotada en lazo cerrado, y que al mismo tiempo asegure convergencia de la salida a la señal de referencia deseada  $y_r = z_d$ . Para resolver este problema, se sigue la técnica de diseño clásico de dos grados de libertad. Es decir se divide el problema en dos subproblemas:

- Generación de trayectorias.
- Compensación por realimentación.

Cuando el sistema es *invertible por la derecha* [13, 14], una manera de resolver este problema (entre muchos otros) es descomponerlo en dos sub-problemas:

- Generación de las derivadas de tiempo de la señal de referencia  $y_r$
- Transformación de esas derivadas en una trayectoria de referencia del estado y de entrada.

El problema de obtener las derivadas respecto al tiempo de la señal de referencia deseada es un problema de observabilidad. Este puede ser resuelto una vez que se tiene un modelo del sistema el cual genera la señal de referencia.

En el capítulo 05 se hará un desarrollo más extenso de estos temas

### **3.6. Conclusiones**

La planitud implica correspondencia uno a uno entre las trayectorias del sistema y de un conjunto reducido de variables llamadas salidas planas. Este concepto ha inspirado una importante literatura para los estudios sobre la planitud y sus aplicaciones. Para mencionar un solo hecho, la planitud provee significantes simplificaciones para el problema de generación de trayectorias y para bastantes aspectos del diseño por realimentación.

# Capítulo 4

## Descripción del modelo del motor

### 4.1. Introducción

El campo de la industria automotriz ha ido evolucionando a gran paso por lo cual se han inventado varios sistemas que hacen al automóvil de hoy día más eficiente, como el reemplazo de el carburador por un dispositivo de inyección electrónica. Este dispositivo, pulveriza el combustible en una masa de aire que ingresa en el múltiple de entrada (Figura 4.1), suministrando el volumen adecuado de la mezcla aire-combustible al interior de los cilindros para la combustión.

La planta consiste en un modelo matemático basado en los resultados publicados en [15]. En el cual se describe un motor de 4 cilindros de combustión interna de encendido por bujía, que consta de los siguientes 5 elementos clave:

1. Acelerador.
2. Múltiple de entrada.
3. Flujo de aire al interior del cilindro.

4. Carrera de compresión.
5. Generación de torque y aceleración.

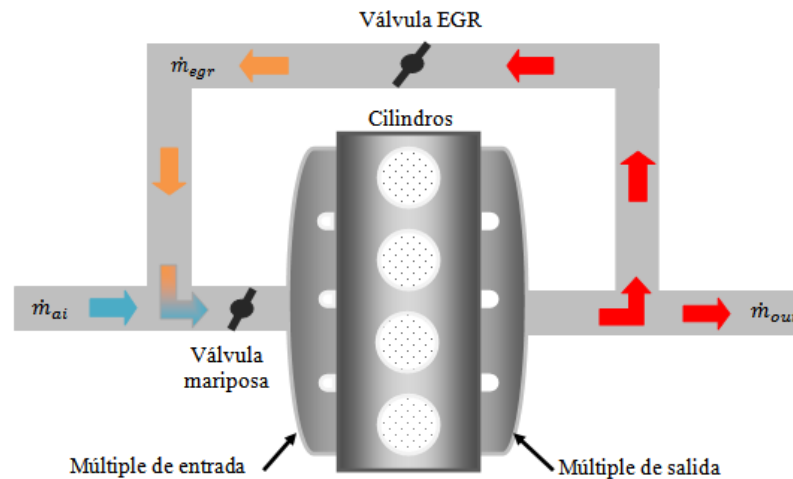


Figura 4.1: Esquema básico de un motor de 4 cilindros

En las siguientes secciones se describe con más detalle el funcionamiento de estos, los elementos que los conforman, así como las ecuaciones empíricas que los describen y que en conjunto forman el modelo no lineal del motor de combustión interna.

## 4.2. Acelerador

Este primer elemento generalmente está formado por un potenciómetro colocado en el pedal del acelerador, una etapa de potencia y una válvula de mariposa (Figura 4.1). En un acelerador convencional cada posición del pedal corresponde con una única posición de la mariposa.

La relación entre el recorrido del pedal y el recorrido de la mariposa determinan el comportamiento del motor, ya que la función en conjunto de estos sistemas es la de regular el flujo de masa de aire  $\dot{m}_{ai}$  que ingresa al múltiple de entrada, el cual se puede expresar por medio

de dos funciones empíricas, la del ángulo del acelerador  $f(\theta)$  y la otra en función de la presión atmosférica  $g_m(P_{amb})$  como se muestra a continuación:

$$\dot{m}_{ai} = f(\theta)g_m(P_m) \quad (4.2.1)$$

$$f(\theta) = k_{mi0} + k_{mi1}\theta + k_{mi2}\theta^2 + k_{mi3}\theta^3 \quad (4.2.2)$$

$$g_m(P_{min}) = \begin{cases} 1 & P_m \leq P_{atm}/2 \\ \frac{2}{P_{atm}} \sqrt{P_{atm}P_m - P_m^2} & P_{atm}/2 \leq P_m \leq P_{atm} \\ -\frac{2}{P_{atm}} \sqrt{P_{atm}P_m - P_m^2} & P_{atm} \leq P_m \leq 2P_{atm} \\ 1 & P_m \geq 2P_{atm} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Donde:

$\dot{m}_{ai}$  = Flujo de masa dentro del múltiple de entrada [g/s]

$\theta$  = Ángulo del acelerador [deg]

$P_m$  = Presión en el múltiple de entrada [bar]

$P_{atm}$  = Presión ambiente (atmosférica)[bar]

### 4.3. Múltiple de entrada

La función principal del múltiple de entrada la de distribuir la mezcla aire-combustible de manera uniforme a cada cilindro. La presión en el múltiple de entrada puede modelarse como una ecuación diferencial donde la diferencia del flujo de aire de entrada  $\dot{m}_{ai}$ , y el que ingresa al interior del cilindro  $\dot{m}_{ao}$  representa la tasa neta de cambio del flujo de aire con respecto al tiempo. Esta cantidad de acuerdo con la ley de los gases ideales es proporcional a la derivada respecto al tiempo de la presión del múltiple.

$$\dot{P}_m = \frac{RT_{min}}{V_{min}}(\dot{m}_{ai} - \dot{m}_{ao}) \quad (4.3.1)$$

donde:

$R$  = Constante específica de los gases [ $8,31/mol.^{\circ}K$ ]

$T_{min}$  = Temperatura del múltiple de entrada en [ $^{\circ}K$ ]

$V_{min}$  = Volumen del múltiple de entrada [ $m^3$ ]

$\dot{m}_{ao}$  = Flujo de aire de salida del múltiple [ $g/s$ ]

$\dot{P}_m$  = Tasa de cambio de la presión del múltiple de entrada [ $bar/s$ ]

#### 4.4. Flujo de aire al interior del cilindro.

El flujo de masa de aire que es bombeada a los pistones se relaciona con variables difíciles de modelar, entre ellas están la presión del múltiple de entrada, la velocidad y el desplazamiento del motor, la siguiente es una ecuación empírica que describe este proceso.

$$\dot{m}_{ao} = k_{mo0} + k_{mo1}\omega P_m + k_{mo2}\omega P_m^2 + k_{mo3}\omega^2 P_m \quad (4.4.1)$$

donde:

$\omega$  = Velocidad angular del motor [ $rad/s$ ]

$P_m$  = Presión en el múltiple de entrada [ $bar$ ]

#### 4.5. Carrera de admisión y compresión

En un motor de 4 cilindros en línea y de 4 tiempos,  $180^{\circ}$  de revolución del cigüeñal separa la ignición de cada cilindro sucesivo. Esto da lugar a cada detonación del cilindro en un giro del

cigüeñal. En este modelo la admisión, compresión, combustión y la carrera de escape se produce de forma simultanea (en un momento dado, en cada fase). Para tener en cuenta la compresión, la combustión de cada carga de admisión es retrasada  $180^\circ$  de revolución del cigüeñal al final de cada carrera de admisión (Figura 4.2).

La variable  $m_a$  es la masa de aire cargada en el cilindro durante la carrera de admisión, la cual tiene lugar en el primer  $\pi$  radianes de rotación del cigüeñal del ciclo de 4 tiempos. Entonces en el modelo,  $m_a$  se obtiene mediante la integración del flujo másico de aire de el múltiple y restableciendo el integrador al final de cada carrera de admisión.

Esto resulta en una variable de periodo de reset  $t_{reset} = \frac{\pi}{\omega}$ , la cual depende de la velocidad de rotación. Por último se sabe que en el modelo del motor actual, existe un retraso en la ingesta aire-combustible y la relacionada producción de torque. Por lo tanto la inducción del retardo de potencia de  $\pi$  radianes se asumió y, consecuentemente, una variable de retraso ( $\frac{\pi}{\omega}$ ) fue incluida en el modelo. Sin embargo, para el propósito del diseño del controlador, la salida del bloque integrador con variable de reset puede ser cercanamente aproximada mediante [16]:

$$m_a = \frac{\dot{m}_{ao}\pi}{\omega} \quad (4.5.1)$$

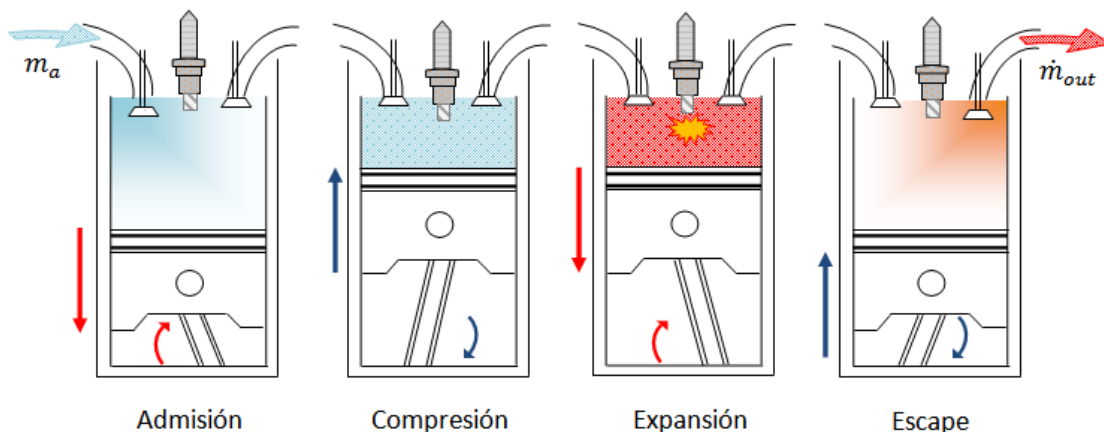


Figura 4.2: Ciclo de cuatro tiempos

## 4.6. Torque y aceleración

El elemento final de este modelo describe el torque desarrollado por el motor, descrito mediante una función empírica, que depende de la masa de carga de aire  $m_a$ , la proporción de la mezcla aire combustible  $\lambda = A/F$ , el avance de la chispa  $\sigma$  y la velocidad del motor como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \tau_{eng} = & k_{e0} + k_{e1}m_a + k_{e2}(\lambda) + k_{e3}(\lambda)^2 + k_{e4}\sigma + k_{e5}\sigma^2 + \\ & + k_{e6}\omega + k_{e7}\omega^2 + k_{e8}\omega\sigma + k_{e9}\sigma m_a + k_{e10}\sigma^2 m_a \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

donde:

$m_a$  = Masa de aire en el cilindro para combustión [ $g$ ].

$\lambda$  = Relación aire-combustible.

$\sigma$  = Avance de la chispa [ $deg$ ].

La velocidad del cigüeñal puede representarse mediante la siguiente ecuación de estado:

$$J\dot{\omega} = \tau_{eng} - \tau_l \quad (4.6.2)$$

donde:

$\tau_{eng}$  = Es el torque generado por el motor [ $N.m$ ].

$\tau_l$  = Es el torque de carga variable [ $N.m$ ].

$J$  = Es el momento de inercia del motor [ $Kg.m^2$ ].

$\dot{\omega}$  = Aceleración angular del motor [ $rad/s^2$ ].



Entonces la velocidad  $\omega$ , y la presión del múltiple de entrada  $P_{mi}$ , determinan el vector de estados:  $x = (x_1, x_2)^T = (\omega, P_{mi})^T$  y la variable de control:  $u = f(\theta)$ . Entonces la descripción del sistema en espacio de estados puede ser escrito como:

$$\tilde{\Sigma} : \dot{x}_1 = W(x) \quad (4.6.3)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{RT_{min}}{V_{min}}(M_o(x) + G_m(x)u) \quad (4.6.4)$$

y la ecuación de salida

$$y = x_1 = w \quad (4.6.5)$$

donde

$$W(x) = \frac{1}{J} \left\{ K_{1m} + K_{2m} \left( \frac{k_{mo0}}{x_1} + k_{mo1}x_2 + k_{mo2}x_2^2 + k_{mo3}x_1x_2 \right) + K_{3m}x_1 + k_{e7}x_1^2 - \tau_l \right\}$$

$$M_o(x) = (-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2)$$

$$G_m(x) = g(x_2)$$

con:

$$K_{1m} = k_{e0} + k_{e2}(\lambda) + k_{e3}(\lambda)^2 + k_{e4}\sigma + k_{e5}\sigma^2$$

$$K_{2m} = \pi(k_{e1} + k_{e9}\sigma + k_{e10}\sigma^2)$$

$$K_{3m} = k_{e6} + k_{e8}\sigma$$

## 4.7. Simulación del sistema en lazo abierto

Con el fin de observar el comportamiento dinámico de los estados de las ecuaciones descritas por (4.6.3), (4.6.4), así como pruebas ante perturbaciones debidas torque de carga ( $\tau_l$ ), se llevo a cabo la siguiente simulación en lazo abierto, las respuestas del sistema son ante una entrada de tipo escalón.

