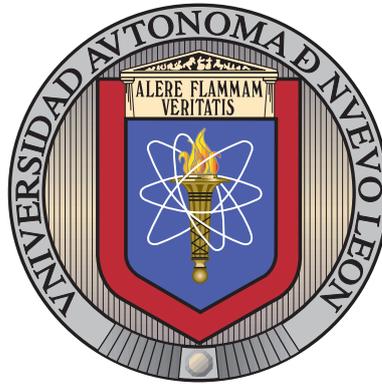


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON OSCILADORES
CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

POR

ING. SARA Yael ANGULO GUZMÁN

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

JULIO DE 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON OSCILADORES
CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

POR
ING. SARA Yael ANGULO GUZMÁN

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

JULIO DE 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **“SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON OSCILADORES CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO”** realizada por la alumna **ING. SARA Yael ANGULO GUZMÁN**, matrícula número 1572377 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

Asesor
Dr. Cornelio Posadas Castillo

Revisor:
Dr. David A. Díaz Romero

Revisor:
Dr. César Cruz Hernández

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado
Cd. Universitaria, a Julio de 2012

*Dedicado a Dios, a mis padres Zenén y Rosario, mis hermanas Mona,
Chary y Eunice. A todos quienes les debo estar aquí...*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme terminar una etapa más en la vida llena de logros y bendiciones y por sostenerme en los momentos más difíciles.

A mis padres por apoyar las decisiones que he tomado, por su amor y comprensión. Les estaré siempre agradecida.

A mis hermanas que han sido un pilar muy fuerte en mi vida, gracias por sus comentarios, por su apoyo incondicional y por empujarme a ser una mejor persona.

A toda la familia, gracias por tantos buenos momentos que hemos compartido, por sus palabras de aliento y porque aunque están lejos siempre han estado pendiente de mí.

A esas personas que me brindaron su cariño incondicional. A las familias Baca Valle y Murrieta Valle porque siempre obtuve de ellos apoyo y cariño. A Grecia y Francia por recibirme en su casa y brindarme su cariño, las quiero mucho.

A Cinthya, por ser una buena amiga y por apoyarme siempre.

A las personas que aún no presentes de algún modo me impulsaron para que llegara hasta aquí, gracias.

A mis compañeros y amigos del posgrado, por todos los momentos que compartimos juntos. Gracias por hacer este camino más ameno.

Al Dr. Cornelio Posadas, asesor de tesis y profesor, quien supo guiarme en el transcurso de este proyecto y por todos sus consejos y comentarios que fueron de vital importancia para la culminación de los objetivos. Por su paciencia y sus enseñanzas, gracias!

A mis revisores Dr. David Díaz Romero y Dr. César Cruz Hernández por sus comentarios que sin duda enriquecieron este trabajo y por los consejos siempre bienvenidos, gracias.

A todos los profesores del DIE que sin duda aportaron conocimientos invaluableles en mi desarrollo profesional, les estoy agradecida.

A CONACyT por la beca otorgada para mis estudios de maestría durante la duración de este proyecto y a PROMEP por los recursos asignados como apoyo al crecimiento de este proyecto.

RESUMEN

Sincronización de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario.

Publicación No. _____

Sara Yael Angulo Guzmán, Ing. en Electrónica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2012

Profesor Asesor: Dr. Cornelio Posadas Castillo

Este trabajo de investigación versa sobre la sincronización de sistemas complejos construidos con osciladores caóticos de orden fraccionario. Se aborda el tema de sistemas fraccionarios particularmente en sistemas con régimen caótico y su aplicación en redes complejas, las cuales están formadas por N nodos caóticos de orden fraccionario en topología regular e irregular. En la primera existe un patrón definido en la forma de conectar los nodos, en cambio, en las irregulares no existe este patrón definido.

Se busca sincronizar sistemas caóticos idénticos por medio de una ley de control que sea lo más imperceptible posible, para que el sentido de sincronización no se pierda. Es por eso que se utiliza solamente una ley de control en uno de los estados del sistema logrando así que todos los nodos, en régimen caótico, puedan sincronizar completamente. Esta ley de control es una realimentación del error entre los estados elegidos de cada sistema y por medio de una variable de peso se pueden ajustar los tiempos de sincronización.

Se consideran básicamente dos escenarios: *i*) sincronía de redes sin nodo maestro, en donde la dinámica final de la red sincronizada es un nuevo estado caótico diferente a las dinámicas caóticas de los nodos aislados y *ii*) sincronía de redes con nodo maestro, donde la dinámica de la red sincronizada es impuesta por el nodo maestro obteniéndose así una dinámica emergente.

Además, se realiza la simulación de algunos sistemas de orden fraccionario aquí descritos por

medio de un software de circuitos esquemáticos para que éstos puedan ser llevados a la implementación de una forma sencilla. Se utiliza un método numérico de aproximación de sistemas de orden fraccionario por medio de ecuaciones lineales.

Índice General

Resumen	v
Índice General	vii
Índice de Figuras	x
1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	1
1.1.1. Objetivos particulares	2
1.2. Introducción general	2
1.3. Organización del trabajo	7
2. Preliminares matemáticos y Sistemas de orden fraccionario	9
2.1. Definición de la derivada fraccionaria	10
2.2. Métodos numéricos para el cálculo de derivadas e integrales fraccionarias	13
2.3. Estabilidad de sistemas de orden fraccionario	14
2.3.1. Sistemas Lineales	14
2.3.2. Sistemas no lineales	15
2.4. Caos	17
2.5. Sistemas caóticos de orden fraccionario	19
2.5.1. Sistema Lorenz	20
2.5.2. Sistema Chen	22
2.5.3. Sistema Rössler	22
2.5.4. Sistema Liu	23
2.5.5. Sistema Financiero	24

2.5.6.	Sistema Volta	25
2.5.7.	Sistema Duffing	26
2.5.8.	Sistema Lü	27
2.5.9.	Sistema Arneodo	28
3.	Sincronización de redes complejas	30
3.1.	Sincronía	31
3.2.	Escenarios de acoplamiento	32
3.2.1.	Acoplamiento unidireccional	33
3.2.2.	Acoplamiento bidireccional	33
3.3.	Diferentes tipos de sincronización	34
3.4.	Sincronización de redes complejas	36
3.4.1.	Dinámica de las redes complejas.	36
3.4.2.	Estabilidad de las redes complejas.	38
4.	Redes complejas	41
4.1.	Definiciones	42
4.2.	Topologías en las redes complejas.	43
4.2.1.	Topología Irregular.	44
4.2.2.	Topología Regular.	48
4.2.3.	Ejemplos de redes en la naturaleza.	52
5.	Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden fraccionario	56
5.1.	Sincronización de redes regulares	57
5.1.1.	Acoplamiento global	57
5.1.2.	Acoplamiento anillo	62
5.1.3.	Acoplamiento estrella	65
5.2.	Sincronización de redes irregulares	69
6.	Sincronización experimental de una red compleja con nodos caóticos de orden fraccionario	77
6.1.	Realización analógica de los circuitos.	77
6.2.	Simulación de redes complejas regulares.	79

6.2.1. Circuito analógico del sistema Liu de orden fraccionario.	79
6.2.2. Circuito analógico del sistema Financiero de orden fraccionario	86
6.3. Simulación de una redes complejas Irregulares.	92
6.3.1. Circuito analógico del sistema Lu de orden fraccionario.	92
6.3.2. Circuito analógico del sistema Rössler de orden fraccionario	98
7. Conclusiones y trabajo futuro	105
7.1. Principales contribuciones de este trabajo de tesis	106
7.2. Trabajo a futuro	107
Bibliografía	108

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de sincronía.	3
1.2. Atractor de Lorenz.	5
2.1. Regiones de estabilidad para sistemas de orden fraccionario.	15
2.2. Atractor del sistema caótico de orden fraccionario Lorenz.	21
2.3. Estados de los sistemas caóticos Lorenz de orden fraccionario y de orden entero.	21
2.4. Atractor del sistema Chen de orden fraccionario.	22
2.5. Atractor del sistema Rössler de orden fraccionario.	23
2.6. Atractor del sistema Liu de orden fraccionario.	24
2.7. Atractor del sistema Financiero de orden fraccionario.	25
2.8. Atractor del sistema Volta de orden fraccionario.	26
2.9. Atractor del sistema Duffing de orden fraccionario.	27
2.10. Atractor del sistema Lü de orden fraccionario.	28
2.11. Atractor del sistema Arneodo de orden fraccionario.	29
3.1. Configuración de acoplamiento unidireccional entre dos osciladores caóticos (maestro-esclavo).	33
3.2. Configuración de acoplamiento bidireccional entre dos osciladores caóticos.	34
4.1. Red con topología irregular de 8 nodos ($N = 8$).	44
4.2. Red compleja de 5 nodos, ($N = 5$) en topología irregular sin nodo maestro.	46
4.3. Red compleja de 5 nodos, ($N = 5$) en topología irregular con nodo maestro.	47
4.4. Red compleja en acoplamiento global con $N = 5$ sin nodo maestro.	48
4.5. Red compleja en acoplamiento anillo con $N = 5$ sin nodo maestro.	50
4.6. Red compleja en acoplamiento anillo con $N = 5$ sin nodo maestro.	51

4.7. Mapa de interacciones de la proteínas humanas creada por científicos de Max Delbrück Center for Molecular Medicine (MDC) Berlin-Buch.	53
4.8. Red compleja con interacciones entre individuos (red social).	54
4.9. Ejemplos de sincronía.	55
5.1. Red compleja de 12 nodos (N=12) en topología regular con acoplamiento global. . .	57
5.2. Atractor al que converge la red de 12 nodos Lorenz sin nodo maestro.	59
5.3. Plano de fase que compara a los estados $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,12}$ donde $i = 1, 2, \dots, N$	60
5.4. Gráfica de los errores entre los primeros $x_{i,1}$, segundos $y_{i,2}$ y terceros estados $z_{i,3}$ donde $i = 1, 2, \dots, N$	60
5.5. Gráfica de los estados de la red global x_i, y_i, z_i , donde $i = 1, 2, \dots, 12$	61
5.6. Red compleja de 12 nodos en configuración anillo sin nodo maestro.	62
5.7. Red compleja de 12 nodos en configuración anillo sin nodo maestro.	64
5.8. Plano de fase que compara los doce estados y_i de la red anillo.	65
5.9. Estados de los doce sistemas Rössler de orden fraccionario en la red compleja anillo.	65
5.10. Red compleja de 12 nodos en configuración estrella sin nodo maestro.	66
5.11. Atractor final para el acoplamiento en estrella con nodos de orden fraccionario Chen.	68
5.12. Plano de fase de los estados y_{ij} de los sistemas Chen en la red estrella.	68
5.13. Estados de los doce sistemas Chen que conforman la red estrella.	69
5.14. Redes complejas en topología irregular.	70
5.15. Atractor final para el acoplamiento irregular sin nodo maestro con nodos de orden fraccionario Arneodo.	72
5.16. Sincronía de los estados en la red irregular sin nodo maestro con nodos Arneodo fraccionarios.	72
5.17. Plano de fase de los estados x_{ij} de los sistemas Arneodo que conforman la red irregular.	73
5.18. Atractor final para el acoplamiento en irregular con nodo maestro y nodos Duffing fraccionarios.	75
5.19. Sincronía de los estados de la red irregular con sistemas Duffing de orden fraccionario.	76
5.20. Plano de fase de los estados x_{ij}	76
6.1. Circuito analógico para la aproximación de $\frac{1}{s^{0,95}}$	80
6.2. Circuito analógico para el sistema Liu de orden fraccionario.	81

6.3. Estados x, y, z del sistema Liu de orden fraccionario.	81
6.4. Atractores del sistema Liu de orden fraccionario.	82
6.5. Red compleja regular de 4 nodos en acoplamiento global.	82
6.6. Subcircuito que contiene al sistema Liu de orden fraccionario.	83
6.7. Circuitos de Liu y leyes de control u_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, para cada sistema.	84
6.8. Plano de fase de la red compleja en acoplamiento global con sistemas Liu de orden fraccionario.	85
6.9. Estados y_1, y_2, y_3, y_4 de los sistemas Liu de orden fraccionario en la red global.	85
6.10. Atractores XY de la red global con sistemas Liu de orden fraccionario.	86
6.11. Circuito para el sistema Financiero de orden fraccionario 1,85.	87
6.12. Estados del sistema Financiero en su simulación por medio de un circuito.	88
6.13. Planos de fase del sistema Financiero de orden fraccionario.	88
6.14. Red compleja de 4 nodos con acoplamiento anillo.	89
6.15. Nodos de la red compleja con acoplamiento anillo con sistemas Financieros de orden fraccionario.	90
6.16. Plano de fase con los estados x de la red con acoplamiento anillo.	91
6.17. Estados x_i de los sistemas Financiero que conforman la red anillo.	91
6.18. Atractores XY de la red global con sistemas Financiero de orden fraccionario.	92
6.19. Circuito del sistema Lu de orden fraccionario.	93
6.20. Estados del sistema Lu de orden fraccionario.	94
6.21. Planos de fase del sistema Lu de orden fraccionario.	94
6.22. Red con acoplamiento estrella de 5 nodos.	95
6.23. Circuitos de la red estrella con sistemas Lu de orden fraccionario en cada nodo y sus leyes de control.	96
6.24. Plano de fase de la red estrella con sistemas Lu de orden fraccionario.	97
6.25. Atractores de la red estrella con sistemas Lu de orden fraccionario.	97
6.26. Circuito del sistema Rössler de orden fraccionario.	98
6.27. Estados del sistema Rössler de orden fraccionario obtenidos mediante un circuito.	99
6.28. Planos de fase para la red irregular con sistemas Rössler de orden fraccionario.	100
6.29. Red irregular con 5 nodos.	100
6.30. Circuitos para la red compleja Irregular con nodos Rössler de orden fraccionario.	102

6.31. Plano de fase para la red compleja Irregular con nodos Rössler de orden fraccionario.	103
6.32. Atractores de los sistemas Rössler de orden fraccionario en una red irregular.	104

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se dan a conocer los objetivos tanto general como específicos de este trabajo de tesis, así como también, una introducción general acerca de este trabajo y la motivación para su realización y así dar una vista general del contenido del documento. A continuación se presentan los objetivos de esta tesis.

1.1. Objetivo general

El objetivo primordial de este trabajo es contribuir a la sincronización de redes complejas compuestas por nodos caóticos de orden fraccionario. Estos sistemas tienen dinámicas extremadamente complejas debido al régimen caótico y cuentan con la particularidad de que sus ecuaciones diferenciales son de orden fraccionario. Se busca lograr la sincronización empleando las características y propiedades de estos sistemas.

Como objetivos particulares se tienen los siguientes:

1.1.1. Objetivos particulares

- 1 Explorar las diferentes técnicas y aplicaciones para sincronizar redes complejas, formadas por nodos caóticos de orden fraccionario (sistemas no lineales) con dinámicas extremadamente complejas: de dimensión infinita, con atractores de múltiples enrollamientos.
- 2 Sincronizar redes complejas dispuestas en una topología de acoplamiento regular (acoplamiento global, estrella y anillo) e irregular (redes con un patrón de acoplamiento no definido), formadas por nodos caóticos de orden fraccionario.
- 3 Simulación de la sincronía de redes complejas mediante un software de circuitos electrónicos.

1.2. Introducción general

Este trabajo de tesis involucra varios conceptos tales como el de *sincronía*, *caos* y *sistemas de orden fraccionario*, por lo de forma breve se dará una introducción a cada uno de estos y en capítulos posteriores, dar sus definiciones formales así como adentrar en sus características principales.

La palabra *sincronía* proviene de la etimología griega *syn* que significa *con*, *a la vez* y de la mitología griega *Chronos* (*Χρόνος*) que significa *tiempo*. En conjunto, el término se refiere a la coincidencia en el tiempo de ciertos sucesos o fenómenos.

Este fenómeno de la sincronía fue registrado en 1665 por el físico Christiaan Huygens, quien pudo observar dos relojes de péndulo que tenía en la pared de su habitación sostenidos por medio de una viga. Al escuchar el tic-tac de los relojes se dio cuenta que estos estaban sincronizados y escuchaba los sonidos al unísono, para tratar de explicar lo que sucedía pidió mover uno de los relojes a una habitación distinta y pudo comprobar que los relojes ya no se encontraban sincronizados. También observó que si alguno de ellos era perturbado momentáneamente estos volvían a sincronizar sus

movimientos en un periodo de tiempo corto. Con este experimento pudo concluir que ambos relojes sincronizaban sus movimientos por medio de vibraciones imperceptibles a través de la viga. Esto esbozó por primera vez la explicación de los osciladores acoplados.

La sincronía fue tomando gran relevancia con el paso de los años ya que ésta se encuentra en muchos procesos de la naturaleza y es importante comprenderla. Puede observarse por ejemplo, en el cuerpo humano en donde la sincronía interviene en procesos metabólicos en las células o en la sincronización entre los núcleos y células de tumores malignos; en la sincronización de oscilaciones eléctricas y electromagnéticas y en la autosincronización de generadores eléctricos. En la naturaleza se observa este fenómeno en los grupos de luciérnagas machos que logran sincronizar sus frecuencias para emitir un solo pulso de luz, lo cual es muy parecido a los grupos de grillos que sincronizan sus sonidos en uno solo. En el comportamiento humano también es observada la sincronización, en grupos de personas actuando a un ritmo inconsciente o cuando un grupo de individuos aplauden y terminan haciéndolo con la misma sincronía. En la tecnología se observa este comportamiento en robots que trabajan para realizar una misma tarea o en la sincronía de dispositivos electrónicos. Como se observa, la sincronía está inmersa en áreas como la biología, mecánica, ecología, sociología, tecnología, entre otras. En la Fig. 1.1 se muestran dos casos de sincronización, la primera imagen es de dos robots que realizan una misma tarea y requieren estar sincronizados, la segunda imagen es un caso en la naturaleza cuando se observan dos aves que se sincronizan al correr.



(a) Robots en sincronía para realizar una tarea.



(b) Aves sincronizadas en sus movimientos.

Figura 1.1: Ejemplos de sincronía.

La sincronización se refiere a que un conjunto de sistemas ya sean idénticos o no, manifiesten un mismo comportamiento a través de un medio acoplante apropiado entre ellos. Una de las ventajas del estudio de la sincronización es que por medio de ésta se pueden entender las topologías de las redes complejas así como conocer mejor las propiedades emergentes en las redes.

En sistemas caóticos, la sincronización ha tomado gran importancia debido a que se ha demostrado que se pueden obtener comportamientos deseados por medio de señales de control que pueden ser muy débiles. La sincronía de estos sistemas se ha empleado en aplicaciones de ciencia e ingeniería tales como dispositivos electrónicos, encriptado de información, en medicina, entre otros. Ahora bien, se dará un breve introducción acerca del *caos*.

La palabra caos deriva del griego *Xáος* que significa *abertura* y generalmente la asociamos a un comportamiento desordenado, sin embargo, este comportamiento está bien definido por ecuaciones que lo hacen de naturaleza determinística, es aperiódico y es extremadamente sensible a las condiciones iniciales. En 1963, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz introdujo el término de atractores extraños y el de efecto mariposa, siendo uno de los pioneros de la teoría del caos. Lorenz intentaba predecir el comportamiento de la atmósfera por medio de un modelo matemático y al observar las soluciones de este, se dio cuenta de que si había cambios muy pequeños en sus condiciones iniciales las soluciones que obtenía eran completamente divergentes. El atractor de este sistema es conocido como el atractor de Lorenz. Con su descubrimiento se renovó el interés en el estudio de los sistemas caóticos. En la Fig. 1.2 se muestra el atractor de Lorenz el cual no converge a un solo punto sino que oscila en un espacio acotado.

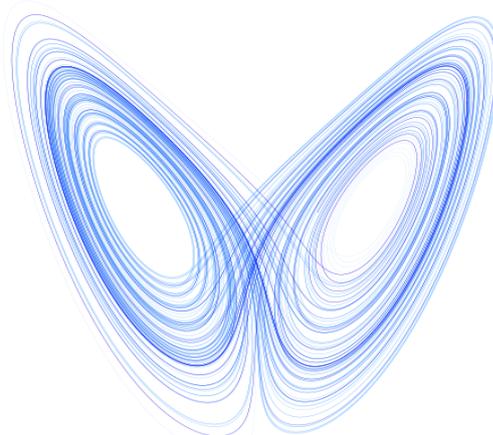


Figura 1.2: Atractor de Lorenz.

Con el tiempo se descubrieron más sistemas caóticos tanto en circuitos como en sistemas que modelan eventos de la naturaleza por ejemplo el circuito de Chua, el sistema caótico de Rössler, el sistema caótico financiero, sistema caótico de Lu y Liu, entre otros.

Con la exploración de estos sistemas, la comunidad científica se dio cuenta de que el caos podía ser controlado por lo que en 1990 Pécora y Carroll realizan la primer sincronía entre dos sistemas de este tipo [2], demostrando así, que los sistemas caóticos pueden controlarse por medio de señales de control muy débiles y así obtener comportamientos deseados. Más tarde, se hizo viable utilizarlos en comunicaciones seguras debido a su sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

Se han escrito numerosos trabajos acerca de la sincronización de sistemas caóticos utilizando diferentes métodos de control con el fin de sincronizar dos sistemas ya sean idénticos o no. Entre algunos de ellos podemos encontrar control no lineal [3], control activo [4], backstepping [5], control adaptivo [6], entre otros.

La complejidad de los sistemas aumentó cuando se descubrió que sistemas caóticos con orden fraccionario pueden conservar un régimen caótico, ya que era bien conocido que el caos solo se

mostraba en sistemas con al menos un tercer orden. El concepto de la derivada de orden fraccionario nace desde 1695 cuando L'Hopital y Leibniz se plantean que significado tendría si $D^n f$ si n fuera una fracción. Desde entonces, muchos matemáticos tales como Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, entre otros, han hecho contribuciones a la teoría del cálculo fraccionario. Por muchos años las derivadas fraccionarias no fueron utilizadas principalmente por la ausencia de métodos para resolver tales ecuaciones diferenciales.

La teoría del cálculo fraccionario tiene mas de 300 años pero en los últimos veinte ha tenido una mayor atención en física así como en matemáticas porque algunos eventos en la naturaleza pueden ser modelados con derivadas de orden fraccionario. Se han observado en muchos sistemas biológicos, por ejemplo, las derivadas de orden fraccionario pueden determinar el intervalo en los latidos del corazón en los humanos. En la naturaleza pueden describir la ramificación de los árboles y también se observan en el crecimiento de copo de nieve. La aplicación de esta teoría ha sido encontrada en muchos campos de la ciencia e ingeniería, por ejemplo mecánica, física, electrónica, medicina, ecología o economía. Algunas de estas aplicaciones son viscoelasticidad, polarización dieléctrica, finanzas cuantitativas, sismología, procesamiento y manipulación de imágenes. La ventaja de las derivadas de orden fraccionario es que permite un mejor modelado en áreas de mecánica y para las propiedades eléctricas de materiales reales.

Como ya se mencionó anteriormente, el estudio de la sincronización de sistemas caóticos tomó gran fuerza en los últimos veinte años y recientemente se ha estudiado utilizando sistemas caóticos de orden fraccionario. Ésta es investigada debido a su aplicación potencial en comunicaciones seguras, procesos de control, descripción de procesos químicos y biológicos. Además se ha encontrado caos en muchos de los sistemas que ya se habían estudiado con orden entero como sistema de Lorenz, circuito de Chua, Rössler, sistema Volta, entre otros.

Una de las principales ventajas de los sistemas de orden fraccionario es que sus variables pueden ajustarse a distintos valores y conservar el régimen caótico para distintos valores en sus derivadas

y diferentes parámetros. Esto permite, por ejemplo, que en encriptamiento de información exista un espacio de claves mas amplio.

Se han propuesto varios métodos para lograr sincronización entre dos sistemas caóticos de orden fraccionario por ejemplo via control no lineal [3], control activo [4], control backstepping [5], entre otros. Estos métodos son efectivos pero en algunos casos el diseño es muy complejo y se incluye la ley de control en varios estados del sistema además de que en la mayoría de los casos, la sincronización es llevada a cabo solo en dos sistemas. En este trabajo se busca aplicar una ley de control a N número de sistemas idénticos con condiciones iniciales distintas y lograr la sincronización con una sola ley de control en el sistema pero que a su vez esta sea efectiva. Se hace uso de la teoría de grafos para redes complejas en la sincronización de sistemas dinámicos no lineales que tienen un comportamiento caótico pero además son de orden fraccionario.

1.3. Organización del trabajo

El contenido de esta tesis está organizado en siete capítulos de la siguiente manera: en el capítulo **uno** se da una pequeña introducción acerca de este trabajo así como los objetivos que se buscan cumplir. En el capítulo **dos** se muestran los preliminares matemáticos acerca de la derivada de orden fraccionario así como las propiedades de los sistemas lineales y no lineales de orden fraccionario. Se aborda el tema de caos y de como éste también está presente en sistemas de orden fraccionario. A su vez, se muestran los sistemas caóticos que se utilizaron para realizar las pruebas de sincronización.

En el capítulo **tercero** se trata el tema de sincronización y los aspectos y condiciones necesarias para que esta sea lograda en una red compleja.

El tema de redes complejas es tratado en el **cuarto** capítulo, aquí se detallan las topologías de las redes complejas y sus propiedades. Así mismo, se describe el método que se utilizó para lograr la sincronización de las redes complejas de este trabajo.

En el **quinto** capítulo se muestran los resultados de sincronización considerando topología tanto regular como irregular, además de que se muestra la sincronización para diferentes casos de sistemas caóticos fraccionarios.

Se realizan además, diferentes circuitos de estos sistemas por medio de una aproximación lineal de las ecuaciones del sistema en orden fraccionario y se realiza también la sincronización de las redes en ambas topologías. Esto se muestra en el capítulo **sexto**. Por último, el capítulo **séptimo** está dedicado a las conclusiones de este trabajo así como a futuros trabajos que pudieran realizarse para dar solución a problemas abiertos o que no han sido explorados pero que son importantes de estudiar.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos y Sistemas de orden fraccionario

El cálculo fraccionario ha estado presente desde hace más de 300 años. El 30 de septiembre de 1695 el Marquis de L'Hopital le escribió a Leibniz acerca de que pasaría si en la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$, donde $n \in N : \{0, 1, 2, \dots\}$ ésta no sea una potencia entera, sino fraccionaria. Leibniz contestó lo siguiente "*una aparente paradoja de la que se extraerán consecuencias útiles algún día*".

Desde entonces, muchos matemáticos han hecho grandes contribuciones directa o indirectamente al cálculo fraccionario con la intención de desarrollar métodos que permitan resolver ecuaciones diferenciales de este tipo. Euler y Lagrange fueron de los primeros en encontrar aproximaciones. Este último contribuye indirectamente al cálculo fraccionario al desarrollar la ley de los exponentes para operadores diferenciales de orden entero en 1772. Cuando el cálculo fraccionario fue desarrollado nació el interés de como serían las reglas para que m y n fueran arbitrarios o de orden no entero.

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y. \quad (2.0.1)$$

En 1812, Laplace definió la derivada de orden fraccionario por medio de una integral y en 1819, S. F. Lacroix obtiene la n -ésima derivada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (2.0.2)$$

Años más tarde, en 1823 el primero en aplicar esta teoría fue Niels Henrik Abel quien resolvió el problema del "tautochrone". En los siguientes años hubo muchas aportaciones de Fourier, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, entre muchos otros.

Se han encontrado numerosas aplicaciones en áreas de la ciencia e ingeniería y principalmente se ha observado que es una mejor herramienta para modelar las propiedades de algunos materiales así como para la descripción de memoria y propiedades hereditarias de estos mismos [7]. En sistemas de control, éste aparece cuando las ecuaciones diferenciales que definen al sistema son de orden fraccionario. En termodinámica, teoría de circuitos y en sistemas de mecatrónica juega un rol muy importante, así como en el procesamiento de señales y en los últimos años en la teoría del caos.

