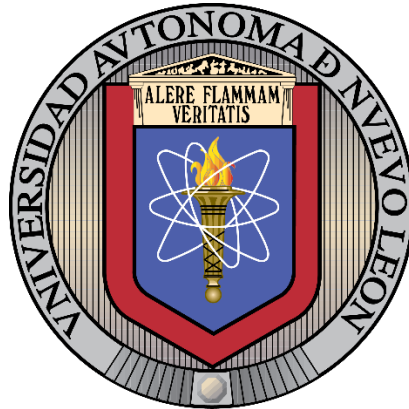


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**ESTUDIO DEL DIAGRAMA DE FASES DE LA QCD EN EL MODELO DE  
POLYAKOV-NAMBU-JONA-LASINIO**

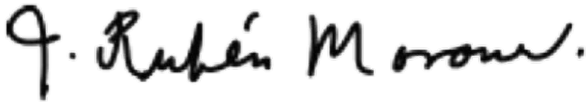
**ENRIQUE VALBUENA ORDÓÑEZ**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN  
INGENIERÍA FÍSICA**

**MAYO 2023**

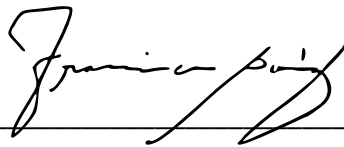
Estudio del diagrama de fases de la QCD en el modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio

Aprobación de la tesis:



---

Dr. José Rubén Morones Ibarra - Asesor de Tesis



---

Dr. Francisco Vicente Flores Báez - Secretario



---

Dr. Carlos Luna Criado - Primer Vocal



---

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez - Segundo Vocal



---

Dr. Omar González Amezcua - Tercer Vocal

## **Dedicatoria**

A mis padres, que siempre me han apoyado toda la vida de manera incondicional. Sus constantes esfuerzos siempre han estado dedicados a que me pueda desarrollar en lo profesional de manera óptima, y no solamente incluyen lo económico sino también lo emocional. De no ser por su impecable labor, no sólo no hubiera podido escribir esta tesis, probablemente ni siquiera hubiera podido aspirar a estudiar un posgrado.

A Berenice, en su momento mi compañera de posgrado y ahora mi futura esposa. El apoyo que ella me ha dado hasta ahora es absoluto. Es en ella donde encuentro toda la inspiración y la felicidad. Le agradezco por siempre creer en mí y siempre tratar de sacar lo mejor de mí. Siempre he tratado de corresponder a todo el apoyo que ella me da, y lo seguiré haciendo hasta el último de mis días.

## **Agradecimientos**

A mi asesor, el Dr. Morones. No solamente me introdujo al mundo de la teoría cuántica de campos, sino que también me inculcó toda la cultura de la investigación científica. Más de seis años de sus esfuerzos culminaron en mi preparación profesional. Le agradezco por todas sus enseñanzas, no sólo académicas sino también de vida.

A mi comité de evaluación, el Dr. Francisco Flores, el Dr. Carlos Luna y el Dr. Javier Almaguer por invertir su tiempo en revisar mi trabajo. En particular el Dr. Omar González Amezcua fue quien me ofreció una oportunidad para dar clases en la facultad, lo cual agradezco enormemente. Todos ellos son excelentes maestros y les agradezco su tiempo.

Al Dr. Adrián Garza, que siempre nos apoyó con el lado computacional. Incluso aunque tuviera un trabajo propio, siempre estuvo al pendiente de nuestras dudas y sus contribuciones fueron invaluable. Tres de los cuatro artículos que hemos publicado fueron posibles gracias a su ayuda.

Al CONACyT, por haberme otorgado una beca de maestría y de doctorado. Recuerdo que la primera vez que entré al posgrado, la proposición de que el gobierno pagara por mis estudios me parecía demasiado buena para ser verdad. Es gracias a este apoyo que decenas de miles de estudiantes al año en toda la república pueden aspirar a dedicarse a la investigación. Ojalá que estos apoyos continúen y que todos estos esfuerzos concluyan en el desarrollo científico y tecnológico del país.

## Prefacio

Este trabajo trata sobre el diagrama de fases de la materia que interactúa fuertemente. Se hace énfasis en las simetrías que existen en la cromodinámica cuántica y en sus implicaciones. En la naturaleza, muchas de estas simetrías son exactas, pero muchas de ellas son aproximadas. Cuando los valores de ciertos parámetros son muy cercanos, pero diferentes a cero, ocurren fenómenos naturales muy interesantes. Como ejemplo, hoy se piensa que la existencia de la masa se debe a una simetría aproximada de la naturaleza. En este trabajo se describen varias simetrías aproximadas que existen en la naturaleza, y sus respectivas consecuencias fenomenológicas.

No obstante, la cromodinámica cuántica es bastante difícil de tratar por diversos motivos, principalmente los fenómenos del confinamiento del color y la libertad asintótica, ninguno de los cuales ha sido explicado hasta ahora de una manera completa y satisfactoria. Además, el acoplamiento particular de esta teoría es tan fuerte que las técnicas que usualmente se usan para desarrollar teorías cuánticas de campos, las cuales están basadas en perturbaciones, son inservibles particularmente en el sector de bajas energías, del orden de centenas de megaelectronvoltios, que es el que le corresponde a algo tan fundamental como los núcleos atómicos.

Muchos autores recurren a usar modelos fenomenológicos para describir a la materia que interactúa fuertemente en rangos energéticos que no pueden ser alcanzados en la actualidad por teorías como la cromodinámica cuántica. Uno de ellos, el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, fue planteado originalmente para describir a las interacciones entre los hadrones, pero en la actualidad se usa con los quarks como partículas principales. Es este modelo, con una cierta extensión que toma en cuenta al campo de los gluones, el que se usa en este trabajo.

En este trabajo se proponen ciertos criterios matemáticos que sirven para describir al diagrama de fases con mayor detalle que lo que uno puede encontrar en la literatura, en particular en una sección de éste que se llama crossover. Estos criterios resultan en una localización de este crossover y, en ciertos casos, cuál es el ancho que tiene en el plano temperatura-potencial químico donde se grafica este diagrama. Raras veces en la literatura se pueden encontrar análisis que hagan esto, y en ningún lado se usan los criterios aquí propuestos.

Los resultados principales obtenidos en este trabajo ya han sido publicados en la literatura\*. Otras publicaciones en las que hemos trabajado tratan también sobre temas relacionados\*\*.

\*Valbuena Ordóñez, E., Mata Carrizal, N. B., Garza Aguirre, A. J., Morones Ibarra, J. R.; **Influence of the Effective Potential on the Crossover Width in the Two Flavor Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio Model**; *Advances in High Energy Physics*, 6760547 (2020).

\*\*Morones Ibarra, J. R., Enríquez Pérez-Gavilán, A., Hernández Rodríguez, A. I., Flores Báez, F. V., Mata Carrizal, N. B., Valbuena Ordóñez, E.; **Chiral symmetry restoration and the critical end point in QCD**; *Open Physics*, 15 (1) 1039 (2017).

\*\*Morones Ibarra, J. R., Mata Carrizal, N. B., Valbuena Ordóñez, E., Garza Aguirre, A. J.; **Dependence of the crossover zone on the regularization method in the two-flavor Nambu-Jona-Lasinio model**; *Open Physics*, 18 (1) 89 (2020).

\*\*Mata Carrizal, N. B., Valbuena Ordóñez, E., Garza Aguirre, A. J., Betancourt Sotomayor, F. J., Morones Ibarra, J. R.; **Effects of a Finite Volume in the Phase Structure of QCD**; *Universe*, 8 (5) 264 (2022).

## Índice

<b>Capítulo 1 – Introducción a la teoría cuántica de campos.....</b>	<b>8</b>
1.1 Modelo Estándar.....	9
1.2 Fuerza nuclear fuerte.....	10
1.3 Formalismo de la teoría cuántica de campos.....	12
1.3.1 Ecuación de Klein-Gordon.....	12
1.3.2 Ecuación de Dirac.....	14
1.3.3 Lagrangiana del campo electromagnético.....	17
<b>Capítulo 2 – Introducción a la cromodinámica cuántica.....</b>	<b>18</b>
2.1 Formalismo de la cromodinámica cuántica.....	18
2.2 Simetrías de la cromodinámica cuántica.....	20
2.2.1 Simetría de norma.....	20
2.2.2 Simetría de isospín.....	20
2.2.3 Simetría quiral.....	22
<b>Capítulo 3 – Rompimiento de la simetría quiral.....</b>	<b>24</b>
3.1 Límite quiral.....	24
3.2 Degeneración del vacío en la teoría $\varphi^4$ .....	24
3.2.1 Potencial sin degeneración.....	25
3.2.2 Potencial con vacío degenerado.....	26
<b>Capítulo 4 – Sistemas de varias partículas que interactúan fuertemente.....</b>	<b>27</b>
4.1 Dificultades de la cromodinámica cuántica.....	27
4.1.1 Lattice QCD.....	27
4.2 Análisis estadístico de un sistema de varias partículas.....	28
4.3 Diagrama de fases en el plano $T - \mu$ .....	30
<b>Capítulo 5 – Formalismo del modelo de Nambu-Jona-Lasinio extendido con el loop de Polyakov.....</b>	<b>32</b>
5.1 Modelo de Nambu-Jona-Lasinio.....	32
5.1.1 Adición del loop de Polyakov al modelo NJL.....	32
5.2 Aproximación de campo medio.....	34
5.3 Restauración parcial o aproximada de la simetría quiral.....	35
5.4 Formalismo de tiempo imaginario.....	36
5.5 Influencia del loop de Polyakov en el gran potencial termodinámico.....	41
5.6 Construcción del diagrama de fases.....	43
5.6.1 Ecuaciones de gap.....	43
5.6.2 Relación entre el rompimiento y restauración de la simetría con la transición de fase.....	44
5.6.3 Regularización de las integrales divergentes.....	45
5.6.4 Ajuste de parámetros en el sector de quarks.....	46
5.6.5 Potenciales efectivos.....	47

<b>Capítulo 6 – Resultados</b> .....	<b>50</b>
6.1 Parámetros de orden.....	50
6.2 Susceptibilidades.....	51
6.3 Mallado discreto del plano $T - \mu$ .....	54
6.4 Criterios para determinar la localización del crossover.....	55
6.4.1 Criterio local.....	55
6.4.2 Criterio global.....	55
6.4.3 Comparación cualitativa entre los dos criterios.....	56
6.5 Diagramas de fases.....	56
6.5.1 Punto final crítico.....	57
6.5.2 Temperatura pseudocrítica.....	58
6.6 Diagramas de fases extendidos.....	59
6.6.1 Extensión del criterio local.....	59
6.6.2 Extensión del criterio global.....	61
<b>Capítulo 7 – Discusión y conclusiones</b> .....	<b>66</b>
<b>Referencias</b> .....	<b>67</b>
<b>Glosario</b> .....	<b>70</b>
<b>Anexo 1 – Propiedades de anticonmutación y de cuadrados de las matrices de Dirac</b> .....	<b>75</b>
<b>Anexo 2 – <math>\bar{\psi}\psi</math> como escalar de Lorentz</b> .....	<b>77</b>
<b>Anexo 3 – Ecuaciones de Euler-Lagrange para los espinores de Dirac</b> .....	<b>78</b>
<b>Anexo 4 – Relaciones de conmutación de las matrices de Gell-Mann</b> .....	<b>80</b>
<b>Anexo 5 – Invariancia de norma de la QCD</b> .....	<b>86</b>
<b>Anexo 6 – Condiciones para la simetría de isospín en la QCD</b> .....	<b>92</b>
<b>Anexo 7 – Propiedades de la <math>\gamma_5</math></b> .....	<b>100</b>
<b>Anexo 8 – Simetría quiral en la QCD</b> .....	<b>102</b>
<b>Anexo 9 – Ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo escalar complejo</b> .....	<b>104</b>
<b>Anexo 10 – Invariancia quiral y de isospín de la lagrangiana de interacción del modelo NJL</b> .....	<b>105</b>
<b>Anexo 11 – Cálculo del determinante del propagador inverso de Dirac</b> .....	<b>140</b>
<b>Anexo 12 – Separación de frecuencias de Matsubara positivas y negativas</b> .....	<b>142</b>
<b>Anexo 13 – Los loops de Polyakov en el gran potencial termodinámico por unidad de volumen</b> .....	<b>145</b>
<b>Anexo 14 – Relación entre los loops de Polyakov con el potencial químico</b> .....	<b>150</b>
<b>Anexo 15 – Invariancia del determinante de la ‘matriz de concavidad adimensional’</b> .....	<b>153</b>
<b>Anexo 16 – Cálculo computacional del diagrama de fases</b> .....	<b>154</b>

## 1 – Introducción a la teoría cuántica de campos

Los avances de la física del siglo XX fueron revolucionarios. Basándose en los conocimientos sobre las proporciones en las reacciones químicas, con los cuales el científico inglés John Dalton desarrolló la teoría atómica, y también en la formulación matemática de la teoría electromagnética, desarrollada por el científico escocés James Clerk Maxwell; muchos científicos ayudaron a crear nuevas disciplinas en la física cuyo marco de aplicabilidad era todavía más amplio que el de las leyes de Newton, y que además éstas se recuperaban al intentar aplicar estas disciplinas a las cantidades físicas que normalmente aplicamos en la vida diaria.

La teoría de la relatividad se encarga de estudiar los fenómenos naturales que ocurren cuando los objetos se mueven a velocidades cercanas a las de la luz. Por otro lado, la mecánica cuántica estudia los fenómenos naturales que ocurren a escalas microscópicas, comparables al tamaño de los átomos. Una característica fundamental de la mecánica cuántica es que es probabilista, es decir, que los objetos de estudio de la teoría, llamados funciones de onda, representan amplitudes de probabilidad. Algunos científicos como Einstein argumentaban que la teoría de la mecánica cuántica debía de estar incompleta, y que las aparentes probabilidades se debían a la existencia de variables locales ocultas. Posteriormente, se demostró experimentalmente que éste no es el caso.

De la unión de estas dos teorías nace la teoría cuántica de campos (QFT, por sus siglas en inglés). En la física de altas energías, los principios de la mecánica cuántica son aplicados junto con los principios de la relatividad especial<sup>1</sup>. Muchos científicos como Dirac, Pauli, Heisenberg, Fermi, Klein, Wigner, Feynman, Weinberg, Higgs, etc., han contribuido al desarrollo de la teoría cuántica de campos desde la primera mitad del siglo XX hasta hoy.

La teoría cuántica de campos considera la existencia de ciertas cantidades físicas llamadas campos que permean todo el espacio-tiempo y poseen energía. Las perturbaciones energéticas de estos campos a partir del vacío dan lugar a la existencia de las ‘partículas’<sup>2</sup>. La adición de energía al vacío de un campo (el cual ya posee energía) da lugar a la creación de partículas, por lo que el número de partículas no es constante en un sistema cerrado en QFT, a diferencia de la mayor parte de las otras disciplinas de la física.

Las teorías cuánticas de campos que describen los procesos que pasan en la naturaleza están amalgamadas en el llamado Modelo Estándar, el cual describe y clasifica las partículas elementales en quarks, leptones, bosones de norma y bosones escalares. La tabla 1 describe a las partículas del Modelo Estándar, dividiéndolas en fermiones y bosones. La materia ordinaria está compuesta de partículas que pertenecen a la primera de estas divisiones. Los bosones de norma representan a las partículas mediadoras de las tres interacciones fundamentales que se incluyen en el Modelo Estándar<sup>3</sup> y solamente existe un bosón escalar fundamental en el Modelo Estándar: el bosón de Higgs, cuya existencia fue teorizada en 1962 [1] y fue observado por primera vez en 2012 [2].

1. No se ha logrado crear una teoría que combine de manera concluyente la mecánica cuántica con la relatividad general hasta el momento.
2. Es importante recalcar que el concepto de partícula que se tiene desde la mecánica clásica no es adecuado para describir estos objetos físicos, ya que presentan propiedades impropias de esta definición de partículas, como la difracción y la interferencia.
3. La gravedad no está incluida en el Modelo Estándar; al ser esta interacción despreciable para las energías que normalmente se observan en los experimentos, su efecto es mucho menor a los errores sistemáticos de medición.



## 1.1 – Modelo Estándar

Las partículas del Modelo Estándar se clasifican en dos grandes divisiones basándose en el valor de su momento angular intrínseco o “espín”: los fermiones, cuyo espín es igual a algún múltiplo semientero de la constante reducida de Planck  $\hbar$  y los bosones, cuyo espín es un valor múltiplo entero de  $\hbar$  ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , donde  $h$  es la constante de Planck). La gran diferencia entre estos dos tipos de partículas es que, en un sistema de varias partículas, el estado del sistema es simétrico ante el intercambio de dos bosones cualesquiera, es decir, que permanece invariante ante este intercambio; mientras que el estado es antisimétrico ante el intercambio de dos fermiones cualesquiera, es decir, que el signo del estado cambia. Una consecuencia importante de esta propiedad es que dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado (ya que dos partículas idénticas son indistinguibles en el marco de la mecánica cuántica). A este fenómeno se le conoce como Principio de Exclusión de Pauli.

Fermiones							
Quarks				Leptones			
$u, \bar{u}$	$q = \pm 2/3$	$d, \bar{d}$	$q = \mp 1/3$	$e^-, e^+$	$q = \mp 1$	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	$q = 0$
$c, \bar{c}$	$q = \pm 2/3$	$s, \bar{s}$	$q = \mp 1/3$	$\mu^-, \mu^+$	$q = \mp 1$	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	$q = 0$
$t, \bar{t}$	$q = \pm 2/3$	$b, \bar{b}$	$q = \mp 1/3$	$\tau^-, \tau^+$	$q = \mp 1$	$\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$	$q = 0$
Bosones							
$\gamma$	Fotón	Bosón de norma	Interacción electromagnética	$q = 0$	$s = 1$		
$W^\pm$	Bosón W	Bosón de norma	Interacción débil	$q = \pm 1$	$s = 1$		
$Z^0$	Bosón Z	Bosón de norma	Interacción débil	$q = 0$	$s = 1$		
$g$	Gluón	Bosón de norma	Interacción fuerte	$q = 0$	$s = 1$		
$H$	Bosón de Higgs	Bosón escalar	-	$q = 0$	$s = 0$		

Tabla 1: Partículas fundamentales del Modelo Estándar.

El comportamiento de los campos y las interacciones entre ellos están descritos matemáticamente por una densidad lagrangiana, la cual normalmente se divide en una suma algebraica entre la lagrangiana libre (que describe el comportamiento de un campo sin interactuar con otro) y la lagrangiana de interacción. En la teoría cuántica de campos, es de gran importancia obtener las simetrías de la teoría: si la densidad lagrangiana es invariante con respecto a alguna transformación, entonces se dice que esta densidad lagrangiana es simétrica con respecto a esta transformación. Las simetrías pueden ser continuas (como la simetría de un sistema ante rotaciones o traslaciones<sup>4</sup>) o discretas (como la simetría ante la inversión de carga, paridad y/o tiempo).

De las simetrías continuas se pueden derivar leyes de conservación mediante el teorema de Noether. Las leyes de conservación determinan qué propiedades físicas de un sistema pueden o no pueden cambiar en el tiempo, por lo que es importante conocerlas para saber qué cosas pueden o no pueden ocurrir en la naturaleza. Algo muy importante de cualquier teoría cuántica de campos es determinar las simetrías que presenta para saber qué fenómenos se pueden presentar en la naturaleza.

En la física, se usan varias condiciones matemáticas llamadas normas para eliminar los grados de libertad redundantes en alguna densidad lagrangiana. Estas normas se pueden establecer de

4. En las teorías cuánticas de campos no se incorpora la gravedad como una interacción ni tampoco sus efectos sobre el espacio-tiempo. En este caso se asume que el espacio-tiempo es continuo y también todas las transformaciones que lo involucran.

maneras diferentes, pero físicamente representan al mismo sistema. Las transformaciones que se hacen a la densidad lagrangiana para pasar de una norma a otra, es decir, las transformaciones de norma, forman un grupo de Lie, el cual tiene asociada un álgebra de Lie de los generadores de grupo. Cada generador de grupo tiene asociado un campo vectorial llamado campo de norma. En la teoría cuántica de campos, la simetría de norma está descrita por la invariancia de la densidad lagrangiana ante cierta transformación local, es decir, que depende de las coordenadas del espacio-tiempo. A todas las teorías cuya densidad lagrangiana sea invariante ante transformaciones de norma se les llama teorías de norma.

En el Modelo Estándar existen varias teorías de norma:

- La electrodinámica cuántica (QED) es la teoría que describe las interacciones entre las partículas que poseen carga eléctrica. Esta teoría posee una simetría de norma  $U(1)$  donde el único generador de grupo corresponde al fotón: el único bosón de norma de la QED, que actúa como mediador de la fuerza electromagnética.
- La interacción débil, que posee una simetría de norma  $SU(2)$ . Los tres bosones de norma de esta teoría son los bosones masivos  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ . Esta interacción es la responsable del decaimiento beta de ciertos núcleos masivos y la fusión termonuclear que se presenta en el núcleo solar, entre algunos otros fenómenos. Todos los fermiones fundamentales del Modelo Estándar pueden interactuar débilmente
- La interacción fuerte está descrita por la Cromodinámica Cuántica (QCD). Esta teoría de norma describe las interacciones entre los quarks y los gluones. La QCD posee una simetría de norma  $SU(3)$ . Los bosones de norma son los gluones, los cuales forman un estado octete en el espacio de color. Esta interacción tiene las propiedades de confinamiento de color y libertad asintótica. En este trabajo se analizan sistemas de partículas que interactúan fuertemente.

## 1.2 – Fuerza nuclear fuerte

A finales de la década de los 40 e inicios de los 50, la comunidad científica empezó a descubrir una gran cantidad de partículas nuevas. Éstas estaban clasificadas como hadrones: partículas que no se repelían una a otra como era esperado con una interacción electromagnética. Antes de que se propusiera el modelo basado en quarks, se hablaba de una fuerza nuclear. Esta fuerza era la responsable de que los núcleos atómicos no se desintegraran por repulsiones electromagnéticas, y empleaba piones virtuales como intermediarios de la interacción [3]. Se demostró experimentalmente que estos piones existían y que estaban involucrados en las interacciones nucleares.

A diferencia de los hadrones (como los protones, los neutrones y los piones), las demás partículas no presentan esta fuerza nuclear. En el momento de su descubrimiento, todas estas partículas nuevas (hadrones) fueron consideradas como partículas elementales. Para intentar clasificar todas estas partículas, se propusieron varios esquemas basados en estados multipletes de isospín (como ya se había hecho con el protón y el neutrón, dadas sus masas tan similares). Dada la gran cantidad de hadrones nuevos que se descubrieron, era evidente que no podían ser todos elementales. Es por esto que Gell-Mann [4] y Zweig [5] propusieron un modelo donde estos hadrones estaban

compuestos por otras partículas a las que Gell-Mann llamó quarks. Estos quarks eran tratados como los verdaderos grados de libertad en las interacciones entre hadrones.

Los quarks estaban organizados en una simetría  $SU(3)$  de sabor, por lo que la similitud entre las masas del protón y del neutrón (y de muchos otros pares de hadrones) sin llegar éstas a ser idénticas se explicaba con una simetría aproximada de isospín, es decir, que los quarks que componen a estos hadrones en particular tienen masas muy similares, mas no idénticas. Los quarks se describen físicamente como fermiones, los cuales forman agregados para formar los hadrones: un número par de quarks forma un mesón y un número impar de quarks forma un barión. Los mesones y los bariones se clasificaban antiguamente respecto a su masa; tal y como sus nombres lo indican, se asignaban las partículas más pesadas a la división de los bariones y las partículas con una masa intermedia a los mesones. Las partículas más ligeras (como el electrón y los neutrinos) eran llamadas leptones, pero éstas últimas no participaban en las interacciones nucleares. Fue más adelante cuando se decidió clasificar a las partículas en virtud de las interacciones en las que eran capaces de participar, y por esta decisión partículas como el muón (antes considerado un mesón en virtud de su masa) cambiaron de clasificación (en este caso a un leptón, dado que esta partícula no participa en las interacciones nucleares).

Algunos bariones, como el  $\Delta^{++}$  y el  $\Omega^{-}$ , tenían un espín de  $\frac{3}{2}\hbar$ , lo cual requería que su estructura interna estuviera descrita por tres quarks idénticos con sus espines alineados y sin momento angular orbital. Esto estaba prohibido por el principio de exclusión de Pauli, por lo que se llegó a la conclusión de que los quarks tenían un número cuántico oculto y adicional. Este problema fue resuelto por Han y Nambu [6] con la propuesta de un grado de libertad adicional descrito por otra simetría  $SU(3)$ , la cual era exacta en este caso. Ellos introdujeron la interacción entre los quarks mediante un octete de campos vectoriales de norma que actuaban como generadores de  $SU(3)$ . Hoy, a estos campos se les conoce como gluones y a la simetría de norma  $SU(3)$  se le asocia con la carga de color (o simplemente color) como un número cuántico adicional que poseen los quarks y gluones.

Como el resto de las partículas del Modelo Estándar, los quarks tienen sus respectivas antipartículas. Esto implica que los quarks pueden tener cualquier color y los antiquarks pueden tener cualquier anticolor. La carga de color lleva su desafortunado nombre porque la suma de los diferentes tipos de carga se trata de manera similar a la teoría aditiva del color: Tres quarks, cada uno con un color diferente (suele llamarseles  $R$ ,  $G$  y  $B$  en analogía a la teoría aditiva) forman un estado singlete de color, o bien, un estado sin color. Este estado también se puede obtener mediante la suma de los tres anticolores de tres antiquarks ( $\bar{R}$ ,  $\bar{G}$  y  $\bar{B}$ ) o con la suma de cualquier color con su respectivo anticolor, tal y como ocurre en los mesones.

La cromodinámica cuántica es la teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes. En esta teoría ocurren dos fenómenos que, hasta donde se sabe, no se presentan en las otras interacciones: el confinamiento de color y la libertad asintótica. Cuando dos quarks se intentan separar se requiere una gran cantidad de energía, ya que se estima que la fuerza atractiva entre dos quarks no disminuye con la distancia como ocurre con las otras interacciones, sino que aumenta<sup>5</sup>;

5. A pesar de que la fuerza entre dos quarks aumenta con la distancia, esto no es notorio a distancias mayores al diámetro de los nucleones, ya que la fuerza fuerte ejercida por un estado singlete del color, además de ser mucho menor a la ejercida por un quark, sí disminuye con la distancia. Además, se piensa que la fuerza de atracción entre los quarks cambia con ciertos parámetros como la temperatura y el potencial químico. Este trabajo se basa en ese supuesto.

esto implica que mucho antes de que se llegue a agregar la suficiente energía para separar a los quarks, efectivamente aislándolos, se producirá un par quark-antiquark por la gran energía de vacío del sistema. Después de esto, las partículas recién generadas interactuarán fuertemente con los quarks que ya existían, formando de nuevo estados singletes de color. A este fenómeno se le llama confinamiento de color, o simplemente confinamiento.

Lo opuesto ocurre en el caso donde las energías son más altas, o bien, donde las distancias son menores. Las interacciones fuertes disminuyen su acoplamiento a distancias arbitrariamente bajas (es decir, en el régimen de altas energías). A esto se le conoce como libertad asintótica, y este acoplamiento disminuido es lo opuesto que ocurre en las otras teorías de norma, donde su acoplamiento aumenta a cortas distancias. Las interacciones conocidas que están descritas con un potencial proporcional al inverso de la distancia presentan un problema: la fuerza se vuelve infinitamente grande al intentar hacer la distancia arbitrariamente cercana a cero. En otras palabras, el potencial de la interacción presenta un polo cuando el acoplamiento se vuelve infinito y la distancia se vuelve cero. En las teorías que presentan este fenómeno, como la electrodinámica cuántica, se han propuesto [7-10] definiciones de observables renormalizadas (por ejemplo, la masa), las cuales se calculan tomando en cuenta los efectos que las fluctuaciones cuánticas (como la polarización del vacío y la autoenergía de las partículas) producen sobre el valor de dichas observables, dichos fenómenos cuánticos “apantallan” al valor “desnudo” (finito) de estas observables, volviéndolas efectivamente infinitas.

### 1.3 – Formalismo de la teoría cuántica de campos

En la teoría cuántica de campos, las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante el principio de mínima acción. Es posible llegar a estas ecuaciones haciendo una descripción matemática de la teoría en términos de ciertas variables dinámicas. Sin embargo, a diferencia de la mecánica clásica donde las variables dinámicas son las coordenadas generalizadas, en la teoría cuántica de campos son los campos quienes actúan como variables dinámicas.

#### 1.3.1 – Ecuación de Klein-Gordon

Algo importante de la teoría cuántica de campos es que es una teoría relativista. En el formalismo no relativista la relación de energía-momento se define como:

$$E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \quad (1)$$

En (1)  $\vec{p}^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$ . De esta relación, de la ley de la conservación de la energía y de la descripción de los observables como operadores se obtiene la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{E}|\psi\rangle = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) |\psi\rangle \quad (2)$$

Los operadores del momento lineal y la energía están descritos respectivamente por  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$  y  $\hat{E} = i\hbar\partial_t$ . La ecuación de Schrödinger es inadecuada por no ser invariante ante transformaciones de Lorentz, lo cual implica que el formalismo es inconsistente con la relatividad especial. Una ecuación relativista que describa a los campos se puede determinar a partir de la relación relativista de energía-momento:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3)$$

Cuando esta ecuación se cuantiza, da como resultado:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi \quad (4)$$

Reacomodando los términos de (4) se tiene:

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (5)$$

Como todas las referencias a números imaginarios han desaparecido desde (4), dicha ecuación puede ser aplicada tanto a campos reales como complejos. Los operadores de derivación en (5) pueden ser reescritos en una notación covariante. Se tiene la métrica de Minkowski:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Las letras griegas  $\mu$  y  $\nu$  representan las componentes del espacio-tiempo:  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ;  $\langle ct, x, y, z \rangle$ . Aplicando la convención de suma sobre índices repetidos de Einstein se puede expresar un operador de segunda derivada:

$$\partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_{ct} \partial_{ct} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \quad (7)$$

El operador (7) aparece en (5). Se reescribe (5) en su forma covariante:

$$\left( \partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (8)$$

A la ecuación (8) se le conoce como ecuación de Klein-Gordon y representa el comportamiento de partículas relativistas. En la teoría cuántica de campos, todos los campos que existen satisfacen a la ecuación de Klein-Gordon, y por esto, esta ecuación es la expresión más genérica que describe a cualquier campo cuántico relativista.

La ecuación (5) posee segundas derivadas tanto en las coordenadas espaciales como en el tiempo. Esto implica que se deben especificar dos condiciones de frontera para resolver un problema. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que dichas condiciones de frontera son los valores de  $\psi$  y  $\partial_t \psi$  para un instante de tiempo determinado, pero esto tiene consecuencias a la hora de intentar interpretar a la ecuación como una descripción válida de la densidad de probabilidad de una partícula dado su estado de movimiento. La densidad de probabilidad en el formalismo cuántico no relativista (2) está dada por:

$$\rho = \psi^* \psi \quad (9)$$

$\psi^*$  es la función de onda compleja conjugada de  $\psi$ , por lo que (9) es una expresión definida positiva. En este caso la corriente de probabilidad está descrita por:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \quad (10)$$

Es posible deducir la conservación de la probabilidad en todo el espacio mediante la siguiente ecuación de continuidad:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (11)$$

Ya que la probabilidad, que se obtiene de integrar (9) en todo el espacio, es un valor finito y definido positivo, es posible normalizar la función de onda. De esta forma, es posible interpretar la integral de (9) en cierta región del espacio como una probabilidad, y la integral en todo el espacio de (9) se conserva como consecuencia de la ecuación (11).

En el formalismo de Klein-Gordon (8), la corriente de probabilidad (10) sigue siendo válida, pero la densidad de probabilidad debe cambiarse a lo siguiente:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial_{ct} \psi - \psi \partial_{ct} \psi^*) \quad (12)$$

La densidad de probabilidad (12) se vuelve la componente cero  $J^0$  de un cuadvectores  $J^\mu$ , cuyas componentes espaciales están descritas por (10):

$$J^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) \quad (13)$$

El problema con la densidad de probabilidad (12) es que, a diferencia de la expresión (9), ya no es definida positiva porque se pueden establecer valores arbitrarios para  $\psi$  y  $\partial_t \psi$  como condiciones de frontera. Esto hace que sea imposible interpretar a la expresión (12) como una densidad de probabilidad. Por todo esto, la ecuación de Klein-Gordon (8) no debe interpretarse como una 'generalización relativista' de la ecuación de Schrödinger (2). Sin embargo, la ecuación de Klein-Gordon sigue siendo útil en la teoría cuántica de campos para describir campos sin espín, con o sin carga, como los mesones e incluso el bosón de Higgs.

### 1.3.2 – Ecuación de Dirac

Para poder lograr obtener una expresión relativista que pudiera interpretarse como una probabilidad, era necesario construir una ecuación diferencial que fuera de primer orden tanto en las coordenadas espaciales como en el tiempo. La forma de lograr esto es encontrando un operador que siendo aplicado dos veces sea equivalente a la ecuación de Klein-Gordon. La idea de Dirac fue definir un operador de la forma:

$$\left( A \partial_x + B \partial_y + C \partial_z + \frac{i}{c} D \partial_t \right) \left( A \partial_x + B \partial_y + C \partial_z + \frac{i}{c} D \partial_t \right) = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \nabla^2 \quad (14)$$

Multiplicando los operadores en (14) se ve inmediatamente que para que esto se cumpla debemos asumir que las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  deben anticonmutar entre ellas (por ejemplo,  $AB = -BA$ ) y además los cuadrados de las cuatro deben ser iguales a 1. Estas condiciones se pueden cumplir si

estas constantes son matrices (cuyos cuadrados sean iguales a la matriz identidad). El hecho de que las matrices anticonmuten implica que (14) es una descripción válida para los estados que son antisimétricos ante el intercambio de dos partículas, es decir, la ecuación que resulte de obtener los valores de las matrices en (14) será útil para describir a cualquier fermión, como el electrón.

El hecho de que el operador cuadrado (14) esté definido por las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  tiene la implicación física que los campos tienen varias componentes en el espacio sobre el cual están construidas estas matrices. Si a cada componente de la matriz se le asocia una componente en el espacio de espín, esto explicaría la teoría fenomenológica del espín. El problema es que las matrices que satisfagan las reglas de anticonmutación y de los cuadrados no pueden ser de  $2 \times 2$ : las matrices tienen que ser de  $4 \times 4$ . Los dos grados de libertad adicionales fueron inicialmente interpretados como estados de energía negativa ocupados por electrones, el llamado 'mar de Dirac'. Con el descubrimiento de las antipartículas, estos estados se reinterpretaron como propios de dichas antipartículas (con energía positiva).

Tomando el lado derecho del igual de (14), se puede reescribir la ecuación (5):

$$\left(-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2\right)\psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\psi \quad (15)$$

Se puede "sacar raíz cuadrada" de ambos operadores en (15) utilizando la expresión del lado izquierdo del igual en (14):

$$\left(A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + \frac{i}{c}D\partial_t\right)\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi \quad (16)$$

Para resolver (16), se deben introducir las cuatro matrices que satisfagan las condiciones de anticonmutación y de cuadrados. Un conjunto infinito de matrices de  $4 \times 4$  cumplen esto, así que se elige alguna representación para este conjunto de matrices. Dirac propuso la siguiente<sup>A1</sup>:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

La ecuación (16) puede escribirse también en forma covariante:

$$\left(A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + \frac{i}{c}D\partial_t\right)\psi = i(-iA\partial_x - iB\partial_y - iC\partial_z + D\partial_{ct})\psi \quad (18)$$

Y las matrices  $-iA$ ,  $-iB$ ,  $-iC$  y  $D$  están relacionadas cada una a una componente del espacio-tiempo. Definimos así un cuadvectores cuyos elementos son estas cuatro matrices:

$$\gamma^\mu = \langle D, -iA, -iB, -iC \rangle \quad (19)$$

Y los elementos de este cuadvectores son llamados matrices gamma, o matrices de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Sustituyendo (19) en (18) y (18) en (16) se tiene:

$$i(\gamma^1\partial_x + \gamma^2\partial_y + \gamma^3\partial_z + \gamma^0\partial_{ct})\psi = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi \quad (21)$$

Simplificando (21) se tiene:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \quad (22)$$

La ecuación (22) es conocida como la ecuación de Dirac, y así como la ecuación (8) es capaz de describir a cualquier partícula relativista, la ecuación (22) es capaz de describir a cualquier fermión relativista. En otras palabras, al igual que el resto de las partículas, todos los fermiones son partículas de Klein-Gordon, pero solamente los fermiones son partículas de Dirac.