La Figura 4.3 muestra la velocidad del motor, y la referencia del tipo escalón dada por el acelerador.

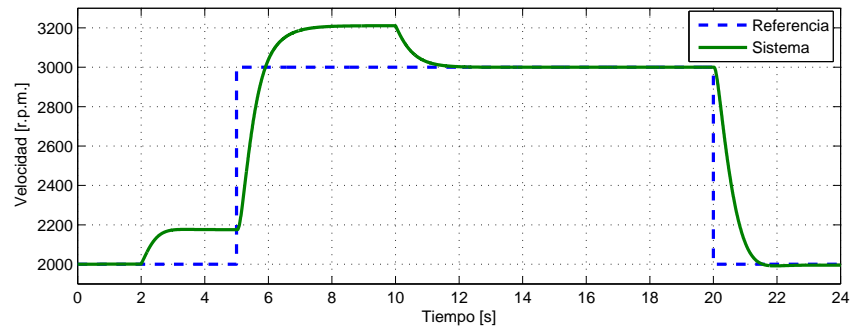


Figura 4.3: Velocidad del cigüeñal en lazo abierto.

En la Figura 4.4 se muestra el torque de carga que se aplicará en las posteriores simulaciones para perturbar al sistema, consiste en:

$$\tau_l = \begin{cases} 25N.m & \text{si } t \leq 2 \text{ ó } \geq 10 \\ 20N.m & \text{si } 2 < t < 10 \end{cases}$$

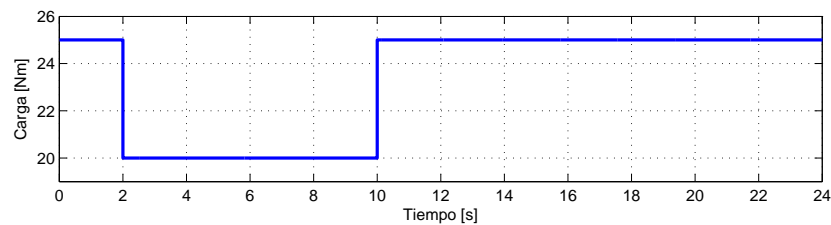


Figura 4.4: Torque de carga  $\tau_l$ .

Por último la Figura 4.5 muestra la presión del múltiple de entrada.

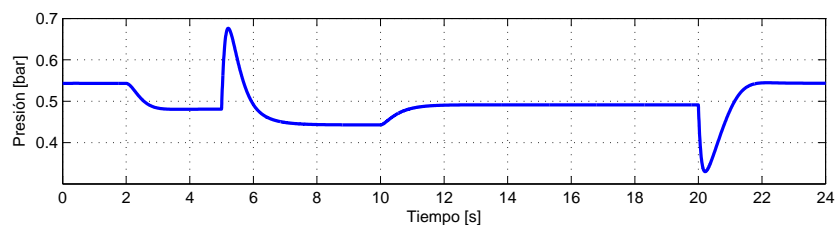


Figura 4.5: Presión del múltiple de entrada en lazo abierto.

# Capítulo 5

## Estrategias para el control del motor F.I.

### 5.1. Introducción

El objetivo del control de velocidad de un motor es permitir la introducción de una cantidad precisa de combustible en la cámara de combustión (con el supuesto, para este trabajo, de que la mezcla *aire-combustible* es controlado por otro controlador independiente), con el fin de responder a todas las demandas del conductor, respetando a la vez las diferentes normas anticontaminación, demandas que pueden ser:

- Una aceleración.
- Una velocidad estabilizada del vehículo.
- Una desaceleración.
- El mantenimiento de un régimen mínimo (ralentí).

Generalmente la tarea de control puede dividirse en dos categorías: estabilización o *regulación* y otra de *seguimiento*. En problemas de estabilización un sistema de control, llamado

estabilizador, tendrá que ser diseñado para que el sistema en lazo cerrado, se establezca en un punto de equilibrio. En los problemas de control de seguimiento, el objetivo de diseño es la construcción de un controlador, tal que la salida del sistema siga una trayectoria que es variante en el tiempo.

El control de velocidad de un motor de combustión interna es un problema no lineal, un controlador diseñado para este propósito no solo debe realizar un seguimiento de la velocidad deseada, sino también debe ser robusto ante perturbaciones generadas por el torque de carga.

## 5.2. Linealización por realimentación estática

Reescribiendo el modelo no lineal del motor de combustión interna descrito por las ecuaciones (4.6.3) y (4.6.4) de la forma afín tenemos.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left\{ K_1 + K_2 \left( \frac{k_{mo0}}{x_1} + k_{mo1}x_2 + k_{mo2}x_2^2 + k_{mo3}x_1x_2 \right) + K_3x_1 + k_{e7}x_1^2 - \tau_l \right\} \\ \frac{RT}{V} [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{RT}{V}g(x) \end{bmatrix} u$$

los vectores  $f(x)$  y  $g(x)$  son

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left\{ K_1 + K_2 \left( \frac{k_{mo0}}{x_1} + k_{mo1}x_2 + k_{mo2}x_2^2 + k_{mo3}x_1x_2 \right) + K_3x_1 + k_{e7}x_1^2 - \tau_l \right\} \\ \frac{RT}{V} [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{RT}{V}g(x) \end{bmatrix}$$

con la ayuda de estos campos vectoriales es posible verificar la *independencia del control* es decir el conjunto de vectores  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2}g, ad_f^{n-1}g\}$  debe ser linealmente independiente, localmente alrededor de  $x_o$ . Este cálculo será útil para establecer la existencia de una transformación de estado linealizante.

Para el sistema no lineal de orden  $n = 2$  tenemos

$$ad_f g = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) f - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) f &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{RT}{V} g'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left\{ K_1 + K_2 \left( \frac{k_{mo0}}{x_1} + k_{mo1}x_2 + k_{mo2}x_2^2 + k_{mo3}x_1x_2 \right) + K_3x_1 + k_{e7}x_1^2 - \tau_l \right\} \\ \frac{RT}{V} [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g'(x) [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g &= \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left( -\frac{K_2 k_{mo0}}{x_1^2} + K_2 k_{mo3}x_2 + K_3 + 2k_{e7}x_1 \right) & \frac{K_2}{J} (k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}x_1) \\ \frac{RT}{V} (-k_{mo1}x_2 - k_{mo2}x_2^2 - 2k_{mo3}x_1x_2) & \frac{RT}{V} (-k_{mo1}x_1 - 2k_{mo2}x_1x_2 - k_{mo3}x_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{RT}{V} g(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{RT}{V} \right) \left( \frac{K_2}{J} \right) g(x) (k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}x_1) \\ \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g(x) (-k_{mo1}x_1 - 2k_{mo2}x_1x_2 - k_{mo3}x_1^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad_f g &= \begin{bmatrix} 0 \\ \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g'(x) [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \frac{RT}{V} \right) \left( \frac{K_2}{J} \right) g(x) (k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}x_1) \\ \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g(x) (-k_{mo1}x_1 - 2k_{mo2}x_1x_2 - k_{mo3}x_1^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\left( \frac{RT}{V} \right) \left( \frac{K_2}{J} \right) g(x) (k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}x_1) \\ \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g'(x) [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] - \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g(x) (-k_{mo1}x_1 - 2k_{mo2}x_1x_2 - k_{mo3}x_1^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

verificando la condición tenemos

$$[g(x), ad_f g] = \begin{bmatrix} 0 & -\left( \frac{RT}{V} \right) \left( \frac{K_2}{J} \right) g(x) (k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}x_1) \\ \frac{RT}{V} g(x) & \left( \frac{RT}{V} \right)^2 g'(x) [-k_{mo0} - k_{mo1}x_1x_2 - k_{mo2}x_1x_2^2 - k_{mo3}x_1^2x_2] - g(x) (-k_{mo1}x_1 - 2k_{mo2}x_1x_2 - k_{mo3}x_1^2) \end{bmatrix}$$

donde

$$\det[g(x)ad_f g] = \left(\frac{RT}{V}\right)^2 \left(\frac{K_2}{J}\right) g(x)^2 (k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}x_1) \quad (5.2.1)$$

La matriz formada por los campos vectoriales  $g$  y  $ad_f g$  es localmente de rango completo, el determinante (5.2.1) se hace cero en

$$x_1 = \frac{-2k_{mo2}x_2 - k_{mo1}}{k_{mo3}}$$

$$x_2 = \frac{-k_{mo3}x_1 - k_{mo1}}{2k_{mo2}}$$

Por lo que el control adoptado será inválido si existen trayectorias del sistema controlado que se acerque a estos valores.

La condición de *involutividad* del subconjunto de campos vectoriales  $\{g, ad_f g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  es directa, específicamente el conjunto formado por el vector  $g(x)$  ya que  $[g, g](x) = 0$  para cualquier campo vectorial de  $g(x)$ . Entonces se cumplen las dos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la transformación linealizante.

La función  $h(x)$  que genera la transformación debe cumplir la condición de integrabilidad del conjunto  $\frac{\partial h(x)}{\partial x} \{g, ad_f g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-2} g\} = 0$ , en este caso solo  $g(x)$  entonces se tiene

$$\langle h(x), g(x) \rangle = 0$$

$$0 \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\frac{RT}{V} g(x) \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) = 0$$

por lo que la solución a el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales esta dada por

$$h(x) = x_1 \quad (5.2.2)$$

La transformación linealizante construida a partir de (5.2.2) resulta ser

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{J} \left\{ K_{1m} + K_{2m} \left( \frac{k_{m00}}{x_1} + k_{m01}x_2 + k_{m02}x_2^2 + k_{m03}x_1x_2 \right) + K_{3m}x_1 + k_{e7}x_1^2 - \tau_l \right\} \end{bmatrix}$$

La transformación inversa se obtiene a partir de (5.2.3)

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \frac{-[K_{2m}(k_{m01} + k_{m03}z_1)]}{2K_{2m}k_{m02}} + \\ &\quad \frac{\sqrt{[K_{2m}(k_{m01} + k_{m03}z_1)]^2 - 4(K_{2m}k_{m02})(k_{e7}z_1^2 + K_{3m}z_1 + \frac{K_2k_{m00}}{z_1} + K_{1m} - \tau_l - Jz_2)}}{2K_{2m}k_{m02}} \end{aligned}$$

el modelo transformado a la forma canónica controlable es:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{J} \left\{ \left( \frac{-K_{2m}k_{m00}}{z_1^2} + K_{2m}k_{m03}x_2 + K_{3m} + 2k_{e7}z_1 \right) z_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{RT_m}{V_m} K_{2m} [k_{m01} + 2k_{m02}x_2 + k_{m03}z_1] [-k_{m00} - (k_{m01}x_2 + k_{m02}x_2^2 + k_{m03}z_1x_2)z_1 + g(x_2)u] \right\} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Para obtener el control linealizante basta, con igualar el término derecho de la última ecuación del sistema descrito por (5.2.4) a una entrada auxiliar  $v$  que representa una ley de control de realimentación lineal en términos de las variables de estado transformadas.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\frac{RT}{V} g(x) K_{2m} (k_{m01} + 2k_{m02}x_2 + k_{m03}z_1) z_1^2} \left\{ J z_1^2 v + [K_{2m}(k_{m00} - k_{m03}x_2 z_1^2) - (K_{3m} + 2k_{e7}) z_1^2] z_2 + \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{RT}{V} g(x) (k_{m01} + 2k_{m02}x_2 + k_{m03}z_1) z_1^2 \right] [k_{m00} + (k_{m01} + k_{m02}x_2 + k_{m03}z_1) x_2 z_1] \right\} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

El sistema linealizado y transformado debe tener la estructura controlador de Brunovsky

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

La señal de control auxiliar se escoge como una ley de control lineal de la siguiente manera:

$$v = -K_{1_{cl}}z_1 - K_{2_{cl}}z_2 \quad (5.2.7)$$

### 5.2.1. Asignación de polos para el control auxiliar $v$

Debido a la controlabilidad del sistema, los polos en lazo cerrado se pueden colocar en cualquier posición deseada mediante la realimentación del estado a través de una adecuada elección del vector de ganancias. La técnica de diseño empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados (con una determinada razón de amortiguamiento  $\zeta$  y frecuencia natural  $\omega_n$ ) a partir de la respuesta transitoria ó a las especificaciones de la respuesta en frecuencia, tales como velocidad, razón de amortiguamiento, al igual que los requisitos en estado estacionario. De tal manera que el polinomio en la variable compleja  $s$  sea Hurwitz:

$$p(s) = s^2 + K_{2_{cl}}s + K_{1_{cl}} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Debido a que es un sistema de segundo orden, su dinámica (la característica de respuesta) se correlaciona de manera precisa con la situación de los polos en lazo cerrado deseados [17]. La Figura 5.1 representa en forma de diagrama de bloques la linealización obtenida.