En este capítulo se presentan las definiciones esenciales para la comprensión de la teoría del cálculo fraccionario. Se presenta la definición de la derivada fraccionaria así como las propiedades de ésta. Además, se muestran criterios de estabilidad para sistemas lineales así como de sistemas no lineales, siendo estos últimos de gran interés en el desarrollo de esta tesis.

2.1. Definición de la derivada fraccionaria

Primero, se definirá una de las funciones más importantes en el cálculo fraccionario, la función *Gamma* de Euler. Ésta función generaliza el factorial $n!$ y permite que n tome tanto valores no enteros como valores complejos, la cual se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{(n-1)} e^{-t} dt. \quad (2.1.1)$$

donde $t^{n-1} = e^{(n-1) \log t}$. Esta integral es convergente para todos los complejos $z \in \mathbb{C}$ y es una generalización de un factorial en la siguiente forma

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (2.1.2)$$

En el libro [7] se definen las propiedades de esta función y se hace un estudio más detallado de la

misma.

El operador de la derivada fraccionaria se denota de la siguiente manera [21]

$${}_a D_t^\alpha f(t), \quad (2.1.3)$$

en este operador se pueden identificar a y t , los cuales son conocidos como *terminales*, son los límites relacionados a la operación de la diferenciación de orden fraccionario.

Comúnmente son utilizadas tres definiciones que son válidas para la integral-diferencial de orden fraccionario y que son equivalentes bajo ciertas condiciones, estas son la de Riemann-Liouville (RL), Grunwald-Letnikov (GL) y la de Caputo. La definición de RL está dada como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (2.1.4)$$

para $(n - 1 < \alpha < n)$ y donde Γ es la función *Gamma*.

La definición de la diferenciación fraccionaria de RL ha sido muy importante en el desarrollo de las derivadas de orden fraccionario en las matemáticas y también en las aplicaciones en esta área, sin embargo, esta representación deja a las condiciones iniciales contenidas en los límites de la operación y aunque matemáticamente pueden ser resueltas satisfactoriamente, estas no tienen una interpretación física para tales condiciones iniciales.

Una solución posible a esto fue propuesta por M. Caputo y su definición está dada a continuación.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad (2.1.5)$$

para $n - 1 < \alpha < n$.

Esta definición provee además de las otras, una interpretación entre las derivadas de orden entero. La ventaja de esta representación, es que las condiciones iniciales aquí son consideradas como si se tratara de una diferenciación de orden entero.

La definición GL es la siguiente

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (2.1.6)$$

Los coeficientes binomiales se calculan utilizando la relación entre la función *Gamma* de Euler y el factorial, a continuación se definen

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - j + 1)}{j!}, \quad (2.1.7)$$

para $\binom{\alpha}{0} = 1$ y $n = \frac{t-a}{h}$ donde a es una constante real, la cual expresa el valor límite.

Las principales propiedades de las derivadas e integrales fraccionarias son:

1. Si $f(t)$ es una función analítica de t , entonces su derivada fraccionaria ${}_0 D_t^\alpha = f(t)$ es una función analítica de t, α .
2. Para $\alpha = n$, donde n es entero, la operación ${}_0 D_t^\alpha = f(t)$ da el mismo resultado que el clásico diferenciador o integrador de orden n .
3. para $\alpha = 0$ la operación ${}_0 D_t^0 = f(t)$ es un operador identidad.

$${}_0 D_t^0 = f(t) = f(t).$$

4. Diferenciador e integrador fraccionarios son operaciones lineales

$${}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t). \quad (2.1.8)$$

5. La ley del índice aditivo

$${}_0 D_t^\alpha {}_0 D_t^\beta f(t) = {}_0 D_t^\beta {}_0 D_t^\alpha f(t) = {}_0 D_t^{\alpha+\beta} f(t), \quad (2.1.9)$$

se mantiene bajo ciertas restricciones razonables de la función $f(t)$.

6. La regla de Leibniz para diferenciación fraccionaria está dada por

$${}_a D_t^\alpha (\phi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \phi^k(t) {}_a D_t^{\alpha-k} f(t), \quad (2.1.10)$$

si $\phi(t)$ y $f(t)$ y todas sus derivadas son continuas en el intervalo de $[a, t]$.

7. Es una operación lineal, similar a la diferenciación de orden entero

$${}_a D_t^r (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^r f(t) + \mu {}_a D_t^r g(t). \quad (2.1.11)$$

2.2. Métodos numéricos para el cálculo de derivadas e integrales fraccionarias

Para el cálculo numérico de la derivada fraccionaria se puede utilizar la relación derivada de la definición de GL, dado que para una extensa clase de funciones las definiciones de GL, RL y Caputo son equivalentes. La relación para la aproximación numérica explícita de la r th derivada en los puntos kT ($k = 1, 2, \dots$), tiene la siguiente forma

$${}_a D_t^\alpha \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

El cálculo fraccionario es una generalización de la integración y la derivación de orden entero, ${}_a D_t^\alpha$, donde a y t son los límites de la operación.

Para el cálculo numérico se utiliza, en este caso, la relación derivada de la definición de GL. La relación para la aproximación numérica explícita de la q th derivada en los puntos kh , donde ($k=1, 2, \dots$) tiene la siguiente forma

$${}_{k-L_m/h} D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}), \quad (2.2.2)$$

donde L_m es la memoria corta, $t_k = kh$, h es el tiempo de paso del cálculo y $(-1)^j \binom{q}{j}$ son los coeficientes binomiales c_j^q ($j = 0, 1, \dots$). Para el cálculo de estos coeficientes se emplea la siguiente relación

$$c_0^q = 1, \quad c_j^q = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^q. \quad (2.2.3)$$

La solución general de la ecuación fraccionaria diferencial

$${}_a D_t^q y(t) = f(y(t), t), \quad (2.2.4)$$

puede ser expresada como

$$y(t_k) = f(y(t), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^q y(t_{k-j}). \quad (2.2.5)$$

En este trabajo las simulaciones se realizaron resolviendo la Eq. 2.2.2 y la Eq. 2.2.3 que corresponde a los coeficientes binomiales. En la siguiente sección se mencionan algunas propiedades de estabilidad de sistemas fraccionarios.

2.3. Estabilidad de sistemas de orden fraccionario

2.3.1. Sistemas Lineales

Consideremos un sistema LTI (*Linear Time Invariant*) representado por el siguiente modelo en espacio de estados

$${}_0 D_t^q x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u \in \mathbb{R}^r$ es la entrada y $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida, los vectores $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ son los órdenes fraccionarios.

En el plano complejo podemos ubicar la parte estable e inestable para tales casos como se muestra en la Fig. 2.1

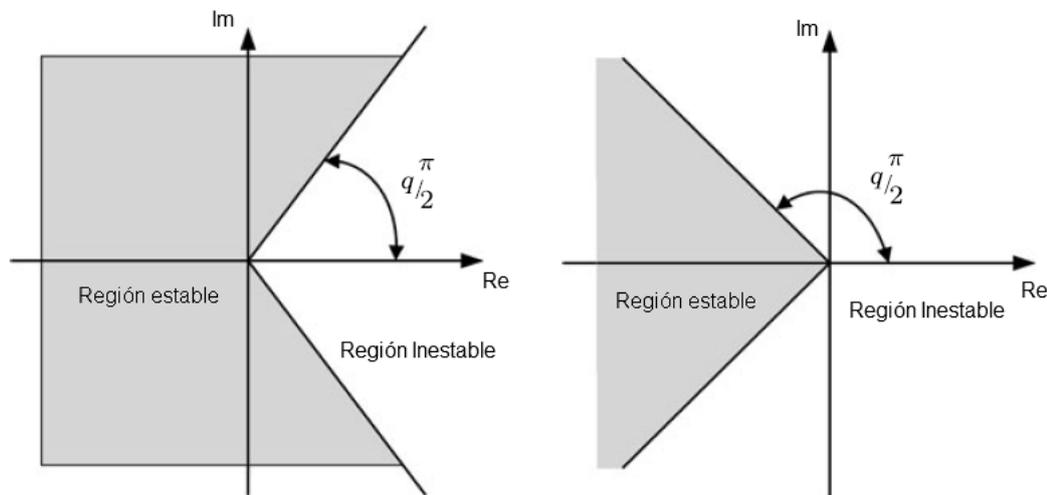


Figura 2.1: Regiones de estabilidad para sistemas de orden fraccionario.

2.3.2. Sistemas no lineales

La estabilidad exponencial no puede ser utilizada para caracterizar la estabilidad asintótica de los sistemas de orden fraccionario.

Consideremos un sistema no lineal de orden fraccionario desproporcionado, es decir, que el orden de cada derivada es distinto al de las demás, representado de la siguiente forma

$${}_0D_t^{q_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t), x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde c_i son las condiciones iniciales. En forma de vector se tiene que

$$D^q x = f(x), \tag{2.3.1}$$

donde $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ para $0 < q_i < 2$, ($i = 1, 2, \dots, n$) y $x \in \mathbb{R}^n$.

Resolviendo para $x(x) = 0$ se obtienen los puntos de equilibrio del sistema, es decir, $E^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

La estabilidad en sistemas no lineales es muy compleja ya que a diferencia de los sistemas lineales, se pueden presentar varios puntos de equilibrio por lo que se han establecido criterios de estabilidad asintótica, global, orbital, etc.

Definición 2.3.1. La trayectoria $x(t) = 0$ del sistema () es t^{-q} asintóticamente estable si hay una q real positiva tal que

$$\forall \|x(t)\| \text{ con } t \leq t_0, \exists N(x(t)), \text{ tal que } \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq Nt^{-q}. \quad (2.3.2)$$

El hecho de que los componentes de $x(t)$ decaigan lentamente a 0 después que t^{-q} permite que alguna vez se llame al sistema fraccionario de memoria larga. La ley de estabilidad de t^{-q} es un caso especial de la estabilidad de Mittag-Leffler.

Teorema 2.3.1. De acuerdo al teorema de estabilidad los puntos de equilibrio son asintóticamente estables para $q_1 = q_2 = \dots = q_n \equiv q$ si todos los valores propios λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) de la matriz Jacobiana $J = \partial f / \partial x$, donde $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ evaluados en el punto de equilibrio E^* , satisfacen la condición

$$|\arg(\text{eig}(J))| = |\arg(\lambda_i)| > q\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.3)$$

Teorema 2.3.2. Cuando se considera un sistema desproporcionado, tal que $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_n$ y suponer que m es el mínimo común múltiplo del denominador u_i de q_i , donde $q_i = v_i/u_i$, $u_i \in \mathbb{Z}^+$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y si consideramos una $\gamma = 1/m$. El sistema 2.3.1 es asintóticamente estable si cumple que

$$|\arg(\lambda)| > \gamma\pi/2, \quad (2.3.4)$$

para todas las raíces de λ de la siguiente ecuación

$$\det([\lambda^{mq_1} \lambda^{mq_2} \dots \lambda^{mq_n}] - J) = 0. \quad (2.3.5)$$

Teorema 2.3.3. Considere un sistema dinámico no lineal n -dimensional de orden fraccionario

$$x^q = Ax + h(x), \quad (2.3.6)$$

con una matriz constante lineal A y una función no lineal $h(x)$ de los estados x y $0 < q < 1$. Si:

- 1 La solución $x(t) = 0$ de $x^q = Ax$ es asintóticamente estable y $\alpha\rho > 1$, donde $\rho(A) \equiv$ radio espectral de A .
- 2 $h(0) = 0$ y $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} = 0$, entonces $x(t) = 0$ para $t \geq t_0 \geq 0$, es una solución estable del sistema (2.3.6).

En el caso de sistemas caóticos de orden fraccionario, una condición necesaria de estabilidad es que mantengan al menos un valor propio en la región inestable para conservar el régimen caótico.

2.4. Caos

La palabra caos generalmente es asociada a un desorden, sin embargo, el *caos* está presente en sistemas dinámicos que tienen una supersensibilidad a las condiciones iniciales lo que los hace parecer de naturaleza estocástica pero que por el contrario, están bien definidos por medio de ecuaciones no lineales. El comportamiento de un sistema caótico es irregular o aleatorio pero su naturaleza es completamente determinística, es decir, existe una ecuación diferencial, o en diferencias, que define su dinámica y por medio de ésta se puede conocer con precisión la secuencia que le da origen.

En 1963 Edward N. Lorenz estaba investigando por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales, como predecir los cambios meteorológicos. Tras varias simulaciones se da cuenta que al hacer cambios casi imperceptibles en las condiciones iniciales podía obtener dinámicas que divergen después de cierto tiempo, a lo que el llamó el *efecto mariposa*. A partir de entonces, se renueva el interés por estudiar los fenómenos caóticos. Antes de 1990 se investigaba el caos con el fin de evitar este comportamiento indeseable, hasta ese momento, en un sistema. Sin embargo, a partir de ese año se comienza a descubrir que el caos puede ser controlado y sincronizado utilizando señales de control poco invasivas en los sistemas además de que se comienza a ver su utilidad bajo la condición caótica que presentan.

Las principales características de los sistemas caóticos son las siguientes:

1. Dinámica no lineal,
2. Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales,
3. Presencia de atractores extraños,
4. Presencia de exponentes positivos de Lyapunov,
5. Atractores con dimensión fractal.

Los sistemas caóticos están definidos por ecuaciones diferenciales no lineales lo que hace que su comportamiento en estado estacionario sea más complicado, esto es, no es un equilibrio, oscilaciones periódicas, o una oscilación casi periódica. Cuando esto pasa, usualmente se refiere a un comportamiento caótico [9]. Estos movimientos caóticos pueden exhibir aleatoriedad a pesar de su naturaleza determinística.

La segunda característica es la sensibilidad a las condiciones iniciales, esto quiere decir que al observar un estado de un sistema caótico y partiendo de dos condiciones iniciales donde su diferencia es mínima o prácticamente insignificante, se pueden obtener trayectorias que divergen exponencialmente entre ellas a través del tiempo pero permaneciendo acotadas.

Esto tiene que ver precisamente con la presencia de atractores extraños, un *atractor* es la región del espacio de estados hacia la cual convergen todas las trayectorias posibles de un sistema. Un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad o en este caso, un atractor extraño. En estos sistemas, existe un atractor por el cual las trayectorias del sistema se ven atraídas y al mismo tiempo existen fuerzas que lo repelen de él, por lo que este permanece en un espacio acotado sin tender a un punto fijo. Además, estos atractores tienen una *dimensión fractal*, la cual está definida como *formas geométricas de orden no entero y donde su dimensión de Hausdorff debe superar su dimensión topológica*.

De manera general, se refiere a la *dimensión d* como el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar la localidad de un punto. Se relacionan fácilmente objetos geométricos con dimensiones enteras como por ejemplo un punto que tiene dimensión cero, una línea que es unidimensional, una superficie que corresponde a dos dimensiones, un cuerpo que se localiza en un espacio tridimensional o bien un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. La notación cambia para indicar que no existe la restricción de que la dimensión no sea entera, D_0 , es llamada *dimensión fractal* [15].

La dimensión fractal determina la capacidad de un conjunto extraño bajo estudio y en la mayoría de los casos con dinámicas caóticas suele coincidir con la dimensión de Hausdorff, la cual es una

generalización métrica del concepto de dimensión de un espacio topológico que permite definir una dimensión fraccionaria. Si se observa en el espacio, la dimensión del objeto fractal es superior a la del espacio que lo contiene. Se refiere también a la medida de su grado de irregularidad, ya que las figuras geométricas que forman son irregulares. Además, está ligada directamente a los grados de libertad del sistema.

Existe la presencia de exponentes positivos de Lyapunov, estos muestran la velocidad de divergencia entre las trayectorias. Cuando son negativos, significan una convergencia en las trayectorias, por el contrario al ser positivos, estos muestran la velocidad de divergencia entre las trayectorias. El sistema debe contar con al menos un exponente positivo de Lyapunov para que sea caótico y si tiene más de dos se le llama al sistema hipercaótico.

Desde los últimos años del siglo pasado, los sistemas caóticos tomaron gran importancia debido a sus aplicaciones. Muchos sistemas en la naturaleza son no lineales y presentan caos, tales como los fluidos en régimen turbulento, la dinámica de la atmósfera, las reacciones químicas, los procesos metabólicos de las células, los movimientos de grupos animales (cardúmenes o enjambres), la arritmia del corazón, la red neuronal del cerebro humano, entre otros. Por medio de circuitos electrónicos se han aplicado estos sistemas a la codificación de información en las comunicaciones privadas así como el modelado de procesos naturales como el comportamiento de la atmósfera, los sistemas químicos y biológicos, en el estudio de epidemias y crecimiento de población, la propagación de enfermedades infecciosas, el mercado financiero mundial y otros más.

2.5. Sistemas caóticos de orden fraccionario

En sistemas continuos es bien sabido que no se presenta caos cuando se tiene un orden menor a tres, tomando como orden del sistema el número total de estados. Sin embargo, se ha encontrado presencia de caos en sistemas con orden menor a tres siendo estos fraccionarios. Esto quiere decir que

el sistema es reorganizado y sus derivadas pueden ser de orden no entero. De este modo, el orden del sistema ya no corresponde al número de ecuaciones diferenciales sino a la suma del orden en cada derivada. Esto permite una mayor flexibilidad al poder cambiar el orden del sistema así como sus parámetros y conservar para ciertos casos, el régimen caótico. En este capítulo se hará mención de los sistemas fraccionarios de orden caótico que se utilizaron para realizar las pruebas de sincronización.

La mayoría de los sistemas que se encuentran en la naturaleza son no lineales y además se han encontrado fraccionalidades por lo que el uso de sistemas de orden fraccionario para su modelado ha tomado gran importancia en los últimos años. Se ha encontrado caos en osciladores de orden fraccionario, por ejemplo en el circuito de Chua [10], en el sistema Lorenz [11], Rossler [12], CNN [8], sistema financiero [13], sistema Chen [14], entre muchos otros.

A continuación se muestra una breve descripción de cada sistema de orden fraccionario que se utilizó para la sincronía de las redes complejas.

2.5.1. Sistema Lorenz

En 1963 Edward Lorenz descubre este atractor de tres dimensiones al simular un sistema que pretendía predecir el comportamiento atmosférico. Años más tarde, se encuentra que este sistema para ciertos órdenes fraccionarios conserva el régimen caótico. La representación de este sistema en orden fraccionario es la siguiente:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Los parámetros bajo los cuales el sistema es caótico son $\beta = 28$, $\sigma = 10$, $\rho = 8/3$ y los órdenes fraccionarios $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$. En la Fig. 2.2 se observan el atractor correspondiente al sistema Lorenz caótico cuando sus derivadas son de orden unitario y en la Fig. 2.3 se muestran los estados del

sistema antes definido de orden caótico pero comparado con los estados de un sistema Lorenz caótico de orden unitario bajo los siguientes parámetros $\beta = 28$, $\sigma = 10$, $\rho = 8/3$ y $q_1 = q_2 = q_3 = 1$. Ambos sistemas tienen las mismas condiciones iniciales $x_1 = x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$, $z_1 = z_2 = 2.5$, se observa que las trayectorias comienzan a diverger en un tiempo determinado, por lo que en apariencia los atractores de estos dos sistemas pudieran parecer iguales sin embargo, la trayectoria de sus estados es diferente.

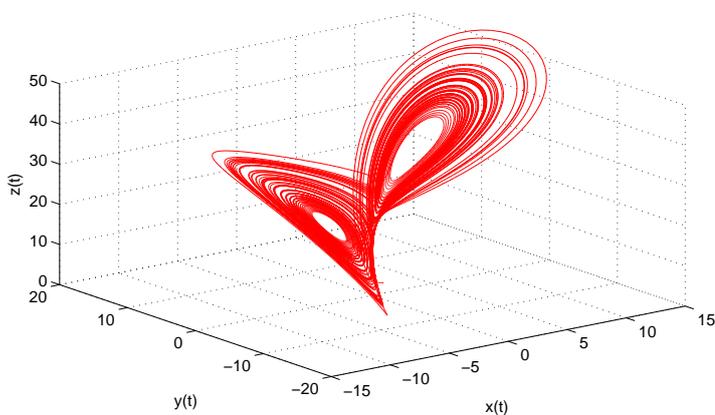


Figura 2.2: Atractor del sistema caótico de orden fraccionario Lorenz.

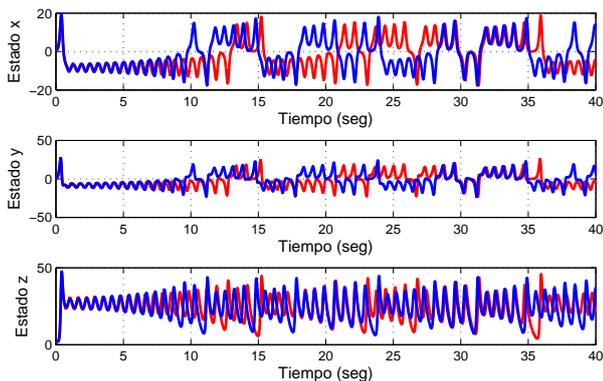


Figura 2.3: Estados de los sistemas caóticos Lorenz de orden fraccionario y de orden entero.

2.5.2. Sistema Chen

El sistema Chen es muy parecido al sistema Lorenz, incluso existe un conjunto de ecuaciones que generalizan los sistemas Lorenz, Chen y Lu. El sistema Chen de orden fraccionario está descrito por las siguientes ecuaciones y bajo los parámetros $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ y $d = c - a = -7$ y con los órdenes $q_1=0.985$, $q_2=0.99$, $q_3=0.98$ el sistema tiene un comportamiento caótico.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

En la Fig. 2.4 se muestra el atractor del sistema bajo los parámetros ya mencionados.

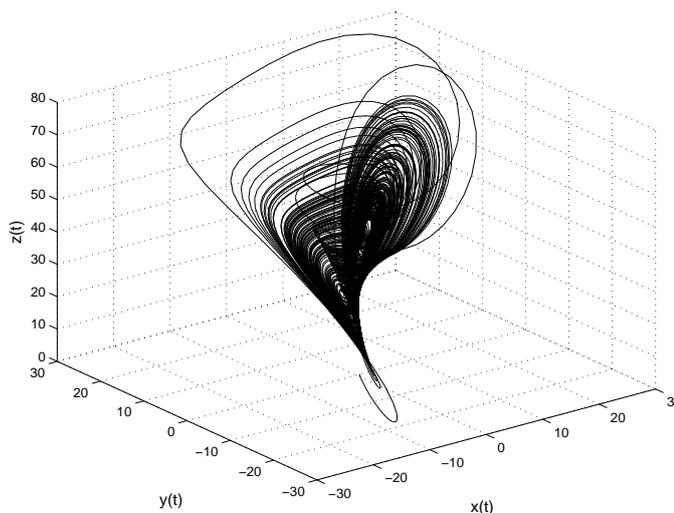


Figura 2.4: Atractor del sistema Chen de orden fraccionario.

2.5.3. Sistema Rössler

El sistema Rössler es muy útil en el modelado de reacciones químicas y en el año 2004 se encuentra comportamiento caótico con un sistema de orden menor a 3, siendo este fraccionario. Los

parámetros bajo los cuales se observa caos en el sistema son $a=0.4$, $b=0.2$, y $c = 10$ y un orden total del sistema de 2.7, siendo $q_1 = q_2 = q_3=0.9$. Las ecuaciones que definen al sistema en orden fraccionario son las siguientes:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -(y(t) + z(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) + ay(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= b + z(t)(x(t) - c). \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

En la Fig. 2.5 se muestra el atractor Rössler de orden fraccionario.

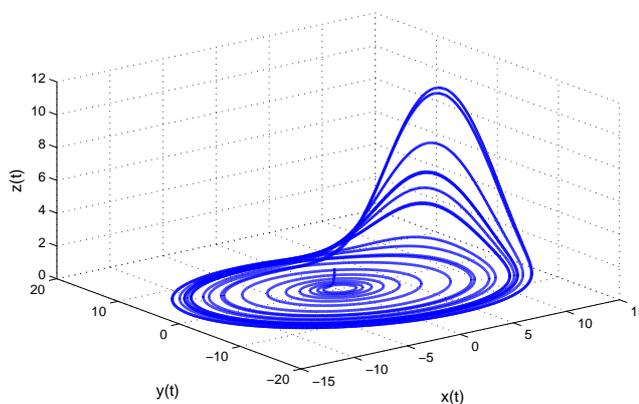


Figura 2.5: Atractor del sistema Rössler de orden fraccionario.

2.5.4. Sistema Liu

El sistema de Liu fue reportado en la literatura en 2009 y un año más tarde se introduce el sistema de orden fraccionario. Se encontró que para derivadas mayores a 0.916 el sistema conserva el régimen caótico. Las ecuaciones que lo definen se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -ax(t) - ey^2(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= by(t) - kx(t)z(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -cz(t) + mx(t)y(t). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Bajo los parámetros $a = e = 1$, $b = 2,5$, $c = 5$ y $k = m = 4$ y el orden fraccionario $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ el sistema tiene un comportamiento caótico. En la Fig. 2.6 se muestra el atractor correspondiente a este sistema en orden fraccionario.

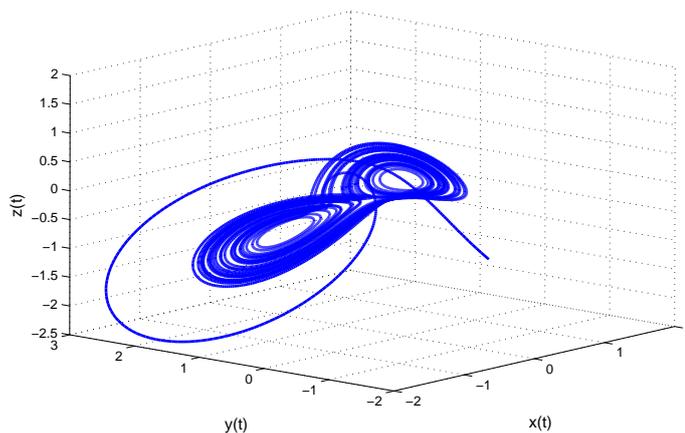


Figura 2.6: Atractor del sistema Liu de orden fraccionario.

2.5.5. Sistema Financiero

Este sistema es muy útil en el estudio de las dinámicas de la economía ya que se pueden modelar fluctuaciones económicas, cambios estructurales, crecimientos irregulares, entre otros. En sí, permite comprender la complejidad de los sistemas reales económicos y financieros. Se encontró caos en este sistema para un orden total mayor a 2.35. Las ecuaciones que modelan al sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= z(t) + x(t)(y(t) - a), \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= 1 - by(t) - x^2(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -x(t)cz(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.5.5}$$

En la Fig. 2.7 se muestra el atractor del sistema Financiero el cual muestra caos bajo los siguientes parámetros, $a = c = 1$, $b = 0.1$ y $q_1 = 1$, $q_2 = 0.95$ y $q_3 = 0.9$.

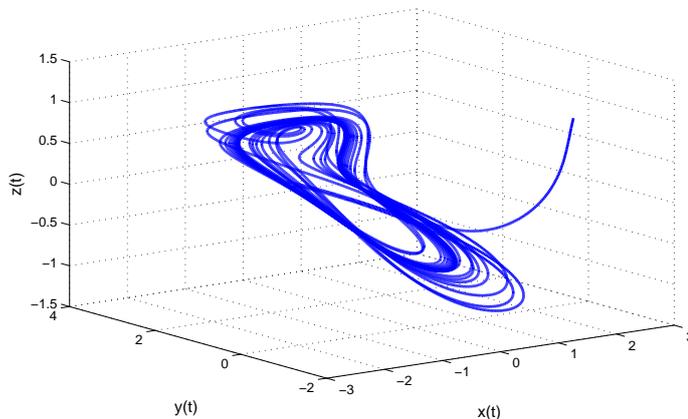


Figura 2.7: Atractor del sistema Financiero de orden fraccionario.