En la teoría cuántica de campos se suele trabajar en el llamado sistema de unidades naturales. Este sistema trae la ventaja de poder tratar las expresiones matemáticas que describen la física de una forma más simplificada, al costo de una pérdida de claridad en el análisis dimensional. Como ejemplo, en este sistema la masa y la energía poseen las mismas unidades, la distancia y el tiempo poseen las mismas unidades, etc.; aunque esto tiene sentido desde el punto de vista del principio de equivalencia, que asocia la masa y la energía, el espacio y el tiempo, etc.

En unidades naturales, se establecen valores adimensionales para ciertas constantes de la naturaleza, en particular la velocidad de la luz  $c = 1$ , la constante reducida de Planck  $\hbar = 1$ , y la constante de Boltzmann  $k_B = 1$ , la cual tendrá relevancia cuando se haga el análisis térmico de la teoría cuántica de campos. En unidades naturales, la ecuación de Dirac (22) se expresa:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (23)$$

En (23),  $\psi$  se interpreta como un campo, no como un estado. Para resolver (23) debemos notar que las matrices (20) satisfacen  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , donde  $\{A, B\} = AB + BA$  es el anticonmutador de  $A$  y  $B$ . Las teorías cuánticas de campos se estudian a partir de las simetrías que posee su densidad lagrangiana, a la cual simplemente se llamará 'lagrangiana' de ahora en adelante<sup>6</sup>. Como la ecuación de Dirac puede describir a cualquier fermión, es necesario conocer a la lagrangiana de Dirac para estudiar cualquier teoría cuántica de campos que posea fermiones.

Para obtener la lagrangiana de Dirac, debemos encontrar una expresión que sea hermitiana y además sea escalar de Lorentz. Recordando que los campos de Dirac tienen varias componentes en el espacio de las componentes de las matrices de Dirac, el término  $\psi^\dagger\psi$  es hermitiano, pero no es escalar de Lorentz. Entonces, definimos  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$  para que el término  $\bar{\psi}\psi$  sea escalar de Lorentz<sup>A2</sup>.

Ya que el término  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  también es escalar de Lorentz, se propone la lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (24)$$

6. Ya que, en la teoría cuántica de campos, los campos son entidades que permean el espacio-tiempo, solamente tiene sentido hablar de una lagrangiana para un volumen determinado. La lagrangiana como se conoce en la mecánica clásica alude a eventos que ocurren en una coordenada de espacio-tiempo determinada. La lagrangiana entendida como tal no se utiliza en la teoría cuántica de campos.



Las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$  (o  $\psi^\dagger$ ) y  $\psi$  dan como resultado la ecuación de Dirac y su compleja conjugada, respectivamente<sup>A3</sup>.

### 1.3.3 – Lagrangiana del campo electromagnético

Las lagrangianas de todas las teorías cuánticas de campos que describan fermiones (todas las del modelo estándar) deben contener a la lagrangiana de Dirac (24) en uno de sus términos. La electrodinámica cuántica, que es la teoría de norma de la cual se basan las demás, describe cómo interactúan las partículas de Dirac a través de la fuerza electromagnética. La lagrangiana total de la electrodinámica cuántica es igual a la suma de la lagrangiana de Dirac con la lagrangiana de la teoría electromagnética y la lagrangiana que describe la interacción entre estos campos:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \quad (25)$$

La lagrangiana de la teoría electromagnética clásica (en unidades naturales) está descrita por:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (26)$$

$A^\mu = \langle \phi, \vec{A} \rangle$  es el cuadvivector formado por los potenciales escalar y vectorial y  $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor de campo electromagnético. En este caso, la interacción entre los dos campos está dada por:

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(q\gamma^\mu A_\mu)\psi \quad (27)$$

$q$  es la carga eléctrica de la partícula que interactúa con el campo electromagnético. Es conveniente agrupar la lagrangiana de interacción de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (28)$$

En (28), al operador  $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$  se le llama derivada covariante de norma, o simplemente derivada covariante. En la lagrangiana (28) es la introducción de este último operador  $\partial \rightarrow D$  la forma en la que se describe la interacción con el campo electromagnético. Es importante mencionar que en la lagrangiana (28) el campo de Dirac se trata como un campo cuántico mientras que al campo electromagnético se le sigue considerando como un campo clásico. A esto se le llama ‘primera cuantización’, y esta aproximación es válida cuando las partículas en algún experimento se someten a algún campo electromagnético controlado por un aparato lo suficientemente grande como para que la electrodinámica clásica sea aplicable para dicho experimento. Es posible tratar al campo electromagnético como un campo cuántico mediante un procedimiento llamado ‘segunda cuantización’, sin embargo, profundizar en esto no es relevante para los fines de este trabajo<sup>7</sup>.

7. La cromodinámica cuántica toma muchos conceptos de la electrodinámica cuántica, como la forma de la lagrangiana e incluso algunas simetrías, como la simetría de norma. El campo que describe a la interacción fuerte se cuantiza también, aunque de una forma matemáticamente diferente a la interacción electromagnética. La forma en la que se cuantiza el campo fuerte es mediante el loop de Polyakov, el cual se verá a detalle más adelante durante este trabajo.

## 2 – Introducción a la cromodinámica cuántica

La electrodinámica cuántica es la teoría más fundamental del Modelo Estándar, y las descripciones de las otras dos interacciones fueron desarrollándose a partir de la electrodinámica cuántica. A principios de 1954, Chen Ning Yang y Robert Mills hicieron una extensión del concepto de la simetría de norma  $U(1)$  de una teoría abeliana como la electrodinámica cuántica a otras teorías no abelianas [11]. A estas teorías no abelianas con simetría  $SU(N)$  se les conoce como teorías de Yang-Mills, por ejemplo, las teorías de norma que describen las interacciones fuerte y débil son teorías de Yang-Mills.

La interacción débil se entiende ahora en términos de una teoría unificada con la interacción electromagnética (hoy llamada teoría electrodébil) [12,13], entendiéndose matemáticamente como una teoría de Yang-Mills con un grupo de simetría de norma  $SU(2) \times U(1)$ . El problema con esta teoría es que el formalismo de Yang-Mills, que requería bosones de norma sin masa, parecía ser inadecuado para explicar la interacción débil con sus bosones de norma de gran masa. Esto se resolvió proponiendo un mecanismo de generación dinámica de la masa de los bosones de norma mediante un rompimiento espontáneo de la simetría de norma  $SU(2)$  [14]. Más adelante, se demostró que la teoría electrodébil es renormalizable [15], es decir, es posible agregar un número finito de contratérminos a la lagrangiana para evitar que aparezcan infinitos en la teoría.

En un principio, el modelo de quarks se construyó pensando en éstos como una abstracción matemática para explicar el comportamiento y las propiedades de los hadrones. Sin embargo, más adelante los experimentos de dispersión inelástica profunda de protones y electrones [16] dieron fuertes indicios de la existencia de los quarks como partículas reales. Por esto, en el modelo estándar se plantea la existencia de los quarks (y no los hadrones) como partículas fundamentales.

### 2.1 – Formalismo de la cromodinámica cuántica

La cromodinámica cuántica se construye también a partir de las ideas de la electrodinámica cuántica. De la misma manera en la que la electrodinámica cuántica utiliza al tensor de campo electromagnético para describir a un sistema de partículas que interactúan por medio de esta fuerza, la cromodinámica cuántica debe utilizar algo análogo para la interacción fuerte. De la misma forma que en (27) se define un campo de norma de componentes reales  $A_\mu$ , que expresa al campo de los gluones. Como los gluones representan los  $N_c^2 - 1$  generadores del grupo de norma  $SU(N_c)$ , donde  $N_c$  es el número de colores, el campo de norma está también definido sobre los índices de color:

$$A_\mu = \frac{1}{2} \lambda_a A_\mu^a \quad (29)$$

El índice  $a$  va de 1 a 8 y representa los índices de color para  $N_c = 3$ .  $\lambda_a$  son las ocho matrices de Gell-Mann, que al igual que las matrices de Dirac, son linealmente independientes entre ellas y la suma de sus componentes de la diagonal principal (es decir, su traza) es igual a cero. Las matrices que Gell-Mann escogió para representar a los generadores de  $SU(3)$  fue la siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

Las matrices (30) están normalizadas de tal forma que la traza de sus cuadrados sea igual a 2:

$$\text{tr}\{\lambda_a \lambda_b\} = 2\delta^{ab} \quad (31)$$

Las matrices de Gell-Mann satisfacen las siguientes relaciones de conmutación<sup>A4</sup>:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = \sum_c \text{tr}\{\lambda_a [\lambda_b, \lambda_c]\} \lambda_c \quad (32)$$

En general, el término  $\text{tr}\{\lambda_a [\lambda_b, \lambda_c]\}$  es igual a cero, excepto en los casos donde  $(a, b, c)$  es igual a  $(1,2,3)$ ,  $(1,4,7)$ ,  $(2,4,6)$ ,  $(2,5,7)$ ,  $(3,4,5)$ ,  $(1,5,6)$ ,  $(3,6,7)$ ,  $(4,5,8)$ ,  $(6,7,8)$  o a cualquier permutación de cualquiera de estas nueve ternas, en donde el intercambio entre dos índices cambia el signo del resultado. El término  $\text{tr}\{\lambda_a [\lambda_b, \lambda_c]\}$  toma los siguientes valores para cada terna:

$(1,2,3)$	$2i$	$(2,5,7)$	$i$	$(3,6,7)$	$-i$
$(1,4,7)$	$i$	$(3,4,5)$	$i$	$(4,5,8)$	$\sqrt{3}i$
$(2,4,6)$	$i$	$(1,5,6)$	$-i$	$(6,7,8)$	$\sqrt{3}i$

Tabla 2: Valores diferentes de cero del término  $\text{tr}\{\lambda_a [\lambda_b, \lambda_c]\}$  para la terna  $(a, b, c)$ .

Conociendo esto, se construye el tensor de campo para la interacción fuerte:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \pm ig[A_\mu, A_\nu] \quad (33)$$

Sustituyendo (29) en (33) se tiene:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \lambda_a A_\nu^a - \frac{1}{2} \partial_\nu \lambda_a A_\mu^a \pm \frac{1}{2} ig[\lambda_b, \lambda_c] A_\mu^b A_\nu^c \quad (34)$$

Sustituyendo (32) en (34) se tiene:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \lambda_a A_\nu^a - \frac{1}{2} \partial_\nu \lambda_a A_\mu^a \pm \frac{1}{2} ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b [\lambda_c, \lambda_a]\} \lambda_a A_\mu^b A_\nu^c \quad (35)$$

Cabe mencionar que en (35) queda implícita la suma sobre  $a$  para todos los términos. Factorizando  $\lambda_a$  se obtiene el término  $a$ -ésimo del color para el tensor de campo fuerte:

$$G_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a - \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu^a \pm \frac{1}{2} ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b [\lambda_c, \lambda_a]\} A_\mu^b A_\nu^c \quad (36)$$

Las expresiones (36) son campos tensoriales, que son a su vez las ocho componentes en el color de la interacción fuerte.  $g$  es la constante de acoplamiento y las componentes (36) son reales definidas, ya que el término  $\text{tr}\{\lambda_b [\lambda_c, \lambda_a]\}$  es imaginario puro (Tabla 2). Conociendo todo esto es posible describir la lagrangiana de la cromodinámica cuántica a partir de la de la electrodinámica cuántica (28):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a \quad (37)$$

Cabe mencionar que también hay una suma implícita sobre los índices de color  $a$ , sin embargo, subir o bajar los índices  $a$  es trivial y no afecta al signo del resultado, en contraste con los índices del espacio-tiempo. La derivada covariante  $D_\mu$  se introduce de manera análoga a (28):

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^a \quad (38)$$

## 2.2 – Simetrías de la cromodinámica cuántica

### 2.2.1 – Simetría de norma

Como ya se había mencionado anteriormente, la QCD es una teoría de norma, es decir, que la lagrangiana de la QCD (37) es invariante ante la transformación de norma<sup>A5</sup>:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi \quad (39)$$

$\theta_a(x^\mu)$  es el parámetro de la transformación, que depende de las coordenadas del espacio-tiempo y en el caso específico donde  $\theta_a(x^\mu)$  es la misma constante para cualquier índice  $a$  de color y para cualquier coordenada  $x^\mu$ , la transformación (39) es local, es decir, la transformación global es un caso específico de una transformación local (donde el parámetro de la transformación depende de las coordenadas). El factor  $\tau^a$  representa a los generadores del grupo de simetría de color  $SU(3)$ :

$$\tau^a = \frac{1}{2}\lambda^a \quad (40)$$

El acoplamiento  $g$  que aparece en la derivada covariante (38) es independiente de la carga de color que posean las partículas que interactúan, por lo tanto, tiene el mismo valor para cada  $a$ . La lagrangiana (37) describe las interacciones de cada sabor diferente de quarks (Tabla 1). La lagrangiana total para un sistema donde hay  $N_f$  sabores de quarks presentes es igual a la suma de las lagrangianas para cada sabor. Éstas tendrían una forma matemáticamente idéntica, exceptuando únicamente el término de masa  $m$ , ya que cada sabor de quark posee una masa diferente.

### 2.2.2 – Simetría de isospín

Los sabores en la cromodinámica cuántica se pueden tratar de una manera similar a los colores, sin embargo, dadas las diferencias entre las masas de quarks de diferentes sabores, las simetrías relacionadas al número de sabores que aparecen en la teoría no son exactas, o bien, no surgen de manera natural. El ejemplo más sencillo es el de la simetría de isospín. Para esto vamos a trabajar en el sector de quarks ligeros (únicamente sabores  $u$  y  $d$ ). Este sector es sencillo de trabajar y además es adecuado para describir sistemas donde no aparezcan quarks más pesados, como los núcleos atómicos o como los mesones ligeros (piones). Además, en el régimen de energías más bajas, la existencia de los quarks más pesados no altera los resultados esperados por la teoría, ya que la presencia de un quark pesado empieza a afectar al sistema hasta que la energía de éste sea del orden de la masa de dicho quark multiplicada por  $c^2$ . Definimos la lagrangiana de la QCD para el sector de quarks ligeros a partir de (37):

$$\mathcal{L} = \bar{u}(i\gamma^\mu D_\mu - m_u)u + \bar{d}(i\gamma^\mu D_\mu - m_d)d - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a \quad (41)$$

$u$  y  $d$  representan a los campos de los dos quarks ligeros. La derivada covariante opera a cada quark de una manera equivalente, ya que ambos quarks son indistinguibles ante la interacción fuerte. Cabe mencionar que sus masas  $m_u$  y  $m_d$  son diferentes entre ellas en la naturaleza, aunque sus valores son bastante similares [17]. La lagrangiana (41) se puede representar en el espacio  $SU(2)$  de sabor:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a \quad (42)$$

Las componentes de los campos  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  representan los diferentes ‘estados en el espacio de isospín’ y los elementos de la diagonal principal de la matriz de masas  $\hat{m}$  son las masas de los quarks que aparecen en (41). De una forma igual al espín, los dos quarks ligeros se interpretan como la misma partícula en dos estados de isospín diferentes. La lagrangiana (42) presenta simetría de isospín si es invariante ante la siguiente transformación:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta_b \tau^b} \psi \quad (43)$$

En esta ocasión  $\tau^b$  representa a los generadores del grupo de simetría de isospín  $SU(2)$ .  $\theta_b$  es el parámetro de la transformación, que es arbitrario y no depende de las coordenadas, es decir, la transformación es global. De manera análoga a (40), los índices  $b$  van de 1 a  $N_f^2 - 1 = 3$ . Los generadores de grupo  $SU(2)$  están definidos en términos de las matrices de Pauli  $\sigma^b$ :

$$\tau^b = \frac{1}{2}\sigma^b \quad (44)$$

De la misma forma que las matrices de Gell-Mann (30), hay una cantidad infinita de posibilidades para representar a los generadores de  $SU(2)$ . La representación más común de estas matrices es la siguiente:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Igualmente que con los índices de color  $a$ , subir y bajar los índices de sabor  $b$  es trivial. La lagrangiana (42) es invariante ante la transformación (43) sólo si la matriz de masas  $\hat{m}$  es un múltiplo de la matriz identidad<sup>A6</sup>. Es decir, la simetría de isospín se cumple únicamente cuando las masas de los quarks ligeros son iguales. No existe la simetría de isospín en la naturaleza, pero varias propiedades de las partículas; como la similitud entre las masas del protón y neutrón, o las de los piones neutros y los piones cargados; se le pueden atribuir a una ‘simetría aproximada de isospín’, dadas las similitudes entre las masas de los quarks ligeros. En este trabajo se usa una simetría aproximada de isospín para los dos quarks ligeros.

### 2.2.3 – Simetría quiral

Otra simetría aproximada que es de gran interés en la QCD es la simetría quiral. Esta simetría se define en términos de la matriz de quiralidad:

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (46)$$

Las matrices  $\gamma^\mu, \mu = 0,1,2,3$  son las matrices de Dirac (20). La matriz de quiralidad  $\gamma_5$  lleva su nombre porque anteriormente se usaba el índice 4 en vez del 0 para la componente temporal de un cuadrivector. La matriz de quiralidad es hermitiana, es anticonmutable con cualquiera de las matrices de Dirac  $\gamma^\mu$  y su cuadrado es igual a la matriz identidad<sup>7</sup>. Con esto podemos definir los operadores de quiralidad en términos de  $\gamma_5$ :

$$Q_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}; \quad Q_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (47)$$

Los índices  $R$  y  $L$  son quirales,  $Q_R$  y  $Q_L$  se interpretan como operadores que representan estados izquierdos (left) y derechos (right). Como  $\gamma_5$  es hermitiana,  $Q_R$  y  $Q_L$  también lo son. Además,  $Q_R$  y  $Q_L$  satisfacen una relación de completéz:

$$Q_R + Q_L = 1 \quad (48)$$

$Q_R$  y  $Q_L$  permanecen invariantes al ser elevados a cualquier potencia entera positiva, es decir, son idempotentes:

$$Q_R^n = Q_R \cap Q_L^n = Q_L \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (49)$$

Además,  $Q_R$  y  $Q_L$  son ortogonales:

$$Q_L Q_R = Q_R Q_L = 0 \quad (50)$$

Las propiedades (48-50) aseguran que  $Q_R$  y  $Q_L$  se puedan interpretar como operadores de proyección que, aplicados al campo de los quarks  $\psi$  (42), resulten en las componentes de  $\psi$  en el espacio quiral generado por  $Q_R$  y  $Q_L$  para cada quark. Los dos estados resultantes de aplicar estos operadores,  $Q_R\psi$  y  $Q_L\psi$ , representan dos partículas con quiralidad opuesta: una izquierda y una derecha. Dos partículas quirales son aquellas donde una se transforma en la otra ante una transformación de paridad:

$$\hat{P}(x, y, z) = (-x, -y, -z) \quad (51)$$

Un ejemplo de quiralidad en la geometría son las manos humanas, que de hecho es de donde viene la palabra<sup>8</sup>, ya que la mano izquierda toma el aspecto de la mano derecha ante una inversión de las tres coordenadas espaciales y viceversa. Otros ejemplos de quiralidad son los enantiómeros en la química y las figuras L y S en el Tetris. Para el formalismo de dos sabores (42) podemos definir una transformación de quiralidad:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \quad (52)$$

8. Del gr. χεῖρός (khéiros): Mano.

Sin embargo, la lagrangiana (42) no es invariante ante la transformación (52) porque el término  $\bar{\psi}\hat{m}\psi$  no es invariante, aunque todos los demás términos lo sean<sup>A8</sup>. En el caso donde las masas de los quarks son ambas cero, la lagrangiana (42) ahora es quiral. Esto se puede interpretar en la física como la diferencia entre el operador de quiralidad y el operador de helicidad, el cual es la proyección del espín sobre el momento lineal. En partículas sin masa, la velocidad de propagación es igual a  $c$ , por lo que dada una helicidad, no existe ningún marco de referencia de Lorentz en el cual esta partícula tenga una helicidad contraria. Por otra parte, en el caso de partículas con masa, la helicidad de la partícula (que es más lenta que  $c$ ) depende del marco de referencia del observador. Solamente en las partículas sin masa la quiralidad y la helicidad son equivalentes.

### 3 – Rompimiento de la simetría quiral

#### 3.1 – Límite quiral

En el caso de la cromodinámica cuántica, es posible hacer una ‘aproximación quiral’ de la lagrangiana (42) haciendo que las masas de los quarks sean iguales a cero. Esta aproximación es posible porque las masas de los dos quarks ligeros son muy bajas en comparación con los hadrones que forman [17]. En otros esquemas, donde se incluyen masas de quarks más pesados como el  $s$ , la simetría quiral se va alejando cada vez más de la realidad.

En el límite quiral, la lagrangiana (41) tiene un término de masa igual a cero para cada quark. Como los quarks son indistinguibles ante la fuerza fuerte, la lagrangiana (37) es adecuada para describir a alguno de los dos quarks:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a \quad (53)$$

La lagrangiana (53) posee simetría quiral (además de poseer simetría de isospín, ya que las masas de cada sabor son iguales entre ellas). En la teoría cuántica de campos se habla de una simetría que se rompe espontáneamente: si la formulación lagrangiana de una teoría es invariante ante cierta transformación, pero su estado de mínima energía (el vacío) no lo es, se dice que la simetría está espontáneamente rota. En contraste, la simetría que nunca ha existido en primer lugar porque alguno o algunos de los términos de la lagrangiana no son invariantes ante tal transformación se considera como rota explícitamente. Por ejemplo, en la lagrangiana (42) la simetría quiral está rota explícitamente, a diferencia de la lagrangiana (53).

#### 3.2 – Degeneración del vacío en la teoría $\varphi^4$

En la teoría cuántica de campos, se le llama vacío degenerado al conjunto de estados que tienen la mínima energía posible que está permitida por el potencial. En la vida real, esta energía del vacío se manifiesta como la energía del punto cero, la cual se interpreta como la energía propia del campo que no es suficiente como para que se manifieste en forma de partículas. En condiciones normales, esta energía es inutilizable por nosotros. Un rompimiento espontáneo de la simetría quiral se puede manifestar únicamente en potenciales cuyo vacío es degenerado.

La forma del potencial depende de las interacciones. Una teoría sencilla en la que se puede observar un rompimiento espontáneo de la simetría quiral es en la llamada teoría  $\varphi^4$ . En esta teoría se toma un campo escalar complejo  $\varphi$  descrito por la ecuación de Klein-Gordon (8):

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi^* = 0 \quad (54)$$

(54) está expresado en unidades naturales y  $\varphi^*$  representa al campo complejo conjugado de  $\varphi$ , y así como las ecuaciones de Euler-Lagrange de la lagrangiana (24) dan como resultado la ecuación de Dirac (23) y su compleja conjugada, las ecuaciones de Euler-Lagrange de la lagrangiana de Klein-Gordon dan como resultado los primeros dos lados del igual de (54)<sup>A9</sup>. La lagrangiana de Klein-Gordon es la siguiente:



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^* \varphi \quad (55)$$

El término  $\varphi^* \varphi$  se puede considerar como ‘el cuadrado de la magnitud’ del campo escalar complejo  $|\varphi|^2 \equiv \varphi^* \varphi$ , ya que cualquier número complejo multiplicado por su complejo conjugado es definido positivo. En la teoría  $\varphi^4$ , la lagrangiana de interacción está descrita mediante un acoplamiento puntual de cuatro campos escalares complejos. Esto se interpretaría como una X en un diagrama de Feynman, ya que no existe una partícula virtual que actúe como propagador según esta descripción. Por lo tanto, la teoría  $\varphi^4$  es no renormalizable<sup>9</sup>.

La lagrangiana de interacción que se ha de agregar a (55) es directamente proporcional al cuadrado de  $\varphi^* \varphi$ , es decir a  $\varphi^2$ . Definiendo una constante de acoplamiento  $\lambda$ , la lagrangiana (55) se modifica tomando en cuenta a la interacción [18]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 - \lambda \varphi^4 \quad (56)$$

### 3.2.1 – Potencial sin degeneración

En (56) exigiremos que la constante de acoplamiento  $\lambda$  sea positiva para que el sistema tenga un mínimo absoluto de potencial y no se colapse. Nótese que en [18]  $\lambda$  aparece dividida entre 24 para facilitar el proceso de renormalización, sin embargo, eso no será necesario para los propósitos de este trabajo. Basta con definir una constante arbitraria de acoplamiento donde cualquier constante se puede absorber en su valor. Considerando al potencial como los términos de la lagrangiana ajenos al término cinético, se tiene:

$$V = \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^4 \quad (57)$$

A simple vista, el potencial (57) no tiene nada interesante, el punto de mínima energía posible ocurre en  $\varphi = 0$ , haciendo que el potencial sea simétrico con respecto al vacío. A esta representación de un potencial sin degeneración del vacío en la teoría  $\varphi^4$  se le llama modo Wigner-Weyl (Fig. 1).

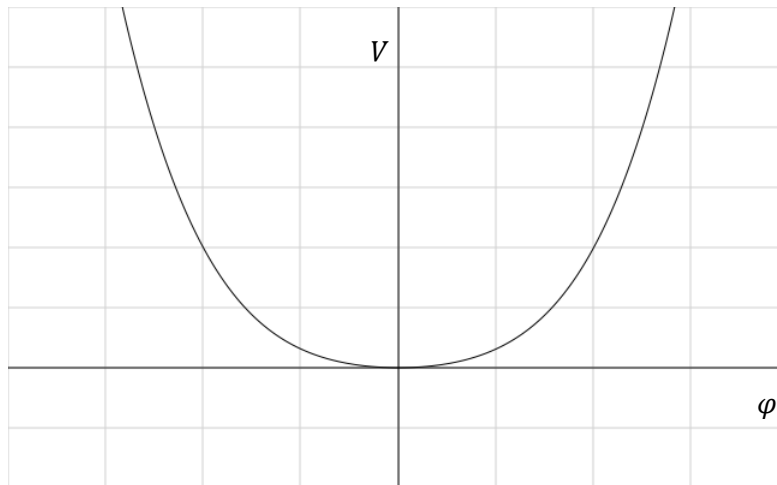


Figura 1: Modo Wigner-Weyl en el potencial de la teoría  $\varphi^4$ . La abscisa de la gráfica es el propio campo.

9. Técnicamente la teoría  $\varphi^4$  sí es renormalizable, pero el contratérmino de la lagrangiana necesario para que esto ocurra anularía al término dependiente de  $\varphi^4$ , regresando a la formulación original de la ecuación de Klein-Gordon, trivializando así a la teoría  $\varphi^4$ . Este procedimiento de renormalización se puede visualizar más a detalle en [18].

### 3.2.2 – Potencial con vacío degenerado

Una forma fácil de crear una degeneración a partir del potencial (57) es a partir del término de masa. La masa es un término definido positivo y obviamente el cuadrado de ésta también lo es, sin embargo, en algunas teorías hay términos complejos que tienen la misma dimensión que la masa. En particular, si existiera un término imaginario puro  $\frac{i}{\sqrt{2}}m'$  cuyo valor absoluto sea mayor que el de la masa dividida entre  $\sqrt{2}$ , el potencial (57) tendría un término negativo en lugar del término de masa habitual:

$$V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}m'\right)^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 \quad (58)$$

El potencial (58) tiene un término de masa negativo  $\mu^2 \equiv m^2 - (m')^2$ ,  $\mu^2 < 0$ . En este caso, la forma del potencial ya no es simétrica con respecto al vacío, ahora hay dos valores diferentes del campo  $\varphi$  donde ocurre el punto de mínima energía posible. Al escoger cualquiera de estos dos puntos, se dice que se rompe espontáneamente la simetría quiral. A esta representación del potencial con vacío degenerado en la teoría  $\varphi^4$  se le llama modo Nambu-Goldstone (Fig. 2).

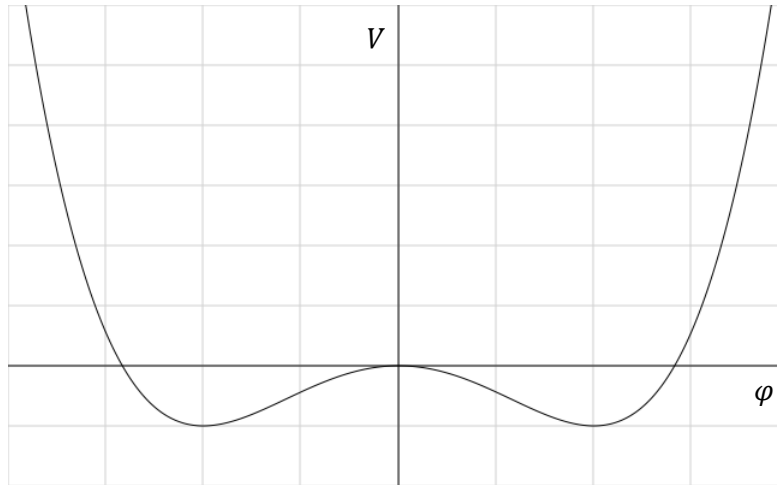


Figura 2: Modo Nambu-Goldstone en el potencial de la teoría  $\varphi^4$ , asimétrico con respecto al vacío.

En el límite quiral de la cromodinámica cuántica (53), la lagrangiana es invariante ante las transformaciones de quiralidad (52) por la masa nula de la partícula descrita, sin embargo, la existencia de un término de masa negativo  $\mu^2 \equiv -(m')^2$  que genere un potencial asimétrico análogo al de la teoría  $\varphi^4$  se puede dar en ciertas circunstancias. Este término se genera a partir de la interacción del campo  $\psi$  con el vacío y, por esto, se le llama ‘masa dinámicamente generada’.

La consecuencia fenomenológica más importante de todo esto es que, para cada transformación de quiralidad que deje invariante a la lagrangiana pero no deje invariante al vacío del potencial, debe de existir un bosón de masa cero que actúe como propagador de la interacción [18], en lugar de presentar la interacción puntual de cuatro bosones que se estableció en primer lugar. A este bosón se le conoce como bosón de Goldstone.

## 4 – Sistemas de varias partículas que interactúan fuertemente

### 4.1 – Dificultades de la cromodinámica cuántica

La diferencia más importante entre la interacción electromagnética (26) y la interacción fuerte (36) es que (36) tiene un término extra, el cual implica la posibilidad de auto-interacciones del campo de norma (los gluones) y la existencia de la libertad asintótica [19]. Esto vuelve a la QCD mucho más difícil de tratar que a la QED, ya que, además de ser una teoría no abeliana, es una teoría no lineal.

Por otro lado, la intensidad de la interacción está determinada por la constante de acoplamiento  $g$ . En la naturaleza, este acoplamiento varía según las condiciones a las que se encuentre el sistema. El análogo a la constante de acoplamiento en la electrodinámica cuántica es la constante de estructura fina  $\alpha \approx 1/137$ , que tampoco es constante, pero no presenta cambios drásticos en el régimen de altas energías [20], por lo que es posible resolver el problema empleando la teoría de perturbaciones en cualquier régimen de energías con el que se haya trabajado hasta hoy.

En el régimen de bajas energías de la interacción fuerte, la ‘constante’ de acoplamiento presenta cualitativamente el mismo comportamiento que la constante de estructura fina: su valor aumenta. Sin embargo, a diferencia de esta última, la constante de acoplamiento alcanza y supera el valor de 1, causando que sea imposible resolver este problema por medio de la teoría de perturbaciones. Esto es de gran importancia ya que la descripción física de la materia hadrónica (núcleos atómicos, piones, etc.) se encuentra en este régimen. Hoy, no se han podido resolver las ecuaciones de la QCD que describen algo tan importante y fundamental como los núcleos atómicos. En condiciones normales es imposible encontrar quarks aislados, por lo que sus características son muy difíciles de estudiar. Incluso sus masas corrientes<sup>10</sup> no se han podido establecer de manera precisa [17,21,22] ya que son parámetros libres de la teoría. Además, el acoplamiento  $g$  también es otro parámetro libre.

#### 4.1.1 – Lattice QCD

Ya que es imposible tratar el problema de la interacción fuerte en el régimen de bajas energías mediante un enfoque basado en la teoría de perturbaciones, es necesario usar esquemas no perturbativos para poder analizar un sistema de partículas que interactúan fuertemente bajo estas condiciones. En 1974, Kenneth G. Wilson propuso un método numérico hoy conocido como “Lattice QCD” para cuantizar una teoría de norma en un mallado euclidiano de cuatro dimensiones [23]. El uso de esta técnica preserva la simetría de norma de la QCD (39) ya que parte de primeros principios, sin embargo, los quarks quedan fijos en los nodos del mallado, por lo que se pierde la invariancia de Lorentz (o la euclidiana de cuatro dimensiones).

Como la QCD es divergente en el ultravioleta, es necesario regularizar las integrales con un parámetro de corte para obtener cantidades finitas. En lattice QCD, esta regularización se presenta de manera natural en la teoría: el corte ultravioleta del momento es directamente proporcional al inverso del espaciado entre cualesquier dos nodos en el mallado. Para recuperar la teoría con un espacio-tiempo continuo, se calcula el límite cuando el espaciado entre los nodos del mallado tiende a cero y el parámetro de corte tiende a infinito, abarcando todos los momentos relevantes.

10. Denominamos ‘masa corriente’ a la masa de una partícula sin considerar las interacciones de ésta con los otros campos. El nombre está relacionado con el hecho de que dichas masas aparecen en las divergencias de las corrientes vectorial y axial. Algo análogo sería la ‘masa en reposo’ de la relatividad especial, que no considera la contribución del momento lineal del cuerpo al valor medido de su masa.



parte del sol, tanta que la cantidad de materia que recibe es insignificante en comparación. El conjunto más generalizado que se puede usar para describir un sistema en equilibrio térmico es el gran conjunto canónico, en el cual el sistema no está aislado del entorno ni en transferencias de energía ni de partículas. Con respecto a esto último, hay que ser cuidadosos en aplicar estos conceptos a la teoría cuántica de campos, ya que las definiciones de ‘antipartículas’, ‘aniquilamiento’, etc., que cambian el número de partículas en un sistema cuántico relativista, no existen en la mecánica estadística clásica.

En el conjunto canónico, el número de partículas del sistema  $N$  es constante, pero la energía total del sistema no lo es. La distribución de probabilidad para la energía de cada elemento de este conjunto en la mecánica estadística clásica está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$\frac{N'}{N} = \frac{1}{k_B T} \int_{E_1}^{E_2} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \quad (59)$$

$\frac{N'}{N}$  es la razón entre  $N'$ , que es el número de partículas con una energía entre  $E_1$  y  $E_2$ , y el número total de partículas del sistema  $N$ .  $T$  es la temperatura del sistema, la cual es un parámetro libre de la teoría y  $k_B$  es la constante de Boltzmann  $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} J/K$ , que asocia la proporcionalidad entre la temperatura medida del sistema (en unidades de temperatura) con las unidades de la energía cinética promedio. La distribución (59) está normalizada para que el resultado de integrarla en todas las energías  $(0, \infty)$  dé 1 como resultado y sea apropiado interpretarla como una probabilidad. En el conjunto canónico, el inverso de la constante de normalización  $k_B T$  se puede interpretar como la razón de cambio de la entropía con respecto al calor.

En el gran conjunto canónico, la distribución de probabilidad (59) se debe actualizar para tomar en cuenta los cambios en el número de partículas  $N$ :

$$P = e^{\frac{\Omega + \sum_i \mu_i N_i}{k_B T}} e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (60)$$

La distribución (60) es aplicable para un sistema que tiene muchas clases de partículas, el índice  $i$  representa cada una de las clases de las partículas, tal que  $N_i$  es el número de partículas de dicha clase que existen en el sistema y  $\mu_i$  es una cantidad que se llama potencial químico. El potencial químico está relacionado con los cambios en la energía del sistema que ocurren al hacer un cambio en el número de partículas y se asocia con la densidad de los sistemas. Las partículas suelen moverse de tal forma que el potencial químico disminuya, tal y como los cuerpos en presencia de un potencial gravitacional, electromagnético, etc., tienden a moverse hacia donde el potencial sea menor.

La cantidad  $\Omega$  se llama gran potencial termodinámico, en alusión al gran conjunto canónico.  $\Omega$  es una función que depende únicamente de los parámetros macroscópicos del sistema:  $(T, V, \mu_i)$ , donde  $V$  es el volumen. Esto implica que  $\Omega$  es constante para cada estado termodinámico del sistema. En la distribución (60),  $\Omega$  actúa como un parámetro de normalización, es decir, la integral de (60) con respecto a todos los estados debe ser igual a 1. Ya que el valor de  $\Omega$  es único y constante para cada estado termodinámico, si llegáramos a conocer el valor de  $\Omega$  esto implicaría que podremos conocer todas las variables termodinámicas relevantes del sistema.