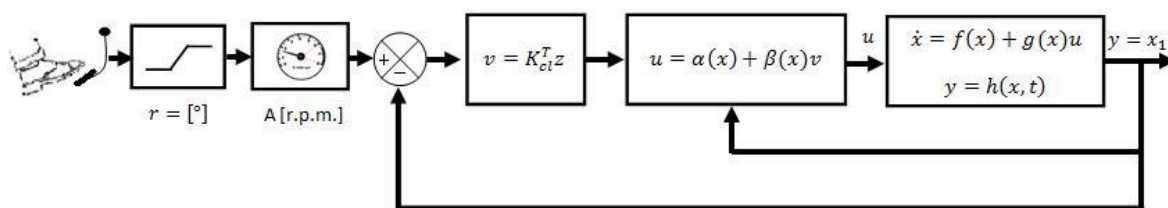


Figura 5.1: Representación en diagrama de bloques de la realimentación.

El objetivo de la ley de control dada por la ecuación (5.2.5) es la de estabilizar al sistema en lazo cerrado alrededor de un punto de equilibrio.



## 5.3. Observador como estimador de parámetros

Cuando se desea saber el valor de alguna variable en un sistema dinámico, se necesita que ésta sea medible físicamente por medio de sensores, de no ser posible, ya sea porque no se cuenta con el sensor, o porque la variable no tiene esa propiedad, existe la alternativa de implementar con la ayuda de la *teoría de observadores* un sensor computacional, a partir de algunas variables medibles las cuales nos pueden ayudar a estimar de forma aproximada *parámetros* involucrados en el sistema sin necesidad de utilizar sensores físicos, lo cual reduce de forma importante el costo en la implementación de sistemas de control y monitoreo.

### 5.3.1. Identificación de la función $\dot{m}_{ao}$

El observador puede estimar el estado de un sistema y en algunos casos particulares puede utilizarse para la identificación de parámetros.

Estos parámetros se pueden considerar como una variable de estado del sistema y aumentar la dimension del mismo a través de este nuevo estado. Se debe especificar la dinámica de los parámetros que se desea estimar, ya que si estos son constantes o se comportan de manera lenta entonces la derivada de estos parámetros se puede tomar como cero.

El siguiente ejemplo fue tomado de [18]

$$\dot{x} = x + a$$

donde el parámetro desconocido es  $a$ . Si  $a$  tiene variación lenta o constante, entonces se puede decir que

$$\dot{a} = 0$$

Ahora sea  $x = x_1$  y  $a = x_2$ ; entonces se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

Si  $x_1$  es medible entonces el sistema (5.3.1) es observable, entonces es posible construir el observador para estimar  $x_2$  es decir el parámetro  $a$ .

El observador utilizado proviene de [18] será de ayuda para estimar el parámetro del motor  $\dot{m}_{ao}$ , este parámetro es requerido para el diseño de la ley de control de prealimentación, tanto en el caso de realimentación estática y el de planitud. Para los detalles de la construcción de este observador refiérase al Apéndice B.

Utilizando la ecuación de presión en el múltiple de entrada, y considerando  $T = \text{constante}$ , se obtiene:

$$\dot{P} = \frac{R}{V}[\dot{m}_{ai}T - k_0T]\tag{5.3.2}$$

$$\dot{k}_0 = 0\tag{5.3.3}$$

donde  $k_0$  es la función a identificar relacionada a  $\dot{m}_{ao}$  y se considera constante. Haciendo uso del algoritmo de síntesis del observador se construyen las siguientes matrices y vectores:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -T\frac{R}{V} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{R}{V}\dot{m}_{ai}T \\ 0 \end{bmatrix}\tag{5.3.4}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -T\frac{R}{V} \end{bmatrix}, \quad \Delta_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta^2} \end{bmatrix}\tag{5.3.5}$$

además se obtiene

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -T^{-1}\frac{V}{R} \end{bmatrix}, \quad \Delta_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix}\tag{5.3.6}$$

considerando los polos en  $-1$  se obtienen las constantes  $k_{o1} = 2$ ,  $k_{o2} = 1$ , el algoritmo de

observación resultante es

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{P}} \\ \dot{\hat{k}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -T\frac{R}{V} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{k}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{V}\dot{m}_{ai}T \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -T^{-1}\frac{V}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix} \left[ (1 \ 0) \begin{pmatrix} \hat{P} \\ \hat{k}_0 \end{pmatrix} - P \right] \quad (5.3.7)$$

dando la siguiente expresión final para el observador:

$$\dot{\hat{P}} = \frac{R}{V}[\dot{m}_{ai}T_{ai} - \hat{k}_0T] - 2\theta(\hat{P} - P) \quad (5.3.8)$$

$$\dot{\hat{k}}_0 = T^{-1}\frac{V}{R}\theta^2(\hat{P} - P) \quad (5.3.9)$$

La Figura 5.2 muestra la dinámica de la función  $\dot{m}_{ao}$  se puede observar como es que el estimado de dicha función converge de manera asintótica al valor verdadero. En la Figura 5.3 se aprecia la dinámica del error de estimación de la función  $\dot{m}_{ao}$ .

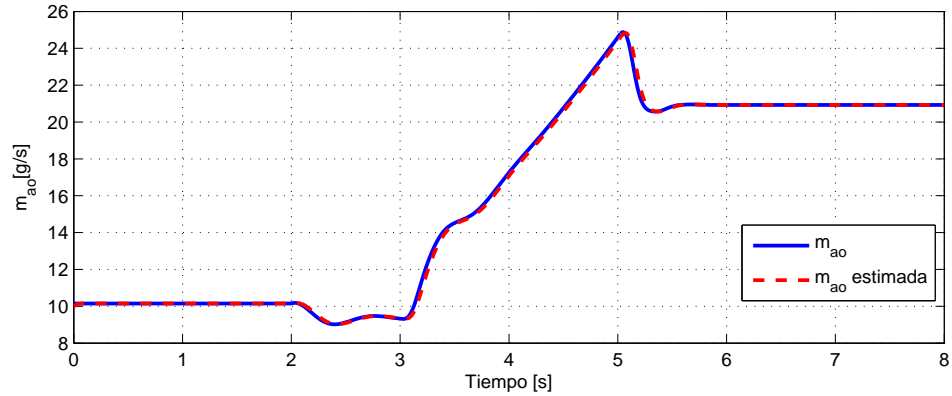


Figura 5.2: Estimación de la función  $\dot{m}_{ao}$ .

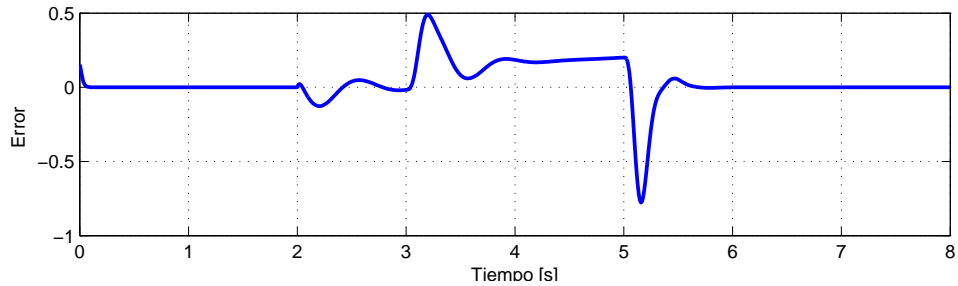


Figura 5.3: Error de estimación  $\dot{m}_{ao}$ .

En la Figura 5.4 se muestra la velocidad del cigüeñal estabilizada a la velocidad constante de ralentí, la Figura 5.5 muestra la dinámica de la presión del múltiple de entrada, por último la Figura 5.6 muestra la entrada de control.

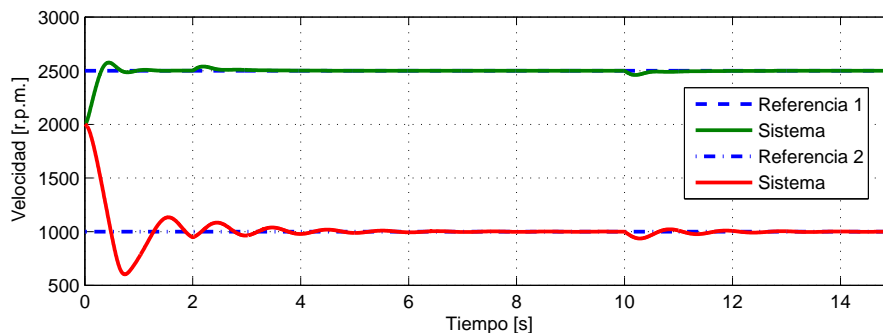


Figura 5.4: Velocidad regulada.

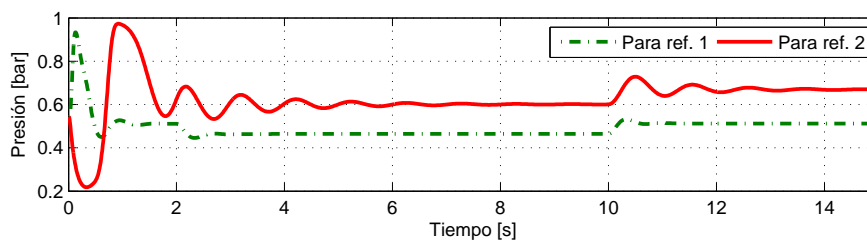


Figura 5.5: Presión en el múltiple de entrada para la velocidad regulada.

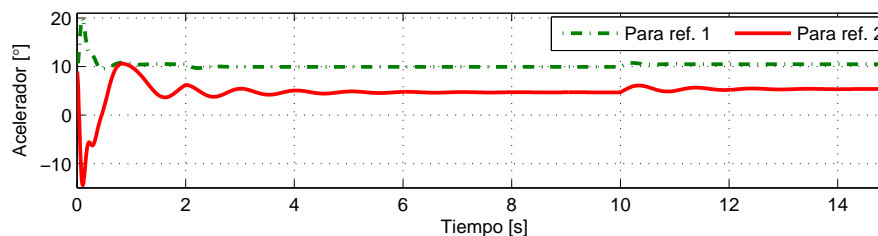


Figura 5.6: Ángulo del acelerador para velocidad regulada.

## 5.4. Seguimiento de trayectorias

En esta sección se tratará el problema de seguimiento de trayectorias por medio de la realimentación de la salida, con la ayuda de la ley de control de realimentación de estado

obtenida previamente, con la propiedad de que, dada una señal de referencia acotada  $y_r(t) \in C^\infty$ , la variable de salida  $y$  debe satisfacer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0 \quad (5.4.1)$$

Dada cualquier señal de referencia  $y_r(t)$  suave y acotada, con derivadas  $(y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho)}(t))$ , el problema de seguimiento se dice que es globalmente resuelto mediante realimentación estática de estados para el sistema afín (2.3.3) si existe un control

$$u = k(x) + \beta(x)v_r(y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho)}(t)) \quad (5.4.2)$$

con  $\beta \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k$  y  $\beta$  funciones suaves en  $\mathbb{R}^n$ ,  $v_r$  una función continua, tal que, dada cualquier condición inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  para el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)k(x) + g(x)\beta(x)v_r \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

i)  $\|x(t)\|$  es acotada,  $\forall t \geq 0$ ,

ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$

### 5.4.1. Modelo de referencia

La señal de referencia  $y_r(t)$  se puede especificar, junto con sus derivadas, como funciones de tiempo, mediante el uso de un modelo de referencia. Para un sistema de grado relativo dos, un modelo de referencia podría ser un sistema lineal de segundo orden invariante en el tiempo representado mediante la función de transferencia [13, 19]

$$F_{ref} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.4.4)$$

Donde la constante positiva  $\zeta$  y  $\omega_n$  se eligen para dar forma a la señal de referencia  $y_r(t)$  para una señal de entrada dada  $u(t)$ . La señal  $y_r(t)$  puede ser generada en línea mediante el uso del modelo de estado.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega_n^2 y_1 - 2\zeta\omega_n y_2 + \omega_n^2 u \\ y_r &= y_1\end{aligned}$$

Por tanto,  $y_r(t)$ ,  $\dot{y}_r(t)$ , y  $\ddot{y}_r(t)$  estarán disponibles en línea. Si  $u(t)$  es una función acotada continua por partes de  $t$ , entonces  $y_r(t)$ ,  $\dot{y}_r(t)$ , y  $\ddot{y}_r(t)$  satisfacen las condiciones supuestas.

Sea

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} y_r \\ \vdots \\ y_r^{(\rho-1)} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \xi_1 - y_r \\ \vdots \\ \xi_p - y_r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{R}. \quad (5.4.5)$$

El cambio de variables  $e = \xi - \mathcal{R}$  produce

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}) \\ \dot{e} &= A_c e + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] - y_r^{(\rho)}.\end{aligned}$$

El control de realimentación de estado

$$u = \alpha(x) + \beta(x)[v + y_r^{(p)}] \quad (5.4.6)$$

donde  $\beta(x) = 1/\gamma(x)$  reduce el sistema de la forma normal a el sistema en cascada.