2.5.6. Sistema Volta

Este sistema exhibe un atractor doble y se ha encontrado caos cuando sus derivadas tienen orden fraccionario. Fue descubierto por un alumno de doctorado en la Universidad de Genova en 1984 y en 2009 se realiza su descripción y análisis para el orden fraccionario. Las ecuaciones que describen al sistema en orden fraccionario son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -x(t) - ay(t) - z(t)y(t), \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= -y(t) - bx(t) - x(t)z(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= cz(t) + x(t)y(t) + 1.
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Los parámetros para que el sistema exhiba caos son $a = 19$, $b = 11$, $c = 0.73$ y el orden fraccionario $q_1 = q_2 = q_3 = 0.99$. En la Fig. 2.8 se muestra el atractor de dicho sistema.

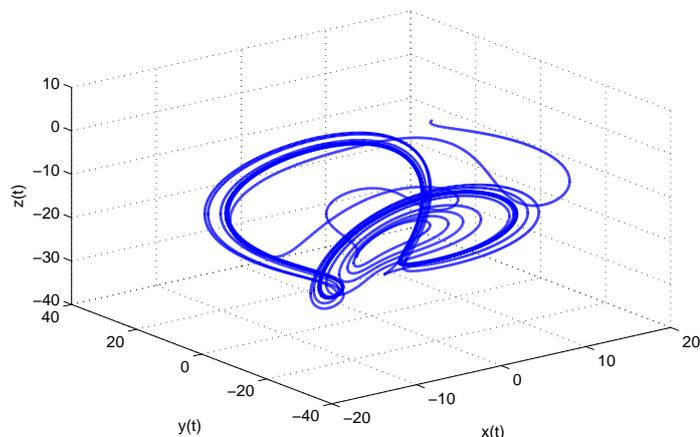


Figura 2.8: Atractor del sistema Volta de orden fraccionario.

2.5.7. Sistema Duffing

El sistema Duffing puede exhibir comportamiento caótico o bien un ciclo límite de acuerdo a los parámetros a los que esté sujeto. Cuando el sistema es de orden fraccionario conserva su régimen caótico bajo ciertos parámetros. Su comportamiento es útil para comprender el comportamiento caótico e las vibraciones forzadas de la maquinaria industrial. El sistema está definido por las

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= y(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

El orden en sus derivadas para que el sistema sea caótico son $q_1 = 0.9$ y $q_2 = 1$. Los parámetros son los siguientes $\alpha = 0.15$, $\delta = 0.3$, y $\omega = 1$. En la Fig. 2.9 se muestra el atractor del sistema de orden caótico.

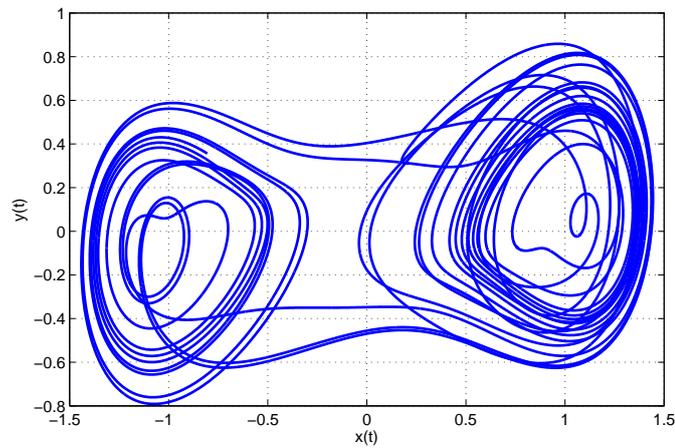


Figura 2.9: Atractor del sistema Duffing de orden fraccionario.

2.5.8. Sistema Lü

Por medio de este sistema se puede ir del sistema Lorenz al Chen y viceversa. El sistema se define por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= -x(t)z(t) + cy(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t).
 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

El atractor se muestra en la Fig. 2.10, el cual se obtiene con los siguientes parámetros $a = 36$, $b = 3$ y $c = 20$. El orden total del sistema es de 2.9 con $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$.

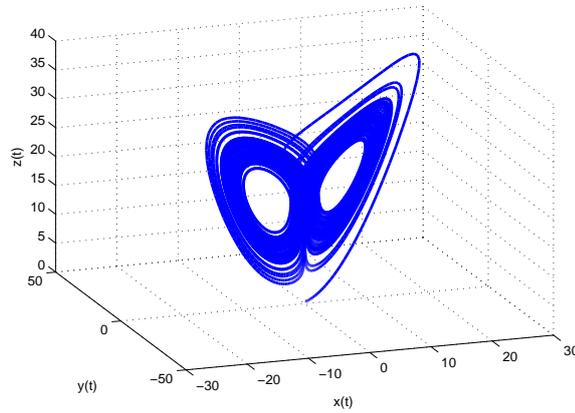


Figura 2.10: Atractor del sistema Lü de orden fraccionario.

2.5.9. Sistema Arneodo

El sistema Arneodo de orden fraccionario presenta caos para un orden mayor a 0.86 en sus derivadas. Las siguientes son las ecuaciones del sistema con orden fraccionario:

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= y(t), \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= z(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -\beta_1 x(t) - \beta_2 y(t) - \beta_3 z(t) + \beta_4 x^3(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.5.9}$$

Los parámetros $\beta_1 = -5.5$, $\beta_2 = 3.5$, $\beta_3 = 0.8$, $\beta_4 = -1$ y un orden en sus derivadas de $q_1 = q_2 = 0.97$ y $q_3 = 0.96$, el sistema presenta el atractor mostrado en la Fig. 2.11.

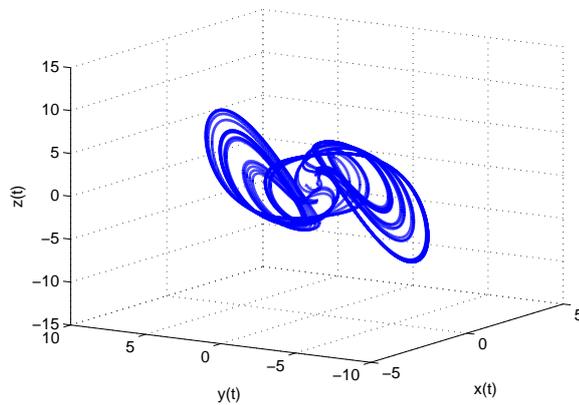


Figura 2.11: Atractor del sistema Arneodo de orden fraccionario.

Para cada uno de los sistemas se mencionan los parámetros bajo los cuales se presenta el régimen caótico y que fueron utilizados para la sincronización de las redes complejas que se presentan unos capítulos adelante, sin embargo, no son los únicos parámetros bajo los cuales estos sistemas presentan un comportamiento caótico. En las referencias señaladas se encuentran otros casos con diferentes ordenes en sus derivadas para los cuales también se puede observar caos en sistemas de orden fraccionario.

Capítulo 3

Sincronización de redes complejas

Desde la década de los noventa se ha despertado un gran interés en la sincronización de sistemas caóticos. Fujisaka y Yamada [16] y Pécora y Carroll [2], demostraron que dos osciladores de orden caótico podían ser sincronizados, esto es, que sus oscilaciones coincidan en tiempo y forma. A partir de entonces, se han planteado diversos métodos para la sincronización de sistemas caóticos tales como el método Pécora-Carroll, método OGY o por medio de técnicas de control como control adaptivo, control no lineal, control backstepping, entre otros. Estos se han extendido también a la sincronización de caos con sistemas que son de orden fraccionario, aunque usualmente, se hace la sincronización entre dos sistemas ya sean idénticos o de diferente naturaleza. En el caso de este trabajo de tesis, los sistemas a sincronizar son del mismo tipo.

Las aplicaciones en diferentes campos de ciencia e ingeniería han sido muy variadas, se utilizan comúnmente en el encriptamiento para comunicaciones seguras, para modelar sistemas químicos y biológicos, regulación en los latidos del corazón humano, en la ingeniería aplicada a robots, entre muchas otras.

Con el descubrimiento de dinámicas caóticas en sistemas de orden fraccionario, la comunidad científica comenzó a tener interés en la sincronización de estos sistemas. Algunas de las ventajas de utilizarlos es que tienen más grados de libertad al poder ajustar las variables del sistema lo cual puede

aumentar la seguridad en comunicaciones. Una característica muy importante de los sistemas de orden fraccionario es su memoria ilimitada así como también la capacidad de describir las propiedades hereditarias y de memoria de los materiales.

En este capítulo se definirá la sincronía, los escenarios de acoplamiento, así como tipos de sincronización existentes para asentar las bases en la comprensión de la sincronización de sistemas caóticos. Así mismo, se muestra el método que se utilizó para la sincronización de las redes complejas formadas por osciladores caóticos de orden fraccionario y ejemplos de las mismas al final del capítulo.

3.1. Sincronía

La palabra sincronía proviene de la etimología griega *syn* que significa con, a la vez de la mitología griega *Chronos* (*Χρόνος*) que significa "tiempo". En conjunto, el término se refiere a la coincidencia en el tiempo de ciertos sucesos o fenómenos. En este contexto, se define la sincronía como *la propiedad que adquiere un conjunto de objetos, ya sea de una misma especie o de diferentes, de manifestar un comportamiento común que por lo general es diferente a cada una de las dinámicas de los objetos, partiendo además, de comportamientos individuales distintos debido a la presencia de un medio acoplante entre ellos (un medio físico de conexión), siendo este en la mayoría de los casos extremadamente débil* [1].

En el caso de la sincronía de osciladores caóticos, estos no tienen una fase o amplitud bien definidos por lo que la idea de la sincronización recae en que al tener dos sistemas caóticos o más, con dinámicas que inicialmente evolucionan en forma divergente, al tener un medio de acoplamiento, pueden finalmente seguir una misma trayectoria y converger en un solo atractor.

Definición 3.1.1. *Se considera un sistema caótico modelado por las siguientes ecuaciones de estado $\dot{x} = f(x)$ y el segundo modelado por $\dot{\hat{x}} = g(\hat{x})$, donde f y g son campos vectoriales definidos en R^n .*

Se dice que ambos osciladores sincronizan si se cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0, \quad x(0) \neq \hat{x}(0), \quad (3.1.1)$$

donde $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ representan los estados de ambos osciladores. También se define el error de sincronía dado por

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (3.1.2)$$

donde $x(t), \hat{x}(t) \in R^n$. Si el error tiende a cero en un tiempo determinado entonces se dice que hay sincronía, esto es

$$e(t) = 0. \quad (3.1.3)$$

Para un caso ideal, se puede esperar que el error entre los estados sea cero, sin embargo, en el caso de sincronización de osciladores en caso real, el error puede quedar acotado en un valor positivo. Esto sucede debido a que en un caso real existen perturbaciones que afectan a la sincronización.

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \rho, \quad \rho \in R. \quad (3.1.4)$$

Como se mencionó anteriormente, para que la sincronía pueda ser lograda es necesario un medio de acoplamiento que permita una comunicación o interacción entre los osciladores para que fluya la información.

3.2. Escenarios de acoplamiento

Generalmente se utilizan dos escenarios de acoplamiento para lograr la sincronización. Para que dos osciladores de cualquier naturaleza puedan sincronizar, es necesario que existan un medio entre ellos que los comunique y que permita el flujo de información. Los dos escenarios más frecuentes se basan en la forma en que fluye la información. Si ésta solo fluye de un oscilador a otro, es decir, en un solo sentido, se habla de *acoplamiento unidireccional* o maestro-esclavo. En cambio, si la información fluye en ambos sentidos el escenario correspondiente es el de *acoplamiento bidireccional*.

3.2.1. Acoplamiento unidireccional

Se consideran dos osciladores caóticos como los mostrados en la Fig. 3.1:



Figura 3.1: Configuración de acoplamiento unidireccional entre dos osciladores caóticos (maestro-esclavo).

Ahora, considere un sistema maestro definido por x_M y un sistema esclavo x_S :

$$\dot{x}_M = F(x_M), \dot{x}_S = F(x_S) - c(x_M - x_S).$$

Bajo este esquema, existe una realimentación del error en el sistema esclavo y el propósito que cumple c , llamada *fuerza de acoplamiento*, es el de hacer fuerte o débil el acoplamiento. Si $c > 0$ muy sutilmente, el acoplamiento será *débil*, pero si $c \gg 0$ el acoplamiento será *fuerte* ya que el error tiende a cero más rápidamente.

Esta configuración implica que el sistema esclavo adopta la dinámica del sistema maestro, y este último, no es influenciado de ningún modo por el esclavo.

3.2.2. Acoplamiento bidireccional

En el caso de acoplamiento bidireccional ambos osciladores están acoplados el uno con el otro, ambos tienen la capacidad de enviar y recibir información. En la Fig. 3.2 se muestra este esquema de acoplamiento:

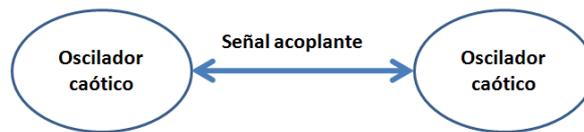


Figura 3.2: Configuración de acoplamiento bidireccional entre dos osciladores caóticos.

Se tienen dos sistemas definidos por el campo vectorial $F(x)$ y denotados como \dot{x}_1 y \dot{x}_2 , ambos están acoplados mutuamente y c es la fuerza de acoplamiento que ajusta los ritmos de los sistemas induciendo a una sincronización mutua.

$$\dot{x}_1 = F(x_1) + c(x_2 - x_1), \dot{x}_2 = F(x_2) + c(x_1 - x_2).$$

En este tipo de acoplamiento ambos osciladores tienen la capacidad de enviar y recibir información, por lo que no se impone la dinámica de un oscilador en específico sino que se obtiene una *dinámica emergente*, la cual resulta como combinación de ambas dinámicas y es diferente a cualquiera de las ya existentes.

Un uso muy común del acoplamiento unidireccional es el de las comunicaciones seguras, en el caso del bidireccional, se puede encontrar en los sistemas láser acoplados con realimentación, o en sistemas de la naturaleza como neuronas interactuando, en el sistema cardíaco y respiratorio, entre otros.

3.3. Diferentes tipos de sincronización

La sincronización entre dos o más sistemas puede llevarse a cabo siendo estos idénticos, cuando todos los osciladores corresponden a un mismo tipo, o no idénticos, es decir, cuando se encuentran diferentes sistemas conviviendo en una red. Usualmente se realizan sincronizaciones con sistemas de un mismo tipo, sin embargo, una ventaja importante al sincronizar sistemas no idénticos es su

aplicación, por ejemplo, a comunicaciones seguras donde esto aumenta el grado de complejidad al tratar de obtener el mensaje enviado. Algunos tipos de sincronización se mencionan a continuación.

1 Osciladores caóticos idénticos.

1 *Sincronización idéntica.* Suponer un sistema de orden fraccionario con variables x ,

$${}_0D_t^q = F(x), \quad (3.3.1)$$

con condiciones iniciales $\chi_D \subset R^d$ y un sistema con estados x' con condiciones iniciales $\chi_R \subset R^d$, tal que para todo $x(0) \in \chi_D$ y $x'(0) \in \chi_R$. Si la respuesta del sistema x' es idéntico al del sistema x , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t) - x(t)\| = 0, \quad (3.3.2)$$

se dice que el sistema es de *sincronización completa o idéntica*, ya que cada estado sincroniza con su estado correspondiente en el otro sistema.

2 *Sincronización marginal de caos.* Algunos osciladores caóticos pueden exhibir fenómenos como amplificación de la amplitud de las señales caóticas o una proyección del atractor del sistema maestro en una región de fase lejos de la estabilidad, es decir, el atractor del esclavo sincroniza en otro lugar del espacio de fase diferente al del maestro. A esta se le conoce sincronización uniforme o marginal de caos.

2 Osciladores caóticos no idénticos

1 *Sincronización generalizada.* Para esta forma de sincronización pueden ocurrir dos situaciones, primero, que los osciladores sean del mismo tipo pero con parámetros distintos. Por ejemplo, dos circuitos eléctricos donde uno difiere en el otro al tener ciertos componentes con diferente valor. El segundo caso es cuando los sistemas son de diferente naturaleza, por ejemplo, un circuito eléctrico y un sistema óptico. Para lograr la sincronización es necesario asociar la salida de uno de los osciladores como una función dada de la entrada del otro.

- 2 *Sincronización de fase.* Ocurre cuando las fases de dos o más osciladores no idénticos coinciden mientras sus amplitudes continúan caóticas y no correlacionadas.
- 3 *Sincronización parcial.* Esta sucede cuando la sincronización no se da en todos los estados de los osciladores, sino que la condición (3.1.1) y la relación (3.1.4) se cumplen solo para una parte de los estados.

Hasta este punto se ha contemplado la sincronización solo entre dos sistemas pero dado que este trabajo de tesis se enfoca en un conjunto de elementos interactuando entre sí para producir una dinámica común, es necesario abordar el tema de redes complejas el cual se presenta de manera formal en el siguiente capítulo.

3.4. Sincronización de redes complejas

Para el desarrollo de esta tesis fue necesaria la comprensión de las características de las redes complejas y las topologías que se utilizarían. En la sincronización se exploraron varias técnicas pero la que mejor se adecuó fue la de [20]. En esta parte del capítulo se aborda el análisis de estabilidad y las condiciones de sincronización necesarias. Esta teoría está diseñada para sistemas de orden entero pero cabe destacar que lo que se busca en este trabajo es la sincronización con nodos de orden fraccionario.

3.4.1. Dinámica de las redes complejas.

Considere una red dinámica de N nodos idénticos acoplados, en el cual cada nodo sea un sistema dinámico n -dimensional. Las ecuaciones de estado de la red se definen

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4.1)$$

donde $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in R^n$ son las variables de estado del nodo i . Se definirá $c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$ como u_i que es la ley de control asignada a un estado en el sistema.

La constante c definida positiva mayor que cero representa la *fuerza de acoplamiento* o variable de peso y con ella se puede ajustar el acoplamiento entre los nodos. $\Gamma \in R^{n \times n}$ es una matriz de constantes 0 – 1 que conecta las variables que están acopladas. Se asume que $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ es una matriz diagonal donde para una particular i se considera $r_i = 1$ y $r_i = 0$ para $j \neq i$.

La matriz de acoplamiento $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ representa la matriz de acoplamiento de la red de acuerdo a su topología. Si existe una conexión entre el nodo i y el nodo j entonces $a_{ij} = 1$; de otro modo, $a_{ij} = 0$, ($i \neq j$). Los elementos diagonales de esta matriz están definidos como sigue

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.2)$$

Si el grado del nodo i es d_i , entonces

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.3)$$

Ahora, suponga que la red no tiene nodo aislado, entonces la matriz A es una matriz simétrica irreducible que tiene como valor propio un cero con multiplicidad de 1 y los demás valores propios son estrictamente negativos. Se dice que la red 3.4.1 sincroniza asintóticamente cuando

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.4.4)$$

La sincronización de los estados corresponde a una solución $s(t) \in R^n$ de un nodo aislado y satisface

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (3.4.5)$$

la solución $s(t)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o bien un atractor caótico como en este caso. La estabilidad de la sincronización

$$x_i(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t). \quad (3.4.6)$$

está determinada por la dinámica de un nodo aislado, de la función no lineal f y de su solución para $s(t)$, el grado de acoplamiento c , la matriz de conexiones Γ y la matriz de acoplamiento A .

Condiciones de sincronía

Basados en teoría de Lyapunov en [20] se muestran los siguientes resultados

Teorema 3.4.1. *Considere la red dinámica 3.4.1, con valores propios de A en*

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (3.4.7)$$

Ahora suponga que existe una matriz $\text{diag}(n \times n) D > 0$ y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$ tales que

$$[Df(s(t)) + d\Gamma]^T D + D[Df(s(t)) + d\Gamma] \leq -\tau I_n, \quad (3.4.8)$$

para todo $d \leq \bar{d}$. Si se cumple que $c\lambda_2 \leq \bar{d}$ entonces la sincronización $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t)$ es exponencialmente estable ya que $\lambda_2 < 0$ y $\bar{d} < 0$, entonces

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (3.4.9)$$

De esta condición se puede deducir que $|\lambda_2|$ puede llegar a ser muy grande esto implica que la red sincronice con una c pequeña. La sincronización de la red 3.4.1 con respecto a una configuración en particular, ya sea regular o irregular, va a estar determinada por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento A .

3.4.2. Estabilidad de las redes complejas.

Existen condiciones que garantizan la estabilidad del error de sincronía en una red compleja definida por 3.4.1 basada en teoría de Lyapunov. Se contemplan dos casos.

- 1) Red compleja sin nodo maestro. En este caso la dinámica final de la red es un nuevo estado caótico o estado emergente. Considere una red compleja de N nodos acoplados por la función

$$\dot{x}_i = f(x_i) + v_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4.10)$$

donde $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in R^n$ representa al vector de estados del i -ésimo nodo $f : R^n \rightarrow R^n$ es una función no lineal del estado $v_i, i = 1, 2, \dots, N$ es una función de acoplamiento. En

este caso, los nodos son sistemas idénticos por lo que tienen la misma dimensión, es decir, que $v_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, i = 1, 2, \dots, N$.

Cuando los estados de la red 3.4.10 convergen, esto es, $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ implica que cualquier solución de $x_i(t)$ de un nodo aislado es también una salida de 3.4.10.

Los estados de cualesquiera dos nodos caóticos $x_i(t), x_j(t)$ de la red satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j. \quad (3.4.11)$$

Ahora se define el error de sincronía como $e_i = x_i - x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N$ y se obtiene un sistema dinámico del error de sincronía

$$\dot{e}_i = \tilde{f}(x_i, x_{i+1}) + \tilde{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.4.12)$$

donde $\tilde{f}(x_i, x_{i+1}) = f(x_i) - f(x_{i+1}), \tilde{v}_i = v_i(x_1, x_2, \dots, x_N) - v_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Proponiendo la función $\tilde{v}_i = -\tilde{f}(x_i, x_{i+1}) - \alpha e_i$, con $\alpha > 0$ y $i = 1, 2, \dots, N - 1$, se obtiene que el error es asintóticamente estable alrededor de cero

$$e_i(t) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.4.13)$$

con esto 3.4.11 se cumple.

- 2) Red compleja con nodo maestro. Si la función $v_k = 0$ entonces se trata del caso con nodo maestro. Aquí la dinámica de la red va a tender al nodo maestro, por lo que la función de acoplamiento está dada por

$$v_i = f(x_k) - f(x_i) + \alpha(x_k - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.4.14)$$

El nodo k que no está acoplado se toma como el maestro y todos los nodos de la red sincronizarán con k

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_k(t)\| = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.15)$$

Con esto se garantiza que los estados de la red sincronicen con los estados arbitrarios del nodo desacoplado k . Se requiere que los nodos de la red compleja sincronicen con el estado del nodo maestro $s(t)$ satisfaciendo

$$\dot{s}(t) = f(s(t)). \quad (3.4.16)$$

Nuevamente, la dinámica de este nodo maestro puede ser un equilibrio, ciclo límite o atractor caótico. Se define la siguiente función de acoplamiento tal que se cumpla 3.4.15 y se garantice la sincronización asintótica y global

$$v_i = f(s) - f(x_i) + \alpha(s - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.4.17)$$

Capítulo 4

Redes complejas

En los últimos años se ha incrementado el interés por el estudio de las propiedades y dinámicas de las redes complejas, principalmente porque este tipo de sistemas se encuentran presentes en la naturaleza. Se encuentran por ejemplo las redes de regulación genética, redes de proteínas o redes metabólicas en los sistemas biológicos. La red Internet, redes telefónicas o la WWW (World Wide Web) forman parte de las redes de comunicaciones. En las redes sociales se encuentran por ejemplo, la propagación de enfermedades, colaboradores científicos o las amistades.

Las propiedades de estas redes, a pesar de que su naturaleza sea distinta, tienen entre sí muchas similitudes en su estructura y sus propiedades. Debido a esto es que se han podido desarrollar herramientas para comprender la estructura así como las dinámicas de las mismas. La importancia de comprender el funcionamiento de las redes complejas es debido a que la estructura de éstas afecta a la dinámica del sistema y se busca además la comprensión de las dinámicas emergentes de los sistemas que conforman estas redes.

En este capítulo se aborda el tema de redes complejas, sus características principales y las topologías que se utilizan en este trabajo de tesis. Se exponen los antecedentes matemáticos que ayudarán a la comprensión de las dinámicas de las redes complejas. Se contemplan además las topologías de las redes bajo dos esquemas, con y sin nodo maestro. En este trabajo de tesis se consideran solo sistemas

idénticos conformando a las redes complejas. Para concluir el capítulo se ejemplifican algunas redes complejas presentes en la naturaleza y la vida cotidiana.

4.1. Definiciones

Existen sistemas compuestos por un gran número de elementos que interactúan provocando que emerjan propiedades diferentes a las constituyentes en los elementos que forman a este sistema dinámicas emergentes. Como ejemplo se puede tomar a las neuronas como parte de una red, donde de la interacción de muchas de ellas emerge la mente a partir de elementos que por si solos no están dotados de inteligencia. Una red puede ser modelada formalmente por medio de un *grafo* y desde el punto de vista matemático es la siguiente [18]

Definición 4.1.1. Una red R consiste de un conjunto de nodos $V = v_1, v_2, \dots, v_N$, y un conjunto de parejas ordenadas $V = (v_i, v_j) \subset V \times V$. Cada pareja ordenada (v_i, v_j) se llama *conexión dirigida* del nodo v_i al nodo v_j . La red R se llama **no dirigida** si para cada pareja $(v_i, v_j) \in V$ también existe la pareja $(v_j, v_i) \in V$. De lo contrario a la red se le llama **dirigida**. A los nodos que están directamente conectados a un nodo v_i se les llama **vecinos**. Finalmente, el número de k_i de vecinos del nodo v_i , es decir, el número de conexiones de v_i se le llama **conectividad** de v_i y el promedio de estas conectividades, $(k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N k_i$ es la **conectividad de la red**.

El término de *complejidad* no está bien definido pero no significa que sea sinónimo de complicación. Éste puede referirse a la naturaleza de los nodos o a la estructura de la red. Por naturaleza de los nodos se entiende como discreta o continua, es decir, que son sistemas modelados por ecuaciones en diferencias (sistemas discretos) o bien modelados por ecuaciones diferenciales. Por la estructura de la red se refiere las topologías o bien, a la forma en que las conexiones modelan a estas topologías.

Se considera a una *red* como un conjunto de nodos interconectados y se conoce como *nodo* al elemento básico o unidad fundamental de la red el cual es un punto de conexión entre dos o más nodos. Los nodos que conforman la red compleja pueden ser de distinta naturaleza, por ejemplo sistemas con dinámicas no lineales y extremadamente complejas como circuitos caóticos o hipercaóticos, láseres, redes neuronales caóticas o como en este caso, nodos caóticos de orden fraccionario.

Algunos puntos importantes de los sistemas complejos son los siguientes:

1. Las redes complejas están compuestas de muchos nodos que interactúan entre sí para lograr un fin común.
2. Lo que ocurra con un nodo puede afectar a toda la red.
3. Si no existe un nodo maestro, las dinámicas de la red van a tender a un nuevo atractor obteniéndose una dinámica emergente.

Para ejemplificar esto puede considerarse una célula, la cual está compuesta de muchas partes como núcleo, membrana, ADN o proteínas. Cada una de las partes de la célula se encarga de realizar alguna función específica. Puede suceder alguna mutación en el ADN sin afectar a la célula pero en otras ocasiones esto puede ser fatal. Los comportamientos de la célula no pueden explicarse en términos de las propiedades de cada una de las partes individuales, de este modo, se puede decir que la célula ha enfermado pero no referirse a un núcleo o membrana enfermos ya que como resultado de la organización colectiva de todas las partes emerge la enfermedad.

4.2. Topologías en las redes complejas.

En este contexto, se define a la topología a la forma en que están acoplados o conectados los nodos que conforman a la red compleja. Existen dos grupos dentro de las redes dinámicas complejas, el primero son las *redes complejas regulares* y el segundo las *redes complejas irregulares*. Estas se definen de acuerdo a la disposición de los nodos o a su forma de conectar. Las redes regulares siguen un patrón definido en la forma en que conectan sus nodos, además, existen 3 diferentes escenarios de acoplamiento que más adelante serán descritos. Las redes irregulares tienen un acoplamiento aleatorio, es decir, o siguen un patrón definido en la conexión de sus nodos.