En el caso donde se esté analizando un sistema que solamente contiene una clase de partículas, la distribución de probabilidad (60) se puede simplificar:

$$P = e^{\frac{\Omega + \mu N - E}{k_B T}} \quad (61)$$

Con la simplificación (61), el sistema ahora solamente va a depender de tres parámetros: dos intensivos ( $T, \mu$ ), es decir, que no dependen del tamaño del sistema; y uno extensivo ( $V$ ), que depende del tamaño del sistema. En este trabajo, le daremos prioridad a las magnitudes intensivas del sistema, dividiendo entre el volumen a todas aquellas magnitudes que no lo sean (como por ejemplo el gran potencial termodinámico  $\Omega$ ), con el fin de volverlas intensivas (como la masa y la densidad). Otra forma de expresar (61) es mediante la función de partición  $Z$ :

$$PZ = e^{\frac{\mu N - E}{k_B T}} \quad (62)$$

La función de partición  $Z$  se puede obtener sumando todos los estados con energía  $E$  y número de partículas  $N$  posibles. Ya que la probabilidad de que el sistema se encuentre en uno de los estados que forman al conjunto completo, la función de partición  $Z$  actúa como una constante de normalización del sistema. Se sustituye  $P = 1$  en (62):

$$Z = \int dE e^{\frac{\mu N - E}{k_B T}} = e^{-\frac{\Omega}{k_B T}} \quad (63)$$

De la partición del sistema en todas sus configuraciones posibles de  $E$  y  $N$  es de donde la función de partición (63) toma su nombre. De aquí es de donde se puede encontrar la expresión para el gran potencial termodinámico:

$$\Omega = -k_B T \ln Z \quad (64)$$

### 4.3 – Diagrama de fases en el plano $T - \mu$

Un diagrama de fases es una herramienta gráfica que asigna un punto en un sistema de coordenadas a cada sistema termodinámico diferente. En los ejes del diagrama se representan los parámetros intensivos del sistema, que en este caso son la temperatura y el potencial químico. Por convención, se asigna la temperatura al eje vertical y el potencial químico al eje horizontal. Las particularidades que se consideran más importantes con respecto a los diagramas de fases son las transiciones de fase y los puntos críticos.

Las propiedades termodinámicas de un sistema pueden tener grandes variaciones según los valores que tomen los parámetros termodinámicos ( $T, \mu$ ) de éste. La intensidad de ciertas interacciones puede presentar un cambio súbito ante el cambio de cualquiera de éstas. A este fenómeno se le conoce como transición de fase. A cada fase se le identifica con la intensidad de la interacción entre las partículas del sistema, la cual suele estar descrita en términos del valor de algún parámetro de orden. Sin embargo, este cambio súbito (representado con una curva en el plano  $T - \mu$  puede *terminar* en un cierto punto. A este punto se le llama punto final crítico (CEP).

En este trabajo se investigará el diagrama de fases de la cromodinámica cuántica empleando al modelo de Nambu-Jona-Lasinio extendido con el bucle (loop) de Polyakov con el fin de evitar los

problemas que ocurren al tratar de resolver el problema mediante primeros principios. En particular, lattice QCD ha tenido grandes dificultades al tratar de describir la materia que interactúa fuertemente a valores altos del potencial químico por el problema del signo [25]. Por este motivo, las teorías efectivas de la QCD son importantes para conocer los aspectos de la interacción fuerte en estas regiones del diagrama de fases. Fenomenológicamente esto es importante porque este diagrama puede ser usado para estudiar algunos problemas en cosmología, astrofísica y en colisiones de iones pesados a altas energías [26-29]. Por ejemplo, se teoriza que una fase nueva de la materia nuclear donde la simetría quiral está (parcialmente) restaurada y los quarks están desconfiados se debe poder observar a grandes temperaturas, a esta fase se le llama plasma de quarks y gluones (QGP) [30].

## 5 – Formalismo del modelo de Nambu-Jona-Lasinio extendido con el loop de Polyakov

### 5.1 – Modelo de Nambu-Jona-Lasinio

En 1961, Yoichiro Nambu y Giovanni Jona-Lasinio propusieron un modelo para describir las interacciones nucleares entre los protones y neutrones [31]. En ese entonces la teoría de los quarks no se había propuesto todavía, por lo que los campos que aparecían en la lagrangiana que ellos trataron eran los campos del protón y del neutrón. Más adelante, cuando se propuso el modelo de quarks, el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) se adaptó para describir a las interacciones de los quarks presentes dentro de estos nucleones [32].

Una de las ventajas más importantes del modelo NJL es su capacidad para describir los fenómenos relacionados con la simetría quiral [33]. Aunque el modelo NJL no es renormalizable ni fundamental, es decir, es una teoría efectiva; es una aproximación razonable para la QCD a bajas energías [34]. La razón por la que el modelo NJL no es renormalizable es por la interacción entre los quarks: en este modelo, una interacción entre cuatro quarks se trata de manera puntual, por lo que hay una divergencia en el ultravioleta al tratar de calcular las energías. Esto nos obliga a usar un esquema de regularización basado en un parámetro de corte de momentos (cutoff), los momentos más altos que este parámetro no se considerarán en los cálculos, argumentando que es necesario conocer nueva física ajena al modelo para tomar a estos momentos en consideración [35]. La lagrangiana del modelo NJL es la siguiente:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi + \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^2 \right] \quad (65)$$

Los términos cuadráticos de (65) son invariantes ante transformaciones quirales (52) y de isospín (43)<sup>A10</sup>, por lo que la lagrangiana (65) es un buen punto de partida para entender las propiedades quirales y de isospín de la QCD sin tratar con una teoría tan complicada como lo es la QCD, al menos directamente.  $G$  es la constante de acoplamiento del modelo. Cabe mencionar que el término de masa  $\bar{\psi}\hat{m}\psi$  rompe la simetría quiral y también rompe la simetría de isospín si  $\hat{m}$  no es un múltiplo de la matriz identidad, por lo que, si tratamos el caso donde  $\hat{m} \neq 0$ , recuperamos las ‘simetrías aproximadas’ propias de la QCD.  $D_\mu$  es la derivada covariante de la QCD (38) en términos de  $A_\mu$  (29).

#### 5.1.1 – Adición del loop de Polyakov al modelo NJL

Una desventaja fenomenológica del modelo NJL es que el fenómeno de confinamiento de color no aparece naturalmente en la teoría [36]. Los gluones tampoco son considerados en el modelo de NJL, ya que la lagrangiana (65) describe fermiones únicamente. Para resolver esto se recurre al campo de los gluones  $A_\mu$  (29). De la misma manera que con el campo electromagnético (26), se debe de elegir una norma para eliminar los grados de libertad redundantes en estas variables de campo. En este trabajo utilizamos la norma de Polyakov:

$$A_\mu = \delta_\mu^0 A_0 = A_0 \rightarrow iA_0 = A_4 \quad (66)$$

La condición de norma (66) se interpreta como un campo gluónico estacionario, o bien, como el análogo de la interacción fuerte al potencial electrostático. Además, se hace una rotación de Wick



para el campo, de tal forma que el cuadvivector  $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$  se vuelva un vector euclidiano de cuatro componentes  $A_i = \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$ , donde  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

A partir de todas las maneras permitidas en la QCD para la polarización del propagador gluónico, es posible obtener un operador de correlación invariante de norma [37]:

$$C(\vec{x}) = \langle \Phi(\vec{x}), \Phi^*(0) \rangle = \langle \Phi^*(\vec{x}), \Phi(0) \rangle \quad (67)$$

(67) se puede interpretar físicamente como el cambio en la energía del sistema al agregar una pareja quark-antiquark a una posición  $\vec{x}$  uno del otro. Llamamos al argumento  $\Phi(\vec{x})$  el loop de Polyakov:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \left( e^{i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau)} \right) \right\} \quad (68)$$

El exponente  $i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau)$  es una matriz en el espacio del color. La variable de integración  $\tau$  es el tiempo imaginario después de la rotación de Wick  $t \rightarrow \tau = it$  y el operador de orden de camino  $\mathcal{P}$  es necesario porque los sumandos infinitesimales del integrando no son conmutables, es decir,  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ . Además, ordenar cada factor resultante de cada sumando infinitesimal en orden ascendente asegura que el loop de Polyakov sea invariante de norma, siempre y cuando  $A_4(\vec{x}, \tau)$  sea periódica en  $\tau$  [38]. La  $\beta$  que sirve de límite de integración se asocia con la razón de cambio de la entropía con respecto al calor, que es igual a  $\frac{1}{k_B T}$  (59).

La expresión (68) es análoga al loop de Wilson, pero en un formalismo de tiempo imaginario en lugar del tiempo real que usó Wilson [23,37,39,40]. De la misma manera se obtiene también el conjugado de (68):

$$\Phi^*(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \left( e^{-i \int_0^\beta d\tau A_4^*(\vec{x}, \tau)} \right) \right\} \quad (69)$$

Usando la norma de Polyakov (66) se asegura que el loop de Polyakov (68) y su conjugado (69) sean números reales. Los loops de Polyakov van a ser importantes en este trabajo, ya que van a actuar como parámetros de orden relacionados con el desconfiamento: los valores de  $\Phi$  y  $\Phi^*$  están directamente relacionados con el rompimiento de la simetría central  $Z_3$  de la QCD [41,42]. Físicamente,  $\Phi$  y  $\Phi^*$  se pueden interpretar como la energía necesaria para añadir un quark o un antiquark, respectivamente, con masa infinita (estáticos) al sistema [43].

Ahora que ya se han definido los loops de Polyakov (68) y (69) para describir la interacción de los gluones, es posible extender la lagrangiana de NJL (65) mediante un potencial efectivo dependiente de los loops de Polyakov (modelo NJL extendido con el loop de Polyakov, o PNJL para abreviar):

$$\mathcal{L}_{PNJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi + \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^2 \right] - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \quad (70)$$

En el formalismo de la teoría térmica de campos, el acoplamiento entre los quarks y los gluones es variable con respecto a la temperatura, por lo que se incluye esta dependencia en el potencial efectivo  $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ .  $G$  es la constante de acoplamiento de la teoría y tiene dimensiones de masa a la -2. En cuanto a la forma que toma  $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ , la forma en la que los quarks interactúan con los gluones es aún desconocida para nosotros. Como los quarks se encuentran confinados dentro

de los hadrones, encontrar una expresión matemática que describa las interacciones de éstos ha sido imposible hasta hoy. Proponer una forma inversa de la distancia para  $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$  como se ha hecho con las demás fuerzas es inútil, ya que, hasta donde se sabe, la intensidad de la interacción fuerte entre los quarks y los gluones aumenta con la distancia.

## 5.2 – Aproximación de campo medio

La interacción descrita por la lagrangiana de Nambu-Jona-Lasinio extendida con el loop de Polyakov (70) sigue siendo demasiado complicada de resolver porque es no lineal. Una forma de simplificar la lagrangiana (70) es mediante la aproximación de campo medio. En esta aproximación, la interacción puntual entre cuatro quarks propia del modelo de NJL se reinterpreta como una interacción puntual entre un quark y el valor esperado del campo medio, reduciendo un sistema de N cuerpos que interaccionan entre todos ellos a un sistema de N cuerpos que interaccionan independientemente con el campo medio cada uno (Fig. 3).

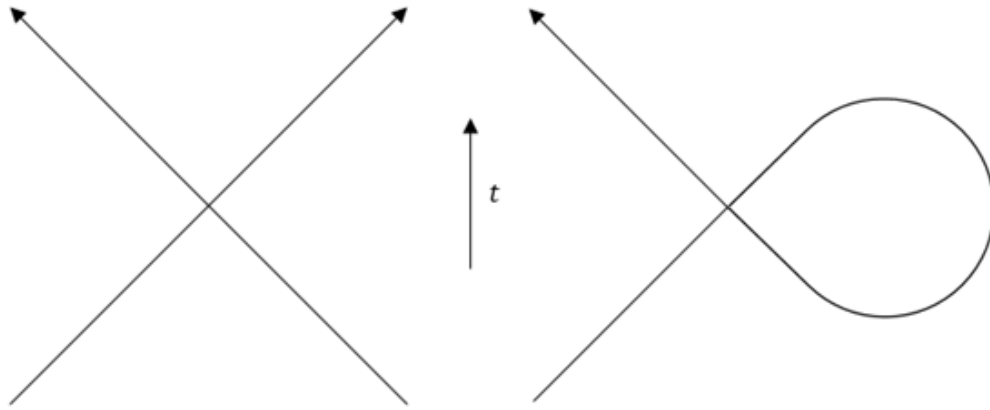


Figura 3: Interacción puntual de cuatro quarks en el modelo NJL contra la interacción con el campo medio.

Para linealizar la lagrangiana (70) se toma el valor esperado en el vacío de los términos  $\bar{\psi}\psi$  y  $\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi$  que están elevados al cuadrado en (70). En promedio, la diferencia de estos campos y su valor esperado es igual a cero:

$$\bar{\psi}\psi - \langle\bar{\psi}\psi\rangle = \bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi - \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle = 0 \quad (71)$$

Elevando las igualdades (71) al cuadrado y resolviendo para los términos cuadráticos en (70) se puede obtener una regla de transformación que linealiza estos términos:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle\langle\bar{\psi}\psi\rangle - \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 \\ (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^2 &\rightarrow 2\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle - \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle^2 \end{aligned} \quad (72)$$

Sustituyendo (72) en (70) se tiene la lagrangiana en la aproximación del campo medio, la cual es lineal y, por lo tanto, mucho más fácil de tratar:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MFA} = &\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi + G[\langle\bar{\psi}\psi\rangle(\bar{\psi}\psi) + \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)] \\ &- \frac{G}{2}[\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 + \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle^2] - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \end{aligned} \quad (73)$$

Físicamente, trabajar con una teoría lineal (73) donde cada campo interactúa independientemente con el campo medio (Fig. 3) es equiparable a trabajar en un sistema que se encuentra en equilibrio térmico en la mecánica estadística clásica, ya que lo que se busca es que el valor esperado del vacío minimice al gran potencial termodinámico [44]. En la lagrangiana (73) los estados combinados  $(\bar{\psi}\psi)$  y  $(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)$  son singletes en el color. En (73), el término de masa  $\bar{\psi}\hat{m}\psi$  rompe explícitamente la simetría quiral, pero se puede decir lo mismo de cualquier término que tenga la forma  $\bar{\psi}C\psi$  donde  $C$  es cualquier número complejo. Los términos de la lagrangiana (73) que tienen esta estructura, además del término de masa, están contenidos en  $G[\langle\bar{\psi}\psi\rangle(\bar{\psi}\psi) + \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)]$ . Para identificar más fácilmente estos términos se recurrirá al uso de ‘campos bosónicos de apoyo’ que no son más que un múltiplo real de los valores esperados (números complejos) de los estados  $(\bar{\psi}\psi)$  y  $(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)$ . De esta manera definimos a  $\sigma$  y a  $\pi^b$ :

$$\begin{aligned}\sigma &\equiv G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \\ \pi^b &\equiv G\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi\rangle\end{aligned}\quad (74)$$

Llamaremos ‘lagrangiana bosonizada’ a la lagrangiana del campo medio (73) expresada en términos de los campos bosónicos de apoyo (74):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m} + \sigma + i\gamma_5\pi^b\tau^b)\psi - \frac{1}{2G}[\sigma^2 + (\pi^b)^2] - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \quad (75)$$

### 5.3 – Restauración parcial o aproximada de la simetría quiral

En este trabajo vamos a tomar la siguiente consideración: las masas de los dos quarks van a ser tratadas como iguales, es decir, vamos a trabajar con una lagrangiana con simetría de isospín. Esta simplificación no está muy alejada de la realidad [17], además de que los resultados obtenidos que conciernen a las cantidades sobre las cuales está basado el diagrama de fases no cambian en ninguna de las condiciones en las que este trabajo es aplicable<sup>13</sup>.

Esta consideración tiene dos implicaciones en la lagrangiana (75): la matriz de masas  $\hat{m}$  es un múltiplo de la matriz identidad, por lo que el término  $\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m + \sigma + i\gamma_5\pi^b\tau^b)\psi$  con  $m$  constante es adecuado para describir a cualquiera de los dos sabores de quarks, así que la lagrangiana total sería la suma de dichos términos equivalentes para cada sabor. La otra implicación es que, para sistemas con simetría de isospín,  $\pi^b$  (74b) es igual a cero [41]. Tomando esto en cuenta, la lagrangiana del modelo PNJL en el formalismo del campo medio es la siguiente:

$$\mathcal{L} = \sum_{f=u,d} \bar{\psi}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m + \sigma)\psi_f - \frac{\sigma^2}{2G} - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \quad (76)$$

$m = m_u = m_d$  es la masa para cada sabor, y como el argumento de la suma es el mismo para cada sabor, el resultado de dicha suma es igual al argumento multiplicado por el número de sabores  $N_f$ , que es igual a 2 en este trabajo.

Algo importante de la lagrangiana (76) es que existe un término  $\sigma$  que se adiciona a la masa por tener la misma dimensión que ésta. Como definimos en (72) y en (74), el origen de este término

13. Alguna vez hicimos un cálculo que consideraba a las masas de los quarks diferentes entre ellas. El Dr. Morones argumentó que tomar esa consideración era innecesario, pero no se opuso a que hiciéramos el cálculo. Tomando en cuenta la resolución con la que calculamos los datos al final, los resultados para  $m_u \neq m_d$  eran indistinguibles a los de  $m_u = m_d$  hasta las cifras significativas que tomamos en cuenta. Sin embargo, el tiempo de cálculo aumentaba considerablemente (más del cuádruple). Vaya que el Dr. Morones tenía razón.

está en la interacción de los quarks con el campo medio, por lo que su existencia depende de los parámetros termodinámicos de la teoría. Si la energía cinética de los quarks es relativamente baja, esperamos que las interacciones entre ellos sean considerablemente altas en comparación con sus masas, cosa opuesta que en el caso del QGP, donde las energías cinéticas son más altas y las interacciones se vuelven despreciables.

Si en la teoría (76) tomamos que la masa corriente de los quarks (independiente de las interacciones) es igual a cero, es decir, tomamos el límite quiral, el término generado a partir de la interacción  $\bar{\psi}\sigma\psi$  rompe la simetría quiral. A este término se le conoce como masa dinámicamente generada, y este término rompe espontáneamente la simetría quiral de (76). A diferencia del rompimiento explícito de la masa corriente  $m$ , la simetría quiral rota espontáneamente (en el límite quiral) se puede restaurar cuando las condiciones termodinámicas del sistema permiten que el potencial generado por la interacción vuelva a ser simétrico con respecto al vacío.

En el modelo de PNJL en el límite quiral, el potencial tiene una forma análoga al modo Nambu-Goldstone en la teoría  $\varphi^4$  (Fig. 2), pero con los campos  $\sigma$  y  $\pi^b$  como abscisas. Al aumentar la temperatura (o el potencial químico), esperamos que la forma del potencial se transforme en una que sea análoga al modo Wigner-Weyl de la teoría  $\varphi^4$  (Fig. 1), es decir, esperamos observar una restauración de la simetría quiral, o bien, que el valor esperado de  $\sigma$  se vaya a cero. En el caso donde la masa corriente de los quarks  $m$  es diferente de cero, esperamos ver este mismo efecto, aunque de una manera parcial o incompleta. Para estudiar todos estos fenómenos necesitamos obtener una expresión para el gran potencial termodinámico (64) para el modelo de PNJL.

#### 5.4 – Formalismo de tiempo imaginario

Para analizar a la lagrangiana (76) en el marco de la teoría térmica de campos, recurrimos a la función de partición (63). Se puede obtener una expresión cuántica de campos análoga a (63). A partir de esta expresión es posible obtener todas las variables termodinámicas de un sistema de partículas que interactúan fuertemente. Proponemos una función de partición para una teoría térmica de campos en una representación relativistamente covariante:

$$Z = \int \prod_j (D\varphi_j) e^{i \int d^4x (\mathcal{L} - \mu N)} \quad (77)$$

El índice  $j$  enlista los campos diferentes, que en el caso de la lagrangiana (76) son solamente  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ , ya que los campos bosónicos de apoyo y los loops de Polyakov son técnicamente valores esperados. El número de partículas  $N = \psi^\dagger\psi$  no distingue entre sabores, por lo que solamente hay un potencial químico para todo el sistema:  $\mu_u = \mu_d = \mu$ . Sustituyendo (76) en (77), separando las componentes temporales y evaluando los operadores de momento lineal en los de derivación se tiene:

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int dt \int d^3x \left\{ [\bar{\psi}(\gamma_0(p_0 - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))\psi] - \frac{\sigma^2}{2G} - U(\Phi, \Phi^*, T) \right\}} \quad (78)$$

De la expresión (78) llama la atención la integración con respecto al tiempo. Para tratar esta integral, se puede hacer la misma prescripción que se hizo con los loops de Polyakov (68,69), haciendo una rotación de Wick  $t \rightarrow \tau = it$  e integrando desde 0 hasta  $\beta$ . En cuanto a la componente temporal del cuadrimomento, tomaremos los polos de la distribución estadística que siguen los quarks, es decir, la distribución de Fermi-Dirac:

$$t = -i\tau$$

$$p_0 = -i\omega_n = -i(2n + 1)\pi \frac{k_B T}{\hbar} \quad (79)$$

La integral de (78) con respecto a  $\tau$  (79a) se integrará desde 0 hasta  $\beta$ , tal y como en (68,69):

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \cdot [\bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))\psi]} e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + u(\Phi, \Phi^*, T) \right]} \quad (80)$$

Comparando (80) con (63) nos podemos enfocar en un solo término para analizar las propiedades dimensionales de  $\beta$ . En el término dependiente del potencial químico tenemos  $\int_0^\beta d\tau \int d^3x \cdot [\bar{\psi}(\gamma_0\mu)\psi]$  para (80) y  $\frac{\mu N}{k_B T}$  para (63). De la lagrangiana de Dirac (24) sabemos que, en unidades naturales, los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  tienen dimensión de masa  $\frac{3}{2}$  cada uno, ya que la lagrangiana tiene que tener dimensión de masa 4 para que la acción sea adimensional. Tomando en cuenta también que  $N = \bar{\psi}(\gamma_0)\psi$ , llegamos a la conclusión de que  $\beta$  tiene que tener la misma dimensión que  $(k_B T)^{-1}$ , o bien,  $T^{-1}$  en unidades naturales. Con esto se deduce que hay una proporción directa entre el tiempo imaginario y (el inverso de) la temperatura.

También es posible visualizar esta relación de la siguiente manera: tanto la ecuación de Schrödinger (2) como la ecuación de difusión presentan una segunda derivada en las coordenadas espaciales (laplaciano) y una primera derivada con respecto al tiempo. Si en la ecuación de Schrödinger hiciéramos una rotación de Wick, obtendríamos una ecuación diferencial parcial con coeficientes reales con la misma forma matemática que la ecuación de difusión, con un coeficiente de difusividad térmica equivalente (en unidades naturales) a  $\frac{1}{2m}$ .

Las frecuencias  $\omega_n$  (79b) se llaman frecuencias de Matsubara, y en el formalismo de tiempo imaginario estas frecuencias relacionan los polos de la distribución de Fermi-Dirac (existe una expresión par para los polos de la distribución de Bose-Einstein, que no usaremos en este trabajo) con la energía [45], que es la componente temporal del momento lineal, y que tiene una dependencia con éste mediante la relación de energía-momento de Einstein (3).

Con la expresión para la función de partición del modelo PNJL en la aproximación de campo medio (80) es posible obtener la expresión para el gran potencial termodinámico (64). Para esto, necesitamos calcular la transformada de Fourier de los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  para pasarlos al espacio de momentos:

$$\psi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{-ip_\mu x^\mu} \psi(p^\mu)$$

$$\bar{\psi}(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{ip_\mu x^\mu} \bar{\psi}(p^\mu) \quad (81)$$

Las sumas (81) son sobre índices de cuadrimento  $p = \langle p_0, \vec{p} \rangle$ . Después de separar las componentes temporales de las contracciones en (81) y de hacer la rotación de Wick se vuelven a usar las frecuencias de Matsubara para expresar la componente temporal del momento en (81). Ya que los índices del momento y de las frecuencias de Matsubara son independientes entre los dos campos (81), se usan dos parejas de índices independientes:

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} e^{\frac{1}{V} \sum_{n'} \sum_{\vec{p}'} \sum_n \sum_{\vec{p}} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ e^{-i(\tau(\omega_{n'} - \omega_n) + (\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x})} \bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))\psi \right]} e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \right]} \quad (82)$$

En (82), el factor  $\bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))\psi$  no depende de las coordenadas espaciales ni del tiempo imaginario porque los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  están en el espacio de momentos (81). Por lo tanto, el único factor que se integra con respecto a estas variables es  $e^{-i(\tau(\omega_{n'} - \omega_n) + (\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x})}$ . Esta integral es antisimétrica con respecto a los intercambios  $n' \leftrightarrow n$  y  $\vec{p}' \leftrightarrow \vec{p}$ .

Esto implica que el integrando es diferente de cero únicamente cuando  $n' = n$  y  $\vec{p}' = \vec{p}$ . Ya que la integral euclidiana (82) es en todo el volumen, esta integral es divergente. Sin embargo, al expresar esta cantidad en términos del volumen total, se vuelve finita. Esto facilitará los cálculos al hacer tender a infinito el volumen. Otra implicación de esto es que los índices  $n'$  y  $\vec{p}'$  se vuelven redundantes. En cuanto al integrando de  $\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \right]$ , no existe ninguna dependencia de las coordenadas espaciales, del tiempo imaginario, ni de los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ . Por lo tanto, se simplifica la función de partición (82):

$$Z = e^{-\beta V \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \right]} \int D\psi D\bar{\psi} e^{\beta \sum_n \sum_{\vec{p}} [\bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))\psi]} \quad (83)$$

Observando (83) nos damos cuenta de que el factor  $(\gamma_0(-i\omega_n - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))$  se puede expresar en términos del propagador de Dirac para un quark de masa  $M = m - \sigma$ . A  $M$  se le llama la masa constitutiva del quark, y en términos generales es la suma de la masa corriente (intrínseca) y la masa dinámicamente generada. El inverso del propagador de Dirac es el siguiente [41]:

$$D^{-1} = -i\gamma^\mu D_\mu + \gamma_0\mu + M = i\gamma_0\omega_n - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma_0(\mu - igA_4) + M \quad (84)$$

Notamos que (84) aparece multiplicado por -1 entre los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  en el espacio de momentos en (83). Desarrollamos (84) en términos de las matrices de Dirac (20):

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} i\omega_n + \mu - igA_4 + M & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & i\omega_n + \mu - igA_4 + M & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \end{pmatrix} \quad (85)$$

Las matrices de Pauli  $\vec{\sigma}$  son hermitianas, por lo tanto, la matriz (85) es diagonalizable. Se calcula el determinante de (85)<sup>A11</sup>:

$$\text{Det}\{D^{-1}\} = (M^2 - (i\omega_n + \mu - igA_4)^2 + p^2)^2 \quad (86)$$

Para diagonalizar (85) se emplea una transformación unitaria. Sea  $P$  una matriz unitaria, es decir,  $P^\dagger = P^{-1}$ , definimos una regla de transformación:

$$A \rightarrow A_D = P^\dagger A P \quad (87)$$

Los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  también se transforman unitariamente:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = P\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}P^\dagger \end{aligned} \quad (88)$$

Como al aplicar las transformaciones (88) en (83) la matriz dada por (85) se diagonaliza, el resultado de la multiplicación es una suma sobre el producto de cada componente:

$$\bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu + igA_4) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - (m - \sigma))\psi = -\bar{\psi}\text{Diag}\{D^{-1}\}\psi = -\psi^\dagger\gamma_0\text{Diag}\{D^{-1}\}\psi \quad (89)$$

Para integrar (83), se toma un diferencial para cada componente de  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  en el espacio de isospín. Es importante mencionar que estas variables no son conmutables, por lo que el orden en el que aparecen los diferenciales es importante. En este trabajo, estos campos se tratan como variables de Grassmann. Con este tratamiento, la función de partición (83) se simplifica:

$$Z = e^{-\beta V \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + u(\Phi, \Phi^*, T) \right]} \prod_n \prod_{\vec{p}} \text{Det}\{\text{Diag}\{\beta D^{-1}\}\} \quad (90)$$

Como  $D^{-1}$  se diagonalizó mediante una transformación unitaria, entonces  $\text{Det}\{\text{Diag}\{\beta D^{-1}\}\} = \text{Det}\{\beta D^{-1}\} = \beta^4 \text{Det}\{D^{-1}\}$  porque  $D^{-1}$  es una matriz de  $4 \times 4$ . Sustituyendo (86) y (3) en (90) se obtiene la expresión final para la función de partición:

$$Z = e^{-\beta V \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + u(\Phi, \Phi^*, T) \right]} \prod_n \prod_{\vec{p}} \beta^4 (E_p^2 - (i\omega_n + \mu - igA_4)^2)^2 \quad (91)$$

Se usa  $E_p$  para representar a la energía en términos del trivector de momento lineal  $\vec{p}$ . Sustituyendo (91) en (64) (en unidades naturales), encontramos el gran potencial termodinámico para el modelo de PNJL:

$$\Omega = V \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + u(\Phi, \Phi^*, T) \right] - T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left( \frac{E_p^2 + (\omega_n - i(\mu - igA_4))^2}{T^2} \right)^2 \quad (92)$$

La suma de las frecuencias de Matsubara  $\omega_n$  (79b) es invariante ante el intercambio  $n \rightarrow -n$ , ya que en la suma en  $n$  se toman en cuenta todos los números enteros. Además, las frecuencias de Matsubara en sí son impares, por lo que  $-\omega_{n-1} = \omega_{-n}$ . El desplazamiento en  $-1$  de  $-\omega_{n-1}$  no figura en la suma de  $n$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ , por lo que, si  $\omega_n$  sigue estando dentro de la suma, podemos enunciar que  $\omega_n = -\omega_{-n} = -\omega_n^{A12}$ .

Es conveniente separar al argumento cuadrado del logaritmo (92) en sus frecuencias positivas y negativas, ya que en un sistema que tenga tanto partículas como antipartículas presentes, cada signo para la frecuencia representará a alguna de éstas. Después de separar (92) en sus frecuencias positivas y negativas, tenemos la expresión:

$$\Omega = V \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + u(\Phi, \Phi^*, T) \right] - T \sum_n \sum_{\vec{p}} \left[ \ln \left( \frac{(E_p - \mu + igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) + \ln \left( \frac{(E_p + \mu - igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \right] \quad (93)$$

Para reducir las sumas de (93) en  $n$ , aplicamos la relación de Matsubara [46]:

$$\sum_n \ln \left( \frac{\alpha^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) = \frac{\alpha}{T} + 2 \ln \left( 1 + e^{-\frac{\alpha}{T}} \right) \quad (94)$$

Finalmente, para reducir las sumas en  $\vec{p}$ , consideramos un cubo donde imponemos condiciones de frontera periódicas  $\psi(0) = \psi(L)$  para cada componente del espacio de coordenadas.  $L$  es la longitud de la arista del cubo y para cada dimensión la función de onda en el espacio de configuración se obtiene con la transformada inversa de Fourier (81)  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_p e^{-ipx} \psi(p)$ . Las sumas sobre los momentos son discretas, pero se puede tomar el límite al continuo aplicando la condición de periodicidad sobre el campo  $\psi$ :

$$e^{-ip(0)} = e^{-ip(L)} \rightarrow pL = 2n\pi \quad (95)$$

La suma discreta sobre los momentos se puede interpretar como una suma en  $n$  para cada componente, por lo tanto, al pasar a la suma en  $p$  al límite al continuo, el diferencial de  $p$  equivale al incremento en  $n$ , que es igual a 1. La integral para cada una de las tres componentes del momento se vuelve igual a lo siguiente:

$$\int L dp = 2\pi \quad (96)$$

Usando la equivalencia (95) se obtiene la relación de la suma de los momentos en las tres dimensiones con el límite al continuo de cada dimensión (96):

$$\sum_{\vec{p}} f(\vec{p}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3p f(\vec{p}) \quad (97)$$

En (97),  $d^3p$  representa a la integración en todo el espacio de momentos, pero se obvia la notación para las cantidades vectoriales  $\vec{p}$  porque las cantidades en los integrandos son siempre pares. Esto implica que las funciones dependen de  $p^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$ , que es una cantidad escalar.

Como el volumen de un cubo es igual a  $L^3$ , al momento de tomar la aproximación al continuo el volumen se vuelve infinito, por lo que técnicamente la integral (97) es divergente, pero de todas maneras se deja en términos del volumen por la misma razón que en (82,83). Usando las relaciones (94) y (97) en (93) tenemos la expresión definitiva para el gran potencial termodinámico:

$$\Omega = V \left[ \frac{\sigma^2}{2G} + u(\Phi, \Phi^*, T) \right] - 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p - \mu + igA_4}{T}} \right) + T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p + \mu - igA_4}{T}} \right) \right] \quad (98)$$

En (98), el término de la integral lleva un factor de 2, que representa la degeneración del espín. Esta degeneración ya se ha tomado en cuenta al usar las frecuencias de Matsubara para los fermiones. La forma de agregar la degeneración del sabor y del color a (98) es multiplicar directamente  $N_f$  en alusión a la simetría de isospín; en cuanto al color,  $A_4$  representa a una matriz en el espacio de color (29) por lo que se debe tomar la traza en el color de los términos donde aparezca  $A_4$  y multiplicar todo lo demás por  $N_c$ .

El gran potencial termodinámico (98) es directamente proporcional al volumen, el cual tiende a infinito en los cálculos hechos en este trabajo. Siendo (98) extensivo, es útil definir al gran potencial termodinámico por unidad de volumen, el cual es una cantidad intensiva, para hacer los cálculos de



las propiedades termodinámicas del sistema. Tomando en cuenta todo esto, expresamos al gran potencial termodinámico por unidad de volumen:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{V} = & \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \\ & - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}} e^{-\frac{igA_4}{T}} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}} e^{\frac{igA_4}{T}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (99)$$

Cabe mencionar que algunos autores llaman al gran potencial termodinámico por unidad de volumen (99) simplemente 'potencial termodinámico' y/o lo denotan únicamente con el símbolo  $\Omega$  [36,40-42,46]. Las trazas que aparecen se calculan en el espacio de color. En una teoría de Yang-Mills como la cromodinámica cuántica, uno tiene la libertad de definir a  $A_4$  como una matriz diagonal en el espacio del color [47] y para la aproximación del campo medio en la norma de Polyakov (66), el término  $e^{\frac{igA_4}{T}}$  es equivalente al argumento de la traza que aparece en el loop de Polyakov (68).