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}) \\ \dot{e} &= A_c e + B_c v\end{aligned}$$

Nuestro objetivo de control puede satisfacerse mediante cualquier diseño de  $v$  que estabiliza la segunda ecuación mientras se mantiene acotada  $\eta$  para toda  $t \geq 0$ . Con  $v = -K_e$ , donde  $A_c - B_c K$  es Hurwitz, el control de realimentación de estado completo esta dado por

$$u = \alpha(x) + \beta(x) - K[T_2(x) - \mathcal{R} + y_r^{(p)}] \quad (5.4.7)$$

y el sistema en lazo cerrado esta dado por

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{R}) \quad (5.4.8)$$

$$\dot{e} = (A_c - B_c K)e \quad (5.4.9)$$

### 5.4.2. Restricciones para la entrada de control $u$

En algunos problemas de control, el diseñador tiene algo de libertad en la elección de la señal de referencia  $y_r(t)$ . La libertad de la elección de la señal de referencia puede ser utilizada para mejorar el desempeño del sistema, especialmente en presencia de *las restricciones en la señal de control*.

La entrada de control  $u(t)$  es el ángulo del acelerador y corresponde con una única posición de la válvula mariposa, que suministra la cantidad adecuada de aire al interior de los cilindros para la combustión, además recordemos que el pedal es manipulado arbitrariamente por el conductor del vehículo, por lo que es posible restringir el uso indiscriminado del mismo, que implique una posición del pedal mayor a la requerida para alcanzar alguna velocidad de referencia lo suficientemente rápido, lo que se vería reflejado en la disminución del consumo de combustible y por tanto emisiones contaminantes.

La elección de la constante de tiempo  $\tau = 1/\omega_n$  del modelo de referencia dado por (5.4.4), determina la velocidad del movimiento de la posición inicial a la final. Si no hubiese restricciones

en la magnitud del control  $u(t)$ , podríamos elegir  $\tau$  arbitrariamente pequeño y lograr una transición arbitrariamente rápida de  $x_i$  a  $x_f$ .

Eligiendo  $\tau$  para ser compatible con la restricción de la posición del pedal del acelerador, podemos lograr un mejor desempeño. La Figura 5.7 y 5.8 muestran la dinámica de la salida y el control con respecto a dos diferentes elecciones de  $\tau$ , cuando el control está restringido a  $|u| \leq 70^\circ$ . Para  $\tau = 0,031$  la salida  $y(t)$  se desvía de la referencia  $y_r(t)$  reflejando el hecho de que la señal de referencia demanda un esfuerzo de control un tanto mayor. Por otro lado, con  $\tau = 0,09$  la señal de salida logra un seguimiento más suave de la señal de referencia. Al elegir  $\tau = 0,09$  se ha evitado el sobrepaso que ocurrió cuando  $\tau = 0,031$ .

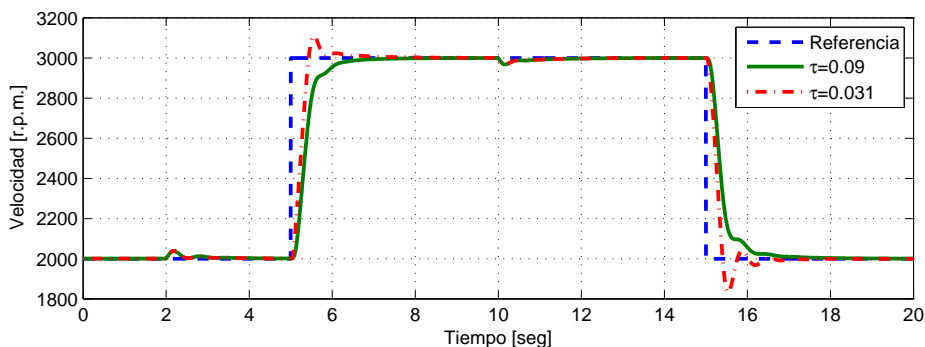


Figura 5.7: Calibración de la constante de tiempo  $\tau$  para el seguimiento de escalón de referencia.

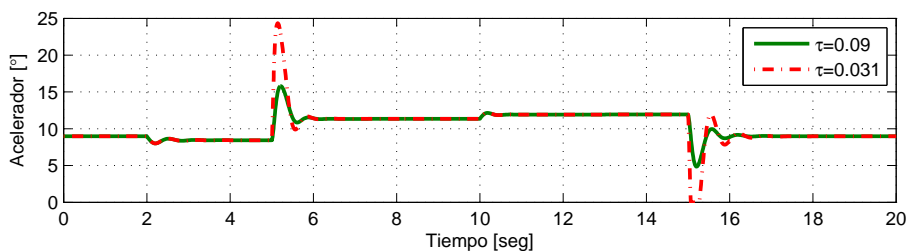


Figura 5.8: Ángulo del acelerador.

## 5.5. Trayectorias de pruebas

Las siguientes simulaciones tienen como finalidad mostrar el desempeño del seguimiento de la señal de referencia, recordemos que el conductor no puede a conciencia generar una



señal con alguna característica especial, además ningún sistema físico es capaz de realizar una transferencia de energía demasiado rápida como en el caso de la referencia tipo escalón, por lo que para estas simulaciones se optó por la elección de  $\tau = 0,031$  con el fin de evitar retardos de tiempo. La Figura 5.9 muestra una trayectoria de tipo hiperbólica, que parte del punto de equilibrio 2000 a 3000 r.p.m. en un intervalo de tiempo de 1 seg.

$$y_{d1} = \begin{cases} 2000 + 2000(t_f - t_0)^2 & \text{si } 3 \leq t \leq 3,5 \\ 2000(t_1 - t_f) - 2000(t_1 - t_f)^2 & \text{si } 3,5 \leq t \leq 4 \\ -2000(t_f - t_0)^2 & \text{si } 15 \leq t \leq 15,5 \\ -2000(t_1 - t_f) + 2000(t_1 - t_f)^2 & \text{si } 15,5 \leq t \leq 16 \end{cases} \quad (5.5.1)$$

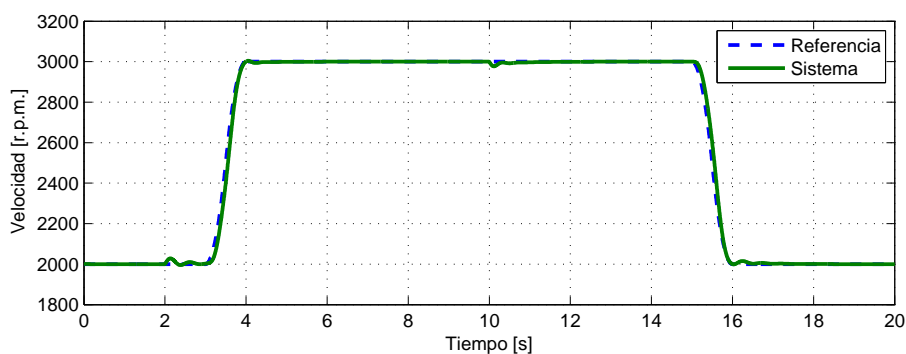


Figura 5.9: Seguimiento de la velocidad de referencia  $y_{d1}$ .

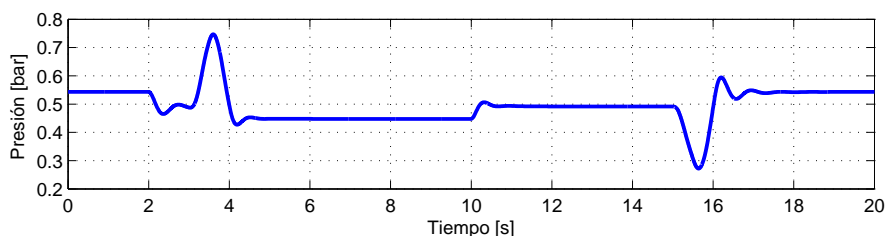


Figura 5.10: Presión del múltiple de entrada para la referencia  $y_{d1}$ .

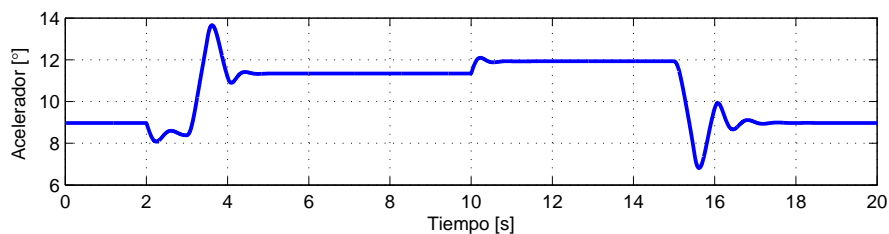


Figura 5.11: Posición del acelerador para alcanzar la referencia  $y_{d1}$ .

Las Figura 5.12 representa una aceleración del tipo constante que va desde el punto de equilibrio 2000 r.p.m. a 4000 r.p.m., en un intervalo de 2 segundos, y una desaceleración después de 14 segundos en un intervalo de 1 segundo, esto con el fin de mostrar el desempeño ante cambios abruptos de velocidad y aceleraciones, mostrando un buen desempeño de la variable de entrada.

$$y_{d2} = \begin{cases} 2000 + 1000(t_f - t_0) & \text{si } 3 \leq t \leq 5 \\ 2000(t_1 - t_f) - 2000(t_1 - t_f)^2 & \text{si } 12 \leq t \leq 13 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

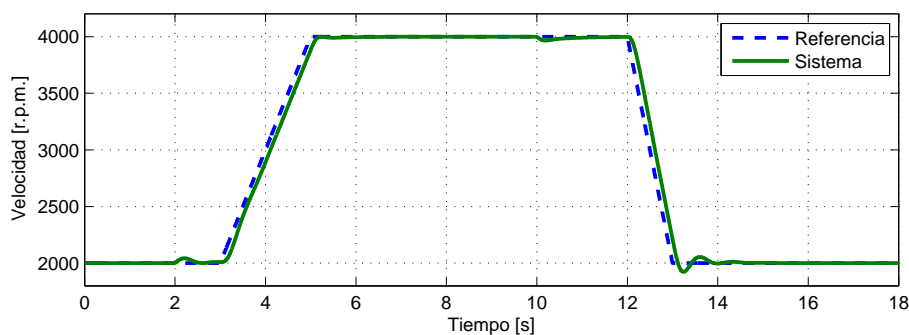


Figura 5.12: Seguimiento de la velocidad de referencia  $y_{d2}$ .

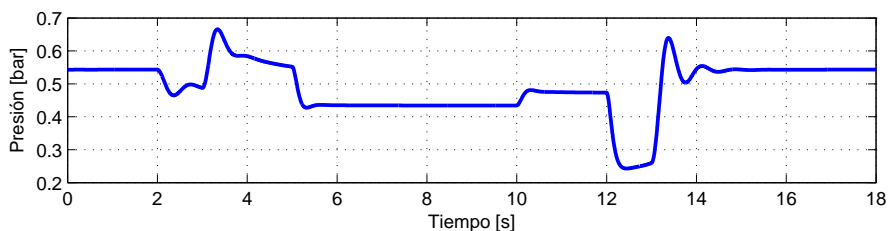


Figura 5.13: Presión del múltiple de entrada para la referencia  $y_{d2}$ .

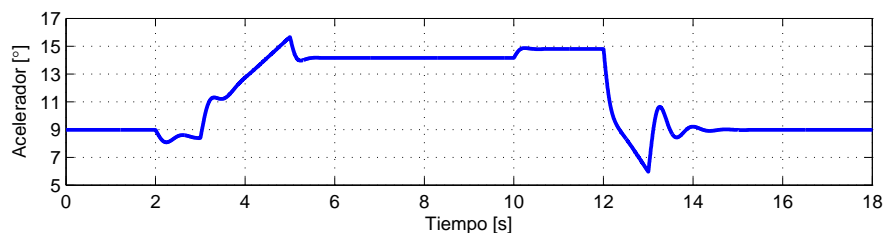


Figura 5.14: Posición del acelerador para alcanzar la referencia  $y_{d2}$ .