En este trabajo, se consideran tanto redes complejas regulares como irregulares abordando dos escenarios, uno de ellos con nodo maestro. Esto es, que existe un nodo que impone la dinámica caótica a los demás nodos. El segundo escenario es sin nodo maestro, es decir, que la dinámica final a la que convergen todos los nodos es emergente, distinta a cualquiera de las existentes en la red.

4.2.1. Topología Irregular.

La estructura de estas redes no sigue un patrón definido en la forma en que conectan sus nodos. Ejemplos de este tipo de redes son el Internet donde cada router puede ser un nodo, el cerebro en el cual las neuronas son los nodos o en el WWW que tiene como nodos a las páginas. En la Fig. 4.1 se muestra una red de 8 nodos en topología irregular.

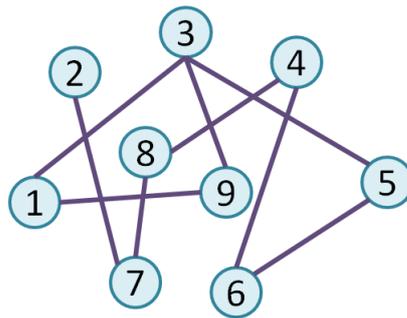


Figura 4.1: Red con topología irregular de 8 nodos ($N = 8$).

Sea $G = (V, E)$ un grafo, que consiste de $N = |V|$ nodos, con $V = V(G) = v_1, v_2, \dots, v_N$ el conjunto de nodos y $M = |E|$ conexión entre nodos, donde $E = E(G) = e_1, e_2, \dots, e_M$ representa el conjunto de conexiones.

Para las redes complejas, son importantes dos matrices asociadas a un grafo G . La primera es la *matriz de adyacencia* $A(G)$ y la segunda es la *matriz de grado* $D(G)$. A continuación se define cada una de ellas y sus propiedades.

i) **Matriz de adyacencia $A(G)$.** Matriz $N \times N$ en la cual los elementos a_{ij} están dados de la siguiente forma

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G) \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde $(i, j) \in E(G)$ implica que el nodo i está conectado con el nodo j . Si existe un grafo simple sin autoconexiones entonces la matriz de adyacencia tendrá ceros en su diagonal principal.

ii) **Matriz de grado $D(G)$.** Esta matriz tiene una dimensión $N \times N$ donde los elementos d_{ij} están dados por

$$\begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

donde d_i es el grado del nodo i . Para redes irregulares donde no existe un patrón definido en las conexiones de sus nodos, se tiene que d_i es la suma de los elementos de la fila i de la matriz de adyacencia $A(G)$.

Utilizando estas dos matrices puede formarse la matriz laplaciana para un grafo $L(G)$ con N nodos y una dimensión de $N \times N$, la cual está definida como $L(G) = D(G) - A(G)$, con elementos l_{ij} definidos como

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

La matriz Laplaciana $L(G)$ no toma una forma definida cuando se trata de redes irregulares, esto solo es posible para redes regulares como se verá más adelante, por lo que sus propiedades dependen del tipo de acoplamiento.

Considere la red de la Fig. 4.2

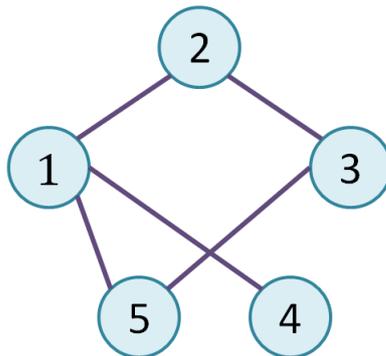


Figura 4.2: Red compleja de 5 nodos, ($N = 5$) en topología irregular sin nodo maestro.

La matriz Laplaciana que define las conexiones entre los nodos es la siguiente

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

El ejemplo que se presenta en esta sección no tiene un nodo maestro, sino que todos los nodos reciben y envían información hacia los nodos con los que tienen conexión. En la siguiente sección se presenta el caso de red irregular pero con nodo maestro.

Caso redes complejas irregulares con nodo maestro.

Cuando existe un nodo aislado en la red quiere decir que este nodo no recibe influencia de los nodos con los cuales tiene conexión, únicamente envía información a los nodos y si la sincronización es alcanzada entonces se impone la dinámica de este a toda la red y el atractor al que tiende el sistema

es al del nodo maestro. Así como en el caso donde no existe nodo maestro, la matriz Laplaciana no toma forma definida.

A continuación un ejemplo para determinar la matriz Laplaciana. De acuerdo a la Fig. 4.3 se tiene una red de 5 nodos con nodo maestro en el nodo N_3 .

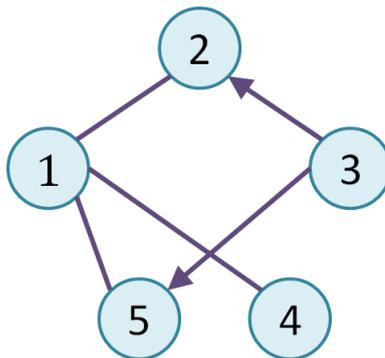


Figura 4.3: Red compleja de 5 nodos, ($N = 5$) en topología irregular con nodo maestro.

Para este caso

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

La única diferencia entre la matriz Laplaciana del caso sin nodo maestro y la de nodo maestro, es que se colocan ceros en la fila correspondiente al nodo maestro, esto es para que este nodo no reciba información de los nodos sino que solo envíe.

4.2.2. Topología Regular.

Dentro del grupo de las redes regulares las configuraciones comúnmente estudiadas son las de redes con acoplamiento global, redes con acoplamiento anillo y redes con acoplamiento estrella. En este trabajo de tesis se consideran estos tres tipos de redes tanto con nodo maestro como con nodo aislado y con nodos caóticos fraccionarios idénticos.

Acoplamiento Global

En este tipo de redes dos nodos cualquiera están conectados directamente, es decir, cada uno de sus nodos tiene una conexión con el resto de los nodos. En esta red todos los nodos se encuentran conectados.

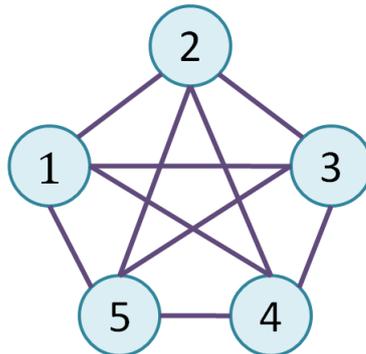


Figura 4.4: Red compleja en acoplamiento global con $N = 5$ sin nodo maestro.

Las matrices de grado y adyacencia se calculan como en el caso de acoplamiento irregular, con 4.2.4 y 4.2.5. En este caso cada nodo i está conectado con $N - 1$ nodos. Los elementos de la matriz Laplaciana tienen casi las mismas propiedades que 4.2.3 pero en este caso $d_1 = d_2 = \dots = N - 1$. De forma generalizada la matriz Laplaciana o matriz de acoplamiento A_{gc} para el caso global toma la

siguiente forma

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -N+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -N+1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -N+1 \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

Otra diferencia notable es el signo en cada uno de los elementos de la matriz, en las matrices de acoplamiento ya sea global, así como anillo y estrella que se verán más adelante, es necesario invertir los signos ya que se logra una sincronización más estable mientras los valores propios del sistema sean más negativos[17].

En esta matriz la suma de los elementos de las columnas es cero. Además los valores propios se encuentran uno de ellos en cero 0 y los demás en $-N$. El segundo valor propio mayor de esta matriz A_{gc} es $\lambda_{2gc} = -N$ que tiende a $-\infty$ esto es,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} = -\infty. \quad (4.2.7)$$

Acoplamiento anillo

Esta configuración tiene sus nodos acomodados en forma de anillo y acoplados cada uno a sus más cercanos, esto es, cada nodo i es adyacente a los nodos vecinos $i \pm 1, i \pm 2, i \pm K/2$ donde K es un número par. En la Fig. 4.5 se muestra un ejemplo de una red de este tipo.

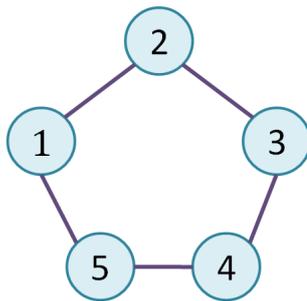


Figura 4.5: Red compleja en acoplamiento anillo con $N = 5$ sin nodo maestro.

Las matrices de grado y adyacencia se calculan del mismo modo que para redes irregulares con la particularidad de que cada nodo i está conectado a su nodo vecino. Tomando como caso particular $K = 2$, entonces $d_1 = d_2 = \dots = d_N = K$. De forma generalizada la matriz de acoplamiento anillo A_{nc} está definida como sigue

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -k \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

Para este caso, la suma de los elementos de las columnas de la matriz A_{nc} es cero.

Para esta red, el segundo valor propio mayor puede ser encontrado por medio de

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{\frac{K}{2}} \sin^2\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad (4.2.9)$$

para un valor fijo de K , λ_{2nc} se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{2nc} = 0. \quad (4.2.10)$$

Acoplamiento estrella

En este tipo de acoplamiento se tiene un nodo central al cual todos están conectados. En la Fig. 4.6 se muestra una red de esta clase.

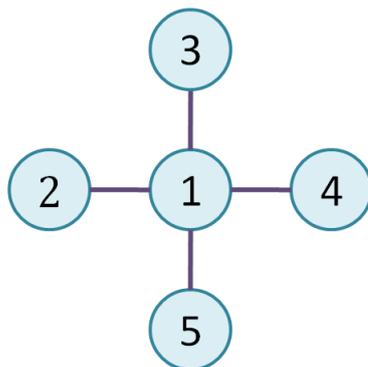


Figura 4.6: Red compleja en acoplamiento anillo con $N = 5$ sin nodo maestro.

Nuevamente las matrices de grado y adyacencia se calculan como en los casos anteriores. De forma general se define la matriz de acoplamiento estrella A_{st} como

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

En este caso también la suma de los elementos en las filas de la matriz A_{st} resultan cero. Los valores propios de la matriz se encuentran en $0, -N, -1, \dots, -1$. Su segundo valor propio mayor es

$$\lambda_{2nc} = -1. \quad (4.2.12)$$

Como caso particular, en esta clase de redes el valor del segundo valor propio λ_{2nc} no depende del número de nodos de la red.

4.2.3. Ejemplos de redes en la naturaleza.

En la naturaleza se pueden encontrar muchos tipos de redes y conexiones. Están presentes en diferentes campos de la ciencia como biología, química, ingeniería e incluso en la sociedad. Dichos sistemas están presentes en procesos de la naturaleza y otros han sido creados con el fin de transmitir información. Las redes regulares pueden encontrarse en reacciones termodinámicas donde intervienen las moléculas, en la piel de los animales donde los nodos son las células o en comunidades animales con nodos como termitas u hormigas. En el caso de redes irregulares, que son más complejas, se encuentran en el Internet con routers como elementos de sus redes, regulación de genes por medio de proteínas o en el cerebro con neuronas como sus nodos. En esta sección se describen algunas redes complejas que suelen ser las más comunes.

1. Redes bioquímicas.

Las redes bioquímicas se refieren a las redes de interacción de genes, proteínas u otras moléculas y su regulación celular u orgánica. Con el estudio de las redes complejas, la biología moderna ha podido explicar tanto la funcionalidad de una célula individual así como las interacciones y las dinámicas que producen al estar interconectadas varias de ellas para realizar una actividad en común, formando por ejemplo, órganos como el corazón, cerebro o pulmones. Esto es importante ya que permite conocer la relación que tienen éstos con otros órganos o procesos del cuerpo humano, como las series de reacciones bioquímicas que convierten la glucosa en moléculas simples.

Otro ejemplo es el metabolismo, el cual se encarga de transformar la materia y la energía y esto involucra a los metabolitos (molécula utilizada o producida durante el metabolismo). Estas funciones metabólicas son catalizadas y reaccionadas por enzimas. La mayoría de éstas son proteínas construidas de 20 tipos diferentes de aminoácidos por lo que pueden ser modeladas como una red de aminoácidos y éstos a su vez como una red de átomos, tales como carbono,

nitrógeno y oxígeno.

Otro caso son los genes, los cuales se regulan por factores de transcripción (proteínas que normalmente se unen al ADN). Los factores de transcripción se unen a múltiples sitios de unión en un genoma. Como resultado, todas las células tienen redes complejas de regulación de genes.

Así como estos, existen más ejemplos en los cuales se involucran múltiples procesos para controlar o regular funciones en el cuerpo humano. En la Fig. 4.7 se muestra un mapa de proteínas que muestra 3200 interacciones de las proteínas de entre 1 y 700 proteínas.

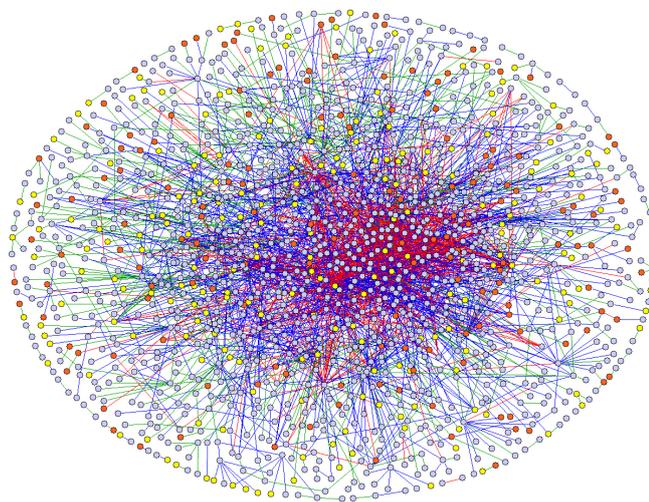


Figura 4.7: Mapa de interacciones de la proteínas humanas creada por científicos de Max Delbrück Center for Molecular Medicine (MDC) Berlin-Buch.

2. Redes sociales.

Una red social se compone de individuos o grupos y las relaciones que existen entre ellos. En este caso, los nodos son las personas y las conexiones pueden ser lazos de amistad o bien si pertenecen a una misma familia. En el desarrollo científico se pueden encontrar redes de coautores, las cuales se forman cuando se establece comunicación entre dos científicos al ser coautores de un artículo en común.

El análisis de una red social permite conocer las interacciones importantes entre diferentes grupos y la repercusión de estas en la vida cotidiana. Ejemplos de redes sociales son un grupo de amigos que estudian con delincuentes o la cuantificación de las interacciones sociales de células terroristas. También, en el contagio de enfermedades dentro de un grupo de individuos. El estudio de esos fenómenos ayuda a prevenir situaciones que pueden llegar a tener consecuencias catastróficas. En la Fig. 4.8 se muestra una red de individuos.

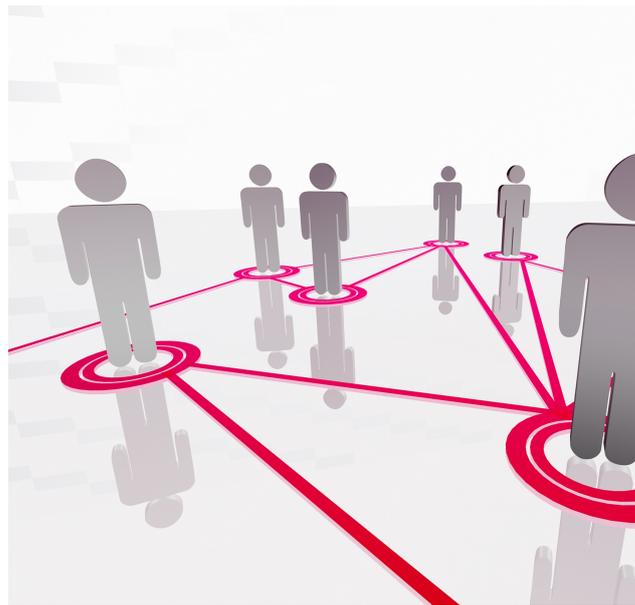


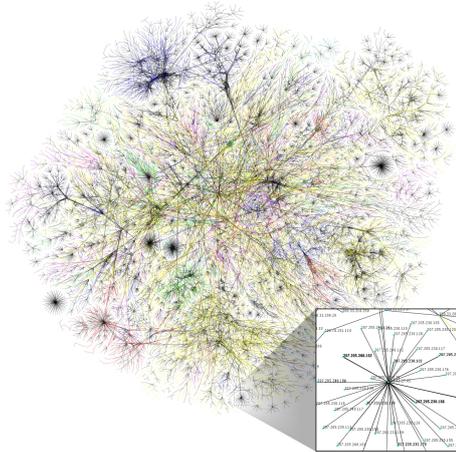
Figura 4.8: Red compleja con interacciones entre individuos (red social).

2. Redes en la Ingeniería.

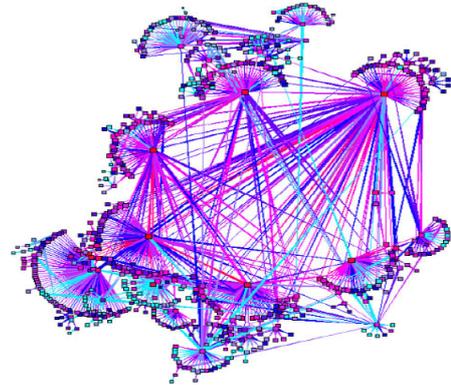
El primer estudio sobre la forma y características y cómo se miraba un mapa de Internet se mostró en 1999 por Faloutsos. En el Internet los nodos están representados por los servidores y como enlaces o conexiones se tiene al cableado, fibra óptica, etc.

Otra de las redes más importantes es la de World Wide Web (WWW), esta es un red formada por hyperlinks entre diferentes páginas Web. Tiene mas de 10^8 nodos conocidos. Cada nodo representa a una página Web los cuales tienen un cierto número de links de llegada y también una serie de link que dirigen a otras páginas Web.

El Internet y la WWW son redes de gran interés debido a sus grandes dimensiones que permiten un análisis estadístico fiable de sus propiedades topológicas. En la Fig. 4.9 se muestra un mapa de las redes Internet y WWW.



(a) Mapa parcial de Internet donde cada línea que une a dos nodos representa un enlace entre dos IP.



(b) Topología jerárquica de la cache de Web internacional.

Figura 4.9: Ejemplos de sincronía.

Las redes de energía y redes eléctricas también son importantes en el área de ingeniería. Por medio del estudio de redes se ha podido demostrar que la complejidad e interconectividad de la infraestructura eléctrica determina la vulnerabilidad de las perturbaciones en la red eléctrica. También se ha podido establecer en la red de sensores, con nodos estocásticos que activando solo un número necesario de nodos sensores en un momento en particular se puede ahorrar energía. Básicamente, el estudio de redes ha servido en este caso para analizar riesgos en las redes de potencia y energía.

Existen otras redes complejas que no fueron mencionadas aquí como redes de la ecología, redes neuronales, red de transportes, entre otras. Si el lector quiere profundizar en estos temas se recomienda [18], [19].

Capítulo 5

Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden fraccionario

En este capítulo se encuentran los resultados de la sincronización de redes complejas considerando nodos caóticos de orden fraccionario. En el capítulo 3 se presentaron los sistemas fraccionarios que se utilizarían así como los parámetros bajo los cuales se presenta el régimen caótico. Los escenarios de acoplamiento implican redes con nodo maestro y sin nodo maestro en topología regular e irregular.

Los trabajos existentes acerca de sincronización de sistemas de orden fraccionario solo involucran a dos sistemas y se utilizan técnicas de control que al tratar de expandir a una red resulta muy difícil. La teoría de Wang y Chen para redes complejas puede llevar a estos sistema a sincronización con una ley de control muy sencilla que puede ser colocada en cualquiera de los estados del sistema. A continuación se presenta la sincronización de redes complejas para diversos casos.

5.1. Sincronización de redes regulares

5.1.1. Acoplamiento global

Para esta configuración se utilizan sistemas Lorenz de orden fraccionario, el atractor es mostrado en la Fig. 2.2. Las ecuaciones que definen su dinámica son

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= \sigma(y_{i,2}(t) - x_{i,1}(t)) + u_{i,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= x_{i,1}(t)(\rho - z_{i,3}(t)) - y_{i,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= x_{i,1}(t)y_{i,2}(t) - \beta z_{i,3}(t). \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Los parámetros bajo los cuales el sistema es caótico y que son considerados para las simulaciones son $\beta = 28$, $\sigma = 10$, $\rho = 8/3$ y los órdenes fraccionarios $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$.

Se define una red de 12 nodos mostrada en la Fig. 5.1

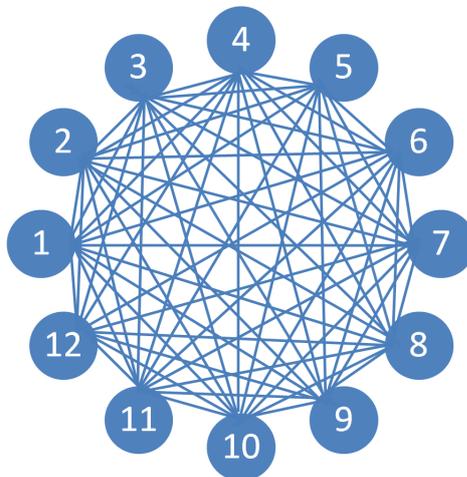


Figura 5.1: Red compleja de 12 nodos ($N=12$) en topología regular con acoplamiento global.

Ahora se definen los doce nodos y se ubica la ley de control $u_{i,1}$ en el primer estado de cada

sistema ${}_0D_t^{q_1} x_{11}(t)$. La ley de control está definida como $u_{i,1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$, $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= \sigma(y_{1,2}(t) - x_{1,1}(t)) + u_{1,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= x_{1,1}(t)(\rho - z_{1,3}(t)) - y_{1,2}(t), \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_3} z_{1,3}(t) &= x_{1,1}(t)y_{1,2}(t) - \beta z_{1,3}(t). \\ {}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) &= \sigma(y_{2,2}(t) - x_{2,1}(t)) + u_{2,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) &= x_{2,1}(t)(\rho - z_{2,3}(t)) - y_{2,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z_{2,3}(t) &= x_{2,1}(t)y_{2,2}(t) - \beta z_{2,3}(t). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

⋮

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) &= \sigma(y_{12,2}(t) - x_{12,1}(t)) + u_{12,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) &= x_{12,1}(t)(\rho - z_{12,3}(t)) - y_{12,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) &= x_{12,1}(t)y_{12,2}(t) - \beta z_{12,3}(t). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

En 4.2.6, se define la matriz de acoplamiento global para una red compleja. Para los doce nodos se tendría la siguiente matriz

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 \end{pmatrix} \quad (5.1.5)$$

Cada fila de la matriz A_{gc} corresponde a la ley de control para cada nodo, en este caso no hay un nodo

maestro por lo que se obtiene una dinámica emergente. Dado que la ley de control se encuentra en el primer estado, la matriz Γ se define como $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$.

Se consideraron las siguientes condiciones iniciales $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (-5.1, 0.2, 2.5)$, $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (0.8, 12, -1)$, $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (2.3, -5, -2.6)$, $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (10, 10, 1)$, $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (6.5, 9, 3)$, $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (9, 1.2, 3.57)$, $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (-3.7, -1, 4)$, $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (4.5, 8, 6)$, $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (-1, 0.01, -4)$, $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (5.7, -7.9, 3.1)$, $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (0.1, 3, 0.3)$, $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (0.19, 4, 7.5)$.

Se obtuvo sincronización para una fuerza de acoplamiento $c = 20$. En la Fig. 5.2 se muestra el atractor final hacia el cual tienden las dinámicas de la red global.

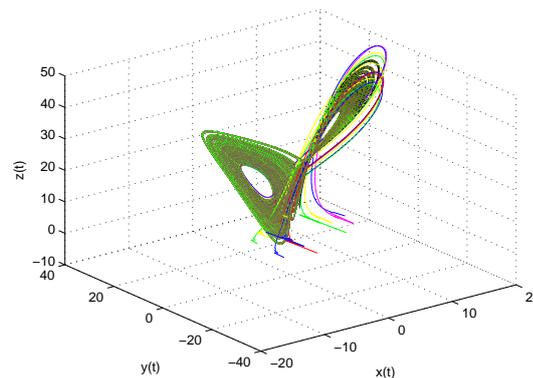


Figura 5.2: Atractor al que converge la red de 12 nodos Lorenz sin nodo maestro.

El plano de fase así como el error entre los estados se muestran en las figuras Fig. 5.3 y Fig. 5.4 respectivamente. En el plano de fase puede observarse que todos los estados sincronizan con su estado correspondiente en los otros nodos y esto se demuestra al ver la línea de 45° al centro de las gráficas y se observa también un pequeño transitorio. Por otro lado, en la gráfica del error se comparan todos los errores correspondientes a los primeros $x_{i,1}$, segundos $y_{i,2}$ y terceros estados $z_{i,3}$ de cada uno de los nodos y se observa que todos estos tienden a cero.

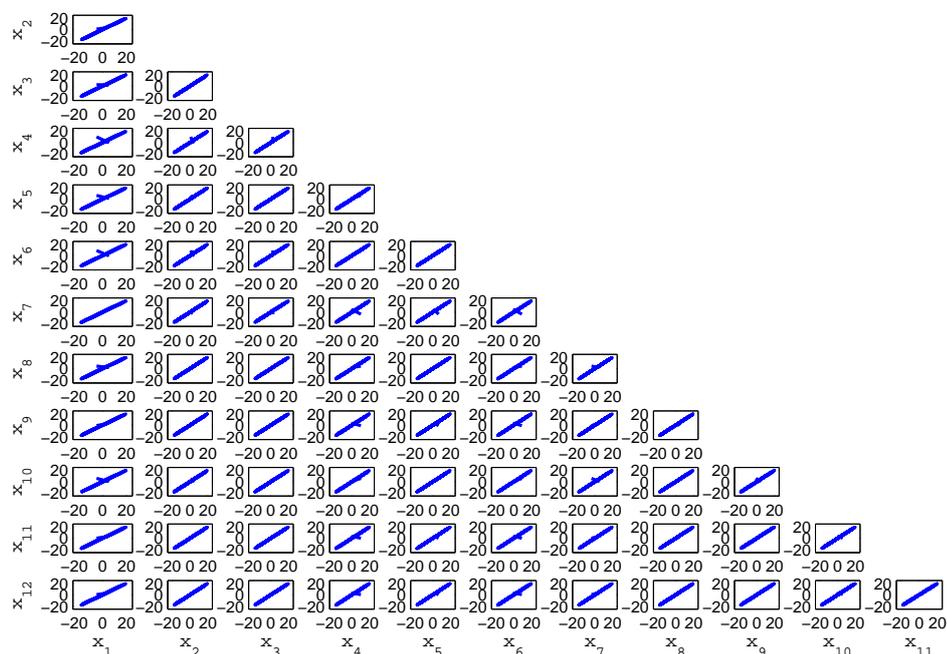


Figura 5.3: Plano de fase que compara a los estados $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,12}$ donde $i = 1, 2, \dots, N$.