### 5.5 – Influencia del loop de Polyakov en el gran potencial termodinámico

En la representación diagonal del campo gluónico estacionario (66) en el espacio de color, es posible representar éste como una combinación lineal de los generadores de  $SU(3)$  que sean diagonales, es decir,  $\tau_3$  y  $\tau_8$  (30c,30h,40).

$$A_4 = a_3 \tau_3 + a_8 \tau_8 \quad (100)$$

Las constantes de parametrización  $a_3$  y  $a_8$  pueden ser dos números reales cualesquiera, lo cual trae como consecuencia que el loop de Polyakov (68) sea real bajo la norma de Polyakov (66). Expresando  $A_4$  en forma de matriz se tiene:

$$A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a_8}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (101)$$

El término  $e^{\frac{igA_4}{T}}$  es una función analítica cuyo argumento es una matriz diagonal, por lo que es posible calcular el resultado de dicha función para cada elemento de (101), es decir, la expansión en series de potencias de cada elemento no se mezclará con los demás al estar la matriz diagonalizada:

$$e^{\frac{igA_4}{T}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{ig\left(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-ig\left(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-ig\left(\frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)}{T}} \end{pmatrix} \quad (102)$$

Algo que se puede apreciar en (101), es que la traza de la matriz es igual a cero, por lo que el determinante de (102) es igual a 1. Además, la suma de los exponentes de los elementos  $e^{\frac{igA_4}{T}}_{11}$  y  $e^{\frac{igA_4}{T}}_{22}$  es igual al exponente del elemento  $e^{\frac{igA_4}{T}}_{33}$  y (102) toma los valores del centro de  $SU(3)$  cuando las siguientes cantidades son números enteros:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\sqrt{3}g}{4\pi T}(\sqrt{3}a_3 + a_8) \\ \alpha_2 &= -\frac{\sqrt{3}g}{4\pi T}(\sqrt{3}a_3 - a_8) \\ \alpha_3 &= -\frac{\sqrt{3}g}{4\pi T}(2a_8) = -(\alpha_1 + \alpha_2)\end{aligned}\quad (103)$$

Regresando a los términos de las trazas en (99), ya que los argumentos son analíticos, se puede hacer lo mismo que se hizo en (102) para expresarlos en forma de matriz diagonal. Las trazas serán iguales a la suma de los elementos de estas matrices, ya que no se mezclarán con los demás por ser una matriz diagonal, es decir,  $\text{Tr}\{f(A)\} = [f(A)]_{11} + [f(A)]_{22} + [f(A)]_{33}$ .

$$\begin{aligned}\text{Tr}\left\{T\ln\left(1 + e^{-\frac{E_p\bar{\tau}\mu}{T}}e^{\mp\frac{igA_4}{T}}\right)\right\} \\ = T\left[\ln\left(1 + e^{-\frac{E_p\bar{\tau}\mu}{T}}e^{\mp\frac{ig(A_4)_{11}}{T}}\right) + \ln\left(1 + e^{-\frac{E_p\bar{\tau}\mu}{T}}e^{\mp\frac{ig(A_4)_{22}}{T}}\right) \right. \\ \left. + \ln\left(1 + e^{-\frac{E_p\bar{\tau}\mu}{T}}e^{\mp\frac{ig(A_4)_{33}}{T}}\right)\right]\end{aligned}\quad (104)$$

Simplificando (104) algebraicamente, es posible obtener estas expresiones en términos de  $A_4^{A13}$ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}\left\{T\ln\left(1 + e^{-\frac{E_p\bar{\tau}\mu}{T}}e^{\mp\frac{igA_4}{T}}\right)\right\} \\ = T\ln\left[1 + e^{-\frac{E_p\bar{\tau}\mu}{T}}\text{Tr}\left\{e^{\mp\frac{igA_4}{T}}\right\} + e^{-\frac{2(E_p\bar{\tau}\mu)}{T}}\text{Tr}\left\{e^{\pm\frac{igA_4}{T}}\right\} + e^{-\frac{3(E_p\bar{\tau}\mu)}{T}}\right]\end{aligned}\quad (105)$$

Las trazas en (105) equivalen a los loops de Polyakov (68) y (69) multiplicados por el número de colores  $N_c$ , el cual es igual a 3. Conociendo esto, expresamos al gran potencial termodinámico por unidad de volumen (99) en términos de los loops de Polyakov:

$$\begin{aligned}\frac{\Omega}{V} &= \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \\ &\quad - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{N_c} \ln\left(1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{N_c} \ln\left(1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}}\right) \right]\end{aligned}\quad (106)$$

Los seis términos exponenciales de (106) representan a los estados con uno, dos o tres quarks; y a los estados con uno, dos o tres antiquarks, respectivamente [42]. Es importante notar que, para el caso del vacío, es decir, cuando  $\Phi$  y  $\Phi^*$  son iguales a cero, los términos con uno o dos quarks o

antiquarks se anulan, y solamente sobreviven los términos de tres quarks. Esto es consistente con la estructura de los bariones que nosotros podemos observar en la naturaleza.

## 5.6 – Construcción del diagrama de fases

### 5.6.1 – Ecuaciones de gap

Para obtener una descripción para cualquier estado termodinámico representado por una pareja de parámetros termodinámicos libres  $(\mu, T)$  necesitamos minimizar al gran potencial termodinámico por unidad de volumen (106) con respecto a los campos medios  $\sigma$ ,  $\Phi$  y  $\Phi^*$  (68,69,74a). Esto se logra mediante el sistema de ecuaciones de gap:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} &= 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} &= 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi^*} &= 0\end{aligned}\tag{107}$$

El sistema de ecuaciones (107) es autoconsistente, es decir, las tres variables de derivación aparecen fuera de la integral en (106) y también dentro de ella (3,86). Los parámetros libres  $T$  y  $\mu$  de los cuales depende el gran potencial termodinámico por unidad de volumen (106) forman un plano (plano  $T - \mu$ ) en el cual se resolverá autoconsistentemente el sistema de ecuaciones (107) para una cierta cantidad de coordenadas  $(\mu, T)$ . Dado que estas dos cantidades pueden variar continuamente, se hará un mallado en el cual se hará variar a  $T$  y  $\mu$  con una cierta resolución, y se encontrarán los valores de los tres parámetros de orden para cada coordenada.

En el análisis que se hará en este trabajo, estas tres variables de derivación se considerarán como parámetros de orden. En el caso de  $\sigma$ , el criterio sobre el cual se interpreta la existencia de una fase o de otra en el sistema termodinámico es la presencia o ausencia de simetría quiral. En el modelo PNJL, la transformación quiral (52) no deja invariante a la lagrangiana (70), ya que, de igual manera que en la QCD, la existencia del término de masa asegura que esta simetría no se presente en la naturaleza.

Una forma sencilla de arreglar esto es tomar las masas corrientes de los quarks como cero para ambos sabores. Ya que las masas corrientes de los quarks son despreciables en comparación con sus masas constitutivas [17], volver a estas masas cero conlleva a un análisis razonablemente cercano con lo que uno esperaría ver en la naturaleza. A esta aproximación se le conoce como límite quiral.

En el límite quiral, la ecuación de gap (107a) corresponde al parámetro de orden relacionado con la simetría quiral de una manera exacta. Ya que la temperatura y el potencial químico son parámetros libres de la teoría, dado cualquier par de éstos existe una solución trivial  $\sigma = 0$  que resuelve la ecuación de gap y es posible que exista una solución no trivial  $\sigma \neq 0$  que también resuelva esta ecuación. El hecho de que esta solución no trivial exista o no depende de la temperatura y del potencial químico.

Las soluciones que van a ser interesantes para resolver este problema son las soluciones no triviales, ya que podemos asociarlas con las soluciones que minimizan el potencial en el modo Nambu-

Goldstone de la teoría  $\varphi^4$  (Fig. 2). Ya que las ecuaciones de gap son derivadas, éstas solamente indican la existencia de un extremo, y no necesariamente un mínimo. En caso donde existan tanto soluciones triviales como no triviales, esto es análogo al modo Nambu-Goldstone de la teoría  $\varphi^4$ , donde las soluciones triviales indican el máximo (que es inestable) y las soluciones no triviales indican el mínimo. En el caso donde únicamente existan las soluciones triviales, esto es análogo con el modo Wigner-Weyl (Fig. 1), donde el único extremo que existe es un mínimo, que es trivial y estable.

### 5.6.2 – Relación entre el rompimiento y restauración de la simetría con la transición de fase

Si hacemos variar los parámetros termodinámicos  $T$  y  $\mu$  de manera continua o, más específicamente, aumentamos la temperatura o el potencial químico haciendo que este parámetro sobrepase algún valor crítico, las soluciones no triviales a la ecuación de gap (107a) dejarán de existir, lo que se interpreta como el paso de un potencial tipo Nambu-Goldstone a uno tipo Wigner-Weyl [48]. A este fenómeno se le conoce como la restauración de la simetría quiral. En el límite quiral, el valor del parámetro de orden  $\sigma$  indica la existencia de dos fases: una donde la simetría quiral está (espontáneamente) rota, cuando  $\sigma \neq 0$ , y otra donde está restaurada, cuando  $\sigma = 0$ .

No obstante, en este trabajo se considerará que las masas de los quarks son diferentes de cero. Trabajar con esto tendrá la desventaja de que la  $\sigma$  ya no podrá ser exactamente un parámetro de orden, ya que la presencia de masa rompe explícitamente la simetría quiral. Los resultados que se obtengan a partir de este análisis serán más cercanos a lo que esperaríamos ver en la naturaleza, aunque estos no sean tan ilustrativos como los resultados obtenidos en el límite quiral. Por todo esto, estas dos fases no tienen una línea de división clara como la que sí se tenía en el límite quiral.

Como las masas de los quarks son muy cercanas a cero, aunque sean diferentes, lo que se espera observar en la naturaleza es un comportamiento muy parecido al obtenido con el límite quiral, pero sin las restauraciones exactas de la simetría quiral. En este caso, se procede a tomar a  $\sigma$  como un parámetro de orden aproximado, cuyo valor tiende a cero cuando la simetría quiral tiende a restaurarse. El problema con esto es que debemos establecer un punto límite que es en dónde empezamos a considerar que la simetría ya está parcialmente restaurada; algo similar a lo que ocurre por ejemplo en alguna distribución normal, donde debemos establecer qué tan lejos en la cola de la campana comienza a ser despreciable la frecuencia de algún dato.

En cuanto a los otros parámetros de orden, las ecuaciones (107b,107c) corresponden a la simetría central  $Z_3$ . Observando el argumento de la traza en (68,69), consideramos el comportamiento extremal de éste: el campo de color  $A_4$  se transforma paulatinamente en otro campo ortogonal al original y al argumento de la traza al propagarse en dirección a  $\tau$  [39]. Si el argumento de la traza tiende a 1, significa que nada afecta a la propagación de  $A_4$ , es decir, que el campo de color está desconfinado. Por otro lado, si el argumento de la traza tiende a 0, esto implica que el campo no se puede propagar, y el campo de color está confinado. Este comportamiento extremal se tomará en cuenta al resolver el sistema de ecuaciones (107) autoconsistentemente en el plano  $T - \mu$ .

Físicamente, solamente tiene sentido hablar de una simetría central completamente restaurada cuando los quarks están estáticos. La implicación que tiene que los quarks sean estáticos es que sus masas sean infinitas, ya que esto aseguraría que permanecieran inmóviles ante las influencias de las

interacciones con los campos. A esta aproximación donde los quarks son inmóviles le llaman límite apagado (quenched limit), y es en este límite donde la simetría central es exacta [42].

En este trabajo consideramos quarks dinámicos, por lo que la restauración de la simetría  $Z_3$  será aproximada. Algo similar ocurría con la simetría quiral, donde la restauración era parcial o aproximada y ocurría cuando las masas constitutivas eran muy cercanas al reducido valor que tienen las masas corrientes. En el caso de la simetría central, la restauración, que también es parcial o aproximada, ocurre en las condiciones opuestas a la de la simetría quiral, cuando las masas constitutivas de los quarks son muy altas en comparación con las masas corrientes y la propagación del campo de color, aunque existe dado el carácter finito de estas masas, es despreciable.

En resumen, la simetría quiral se restaura parcialmente cuando la masa dinámicamente generada es despreciable y la simetría central se restaura parcialmente cuando la propagación del campo de color es despreciable y cuando la masa dinámicamente generada es muy grande. Por esta razón, no se puede considerar a  $\sigma$ ,  $\Phi$  y  $\Phi^*$  como parámetros de orden exactos [32,42].

### 5.6.3 – Regularización de las integrales divergentes

Como ya se ha mencionado, el modelo NJL es no renormalizable, es decir, haría falta agregar una cantidad infinita de contratérminos a la lagrangiana para deshacernos de las divergencias presentes. En vista de esto, se argumenta que el modelo NJL es aplicable solamente a escalas donde los momentos (o las energías) son bajos, y que necesitaríamos conocer nueva física para describir lo que sucede fuera de este marco de aplicabilidad, por lo que los momentos bajos son los más importantes del modelo [32,35]. En particular, la integral (106) es divergente por culpa del término  $E_p$ , llamado 'energía del punto cero' que representa la contribución del vacío al gran potencial termodinámico. Todos los demás términos son convergentes.

Para deshacernos de la divergencia en (106) nos veremos forzados a agregar un factor de atenuación al integrando. A esta acción de atenuar la divergencia de una integral para obtener resultados convergentes se le llama regularización. En particular, el término de la energía del punto cero en (106) es divergente en el ultravioleta, es decir, que la divergencia se hace presente para los valores más altos de la magnitud del trimomento, mientras que para los valores cercanos a cero la integral no presenta divergencias. Por esto, el mencionado factor de atenuación debe actuar más fuertemente sobre los valores más altos de la magnitud del trimomento, aunque no necesariamente sobre los valores más bajos.

En este trabajo se usa un esquema de regularización basado en un corte ultravioleta en los valores del trimomento. Este corte servirá como un parámetro adicional de la teoría, el cual asegurará que todas las cantidades físicas que se obtengan en los cálculos sean finitas. La forma en la que se introduce este parámetro es tomando la integral (106) y representándola en términos de la magnitud del momento lineal, aprovechando el hecho de que la única dependencia con las variables de integración está en términos de la energía (3), la que depende directamente del cuadrado de la magnitud del momento lineal, por lo que la integral posee simetría esférica:

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega}{V} = & \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) \\
& - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda p^2 dp \left[ E_p \right. \\
& + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p + \mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p + \mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p + \mu)}{T}} \right) \\
& \left. + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p - \mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p - \mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p - \mu)}{T}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{108}$$

Para recuperar la integral original (106), debemos hacer a  $\Lambda$  tender a infinito, lo cual conllevará a la existencia de las divergencias antes mencionadas. En el esquema de regularización que estaremos usando en este trabajo,  $\Lambda$  tendrá un valor finito. Esto se puede interpretar físicamente de la siguiente manera: la interacción puntual de cuatro quarks del modelo NJL se reproduce tal y como es para los valores del trimomento que estén por debajo de este parámetro  $\Lambda$ , mientras que todas las partículas cuyo trimomento sea mayor que  $\Lambda$  no interaccionan. Esto sería una manera algo tosca de introducir al fenómeno de la libertad asintótica de la QCD en el modelo NJL, la cual ocurre a valores muy altos del trimomento (o equivalentemente, a distancias muy reducidas) y de la cual no se sabe mucho al respecto [49,50]. Es importante mencionar que, aunque solamente el término  $E_p$  es divergente en el ultravioleta en (108), el regulador se aplicará en todos los términos incluyendo a los logaritmos en este trabajo. De lo contrario, las masas de los quarks obtendrán valores menores que sus masas corrientes al aumentar la temperatura [51].

Existen otros esquemas de regularización, como por ejemplo la regularización de tiempo propio [48], la regularización de Pauli-Villars [53], la regularización dimensional [54], etcétera; todos estos esquemas representan formas diferentes de deshacerse de las contribuciones de los momentos muy altos con el fin de obtener solamente valores finitos para todas las observables físicas que dependan de (106), y el diagrama de fases es diferente para cada método de regularización diferente [55]. En este trabajo usamos el corte ultravioleta del momento por la sencillez en su uso y en la interpretación física directa de este esquema.

#### 5.6.4 – Ajuste de parámetros en el sector de quarks

En el sector de la interacción que no incluye al loop de Polyakov (65) hay tres parámetros libres que se reflejan en el gran potencial termodinámico regularizado (108): el cutoff  $\Lambda$ , la constante de acoplamiento  $G$  y las masas corrientes de los quarks  $m = m_u = m_d$  [41]; en total son tres parámetros, ya que se considera la simetría de isospín para este trabajo (75). En las condiciones del vacío, es decir, temperatura y potencial químico cero, el loop de Polyakov no afecta al ajuste de los parámetros en el sector NJL, ya que el loop se encuentra solamente en la parte térmica del gran potencial termodinámico (108) [52].

El otro parámetro libre  $G$ , el cual representa la constante de acoplamiento y tiene una dimensión de masa de  $-2$ , toma un rol importante al tratar de resolver la ecuación de gap (107a): en el límite quiral, es decir, donde las masas corrientes de los quarks son cero, existe un valor crítico de  $G$ ,  $G_C$ , tal que  $G_C \Lambda^2 = \pi^2$ . Si el valor de  $G$  es menor que  $G_C$  eso implica que el valor del parámetro de orden  $\sigma$  es cero, por lo que se tendrá un modo Wigner-Weyl (Fig. 1) con una simetría quiral exacta. En el

caso contrario,  $G > G_C$ , la simetría quiral se rompe espontáneamente: el valor de  $\sigma$  es diferente de cero y obtenemos un modo Nambu-Goldstone (Fig. 2) [34].

En este trabajo usaremos el conjunto de parámetros que se usó en Ratti et al. [41]. Los tres parámetros libres  $\Lambda$ ,  $G$  y  $m$  se deben de ajustar de tal manera que se reproduzcan ciertos aspectos conocidos en la física hadrónica en el vacío, es decir, a temperatura y potencial químico cero. En particular, la masa del pión y la constante de decaimiento del pión, cuyas incertidumbres son relativamente bajas [17], deben de alcanzar sus valores empíricos. En la tabla 3 se muestran los valores para los parámetros libres que se usan en este trabajo junto con los valores empíricos con los que éstos se ajustan.

$\Lambda = 651 \text{ MeV}$	$G = 10.08 \times 10^{-6} \text{ MeV}^2$	$m = 5.5 \text{ MeV}$
$f_\pi = 92.3 \text{ MeV}$	$m_\pi = 139.3 \text{ MeV}$	$\sigma = -319.5 \text{ MeV}$

Tabla 3: Valores de los parámetros para el sector NJL.

### 5.6.5 – Potenciales efectivos

La extensión del loop de Polyakov al modelo de NJL tiene la ventaja de que introduce la interacción con el campo de los gluones mediante un potencial efectivo, sin embargo, la forma que tiene este potencial efectivo es aún desconocida para nosotros [56,57]. Este potencial representa la interacción entre los gluones cuando no se toma en cuenta a los quarks, es decir, en el sector de norma [58], por lo que se puede asociar directamente con el término de norma  $-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a$  de la interacción fuerte (42) [59].

Este potencial efectivo debe de tomar en cuenta que, para temperaturas bajas, el potencial debe de presentar un mínimo relativo para  $\Phi = 0$  mientras que para temperaturas más altas, encima de alguna temperatura crítica  $T_0$  donde ocurre la transición de fase relacionada con el desconfinamiento en el sector de norma, este mínimo relativo se mueve hacia valores más altos de  $\Phi$  y para el caso donde  $T \rightarrow \infty$ , el mínimo se vuelve  $\Phi \rightarrow 1$  [41]. Además, si el potencial efectivo no depende explícitamente del potencial químico,  $\Phi = \Phi^*$  si y sólo si el potencial químico es igual a cero (106)<sup>A14</sup>. En la aproximación de campo medio, los loops de Polyakov (68,69) se sustituyen en el potencial efectivo por su valor esperado, este valor esperado es el que minimiza el potencial efectivo [58,59].

En este trabajo se usan tres expresiones para el potencial efectivo, a las cuales se les denominará “polinomial”, “logarítmico” y “exponencial”. El primero de ellos fue propuesto por Ratti et al. [41]:

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{1}{2}b_2(T)\Phi\Phi^* - \frac{1}{6}b_3(\Phi^3 + \Phi^{*3}) + \frac{1}{4}b_4(\Phi\Phi^*)^2 \quad (109)$$

La forma que tiene el potencial efectivo polinomial (109) preserva la simetría central  $Z_3$  en el límite apagado, o bien, en el sector de norma. Las cantidades  $b_2(T)$ ,  $b_3$  y  $b_4$  se escogen de tal manera que se puedan reproducir los datos obtenidos con lattice QCD a potencial químico cero [60]. La cantidad  $b_2(T)$  también debe de ajustarse:

$$b_2(T) = a_0 + a_1\left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \quad (110)$$

Las constantes  $a_n$  y  $b_n$  se ajustan de tal manera que en el sector de norma se alcance una transición de fase de primer orden cuando la temperatura alcanza el valor de la temperatura crítica  $T_0$ , el cual es de aproximadamente  $270 \text{ MeV}/k_B$ , en particular, (109) presenta un mínimo absoluto en  $\Phi = \Phi^* = 0$  para  $T < T_0$  y la simetría central está restaurada en el límite apagado (parcialmente restaurada para un esquema de quarks dinámicos) en esta zona. Además, cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Phi, \Phi^* \rightarrow 1$ . Los valores que se usaron en [41] para las constantes en (109) y (110) se muestran en la tabla 4.

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_3$	$b_4$
6.75	-1.95	2.625	-7.44	0.75	7.5

Tabla 4: Valores de los parámetros para el potencial efectivo polinomial en el modelo PNJL.

El segundo potencial efectivo que utilizamos en este trabajo es el que denominamos logarítmico, propuesto por Rößner et al. [61]:

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{1}{2}a(T)\Phi\Phi^* + b_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \ln(1 - 6\Phi\Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi\Phi^*)^2) \quad (111)$$

De la misma forma que (109), (111) preserva la simetría central  $Z_3$  en el límite apagado, y presenta un mínimo absoluto en  $\Phi = \Phi^* = 0$  para  $T < T_0$ . El rompimiento espontáneo de la simetría central  $Z_3$  para este potencial en  $T = T_0$  se presenta de la misma manera que en el potencial anterior. La  $a(T)$  presenta términos de orden bajo similares a los de (110):

$$a(T) = a_0 + a_1\left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad (112)$$

La diferencia fundamental entre (111) y (109) es que (109) admite cualquier valor real para  $\Phi$  y  $\Phi^*$  dentro de su dominio, mientras que (111) está restringido a valores entre cero y uno para  $\Phi$  y  $\Phi^*$ . La condición de norma de Polyakov (66) implica que tanto  $\Phi$  como  $\Phi^*$  son números reales, pero como estas cantidades representan una traza en el espacio de color normalizada con respecto al número de colores (68,69), lo que implica que realmente los valores de  $\Phi$  y  $\Phi^*$  tienen esta restricción. Dicho esto, ambos potenciales son adecuados para resolver las ecuaciones de gap (107b,107c) porque los valores que minimizan al potencial, que son en realidad las variables de integración en las ecuaciones de gap, están restringidos a este dominio en ambos casos. Los valores que se obtuvieron en [61] para ajustar (111,112) a los datos de lattice QCD se muestran en la tabla 5:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_3$
3.51	-2.47	15.2	-1.75

Tabla 5: Valores de los parámetros para el potencial efectivo logarítmico en el modelo PNJL.

El tercer potencial efectivo, denominado exponencial en este trabajo, fue propuesto por Fukushima [62]:

$$\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) = -bT \left[ 54\Phi\Phi^* e^{-\frac{a}{T}} + \ln(1 - 6\Phi\Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi\Phi^*)^2) \right] \quad (113)$$

En este potencial efectivo hay dos parámetros que se deben ajustar para que (113) reproduzca lo que ya se conoce de lattice QCD a potencial químico cero:  $a$  y  $b$ . Según Fukushima, el ajuste de  $a$  determina la transición de fase relacionada con el desconfinamiento, mientras que  $b$  determina qué tan fuertemente se mezclan las dos transiciones de fase (desconfinamiento y simetría quiral), de tal



forma que mientras más pequeño sea  $b$ , más dominante será la restauración de la simetría quiral en el cambio de fase, y mientras más grande sea  $b$ , más dominante será el desconfinamiento.

Al igual que en (109) y (111), el potencial efectivo (113) considera que la transición en el sector de norma se alcanza a una temperatura crítica  $T_0$  de  $270 \text{ MeV}/k_B$ . Esto establece el valor de  $a$  en  $664 \text{ MeV}/k_B$ . En cuanto a  $b$ , Fukushima asevera que los crossovers quiral y de desconfinamiento se alcanzan a la misma temperatura cuando  $b$  toma el valor de  $0.03\Lambda^3$ <sup>14</sup> que es el que se usa en este trabajo. Sin embargo, no hay ninguna prescripción adecuada para  $b$ , dada la incertidumbre que hay en el valor de este parámetro. En este esquema de parametrización, los grados de libertad efectivos, que están dados por estados de tres quarks, disminuyen paulatinamente conforme aumenta la temperatura [36].

Existen otros potenciales efectivos viables que se pueden usar para el loop de Polyakov, por ejemplo, es posible extender el potencial (109) agregando un término de Vandermonde [63] o reescribirlo en una expresión que también reproduzca lattice QCD en el sector de norma, pero que sea independiente de  $\Phi\Phi^*$  lo que implica una pérdida del acoplamiento de los quarks con los gluones en el sector de norma [64]. No obstante, en este trabajo se usarán solamente los potenciales efectivos (109), (111) y (113).

14. No lo hacen.

## 6 – Resultados

### 6.1 – Parámetros de orden

En la zona del diagrama de fases que es comparable contra lattice QCD, es decir, donde el potencial químico es cero, se debe obtener un crossover para cada parámetro de orden, alcanzando así un acuerdo cualitativo del modelo PNJL contra lattice QCD. Un crossover es un cambio continuo y suave del parámetro de orden (Fig. 4), en contraste con un cambio de fase, el cual es abrupto y discontinuo (Fig. 5). Es importante mencionar que aún es tema de debate si el crossover relacionado con el desconfinamiento debe coincidir con el crossover relacionado con la simetría quiral o no [65].

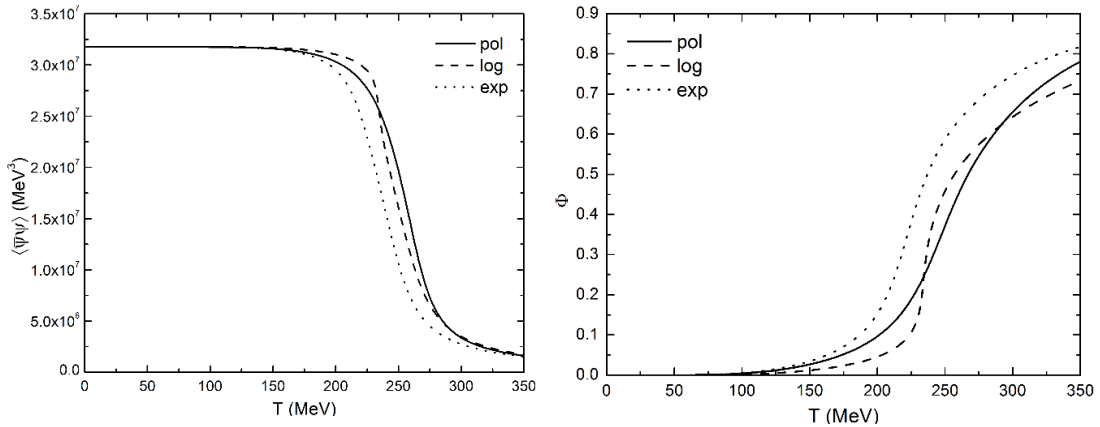


Figura 4: Dependencia de los parámetros de orden aproximados a potencial químico cero. A la izquierda se grafica a lo que se le llama condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \sigma/G$  (74a). Para  $\mu = 0$ ,  $\Phi = \Phi^*$ .

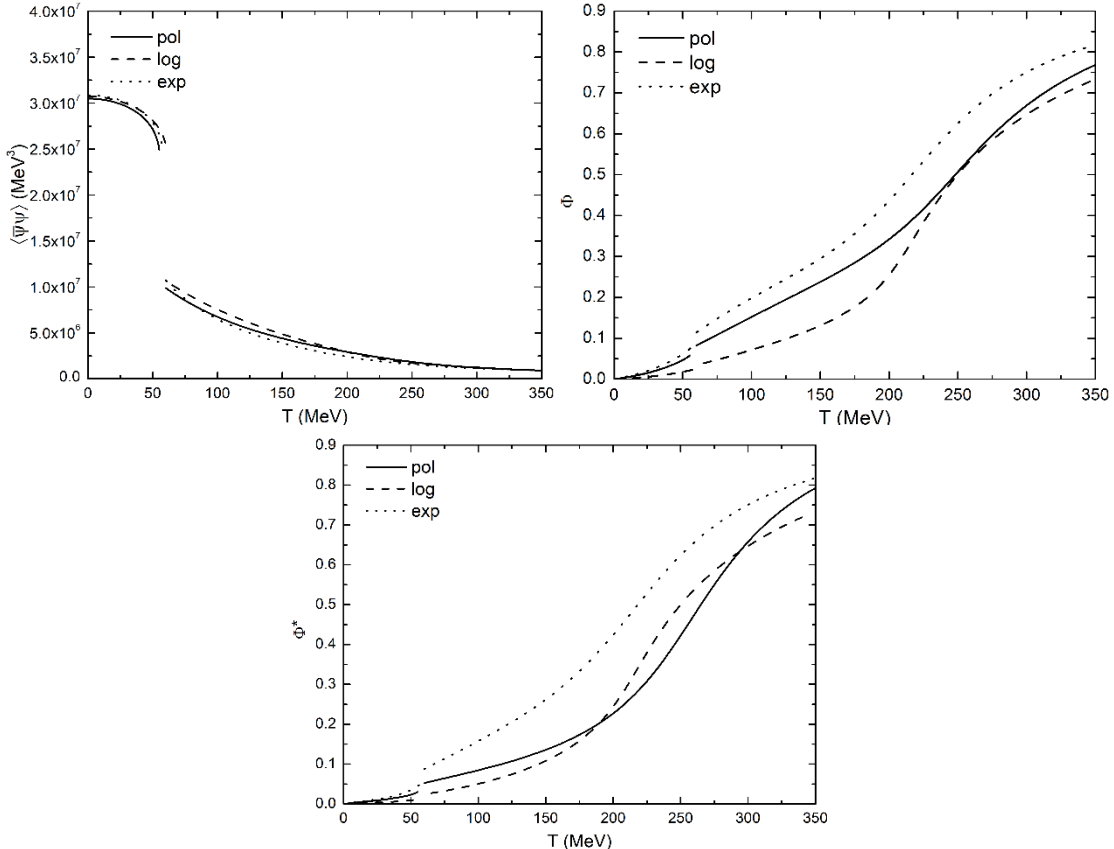


Figura 5: Dependencia de los parámetros de orden aproximados a  $\mu = 340$  MeV. La forma más sencilla de que ocurran estos cambios abruptos de los parámetros de orden a partir de las gráficas continuas de la fig. 4 es mediante la existencia de algún punto final crítico (CEP).

En el caso donde el potencial químico es muy alto, muchas teorías efectivas como los modelos NJL y tipo NJL [40,46,51,54] e incluso otras como los modelos tipo quark-meson [36,39,64] predicen un cambio de fases propiamente dicho, donde los parámetros de orden, aunque sean aproximados, presentan una discontinuidad en el plano  $T - \mu$ .

En una gráfica discontinua del parámetro de orden (Fig. 5), el salto abrupto y discontinuo representa un cambio de fase, el cual separa dos intervalos (fases) donde el parámetro de orden es continuo. En este caso particular, cada uno de los tres potenciales efectivos polinomial (109), logarítmico (111) y exponencial (113) presenta una discontinuidad de cada uno de los tres parámetros de orden: 55 MeV para el polinomial, 61 MeV para el logarítmico y 58 MeV para el exponencial. Esta discontinuidad se presenta en el mismo valor de temperatura para los tres parámetros de orden (en cada caso) porque los tres parámetros de orden están ligados mediante un sistema de ecuaciones autoconsistente (107), por lo que si uno de ellos es discontinuo en algún punto del plano  $T - \mu$ , los otros dos también lo son. Es importante mencionar que un cambio de fase no tiene que ser necesariamente inducido mediante un cambio en la temperatura, sino que cualquier curva en el plano  $T - \mu$  que intersecte con la curva de cambio de fase es suficiente.

## 6.2 – Susceptibilidades

Una forma sencilla de saber si una transición de fase está ocurriendo es mediante la susceptibilidad de alguno de los parámetros de orden. Las susceptibilidades determinan la tasa de cambio del gran potencial termodinámico (108) con respecto a algún parámetro de orden; si estos cambios son abruptos, es decir, discontinuos, la susceptibilidad presentará una divergencia en la coordenada del plano  $T - \mu$  donde ocurre dicha discontinuidad. En otras palabras, la susceptibilidad es siempre convergente excepto cuando un cambio de fase está tomando lugar. Por ejemplo, en el caso del crossover (Fig. 4), los tres parámetros de orden son continuos en todo el rango de temperaturas para el valor correspondiente del potencial químico, mientras que en donde hay un cambio de fase (Fig. 5), los tres parámetros de orden presentan una discontinuidad, que representa a este cambio de fase, que depende del potencial efectivo usado, lo cual implica una divergencia de la susceptibilidad en las temperaturas donde dichas discontinuidades ocurren.

Es posible establecer una susceptibilidad para cada uno de los parámetros de orden de forma singular. Sin embargo, también es posible calcular susceptibilidades mixtas, es decir, dependientes de dos parámetros de orden. En el caso de los parámetros  $\Phi$  y  $\Phi^*$ , existen diferencias entre ellos a potencial químico diferente de cero, por lo que no es correcto trivializar de primera mano a alguna de las susceptibilidades relacionadas con alguna de los dos. Ambos parámetros están relacionados con el desconfinamiento, por lo que las susceptibilidades mixtas entre éstos dos serán de utilidad para estudiar las propiedades del confinamiento en el diagrama de fases.

Para establecer todas las susceptibilidades mixtas entre los tres parámetros de orden se tienen que calcular todas las segundas derivadas del gran potencial termodinámico (108) con respecto a cualesquier dos parámetros de orden. Una forma sencilla de lograr esto es mediante el uso de una matriz, en donde los elementos están dados por:

$$C_{ab} = \frac{\beta \partial^2}{\Lambda \partial c_a \partial c_b} \left( \frac{\Omega}{V} \right) \quad (114)$$

En (114),  $a, b \in [1,3] \cap a, b \in \mathbb{Z}$  son índices que representan a los parámetros de orden.  $c_1 = M = m - \sigma$  es la masa constitutiva de los quarks, y siendo en realidad  $\sigma$  el parámetro de orden, la derivada parcial con respecto a  $\sigma$  es igual en magnitud a la derivada parcial con respecto a  $M$  pero con el signo cambiado (porque la masa corriente  $m$  es constante). Cabe mencionar que este cambio de signo es irrelevante cuando el número de veces que se deriva con respecto a la masa constitutiva es par. Por otro lado,  $c_2 = \Lambda\Phi$  y  $c_3 = \Lambda\Phi^*$ . El factor  $\Lambda$  asegura que todos los elementos de la matriz sean adimensionales porque  $\Phi$  y  $\Phi^*$  son adimensionales (106). Fukushima le llama a esta matriz ‘matriz de curvatura adimensional’ [66] aunque el término curvatura no está correctamente empleado, ya que esta matriz usa solamente las segundas derivadas sin calcular los radios de las circunferencias osculatrices al gran potencial termodinámico. Un término más adecuado sería ‘matriz de concavidad adimensional’.

Una vez que se haya calculado esta matriz, la susceptibilidad de cualquier par de parámetros de orden estará dada por el elemento de la matriz inversa a (114) en la posición determinada por los índices correspondientes a dichos dos parámetros. Por ejemplo, la susceptibilidad correspondiente únicamente a la masa constitutiva corresponde al elemento  $C^{-1}_{11}$ , y así sucesivamente. Ya que las dos operaciones de derivación darán el mismo resultado independientemente del orden en el que se hagan,  $C$ , y por lo tanto,  $C^{-1}$ , son matrices simétricas. Esto implica que solamente existen seis susceptibilidades diferentes en lugar de nueve.

En este trabajo vamos a usar cuatro de las seis susceptibilidades. Tomando en cuenta los elementos de arriba y del lado derecho de  $C^{-1}$ , los elementos correspondientes a estas cuatro susceptibilidades son  $C^{-1}_{11}$ ,  $C^{-1}_{22}$ ,  $C^{-1}_{23}$  y  $C^{-1}_{33}$ . Cabe mencionar que en estos cuatro elementos las derivadas con respecto a la masa constitutiva siempre aparecen en número par (dos veces en  $C^{-1}_{11}$  y cero veces en las otras tres), y el propio determinante de  $C$  permanece invariante si los cuatro términos en donde se deriva con respecto a la masa constitutiva una sola vez cambian de signo<sup>A15</sup>.

Al elemento  $C^{-1}_{11}$ , el cual corresponde con la susceptibilidad respecto a la masa constitutiva, se le llama “susceptibilidad quiral”, y es esta susceptibilidad la que indica cuándo se rompe o se restaura (parcialmente) la simetría quiral:

$$C^{-1}_{11} \equiv \chi_{MM} \quad (115)$$

Los otros tres elementos,  $C^{-1}_{22}$ ,  $C^{-1}_{23}$  y  $C^{-1}_{33}$ , corresponden con los otros dos parámetros de orden: los loops de Polyakov (68,69), los cuales se interpretan como una cantidad proporcional a la energía libre de los quarks en la norma de Polyakov (66) [64], es decir, en un campo gluónico estacionario. Como los parámetros de orden  $\Phi$  y  $\Phi^*$  representan a la interacción del campo gluónico con los quarks y los antiquarks respectivamente, tiene sentido emplear una sola cantidad para tomar en cuenta a los dos parámetros de orden. En este trabajo usaremos una cantidad a la que llamamos “susceptibilidad (media) del loop de Polyakov”:

$$\frac{1}{4}(C^{-1}_{22} + C^{-1}_{33} + 2C^{-1}_{23}) \equiv \frac{1}{4}(\chi_{\Phi\Phi} + \chi_{\Phi^*\Phi^*} + 2\chi_{\Phi\Phi^*}) = \bar{\chi}_{\Phi\Phi} \quad (116)$$

Las dos susceptibilidades (115) y (116) representan la tasa de cambio del gran potencial termodinámico con respecto a los parámetros de orden:  $M$  y la pareja  $\Phi, \Phi^*$ ; respectivamente.