## 5.6. Linealización basada en planitud

Para el sistema no lineal descrito por las ecuaciones (4.6.3) y (4.6.4) se muestra que la velocidad  $w$  es una salida plana, la cual también resulta ser la salida del sistema  $y$ , entonces:

$$y = z_f = x_1 \quad (5.6.1)$$

con el fin de demostrar la planitud del sistema, todas las variables de estado y la entrada deben ser expresadas en función de  $z_f$  y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo, que constituyen un difeomorfismo cuya inversa esta dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_f \\ x_2 &= f(z_f, \dot{z}_f) \\ u &= f(z_f, \dot{z}_f, \ddot{z}_f) \end{aligned}$$

Al diferenciar (5.6.1) respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{z}_f = \frac{1}{J} \left\{ K_{1m} + K_{2m} \left( \frac{k_{mo0}}{z_f} + k_{mo1}x_2 + k_{mo2}x_2^2 + k_{mo3}z_fx_2 \right) + K_{3m}z_f + k_{e7}z_f^2 - \tau_l \right\}$$

igualando la expresión anterior a 0 y agrupando en términos de  $x_2$  se obtiene:

$$K_{2m}k_{mo2}x_2^2 + K_{2m}(k_{mo1} + k_{mo3}z_f)x_2 + k_{e7}z_f^2 + K_{3m}z_f + \frac{K_{2m}k_{mo0}}{z_f} + K_{1m} - \tau_l - J\dot{z}_f = 0$$

la solución a la ecuación cuadrática anterior para  $x_2$  resulta:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-[K_{2m}(k_{mo1} + k_{mo3}z_f)]}{2K_{2m}k_{mo2}} + \\ &+ \frac{\sqrt{[K_{2m}(k_{mo1} + k_{mo3}z_f)]^2 - 4(K_{2m}k_{mo2})(k_{e7}z_f^2 + K_{3m}z_f + \frac{K_{2m}k_{mo0}}{z_f} + K_{1m} - \tau_l - J\dot{z}_f)}}{2K_{2m}k_{mo2}} \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

utilizando la segunda derivada de (5.6.1)

$$\ddot{z}_f = \frac{1}{J} \left\{ \left( \frac{-K_{2m}k_{mo0}}{z_f^2} + K_{2m}k_{mo3}x_2 + K_{3m} + 2k_{e7}z_f \right) \dot{z}_f + K_{2m}(k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}z_f) \dot{x}_2 \right\}$$

sustituyendo  $\dot{x}_2$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$\ddot{z}_f = \frac{1}{J} \left\{ \left( \frac{-K_{2m}k_{mo0}}{z_f^2} + K_{2m}k_{mo3}x_2 + K_{3m} + 2k_{e7}z_f \right) \dot{z}_f + \right. \\ \left. + \frac{RT}{V} K_{2m} [k_{mo1} + 2k_{mo2}x_2 + k_{mo3}z_f] [-k_{mo0} - (k_{mo1}x_2 - k_{mo2}x_2^2 - k_{mo3}z_f x_2) z_f + g(x_2)u] \right\}$$

Realizando algunas simplificaciones algebraicas nos da como resultado la siguiente ley de control de prealimentación:

$$u = \frac{1}{\frac{RT}{V} g(x) K_{2m} (k_{mo1} + k_{mo2}x_2 + k_{mo3}z) z^2} \left\{ J \ddot{z} z^2 + [K_{2m} (k_{mo0} - k_{mo3}x_2 z^2) - (K_{3m} - 2k_{e7}z) z^2] \dot{z} + \right. \\ \left. \frac{RT}{V} K_{2m} [k_{mo0} + (k_{mo1}x_2 + k_{mo2}x_2^2 + k_{mo3}z x_2) z] [(k_{mo1} + k_{mo2}x_2 + k_{mo3}z) z^2] \right\} \quad (5.6.3)$$

con  $x_2 = f(z, \dot{z})$

La Figura 5.15 muestra la ley de control completa, se utilizó el mismo modelo de referencia con la diferencia de que las ganancias para el modelo difieren de las utilizadas en la realimentación  $K_1 = 1000$   $K_2 = 200$ , se utilizó el mismo observador descrito por las ecuaciones (5.3.8), (5.3.9), para estimar la cantidad de aire que ingresa al interior del cilindro, en este caso y en el anterior se requiere conocer los parámetros del modelo, en este caso, suponemos que no podemos estimar la perturbación de carga que afecta a el cigüeñal.

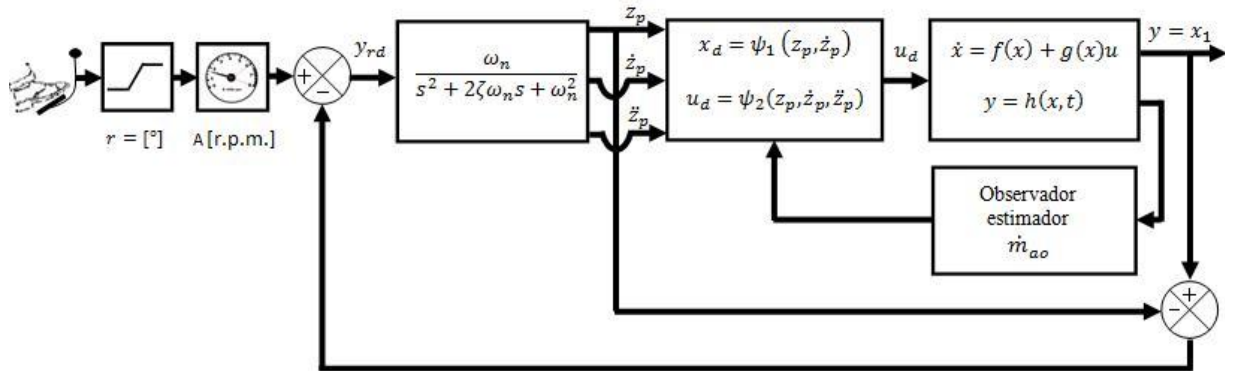


Figura 5.15: Realimentación basada en planitud.

Las Figuras 5.16 muestra la velocidad del cigüeñal estabilizada a una velocidad de  $2500\text{ r.p.m.}$  y a una velocidad de relentí de  $1000\text{ r.p.m.}$  , la Figura 5.17 muestra la dinámica de la presión del múltiple de entrada, por último la Figura 5.18 muestra la posición del pedal necesaria para alcanzar las referencias, se pueden apreciar que existen menos oscilaciones en el control, y en la señal de salida comparadas con las mostradas en las Figuras 5.5, 5.6, 5.7.

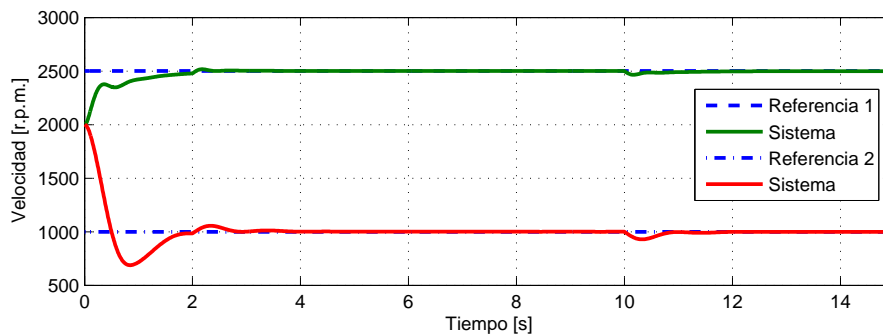


Figura 5.16: Velocidad regulada mediante la ley de control basada en planitud.

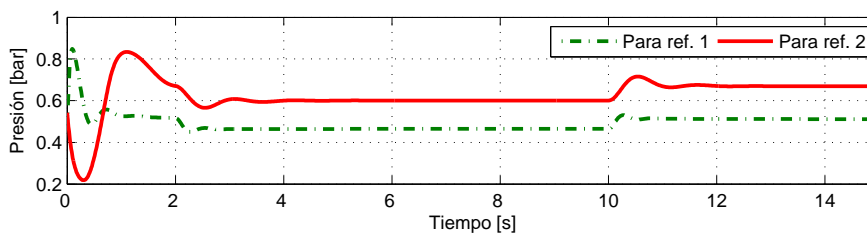


Figura 5.17: Presión del múltiple de entrada para la ley de control basada en planitud.

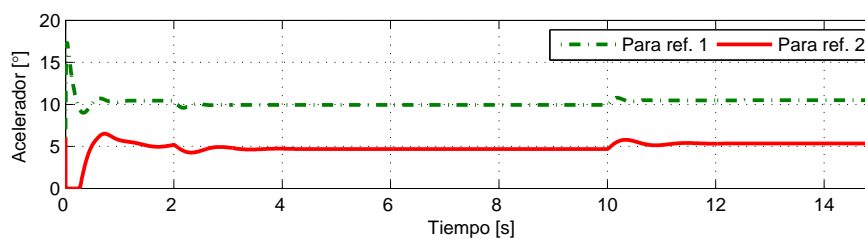


Figura 5.18: Posición del acelerador para la ley de control basada en planitud.

La Figura 5.19 muestra el desempeño de la ley de control basada en planitud, para el seguimiento de la trayectoria de referencia tipo hiperbólica  $y_{d1}$  descrita por (5.5.1). Se observa un pequeño transitorio al inicio, esto debido a que se asumió el hecho de que no es posible conocer el torque de carga que afecta al cigüeñal. La Figura 5.20 muestra la dinámica de la presión del múltiple de entrada, por último la Figura 5.21 muestra la posición del acelerador para lograr dicha referencia. Existen algunas leves diferencias con el desempeño mostrado en las Figuras 5.9, 5.10 y 5.11.

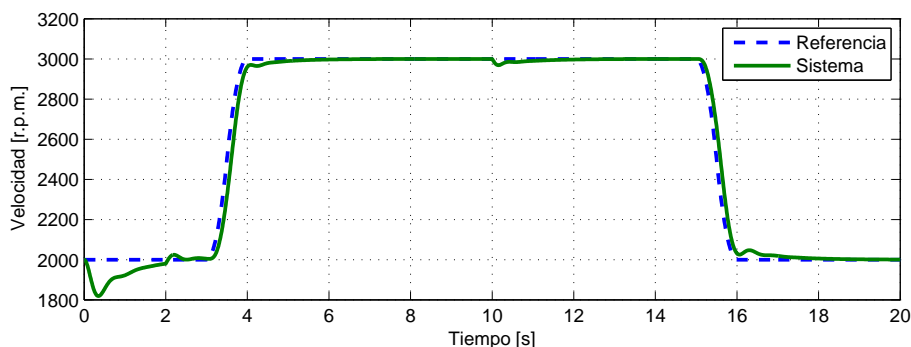


Figura 5.19: Seguimiento de la velocidad de referencia  $y_{d1}$  basada en planitud.

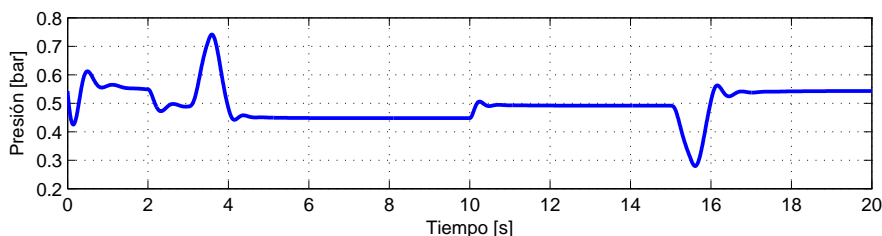


Figura 5.20: Presión del múltiple de entrada para la referencia  $y_{d1}$ .

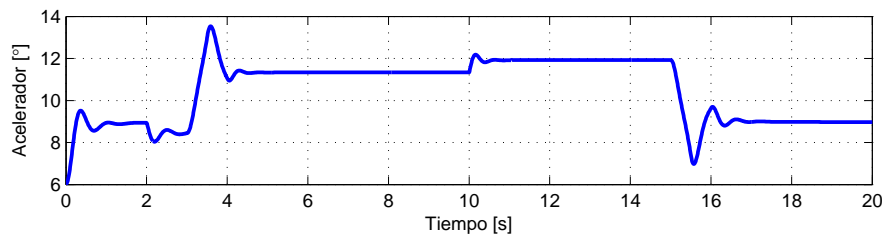


Figura 5.21: Ángulo del acelerador para la referencia  $y_{d1}$ .

La Figura 5.22 muestra el desempeño de la ley de control basada en planitud, para el seguimiento de la trayectoria de referencia  $y_{d2}$  descrita por (5.5.2). La Figura 5.23 muestra la dinámica de la presión del múltiple de entrada para el seguimiento de la referencia  $y_{d2}$ , por último la Figura 5.24 muestra la posición del acelerador para alcanzar dicha referencia.

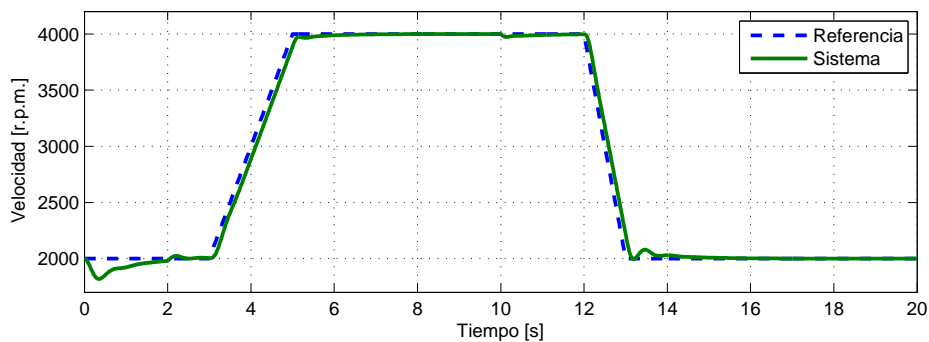


Figura 5.22: Seguimiento de la velocidad de referencia  $y_{d2}$ .

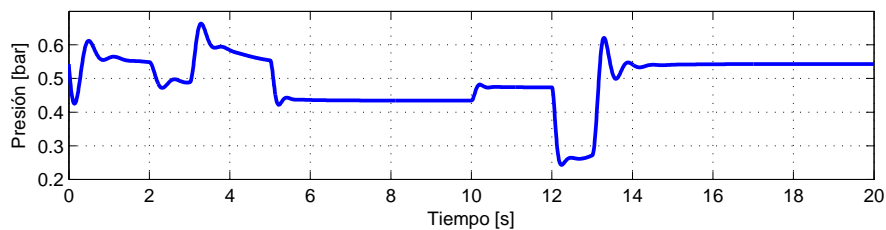


Figura 5.23: Presión del múltiple de entrada para la referencia  $y_{d2}$ .