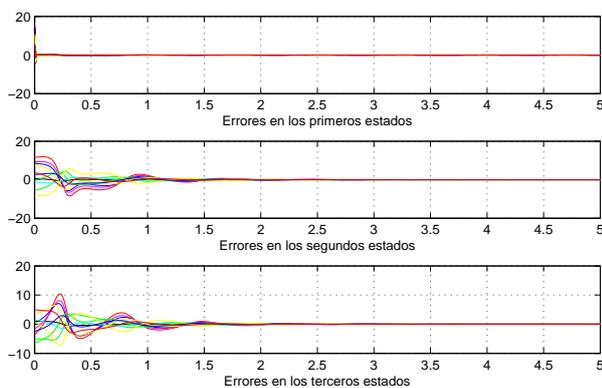
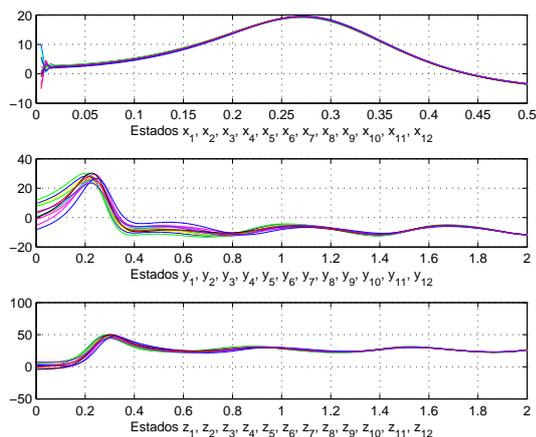


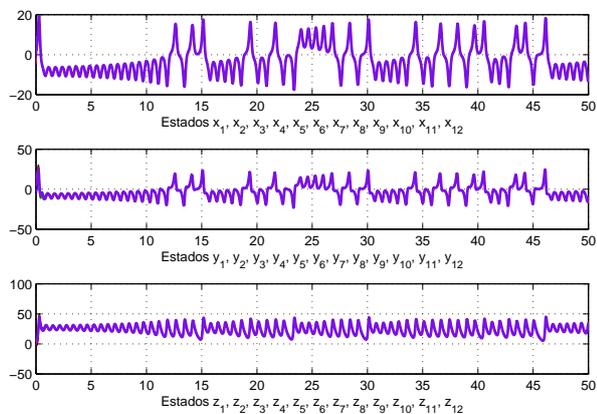
Figura 5.4: Gráfica de los errores entre los primeros $x_{i,1}$, segundos $y_{i,2}$ y terceros estados $z_{i,3}$ donde $i = 1, 2, \dots, N$.

La gráfica de los estados del sistema se muestra en la Fig. 5.5, se muestran los estados en un tiempo

de simulación menor para que pueda ser apreciada de mejor forma como es que partiendo todos los sistemas en condiciones iniciales distintas éstas convergen en una misma trayectoria y posteriormente se observan los estados de la sincronización de la red global con sistemas Lorenz de orden fraccionario en un tiempo de 50 seg.



(a) Estados de los sistemas Lorenz en un tiempo de 2 seg.



(b) Estados de los sistemas Lorenz en un tiempo de 50 seg.

Figura 5.5: Gráfica de los estados de la red global x_i , y_i , z_i , donde $i = 1, 2, \dots, 12$.

5.1.2. Acoplamiento anillo

Se considera también una red compleja de 12 nodos en acoplamiento anillo cuya configuración es mostrada en la Fig. 5.6, donde cada nodo está conformado por un sistema Rössler de orden fraccionario definido por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= -(y_{i,2}(t) + z_{i,3}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= x_{i,1}(t) + ay_{i,2}(t) + u_{i,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= b + z_{i,3}(t)(x_{i,1}(t) - c). \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Los parámetros con los cuales se realizaron las simulaciones son $a = 0.4$, $b = 0.2$, y $c = 10$ y un orden total del sistema de 2.7 con $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$. El atractor de este sistema se mostró en la Fig. 2.5.

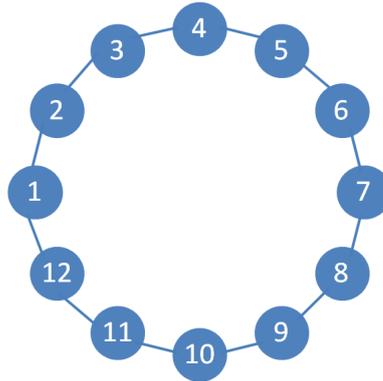


Figura 5.6: Red compleja de 12 nodos en configuración anillo sin nodo maestro.

Del mismo modo que en el caso anterior, se establecen los doce nodos con los sistemas Rössler fraccionarios y sus respectivas leyes de control.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= -(y_{1,2}(t) + z_{1,3}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= x_{1,1}(t) + ay_{1,2}(t) + u_{1,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{1,3}(t) &= b + z_{1,3}(t)(x_{1,1}(t) - c). \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) &= -(y_{2,2}(t) + z_{2,3}(t)), \\
{}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) &= x_{2,1}(t) + ay_{2,2}(t) + u_{2,2}, \\
{}_0D_t^{q_3} z_{2,3}(t) &= b + z_{2,3}(t)(x_{2,1}(t) - c).
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) &= -(y_{12,2}(t) + z_{12,3}(t)), \\
{}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) &= x_{12,1}(t) + ay_{12,2}(t) + u_{12,2}, \\
{}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) &= b + z_{12,3}(t)(x_{12,1}(t) - c).
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

En este caso para evitar confusión entre el parámetro c y la fuerza de acoplamiento, se asignará la variable k a esta variable de peso. De tal modo que la ley de control es $u_{i1} = k \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$, $i = 1, 2, \dots, N$. La matriz Γ es la que se encarga de establecer que nodos conectan de sistema a sistema, en este caso dado que la ley de control está en el segundo estado la matriz queda de la siguiente forma $\Gamma = \text{diag}(0, 1, 0)$.

En 4.2.8 se establece la matriz de acoplamiento que es utilizada para el acoplamiento anillo de acuerdo con la teoría de sistemas complejos. Para este caso, con $N = 12$ la matriz correspondiente es la siguiente

$$A_{nc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{5.1.10}$$

Se realizaron las pruebas de sincronización utilizando condiciones iniciales distintas para cada sistema $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (0.2, -0.1, 0.1)$, $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (8, -4, -1)$, $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (4, 0.1, 2)$, $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (-2.23, 5, 5.21)$, $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (5, 3.2, -3)$, $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (-4, -2.9, 0.12)$, $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (3.4, -2, -4.3)$, $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (5.1, 7.7, -5.2)$, $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (4.5, 8.1, 1.1)$, $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (2.1, -1.1, 0.65)$, $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (7.2, 3, 8)$, $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (1.1, -6.1, 3)$.

Cada fila será tomada como la ley de control correspondiente al segundo estado de cada sistema Rössler fraccionario. Se obtuvieron resultados de sincronización para $c > 5$ y en la Fig. 5.7 se muestra el atractor al cual convergen todas las dinámicas del sistema, que al no tener nodo maestro tienden a un nuevo atractor.

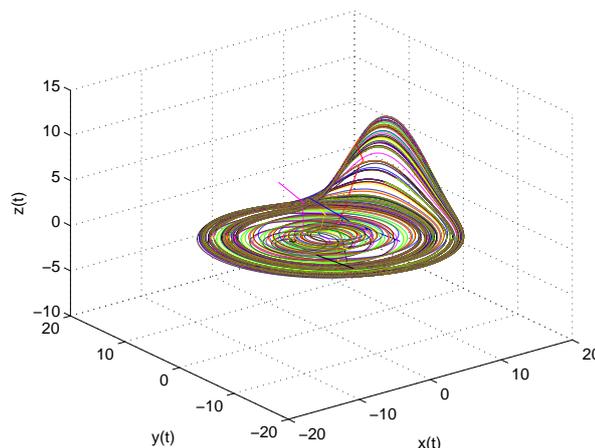


Figura 5.7: Red compleja de 12 nodos en configuración anillo sin nodo maestro.

En la Fig. 5.8 se muestra el plano de fase que demuestra la sincronía de los sistemas al comparar a todos los estados y_{i2} y se observa la línea de 45° al centro de las gráficas. Los estados de los doce sistemas se muestran en la Fig. 5.9 en la cual se observa un mayor tiempo transitorio en los estados x_i en comparación con los estados y_i y z_i donde es prácticamente imperceptible.

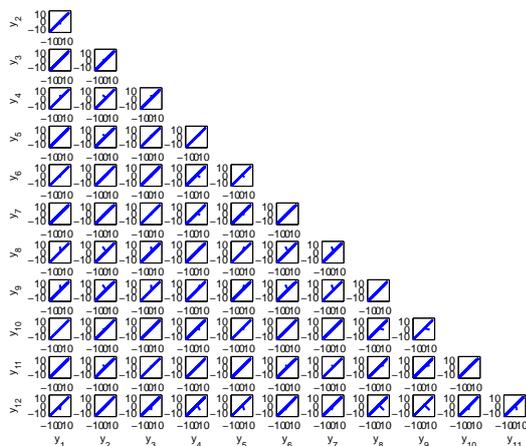


Figura 5.8: Plano de fase que compara los doce estados y_i de la red anillo.

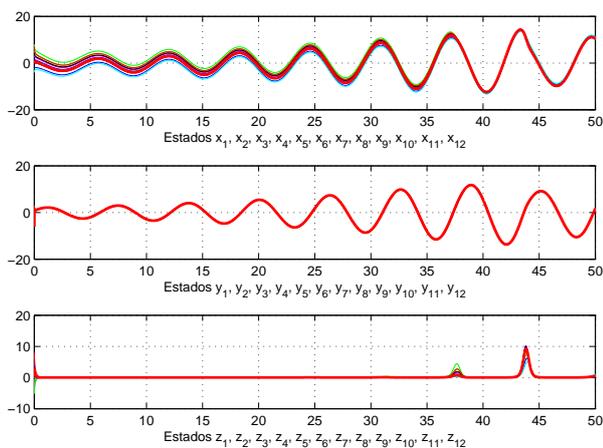


Figura 5.9: Estados de los doce sistemas Rössler de orden fraccionario en la red compleja anillo.

5.1.3. Acoplamiento estrella

Como último caso de las redes complejas regulares se encuentra el acoplamiento estrella dispuesto como aparece en la Fig. 5.10. Se propone que los nodos caóticos que forman esta red sean osciladores

Chen de orden fraccionario.

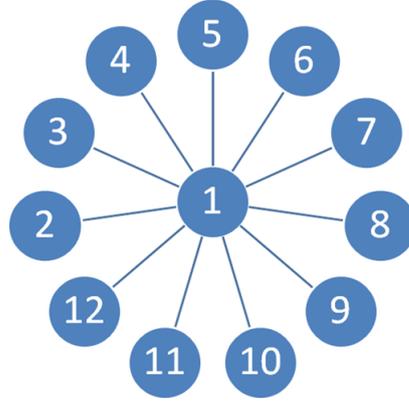


Figura 5.10: Red compleja de 12 nodos en configuración estrella sin nodo maestro.

Las ecuaciones de estado del sistema Chen de orden fraccionario están dadas a continuación, con los siguientes parámetros $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ y $d = c - a = -7$ y $q_1 = 0.985$, $q_2 = 0.99$, $q_3 = 0.98$.

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= a(y_{i,2}(t) - x_{i,1}(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= (c - a)x_{i,1}(t) - x_{i,1}(t)z_{i,3}(t) + cy_{i,2}(t) + u_{i,2}, \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= x_{i,1}(t)y_{i,2}(t) - bz_{i,3}(t).
 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

La ley de control esté presente en el segundo estado de cada sistema fraccionario

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= a(y_{1,2}(t) - x_{1,1}(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= (c - a)x_{1,1}(t) - x_{1,1}(t)z_{1,3}(t) + cy_{1,2}(t) + u_{1,2}, \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{1,3}(t) &= x_{1,1}(t)y_{1,2}(t) - bz_{1,3}(t).
 \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) &= a(y_{2,2}(t) - x_{2,1}(t)), \\
{}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) &= (c - a)x_{2,1}(t) - x_{2,1}(t)z_{2,3}(t) + cy_{2,2}(t) + u_{2,2}, \\
{}_0D_t^{q_3} z_{2,3}(t) &= x_{2,1}(t)y_{2,2}(t) - bz_{2,3}(t).
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

⋮

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) &= a(y_{12,2}(t) - x_{12,1}(t)), \\
{}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) &= (c - a)x_{12,1}(t) - x_{12,1}(t)z_{12,3}(t) + cy_{12,2}(t) + u_{12,2}, \\
{}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) &= x_{12,1}(t)y_{12,2}(t) - bz_{12,3}(t).
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Tal como en el caso de acoplamiento anillo la ley de control está dada por $u_{i1} = k \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$, $i = 1, 2, \dots, N$, y la matriz Γ queda definida del mismo modo ya que también presenta la ley de control en el segundo estado.

La matriz de acoplamiento de acuerdo a 4.2.11 quedaría de la siguiente forma

$$A_{sc} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.1.15}$$

Las condiciones iniciales que se consideraron para realizar las pruebas fueron $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (1.5, 2, 0.5)$, $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (8, -4, -9)$, $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (-3, -1, 6)$, $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (-7, -5, 9)$, $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (5, 9, -3)$, $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (1, 3, -0.5)$, $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (3, 2, 8, -6, 5)$,

$(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (-10.3, 7.2, -1.25)$, $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (0.01, 3.4, -1.6)$, $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (7.2, 4.3, 3.2)$, $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (-5, -3, 2.2)$, $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (11.1, 0.1, 5)$.

Se obtuvieron las siguientes gráficas, en la Fig. 5.15 se encuentra el atractor final para este acoplamiento sin nodo maestro y en la Fig. 5.17 se encuentra el plano de fase en donde se comparan los estados y_i de cada sistema.

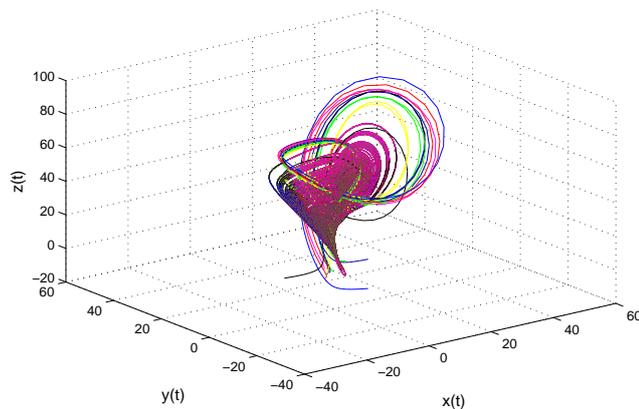


Figura 5.11: Atractor final para el acoplamiento en estrella con nodos de orden fraccionario Chen.

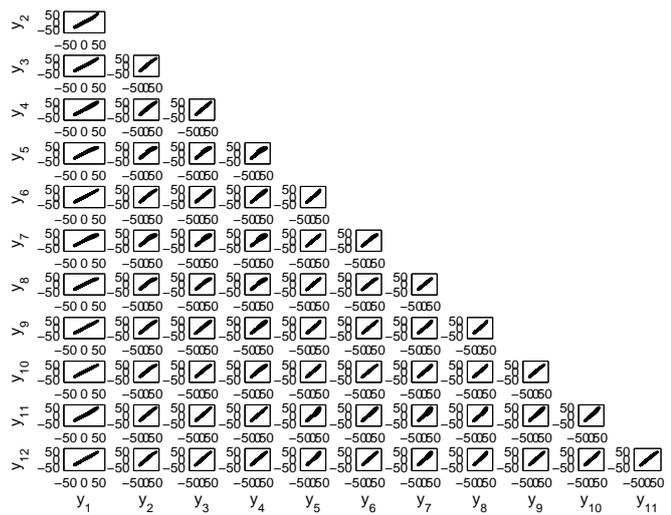


Figura 5.12: Plano de fase de los estados y_{ij} de los sistemas Chen en la red estrella.

Los estados de cada sistema que conforma la red estrella son mostrados en la Fig. 5.16, donde se observa que todos los estados convergen a un mismo estado totalmente nuevo ya que la red no tiene nodo maestro.

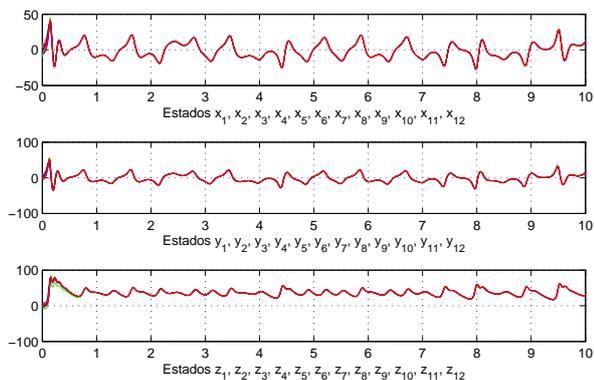


Figura 5.13: Estados de los doce sistemas Chen que conforman la red estrella.

5.2. Sincronización de redes irregulares

Para esta topología se proponen dos casos, ambos con doce nodos pero considerando sincronización con y sin nodo maestro. Las dos redes que se proponen se muestra en la Fig. 5.14 la primera de ellas corresponde a la red irregular sin nodo maestro y la segunda de ellas tiene como nodo maestro al nodo N_{10}

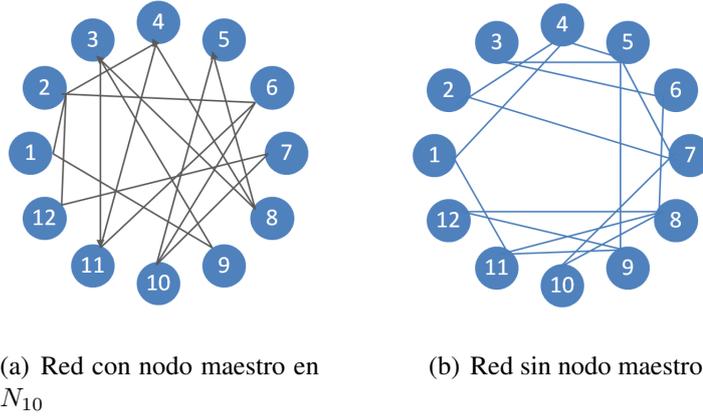


Figura 5.14: Redes complejas en topología irregular.

Para el primer caso **sin nodo maestro** se proponen sistemas Arneodo de orden fraccionario como nodos constituyentes de la red compleja. Este se encuentra definido a continuación tomando en cuenta los parámetros $\beta_1 = -5,5$, $\beta_2 = 3,5$, $\beta_3 = 0,8$, $\beta_4 = -1$ y $q_1 = q_2 = 0,97$ y $q_3 = 0,96$.

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= y_{i,2}(t) + u_{i1}, \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= z_{i,3}(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= -\beta_1 x_{i,1}(t) - \beta_2 y_{i,2}(t) - \beta_3 z_{i,3}(t) + \beta_4 x_{i,1}^3(t).
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

La ley de control está dada por $u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$, $i = 1, 2, \dots, N$, y se encuentra en el primer estado de cada nodo. Los doce nodos quedan como sigue

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{11}(t) &= y_{1,2}(t) + u_{1,1}, \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{12}(t) &= z_{1,3}(t),
 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

$${}_0D_t^{q_3} z_{13}(t) = -\beta_1 x_{1,1}(t) - \beta_2 y_{1,2}(t) - \beta_3 z_{1,3}(t) + \beta_4 x_{1,1}^3(t).$$

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{21}(t) &= y_{2,2}(t) + u_{2,1}, \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{22}(t) &= z_{2,3}(t),
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$${}_0D_t^{q_3} z_{23}(t) = -\beta_1 x_{2,1}(t) - \beta_2 y_{2,2}(t) - \beta_3 z_{2,3}(t) + \beta_4 x_{2,1}^3(t). \tag{5.2.4}$$

hasta

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) &= y_{12,2}(t) + u_{12,1}, \\
{}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) &= z_{12,3}(t), \\
{}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) &= -\beta_1 x_{12,1}(t) - \beta_2 y_{12,2}(t) - \beta_3 z_{12,3}(t) + \beta_4 x_{12,1}^3(t).
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

La matriz de acoplamiento para el caso irregular sin nodo maestro se obtiene de acuerdo a 4.2.3

$$A_{irc} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{5.2.6}$$

Se consideraron condiciones iniciales en cada uno de los nodos distintas a los demás y son las siguientes $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (-0.2, 0.5, 0.2)$, $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (1, -2.1, 3.1)$, $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (2.98, 2.8, -1.1)$, $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (4.2, -1.1, 3.2)$, $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (5.7, 4.23, 6.2)$, $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (-4.1, 0.12, 1.4)$, $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (-2, -4.3, 6.1)$, $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (9, -5.2, 4.5)$, $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (8.1, 1.1, 2.1)$, $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (-1.1, 12, 7.2)$, $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (-3, 8, 10.1)$, $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (-6.1, 3, -4.32)$.

Se obtiene sincronización para una $k = 25$ y se observa como todos los sistemas tienden a un mismo atractor y esto también puede verse en la gráfica de los estados, donde después de un transitorio los estados sincronizan. En la Fig.5.15 se muestra el atractor final de la red estrella; en la Fig. 5.16

se muestran los estados de cada uno de los nodos comparados con los demás y finalmente en la Fig. 5.17 se muestra el plano de fase donde se visualiza también que la sincronía se ha cumplido.

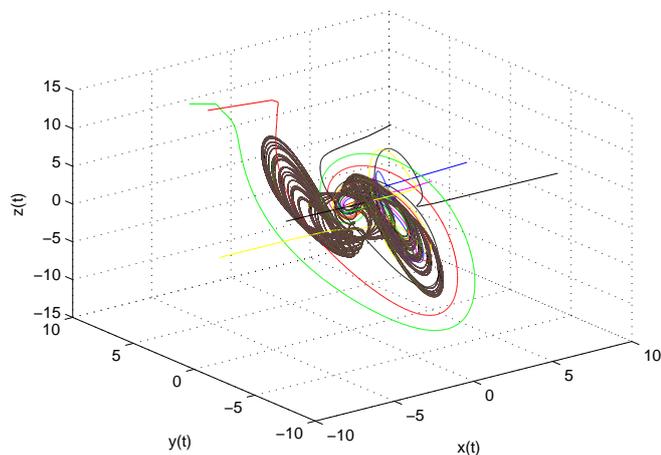


Figura 5.15: Atractor final para el acoplamiento irregular sin nodo maestro con nodos de orden fraccionario Arneodo.

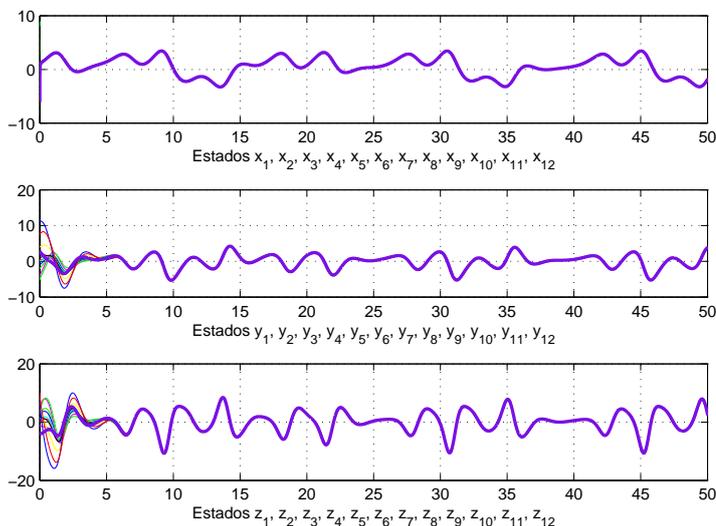


Figura 5.16: Sincronía de los estados en la red irregular sin nodo maestro con nodos Arneodo fraccionarios.

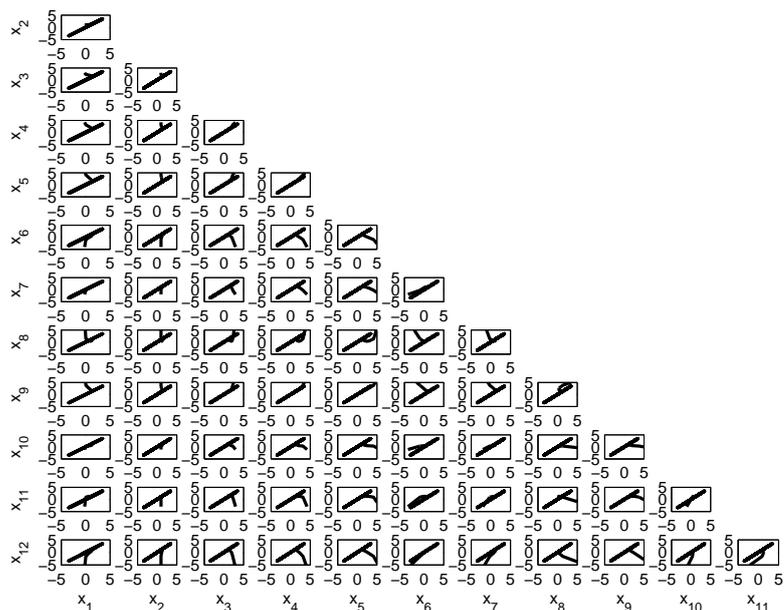


Figura 5.17: Plano de fase de los estados x_{ij} de los sistemas Arneodo que conforman la red irregular.

Como segundo caso se considera una red compleja irregular donde existe un **nodo maestro** que impone la dinámica a la red y a la cual todos los osciladores deben converger. El sistema que se propone es el sistema de orden fraccionario Duffing definido por las ecuaciones de estado siguientes

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= y_{1,2}(t) + u_{i1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= x_{1,1}(t) - x_{1,1}^3(t) - \alpha y_{1,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Los parámetros para que el sistema exhiba caos son $\alpha = 0.15$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1$ y $q_1 = 0.9$ y $q_2 = 1$. Se establecen los doce nodos y se elimina la ley de control correspondiente al nodo maestro. Se eligió el

nodo N_7 como nodo maestro, a continuación se presentan los nodos fraccionarios Duffing de la red

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= y_{1,2}(t) + u_{1,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= x_{1,1}(t) - x_{1,1}^3(t) - \alpha y_{1,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) &= y_{2,2}(t) + u_{2,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) &= x_{2,1}(t) - x_{2,1}^3(t) - \alpha y_{2,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

⋮

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{7,1}(t) &= y_{7,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{7,2}(t) &= x_{7,1}(t) - x_{7,1}^3(t) - \alpha y_{7,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

⋮

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) &= y_{12,2}(t) + u_{12,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) &= x_{12,1}(t) - x_{12,1}^3(t) - \alpha y_{12,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

De acuerdo a 4.2.5 la matriz de acoplamiento queda definida de la siguiente forma

$$A_{irc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.2.12)$$

Para llevar a cabo la simulación de sincronización se proponen distintas condiciones iniciales, es decir, se consideraron condiciones iniciales en cada uno de los nodos distintas a los demás y son

las siguientes $(x_{1,1}, y_{1,2}) = (1, 3)$, $(x_{2,1}, y_{2,2}) = (-0.5, 3.2)$, $(x_{3,1}, y_{3,2}) = (-2, -3.5)$, $(x_{4,1}, y_{4,2}) = (0.3, 4.2)$, $(x_{5,1}, y_{5,2}) = (-1.25, 0.01)$, $(x_{6,1}, y_{6,2}) = (3.4, -1.6)$, $(x_{7,1}, y_{7,2}) = (7.2, 4.3)$, $(x_{8,1}, y_{8,2}) = (2.2, -5)$, $(x_{9,1}, y_{9,2}) = (3, 2.2)$, $(x_{10,1}, y_{10,2}) = (3.1, 0.43)$, $(x_{11,1}, y_{11,2}) = (5, -1)$, $(x_{12,1}, y_{12,2}) = (2.3, -2)$.

Se obtiene sincronía en todos los estados y se utiliza una fuerza de acoplamiento $c = 15$. El atractor final se muestra en la Fig. 5.18 el cual es el atractor del nodo N_7 al cual tienden todos los demás. La gráfica de estados se muestra en la Fig. 5.19 y todos los estados convergen a uno solo. El plano de fase que también demuestra sincronía, se muestra en la Fig. 5.20.