De la misma manera que en la física estadística clásica, nosotros podemos esperar que los cambios de fase del sistema se encuentren donde las susceptibilidades de los parámetros de orden diverjan hacia el infinito, es decir, donde el gran potencial termodinámico (que describe completamente el estado termodinámico del sistema) sea infinitamente susceptible a cambiar de valor con respecto a un cambio de valor de los parámetros de orden (Fig. 7). Como los parámetros de orden no pueden cambiar de forma discreta en la naturaleza, todos los estados termodinámicos donde los parámetros de orden se encuentran entre los dos valores válidos, es decir los límites laterales de los parámetros de orden, son válidos también. Estos valores representan a una transición de fase.

En el caso del crossover, los parámetros de orden son continuos para todo el rango de temperaturas (Fig. 4). En términos de las susceptibilidades, esto se traduce a una susceptibilidad que no presente divergencias al infinito, es decir, que no presente cambios de fase (Fig. 6). Esto es análogo a la fase que en la física estadística clásica se le llama “fluido supercrítico”, que ocurre en una región del diagrama de fases a mayores presiones o temperaturas de donde termina la línea de evaporación. En el caso de la QCD, el crossover ocurre a bajos potenciales químicos.

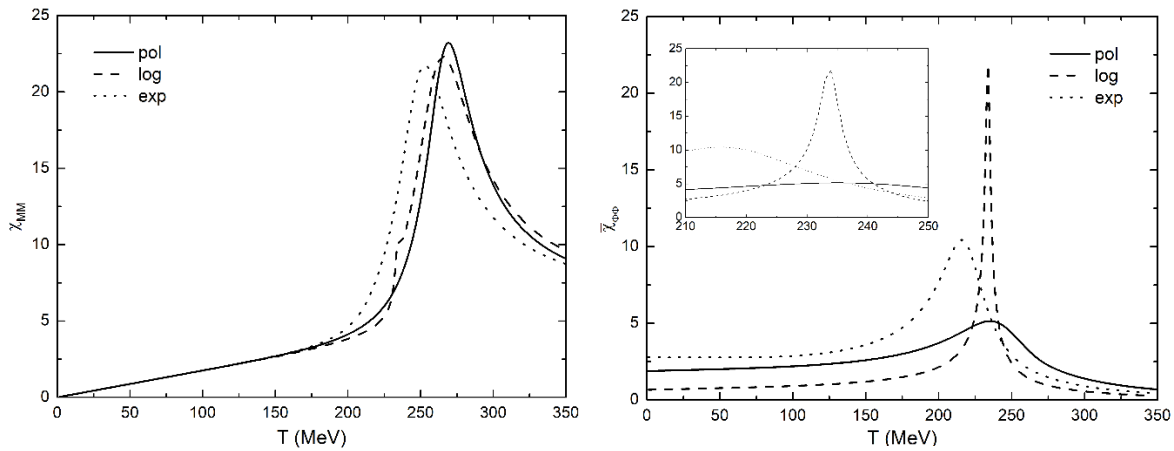


Figura 6: Dependencia de las susceptibilidades a  $\mu = 0$ . Las susceptibilidades correspondientes al comportamiento continuo de los parámetros de orden (Fig.4) son estas gráficas continuas en forma de campana.

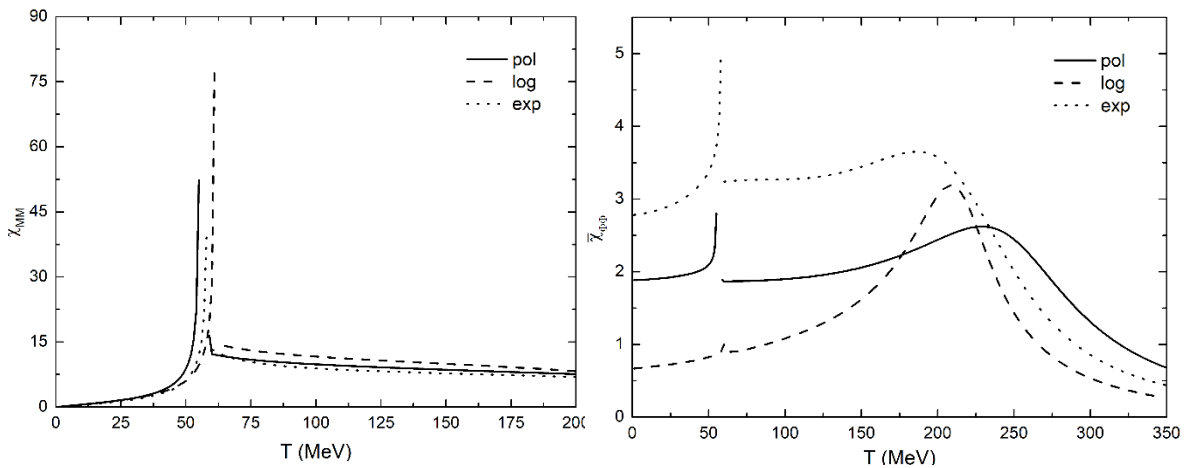


Figura 7: Dependencia de las susceptibilidades a  $\mu = 340$  MeV. La localización del cambio de fase está indicada por la asíntota vertical de la gráfica. Para este potencial químico el cambio de fase se encuentra alrededor de los 60 MeV para los tres potenciales efectivos.

Al disminuir el potencial químico, el comportamiento de las susceptibilidades cambia de forma cualitativa: las asíntotas verticales (Fig. 7) desaparecen, dando lugar a unas gráficas en forma de campana (Fig. 6). La localización del máximo de esta campana, la cual es análoga a la localización de la asíntota vertical para potenciales químicos más altos, será de gran importancia en este trabajo para determinar “en dónde se encuentra” el crossover.

### 6.3 – Mallado discreto del plano $T - \mu$

Para poder construir un diagrama de fases, lo más fundamental que hay que hacer es saber distinguir entre cualesquier dos fases usando como criterio un cambio discontinuo (salto) del parámetro de orden. En este trabajo se usan tres: el condensado quiral (o bien, la masa constitutiva), correspondiente a la simetría quiral, y los loops de Polyakov, correspondientes al desconfinamiento. Los loops de Polyakov están englobados mediante la susceptibilidad mixta del loop de Polyakov (116), por lo que en realidad se construirán dos diagramas de fase (para cada configuración diferente) en este trabajo.

El diagrama de fases correspondiente a la simetría quiral se construye usando la susceptibilidad quiral (115, Fig. 6a, Fig. 7a) y el condensado quiral (Fig. 4a, Fig. 5a) como apoyo. El diagrama de fases correspondiente al confinamiento se construye utilizando a la susceptibilidad mixta del loop de Polyakov (116, Fig. 6b, Fig. 7b) y a los loops de Polyakov (68, 69, Fig. 4b, Fig. 5b, Fig. 5c). De primera mano, no debe esperarse que las divisiones entre las fases en el plano  $T - \mu$  sean las mismas en ambos diagramas [67, 68]; aunque, físicamente, la simetría quiral está estrechamente ligada con el desconfinamiento [69].

Para calcular los diagramas de fase se resuelven las ecuaciones de gap (107) con la temperatura y el potencial químico actuando como parámetros libres. Como no es posible, o bien, es extremadamente complicado obtener resultados analíticos para estas soluciones, se resuelven numéricamente estas ecuaciones para determinados pares ordenados  $(\mu, T)$  y así determinar el comportamiento de estas soluciones. En este trabajo, lo que se hace es generar una red en forma de cuadrícula en el plano  $T - \mu$  donde el espacio entre los puntos es igual a 1 MeV (Fig. 8).

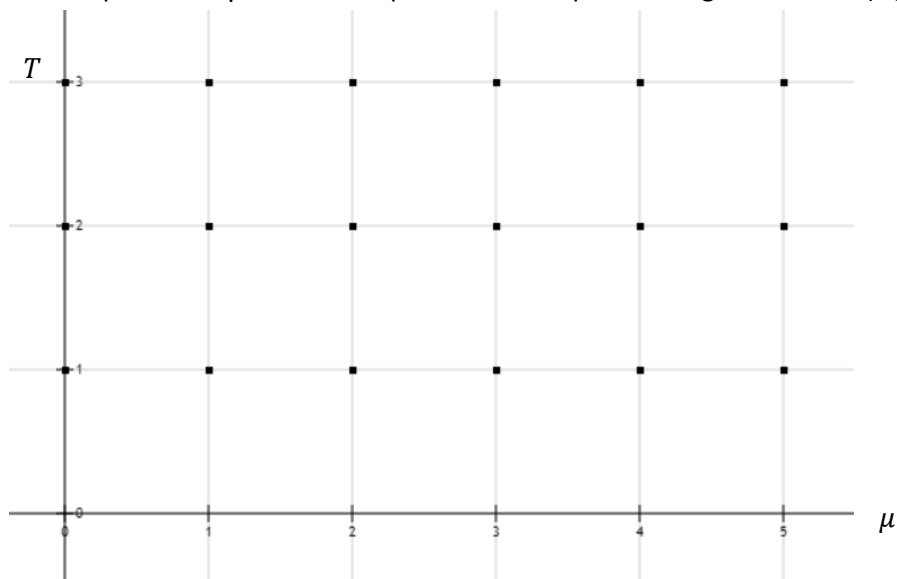


Figura 8: Cuadrícula donde se indican algunos de los pares ordenados  $(\mu, T)$  para los que se resuelven las ecuaciones de gap (107) en el plano  $T - \mu$ . Las unidades del potencial químico son MeV mientras que las de la temperatura son  $\text{MeV}/k_B$ . Debido a las numerosas divisiones entre  $T$  en el gran potencial termodinámico (108) y en los potenciales efectivos (109, 111, 113) no hay puntos donde la temperatura sea igual a cero en esta red.

En este trabajo se calcularon los valores de los parámetros de orden (107) y de las susceptibilidades (115,116) para los pares ordenados hasta  $T = 300 \text{ MeV}/k_B$  y hasta  $\mu = 350 \text{ MeV}$ . La gran cantidad de valores que fueron calculados es suficiente para dar la ilusión de continuidad, la cual se llega a perder si el espaciado entre los puntos de la cuadrícula (Fig. 8) es mayor. Para un área constante de una región del plano  $T - \mu$ , mientras el espaciado entre dos puntos adyacentes sea menor, la resolución del diagrama de fases será mayor<sup>A16</sup>.

#### **6.4 – Criterios para determinar la localización del crossover**

Tomando todo lo anterior en cuenta, con lo que hemos hecho en este trabajo es posible construir seis diagramas de fase: dos para cada potencial efectivo (109,111,113), uno quiral y uno de desconfinamiento. No obstante, aunque sea trivial identificar en dónde se encuentra alguno de los cambios de fase analizando el comportamiento de los parámetros de orden, indicar la localización del crossover es otro problema. En este trabajo usaremos dos criterios, uno de los cuales es usado ampliamente en la literatura [42,70] y el otro que nosotros propusimos. Llamaremos a estos dos criterios “local” y “global” respectivamente.

##### **6.4.1 – Criterio local**

El criterio local consiste en separar ambas fases en el diagrama tomando el comportamiento de la susceptibilidad del parámetro de orden como referencia. En el caso donde la susceptibilidad presenta una discontinuidad en forma de asíntota vertical (Fig. 7) el cambio de fase se encuentra en las coordenadas del plano  $T - \mu$  correspondientes a la localización de dicha asíntota vertical (por ejemplo, en la Fig. 7, las coordenadas alrededor de (340,60) corresponden a los diferentes cambios de fase). En el caso donde la susceptibilidad no presente una discontinuidad (Fig. 6), el criterio local toma al máximo relativo de la susceptibilidad como el punto que separa a ambas fases. Incluso si en esta situación no existe un cambio de fases propiamente dicho, sino un crossover, es útil indicar algún punto de separación a partir del cual podríamos esperar que el sistema tenga un comportamiento más congruente con una fase o con la otra.

Ya que lattice QCD es el único método que se conoce hasta hoy por el cual es posible atacar por primeros principios el problema de la cromodinámica cuántica en el régimen no perturbativo, las teorías efectivas como el modelo PNJL buscan tener un acuerdo cualitativo y cuantitativo con lattice QCD en su marco de aplicabilidad, es decir, a potencial químico igual a cero [36]. Esto implica que, para dos sabores, las susceptibilidades de los parámetros de orden con los cuales trabaja el modelo PNJL deben presentar una forma de campana (Fig. 6). Existe la posibilidad que esta campana se transforme en una asíntota vertical al aumentar el potencial químico (Fig. 7) pero esta zona del diagrama de fases sigue siendo desconocida por ser difícil de alcanzar experimentalmente [71]. Otra posibilidad es que la forma de campana de la gráfica no cambie nunca al aumentar el potencial químico y, por consecuencia, que no exista un punto final crítico (CEP) como tal.

##### **6.4.2 – Criterio global**

El criterio global toma al valor del parámetro de orden como guía. Específicamente, el valor del parámetro de orden que se toma como referencia depende del comportamiento cualitativo de su respectiva susceptibilidad. Si la susceptibilidad es continua en toda la extensión calculada del diagrama de fases, entonces se toma como referencia el máximo absoluto de la susceptibilidad en la región calculada. Si la susceptibilidad presenta algún comportamiento asintótico (Fig. 7), éste

tiene que empezar a existir en cierto valor del potencial químico (al ir aumentándolo). La coordenada del plano  $T - \mu$  donde esta discontinuidad empieza a existir se identifica como el CEP. En el CEP, el valor del parámetro de orden no presenta un comportamiento asintótico, aunque es donde empieza a ser discontinuo (Fig. 5) y, para mayores potenciales químicos que el del CEP, la discontinuidad (salto) del parámetro de orden empieza a aumentar en magnitud conforme aumenta el potencial químico. Es el valor del parámetro de orden en el CEP el que se toma como valor de referencia en este caso.

### 6.4.3 – Comparación cualitativa entre los dos criterios

La ventaja del criterio local es que la localización del crossover es inequívoca, incluso si es imposible computacionalmente calcular los valores de los parámetros o de las susceptibilidades para alguna región determinada del diagrama de fases (estas dificultades no se presentaron en este trabajo). El criterio global no podría usarse si el máximo absoluto de la susceptibilidad o el CEP se encontrara dentro de una región así. La ventaja del criterio global es una facilidad de interpretación de las características cuantitativas que definen a una fase o a otra: ya que los parámetros de orden toman un cierto valor en el CEP (de manera análoga a los parámetros de saturación en el punto crítico en la física estadística clásica), es más fácil describir conceptos como valores de saturación o calores latentes usando el criterio global.

Algo importante que se debe mencionar es que; en caso de no existir regiones problemáticas de calcular desde el punto de vista computacional, de que exista un CEP en el diagrama de fases y de que exista una curva de transición de fase de primer orden, ambos criterios siempre coinciden en las coordenadas  $(\mu, T)$  del CEP y en el lugar geométrico en el plano  $T - \mu$  que ocupa la curva de transición de fases. Es en la zona de crossover donde estos dos criterios no necesariamente tienen que coincidir.

### 6.5 – Diagramas de fases

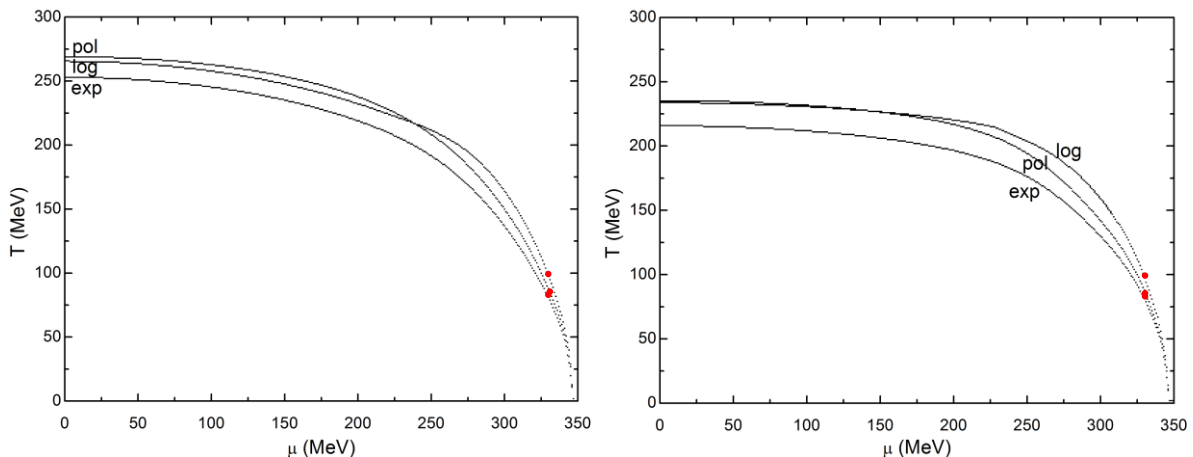


Figura 9: Superposición de diagramas de fase obtenidos con el criterio local. A la izquierda son los diagramas de fase quirales (con  $M$  actuando como parámetro de orden) y a la derecha son los diagramas de fase de desconfinamiento (con el promedio de  $\Phi$  y  $\Phi^*$  actuando como parámetro de orden). Los CEP de cada diagrama obtenido con cada potencial efectivo diferente están indicados con un punto rojo.

Los diagramas de fases (Fig. 9) están divididos en varias regiones mediante ciertas curvas y puntos. Los quiebres que se alcanzan a apreciar en todos los diagramas de fases en la región de



temperaturas bajas y potenciales químicos altos se deben a la resolución limitada que se describió anteriormente (Fig. 8). Sin embargo, estos quiebres no son un problema para poder interpretar cómo se debería de comportar a grandes rasgos una curva continua en esta región. Estas curvas “quebradas” representan una transición de fase de primer orden. Este tipo de transición se distingue por el comportamiento discontinuo de tipo salto que presenta el parámetro de orden (Fig. 5).

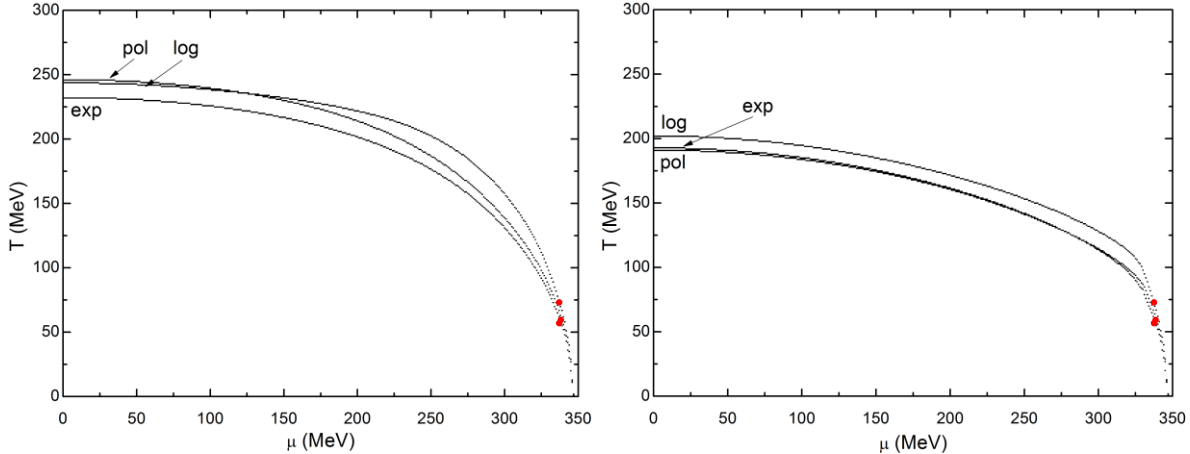


Figura 10: Superposición de diagramas de fase obtenidos con el criterio global. A la izquierda son los diagramas de fase quirales (con  $M$  actuando como parámetro de orden) y a la derecha son los diagramas de fase de desconfinamiento (con el promedio de  $\Phi$  y  $\Phi^*$  actuando como parámetro de orden). Los CEP de cada diagrama obtenido con cada potencial efectivo diferente están indicados con un punto rojo.

Los diagramas de fases que se obtuvieron (Fig. 9, Fig. 10) constan a grandes rasgos de dos fases separadas entre ellas (representadas por las zonas en blanco del diagrama, una por encima de la curva y la otra por debajo). En el caso de los diagramas de fase quirales (Fig. 9a, Fig. 10a), la región por debajo de la curva representa la fase con simetría quiral rota y la región por encima representa la fase con simetría quiral restaurada. Cabe recordar que, en términos matemáticos estrictos, la simetría quiral siempre está (explícitamente) rota (76). Sin embargo, la masa constitutiva puede ser usado como un parámetro de orden (aunque no sea exacto), ya que presenta discontinuidades en los cambios de fase como cualquier parámetro de orden en la mecánica estadística clásica. En cuanto a los diagramas de fases de desconfinamiento (Fig. 9b, Fig. 10b), el comportamiento de  $\Phi$  y  $\Phi^*$  determina a las fases confinada (por debajo de las curvas) y desconfinada (por encima de las curvas) de una manera análoga a los diagramas de fases quirales.

### 6.5.1 – Punto final crítico

En cuanto a las curvas que dividen a los diagramas de fases en dos regiones, éstas se encuentran a su vez divididas en dos mediante el punto final crítico (CEP). Del lado izquierdo del CEP, estas curvas representan un cambio continuo del respectivo parámetro de orden, llamado crossover (Fig. 6). Del lado derecho las curvas marcan un cambio de fase de primer orden (Fig. 7). El comportamiento cualitativo de estos diagramas de fase es característico de las teorías efectivas de la QCD [26,28,39,40,46,51,53].

Algo importante que se debe mencionar es que, para cada uno de los potenciales efectivos (109,111,113), se obtuvo una única coordenada  $(\mu, T)$  para el CEP del diagrama quiral y del diagrama de desconfinamiento. Además, las curvas de transición de fase de primer orden para

ambos tipos de diagramas de fase fueron idénticas también. En la tabla 6 se muestran las coordenadas de los CEP para cada uno de los potenciales efectivos.

$U$	pol	log	exp
$T_{CEP}$ (MeV/ $k_B$ )	84	98	83
$\mu_{CEP}$ (MeV)	331	330	329

Tabla 6: Coordenadas del CEP en el plano  $T - \mu$  para cada potencial efectivo.

A la izquierda del CEP, cada uno de los criterios arrojó una curva diferente para el crossover. Como se trata de un cambio continuo de los parámetros de orden, su localización está más vagamente definida. El criterio local define al crossover como el conjunto de coordenadas donde el cambio del gran potencial termodinámico con respecto a los parámetros de orden es mayor, mientras que el criterio global define al crossover como la zona del diagrama de fases donde los parámetros de orden pasan un cierto valor límite que se alcanza en el CEP, y que representa la frontera entre dos fases.

### 6.5.2 – Temperatura pseudocrítica

Lo más importante que se puede deducir de los diagramas de fases obtenidos (Fig. 9, Fig. 10) es que, invariablemente, independientemente del potencial efectivo o del criterio usado, la restauración de la simetría quiral ocurre a temperaturas mayores que el desconfinamiento. Esto se puede verificar fácilmente revisando las intersecciones de cada crossover con el eje de la temperatura (Tabla 7). A estas intersecciones se les llama temperaturas pseudocríticas<sup>15</sup>. No obstante, al tratarse de una zona de crossover para ambos diagramas, esto no tiene mucho significado por la ambigüedad en las características de una u otra fase alrededor de esta zona.

$U$	$T_{pc}$ local		$T_{pc}$ global	
	quiral	desc.	quiral	desc.
Pol	269	235	246	191
Log	266	234	244	202
Exp	253	216	232	193

Tabla 7: Temperaturas pseudocríticas quirales y de desconfinamiento en ambos criterios para cada potencial efectivo. Todas las unidades son MeV/ $k_B$ .

La implicación fenomenológica de que el desconfinamiento ocurra a menores temperaturas que la restauración de la simetría quiral es la existencia de una pequeña zona del diagrama donde la materia que interactúa fuertemente está desconfinada pero la simetría quiral sigue estando rota. No se trata de una fase en sí, pero se puede esperar que la materia en esta zona presente características de ambas fases en una cierta proporción que va favoreciendo el desconfinamiento y la restauración de la simetría quiral conforme aumenta la temperatura. Estos resultados contradicen lo reportado por [62] donde se asevera que estos dos crossovers se alcanzan a la misma temperatura.

Como ya se ha explicado anteriormente, las magnitudes (68,69,74a) no pueden ser consideradas como parámetros de orden exactos porque las condiciones requeridas para la restauración de las simetrías quiral y  $Z_3$  implican que la masa constitutiva de los quarks deba ser cero o infinita,

15. La razón del prefijo pseudo- es que la temperatura crítica propiamente dicha indica un cambio de fase de segundo orden. En teorías efectivas como el modelo NJL, un cambio de fase de segundo orden ocurre cuando se trabaja en el límite quiral, es decir, cuando las masas corrientes de los quarks se toman como cero. Léase "Morones Ibarra, J. R., Enríquez Pérez-Gavilán, A., Hernández Rodríguez, A. I., et al.; *Open Physics*, 15 (1) 1039 (2017)", donde se compara el modelo NJL de dos sabores en el límite quiral contra un formalismo de masa finita.

respectivamente. Es por esto que no se da un cambio de fases de segundo orden a bajos potenciales químicos y existe un crossover.

Como el crossover es un cambio suave de los parámetros de orden, éste no posee límites o fronteras bien definidas a partir del cual podamos delimitarlo. No obstante, el crossover como tal debe terminar en algún punto del diagrama, dando lugar a los cambios de fase de primer orden que obtuvimos (Fig. 7) y terminando en el CEP. Por estas razones, el único factor concluyente para determinar la localización del crossover es el CEP.

En estas circunstancias, el parámetro de orden cambia de manera continua durante todo el crossover, pero no siempre de manera uniforme. Es más útil para nosotros interpretar el crossover como la zona del diagrama de fases donde el parámetro de orden cambia en la mayor proporción posible con respecto a un cambio de la temperatura o del potencial químico. Dos formas diferentes en las que esto se puede reflejar en el diagrama de fases son la zona donde la susceptibilidad es relativamente mayor que en sus alrededores y la zona donde el parámetro de orden alcanza un intervalo de valores contenido entre los extremos característicos de éste (el límite quiral y el límite apagado para la masa constitutiva, y 0 y 1 para los loops de Polyakov).

Estas dos interpretaciones no necesariamente deben coincidir en la misma región del diagrama de fases, por lo tanto, nosotros propusimos dos criterios diferentes para delimitar la zona donde se encuentra el crossover. Estos criterios son en realidad formas de extender los criterios ya descritos (Fig. 9, Fig. 10) donde el crossover toma la forma de una banda ancha que va perdiendo grosor hasta llegar al CEP, que es donde esta banda termina. En caso de no haber CEP, estas bandas pueden continuar a lo largo de todo el diagrama hasta alcanzar el eje del potencial químico, sin embargo, no es el caso en los resultados obtenidos en este trabajo.

## **6.6 – Diagramas de fases extendidos**

### **6.6.1 – Extensión del criterio local**

La extensión del criterio local ahonda en el concepto de la susceptibilidad y en su comportamiento en el plano  $T - \mu$ . La curva que el criterio local proyecta sobre el plano  $T - \mu$  es equivalente a la proyección del máximo local de la susceptibilidad moviéndose a lo largo del plano en el punto más alto posible hasta llegar a la asíntota vertical correspondiente al CEP, o, en caso de no existir un CEP, hasta llegar al máximo local de la susceptibilidad en el eje del potencial químico. En la Fig. 11 se muestra el comportamiento característico de una susceptibilidad en el modelo PNJL con el esquema de regularización usado en este trabajo.

El corte de la susceptibilidad (Fig. 11) para algún valor de  $\mu$ , por ejemplo, para  $\mu = 0$  (Fig. 6), tiene la forma de una campana (solamente en el crossover). La parte más alta de la campana se interpreta como aquella donde los parámetros de orden (en este caso la masa constitutiva) cambian con una mayor proporción con respecto a un cambio de la temperatura o del potencial químico. Por otro lado, en las colas de la campana este cambio es proporcionalmente menor. Una forma útil de “separar” a la parte alta de la campana de las colas es tomando a los puntos de inflexión como valor de separación.

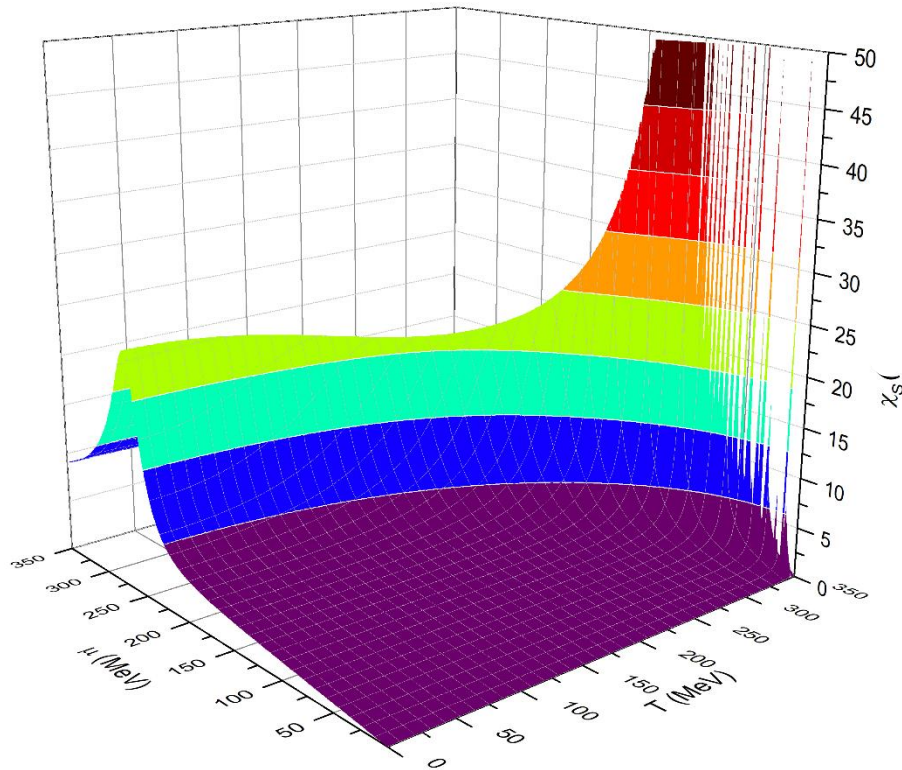


Figura 11: Comportamiento cualitativo de la susceptibilidad en el modelo PNJ. En este caso se trata de la susceptibilidad quiral con el potencial efectivo polinomial. El criterio local proyecta el máximo relativo de la susceptibilidad con respecto a la temperatura y el potencial químico. Esta proyección corresponde a la curva de los diagramas del criterio local (Fig. 9).

No obstante, cuando se tiene una superficie en el espacio de 3 dimensiones, definir la localización de un punto de inflexión pierde un poco su significado, ya que la concavidad de una superficie depende de la dirección en la que se mide, a diferencia de la concavidad de una curva que tiene una definición clara y concisa. En el caso de una superficie continua, el procedimiento análogo de calcular un punto de inflexión mediante las raíces de la segunda derivada es calcular el lugar geométrico donde el determinante de la matriz hessiana es igual a cero. Geométricamente, esto se puede interpretar como todos aquellos puntos donde el ángulo de inclinación del plano tangente a la función con respecto a la horizontal se maximiza en la localidad.

En este trabajo no contamos con una función continua que describa a la susceptibilidad. Ésta fue obtenida de forma numérica mediante el cálculo del valor de los elementos de cierta matriz (114) en función de los parámetros de orden, que se obtienen de manera autoconsistente (107) solamente para ciertos valores de un mallado en el plano  $T - \mu$  (Fig. 8). Lo que se hizo en este trabajo fue: calcular numéricamente los valores de las tres segundas derivadas de cada susceptibilidad con respecto a  $T$  y a  $\mu$ , calcular el determinante de la matriz hessiana de forma manual, y demarcar cada punto a lo largo de cualquiera de las cuatro direcciones del mallado (hacia arriba, abajo y a los lados) donde haya ocurrido un cambio de signo<sup>16</sup>. Ya que la función tiene buen comportamiento en esta zona, se asume que el determinante es continuo. Cada cambio de signo entre cualesquier dos valores adyacentes del mallado implica que una raíz se encuentra entre ellos.

16. La probabilidad de casualmente encontrar un cero exactamente en uno de los valores del mallado es de una en diez elevado al número de dígitos de precisión que se haya usado en el cálculo (32 en este trabajo). Por esto, se descarta la posibilidad de encontrar exactamente un cero en alguna de las  $\sim 100,000$  coordenadas  $(\mu, T)$  que se utilizaron en este trabajo.

El resultado de todo esto fueron dos curvas en el plano  $T - \mu$  que rodean a cada curva original obtenida con el criterio local (Fig. 9) a una cierta distancia que se va reduciendo conforme aumenta el potencial químico hasta que las curvas se intersectan con la curva original en el CEP. La región delimitada con estas dos curvas se interpreta como el crossover. Los diagramas de fase obtenidos con esta extensión se muestran en la Fig. 12.

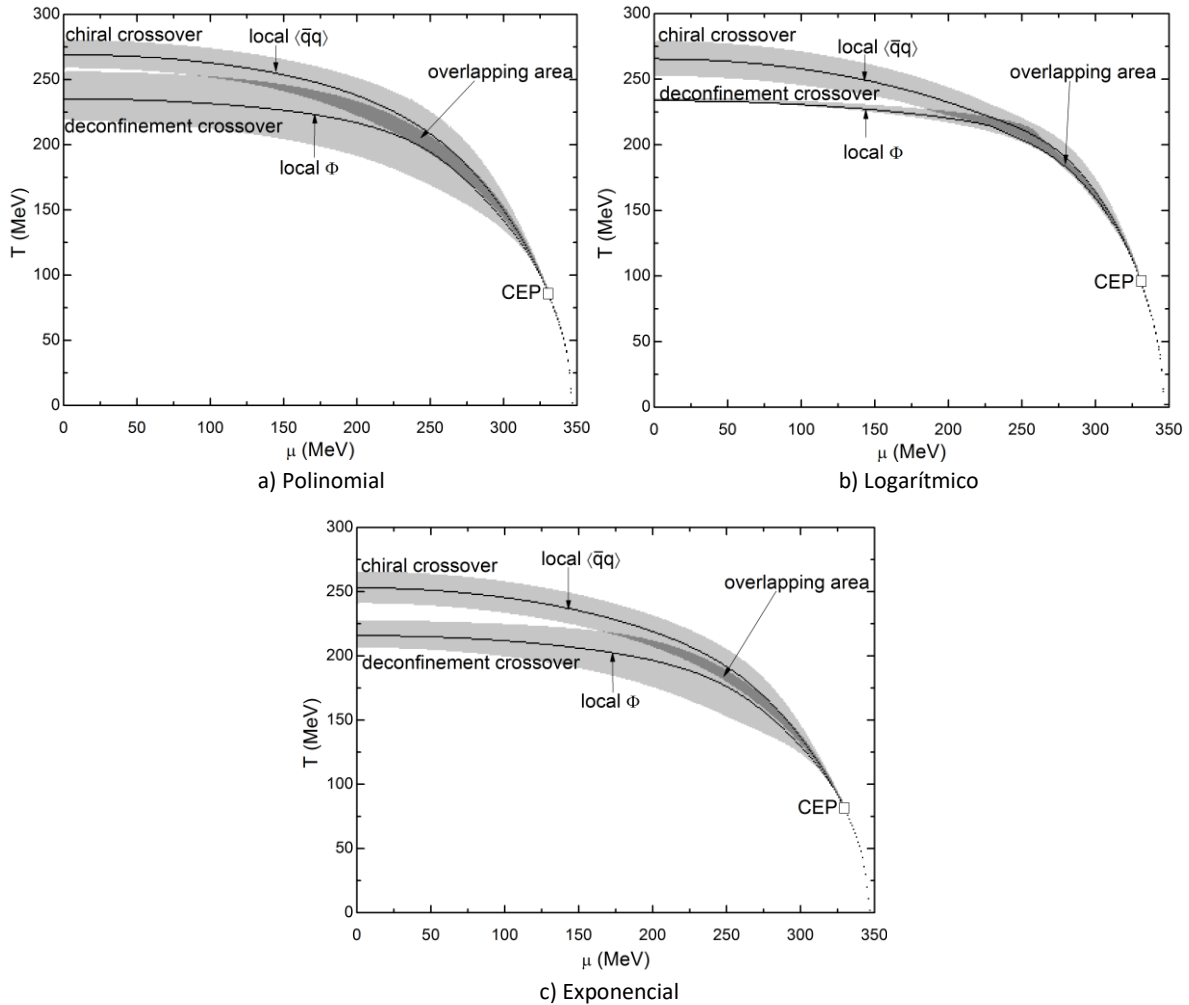


Figura 12: Superposición de diagramas de fase obtenidos con la extensión del criterio local. La banda sombreada de arriba es el crossover quiral y la de abajo es el crossover de desconfinamiento. Las líneas negras en la parte central de las bandas son las del criterio local sin extender (Fig. 9). La parte sombreada más oscura es donde los crossovers se traslapan. El grosor de las bandas va disminuyendo conforme aumenta el potencial químico hasta que éstas desaparecen en el CEP.