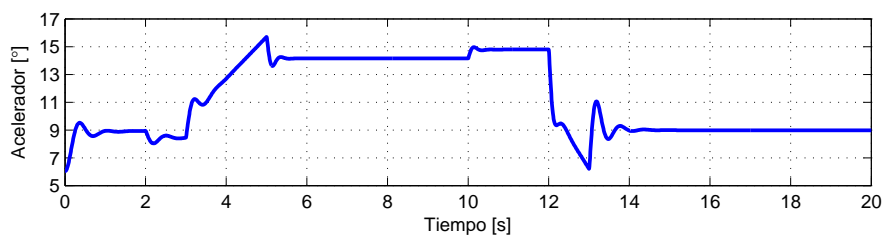


Figura 5.24: Ángulo del acelerador para la referencia  $y_{d2}$ .

## 5.7. Conclusiones

La clase de sistemas los cuales son diferencialmente planos son esencialmente los mismos que los sistemas dinámicamente linealizables por realimentación (hasta ciertas condiciones). Sin embargo, el punto de vista utilizado en el control de sistemas diferencialmente planos es substancialmente diferente que la linealización por realimentación: uno se puede concentrar en la generación de trayectorias factibles en lugar de transformar el sistema en un sistema lineal simple. Esto tiene la ventaja de permitir el diseño del control local o global en las coordenadas originales para el sistema, donde los características del controlador se pueden especificar de forma mas natural.



# Capítulo 6

## Efecto de la dinámica de la temperatura y EGR en el modelo

### 6.1. Introducción

Este capítulo se divide en dos partes: la primera de ellas consiste en la adición de la dinámica de la temperatura del múltiple de entrada, al modelo descrito por (4.6.3) y (4.6.4), dicha dinámica esta basada en [18], la cual consiste en un modelo global de las temperaturas y presiones en los múltiplos para un sistema de inyección de combustible cuando la recirculación de gases es considerada.

La segunda parte consiste en una estrategia de activación de la valvula EGR (Exhaust Gas Recirculation) por sus siglas en inglés, la cual reingresa una parte de los gases de escape al múltiple de entrada, bajo ciertas condiciones de velocidad del motor, con el fin de no afectar el desempeño del mismo, logrando de esta manera disminuir el contenido de oxígeno en el aire de admisión que provoca un descenso en la temperatura de combustión lo cual ayuda a reducir los óxidos de nitrógeno.

## 6.2. Modelo simplificado para control y observación

El modelo presentado en [18] se obtiene al calcular los balances de masas y energías en los múltiplos de entrada y salida considerados como reactores separados a través de los cuales fluyen gases a distintas temperaturas (Figura 6.1), bajo suposiciones usuales de gases ideales y presión-temperatura uniformes. Cuando la temperatura ambiente y la del gas de combustión son iguales, la ecuación clásica de presión en los múltiplos empleada en varios trabajos [20, 21] es obtenida. La relación dinámica de la presión y temperatura de los múltiplos no consideran las dinámicas del proceso de combustión dentro de los cilindros.

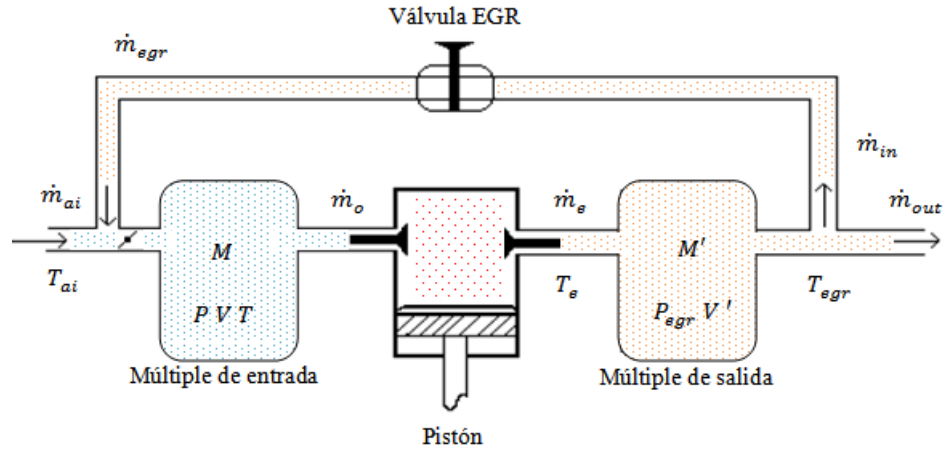


Figura 6.1: Diagrama simplificado de los múltiplos

El modelo simplificado, resulta de asumir despreciables las pérdidas de calor a través de las paredes de los múltiplos, y de considerar que la temperatura del gas que deja el cilindro es la del gas de recirculación [18].

$$\dot{P} = \frac{R(\dot{m}_{ai}T_{ai} + \dot{m}_{egr}T_{egr} - \dot{m}_oT)}{V} \quad (6.2.1)$$

$$\dot{T} = \frac{RT(\dot{m}_{ai}[T_{ai} - T])}{PV} + \frac{RT(\dot{m}_{egr}[T_{egr} - T])}{PV} \quad (6.2.2)$$

$$\dot{P}_{egr} = \frac{RT_{egr}(\dot{m}_e - \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out})}{V'} \quad (6.2.3)$$

$$\dot{T}_{egr} = 0 \quad (6.2.4)$$

### 6.3. Efecto de la temperatura en la dinámica del modelo

Las siguientes simulaciones son resultado de agregar la dinámica de la temperatura del múltiple de entrada dada por la ecuación (6.2.2) al modelo matemático del motor descrito por las ecuaciones (4.6.3) y (4.6.4). La Figura 6.2 muestra los cambios en la presión del múltiple debido a variaciones en la temperatura, estos cambios de presión afectan la velocidad angular del motor como se observa en la Figura 6.3, por lo que un cambio en la temperatura modifica el desempeño del sistema.

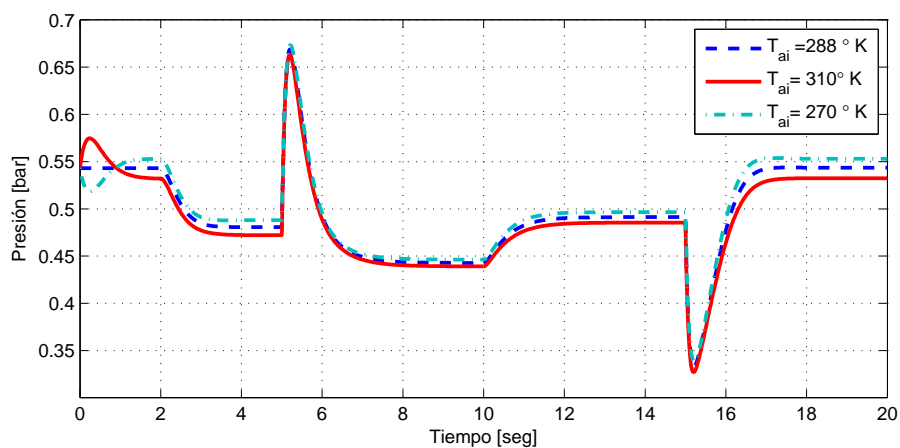


Figura 6.2: Variación de la presión en el múltiple de entrada debida a la temperatura.

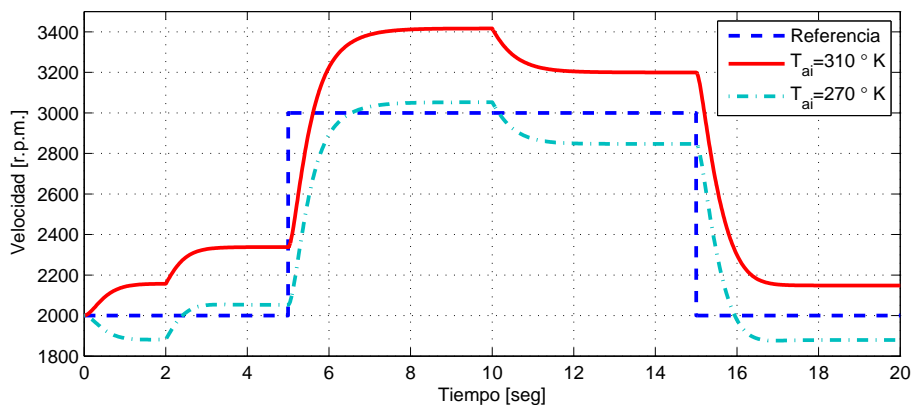


Figura 6.3: Velocidad del motor debida a cambios en la presión del múltiple de entrada.

## 6.4. Efecto de la válvula EGR en la dinámica del modelo

Debido a la existencia de normas que regulan la contaminación ambiental (TIER, EPA, EURO) cada vez más exigentes, desde los 90 se ha implementado el uso de la válvula EGR, cuya función es la de recircular los gases de escape, con el fin de disminuir especialmente los óxidos de nitrógeno ( $NO_x$ ). Se usa principalmente en los motores diesel y su implementación es cada vez mayor en motores a gasolina. Los principales contaminantes son:

- Los hidrocarburos ( $HC$ ).
- El óxido de carbono ( $CO$ ).
- Partículas por reacción química de oxidación.
- El óxido de nitrógeno ( $NO_x$ ).

Los tres primeros se reducen en el catalizador, por medio de oxidación. Aunque actualmente se han desarrollado catalizadores capaces de oxidar los  $NO_x$ s, la estrategia común o clásica a seguir es el trato previo de dicho contaminante antes de que llegue al escape, con este fin es usado el sistema EGR. El gas de recirculación se aplica en proporciones que oscilan entre un 10 y un 30% [22] del total de la mezcla de gases entrantes a los cilindros, pero generalmente se utiliza menos del 10%. Cuando se agrega el gas de recirculación se considera que la mezcla contiene gas inerte el cual retarda la combustión, es por esto que la fase de potencia se ve disminuida y pueden presentarse problemas de manejabilidad.

En la Figura 6.4 se muestra la activación de la válvula EGR dependiendo de ciertas condiciones de velocidad, esto con el fin de no disminuir el torque generado por el motor, la lógica de activación debe tomar en cuenta que, si existen demandas de velocidad por parte del conductor, el uso de la válvula EGR queda restringido.

La válvula se activará bajo las siguientes consideraciones de velocidad:

$$EGR = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq t_{aceleracin} \leq t^+ [seg] \\ 1 & \text{si } 1000 \leq Vel. \leq 3000 [r.p.m.] \end{cases}$$

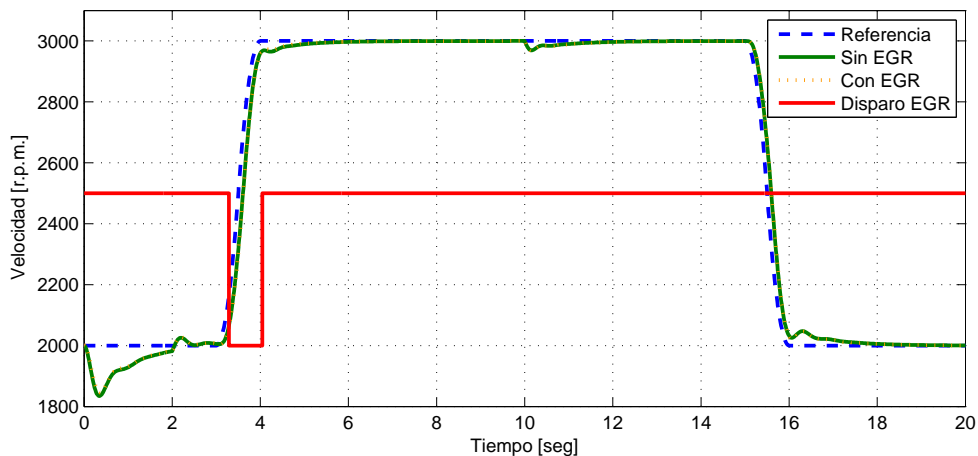


Figura 6.4: Condiciones de velocidad para la activación de la válvula EGR

La Figura 6.5 muestra la cantidad de masa de aire en gramos que reingresa al múltiple de entrada, para realizar esta simulación se asumió que el gas que ingresa al interior del cilindro es el mismo que es expulsado fuera de él, por lo que se recirculó una proporción de un 30 % de este gas.

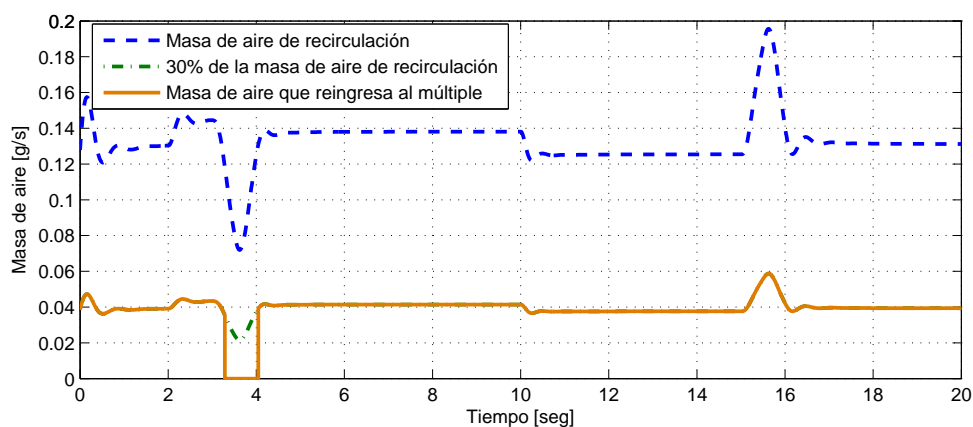


Figura 6.5: Masas de aire de recirculación

En la Figura 6.6 se muestra la dinámica de la temperatura, la cual tiene una variación lineal y lenta, motivo por el que diversos autores la consideran constante bajo ciertas condiciones de operación. Se observa como la temperatura se incrementa más rápidamente cuando existe una demanda de velocidad por parte del conductor, la medición de este valor nos puede ayudar a mejorar el control de las emisiones de  $NO_x$ .