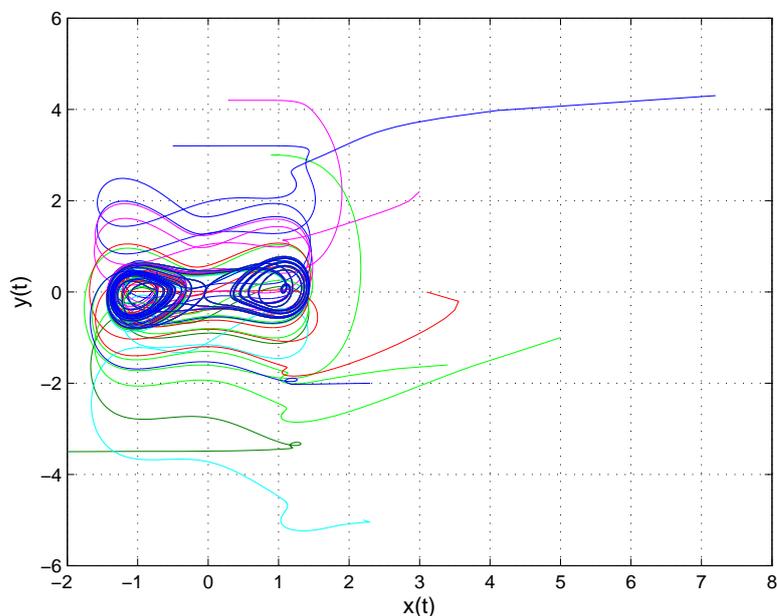


Figura 5.18: Atractor final para el acoplamiento en irregular con nodo maestro y nodos Duffing fraccionarios.

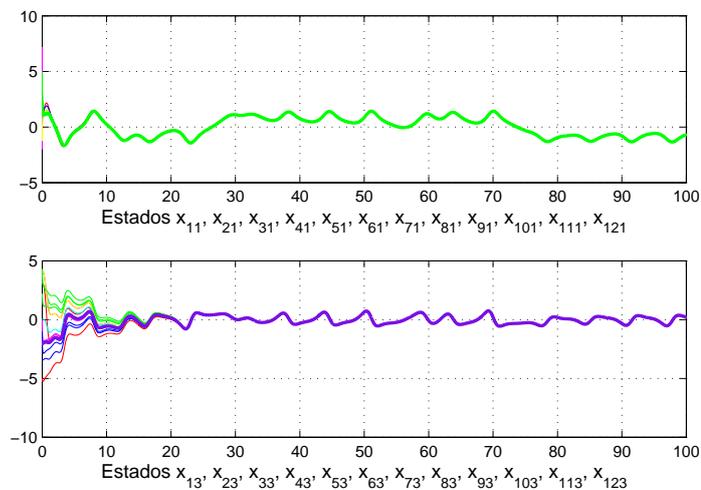


Figura 5.19: Sincronía de los estados de la red irregular con sistemas Duffing de orden fraccionario.

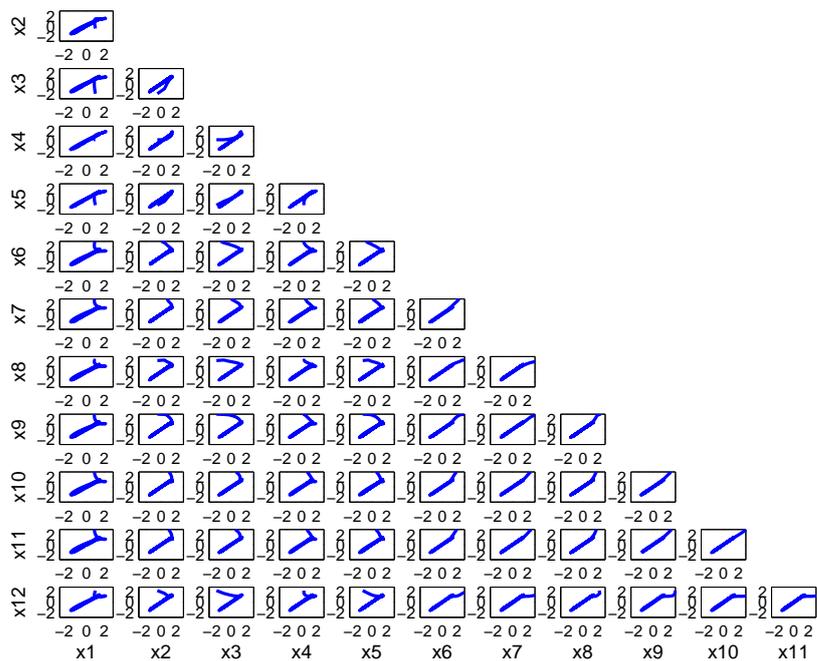


Figura 5.20: Plano de fase de los estados x_{ij}

Capítulo 6

Sincronización experimental de una red compleja con nodos caóticos de orden fraccionario

El estudio de los sistemas caóticos de orden fraccionario se ha llevado a cabo desde un enfoque de análisis numérico, sin embargo, es importante saber como se comportarían estos sistemas en un entorno experimental y en particular interés de este trabajo como sería su comportamiento en una red. En este capítulo se considera la simulación de redes complejas con sistemas caóticos de orden fraccionario por medio de un software de circuitos avanzados, *Multisim*, el cual permite evaluar el comportamiento de la red desde una perspectiva más cercana a una implementación física. Se consideran también dos escenarios, uno de ellos es la sincronización de *redes regulares* en sus tres acoplamientos y el segundo es la sincronización de *redes irregulares*.

6.1. Realización analógica de los circuitos.

La ecuación fundamental de orden fraccionaria se representa de la siguiente forma

$$(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = e(t), \quad \text{para } 0 < m < 2. \quad (6.1.1)$$

La función de transferencia de este tipo de sistemas de orden fraccionario está dado por la siguiente función irracional

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^m]}, \text{ para } 0 < m < 2. \quad (6.1.2)$$

donde s es la frecuencia compleja y τ_0 es el tiempo característico de relajación. Una de las formas de estudiar sistemas de orden fraccionario es por medio de aproximaciones lineales que se obtienen utilizando técnicas en el dominio de la frecuencia basadas en los diagramas de Bode. Se obtiene una aproximación lineal que va a depender de un ancho de banda deseado y la discrepancia entre la aproximación de la magnitud del diagrama de Bode y la magnitud real del sistema.

En [22] se encuentra el análisis de este método detalladamente por lo que aquí solo se presentará la teoría necesaria para la implementación de los circuitos.

En el dominio de Laplace el integrador de orden fraccionario m puede representarse como

$$F(s) = \frac{1}{s^m}. \quad (6.1.3)$$

La función de transferencia 6.1.3 tiene un diagrama de Bode que se caracteriza por una pendiente de $-20m$ dB por década. En [24] se establece un algoritmo para calcular una función de transferencia lineal que se aproxime a la función fraccionaria. Esta se basa en aproximarse a la línea de $-20m$ dB por medio de líneas en zig-zag conectadas juntas alternando pendientes de 0 dB y -20 dB por década. De acuerdo a este algoritmo, si la discrepancia entre la línea actual y la aproximación se especifica como y dB sobre un rango de frecuencias de w_{max} y una frecuencia de corte de p_T entonces 6.1.3 puede ser aproximado con la ecuación siguiente

$$F(s) = \frac{1}{s^m} \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{p_T}} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})}. \quad (6.1.4)$$

El operador de orden fraccionario es aproximado por medio de una función de transferencia lineal de orden $N + 1$ donde N está dado por

$$N = 1 + \text{Integer}\left(\frac{\log\left(\frac{w_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)}\right), \quad (6.1.5)$$

y p_0 , a y b están dados por

$$\begin{aligned} p_0 &= p_T 10^{[y/20m]}, \\ a &= 10^{[y/1-(1-m)]}, \\ b &= 10^{[y/10m]} \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

A continuación se realizan la sincronización de redes complejas con osciladores de orden fraccionario por medio de circuitos y su simulación con un software de circuitos esquemáticos. El error de aproximación para hacer estos circuitos es de 2dB y una $w_{max} = 100$ y $p_T = 0.01$ elegidos de las tablas que se presentan en [22].

6.2. Simulación de redes complejas regulares.

6.2.1. Circuito analógico del sistema Liu de orden fraccionario.

Consideramos el sistema Liu de orden fraccionario definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -ax(t) - ey^2(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= by(t) - kx(t)z(t) + u_{i2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -cz(t) + mx(t)y(t), \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

donde q es de orden fraccionario $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ y se consideran los siguientes parámetros $a = e = 1$, $b = 2.5$, $c = 5$ y $k = m = 4$ que hacen al sistema caótico. De acuerdo a [23] la aproximación de la derivada $1/s^{0.95}$ está dada de la siguiente forma

$$\frac{1}{s^{0.95}} \approx \frac{1,281s^2 + 18,6004s + 2,0833}{s^3 + 18,4738s^2 + 2,6574s + 0,003} \quad (6.2.2)$$

El circuito para la realización de 6.2.2 se muestra en la Fig. 6.1

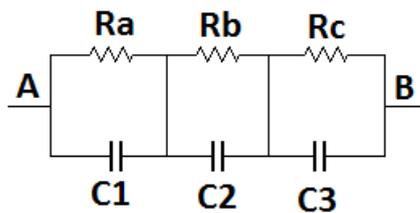


Figura 6.1: Circuito analógico para la aproximación de $\frac{1}{s^{0,95}}$.

La función de transferencia lineal que se obtiene entre A y B en el circuito mostrado en Fig. 6.1 es la siguiente

$$H(s) = \frac{1}{C_0} \frac{\left(\frac{C_0}{C_1} + \frac{C_0}{C_2} + \frac{C_0}{C_3}\right) \frac{s^2 + \frac{C_2+C_3}{R_a} + \frac{C_1+C_3}{R_b} + \frac{C_1+C_2}{R_c} s + \left(\frac{R_a+R_b+R_c}{R_a R_b R_c}\right)}{(s + 1/R_a C_1)(s + 1/R_b C_2)(s + 1/R_c C_3)}, \quad (6.2.3)$$

donde C_0 es un parámetro unitario con valor $C_0 = 1\mu F$ y $F(s) = H(s)C_0 = \frac{1}{s^{0,95}}$. Los valores de los capacitores y resistencias son las siguientes: $C_1=1.268\mu F$, $C_2 = 4.58\mu F$, $C_3 = 3.64\mu F$, y $R_a = 692.85M\Omega$, $R_b = 1.5153M\Omega$, $R_c = 14.979k\Omega$. El circuito está elaborado con amplificadores operacionales LM741, las resistencias que se consideran son $R_1 = 100k\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = R_8 = R_9 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = R_{21} = R_{22} = R_{26} = R_{27}=10k\Omega$, $R_{10}=40k\Omega$, $R_{11} = R_{19}=2.5k\Omega$, $R_{20}=20k\Omega$. El circuito se muestra en la Fig. 6.2 y los estados del sistema están en la Fig. 6.3

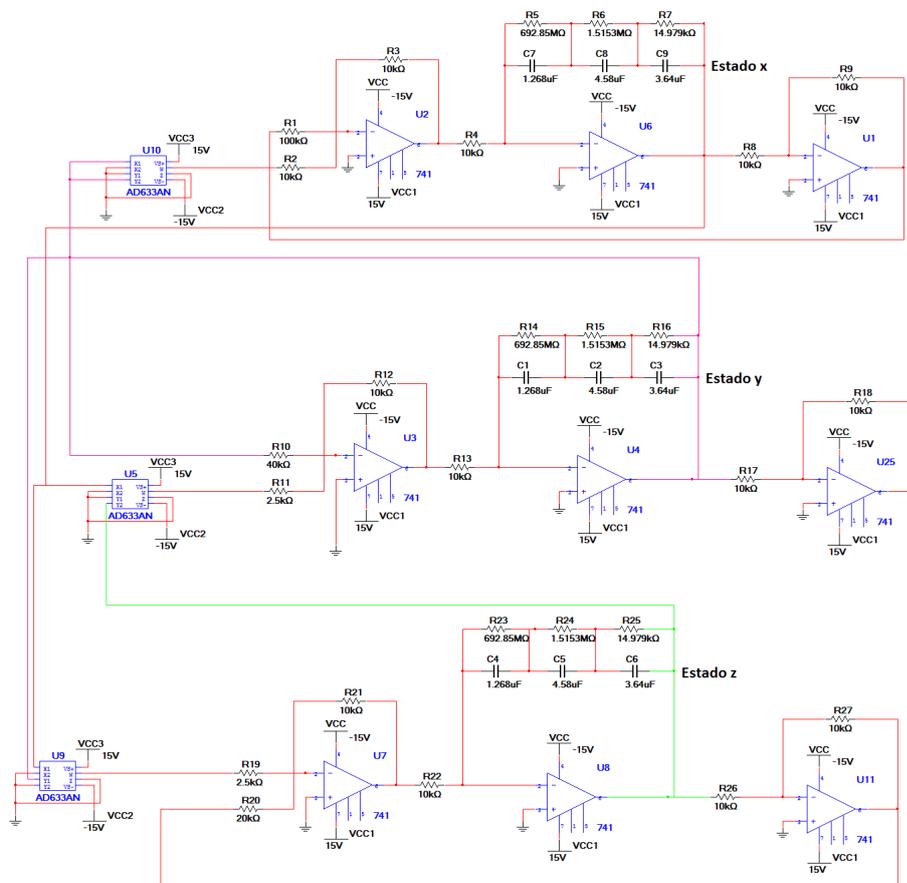


Figura 6.2: Circuito analógico para el sistema Liu de orden fraccionario.

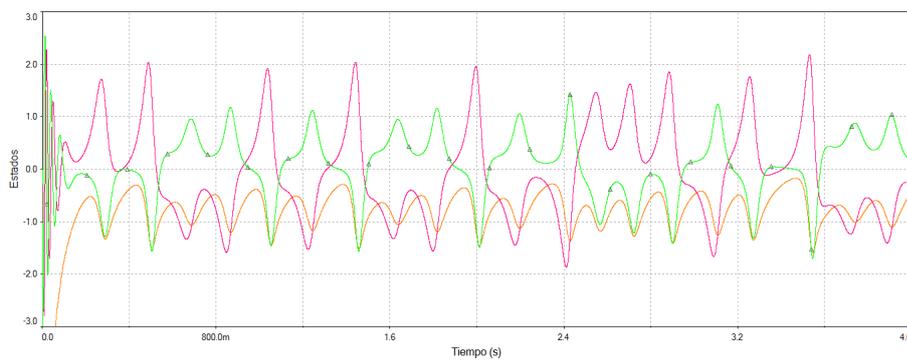


Figura 6.3: Estados x, y, z del sistema Liu de orden fraccionario.

Los diagramas de fase obtenidos de la simulación del circuito se muestran en la Fig. 6.4

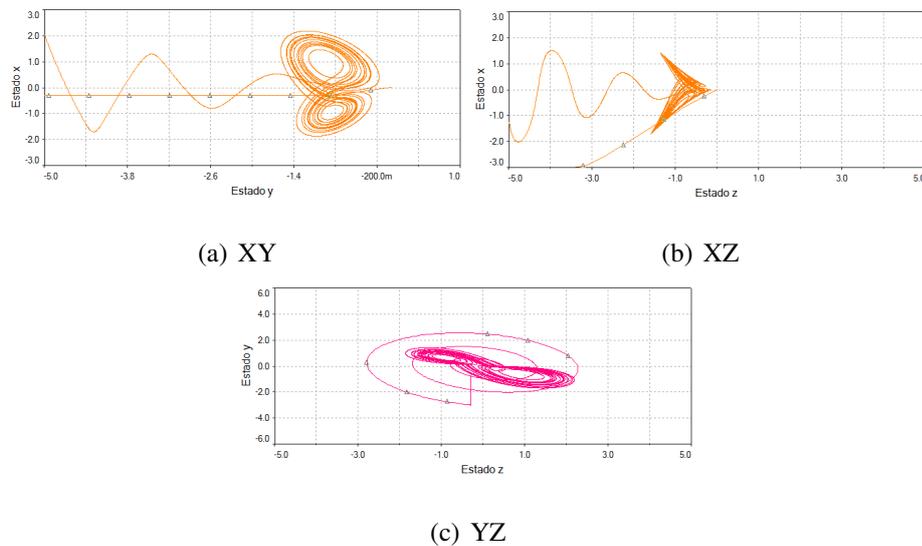


Figura 6.4: Atractores del sistema Liu de orden fraccionario.

Red con acoplamiento global.

Se considera la red en acoplamiento global de 4 nodos ($N = 4$) mostrada en la Fig. 6.5

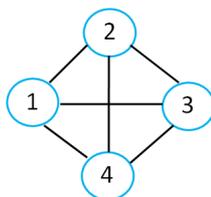


Figura 6.5: Red compleja regular de 4 nodos en acoplamiento global.

Se utilizan sistemas Liu de orden fraccionarios descritos anteriormente, como nodos a sincronizar

en esta red. La matriz de acoplamiento se obtiene de acuerdo a 4.2.6.

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$

Por lo tanto, las leyes de control que se implementan son las siguientes

$$\begin{aligned} u_1 &= c(-3y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ u_2 &= c(y_1 - 3y_2 + y_3 + y_4) \\ u_3 &= c(y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4) \\ u_4 &= c(y_1 + y_2 + y_3 - 3y_4) \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Al tratarse de varios nodos la construcción de la red se hace complicada desde el punto de vista de la circuitería, por lo que se encapsula cada sistema en un subcircuito mostrado en la Fig. 6.6. En las terminales del subcircuito se tiene a los estados del sistema, x_i, y_i, z_i donde $i = 1, 2, \dots, N$, la ley de control u_i la cual es implementada por medio de un sumador con amplificador operacional fuera del subcircuito y uno de los estados negados, $-y_i$ que es necesario para formar la ley de control.

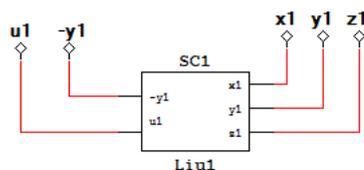


Figura 6.6: Subcircuito que contiene al sistema Liu de orden fraccionario.

La red conformada por los 4 sistemas Liu de orden fraccionario y sus respectivas leyes de control se muestran en la Fig. 6.7. Las leyes de control u_1, u_2, u_3, u_4 tienen resistencias con valor de $R_{28} = R_{35} = R_{42} = R_{49} = 10k\Omega$, $R_{29} = R_{30} = R_{31} = R_{32} = R_{34} = R_{36} = R_{37} = R_{38} = R_{40} = R_{41} = R_{43} = R_{44} = R_{46} = R_{47} = R_{48} = R_{50} = 30k\Omega$, $R_{33} = R_{39} = R_{45} = R_{51} = 1k\Omega$.

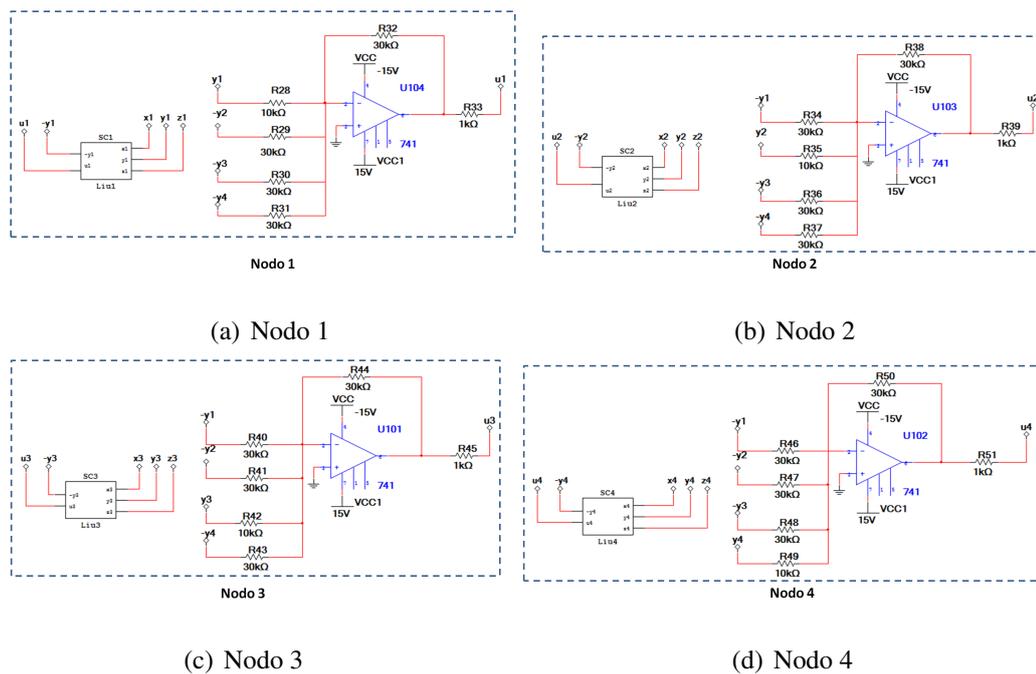


Figura 6.7: Circuitos de Liu y leyes de control u_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, para cada sistema.

En esta simulación se consideran las siguientes condiciones iniciales $(x_1, y_1, z_1) = (0.5, 1.5, 2)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0.7, 0.8, 1.8)$, $(x_3, y_3, z_3) = (1.1, 1.9, 0.9)$, $(x_4, y_4, z_4) = (0.9, 0.1, 1.6)$. Se obtiene el plano de fase en la Fig. 6.8 en la que se observa que la sincronización es lograda. La fuerza de acoplamiento utilizada es de $c = 10$,

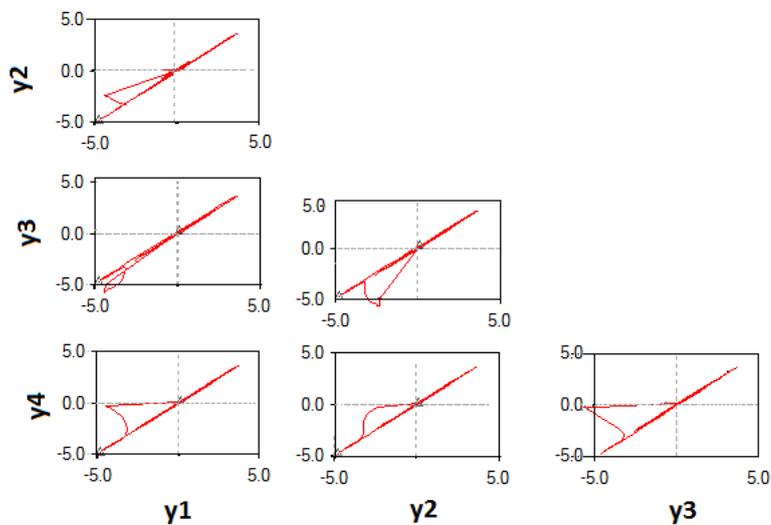
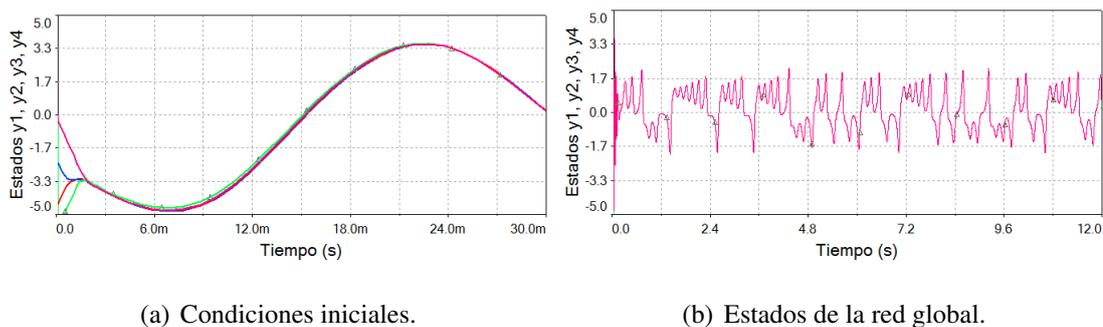


Figura 6.8: Plano de fase de la red compleja en acoplamiento global con sistemas Liu de orden fraccionario.

En la gráfica de la Fig. 6.9 se muestran los cuatro estados y_1, y_2, y_3, y_4 donde se observa la convergencia hacia una misma dinámica.



(a) Condiciones iniciales.

(b) Estados de la red global.

Figura 6.9: Estados y_1, y_2, y_3, y_4 de los sistemas Liu de orden fraccionario en la red global.

Finalmente, los atractores correspondientes a cada nodo se muestran por separado en la Fig. 6.10

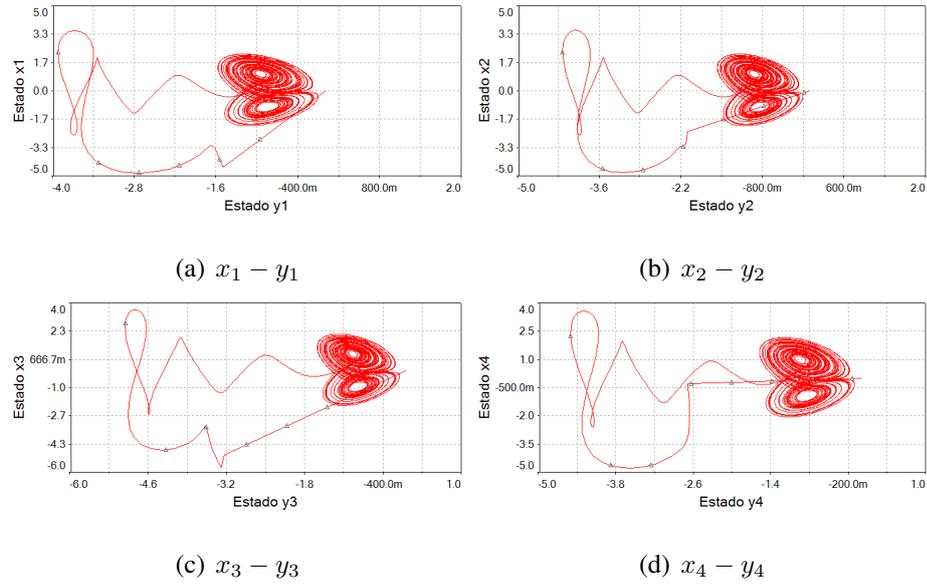


Figura 6.10: Atractores XY de la red global con sistemas Liu de orden fraccionario.

6.2.2. Circuito analógico del sistema Financiero de orden fraccionario

En esta sección se plantea además la sincronización en una red con acoplamiento anillo donde cada nodo es un sistema Financiero de orden fraccionario definido por las siguientes ecuaciones, donde los parámetros que hacen al sistema caótico son $a = c = 1$, $b = 0.1$ y $q_1 = 1$, $q_2 = 0.95$ y $q_3 = 0.9$ con ley de control en el primer estado.

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= z(t) + x(t)(y(t) - a) + u_i, \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= 1 - by(t) - x^2(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -x(t)cz(t).
 \end{aligned}
 \tag{6.2.6}$$

En este caso, se hacen tres derivadores diferentes ya que cada ecuación diferencial tiene una fraccionalidad distinta. Para la primer ecuación se construye el derivador solo con un capacitor con valor $C = 1\mu F$, ya que es una ecuación diferencial de orden 1. Para la segunda ecuación se construye el derivador con 6.2.2 y los valores en las resistencias y capacitores de este son iguales que para el

sistema Liu ($\frac{1}{s^{0,95}}$). Por último, el derivador de la última ecuación, $\frac{1}{s^{0,9}}$, se lleva a cabo con la siguiente aproximación

$$\frac{1}{s^{0,9}} \approx \frac{2,2675(s + 1,292)(s + 215,4)}{(s + 0,01292)(s + 2,154)(s + 359,4)}. \quad (6.2.7)$$

Al resolver 6.2.3, para este caso cuando $\frac{1}{s^{0,9}}$, el derivador que se forma con la red de capacitores y resistores de la Fig. 6.1 tiene los siguientes valores $C_1=1.23\mu\text{F}$, $C_2=1.84\mu\text{F}$, $C_3=1.1\mu\text{F}$, y $R_a=62.8\text{ M}\Omega$, $R_b=250\text{ k}\Omega$, $R_c=2.5\text{ k}\Omega$. El sistema construido por medio de un circuito analógico está mostrado en la Fig. 6.11, los valores de las resistencias que se utilizan para adecuar las señales de cada estado son $R_1 = R_3 = R_9 = R_{16} = R_{17} = 100\text{k}\Omega$, $R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_{10} = R_{12} = R_{13} = R_{14} = R_{15} = R_{18} = R_{19} = R_{20} = 10\text{k}\Omega$. En la gráfica de la Fig. 6.12 se encuentran los estados del sistema.