### 6.6.2 – Extensión del criterio global

El criterio global es más difícil de extender, ya que está basado en los valores de los parámetros de orden en el CEP (o bien, en los valores de los parámetros de orden en el máximo absoluto de su respectiva susceptibilidad, en caso de no haber un CEP). Para valores del potencial químico más altos que el del CEP, el parámetro de orden empieza a presentar saltos, de un valor mayor que el del CEP a uno menor en el caso de la masa constitutiva, o de un valor menor a uno mayor en el caso

del loop de Polyakov. La magnitud de este salto en unidades de temperatura es exactamente igual a cero en el CEP y se va haciendo cada vez mayor, conforme aumenta el potencial químico.

En un esquema continuo de los parámetros de orden, este problema haría que el criterio global sea imposible de extender, ya que tendríamos que definir al crossover como un solo valor del parámetro de orden porque extender este valor a un rango de valores causaría que el crossover no termine en el CEP, lo cual físicamente no tendría sentido.

En este trabajo se usa un espaciado finito entre los elementos del mallado (Fig. 8), lo cual implica que en el valor calculado del potencial químico inmediatamente sucesor al CEP ya existe un rango de valores del parámetro de orden, cuyo límite superior va aumentando y cuyo límite inferior va disminuyendo (Fig. 13, Fig. 14). Gracias a esta limitante, es posible describir una zona del diagrama donde los valores del parámetro de orden se encuentren estrictamente entre estos dos límites inmediatamente después del CEP, siendo la obvia desventaja que estos límites dependen directamente de la resolución que haya sido usada para obtener el diagrama.

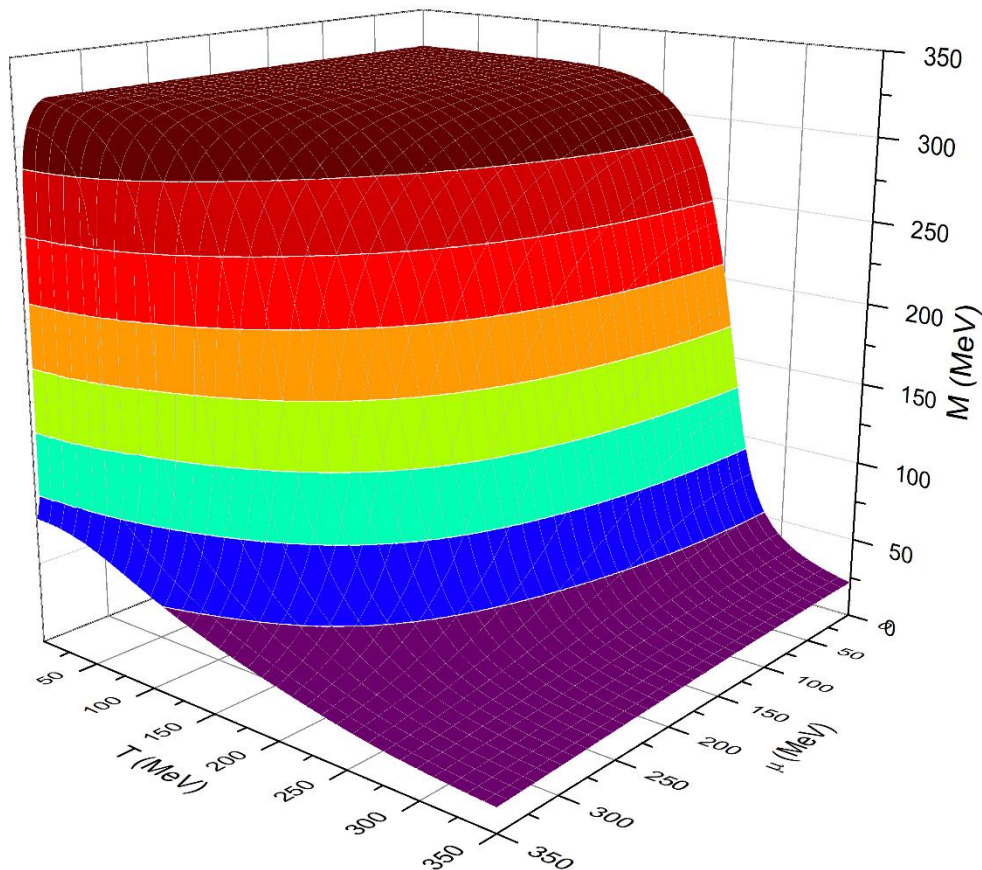


Figura 13: Comportamiento cualitativo de la masa constitutiva de los quarks en el modelo PNJL. Para esta figura se usa el potencial efectivo polinomial. En la primera línea de cuadrícula del potencial químico (de mayor a menor) se distingue un quiebre en la línea antes y después de la transición de fase de primer orden. La extensión del criterio global toma a la última línea de cuadrícula que se quiebra (de potencial químico mayor a menor, de las 351 líneas de cuadrícula que no se muestran en la figura) y los valores antes y después del quiebre representan el intervalo de valores que toma el parámetro de orden en el crossover.

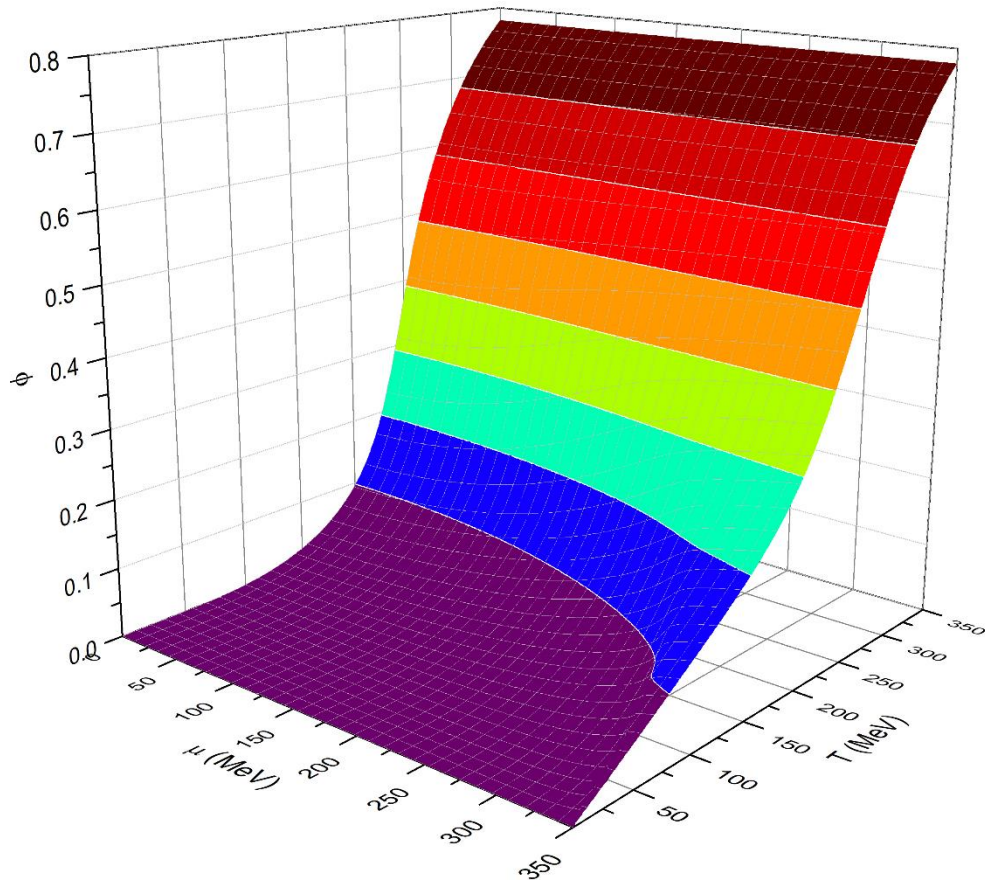


Figura 14: Comportamiento cualitativo del loop de Polyakov en el modelo PNJL. En esta figura se usa el potencial efectivo polinomial. El diagrama de fases de desconfinamiento se obtuvo de la misma manera que se describió el quiral en la Fig. 13. La primera curva de nivel (para un valor más bajo del loop de Polyakov) tiene una curva que se desvía hacia arriba. Sin embargo, los quiebres de la parte más cercana de la superficie según la perspectiva dada (un poco más difíciles de apreciar) son los que indican dónde se encuentra en realidad la transición de fases.

La ventaja de usar este criterio es que se cerciora matemáticamente que la zona de crossover termine en el CEP dada la resolución deseada. Otra desventaja de este criterio es que, si no hay CEP (o no es posible calcular computacionalmente la zona del diagrama de fases donde se encuentra el CEP), no hay forma de escoger un intervalo no arbitrario<sup>17</sup> de valores del parámetro de orden que sirvan para delimitar al crossover.

En la extensión del criterio global, los crossovers en los diagramas de fases obtenidos también contienen a las líneas correspondientes del criterio global sin extender (Fig. 10). Lo que se hizo para determinar la localización de estos crossovers fue: tomar el potencial químico siguiente al del CEP, localizar el salto del parámetro de orden, tomar el valor antes y después del salto y marcar en el plano  $T - \mu$  todas las coordenadas  $(\mu, T)$  cuyo valor del parámetro de orden se encuentre estrictamente (intervalo abierto) entre los dos valores que se tomaron.

17. Una forma de definir al crossover es definir dos intervalos disjuntos de los parámetros de orden para una “fase con simetría restaurada” y una “fase con simetría rota”. Estas simetrías se restaurarían de forma parcial o aproximada por causa de la masa corriente finita de los quarks como ya se ha explicado anteriormente. Como ejemplo, para la  $\Phi$  y  $\Phi^*$  algún intervalo del 10% de su rango, sería entre 0 y 0.1 para la fase con simetría central  $Z_3$  rota y entre 0.9 y 1 para la fase con esta simetría restaurada. Sin embargo, escoger un intervalo del 10% (o cualquier otro número) sólo porque sí no deja de ser arbitrario.

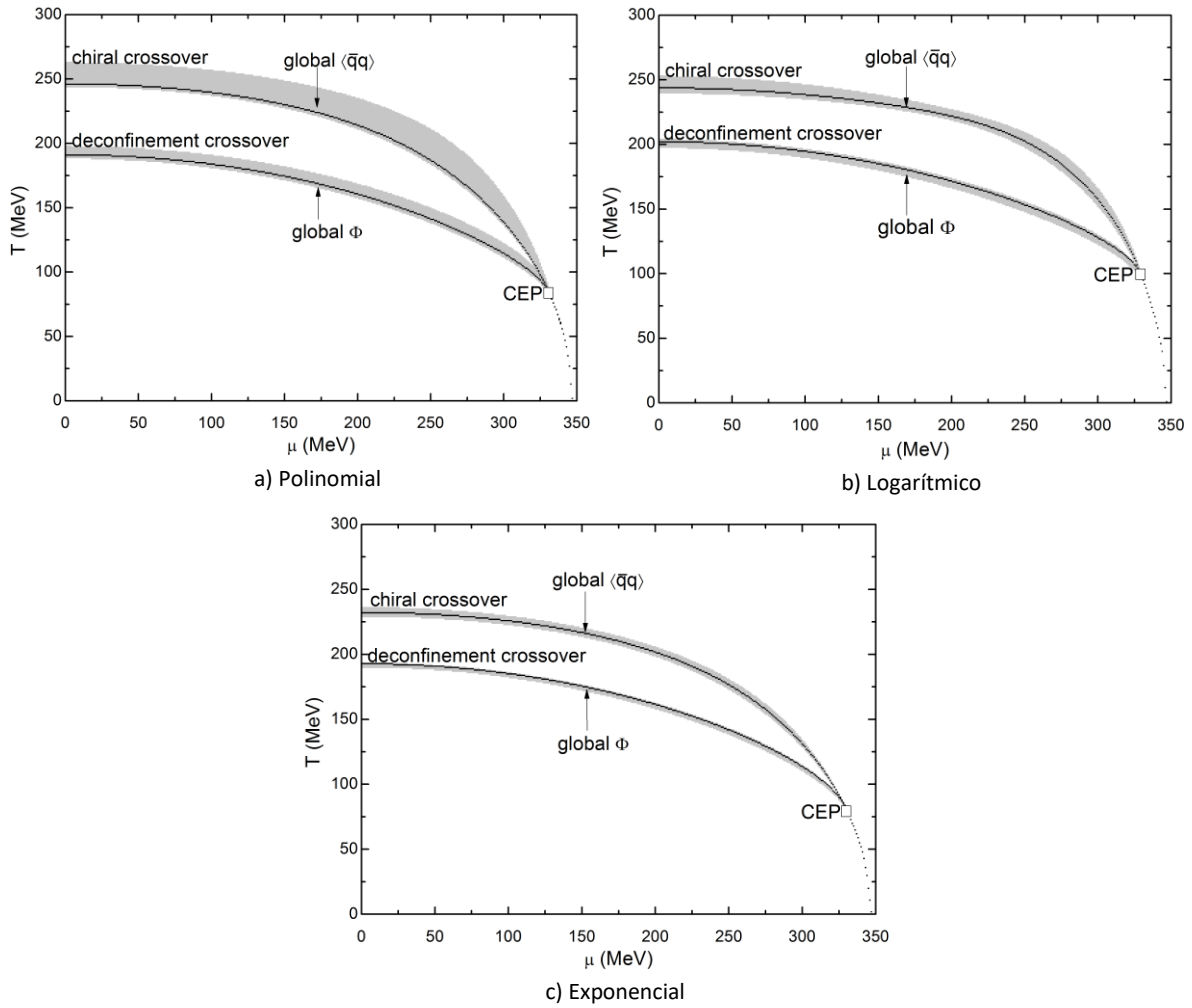


Figura 15: Superposición de diagramas de fase obtenidos con la extensión del criterio global. La banda sombreada de arriba es el crossover quiral y la de abajo es el crossover de desconfinamiento. Las líneas negras en la parte central de las bandas son las del criterio global sin extender (Fig. 10). Por el poco tamaño del espaciado en el mallado (Fig. 8), las bandas del crossover son mucho más delgadas que en la extensión del criterio local (Fig. 12). No obstante, al igual que en el otro criterio, las bandas se hacen más delgadas hasta que desaparecen en el CEP.



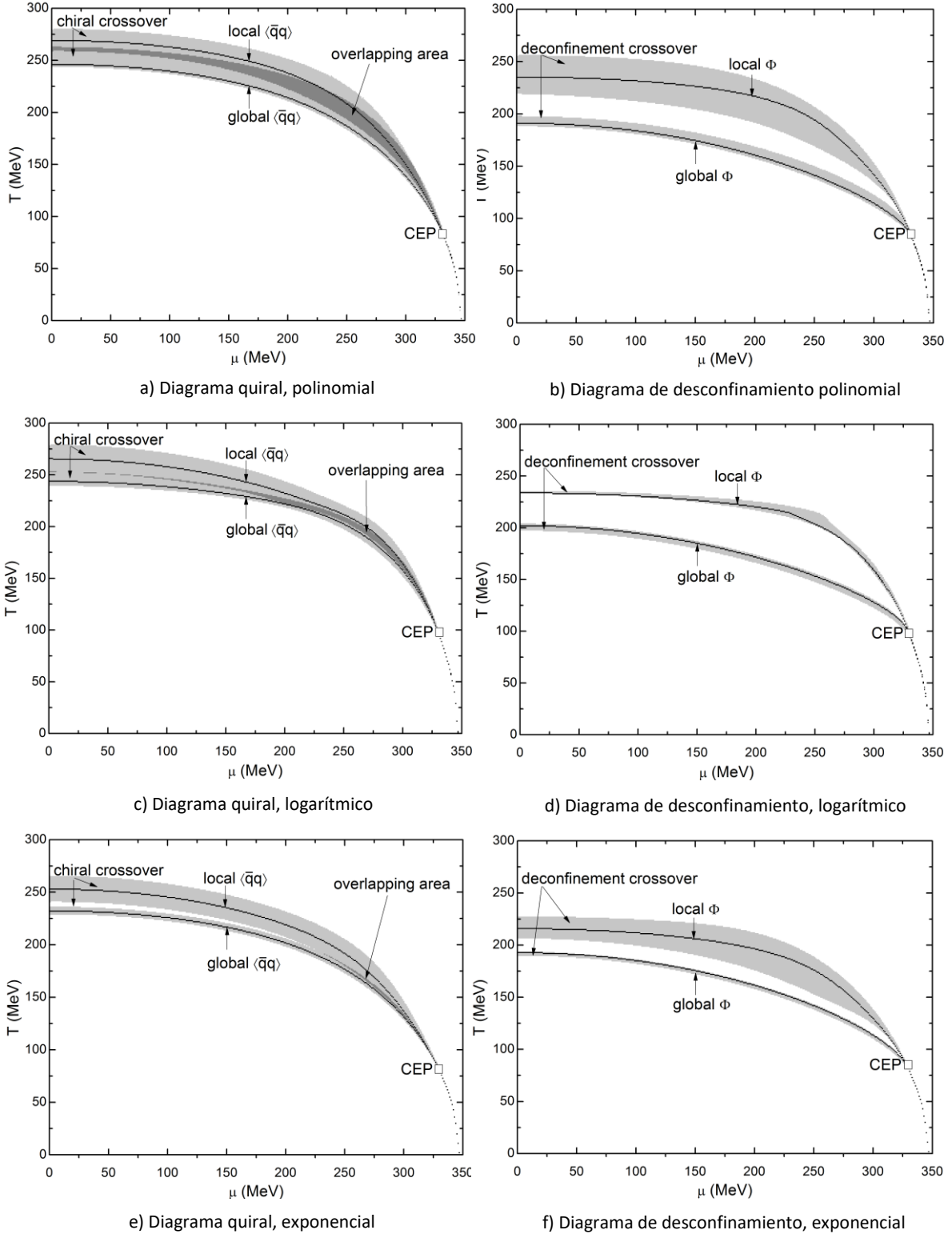


Figura 16: Superposición de diagramas de fase obtenidos con los dos criterios. En todos los diagramas de fase locales se obtiene un crossover a mayores temperaturas que en los locales. Todos los diagramas de fase quirales presentan un traslape en cierta medida, pero ninguno de los diagramas de desconfiamento lo hace. Es importante mencionar que la delgadez de las bandas de los diagramas globales en comparación con los locales (o su anchura en general) se debe al espaciado entre el mallado en el plano  $T - \mu$  (Fig. 8).

## 7 – Discusión y conclusiones

Para potenciales químicos mayores que el del CEP, el límite superior de este salto aumenta conforme  $\mu$  aumenta y el límite inferior disminuye conforme  $\mu$  aumenta. Con esto, se asegura que el crossover exista únicamente para valores iguales o menores que el CEP. Los diagramas de fases obtenidos con esta extensión del criterio global se muestran en la Fig. 15.

Una curiosidad que ocurrió específicamente con el loop de Polyakov fue que, aunque la localización del CEP y de la línea de transición de fase de primer orden en el plano  $T - \mu$  fueron las mismas que sus contrapartes quirales, la gráfica de la susceptibilidad seguía mostrando una forma de campana incluso para potenciales químicos mayores que el del CEP (Fig. 7). Nosotros hemos planteado que el crossover termina en el CEP, por lo que en este trabajo dicha campana no se tomó en cuenta para graficar el crossover. Sin embargo, otros autores insinúan la existencia de una línea de transición de fase que “sube” conforme aumenta el potencial químico [62,67,72]. Una línea como ésta puede ser observada en el comportamiento del loop de Polyakov en el plano  $T - \mu$  (Fig. 14).

Al hacer una comparación directa entre los dos criterios (Fig. 16), notamos que cada crossover se alcanza a menores temperaturas según el criterio global contra el local. Sin embargo, en los diagramas de fase quirales existe un traslape entre los criterios que no se presenta en los diagramas de desconfinamiento. El ancho de las bandas de crossover también es variable: en el criterio local, todos los crossovers tienen una amplitud de varias decenas de MeV a excepción del crossover de desconfinamiento en el potencial efectivo logarítmico (Fig. 16d), lo que implica que el crossover es más rápido en este potencial efectivo que en los otros dos. Mientras tanto, en el criterio global son pocos los casos donde la amplitud del crossover alcanza los 10 MeV (Fig. 16a, Fig. 16c). No obstante, estas anchuras serían más grandes si se hubiera tomado un espaciado mayor en el mallado desde un principio (Fig. 8).

Una implicación fenomenológica importante de los diagramas obtenidos es que, a temperaturas cercanas a cero y potenciales químicos altos, la transición de fase quiral y la de desconfinamiento ocurren simultáneamente (Fig.12, Fig. 15), lo que significa que no hay ninguna fase donde haya desconfinamiento pero no restauración de la simetría quiral, o viceversa. A potenciales químicos cercanos a cero y temperaturas altas, es más difícil establecer dónde queda cada fase, aunque la presencia del crossover en intervalos de temperatura y potencial químico muy diferentes entre los diagramas quirales y de desconfinamiento (Fig.12, Fig. 15) insinúa que la restauración de la simetría quiral y el desconfinamiento nunca se alcanzan en la misma proporción.

Una posibilidad por la que las líneas de transición de fase coincidan en los diagramas quirales contra los de desconfinamiento es que los parámetros de orden forman parte del mismo sistema de ecuaciones autoconsistentes (107). Si la masa constitutiva es discontinua en algún punto del conjunto solución  $(M, \Phi, \Phi^*)$ , es coherente que las otras dos variables también lo sean. No obstante, los puntos donde cada parámetro de orden es más propenso a cambiar no necesariamente tienen que coincidir entre ellos, de ahí las notables diferencias entre los crossovers quiral y de desconfinamiento.

Además del potencial efectivo usado, otras variables que determinan la localización del CEP y de la línea de transición de primer orden son el método de regularización usado [55] y los valores usados

para las masas corrientes de los quarks  $m$ , la constante de acoplamiento  $G$  y el parámetro de corte de momentos  $\Lambda$ , los cuales son en realidad parámetros libres [41]. Sería de gran utilidad que todos estos valores se pudieran acotar con resultados experimentales, para así poder obtener diagramas de fase que tengan un mayor intervalo de confianza con teorías efectivas, como el modelo de PNJL.

En conclusión, lo más importante que hay que tener en cuenta al estudiar a la materia que interactúa fuertemente es que las simetrías más útiles y más interesantes no son las simetrías exactas, sino las aproximadas. De las simetrías exactas se pueden derivar leyes de conservación gracias al teorema de Noether, pero es gracias a las simetrías aproximadas que existen fenómenos tan interesantes como el confinamiento y la libertad asintótica.

La interacción fuerte, en particular en su régimen de bajas energías, es la más inexplorada de las tres interacciones del Modelo Estándar. El diagrama de fases de la QCD es tan sólo una faceta de esta teoría y, aun así, la literatura científica de este tema en particular suele ser contradictoria y poco concluyente. Todavía nos falta mucho que saber tan sólo de este asunto del diagrama de fases, y los experimentos que se harán en un futuro próximo en muchos aceleradores de partículas del mundo tienen mucho potencial de arrojar mucha luz al respecto.

#### Referencias:

- [1] Higgs, P. W.; *Phys. Rev. Lett.*, 13 (16) 498 (1964).
- [2] CMS Collaboration; *Phys. Lett. B*, 716 (1) 30 (2012).
- [3] Yukawa, H.; *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, 17 (48) (1935).
- [4] Gell-Mann, M.; *Phys. Lett.*, 8 (3) 214 (1964).
- [5] Zweig, G.; CERN-TH-401 (1964).
- [6] Han, M. Y., Nambu, Y.; *Phys. Rev.*, 139 (4B) B1006 (1965).
- [7] Bethe, H. A.; *Phys. Rev.*, 72 (4) 339 (1947).
- [8] Schwinger, J.; *Phys. Rev.*, 73 (4) 416 (1948).
- [9] Feynman, R. P.; *Phys. Rev.*, 74 (8) 939 (1948).
- [10] Koba, Z., Tomonaga, S.; *Prog. Theor. Phys.*, 3 (3) 290 (1948).
- [11] Yang, C. N., Mills, R.; *Phys. Rev.*, 96 (1) 191 (1954).
- [12] Glashow, S. L.; *Nucl. Phys.*, 10 (7A) 107 (1959).
- [13] Salam, A., Ward, J. C.; *Nuovo Cimento*, 11 (4) 568 (1959).
- [14] Weinberg, S.; *Phys. Rev. Lett.*, 19 (21) 1264 (1967).
- [15] 't Hooft, G.; *Nucl. Phys. B*, 35 (7A) 167 (1971).
- [16] Breidenbach, M., Friedman, J. I., Kendall, H. W. *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 23 (16) 935 (1969).
- [17] Particle Data Group; *Chinese Phys. C*, 40 (10) 100001 (2016).

- [18] Goldstone, J.; *Nuovo Cimento*, 19 (1) 154 (1961).
- [19] Gross, D. J., Wilczek, F.; *Phys. Rev. Lett.*, 30 (26) 1343 (1973).
- [20] Dürr, H. P., Heisenberg, W., Yamamoto, H., Yamazaki, Y.; *Nuovo Cimento*, 38 (10) 1220 (1965).
- [21] Durr, S., Fodor, Z., Hoelbling, C. *et al.*; *Phys. Lett. B*, 701 (2) 265 (2011).
- [22] FLAG Working Group; *Eur. Phys. J. C*, 74 (9) 2890 (2014).
- [23] Wilson, K. G.; *Phys. Rev. D*, 10 (8) 2445 (1974).
- [24] Hawking, S. W.; *Nature*, 248 (5443) 30 (1974).
- [25] Kaczmarek, F., Karsch, F., Laermann, E. *et al.*; *Phys. Rev. D*, 83 (1) 014504 (2011).
- [26] Weise, W.; *Int. J. Mod. Phys. E*, 27 (12) 1840004 (2018).
- [27] Lastowiecki, R., Blaschke, D., Fischer, T., Klahn, T.; *Phys. Part. Nucl.*, 46 (5) 843 (2015).
- [28] Buballa, M., Carignano, S.; *Eur. Phys. J. A*, 52 (3) 1 (2016).
- [29] Lenzi, C. H., Schneider, A. S., Providência, C., Marinho, R. M.; *Phys. Rev. C*, 82 (1) 015809 (2010).
- [30] Shuryak, E. V.; *Phys. Lett.*, 78B (1) 150 (1978).
- [31] Nambu, Y., Jona-Lasinio, G.; *Phys. Rev.*, 122 (1) 345 (1961).
- [32] Klevansky, S. P.; *Rev. Mod. Phys.*, 64 (3) 649 (1992).
- [33] Koch, V., Biro, T., Kunz, J., Mosel, U.; *Phys. Lett. B*, 185 (1,2) 1 (1987).
- [34] Vogl, U., Weise, W.; *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 27 195 (1991).
- [35] Andersen, J. O., Naylor, W. R., Tranberg, A.; *Rev. Mod. Phys.*, 88 (2) 025001 (2016).
- [36] Schaefer, B.-J., Wagner, M., Wambach, J.; *Phys. Rev. D*, 81 (7) 074013 (2010).
- [37] Polyakov, A. M.; *Phys. Lett.*, 72B (4) 477 (1978).
- [38] Megías, E., Ruiz Arreola, E., Salcedo, L. L.; *Phys. Rev. D*, 74 (6) 065005 (2006).
- [39] Markó, G., Szép, Zs.; *Phys. Rev. D*, 82 (6) 065021 (2010).
- [40] Hell, T., Rößner, S., Cristoforetti, M., Weise, W.; *Phys. Rev. D*, 81 (7) 074034 (2010).
- [41] Ratti, C., Thaler, M. A., Weise, W.; *Phys. Rev. D*, 73 (1) 014019 (2006).
- [42] Sasaki, C., Friman, B., Redlich, K.; *Phys. Rev. D*, 75 (7) 074013 (2007).
- [43] Dumitru, A., Pisarski, R. D., Zschieche, D.; *Phys. Rev. D*, 72 (6) 065008 (2005).
- [44] Kapusta, J. I., Gale, C.; (2006). Spontaneous Symmetry Breaking and Restoration. En: Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications; Cambridge Monographs on Mathematical Physics (pp. 117-134), Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- [45] Nieto, A.; *Comput. Phys. Commun.*, 92 (1) 54 (1995).

- [46] Buballa, M.; *Phys. Rep.*, 407 (4-6) 205 (2005).
- [47] Diakonov, D., Oswald, M.; *Phys. Rev. D*, 70 (10) 105016 (2004).
- [48] Cui, Z.-F., Zhang, J.-L., Zong, H.-S.; *Sci. Rep.*, 7 (1) 45937 (2017).
- [49] Deur, A., Brodsky, S. J., de Téramond, G. F.; *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 90 1 (2018).
- [50] Busza, W., Rajagopal, K., van der Schee, W.; *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 68 (1) 339 (2018).
- [51] Costa, P., Hansen, H., Ruivo, M. C., de Sousa, C. A.; *Phys. Rev. D*, 81 (1) 016007 (2010).
- [52] Zhao, Y.-P., Yin, P.-L., Yu, Z.-H., Zong, H.-S.; *Nucl. Phys. B*, 952 114919 (2020).
- [53] Kalinovsky, Y. L., Friesen, A. V.; *Phys. Elem. Part. Atom. Nucl.*, 12 (6) 737 (2015).
- [54] Fujihara, T., Kimura, D., Inagaki, T., Kvinikhidze, A.; *Phys. Rev. D*, 79 (9) 096008 (2009).
- [55] Kohyama, H., Kimura, D., Inagaki, T.; *Nucl. Phys. B*, 896 682 (2015).
- [56] Haas, L. M., Stiele, R., Braun, J. *et al.*; *Phys. Rev. D*, 87 (7) 076004 (2013).
- [57] Nishimura, H., Korthals-Altes, C., Pisarski, R. D., Skokov, V.; *Proc. Sci.*, 155 (2018).
- [58] Costa, P., Ruivo, M. C., de Sousa, C. A. *et al.*; *Phys. Rev. D*, 79 (11) 116003 (2009).
- [59] Hansen, H., Alberico, W. M., Beraudo, A. *et al.*; *Int. J. Mod. Phys. E*, 16 (7) 2249 (2007).
- [60] Boyd, G., Engels, J., Karsch, F. *et al.*; *Nucl. Phys. B*, 469 (3) 419 (1996).
- [61] Röbner, S., Ratti, C., Weise, W.; *Phys. Rev. D*, 75 (3) 034007 (2007).
- [62] Fukushima, K.; *Phys. Rev. D*, 77 (11) 114028 (2008).
- [63] Bhattacharyya, A., Deb, P., Ghosh, S. K., Ray, R.; *Phys. Rev. D*, 82 (1) 014021 (2010).
- [64] Schaefer, B.-J., Pawłowski, J. M., Wambach, J.; *Phys. Rev. D*, 76 (7) 074023 (2007).
- [65] Fukushima, K., Ruggieri, M., Gatto, R.; *Phys. Rev. D*, 81 (11) 114031 (2010).
- [66] Fukushima, K.; *Phys. Lett. B*, 591 (3) 277 (2004).
- [67] Shao, G. Y., Di Toro, M., Greco, V. *et al.*; *Phys. Rev. D*, 84 (3) 034028 (2011).
- [68] Sakai, Y., Sasaki, T., Kouno, H., Yahiro, M.; *Phys. Rev. D*, 82 (7) 076003 (2010).
- [69] D'Elia, M., Mukherjee, S., Sanfilippo, F.; *Phys. Rev. D*, 82 (5) 051501 (2010).
- [70] Xu, S.-S., Yin, P.-L., Zong, H.-S.; *Eur. Phys. J. C*, 79 (5) 399 (2019).
- [71] Friman, B., Höhne, C., Knoll, J. *et al.*; (2011). Introduction. En: *The CBM Physics Book: Compressed Baryonic Matter in Laboratory Experiments; Lecture Notes in Physics 814* (pp. 41-47), Springer. Heidelberg, Alemania.
- [72] Herbst, T. K., Pawłowski, J. M., Schaefer, B.-J.; *Phys. Lett. B*, 696 (1) 58 (2011).

## Glosario

Nota: Cualquier letra griega que aparezca en un superíndice o subíndice indica coordenadas espaciotemporales al menos que se indique lo contrario.

$\vec{A}$	Potencial vector.
$A_\mu$	1. Cuadrivector de potencial. 2. Campo de norma.
$A_4$	Campo gluónico estacionario.
$a_n, b_n$	Constantes de ajuste del potencial efectivo ( $a_n$ está entre $a_0$ y $a_3$ , $b_n$ entre $b_2$ y $b_4$ ).
$a_3, a_8$	Constantes de parametrización del campo gluónico estacionario.
$B, \bar{B}$	Azul, antiazul (colores).
$b, \bar{b}$	Quark bottom, antiquark bottom.
$C$	Operador de correlación.
$C_{ab}$	Elemento de la matriz de concavidad adimensional.
$c, \bar{c}$	1. Velocidad de la luz. 2. Quark charm, antiquark charm.
$c_a$	Parámetros de orden.
$CEP$	Punto final crítico.
$D$	Derivada covariante (lleva un subíndice que indica la variable de derivación).
$D^{-1}$	Propagador inverso de Dirac.
$d, \bar{d}$	Quark down, antiquark down.
$\text{Det}\{A\}$	Determinante de A.
$\text{Diag}\{A\}$	A diagonalizada.
$E, \hat{E}$	Energía (observable y operador respectivamente).
$E_p$	Energía relativista.
$e^-, e^+$	Electrón, positrón.
$F_{\mu\nu}$	Tensor de campo electromagnético.
$f_\pi$	Constante de decaimiento del pion.
$G, \bar{G}$	1. Constante de acoplamiento del modelo <i>NJL</i> . 2. Verde, antiverde (colores).
$G_C$	Valor crítico de la constante de acoplamiento del modelo <i>NJL</i> .
$G_{\mu\nu}$	Tensor de campo fuerte.
$g$	1. Constante de acoplamiento fuerte. 2. Gluón.

$g^{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski (los índices pueden ser dos letras griegas cualesquiera).
$H$	Bosón de Higgs.
$h$	Constante de Planck.
$\hbar$	Constante reducida de Planck.
$I$	Matriz identidad.
$\vec{j}$	Corriente de probabilidad, corriente conservada.
$J^\mu$	Cuadrivector de corriente conservada.
$k_B$	Constante de Boltzmann.
$L$	1. Lagrangiana. 2. Longitud.
$\mathcal{L}$	Densidad lagrangiana (un subíndice indica la teoría o uno de los términos de ésta).
$MFA$	Aproximación de campo medio.
$M$	Masa constitutiva.
$m$	Masa (un subíndice indica la partícula a la que pertenece esta masa), masa corriente.
$\hat{m}$	Matriz de masas.
$N$	Número total de partículas del conjunto estadístico.
$N'$	Número de partículas del conjunto estadístico en algún estado determinado.
$\mathbb{N}$	Números naturales.
$N_c$	Número de colores.
$N_f$	Número de sabores.
$NJL$	Modelo de Nambu-Jona-Lasinio.
$P$	1. Probabilidad. 2. Matriz unitaria de transformación.
$\mathcal{P}$	Operador de orden de camino.
$\hat{P}$	Paridad.
$\vec{p}, \hat{p}$	Momento lineal (observable y operador respectivamente).
$p_\mu$	Cuadrimomento.
$PNJL$	Modelo de Nambu-Jona-Lasinio extendido con el loop de Polyakov.
$Q_R, Q_L$	Operadores de quiralidad.
$q$	Carga eléctrica.
$QCD$	Cromodinámica cuántica.