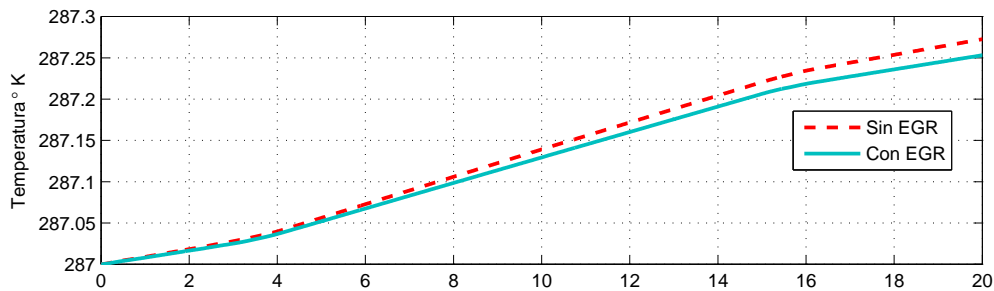


Figura 6.6: Temperatura en el múltiple de entrada por el uso de la EGR

La Figura 6.7 muestra la presión del múltiple de entrada y como es que ésta varía al considerar la dinámica de la temperatura y el uso de la válvula EGR. La presión decae ligeramente cuando se recirculan los gases, pero el control evita los constantes cambios en las velocidades del motor observadas en las simulaciones en lazo abierto.

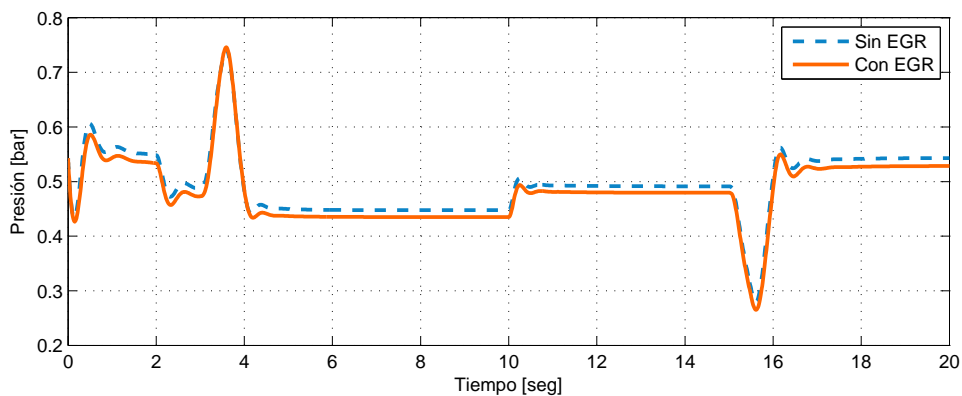


Figura 6.7: Presión en el múltiple de entrada debido a el uso de la válvula EGR

## 6.5. Conclusiones

En este capítulo se observó como es que la adición de la dinámica de la temperatura del múltiple y el uso de la válvula EGR afectan considerablemente el desempeño del motor, alterando la velocidad del mismo, esto se puede relacionar cuando por ejemplo encendemos el motor en un día frío, la velocidad decaerá de tal manera que se volverá inestable hasta que el motor y el múltiple alcance una temperatura ideal, esto provoca combustiones incompletas por tanto las emisiones de hidrocarburos no quemados se incrementan, caso contrario cuando se enciende el motor en un día cálido, se observa como es que este no requiere del previo calentamiento e incluso este se revolucionará de manera excesiva a la hora del encendido.

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo futuro

Durante el desarrollo de este trabajo se a llegado a distintas conclusiones acerca de las estrategias utilizadas en el control de velocidad del motor de combustión interna y de como la variación y consideración de ciertos parámetros nos pueden ayudar a mejorar la operación de dispositivos utilizados en el tratamiento de gases contaminantes resultantes de la combustion.

- El método de la geometría diferencial es un concepto útil para el control y linealización de los modelos no lineales, ya que gracias a estas herramientas nos es posible observar las diversas propiedades del modelo en cuestión tales como: controlabilidad, observabilidad y la region de validez del control (local ó global) dada por las singularidades del sistema. Aunque la linealización por realimentación mediante el uso de técnicas de la geometría diferencial es un método muy popular, este tiene algunos inconvenientes, principalmente la transformación de coordenadas, la cual hace difícil el diseño del controlador, y aún mas cuando los estados no corresponden a cantidades físicas del sistema.
- La planitud diferencial como método de linealización resulta ser un concepto útil para realizar un controlador, ya que si el sistema posee dicha propiedad, bastará con solo invertirlo y mapearlo en función de la salida plana para encontrar la ley de control de prealimentación que estabilice al sistema, en el caso de que se requiera planeación de



trayectorias, si se requiere hacer la trayectoria en línea también resulta útil puesto que solo se enfoca a obtener las señales de control por medio de un modelo de referencia u observación, si las ecuaciones que describen exactamente el sistema, el problema de observación se vuelve aun más fácil.

## 7.1. Trabajo futuro

En base a los resultados obtenidos se han llegado a las siguientes recomendaciones como trabajo a futuro, la expectativa es incrementar las ecuaciones que describen el comportamiento del motor de combustión interna, con el fin de aproximar lo más posible al modelo real, ya que son diversos los factores y componentes involucrados en el ahorro de combustible y en las emisiones contaminantes, mas concretamente:

- Implementar el controlador de velocidad en el motor de combustion interna y con base a la lógica de activación de la válvula EGR, elaborar un controlador para la misma.
- Extender el modelo agregando las ecuaciones que describen la dinámica de la inyección del combustible, ya que es un factor importante en el ahorro del energético utilizado en el motor.
- Realizar un estudio detallado de las ecuaciones que describen la cantidad de emisiones arrojadas por un motor de combustión interna, para poder corroborar de forma tangible dichas emisiones.
- Hacer un estudio exhaustivo de los componentes que afectan el desempeño del motor y como es que se pueden mejorar, dígame aire acondicionados, encendido de luces, alternador, etc.

# Apéndice A

## Geometría diferencial

Considerando la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n \quad (\text{A.0.1})$$

con  $f \in C^0 : (R^n \times R^+, R^n)$ .

**Teorema A.0.1. (Existencia y unicidad local)** *Suponga que existen las siguientes constantes finitas  $\alpha_\tau, \beta_\tau$  tales que*

(i)  $\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq \alpha_\tau \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in B_r, \forall t \in [t_0, \tau],$

(ii)  $\|f(x_0, t)\| \leq \beta_\tau, \forall t \in [t_0, \tau]$

con  $B_r = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ , entonces (A.0.1) tiene solo una solución alrededor de  $[t_0, T]$  para  $T$  suficientemente pequeño tal que  $t_0 < T < \tau$

**Teorema A.0.2. Existencia y unicidad global** *Suponga que para cada  $\tau \in [t_0, t)$  existe una constante finita  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  tal que*

(i)  $\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq \alpha_\tau \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in R^n, \forall t \in [t_0, \tau],$

(ii)  $\|f(x_0, t)\| \leq \beta_\tau, \forall t \in [t_0, \tau]$

entonces (A.0.1) tiene solamente una solución alrededor de  $[t_0, \infty)$

## A.1. Realimentación dinámica y estática

En la realimentación de estado; existen 2 tipos básicos:

- **Realimentación de estado estática**

Este método de control es tal que el valor del vector de entrada  $u$  en cada instante de tiempo  $t$  depende del estado  $x$  y de los componentes  $v_1, \dots, v_m$  de algún vector de referencia  $v$ :

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x)v_j$$

- **Realimentación de estado dinámica**

En este modo de control, el valor de el vector de entrada  $u$  en cada instante de tiempo  $t$  depende del estado  $x$ , los componentes de algún vector de referencia  $v$  y además del valor de un vector de estado adicional auxiliar  $z = (z_1, \dots, z_k)$ :

$$u_i = \alpha_i(x, z) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x, z)v_j$$

$$\dot{z} = \gamma_i(y, z) + \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(y, z)v_j$$

## A.2. Difeomorfismo

Sea  $p$  un punto en  $E^n$ , del espacio Euclidiano  $n$ -dimensional, y  $U$  un vecindario de  $p$ . Sea  $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q)) : U \rightarrow V \subset R^n$  ser un **homeomorfismo** que es uno a uno y sobre es

decir una *biyección*, con  $\varphi, \varphi^{-1}$  continuos en  $R^n = R \times \dots \times R$ ,  $R$  los números reales.  $(U, \varphi)$  es llamado un **vecindario de coordenadas** o una carta coordenada y los números reales  $x_1(q), \dots, x_n(q)$ , los cuales varían continuamente, son las coordenadas locales de  $q \in E^n : x_i(q)$  es llamada la  $i$ -ésima función coordenada. Si ambos  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son mapeos suaves,  $\varphi$  es llamado **difeomorfismo**. Si ambos  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  están definidos en  $R^n$  y son mapeos suaves,  $\varphi$  es llamado **difeomorfismo global** dados dos vecindarios de coordenadas  $(U, \varphi), (W, \psi)$  con  $U \cap W \neq \emptyset$  y  $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q)), \psi(q) = (z_1(q), \dots, z_n(q))$  el homeomorfismo.

$$\psi \circ \varphi^{-1} : R^n \rightarrow R^n$$

es una **transformación de coordenadas** en  $U \cap W$ , es decir

$$z = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = z(x)$$

el mapeo inverso es

$$x = \varphi \circ \psi^{-1}(z) = x(z)$$

si  $x$  y  $z$  son representados mediante vectores con  $n$  componentes, llamados

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.1})$$

la transformación de coordenadas esta expresada por  $n$  funciones continuas con valores reales definidas en  $R^n$ , es decir

$$x(z) = \begin{bmatrix} x_1(z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ x_n(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix}, \quad z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ z_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.2})$$

si ambos homeomorfismos  $z(x)$  y  $x(z)$  son mapeos suaves, la transformación de coordenadas es un difeomorfismo. Si ambos homeomorfismos  $z(x)$  y  $x(z)$  son mapeos suaves definidos en  $R^n$

la transformación de coordenadas es un difeomorfismo global. Recordemos ahora un resultado bien conocido proveniente del cálculo el cual provee condiciones suficientes para que un mapeo sea un difeomorfismo.

**Teorema A.2.1. (Función inversa)** Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $R^n$  y sea  $\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \rightarrow R^n$  un mapeo suave. Si la **matriz Jacobiana**

$$\frac{d\varphi}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

es no singular en algún punto  $p \in U$  entonces existe un vecindario  $V \subset U$  de  $p$  tal que  $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$  es un difeomorfismo.

Sea  $h : U \subset E^n \rightarrow R$  una función real definida en  $U$ . En función del vecindario de coordenadas  $(U, \varphi)$  elegidos, la función  $h$  se expresa en coordenadas locales como

$$\mathcal{H}_\varphi = h \circ \varphi^{-1} : R^n \rightarrow R$$

La expresión  $h_\varphi$  dependerá de las coordenadas locales elegidos.

Un **sistema dinámico** es un mapeo  $\phi_t(p) : R \times U \rightarrow U \subset C^1$ , donde  $U$  es un conjunto abierto en el espacio Euclidiano el cual satisface:

- (i)  $\phi_0(p) = p$
- (ii)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  para cada  $t, s \in R$

con  $\phi_t(p)$  mapeando  $U \rightarrow U$ . Esta definición implica que el mapeo  $\phi_t(p)$  tiene un inverso  $\phi_{-t}(p) \in C^1$ . Un sistema dinámico define un campo vectorial

$$f(p) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(p) \right|_{t=0}$$

el cual es un vector tangente a la curva  $t \rightarrow \phi_t(p)$  en  $t = 0$ . Dada una carta coordenada  $(U, \varphi)$ , la curva  $t \rightarrow \phi_t(p)$  puede ser expresada como  $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$  y

$$\begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_n(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.4})$$

Por lo tanto  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  es la solución a la ecuación diferencial con condición inicial  $x(0)$  dadas por

$$\dot{x} = f(x).$$

Si  $z(x)$  denota una transformación de coordenadas con inversa  $x(z)$ , la ecuación diferencial es expresada en nuevas coordenadas como

$$\dot{z} = \left( \frac{dz}{dx} f \right) \circ x(z) \triangleq \tilde{f}(z).$$

Inversamente, un campo vectorial define un único sistema dinámico siempre que  $f$  satisfaga la condición local de Lipschitz (ver teorema b.1.2). El proceso inverso de lo anterior es: dada una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.2.5})$$

es decir un campo vectorial  $f$ , con condición inicial  $x_0$ , determina una curva integral  $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$  la cual es una solución a (A.1) y tal que  $x(0) = x_0$ .