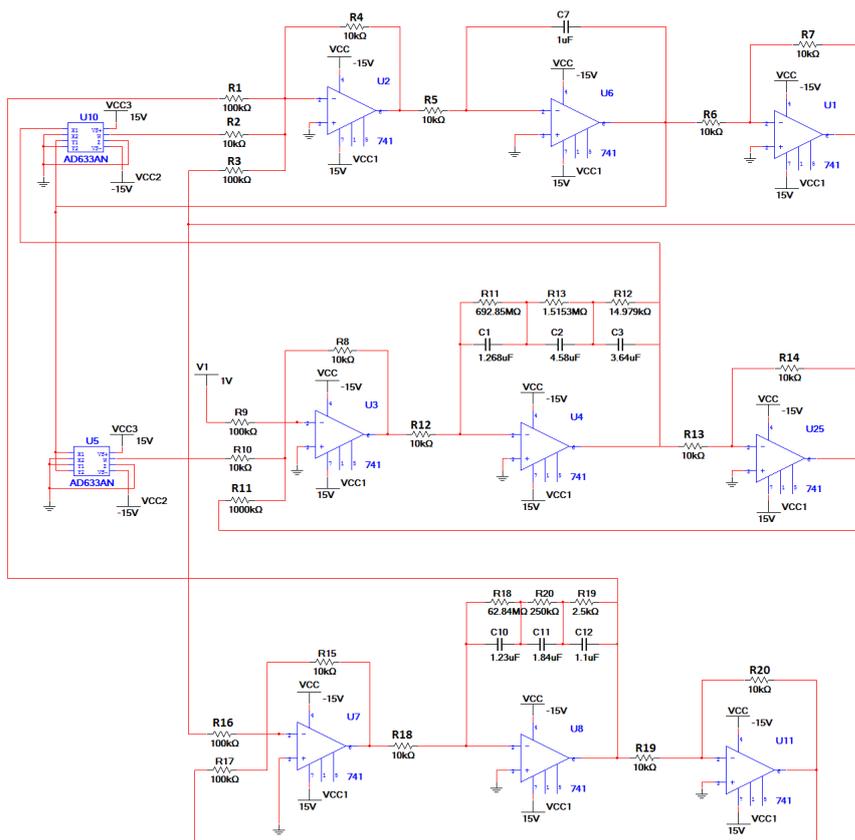


Figura 6.11: Circuito para el sistema Financiero de orden fraccionario 1,85.

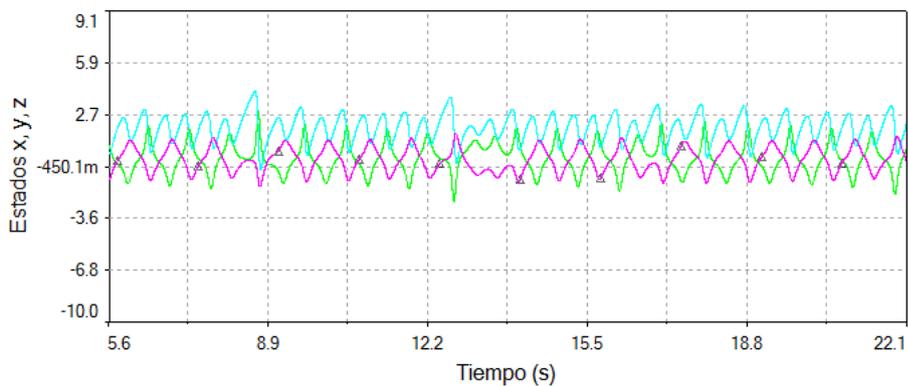


Figura 6.12: Estados del sistema Financiero en su simulación por medio de un circuito.

Los diagramas de fase obtenidos en la simulación del circuito Financiero se muestran en la Fig. 6.13

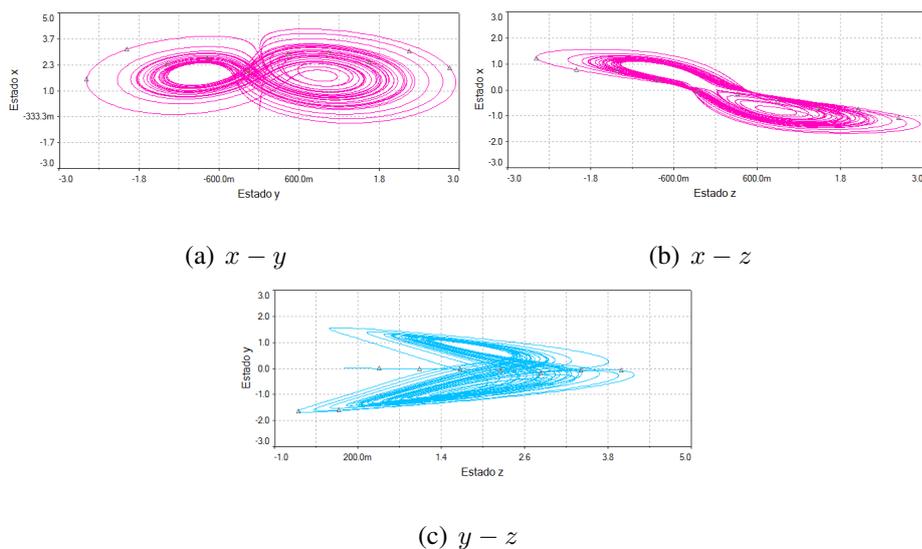


Figura 6.13: Planos de fase del sistema Financiero de orden fraccionario.

Red con acoplamiento anillo.

A partir del circuito del sistema Financiero de orden fraccionario de la Fig. 6.11, se elaboran 4 sistemas idénticos para la sincronización en una red anillo. Esta red es ilustrada en la Fig. 6.14

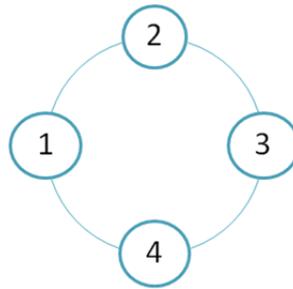


Figura 6.14: Red compleja de 4 nodos con acoplamiento anillo.

De acuerdo con 4.2.8 en el capítulo 4, la matriz de acoplamiento resultante para $N = 4$ es

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

De la matriz de acoplamiento se obtienen las leyes de control a implementar en el circuito

$$\begin{aligned} u_1 &= c(-2y_1 + y_2 + y_4) \\ u_2 &= c(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ u_3 &= c(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ u_4 &= c(y_1 + y_3 - 2y_4) \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Se implementaron los sistemas fraccionarios en subcircuitos y las leyes de control por medio de amplificadores operacionales. En la Fig. 6.15 se encuentran los cuatro nodos de la red con sus respectivas leyes de control.

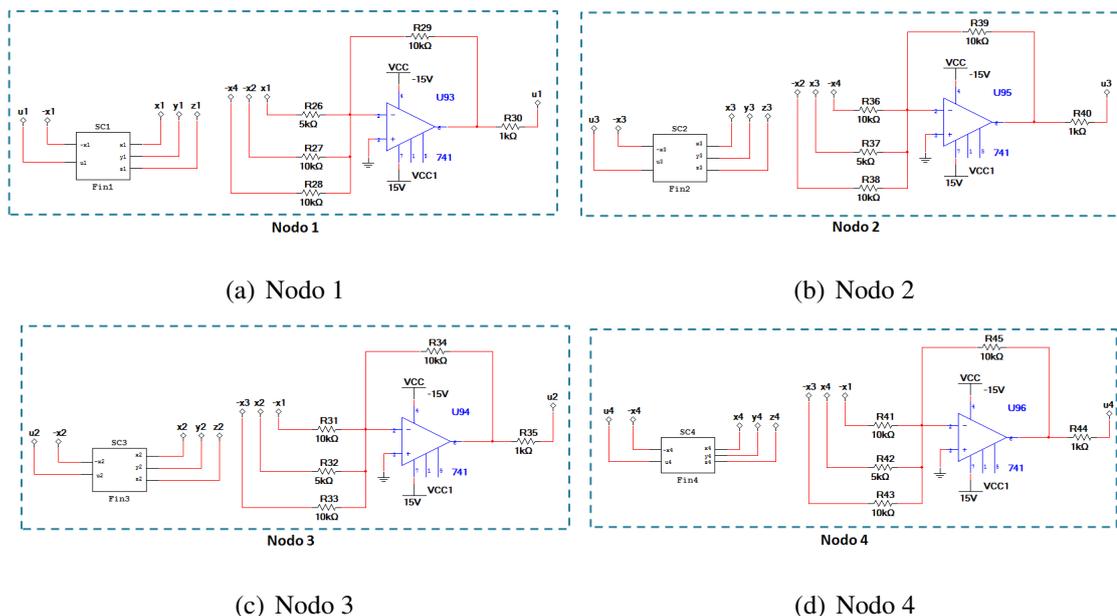


Figura 6.15: Nodos de la red compleja con acoplamiento anillo con sistemas Financieros de orden fraccionario.

Las condiciones iniciales que se propusieron para esta simulación son $(x_1, y_1, z_1) = (0.1, 0.1, 0.1)$, $(x_2, y_2, z_2) = (2.1, 1.2, 3.1)$, $(x_3, y_3, z_3) = (1, 0.5, 2)$, $(x_4, y_4, z_4) = (2, 1.8, 0.2)$.

El plano de fase donde se comparan los estados x_1, x_2, x_3, x_4 se encuentra en la Fig. 6.16 donde se observa una línea con inclinación de 45° al centro de cada gráfica lo que significa que la sincronización ha sido lograda. Se utilizó una fuerza de acoplamiento de $c = 10$. Los estados se muestran en las gráficas de las figuras Fig. 6.17, en la primer figura se encuentra un zoom a las condiciones iniciales en los estados x_i de los sistemas Financiero, y en la segunda figura se encuentran los estados en una escala de tiempo mayor, donde se observa que todos los estados siguen en una misma trayectoria.

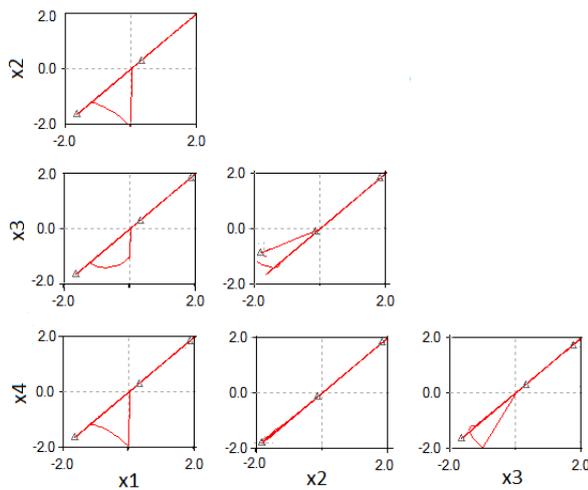
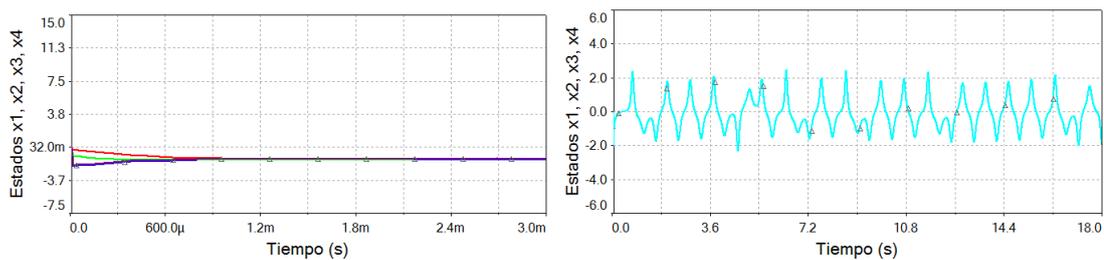


Figura 6.16: Plano de fase con los estados x de la red con acoplamiento anillo.



(a) Condiciones iniciales.

(b) Estados x_i de los sistemas Financiero.

Figura 6.17: Estados x_i de los sistemas Financiero que conforman la red anillo.

El plano de fase con los atractores de los cuatro nodos se presenta en la Fig. 6.18

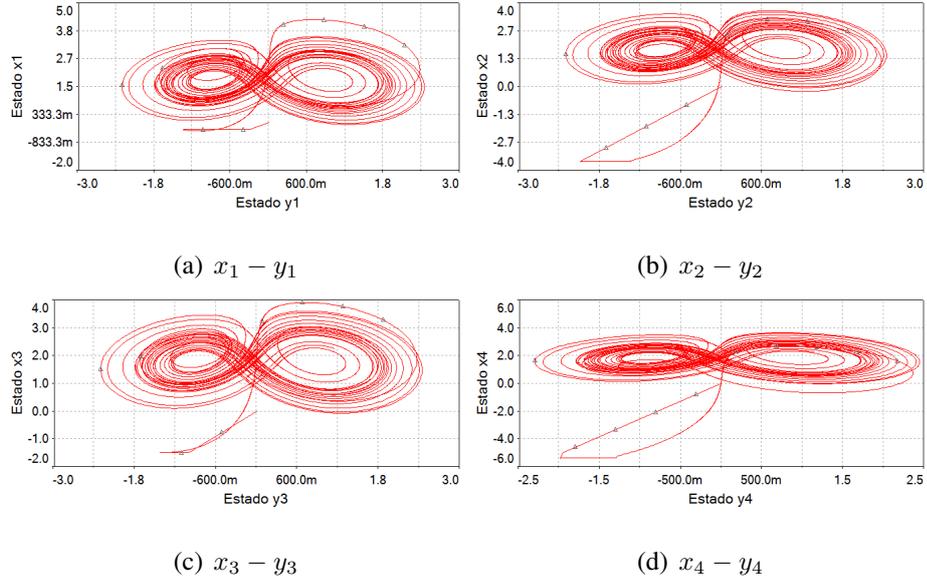


Figura 6.18: Atractores XY de la red global con sistemas Financiero de orden fraccionario.

6.3. Simulación de una redes complejas Irregulares.

6.3.1. Circuito analógico del sistema Lu de orden fraccionario.

Se realiza la sincronización de una red en acoplamiento estrella con 5 nodos ($N = 5$) utilizando sistemas Lu de orden fraccionario. El sistema se define por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= -x(t)z(t) + cy(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t),
 \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

con los siguientes parámetros $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$ y con $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ el sistema es caótico. Se utilizó el mismo circuito de la Fig. 6.1 para representar a este sistema. Los valores de resistencias y capacitores en los derivadores son los mismos que en el caso anterior ya que el orden del sistema es de $q = 0,95$ en cada derivada. Se construyó el circuito con los siguientes valores en las resistencias

$R_3 = R_6 = R_7 = 100k\Omega$, $R_1 = R_2 = R_{24} = R_{25} = 10k\Omega$, $R_4 = 36k\Omega$, $R_5 = R_9 = R_{16} = 1k\Omega$, $R_{14} = R_{15} = 30k\Omega$, y $R_8 = R_{10} = 20k\Omega$. El circuito se muestra en la Fig. 6.19.

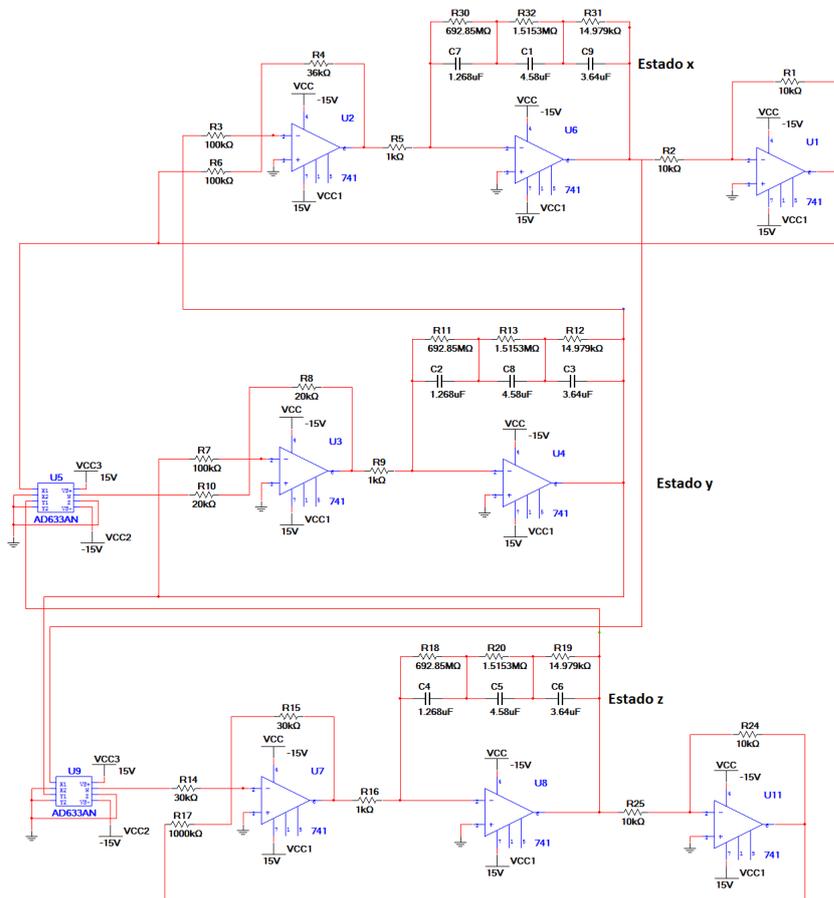


Figura 6.19: Circuito del sistema Lu de orden fraccionario.

Los estados del sistema Lu fraccionario se muestra en la Fig. 6.20 y sus planos de fase están en la Fig. 6.21

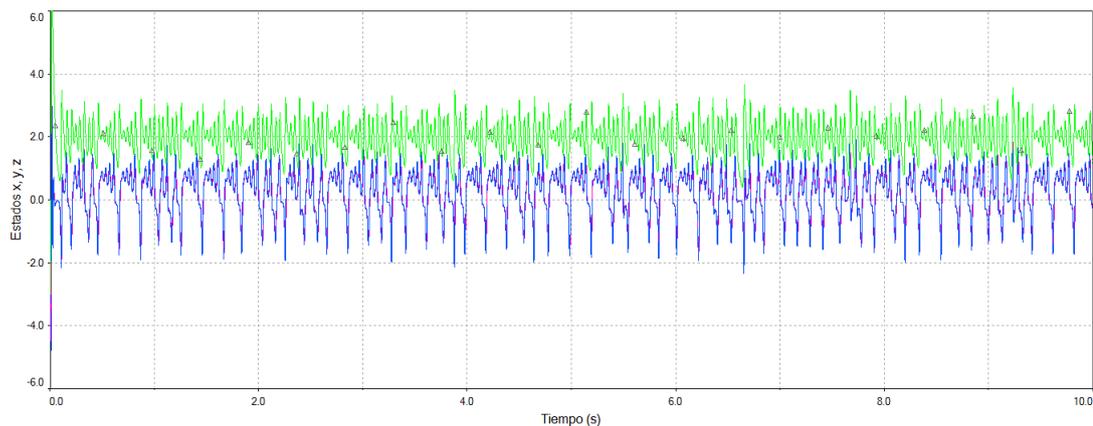


Figura 6.20: Estados del sistema Lu de orden fraccionario.

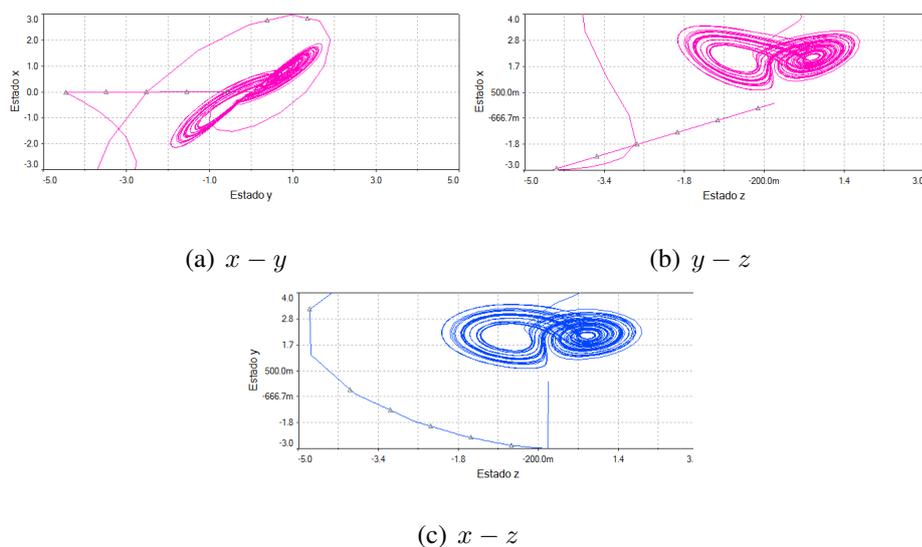


Figura 6.21: Planos de fase del sistema Lu de orden fraccionario.

Red Irregular con acoplamiento estrella.

Así como en el caso de simulación numérica, se busca realizar una sincronización en una red con acoplamiento estrella. Se plantean 5 nodos que son formados por sistemas Lu de orden fraccionario, con el acoplamiento mostrado en la Fig. 6.22

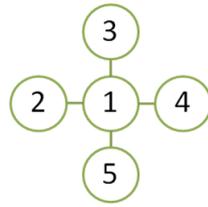


Figura 6.22: Red con acoplamiento estrella de 5 nodos.

La matriz de acoplamiento es calculada tal como se mostró en el capítulo 4, con 4.2.11; para 5 nodos queda definida como

$$A_{st} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.3.2)$$

Para el acoplamiento estrella se implementan las siguientes leyes de control

$$u_1 = c(-3y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$u_2 = c(y_1 - y_2)$$

$$u_3 = c(y_1 - y_3)$$

$$u_4 = c(y_1 - y_4)$$

$$u_5 = c(y_1 - y_5) \quad (6.3.3)$$

Para la realización de la red, se encapsulan los circuitos en subcircuitos donde solo se tienen como terminales a los estados del sistema así como la ley de control, la cual es construida fuera de este subcircuito. El diagrama con los nodos conformados con sistemas Lu de orden fraccionario y las leyes de control correspondientes a cada nodo se muestra en la Fig. 6.23

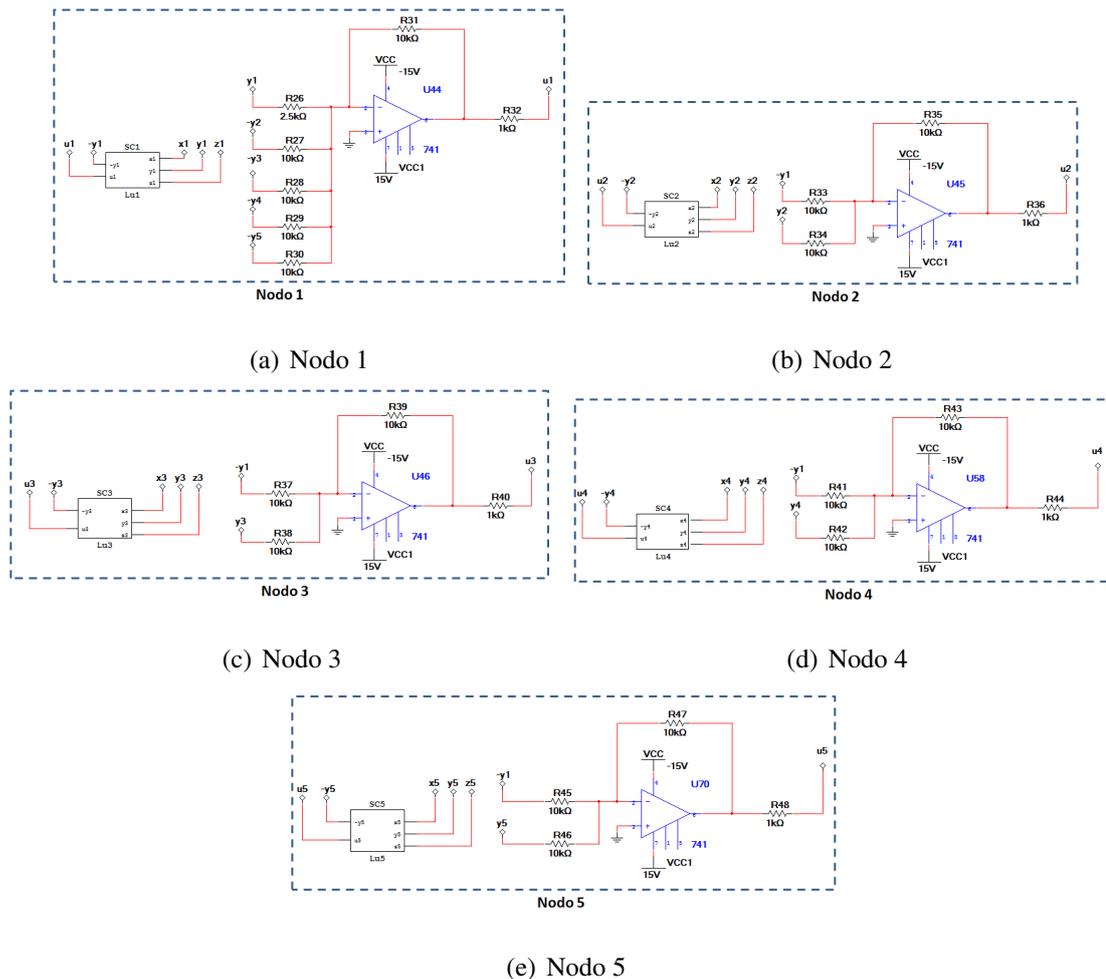


Figura 6.23: Circuitos de la red estrella con sistemas Lu de orden fraccionario en cada nodo y sus leyes de control.

Se propusieron de forma aleatoria las siguientes condiciones iniciales $(x_1, y_1, z_1) = (1.5, 0.1, 0.5)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0.1, 1.2, 2.1)$, $(x_3, y_3, z_3) = (3.1, 0.5, 1.2)$, $(x_4, y_4, z_4) = (0.3, 0.3, 1.5)$, $(x_5, y_5, z_5) = (2, 1.9, 1.7)$. Se obtuvo sincronización con una fuerza de acoplamiento $c = 20$ y esto puede ser observado en el plano de fase donde se comparan todos los estados y_i de la red estrella en la Fig. 6.24.

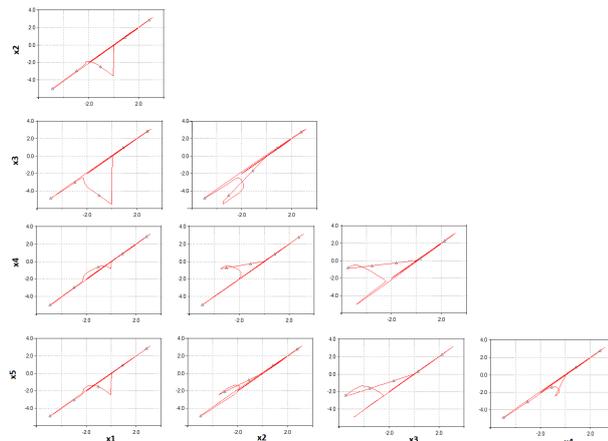


Figura 6.24: Plano de fase de la red estrella con sistemas Lu de orden fraccionario.