$QED$	Electrodinámica cuántica.
$QGP$	Plasma de quarks y gluones.
$R, \bar{R}$	Rojo, antirrojo (colores).
$R_{ij}$	Rotación espacial (i y j representan coordenadas espaciales).
$s, \bar{s}$	1. Espín. 2. Quark strange, antiquark strange.
$SU(2)$	Grupo especial unitario de transformaciones de matrices de $2 \times 2$ (determinante 1).
$SU(3)$	Grupo especial unitario de transformaciones de matrices de $3 \times 3$ (determinante 1).
$SU(N)$	Grupo especial unitario de transformaciones de matrices de $N \times N$ (determinante 1).
$T$	Temperatura.
$T_0$	Temperatura crítica.
$T_{CEP}$	Temperatura del punto final crítico.
$T_{pc}$	Temperatura pseudocrítica.
$T_i$	Traslación espacial (i representa alguna coordenada espacial).
$t, \bar{t}$	1. Tiempo. 2. Quark top, antiquark top.
$\text{tr}\{A\}$	Traza de A.
$\mathcal{U}$	Potencial efectivo.
$u, \bar{u}$	Quark up, antiquark up.
$U(1)$	Grupo unitario de transformaciones en el plano complejo (matrices de $1 \times 1$ ).
$V$	1. Potencial. 2. Volumen.
$W^\pm$	Bosón W.
$x$	Coordenadas espaciales (puede o no estar acompañado de un subíndice latino).
$\vec{x}$	Vector de posición.
$x_\mu$	Coordenadas espaciotemporales (puede llevar otro subíndice griego).
$Z$	Función de partición.
$\mathbb{Z}$	Números enteros.
$Z^0$	Bosón Z.
$Z_3$	Centro del grupo de transformaciones $SU(3)$ .
$\alpha$	Constante de estructura fina.
$\alpha_i$	Constantes de parametrización de $Z_3$ para el loop de Polyakov, (i puede ser 1, 2 ó 3).



$\beta$	Beta termodinámica (inverso de la temperatura en unidades naturales).
$\gamma$	Fotón.
$\gamma^\mu$	Matrices de Dirac (un número en lugar de un índice griego indica una matriz específica).
$\gamma_5$	Matriz de quiralidad.
$\Delta^{++}$	Barión delta ++.
$\delta^{ab}$	Delta de Kronecker.
$\theta$	Parámetro de la transformación (si lleva un índice es un elemento en un espacio).
$\Lambda$	Parámetro de corte de momentos (cutoff).
$\lambda$	1. Constante de acoplamiento en la teoría $\varphi^4$ . 2. Transformación de Lorentz.
$\lambda_a$	Matrices de Gell-Mann (un número en lugar de a indica una matriz específica).
$\mu$	Potencial químico (un subíndice indica la partícula correspondiente).
$\mu_{CEP}$	Potencial químico del punto final crítico.
$\mu^-, \mu^+$	Muón, antimuón.
$\mu^2$	Término negativo de masa de la teoría $\varphi^4$ .
$\nu_x, \bar{\nu}_x$	Neutrino, antineutrino (la x indica la familia leptónica que puede ser e, $\mu$ o $\tau$ ).
$\pi^b$	Valor esperado de los campos pi.
$\rho$	Densidad de probabilidad, carga conservada.
$\sigma$	Valor esperado del campo sigma.
$\sigma^b$	Matrices de Pauli (un número en lugar de b indica una matriz específica).
$\tau$	Tiempo imaginario.
$\tau^-, \tau^+$	Leptón tau, antileptón tau.
$\tau^a, \tau^b$	Generadores del grupo de transformaciones ( $SU(3)$ , $SU(2)$ ).
$\Phi$	Loop de Polyakov.
$\phi$	Potencial escalar.
$\varphi$	Campo escalar complejo.
$\varphi^4$	Teoría sencilla donde se puede observar el rompimiento espontáneo de la simetría.
$\chi_{MM}$	Susceptibilidad quiral.
$\bar{\chi}_{\Phi\Phi}$	Susceptibilidad del loop de Polyakov.
$\psi$	Campo de Dirac.

$ \psi\rangle$	Vector de estado.
$\Omega$	Gran potencial termodinámico.
$\Omega^-$	Barión omega -.
$\omega_n$	Frecuencias de Matsubara.
$\nabla$	Gradiente.
$\nabla \cdot$	Divergencia.
$\nabla^2$	Laplaciano.
$\partial$	Derivada parcial (lleva un subíndice que indica la variable de derivación).
$\partial^2$	Segunda derivada parcial (lleva un subíndice que indica la variable de derivación).
*	Como superíndice, complejo conjugado.
†	Como superíndice, transpuesto complejo conjugado.
'	Como superíndice, transformado.
$\in$	Es elemento de.
$\cap$	Intersección.
$\forall$	Para todo.
$\rightarrow$	Transformación
$\langle A \rangle$	Valor esperado en el vacío, A puede ser un campo cualquiera.
$[A, B]$	Conmutador, A y B pueden ser dos cantidades u operadores cualesquiera.
$\{A, B\}$	Anticonmutador, A y B pueden ser dos cantidades u operadores cualesquiera.

## Anexo 1 – Propiedades de anticonmutación y de cuadrados de las matrices de Dirac

Las matrices propuestas por Dirac  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  (17) anticonmutan y además son sus propias matrices inversas, es decir, dan como resultado la matriz identidad cuando son elevadas al cuadrado (ejemplo:  $A = A^{-1} \rightarrow A = A^{-1}I_{4 \times 4} \rightarrow AA = AA^{-1}I_{4 \times 4} \rightarrow A^2 = I_{4 \times 4}$ ):

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = -AB$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -AC$$

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -AD$$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -BC$$

$$BD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -BD$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = -DC$$

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
C^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
D^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sea  $S$  cualquier matriz de  $4 \times 4$  con un determinante diferente de cero (existe una cantidad infinita de matrices de estas características), definimos un nuevo conjunto de matrices  $\{A', B', C', D'\} \equiv \{SAS^{-1}, SBS^{-1}, SCS^{-1}, SDS^{-1}\}$  y este nuevo conjunto de matrices conservará las propiedades de anticonmutación y de cuadrados del conjunto  $\{A, B, C, D\}$  original. Sea  $N_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$  tal que  $N_1 = A, N_2 = B, N_3 = C, N_4 = D$  y además sea  $N'_i = SN_iS^{-1}$ :

$$\{N_i, N_j\} = N_iN_j + N_jN_i = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$N_i^2 = 1 \quad \forall i$$

Fue lo que se comprobó antes en términos de  $N_i$ . Se resuelven estas operaciones para  $N'_i$ :

$$\begin{aligned}
\{N'_i, N'_j\} &= N'_iN'_j + N'_jN'_i = SN_iS^{-1}SN_jS^{-1} + SN_jS^{-1}SN_iS^{-1} = SN_iN_jS^{-1} + SN_jN_iS^{-1} \\
&= S(N_iN_j + N_jN_i)S^{-1} = 0 \quad \forall i \neq j
\end{aligned}$$

$$N_i'^2 = N'_iN'_i = SN_iS^{-1}SN_iS^{-1} = SN_iN_iS^{-1} = SS^{-1} = 1 \quad \forall i$$

Por lo tanto, existe un conjunto diferente de matrices  $\{A, B, C, D\}$  que satisfacen las propiedades de cuadrados y de anticonmutación para cada matriz  $S$  de  $4 \times 4$  con un determinante diferente de cero. Como son infinitas, hay una cantidad infinita de representaciones válidas para estas matrices.

## Anexo 2 – $\bar{\psi}\psi$ como escalar de Lorentz

Sea  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi$ , donde  $\psi$  es un espinor de Dirac, es decir, que satisface (23),  $\psi^\dagger$  es la transpuesta

compleja conjugada de  $\psi$  y  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (20).

$\psi$  es un vector columna de cuatro componentes y  $\psi^\dagger$  es un vector renglón también de cuatro componentes. Por lo tanto,  $\bar{\psi}\psi$  y  $\psi^\dagger\psi$  son ambas cantidades con una sola componente. En caso de que alguna cantidad como ésta no varíe ante una transformación de Lorentz, se trata de un escalar de Lorentz. Sabemos que para hacer una transformación de Lorentz del campo de Dirac se hace mediante un operador:

$$\psi \rightarrow \psi' = \lambda \psi$$

$$\psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger = (\lambda \psi)^\dagger = \psi^\dagger \lambda^\dagger$$

$\lambda$  es un operador matricial que representa a la transformación de Lorentz:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & T_x & T_y & T_z \\ -T_x & 1 & -R_{xy} & R_{xz} \\ -T_y & R_{xy} & 1 & -R_{yz} \\ -T_z & -R_{xz} & R_{yz} & 1 \end{pmatrix}$$

$T_i$  representa una traslación en la dirección  $i$  y  $R_{ij}$  representa una rotación paralela al plano  $ij$ .

Por esto,  $\psi'^\dagger \psi' = \psi^\dagger \lambda^\dagger \lambda \psi \neq \psi^\dagger \psi$ , porque por lo general  $\lambda^\dagger \neq \lambda^{-1}$ . Esto implica que  $\psi^\dagger \psi$  no es necesariamente un escalar de Lorentz. Ahora, para el término  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi$  se aplica la transformación de Lorentz:

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rightarrow \psi'^\dagger \lambda^\dagger \gamma^0 \lambda \psi$$

Como  $(\gamma^0)^2 = \gamma^0 \gamma^0 = 1$ :

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \lambda^\dagger \gamma^0 \lambda \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \lambda^\dagger \gamma^0 \lambda \psi = \bar{\psi} \gamma^0 \lambda^\dagger \gamma^0 \lambda \psi$$

Nótese que  $\lambda$  es antihermitiana y  $\gamma^0$  es hermitiana. Esto implica que  $\lambda^\dagger = \gamma^0 \lambda^{-1} \gamma^0$ , o bien,  $\lambda^{-1} = \gamma^0 \lambda^\dagger \gamma^0$ .

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi} \gamma^0 \lambda^\dagger \gamma^0 \lambda \psi = \bar{\psi} \lambda^{-1} \lambda \psi = \bar{\psi}\psi$$

Luego,  $\bar{\psi}\psi$  es invariante ante transformaciones de Lorentz.

### Anexo 3 – Ecuaciones de Euler-Lagrange para los espinores de Dirac

Se tiene la lagrangiana de Dirac (24):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos toman a estos campos en lugar de las usuales coordenadas generalizadas:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \partial_\mu 0 = 0$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

Y la ecuación de movimiento correspondiente a  $\bar{\psi}$  es la ecuación de Dirac (23). La ecuación de movimiento del campo  $\psi$  corresponde a la transpuesta compleja conjugada de (23). Esto es más fácil de ver al calcular esta cantidad y compararla con la otra ecuación de movimiento después. Primero se multiplica por la izquierda por  $\gamma^0$  para que la ecuación quede en términos de  $\bar{\psi}$  y no de  $\psi^\dagger$ :

$$\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \gamma^0 0 = 0$$

$$(i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^0 m)\psi = 0$$

$m$  es una constante, por lo que conmuta con la  $\gamma^0$ . Además, multiplicar por  $\gamma^0\gamma^0$  equivale a multiplicar por la matriz identidad (Anexo 1):

$$(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0\partial_\mu - m\gamma^0)\psi = 0$$

$\gamma^0\partial_\mu = \partial_\mu\gamma^0$  porque las matrices de Dirac no dependen de las coordenadas espaciotemporales:

$$(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\partial_\mu\gamma^0 - m\gamma^0)\psi = 0$$

$$(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\partial_\mu - m)\gamma^0\psi = 0$$

Por propiedades de anticonmutación,  $\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^i$ . Esto se ha comprobado más arriba (Anexo 1), donde  $\gamma^i = -iN_i$ ,  $i = \{1,2,3\}$ . Además, viendo las matrices de Dirac (20), la matriz  $\gamma^0$  es hermitiana, es decir,  $\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$  y las otras tres matrices  $\gamma^i$  son antihermitianas ( $-\gamma^i = \gamma^{i\dagger}$ ). Por esto se puede expresar para todos los valores de  $\mu = \{0,1,2,3\}$  la propiedad  $\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}$ :

$$(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\partial_\mu - m)\gamma^0\psi = 0$$

$$(i\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m)\gamma^0\psi = 0$$

$$(i\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m)\gamma^0\psi = 0$$

Ahora se calcula la transpuesta compleja conjugada de los dos lados del igual:

$$[(i\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m)\gamma^0\psi]^\dagger = 0^\dagger = 0$$

$$(\gamma^0 \psi)^\dagger (i\gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu - m)^\dagger = 0$$

$$\psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu - m)^\dagger = 0$$

$$\psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu - m)^\dagger = 0$$

$$\bar{\psi} (i\gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu - m)^\dagger = 0$$

$m$  es una constante real, por lo que  $m^\dagger = m$ .  $\partial_\mu$  es un operador de derivación que está representado por un renglón (y por esto actúa hacia lo que está a la derecha).  $\partial_\mu^\dagger$  es una columna y actúa hacia la izquierda:

$$\bar{\psi} (-i\gamma^{\mu\dagger} \partial_\mu^\dagger - m) = 0$$

$$\bar{\psi} (-i\gamma^\mu \partial_\mu^\dagger - m) = 0$$

$\partial_\mu$  representa derivadas parciales con respecto a las coordenadas espaciales y  $ct$  (21). Todas estas derivaciones son con respecto a números reales, por lo que no hay cambios de signo al calcular la transpuesta compleja conjugada de este operador, solamente el cambio en la orientación. Además,  $\gamma^\mu \partial_\mu^\dagger = \partial_\mu^\dagger \gamma^\mu$  porque las matrices de Dirac no dependen de las coordenadas espaciotemporales.

$$\bar{\psi} (-i\partial_\mu^\dagger \gamma^\mu - m) = 0$$

$$-i\bar{\psi} \partial_\mu^\dagger \gamma^\mu - \bar{\psi} m = 0$$

Como el operador columna  $\partial_\mu^\dagger$  opera sobre el renglón  $\bar{\psi}$  que está a la izquierda,  $\bar{\psi} \partial_\mu^\dagger$  representa un "cuadriproducto escalar" que puede ser representado de forma equivalente como  $\partial_\mu \bar{\psi}$ :

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \bar{\psi} m = 0$$

Ahora esto se compara contra la ecuación de Euler-Lagrange para  $\psi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0$$

$$-\bar{\psi} m - \partial_\mu \bar{\psi} i\gamma^\mu = 0$$

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \bar{\psi} m = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  dan como resultado la ecuación de Dirac y su transpuesta compleja conjugada, respectivamente.

#### Anexo 4 – Relaciones de conmutación de las matrices de Gell-Mann

Se calculan los conmutadores para las matrices de Gell-Mann (30) y el lado derecho del igual de (32) para cada pareja usando los valores conocidos de las trazas (Tabla 2):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \sum_c \text{tr}\{\lambda_1[\lambda_2, \lambda_c]\} \lambda_c = (2i)\lambda_3 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_3] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_3] = \sum_c \text{tr}\{\lambda_1[\lambda_3, \lambda_c]\} \lambda_c = (-2i)\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_4] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_4] = \sum_c \text{tr}\{\lambda_1[\lambda_4, \lambda_c]\} \lambda_c = (i)\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_5] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_5] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_1, \lambda_5] = \sum_c \text{tr}\{\lambda_1[\lambda_5, \lambda_c]\} \lambda_c = (-i)\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$











$$\begin{aligned}
[\lambda_5, \lambda_7] &= \sum_c \text{tr}\{\lambda_5[\lambda_7, \lambda_c]\} \lambda_c = (i)\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_5, \lambda_8] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_5, \lambda_8] &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_5, \lambda_8] &= \sum_c \text{tr}\{\lambda_5[\lambda_8, \lambda_c]\} \lambda_c = (\sqrt{3}i)\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_7] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_7] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_7] &= \sum_c \text{tr}\{\lambda_6[\lambda_7, \lambda_c]\} \lambda_c = (-i)\lambda_3 + (\sqrt{3}i)\lambda_8 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_7] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_8] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_8] &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_6, \lambda_8] &= \sum_c \text{tr}\{\lambda_6[\lambda_8, \lambda_c]\} \lambda_c = (-\sqrt{3}i)\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_7, \lambda_8] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_7, \lambda_8] &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}i \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{pmatrix} \\
[\lambda_7, \lambda_8] &= \sum_c \text{tr}\{\lambda_7[\lambda_8, \lambda_c]\} \lambda_c = (\sqrt{3}i)\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}i \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y como  $[a, b] = -[b, a]$ , con esto se cubren todas las relaciones de conmutaci3n.

## Anexo 5 – Invariancia de norma de la QCD

Se tiene la lagrangiana de la QCD (37) y la transformación de norma (39):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$D_\mu$  representa a la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^a$$

Se transforman los campos  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  y  $A_\mu^a$  en  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi' - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a$$

$$\mathcal{L}' = (\psi^\dagger \gamma^0)' \left( i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^a \right)' - m \right) \psi'$$

$$- \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}\partial^\mu \lambda^a A_\nu^a - \frac{1}{2}\partial^\nu \lambda^a A_\mu^a \pm \frac{1}{2}ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b[\lambda_c, \lambda_a]\} \lambda^a A_\mu^b A_\nu^c \right)' \left( \frac{1}{2}\partial_\mu \lambda_a A_\nu^a \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\partial_\nu \lambda_a A_\mu^a \pm \frac{1}{2}ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b[\lambda_c, \lambda_a]\} \lambda_a A_\mu^b A_\nu^c \right)'$$

Subir o bajar un índice de color  $\{a, b, c\}$  es trivial. Se transforman los campos de Dirac:

$$\mathcal{L}' = (\psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a})\gamma^0 \left( i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^a \right)' - m \right) e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$- \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}\partial^\mu \lambda^a A_\nu^a - \frac{1}{2}\partial^\nu \lambda^a A_\mu^a \pm \frac{1}{2}ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b[\lambda_c, \lambda_a]\} \lambda^a A_\mu^b A_\nu^c \right)' \left( \frac{1}{2}\partial_\mu \lambda_a A_\nu^a \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\partial_\nu \lambda_a A_\mu^a \pm \frac{1}{2}ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b[\lambda_c, \lambda_a]\} \lambda_a A_\mu^b A_\nu^c \right)'$$

Trabajando con la lagrangiana de Dirac, se distribuyen las operaciones:

$$\mathcal{L}_{Dirac}' = \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 \left( i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^a \right)' - m \right) e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac}' = \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma^\mu \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^a \right)' e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$- \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 m e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac}' = \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma^\mu \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^{a'} \right)' e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$- \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 m e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac}' = \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu \partial_\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu \frac{1}{2}ig\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

$$- \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 m e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}\psi$$

Se calcula la derivada del primer término:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Dirac}' &= \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu (e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu \psi + (\partial_\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) \psi) \\ &\quad - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi \\ &\quad - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 m e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Dirac}' &= \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu (e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu \psi + ig[\partial_\mu \theta_a(x^\mu)\tau^a] e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi) \\ &\quad - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi \\ &\quad - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 m e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Dirac}' &= \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu \psi \\ &\quad + \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu ig[\partial_\mu \theta_a(x^\mu)\tau^a] e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi \\ &\quad - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi \\ &\quad - \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 m e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi\end{aligned}$$

$e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$  conmutan con las matrices de Dirac:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Dirac}' &= \psi^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \psi^\dagger e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^0 i\gamma^\mu ig[\partial_\mu \theta_a(x^\mu)\tau^a] e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi \\ &\quad - \psi^\dagger \gamma^0 e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} i\gamma^\mu \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi - \psi^\dagger \gamma^0 m \psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Dirac}' &= \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^\mu g[\partial_\mu \theta_a(x^\mu)\tau^a] e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi \\ &\quad + \bar{\psi} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^\mu \frac{1}{2} g\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi - \bar{\psi} m \psi\end{aligned}$$

Ya se tienen algunos términos que aparecen en la lagrangiana de Dirac original:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} \left( i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^a \right) - m \right) \psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^a \right) \psi - \bar{\psi} m \psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} i\gamma^\mu \frac{1}{2} ig\lambda_a A_\mu^a \psi - \bar{\psi} m \psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} g\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_a A_\mu^a \psi - \bar{\psi} m \psi$$

El primer y el último término corresponden exactamente. Los términos restantes de la lagrangiana transformada:

$$-\bar{\psi} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^\mu g[\partial_\mu \theta_a(x^\mu)\tau^a] e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi + \bar{\psi} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \gamma^\mu \frac{1}{2} g\lambda_a A_\mu^{a'} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi$$

corresponden exactamente al término restante de la lagrangiana original  $\frac{1}{2} g\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_a A_\mu^a \psi$  si y sólo si la lagrangiana es invariante de norma. Se trabaja con los términos restantes de la lagrangiana transformada:

$$\bar{\psi} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \left\{ -g\gamma^\mu [\partial_\mu \theta_a(x^\mu)\tau^a] + \frac{1}{2} g\gamma^\mu \lambda_a A_\mu^{a'} \right\} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi$$

$\tau^a$  representa a los generadores del grupo  $SU(3)$ , que no dependen de las coordenadas (40):

$$\bar{\psi} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \{-g\gamma^\mu \tau^a [\partial_\mu \theta_a(x^\mu)] + g\gamma^\mu \tau^a A_\mu^a\} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi$$

$$\bar{\psi} (g\gamma^\mu) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a \{A_\mu^a - \partial_\mu \theta_a(x^\mu)\} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \psi$$

En este caso, es más conveniente para nosotros transformar a  $\lambda_a A_\mu^a$  (o bien,  $\tau^a A_\mu^a$ ) que a  $A_\mu^a$ . Comparando esta última expresión con el término restante de la lagrangiana de Dirac original  $\frac{1}{2} g \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_a A_\mu^a \psi = g \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a A_\mu^a \psi$ , tenemos:

$$\tau^a A_\mu^a = e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a \{A_\mu^a - \partial_\mu \theta_a(x^\mu)\} e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$$

$$e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} = \tau^a A_\mu^a - \tau^a \partial_\mu \theta_a(x^\mu)$$

Y obtenemos la regla de transformación:

$$\tau^a A_\mu^a \rightarrow (\tau^a A_\mu^a)' = e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} + \tau^a \partial_\mu \theta_a(x^\mu)$$

Es posible reescribir el segundo término del lado derecho del igual en términos de la derivada del factor de la transformación de norma del campo de Dirac (39):

$$\partial_\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} = ig\tau^a \partial_\mu \theta_a(x^\mu) e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$$

Multiplicamos los dos lados del igual por  $e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$  por la derecha:

$$\partial_\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} (e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) = ig\tau^a \partial_\mu \theta_a(x^\mu)$$

El factor de la transformación de norma multiplicado por su complejo conjugado es igual a uno:

$$e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} = 1$$

Se derivan los dos lados del igual. Se usa la regla del producto:

$$\partial_\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} (e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) + e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} = 0$$

$$\partial_\mu e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} (e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) = -e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$$

Se sustituye:

$$-e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} = ig\tau^a \partial_\mu \theta_a(x^\mu)$$

$$e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \frac{i}{g} \partial_\mu e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} = \tau^a \partial_\mu \theta_a(x^\mu)$$

Y se expresa la regla de transformación en términos de esto:

$$\tau^a A_\mu^a \rightarrow (\tau^a A_\mu^a)' = e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \frac{i}{g} \partial_\mu e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$$

$$\tau^a A_\mu^a \rightarrow (\tau^a A_\mu^a)' = e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \left[ \tau^a A_\mu^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}$$



El término que se va a transformar,  $\tau^a A_\mu^a$ , aparece tal cual en la lagrangiana de la interacción fuerte. Subiendo y bajando los índices de Lorentz como corresponde, se transforma la lagrangiana de interacción:

$$\mathcal{L}_{int}' = -\frac{1}{4}(\partial^\mu \tau^a A_\nu^a - \partial^\nu \tau^a A_\mu^a \pm ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b[\lambda_c, \lambda_a]\} \tau^a A_\mu^b A_\nu^c)' (\partial_\mu \tau_a A_\nu^a - \partial_\nu \tau_a A_\mu^a \pm ig \cdot \text{tr}\{\lambda_b[\lambda_c, \lambda_a]\} \tau_a A_\mu^b A_\nu^c)'$$

Como los términos de las trazas son cero cuando  $a = b$  o  $a = c$ , estos términos son invariantes ante la transformación. Se toman los otros dos términos de cada factor:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int1}' &= -\frac{1}{4} \left\{ \partial^\mu \left[ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \left( \tau^a A_\nu^a + \frac{i}{g} \partial^\nu \right) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right] \right. \\ &\quad \left. - \partial^\nu \left[ e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \left( \tau^a A_\mu^a + \frac{i}{g} \partial^\mu \right) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right] \right\} \left\{ \partial_\mu \left[ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \left( \tau^a A_\nu^a \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i}{g} \partial_\nu \right) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right] - \partial_\nu \left[ e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \left( \tau^a A_\mu^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right] \right\} \\ \mathcal{L}_{int1}' &= -\frac{1}{4} \left\{ \partial^\mu \left[ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right] + \partial^\mu \left[ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \left( \frac{i}{g} \partial^\nu \right) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right] \right. \\ &\quad \left. - \partial^\nu \left[ e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right] \right. \\ &\quad \left. - \partial^\nu \left[ e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \left( \frac{i}{g} \partial^\mu \right) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right] \right\} \left\{ \partial_\mu \left[ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right] \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \left[ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \left( \frac{i}{g} \partial_\nu \right) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right] - \partial_\nu \left[ e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right] \right. \\ &\quad \left. - \partial_\nu \left[ e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \left( \frac{i}{g} \partial_\mu \right) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right] \right\} \\ \mathcal{L}_{int1}' &= -\frac{1}{4} \left\{ \partial^\mu (e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a}) (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. + \partial^\mu (e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a}) \left( \frac{i}{g} \partial^\nu \right) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu \left( \frac{i}{g} \partial^\nu e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right) \right. \\ &\quad \left. - \partial^\nu (e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a}) (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. - \partial^\nu (e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a}) \left( \frac{i}{g} \partial^\mu \right) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu \left( \frac{i}{g} \partial^\mu e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right) \right\} \left\{ \partial_\mu (e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a}) (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. + e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} + \partial_\mu (e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a}) \left( \frac{i}{g} \partial_\nu \right) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. + e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu \left( \frac{i}{g} \partial_\nu e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right) - \partial_\nu (e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} - \partial_\nu (e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) \left( \frac{i}{g} \partial_\mu \right) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right. \\ &\quad \left. - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu \left( \frac{i}{g} \partial_\mu e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{int1}' \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right. \\
&+ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \tau^a A_\nu^a \partial^\mu (e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a}) + e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\nu \right) (-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \\
&+ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\nu (-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \right) - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a \partial^\nu (e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a}) \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\mu \right) (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \right) \left. \right\} \left\{ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right. \\
&+ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \tau^a A_\nu^a \partial_\mu (e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a}) \\
&+ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\nu \right) (-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) + e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\nu (-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) \right) \\
&- e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \\
&- e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a \partial_\nu (e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu \right) (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
&- \left. e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int1}' &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \right. \\
&+ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \tau^a A_\nu^a e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \\
&+ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu (ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\nu \right) (-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \\
&+ e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \frac{i}{g} \partial^\mu (e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a}) \partial^\nu (-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) + e^{ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a} \partial^\mu \partial^\nu (-ig\theta_a(x_\nu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\mu \right) (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \frac{i}{g} \partial^\nu (e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a}) \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \left. \right\} \left\{ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \right. \\
&+ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A_\nu^a) e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \tau^a A_\nu^a e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) \\
&+ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu (ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\nu \right) (-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) \\
&+ e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \frac{i}{g} \partial_\mu (e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a}) \partial_\nu (-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) + e^{ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a} \partial_\mu \partial_\nu (-ig\theta_a(x^\nu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A_\mu^a) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \\
&- e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \tau^a A_\mu^a e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\mu \right) (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
&- e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \frac{i}{g} \partial_\nu (e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a}) \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
&- \left. e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \right\}
\end{aligned}$$

Se cancelan términos semejantes y se eliminan factores:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int1}' = & -\frac{1}{4} \left\{ e^{ig\theta_a(x_v)\tau^a} \partial^\mu (\tau^a A^v_a) e^{-ig\theta_a(x_v)\tau^a} + e^{ig\theta_a(x_v)\tau^a} \partial^\mu (ig\theta_a(x_v)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_v)\tau^a} \right) \partial^\nu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) \right. \\
& + e^{ig\theta_a(x_v)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_v)\tau^a} \partial^\mu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) \partial^\nu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) \\
& + e^{ig\theta_a(x_v)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_v)\tau^a} \partial^\mu \partial^\nu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \\
& - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right) \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
& - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
& - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \left. \right\} \left\{ e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A^a_\nu) e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} \right. \\
& + e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu (ig\theta_a(x^v)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} \right) \partial_\nu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) \\
& + e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) \partial_\nu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) \\
& + e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu \partial_\nu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \\
& - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right) \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
& - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
& \left. - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \frac{i}{g} e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int1}' = & -\frac{1}{4} \left\{ e^{ig\theta_a(x_v)\tau^a} \partial^\mu (\tau^a A^v_a) e^{-ig\theta_a(x_v)\tau^a} + \partial^\mu (ig\theta_a(x_v)\tau^a) \left( \frac{i}{g} \right) \partial^\nu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) \right. \\
& + \frac{i}{g} \partial^\mu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) \partial^\nu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) + \frac{i}{g} \partial^\mu \partial^\nu (-ig\theta_a(x_v)\tau^a) \\
& - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} - \partial^\nu (ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} \right) \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
& - \frac{i}{g} \partial^\nu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \\
& \left. - \frac{i}{g} \partial^\nu \partial^\mu (-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a) \right\} \left\{ e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A^a_\nu) e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} \right. \\
& + \partial_\mu (ig\theta_a(x^v)\tau^a) \left( \frac{i}{g} \right) \partial_\nu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) + \frac{i}{g} \partial_\mu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) \partial_\nu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) \\
& + \frac{i}{g} \partial_\mu \partial_\nu (-ig\theta_a(x^v)\tau^a) - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \\
& - \partial_\nu (ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \left( \frac{i}{g} \right) \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) - \frac{i}{g} \partial_\nu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \\
& \left. - \frac{i}{g} \partial_\nu \partial_\mu (-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{int1} = & -\frac{1}{4} \left\{ e^{ig\theta_a(x_v)\tau^a} \partial^\mu (\tau^a A^v_a) e^{-ig\theta_a(x_v)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \partial^\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x_\mu)\tau^a} \right\} \left\{ e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A^a_\nu) e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} \right. \\
& \left. - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \right\} = -\frac{1}{4} \left\{ \partial^\mu \tau^a A^v_a - \partial^\nu \tau^a A^a_\mu \right\}' \left\{ \partial_\mu \tau^a A^a_\nu - \partial_\nu \tau^a A^a_\mu \right\}'
\end{aligned}$$

Y con esto se obtienen las reglas de transformación para el tensor de campo fuerte:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} \rightarrow G'_{\mu\nu} = & (\partial_\mu \tau^a A^a_\nu - \partial_\nu \tau^a A^a_\mu \pm ig[A_\mu, A_\nu])' \\
= & e^{ig\theta_a(x^v)\tau^a} \partial_\mu (\tau^a A^a_\nu) e^{-ig\theta_a(x^v)\tau^a} - e^{ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \partial_\nu (\tau^a A^a_\mu) e^{-ig\theta_a(x^\mu)\tau^a} \\
& \pm ig[A_\mu, A_\nu]
\end{aligned}$$

## Anexo 6 – Condiciones para la simetría de isospín en la QCD

Se tiene la lagrangiana de la QCD para el sector de quarks ligeros (41):

$$\mathcal{L} = \bar{u}(i\gamma^\mu D_\mu - m_u)u + \bar{d}(i\gamma^\mu D_\mu - m_d)d - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a$$

Esta lagrangiana se puede expresar en términos de un vector de estado de dos componentes  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ , en cuyo caso, se tendría una matriz de masas en uno de los términos de la lagrangiana:

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

La transformación de isospín está representada por (43):

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta_b \tau^b} \psi$$

La contracción de índices en el exponente  $\theta_b \tau^b$  implica una suma sobre todos los índices  $b$ , que en este caso se encuentran en el espacio de isospín y, por lo tanto, van desde  $b = 1$  hasta  $b = N_f^2 - 1 = 3$ :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i(\theta_1 \tau^1 + \theta_2 \tau^2 + \theta_3 \tau^3)} \psi$$

Por consiguiente, la transformación para el campo de Dirac complejo conjugado es la siguiente:

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i(\theta_1 \tau^1 + \theta_2 \tau^2 + \theta_3 \tau^3)}$$

La parte gluónica de la lagrangiana es independiente de los campos de Dirac y, por lo tanto, invariante ante las transformaciones de isospín. Se desarrollan los exponentes y se sustituye en la lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac}' &= (\bar{u} \quad \bar{d}) \exp(-i(\theta_1 \tau^1 + \theta_2 \tau^2 + \theta_3 \tau^3)) \left( i\gamma^\mu D_\mu \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \right) \exp(i(\theta_1 \tau^1 + \theta_2 \tau^2 + \theta_3 \tau^3)) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{Dirac}' &= (\bar{u} \quad \bar{d}) \exp\left(-\frac{i}{2}\left(\theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \theta_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\right) \left( i\gamma^\mu D_\mu \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \right) \exp\left(\frac{i}{2}\left(\theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \theta_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los operadores de isospín conmutan con las matrices de Dirac y con la derivada covariante, al estar estos últimos actuando sobre las coordenadas del espacio-tiempo y los primeros sobre el espacio de isospín. Al multiplicarse directamente el operador  $e^{i\theta_b \tau^b}$  con su complejo conjugado se eliminan, por lo que el término cinético es trivialmente invariante ante la transformación de isospín. Ahora se trabaja con el término de masa de la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_m' = -(\bar{u} \quad \bar{d}) \exp\left(-\frac{i\theta_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i\theta_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{i\theta_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\theta_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\theta_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\theta_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_m' = -(\bar{u} \quad \bar{d}) \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\theta_1}{2} \\ -\frac{i\theta_1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\theta_2}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{i\theta_1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\theta_2}{2} \\ -\frac{\theta_2}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_m' = -(\bar{u} \quad \bar{d}) \exp\left(\begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} & -\frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Para simplificar las exponenciales de estas matrices, usamos la identidad  $e^X = \sum_n \frac{X^n}{n!}$ . El problema está en las potencias de las matrices, sin embargo, al multiplicar estas matrices por sí mismas se presenta un comportamiento cíclico:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}\right)^2 &= \left[-\begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} & -\frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{i\theta_3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right)\left(\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right) & \left(-\frac{i\theta_3}{2}\right)\left(-\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right) + \left(-\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \\ \left(\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(\frac{i\theta_3}{2}\right)\left(\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right) & \left(\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right)\left(-\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2}\right) + \left(\frac{i\theta_3}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\theta_3^2}{4} + \left(-\frac{\theta_2^2}{4} - \frac{\theta_1^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\theta_2^2}{4} - \frac{\theta_1^2}{4}\right) - \frac{\theta_3^2}{4} \end{pmatrix} = -\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Generalizando para cualquier exponente par:

$$\left( \pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right)^{2n} = (-1)^n \frac{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^n}{2^{2n}} I_{2 \times 2}$$

Para cualquier exponente impar solamente se multiplica este resultado una vez por la matriz original:

$$\left( \pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right)^{2n+1} = (-1)^n \frac{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^n}{2^{2n}} \left( \pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Se sustituye en la función exponencial:

$$\begin{aligned} \exp \left( \pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^n}{2^{2n} (2n)!} I_{2 \times 2} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^n}{2^{2n} (2n+1)!} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right)^{2n}}{(2n)!} I_{2 \times 2} \\ &\quad \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right)^{2n+1}}{\left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) (2n+1)!} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right)^{2n}}{(2n)!} I_{2 \times 2}$$

$$\pm \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

Se usan las identidades para el seno y el coseno:

$$\exp \left( \pm \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) I_{2 \times 2}$$

$$\pm \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

Y sustituimos estas matrices en la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_m' = -(\bar{u} \quad \bar{d}) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) I_{2 \times 2} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$\cdot \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

$$\cdot \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) I_{2 \times 2} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}_m'$ 

$$\begin{aligned}
&= -(\bar{u} \quad \bar{d}) \left[ \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \end{pmatrix} \right] \\
&\cdot \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \\
&\cdot \left[ \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \\ \frac{-\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & -\frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

 $\mathcal{L}_m'$ 

$$\begin{aligned}
&= -(\bar{u} \quad \bar{d}) \left( \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) - \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) + \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \end{array} \right) \\
&\cdot \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \\
&\cdot \left( \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) + \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \\ \frac{-\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) - \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2}\right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m' = & - \left[ \bar{u} \left\{ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right\} m_u \right. \\
& + \left. \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) m_d \right\} u \\
& + \bar{d} \left\{ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) (m_u - m_d) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] \right\} u \\
& + \bar{u} \left\{ \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] (m_u \right. \\
& - \left. m_d) \frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right\} d \\
& + \bar{d} \left\{ \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) m_u \right. \\
& + \left. \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m_d \right\} d \left. \right]
\end{aligned}$$

Comparando  $\mathcal{L}_m'$  a  $\mathcal{L}_m$  se agrupan los términos semejantes:

$$\mathcal{L}_m = -\bar{u}(m_u)u - -\bar{d}(m_d)d$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m_u \\
& + \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) m_d = m_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) m_u \\
& + \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m_d = m_d \\
& \frac{\theta_2 - i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) (m_u - m_d) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] = 0 \\
& \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] (m_u \\
& - m_d) \frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

Ya que los parámetros de la transformación  $\theta_b$  son arbitrarios, estas expresiones no son necesariamente iguales a las de la lagrangiana original, es decir, la simetría de isospín no se satisface para  $m_u$  y  $m_d$  arbitrarias. Ahora imponemos  $m_u = m_d = m$  a las expresiones:

$$\begin{aligned}
& \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m \\
& + \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) m = m \\
& \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2 + \theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m = m \\
& m = m
\end{aligned}$$

$$\frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) m$$

$$+ \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m = m$$

$$\left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{\theta_3^2 + \theta_2^2 + \theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] m = m$$

$$m = m$$

$$\frac{\theta_2 - i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) (m - m) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] = 0$$

$$0 = 0$$

$$\left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{i\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right] (m$$

$$- m) \frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto, para cualesquier parámetros de transformación  $\theta_b$  arbitrarios, la simetría de isospín se satisface solamente cuando  $m_u = m_d$ .