Una solución para la ecuación diferencial podría no estar definida para toda  $t$ . Por ejemplo, la ecuación en  $R$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$

tiene como solución la función

$$x(t) = \tan(t - c) \quad c = \text{constante} \quad (\text{A.2.6})$$

la cual no puede ser extendida alrededor del intervalo mayor que

$$c - \frac{\pi}{2} < t < c + \frac{\pi}{2}$$

ya que  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  como  $t \rightarrow c \pm \frac{\pi}{2}$ . Un campo vectorial se dice que es completo si la solución a la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  esta bien definida para toda  $t \in \mathbb{R}$ . De acuerdo con el teorema B.1.2 un campo vectorial que satisface las condiciones (i) y (ii) es completo.

### A.3. Derecha inversa

La derecha inversa [13]  $\tilde{\Sigma}^r : Y \rightarrow U$  del sistema  $\tilde{\Sigma}$  es un mapeo con la propiedad

$$\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}^r\tilde{y}_d = \tilde{y}_d = \tilde{y} \tag{A.3.1}$$

para todo  $y_d \in Y$ .

Entonces, para cada  $y_d \in Y$  la derecha inversa  $\tilde{\Sigma}^r$  genera una entrada  $u$  tal que la salida del modelo  $y$  siga exactamente la trayectoria  $y_d$

# Apéndice B

## Observadores

### B.1. Observador como estimador de parámetros

Considérese el sistema de una salida de la forma

$$\dot{x}(t) = F(s(t), y(t))x(t) + G(u(t), s(t), x(t)) \quad (\text{B.1.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{B.1.2})$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , y  $y \in \mathbb{R}$ ,  $s$  es una señal conocida.

$$F(s, y) = \begin{bmatrix} 0 & f_1(s, y) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & f_{n-1}(s, y) \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.3})$$

$$G(u, z) = \begin{bmatrix} g_1(u, s, z_1) \\ g_2(u, s, z_1, z_2) \\ \vdots \\ g_n(u, s, z) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.4})$$

$$C = (1, 0, \dots, 0)$$



Se asume lo siguiente:

- A1)** Existe una clase  $U$  de controles acotados admisibles, un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  y dos constantes positivas  $\alpha, \beta$ , tales que para cada  $u \in U$  y cada salida  $y(t)$  asociada a  $u$  y a un estado inicial  $z(0) \in K$  tenemos  $0 < \alpha \leq f_i(s, y) \leq \beta, i = 1, \dots, n - 1$
- A2)**  $s(t)$  y su derivada con respecto al tiempo  $\frac{ds(t)}{dt}$  son acotadas.
- A3)** Las funciones  $f_i, i = 1, \dots, n - 1$  son de clase  $C^r, r \geq 1$ , con respecto a sus argumentos.
- A4)** Las funciones  $g_i, i = 1, \dots, n$  son globalmente Lipschitz con respecto a  $z$  uniformemente en  $u$  y  $s$ .

Ahora considérese la matriz  $S_\theta$ , que es la única solución a la ecuación algebraica de Lyapunov.

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0 \quad (\text{B.1.5})$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \quad C = (1, 0, \dots, 0)$$

y  $\theta$  es un parámetro.

La solución explícita de (B.1.5) esta dada por

$$S_\theta(i, j) = \frac{(-1)^{i+j} C_{i+j+2}^{j-1}}{\theta^{i+j-1}}, \quad 1 < i, j < n \quad (\text{B.1.6})$$

donde  $C_n^p df k l d k$ ,  $S_\theta$  es simétrica positiva para todo  $\theta > 0$ .

$$\Lambda(s, y) = \begin{bmatrix} C \\ CF(s, y) \\ \vdots \\ CF^{n-1}(s, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ f_1(s, y) & & \\ & f_1(s, y)f_2(s, y) & \vdots \\ & & \ddots \\ 0 & \dots & f_1(s, y) \dots f_{n-1}(s, y) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.7})$$

**Teorema B.1.1.** *Asuma que el sistema (B.1.1) satisface lo asumido en A1) a A4), entonces  $\exists \theta_0 > 0$  tal que  $\forall \theta > \theta_0$ ,  $\forall u \in U$ ;  $\forall x(0) \in K \forall z(0) \in \mathbb{R}^n$  el siguiente sistema*

$$\dot{z} = F(s, y)z + G(u, s, x) - \Lambda^{(-1)}(s, y)S_\theta^{-1}C^T(c\hat{z} - y) \quad (\text{B.1.8})$$

*con  $S_\theta$  que satisface (B.1.5) es un observador exponencial para el sistema (B.1.1), más aun, la dinámica del sistema puede hacerse arbitrariamente rápida.*

# Apéndice C

## Motores de combustión interna

Los procesos de intercambio de gases en un motor de combustión interna juega un papel muy importante debido a que de ellos depende el correcto funcionamiento del motor, a continuación se presentan a grandes rasgos conceptos que ayudan a su entendimiento.

### C.1. Eficiencia volumétrica

El filtro de aire, el carburador, la válvula de la garganta, el múltiple de entrada, el puerto de entrada, y su válvula son elementos que restringen la cantidad de aire que un motor de un desplazamiento dado puede inducir. La eficiencia volumétrica es utilizada como una medida general de la efectividad de un ciclo de cuatro tiempos, y sus sistemas de admisión y exhaustión, como dispositivos de bombeo.

$$\eta_v = \frac{2m_a}{\rho_a V_d N} \quad (\text{C.1.1})$$

La densidad del aire  $\rho_a$  puede evaluarse en condiciones atmosféricas;  $\eta_v$  es entonces la eficiencia volumétrica general o puede evaluarse en condiciones de puertos de entrada, (múltiple de entrada), en cuyo caso  $\eta_v$  es entonces la medida del desempeño de bombeo del cilindro, puerto de admisión, y válvula solamente.

La eficiencia volumétrica es afectada por las siguientes variables en el combustible, diseño del motor y variables operativas.

1. Temperatura de la mezcla.
2. Relación de presiones de exhaustión y admisión.
3. Velocidad del motor.
4. Diseño de los puertos y múltiple de admisión.
5. Geometría de las válvulas de admisión y salida, tamaño de las mismas y temporizado.

Los efectos de varias de las variables anteriores, es esencialmente cuasi-estático en su naturaleza, es decir, su impacto es ya sea independiente de la velocidad o puede describirse adecuadamente en términos de la velocidad media del motor. Sin embargo, muchas de estas variables tienen efectos que dependen del flujo turbulento y fenómenos de presión que acompañan la naturaleza variable de los procesos de intercambio de gases.

## C.2. Proceso de intercambio de gases ( $\dot{m}_{ao}$ )

El flujo de masa de aire que entra a los pistones se relaciona con variables difíciles de modelar, entre ellas están la presión en el múltiple de entrada, la velocidad del motor, y el desplazamiento del motor, la siguiente es una ecuación que describe este proceso en condiciones estables:

$$\dot{m}_{ao} = \frac{\eta_v V_d P \omega}{4\phi R_m T} \quad (\text{C.2.1})$$

donde:

- $R_m$  es una función relacionada a constantes y temperaturas de los gases en el múltiple.
- $V_d$  = Desplazamiento del motor.
- $\omega$  = Velocidad del motor.

### C.3. Proceso de admisión y exhaustión en un motor SI

En un motor SI, el sistema de admisión típicamente consiste en un filtro de aire, un carburador y una garganta, o una garganta e inyector de combustible, o garganta con inyectores individuales en cada puerto de admisión, y un múltiple de entrada.

Durante los procesos de inducción, las pérdidas de presión ocurren según la mezcla pasa por cada uno de estos componentes, hay caída de presión adicional a través del puerto y la válvula de admisión. El sistema de salida típicamente consiste de un múltiple de salida, una tubería de escape de convertidor catalítico para el control de las emisiones y un mofle o silenciador. Los flujos pueden ser analizados en un régimen-cuasi estático. La caída de presión en el sistema de admisión depende de la velocidad del motor, la resistencia al flujo de los elementos en el sistema, el área transversal por la que se mueve la carga y la densidad de la carga. Es prácticamente general el extender el tiempo de apertura de las válvulas de admisión y salida un intervalo de tiempo de manera que el intercambio de gases sea más eficiente.

El proceso de exhaustión, usualmente inicia entre  $40^\circ$  y  $60^\circ$  antes del PMI. Cuando se llega a PMI, los gases quemados son descargados del cilindro debido a la diferencia de presión entre el cilindro y el sistema de exhaustión. Después de PMI, el cilindro es barrido por el pistón conforme este se mueve hacia PMS, los términos descarga y desplazamiento son útiles para denotar estas dos fases en el proceso de exhaustión.

Típicamente, la válvula de salida cierra entre  $15^\circ$  y  $30^\circ$  después de PMS, y la válvula de entrada abre entre  $10^\circ$  y  $20^\circ$  antes de PMS. Ambas válvulas se mantienen abiertas durante un periodo de *empalme*, y cuando  $\frac{P_i}{P_0} < 1$ , el reflejo de gases de salida hacia el cilindro y el flujo del cilindro hacia el múltiple de admisión puede ocurrir.

Conforme el pistón se mueve y sobrepasa PMS y la presión del cilindro cae debajo de la

presión de admisión, el gas fluye del múltiple de entrada al cilindro. La válvula de admisión se mantiene abierta hasta  $50^\circ$  a  $70^\circ$  después de PMI, de esta manera carga fresca continua fluyendo dentro del cilindro después de PMI, Figura C.1.

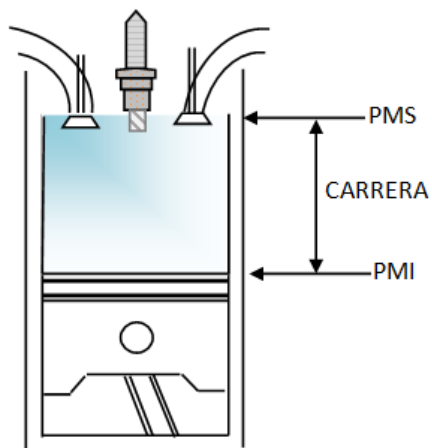


Figura C.1: Sistema cilindro-pistón.

En un motor diesel, el carburador o sistema electrónico de inyección (EFI por sus siglas en inglés) y garganta variable están ausentes.

# Bibliografía

- [1] Riesco Ávila et al. *Procesos alternativos de combustión en motores de combustión interna*. In Acta Universitaria en línea, 15 (enero-abril) 2005.
- [2] TABOADA IBARRA et al. *El diesel para autotransporte en México. Situación actual y prospectiva*. In El cotidiano, 2009.
- [3] A. García. *Estudio de los efectos de la post inyección sobre el proceso de combustión y la formación de hollín en motores Diesel*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, 2009.
- [4] A.G. Stefanopoulou, I. Kolmanovsky, and J.S. Freudenberg. *Control of variable geometry turbocharged diesel engines for reduced emissions*. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 8(4):733 –745, jul 2000.
- [5] Christopher Simoson and John Wagner. *Effects of Cooled EGR on a Small Displacement Diesel Engine: A Reduced-Order Dynamic Model and Experimental Study*. Journal of Energy Resources Technology, 130(1):011102, 2008.
- [6] F. Rivas-Echeverría y O. Llanes-Santiago H. Sira-Ramírez, R. Márquez. *Control de sistemas no lineales*. Prentice Hall, 2005.
- [7] P. Tomei R. Marino. *Nonlinear Control Design*. Prentice Hall, 1992.
- [8] Michel Fliess, Jean Lévine, and Pierre Rouchon. *Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples*. International Journal of Control, 61:1327–1361, 1995.
- [9] R. M. Murray and P. Rouchon. *Flat systems, equivalence and trajectory generation*. Technical report, 2003.
- [10] Jean Levine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems A Flatness-based Approach*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [11] Atilio Morillo Piña. *Generación de trayectorias en sistemas diferencialmente planos*. Revista técnica de ingeniería, 2001.
- [12] M. Rathinam. *Differentially flat nonlinear control systems*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1997.

- [13] Nitsche, R. and Schwarzmann, D. and Hanschke, J. *Nonlinear Internal Model Control of Diesel Air Systems*. Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP, 62(4):501–512, 2007.
- [14] Asymptotic tracking of a reference trajectory by output-feedback for a class of non linear systems. *Systems & Control Letters*, 58(9):652 – 663, 2009.
- [15] P.R. Crossley and J.A. Cook. *A nonlinear engine model for drivetrain system development*. In Control 1991. Control '91., International Conference on, pages 921 –925 vol.2, mar 1991.
- [16] P. F. Puleston M. Khalid Khan, Sarah K. Spurgeon. *Robust speed control of an automotive engine using second-order sliding modes*. In proceedings of the European Control Conference, pages 974–978, 4–7, September 2001.
- [17] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, 4ta. edición edition, 2003.
- [18] D. Díaz and K. Busawon. *Modelado y control de recirculación de gases de escape en motores de inyección de combustible*. Master's thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2000.
- [19] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Macmillan Pub. Co., 1992.
- [20] Eriksson, L. *Modeling and control of turbocharged SI and DI engines*. Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP, 62(4):523–538, 2007.
- [21] Jonathan Chauvin, Gilles Corde, Nicolas Petit, and Pierre Rouchon. *Motion planning for experimental airpath control of a diesel homogeneous charge-compression ignition engine*. Control Engineering Practice, 16(9):1081 – 1091, 2008.
- [22] J.B. Heywood. *Internal combustion engine fundamentals*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 1988.