Algunos de los atractores que se forman en el plano de fase $X_i - Z_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$, son mostrados en la Fig. 6.25

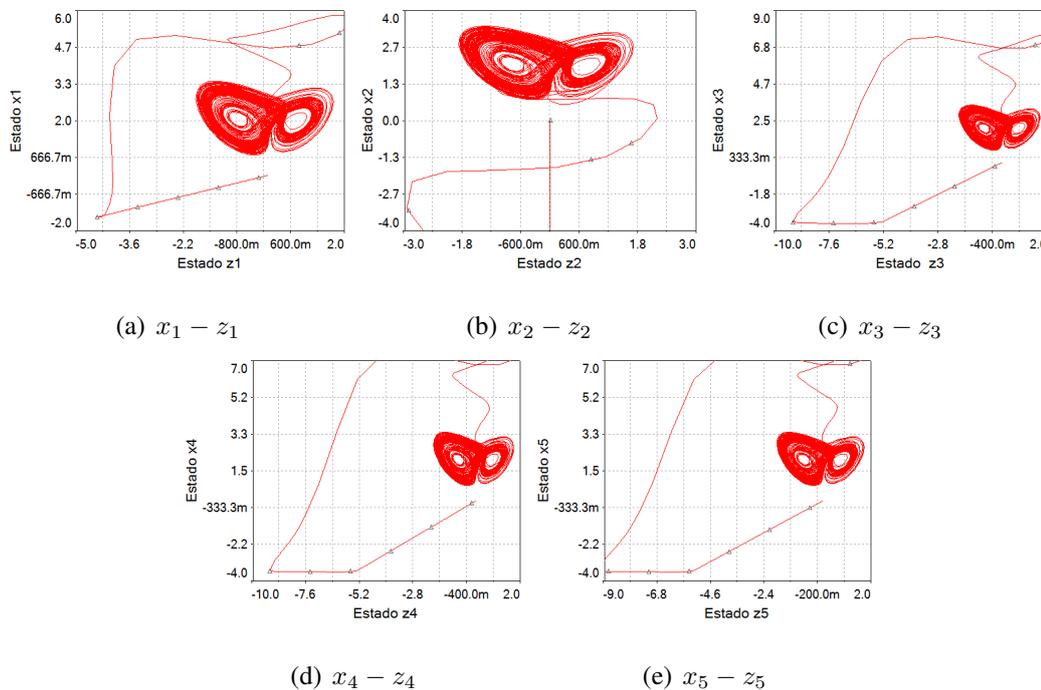


Figura 6.25: Atractores de la red estrella con sistemas Lu de orden fraccionario.

6.3.2. Circuito analógico del sistema Rössler de orden fraccionario

Las ecuaciones que definen al sistema en orden fraccionario son las siguientes y tomando en cuenta los parámetros $a = 0.4$, $b = 0.2$, y $c = 10$ así como $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ el sistema es caótico:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -(y(t) + z(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) + ay(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= b + z(t)(x(t) - c). \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

En este caso, el orden del sistema está proporcionado, es decir, cada derivada tiene la misma fraccionalidad y al ser de 0.9 el circuito puede realizarse mediante la aproximación vista en 6.2.7. El circuito que representa a este sistema se muestra en la Fig. 6.26.

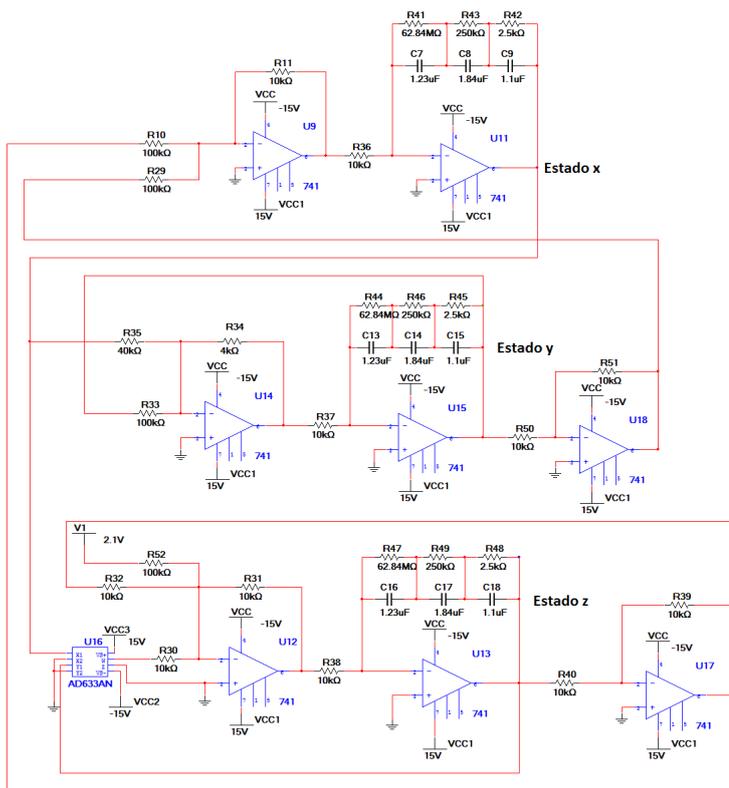


Figura 6.26: Circuito del sistema Rössler de orden fraccionario.

Los estados del sistema se presentan en la Fig. 6.27

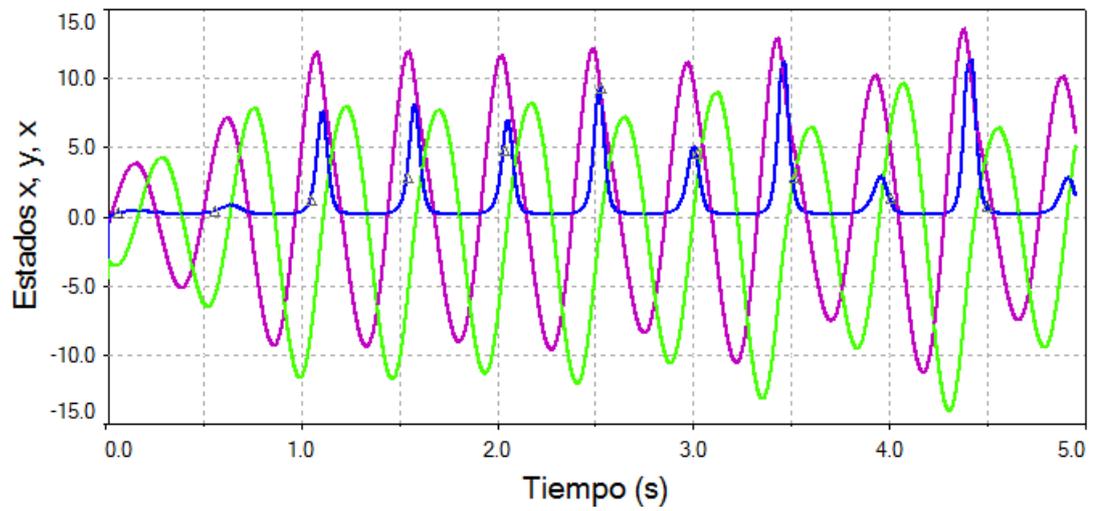


Figura 6.27: Estados del sistema Rössler de orden fraccionario obtenidos mediante un circuito.

Los planos de fase obtenidos para los estados $x - y$, $y - z$ y $x - z$ se muestran en la Fig. 6.28

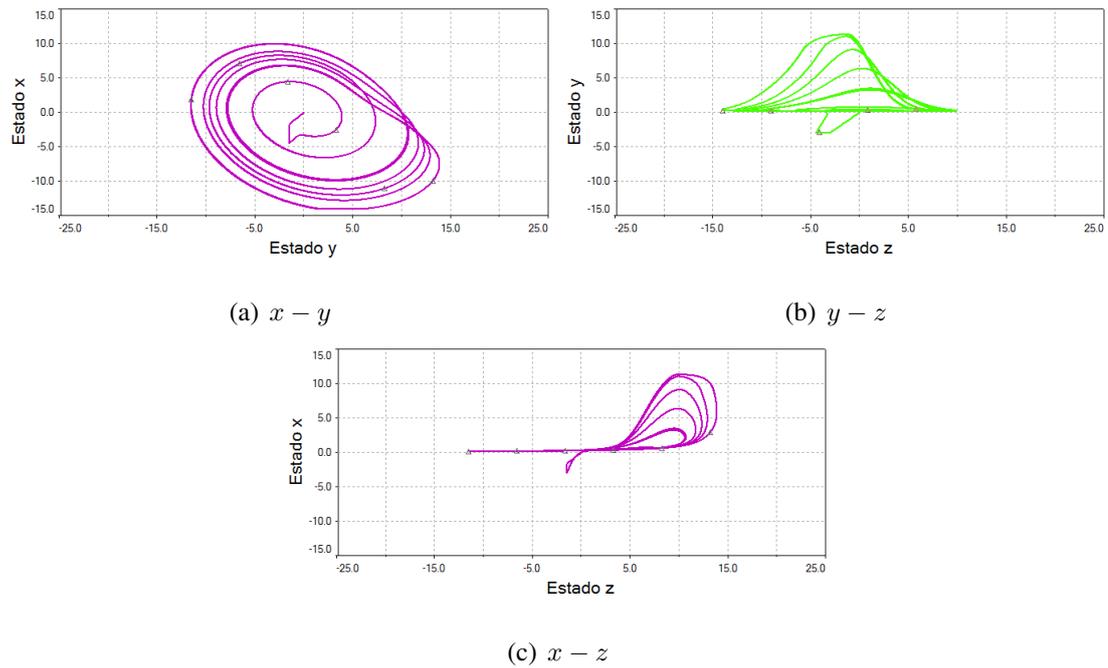


Figura 6.28: Planos de fase para la red irregular con sistemas Rössler de orden fraccionario.

Red Irregular con nodo maestro.

Se considera una red irregular de cinco nodos, $N = 5$, mostrada en la Fig. 6.29, donde cada nodo está formado por un sistema Rössler de orden fraccionario y en donde el nodo 1 es el nodo maestro de la red.

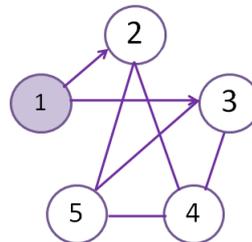


Figura 6.29: Red irregular con 5 nodos.

De acuerdo con la teoría vista en el capítulo IV de Redes, para formar la matriz de acoplamiento no existe una forma predeterminada ya que las conexiones entre sus nodos no tienen un patrón definido, por lo que para este caso, la matriz de acoplamiento queda definida de la siguiente forma

$$A_{ir} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

Se implementan las siguientes leyes de control, tomando como ley de control para el nodo 1 que $u_1 = 0$ ya que es el nodo maestro

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= c(2y_2 - y_1 - y_5) \\ u_3 &= c(3y_3 - y_1 - y_4 - y_5) \\ u_4 &= c(2y_4 - y_3 - y_5) \\ u_5 &= c(3y_5 - y_2 - y_3 - y_4) \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

La circuitería se muestra en la Fig. 6.30, donde se encuentra el sistema Rössler de orden fraccionario en subcircuitos y la ley de control que corresponde a cada nodo

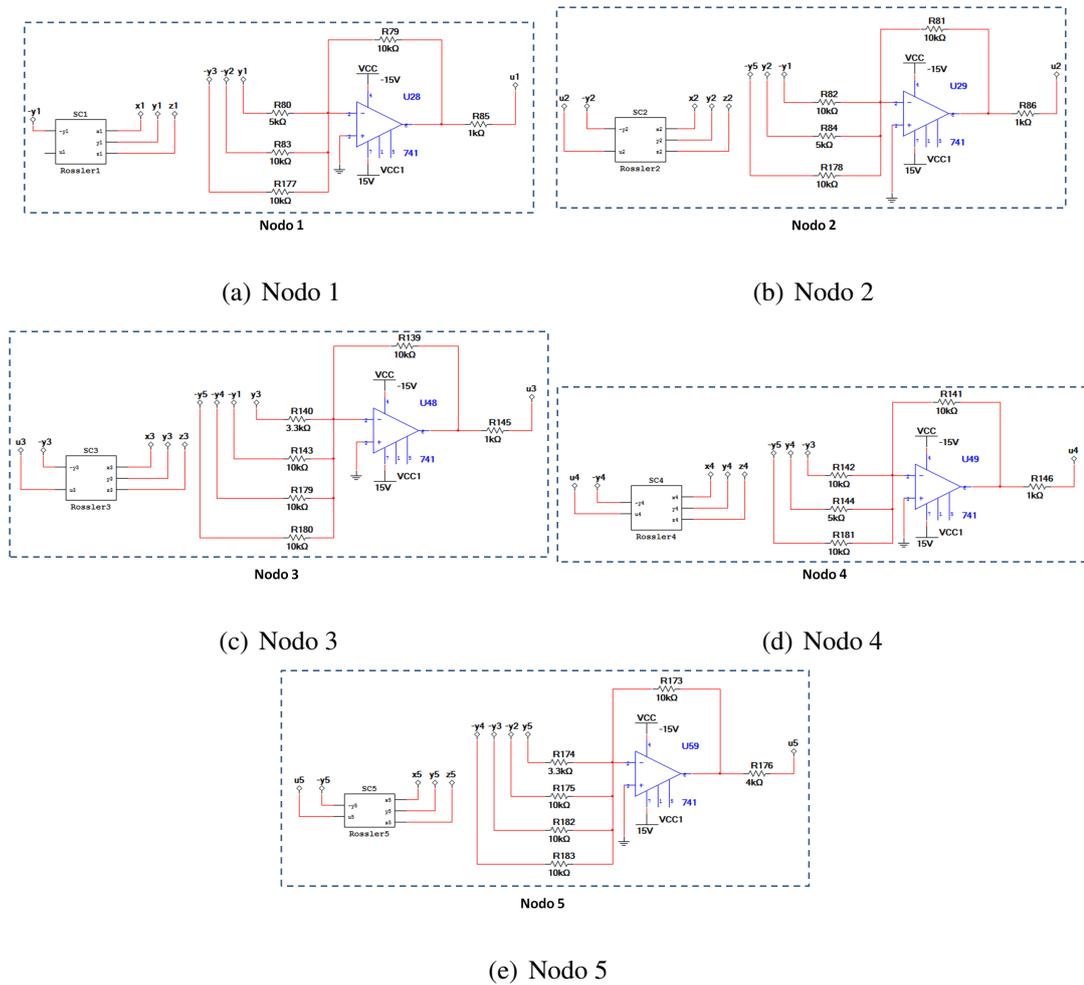


Figura 6.30: Circuitos para la red compleja Irregular con nodos Rössler de orden fraccionario.

Las condiciones iniciales se consideran todas diferentes siendo estas $(x_1, y_1, z_1) = (0.5, 1.5, 1)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0.8, 0.5, 0.7)$, $(x_3, y_3, z_3) = (1.2, 2.5, 1.2)$, $(x_4, y_4, z_4) = (3.1, 2.9, 0.3)$, $(x_5, y_5, z_5) = (0.1, 0.3, 2.5)$. La sincronización se obtiene con una fuerza de acoplamiento $c = 2$ y el plano de fase comprueba esta sincronización al comparar los estados y_i de la red y obtener una línea de 45° al centro de las gráficas, esto se encuentra en la Fig. 6.31.

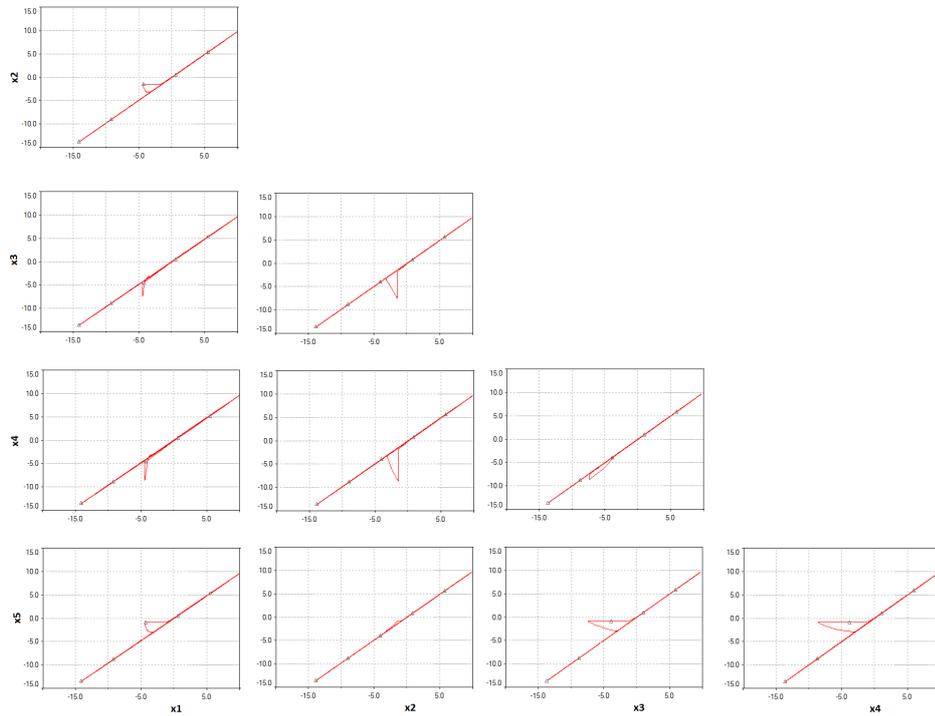


Figura 6.31: Plano de fase para la red compleja Irregular con nodos Rössler de orden fraccionario.

Debido a que en el osciloscopio del programa *Multisim* solo pueden compararse dos estados a la vez y no tres como en la simulación numérica, solo se pueden observar los planos de fase que corresponde a cada nodo en la siguiente figura:

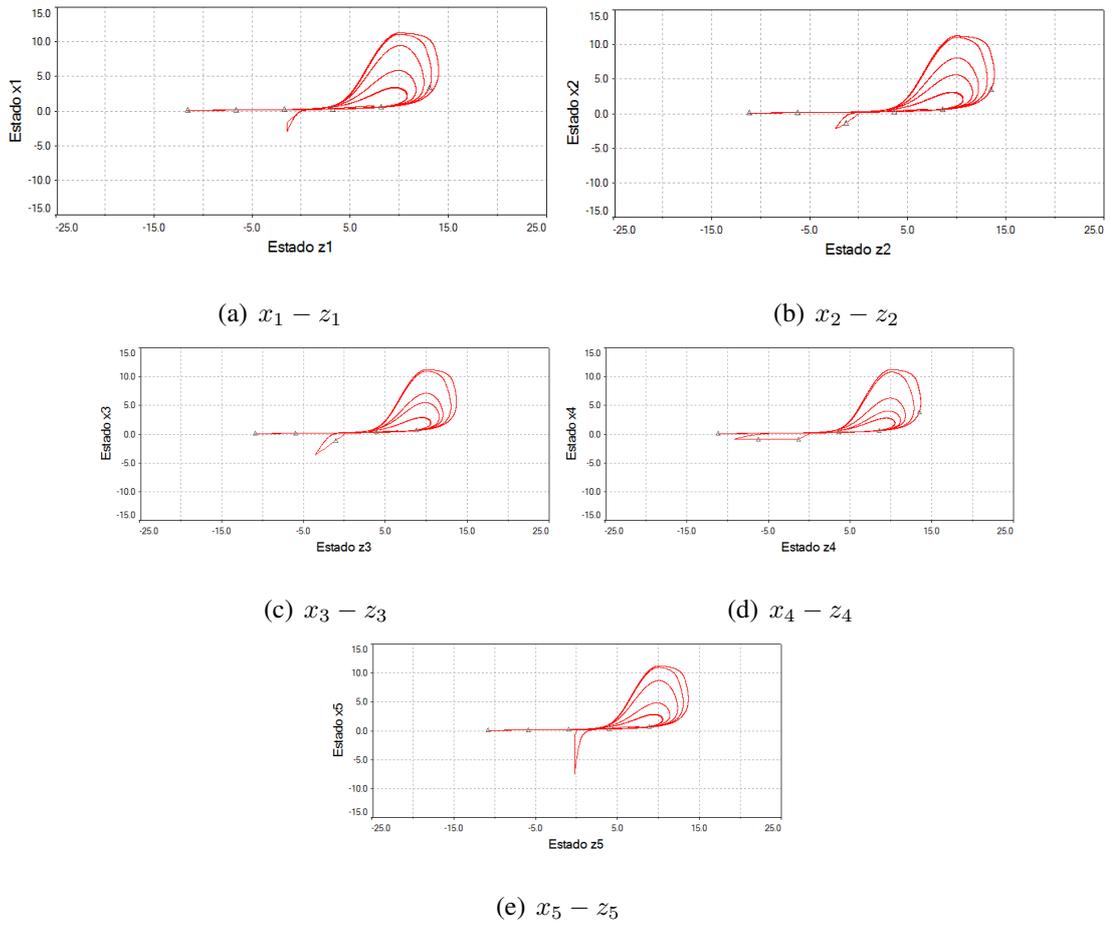


Figura 6.32: Atractores de los sistemas Rössler de orden fraccionario en una red irregular.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis de maestría se exploró el tema de sincronización de redes complejas utilizando sistemas de orden fraccionario como nodos. Se seleccionaron diferentes sistemas para realizar la sincronía en las redes como por ejemplo: sistema Lorenz, Rössler, Volta, Arneodo, Lu, Liu, Financiero y sistema Chen, todos de orden fraccionario. Se logró sincronizar tanto redes regulares con distintos acoplamientos así como redes irregulares. En la bibliografía se encontraban reportados únicamente sincronizaciones con sistemas de orden fraccionario que consideran dos nodos. En esta tesis se realizó una revisión bibliográfica acerca de las principales propiedades de estos sistemas, cómo se encuentran presentes en la naturaleza y cómo pueden utilizarse.

Se dedica un capítulo de esta tesis al tema de sincronización y redes complejas donde se encuentran las condiciones de sincronización para estas así como las propiedades de redes tanto regulares como irregulares. La metodología que se utilizó para sincronizar los sistemas complejos de orden fraccionario es la establecida por X. F. Wang y G. Chen, en donde a partir de las propiedades de los sistemas estos pueden llegar a tener una sincronía completa utilizando solo una ley de control en cada nodo. Por medio de una variable de peso, conocida como fuerza de acoplamiento, la red puede llevarse a sincronizar de forma lenta o rápida variando el tiempo de sincronización.

La simulación numérica de los sistemas de orden fraccionario se basó en una de las soluciones

numéricas para estos sistemas definida por Grunwald-Letnikov. Se consideró la sincronización en sistemas idénticos y bajo los mismos parámetros. Se observó también que el esfuerzo computacional para la solución de las ecuaciones de cada sistema de orden fraccionario es alto.

Además, se realizaron algunas simulaciones con sistemas de orden fraccionario pero utilizando circuitos electrónicos y su implementación en redes regulares e irregulares en las cuales se obtuvo sincronización completa. Se consideran pocos nodos debido al esfuerzo computacional que implican las simulaciones. Esto permite una visión más real de cómo sería su comportamiento si estas llegaran a implementarse por medio de circuitería.

7.1. Principales contribuciones de este trabajo de tesis

Las principales contribuciones de este trabajo de tesis son las siguientes

- Extensión de un método de sincronización para redes complejas donde estas incluyen nodos de orden fraccionario, cuando sólo han reportado sincronizaciones de redes incluyendo dos nodos de este tipo.
- Sincronización de redes complejas regulares e irregulares con nodo maestro y sin nodo maestro conformadas por sistemas de orden fraccionario idénticos.
- Sincronización de redes complejas con nodos de orden fraccionario por medio de circuitos analógicos.
- Se reporta un artículo en congreso 1. Angulo-Guzmán S. Y., Posadas-Castillo C., Díaz-Romero D. A., López-Gutiérrez R. M. and Cruz-Hernández C., Chaotic synchronization of regular complex networks with fractional-order oscillators, The 20th Mediterranean Conference on Control and Automation. (MED 2011), 03-06 Julio, 2012, Barcelona, España.

7.2. Trabajo a futuro

Algunos problemas abiertos en relación al tema de tesis que se desarrolló y que pueden ser considerados como trabajo a futuro son los siguientes:

- Investigar sobre el caso discreto de sistemas de orden fraccionario y llevar a cabo la sincronización de redes complejas pero en tiempo discreto.
- Aplicar la sincronía de sistemas caóticos de orden fraccionario al encriptamiento de información ya que estos sistemas adhieren complejidad a la red.
- Implementar físicamente los sistemas de orden fraccionario, ya sea por medio de circuitería analógica o por medio de microprocesadores.
- Establecer condiciones de robustez para la sincronía de sistemas de orden fraccionario ante variaciones paramétricas, ruido en señal acoplante o retrasos de la misma.
- Aplicación de la sincronía de redes complejas con nodos de orden fraccionario a robots manipuladores u otro equipo de trabajo.
- Aplicación de los sistemas de orden fraccionario al modelado de redes biológicas, químicas, sociales y de la ingeniería.
- Mejorar el algoritmo de simulación de los sistemas caóticos de orden fraccionario y que el costo computacional disminuya.

Bibliografía

- [1] Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., “PSynchronization of Chaotic Systems: A Generalized Hamiltonian System Approach”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 11(5), pp. 1381-1395, (2001).
- [2] Pecora, L.M. y Carroll, T.L., “Synchronization in chaotic systems”, *Phys. Rev. Lett.* 64, pp. 821-824, (1990).
- [3] L. Huang, R. Feng and M. Wang, “Synchronization of chaotic systems via nonlinear control”, *Physics Letters A*, vol. 320, pp. 271 - 275, (2004).
- [4] H.N. Agiza, M.T. Yassen, “Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control”, *Physics Letters A*, pp. 191-197, (2001).
- [5] Y. Yu, S. Zhang, “Adaptive backstepping synchronization of uncertain chaotic system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, pp. 643-649, (2004).
- [6] T. Liao, S. Tsai, “Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications”, *Chaos, Solitons and Fractals*, pp. 1387-1396, (2000).
- [7] I. Podlubny, “Fractional Differential Equations”, *Academic Press*, San Diego, (1999).
- [8] I. Petráš, “Fractional-Order Nonlinear Systems”, *Springer*, (2011).
- [9] H. K. Khalil, “Nonlinear system”, *Prentice Hall*, (1996).

- [10] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, and H. K. Qammer, "Chaos in a Fractional Order Chua's System ", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, pp. 485-490 vol. 42, (1995).
- [11] I. Grigorenko and E. Grigorenko, "Chaotic Dynamics of the Fractional Lorenz System ", *Physical Review Letters*, vol. 91, (2003).
- [12] Li C. and Chen G., "Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rossler equations ", *Physica A*, pp. 55-61, vol. 341, (2004).
- [13] C. Zheng-Fu and S. Dong-Ping, "Chaos in a Fractional-Order Nonlinear Financial System ", *IEEE Intelligent Systems and Applications (ISA), 2010 2nd International Workshop on*, 1-3, (2010).
- [14] Lu J. G. and Chen G., "A note on the fractional-order Chen system ", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 27, 685-688, (2006).
- [15] Bai-Lin Hao, "Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems", *World Scientific Publishing Co.*, 337-339, (1989).
- [16] Fujisaka H., y Yamada T. "Stability Theory of Synchronized Motion in coupled-Oscillator Systems ", *Prog. Theor. Phys.*, 69(1), 32-47, (1983).
- [17] Chai Wah Wu and Leon O. Chua "Synchronization in an Array of Linearly Coupled Dynamical Systems ", *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS-I FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS*, 42, 430-447, (1995).
- [18] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.U. Hwang "Complex networks: Structure and dynamics ", *Physics Reports*, 424, 175-308, (2006).
- [19] Li Ying Cui, Kumara, S., Albert, R. "Complex Networks: An Engineering View ", *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, 10, 10-25, (2010).

- [20] X. F. Wang, G. Chen “Synchronization in Small-World Dynamical Networks ”,*International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12, 187-192, (2002).
- [21] H. D. Davis, “The Theory of Linear Operators ”, *Principia Press*, Bloomington Indiana, (1936).
- [22] A. Charef, “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation ”, *Nonlinear Dynamics, Springer*, 46, 195-210, (2006).
- [23] Zhang Ruo-Xun y Yang Shi-Ping, “Chaos in fractional-order generalized Lorenz system and its synchronization circuit simulation ”, *Chinese Physics B*, 18, 3295-3303, (2009).
- [24] A. Charef “Fractal system as represented by singularity function. ”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, 1465-1470, (1992).