## Anexo 7 – Propiedades de la $\gamma_5$

Se tiene a la matriz de quiralidad  $\gamma_5$  (46):

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

Con las  $\gamma^\mu$  descritas por las matrices de Dirac (20):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula  $\gamma_5$ :

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\gamma_5$  es hermitiana, es decir, es equivalente a su propia transpuesta compleja conjugada. Ahora elevamos  $\gamma_5$  al cuadrado:

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y calculamos los anticonmutadores de  $\gamma_5$  con las matrices de Dirac:

$$\begin{aligned} \{\gamma_5, \gamma^0\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_5, \gamma^1\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\{\gamma_5, \gamma^1\} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\{\gamma_5, \gamma^2\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\{\gamma_5, \gamma^2\} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\{\gamma_5, \gamma^3\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\{\gamma_5, \gamma^3\} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$\gamma_5$  anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. En general:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad \forall \mu = \{0,1,2,3\}$$

## Anexo 8 – Simetría quiral en la QCD

Se tiene la lagrangiana de la QCD para el sector de quarks ligeros (41):

$$\mathcal{L} = \bar{u}(i\gamma^\mu D_\mu - m_u)u + \bar{d}(i\gamma^\mu D_\mu - m_d)d - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_a G_{\mu\nu}^a$$

Esta lagrangiana se puede expresar en términos de un vector de estado de dos componentes  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ , en cuyo caso, se tendría una matriz de masas en uno de los términos de la lagrangiana:

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

La transformación de quiralidad está representada por (52):

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi$$

De igual manera que en la simetría de isospín, la parte gluónica no depende de los campos de Dirac, por lo que es invariante ante la transformación quiral. Sin embargo, la parte cinética deja de ser trivial, ya que la transformación de quiralidad presenta propiedades de anticonmutación con las matrices de Dirac.

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi$$

Al desarrollar al exponente con la  $\gamma_5$  en forma de serie de potencias, cada uno de los términos (que contiene a  $\gamma_5$ ) anticonmuta con las matrices gamma. Por lo tanto, por la propiedad asociativa, la exponencial completa anticonmuta con las matrices gamma. Se expresa la transformación de quiralidad para el campo de Dirac complejo conjugado (recordando que  $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ ):

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \psi'^\dagger \gamma^0 = (e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} \gamma^0$$

Cabe mencionar que la operación de complejo conjugado actúa sobre el espacio-tiempo y no sobre el espacio de isospín, por lo que  $\tau^b$  no se ve afectada por esta operación. Se sustituyen los campos en la lagrangiana transformada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{Dirac} &= \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}) e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \\ \mathcal{L}'_{Dirac} &= \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu) e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi - \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} \gamma^0 (\hat{m}) e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \end{aligned}$$

Como las exponenciales están presentes tanto en el espacio de isospín como en el espacio-tiempo, hay que tomar ambos espacios en cuenta. No obstante, como la lagrangiana de Dirac es invariante ante transformaciones de isospín cuando las masas son iguales, este operador puede conmutar con todos los elementos de la lagrangiana en el espacio de isospín, siempre y cuando las masas sean iguales. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto para las coordenadas del espacio-tiempo.

Lo que buscamos aquí es que las exponenciales queden multiplicadas juntas para cancelarlas. Cada vez que éstas se intercambien de lugar con alguna de las matrices de Dirac, el signo cambia. Este intercambio ocurre dos veces en el término cinético (una vez con  $\gamma^0$  y la otra con  $\gamma^\mu$ ) y, como la transformación de quiralidad es global como la de isospín,  $e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5}$  conmuta con el operador de la

derivada covariante. Mientras tanto, en el término de masa solamente hay un intercambio de la exponencial con  $\gamma^0$ :

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu) e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi + \psi^\dagger \gamma^0 (\hat{m}) e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi$$

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu D_\mu) \psi + \psi^\dagger \gamma^0 (\hat{m}) \psi$$

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi + \bar{\psi} (\hat{m}) \psi$$

$$\mathcal{L}_{Dirac}' = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu + \hat{m}) \psi$$

En la lagrangiana transformada, el término cinético permanece invariante mientras que el término de masa cambia de signo con respecto a la lagrangiana original. La implicación física de esto es que la simetría quiral se satisface si y sólo si  $\hat{m} = -\hat{m}$ . En otras palabras, todos los elementos de la matriz de masas (incluyendo a las propias masas, que son los elementos de la diagonal principal) tienen que ser iguales a cero (lo cual no contradice a las condiciones para que se satisfaga la simetría de isospín). De lo contrario, la simetría quiral queda rota explícitamente.

## Anexo 9 – Ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo escalar complejo

Se tiene la lagrangiana de Klein-Gordon para el campo escalar complejo (55):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^* \varphi$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos toman a estos campos en lugar de las usuales coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} &= 0 \\ -\frac{1}{2} m^2 \varphi - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \left( \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^* \varphi \right) &= 0 \end{aligned}$$

Por las propiedades de los índices de Dirac, es posible bajar uno de ellos en alguno de los términos si se sube otro:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} m^2 \varphi - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^* \varphi \right) &= 0 \\ -\frac{1}{2} m^2 \varphi - \partial_\mu \left( \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi) \right) &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Subiendo y bajando índices de nuevo, esta ecuación es la ecuación de Klein-Gordon (8) en unidades naturales (54). La otra ecuación de Euler-Lagrange da como resultado su compleja conjugada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} &= 0 \\ -\frac{1}{2} m^2 \varphi^* - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \left( \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^*) (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^* \varphi \right) &= 0 \\ -\frac{1}{2} m^2 \varphi^* - \partial_\mu \left( \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^*) \right) &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi^* &= 0 \end{aligned}$$



**Anexo 10** – Invariancia quiral y de isospín de la lagrangiana de interacción del modelo NJL

La lagrangiana del modelo de Nambu-Jona-Lasinio consta de la lagrangiana libre de Dirac, que también aparece en la QCD, y en una lagrangiana de interacción puntual de cuatro quarks que sustituye a la interacción gluónica de la QCD (65):

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi + \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^2]$$

En la QCD, la lagrangiana de Dirac tiene ciertas condiciones para que se presenten estas dos invariancias: para la invariancia de isospín ambas masas tienen que ser iguales y para la invariancia quiral ambas masas tienen que ser cero. En cuanto al término de interacción, en la QCD es trivial demostrar estas dos invariancias, ya que los campos que se transforman,  $\bar{\psi}$  y  $\psi$ , no aparecen en la lagrangiana gluónica.

Para que el modelo de NJL pueda ser comparable a la QCD, estas dos simetrías deben manifestarse incondicionalmente en la lagrangiana de interacción, sólo que aquí sí aparecen los campos de Dirac. Primero usaremos la transformación de isospín (43):

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\theta_b\tau^b}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\theta_b\tau^b}\end{aligned}$$

Se sustituyen los campos transformados en la lagrangiana de interacción:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Int} &= \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^2] = \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^\dagger(\bar{\psi}\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^\dagger(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)] \\ \mathcal{L}_{Int} &= \frac{G}{2} [(\psi^\dagger\gamma^0\psi)^\dagger(\psi^\dagger\gamma^0\psi) + (\psi^\dagger\gamma^0i\gamma_5\tau^b\psi)^\dagger(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)] \\ \mathcal{L}_{Int} &= \frac{G}{2} [(\psi^\dagger\gamma^{0\dagger}\psi^{\dagger\dagger})(\psi^\dagger\gamma^0\psi) + (\psi^\dagger\tau^{b\dagger}\gamma_5^\dagger(-i)\gamma^{0\dagger}\psi^{\dagger\dagger})(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)]\end{aligned}$$

Recordamos que  $\gamma^0$ ,  $\gamma_5$  y  $\tau^b$  son hermitianas (20,45,46):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{Int} = \frac{G}{2} [(\psi^\dagger\gamma^0\psi)(\bar{\psi}\psi) + (\psi^\dagger\tau^b\gamma_5(-i)\gamma^0\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)]$$

Ya que  $\gamma^0$  anticonmuta con  $\gamma_5$  y ambas conmutan con  $\tau^b$  por actuar en diferentes espacios:

$$(\psi^\dagger\tau^b\gamma_5(-i)\gamma^0\psi) = (\psi^\dagger\gamma^0i\gamma_5\tau^b\psi) = (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)$$

Y el término transpuesto complejo conjugado es igual al original. Para nosotros es conveniente hacer las transformaciones para la lagrangiana expresada en la forma de transpuestas complejas conjugadas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Int}' &= \frac{G}{2} \left[ \left( (e^{i\theta_b \tau^b} \psi)^\dagger \gamma^0 e^{i\theta_b \tau^b} \psi \right)^\dagger \left( (e^{i\theta_b \tau^b} \psi)^\dagger \gamma^0 e^{i\theta_b \tau^b} \psi \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( (e^{i\theta_b \tau^b} \psi)^\dagger \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b (e^{i\theta_b \tau^b} \psi) \right)^\dagger \left( (e^{i\theta_b \tau^b} \psi)^\dagger \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b (e^{i\theta_b \tau^b} \psi) \right) \right] \\
\mathcal{L}_{Int}' &= \frac{G}{2} \left[ \left( \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b} \gamma^0 e^{i\theta_b \tau^b} \psi \right)^\dagger \left( \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b} \gamma^0 e^{i\theta_b \tau^b} \psi \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b e^{i\theta_b \tau^b} \psi \right)^\dagger \left( \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b e^{i\theta_b \tau^b} \psi \right) \right] \\
\mathcal{L}_{Int}' &= \frac{G}{2} \left[ \left( \psi^\dagger \exp \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & i\theta_3 \end{pmatrix} \gamma^0 \exp \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} & -i\theta_3 \end{pmatrix} \psi \right)^\dagger \right. \\
&\quad \left( \psi^\dagger \exp \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & i\theta_3 \end{pmatrix} \gamma^0 \exp \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} & -i\theta_3 \end{pmatrix} \psi \right) \\
&\quad + \left( \psi^\dagger \exp \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & i\theta_3 \end{pmatrix} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \exp \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} & -i\theta_3 \end{pmatrix} \psi \right)^\dagger \\
&\quad \left. \left( \psi^\dagger \exp \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2 - i\theta_1}{2} & i\theta_3 \end{pmatrix} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \exp \begin{pmatrix} \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} \\ -\frac{\theta_2 + i\theta_1}{2} & -i\theta_3 \end{pmatrix} \psi \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Int}' &= \frac{G}{2} \left[ \left( \psi^\dagger \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \left. \left. \left. \gamma^0 \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \right. \\
&- \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \left. \left. \left. \left( \psi^\dagger \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \right. \right. \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \left. \left. \left. \left. \gamma^0 \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \right. \right. \\
&- \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \left. \left. \left. \left. \psi \right) \right) \right) \right) \\
&+ \left( \psi^\dagger \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \left. \left. \left. \left. \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \right. \right. \\
&- \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \left. \left. \left. \left. \left( \psi^\dagger \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \left. \left. \left. \left. \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \right. \right. \right. \\
&- \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \left. \left. \left. \left. \psi \right) \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Para el primer término, se aprovecha el hecho de que  $\gamma^0$  conmuta con todas las matrices en el espacio de isospín, por el hecho de actuar en un espacio diferente:





$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{Int}' \\
&= \frac{G}{2} \left[ \left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi \right. \right. \\
&+ \psi^\dagger \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi \left. \right)^\dagger \left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi \right. \\
&+ \psi^\dagger \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi \left. \right) \\
&+ \left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \psi \\
&- \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \left. \right)^\dagger \\
&\left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \psi \\
&- \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \left. \right) \right]
\end{aligned}$$

En el primer término, al factorizar por la izquierda y por la derecha se tiene una suma del cuadrado de un coseno y del cuadrado del seno del mismo argumento: un número real. Esto se simplifica:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{Int}' \\
&= \frac{G}{2} \left[ (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi)^\dagger (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi) \right. \\
&+ \left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&- \left. \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right)^\dagger \\
&\left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&- \left. \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

Trabajando sólo con el primer término, se obtiene el término original antes de la transformación:

$$\begin{aligned}
& (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi)^\dagger (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi) = (\psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger \psi^{\dagger\dagger}) (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi) \\
&= (\psi^\dagger \gamma^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi) (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi)
\end{aligned}$$

Y conmutando  $\gamma^0$  con la matriz identidad de isospín:

$$(\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi)^\dagger (\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^0 \psi) = (\psi^\dagger \gamma^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi)^2 = (\bar{\psi} \psi)^2$$

Lo que concuerda con la lagrangiana de NJL original. Ahora se trabaja solamente con el término pseudoisovectorial:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{v5}' &= \frac{G}{2} \left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&- \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^\dagger \psi \\
&\left. \left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&\left. \left. - \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right) \right)
\end{aligned}$$

Se distribuye el operador de transpuesto complejo conjugado en el primer factor:



$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\nu 5}' \\
&= \frac{G}{2} \left( -\psi^\dagger \tau^b \gamma_5^\dagger i \gamma^{0\dagger} \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \right. \\
&+ \psi^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^\dagger \tau^b \gamma_5^\dagger i \gamma^{0\dagger} \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \\
&- \psi^\dagger \tau^b \gamma_5^\dagger i \gamma^{0\dagger} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \\
&+ \left. \psi^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^\dagger \tau^b \gamma_5^\dagger i \gamma^{0\dagger} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \right) \\
&\left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&\left. - \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right)
\end{aligned}$$

La matriz  $\begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$  es antihermitiana, es decir, su transpuesta compleja conjugada es igual a la matriz original multiplicada por menos uno:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{v5}' &= \frac{G}{2} \left( -\psi^\dagger \tau^b \gamma_5 i \gamma^0 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \gamma_5 i \gamma^0 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \\
&+ \psi^\dagger \tau^b \gamma_5 i \gamma^0 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \\
&+ \psi^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \gamma_5 i \gamma^0 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \Big) \\
&\left( \psi^\dagger \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \psi^\dagger \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&\left. - \psi^\dagger \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right)
\end{aligned}$$

$\gamma_5$  y  $\gamma^0$  anticonmutan en el primer factor, para que quede todo en términos de  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{\nu 5}' \\
&= \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} \tau^b i \gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \right. \\
&+ \bar{\psi} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b i \gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \\
&- \bar{\psi} \tau^b i \gamma_5 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \\
&- \bar{\psi} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b i \gamma_5 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \psi \Big) \\
&\left( \bar{\psi} \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) i \gamma_5 \tau^b \psi \right. \\
&- \bar{\psi} \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \\
&+ \bar{\psi} \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} i \gamma_5 \tau^b \psi \\
&\left. - \bar{\psi} \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} i \gamma_5 \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right)
\end{aligned}$$

Se factorizan los términos de en medio:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{v5}' \\
&= \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \tau^b \psi \right. \\
&+ \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left[ \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \right. \\
&- \left. \left. \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right] \psi \right. \\
&- \left. \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right) \\
&\left( \bar{\psi} i \gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \tau^b \psi \right. \\
&+ \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left[ \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \right. \\
&- \left. \left. \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right] \psi \right. \\
&- \left. \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right)
\end{aligned}$$

Ahora se calculan los  $\left[ \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b - \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right]$  para cada  $\tau^b$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^1 - \tau^1 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4} & -\frac{i\theta_3}{4} \\ \frac{i\theta_3}{4} & \frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4} & \frac{i\theta_3}{4} \\ -\frac{i\theta_3}{4} & -\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_2}{2} & -\frac{i\theta_3}{2} \\ \frac{i\theta_3}{2} & \frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix} \\
&= \theta_3 \tau_2 - \theta_2 \tau_3
\end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(-\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) & \left(-\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(-\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) + \left(-\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \\ \left(\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) & \left(\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(-\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) + \left(\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\theta_1\theta_3}{4} & -\frac{\theta_1^2}{8} + \frac{\theta_2^2}{8} + \frac{\theta_3^2}{8} + \frac{i\theta_1\theta_2}{4} \\ -\frac{\theta_1^2}{8} + \frac{\theta_2^2}{8} + \frac{\theta_3^2}{8} - \frac{i\theta_1\theta_2}{4} & \frac{\theta_1\theta_3}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \tau_1 - \frac{\theta_1\theta_2}{2} \tau_2 - \frac{\theta_1\theta_3}{2} \tau_3$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^2 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_2}{4} + \frac{\theta_1}{4} & -\frac{\theta_3}{4} \\ -\frac{\theta_3}{4} & -\frac{i\theta_2}{4} - \frac{\theta_1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{i\theta_2}{4} + \frac{\theta_1}{4}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(-\frac{\theta_3}{4}\right)\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) & \left(-\frac{i\theta_2}{4} + \frac{\theta_1}{4}\right)\left(-\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) + \left(-\frac{\theta_3}{4}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \\ \left(-\frac{\theta_3}{4}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(-\frac{i\theta_2}{4} - \frac{\theta_1}{4}\right)\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) & \left(-\frac{\theta_3}{4}\right)\left(-\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) + \left(-\frac{i\theta_2}{4} - \frac{\theta_1}{4}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\theta_2\theta_3}{4} & -\frac{i\theta_1^2}{8} + \frac{i\theta_2^2}{8} - \frac{i\theta_3^2}{8} - \frac{\theta_1\theta_2}{4} \\ \frac{i\theta_1^2}{8} - \frac{i\theta_2^2}{8} + \frac{i\theta_3^2}{8} - \frac{\theta_1\theta_2}{4} & \frac{\theta_2\theta_3}{4} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\theta_1\theta_2}{2} \tau_1 + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \tau_2 - \frac{\theta_2\theta_3}{2} \tau_3$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^3 \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{4} & \frac{\theta_2}{4} + \frac{i\theta_1}{4} \\ \frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4} & -\frac{i\theta_3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(\frac{\theta_2}{4} + \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) & \left(-\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(-\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) + \left(\frac{\theta_2}{4} + \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \\ \left(\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(-\frac{i\theta_3}{2}\right) + \left(-\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) & \left(\frac{\theta_2}{4} - \frac{i\theta_1}{4}\right)\left(-\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2}\right) + \left(-\frac{i\theta_3}{4}\right)\left(\frac{i\theta_3}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\theta_1^2}{8} + \frac{\theta_2^2}{8} - \frac{\theta_3^2}{8} & -\frac{\theta_1\theta_3}{4} + \frac{i\theta_2\theta_3}{4} \\ -\frac{\theta_1\theta_3}{4} - \frac{i\theta_2\theta_3}{4} & -\frac{\theta_1^2}{8} - \frac{\theta_2^2}{8} + \frac{\theta_3^2}{8} \end{pmatrix} = -\frac{\theta_1\theta_3}{2}\tau_1 - \frac{\theta_2\theta_3}{2}\tau_2 + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3^2}{4}\tau_3$$

Como la lagrangiana pseudoisovectorial está dada por una suma sobre todos los índices de isospín  $a = 1,2,3$ , se desarrolla para cada índice en términos de las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v5}' &= \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i\gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \tau^b \psi \right. \\ &+ \bar{\psi} i\gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left[ \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \right. \\ &\left. \left. - \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \right] \psi \right. \\ &\left. - \bar{\psi} i\gamma_5 \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \tau^b \begin{pmatrix} -\frac{i\theta_3}{2} & -\frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2}{2} - \frac{i\theta_1}{2} & \frac{i\theta_3}{2} \end{pmatrix} \psi \right)^2 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{v5} = & \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \tau^1 \psi \right. \\
& + \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) [\theta_3 \tau_2 \\
& - \theta_2 \tau_3] \psi \\
& - \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left[ \frac{-\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \tau_1 - \frac{\theta_1 \theta_2}{2} \tau_2 \right. \\
& \left. \left. - \frac{\theta_1 \theta_3}{2} \tau_3 \right] \psi \right)^2 \\
& + \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \tau^2 \psi \right. \\
& + \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) [\theta_1 \tau_3 \\
& - \theta_3 \tau_1] \psi \\
& - \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left[ -\frac{\theta_1 \theta_2}{2} \tau_1 + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \tau_2 \right. \\
& \left. \left. - \frac{\theta_2 \theta_3}{2} \tau_3 \right] \psi \right)^2 \\
& + \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \tau^3 \psi \right. \\
& + \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) [\theta_2 \tau_1 \\
& - \theta_1 \tau_2] \psi \\
& - \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left[ -\frac{\theta_1 \theta_3}{2} \tau_1 - \frac{\theta_2 \theta_3}{2} \tau_2 \right. \\
& \left. \left. + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3^2}{4} \tau_3 \right] \psi \right)^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{vS}} = & \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{-\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \right) \right] \tau_1 \psi \right. \\
& + \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_3 \right. \\
& + \left. \left. \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1 \theta_2}{2} \right) \right] \tau_2 \psi \right. \\
& - \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_2 \right. \\
& - \left. \left. \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1 \theta_3}{2} \right) \right] \tau_3 \psi \right. \\
& + \frac{G}{2} \left( -\bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_3 \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1 \theta_2}{2} \right) \right] \tau_1 \psi \right. \\
& + \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \right) \right] \tau_2 \psi \right. \\
& + \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_1 \right. \\
& + \left. \left. \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_2 \theta_3}{2} \right) \right] \tau_3 \psi \right. \\
& + \frac{G}{2} \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_2 \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1 \theta_3}{2} \right) \right] \tau_1 \psi \right. \\
& - \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_1 \right. \\
& - \left. \left. \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_2 \theta_3}{2} \right) \right] \tau_2 \psi \right. \\
& + \left. \left. \bar{\psi} i \gamma_5 \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3^2}{4} \right) \right] \tau_3 \psi \right) \right)^2
\end{aligned}$$

Ahora se eleva cada término al cuadrado. Cada producto involucra exactamente a una de las matrices de Pauli. En la lagrangiana pseudoisovectorial original hay una suma implícita sobre los

índices de isospín, pero en cada término de la suma hay una multiplicación de dos factores, cada uno con una de las matrices de Pauli:

$$\mathcal{L}_{v5} = (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi)^2 = (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^1\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^2\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi)^2$$

En este caso, las únicas multiplicaciones que aparecen en la lagrangiana tienen a una sola matriz de Pauli repetida en cada factor. En la lagrangiana transformada los paréntesis cuadrados contienen solamente constantes, por lo que igualamos los términos en donde aparece la misma matriz de Pauli en cada factor a uno, mientras que los términos donde aparecen diferentes matrices de Pauli para cada factor se igualan a cero:

$$\begin{aligned} & \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{-\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \right) \right]^2 \\ & + \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_3 \right. \\ & \left. - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1\theta_2}{2} \right) \right]^2 \\ & + \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_2 \right. \\ & \left. + \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1\theta_3}{2} \right) \right]^2 = 1 \\ \\ & \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_3 \right. \\ & \left. + \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1\theta_2}{2} \right) \right]^2 \\ & + \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2 + \theta_3^2}{4} \right) \right]^2 \\ & + \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_1 \right. \\ & \left. - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_2\theta_3}{2} \right) \right]^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \frac{\theta_1 \theta_3}{2} \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \theta_1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_2 \theta_3}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3^2}{4} \right) \right]^2 \\
& = 1
\end{aligned}$$

Se simplifican las condiciones:

$$\begin{aligned}
& \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) - \frac{-\theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2 + 2\theta_2^2 + 2\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\theta_1 \theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\theta_1 \theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& \quad + \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{-\theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2 + 2\theta_1^2 + 2\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& \quad + \left[ \frac{2\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\theta_2\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\theta_1\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& \quad + \left[ \frac{2\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\theta_2\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& \quad + \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{-\theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2 + 2\theta_1^2 + 2\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 - \frac{2\theta_2^2 + 2\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{2\theta_1\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2\theta_3}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ 1 - \frac{2\theta_1^2 + 2\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2\theta_2\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\theta_1\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{2\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\theta_2\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left[ 1 - \frac{2\theta_1^2 + 2\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{4\theta_2^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{4\theta_2^4 + 8\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& - \frac{8\theta_1\theta_2\theta_3}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen}^3 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_1^2\theta_2^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{8\theta_1\theta_2\theta_3}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen}^3 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_1^2\theta_3^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{4\theta_2^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^4 + 8\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_2^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + 1 \\
& - \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_1^4 + 4\theta_1^2\theta_2^2 + 8\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + 1 \\
& - \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \\
& + \frac{4\theta_1^4 + 8\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^4 + 4\theta_2^2\theta_3^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1
\end{aligned}$$

$$1 - \frac{4\theta_2^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right) + \frac{4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^4 + 8\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1$$

$$1 - \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right) + \frac{4\theta_1^4 + 4\theta_1^2\theta_2^2 + 8\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1$$

$$1 - \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) \right) + \frac{4\theta_1^4 + 8\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^4 + 4\theta_2^2\theta_3^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1$$

$$1 - \frac{4\theta_2^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^4 + 8\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1$$

$$1 - \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) + \frac{4\theta_1^4 + 4\theta_1^2\theta_2^2 + 8\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1$$

$$1 - \frac{4\theta_1^2 + 4\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right)$$

$$+ \frac{4\theta_1^4 + 8\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^4 + 4\theta_2^2\theta_3^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 1$$

$$\frac{(4\theta_2^2 + 4\theta_3^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 4\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^4 - 8\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_3^4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

$$\frac{(4\theta_1^2 + 4\theta_3^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 4\theta_1^4 - 4\theta_1^2\theta_2^2 - 8\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_3^4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

$$\frac{(4\theta_1^2 + 4\theta_2^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 4\theta_1^4 - 8\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^4 - 4\theta_2^2\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \operatorname{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

Si los parámetros de transformación son arbitrarios, es la fracción la que debería ser igual a cero:

$$\frac{(4\theta_2^2 + 4\theta_3^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 4\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^4 - 8\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_3^4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} = 0$$

$$\frac{(4\theta_1^2 + 4\theta_3^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 4\theta_1^4 - 4\theta_1^2\theta_2^2 - 8\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_3^4}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} = 0$$

$$\frac{(4\theta_1^2 + 4\theta_2^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - 4\theta_1^4 - 8\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^4 - 4\theta_2^2\theta_3^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} = 0$$

$$4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_2^4 + 4\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4 - 4\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^4 - 8\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_3^4 = 0$$

$$4\theta_1^4 + 4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_2^2\theta_3^2 + 4\theta_3^4 - 4\theta_1^4 - 4\theta_1^2\theta_2^2 - 8\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_3^4 = 0$$

$$4\theta_1^4 + 4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_1^2\theta_3^2 + 4\theta_1^2\theta_2^2 + 4\theta_2^4 + 4\theta_2^2\theta_3^2 - 4\theta_1^4 - 8\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1^2\theta_3^2 - 4\theta_2^4 - 4\theta_2^2\theta_3^2 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Las tres condiciones se cumplen para  $\theta_b$  arbitraria. Ahora se comprueban las otras condiciones:













$$\left( \frac{4\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} - \frac{4\theta_1^3\theta_2 + 4\theta_1\theta_2^3 + 4\theta_1\theta_2\theta_3^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \right) \text{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{4\theta_1\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} - \frac{4\theta_1\theta_2^2\theta_3 + 4\theta_1^3\theta_3 + 4\theta_1\theta_3^3}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \right) \text{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{4\theta_2\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} - \frac{4\theta_1^2\theta_2\theta_3 + 4\theta_2^3\theta_3 + 4\theta_2\theta_3^3}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \right) \text{sen}^4 \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}}{2} \right) = 0$$

De nuevo, el que los parámetros de la transformación sean arbitrarios apunta a que el cero sea del coeficiente del seno:

$$\left( \frac{4\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} - \frac{4\theta_1^3\theta_2 + 4\theta_1\theta_2^3 + 4\theta_1\theta_2\theta_3^2}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{4\theta_1\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} - \frac{4\theta_1\theta_2^2\theta_3 + 4\theta_1^3\theta_3 + 4\theta_1\theta_3^3}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{4\theta_2\theta_3}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} - \frac{4\theta_1^2\theta_2\theta_3 + 4\theta_2^3\theta_3 + 4\theta_2\theta_3^3}{(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^2} \right) = 0$$

$$4\theta_1\theta_2(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - (4\theta_1^3\theta_2 + 4\theta_1\theta_2^3 + 4\theta_1\theta_2\theta_3^2) = 0$$

$$4\theta_1\theta_3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - (4\theta_1\theta_2^2\theta_3 + 4\theta_1^3\theta_3 + 4\theta_1\theta_3^3) = 0$$

$$4\theta_2\theta_3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - (4\theta_1^2\theta_2\theta_3 + 4\theta_2^3\theta_3 + 4\theta_2\theta_3^3) = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Luego, la lagrangiana de interacción del modelo de Nambu-Jona-Lasinio es invariante ante transformaciones de isospín. Ahora se usa la transformación quiral (52):

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi$$

Se transforma la lagrangiana de interacción del modelo NJL:

$$\mathcal{L}_{Int} = \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^b\psi)^2 \right] = \frac{G}{2} \left[ (\psi^\dagger\gamma^0\psi)^2 + (\psi^\dagger\gamma^0i\gamma_5\tau^b\psi)^2 \right]$$

$$\mathcal{L}_{Int}' = \frac{G}{2} \left[ \left( (e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi)^\dagger \gamma^0 e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \right)^2 + \left( (e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi)^\dagger \gamma^0 i\gamma_5 \tau^b e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \right)^2 \right]$$

Ya que la lagrangiana de interacción es invariante ante transformaciones de isospín, el único cambio relevante en la transformación quiral es la regla de conmutación o anticonmutación con las matrices de Dirac. Se distribuyen los operadores complejos conjugados recordando que  $\gamma_5$  y  $\tau^b$  son matrices hermitianas:

$$\mathcal{L}_{Int}' = \frac{G}{2} \left[ \left( \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} \gamma^0 e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \right)^2 + \left( \psi^\dagger e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \right)^2 \right]$$

$\gamma_5$  anticonmuta con  $\gamma^0$  (y conmuta consigo misma):

$$\mathcal{L}_{Int}' = \frac{G}{2} \left[ \left[ - \left( \psi^\dagger \gamma^0 e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \right) \right]^2 + \left[ - \left( \psi^\dagger \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b e^{-i\theta_b \tau^b \gamma_5} e^{i\theta_b \tau^b \gamma_5} \psi \right) \right]^2 \right]$$

$$\mathcal{L}'_{Int} = \frac{G}{2} \left[ \left[ - \left( \psi^\dagger \gamma^0 \psi \right) \right]^2 + \left[ - \left( \psi^\dagger \gamma^0 i \gamma_5 \tau^b \psi \right) \right]^2 \right] = \frac{G}{2} \left[ \left[ - (\bar{\psi} \psi) \right]^2 + \left[ - (\bar{\psi} i \gamma_5 \tau^b \psi) \right]^2 \right]$$

$$\mathcal{L}'_{Int} = \frac{G}{2} \left[ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \tau^b \psi)^2 \right] = \mathcal{L}_{Int}$$

Por lo tanto, la lagrangiana de interacción del modelo NJL es invariante ante transformaciones quirales.

**Anexo 11** – Cálculo del determinante del propagador inverso de Dirac

Se tiene el propagador inverso de Dirac (85):

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} i\omega_n + \mu - igA_4 + M & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & i\omega_n + \mu - igA_4 + M & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \end{pmatrix}$$

Se usa una expansión de cofactores para calcular el determinante:

$$\begin{aligned} Det\{D^{-1}\} &= (i\omega_n + \mu - igA_4 \\ &+ M) \begin{vmatrix} i\omega_n + \mu - igA_4 + M & 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M & 0 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \end{vmatrix} \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{vmatrix} 0 & i\omega_n + \mu - igA_4 + M & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Det\{D^{-1}\} &= (i\omega_n + \mu - igA_4 \\ &+ M) \left[ (i\omega_n + \mu - igA_4 + M) \begin{vmatrix} -i\omega_n - \mu + igA_4 + M & 0 \\ 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \end{vmatrix} \right. \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{vmatrix} 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{vmatrix} \left. \right] \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \left[ -(i\omega_n + \mu - igA_4 + M) \begin{vmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & -i\omega_n - \mu + igA_4 + M \end{vmatrix} \right. \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{vmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{vmatrix} \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Det\{D^{-1}\} &= (i\omega_n + \mu - igA_4 + M) [(i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M)^2 \\ &- (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) [-(i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M) \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Det\{D^{-1}\} &= (i\omega_n + \mu - igA_4 + M)^2 (-i\omega_n - \mu + igA_4 + M)^2 \\ &- (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ &- (i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(-\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M) \\ &+ (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Det\{D^{-1}\} &= [(i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M)]^2 \\ &+ 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 (i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^4 \end{aligned}$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$Det\{D^{-1}\} = [(i\omega_n + \mu - igA_4 + M)(-i\omega_n - \mu + igA_4 + M) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2]^2$$

Se desarrollan los binomios conjugados:

$$Det\{D^{-1}\} = [M^2 - (i\omega_n + \mu - igA_4)^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2]^2$$

Se calcula el producto escalar  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= p_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_2 \\ ip_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & -p_3 \end{pmatrix} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se eleva el producto escalar al cuadrado:

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 &= \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 &= \begin{pmatrix} p_3^2 + (p_1 - ip_2)(p_1 + ip_2) & p_3(p_1 - ip_2) + (p_1 - ip_2)(-p_3) \\ (p_1 + ip_2)p_3 - p_3(p_1 + ip_2) & (p_1 + ip_2)(p_1 - ip_2) + (-p_3)^2 \end{pmatrix} \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 &= \begin{pmatrix} p_3^2 + p_1^2 + p_2^2 & 0 \\ 0 & p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \end{pmatrix} = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) I_{2 \times 2} = \vec{p} \cdot \vec{p} = p^2\end{aligned}$$

Y se sustituye en el determinante original:

$$\text{Det}\{D^{-1}\} = [M^2 - (i\omega_n + \mu - igA_4)^2 + p^2]^2$$

## Anexo 12 – Separación de frecuencias de Matsubara positivas y negativas

Se tiene la parte energética del gran potencial termodinámico que contiene a la dinámica entre los quarks y los antiquarks (92):

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left( \frac{E_p^2 + (\omega_n - i(\mu - igA_4))^2}{T^2} \right)^2$$

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^2 + (\omega_n - i(\mu - igA_4))^2}{T^2} \right) \left( \frac{E_p^2 + (\omega_n - i(\mu - igA_4))^2}{T^2} \right) \right]$$

Se tienen las frecuencias de Matsubara para fermiones (79b):

$$\omega_n = (2n + 1)\pi \frac{k_B T}{\hbar}$$

Ya que las sumas de Matsubara van desde  $n = -\infty$  hasta  $\infty$ , las  $n$  toman todos los valores enteros en la suma. Por lo tanto:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) = \sum_{n=\infty}^{-\infty} f(\omega_{-n})$$

Invocando la conmutatividad de la suma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_{-n})$$

Por esto, la expresión del gran potencial termodinámico es invariante ante el intercambio  $n \rightarrow -n$ . Se hace este cambio en la expresión para las frecuencias de Matsubara:

$$\omega_{-n} = (-2n + 1)\pi \frac{k_B T}{\hbar} = (-2n - 1 + 2)\pi \frac{k_B T}{\hbar} = -(2n + 1 - 2)\pi \frac{k_B T}{\hbar}$$

$$\omega_{-n} = -(2(n - 1) + 1)\pi \frac{k_B T}{\hbar} = -\omega_{n-1}$$

Este desplazamiento de  $n$  a  $n - 1$  en la suma de las  $-\omega_{n-1}$  no tiene relevancia porque la suma en  $n$  va desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ . Por lo tanto:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-\omega_{n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-\omega_n)$$

Y el gran potencial termodinámico es invariante ante el intercambio  $\omega_n \rightarrow -\omega_n$ . Ya que este término del gran potencial termodinámico incluye a los quarks y a los antiquarks (el cambio en el signo del potencial químico debería reflejar esto), es conveniente hacer un cambio de signo de las frecuencias de Matsubara en uno de los factores, dejando al otro igual.

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^2 + (\omega_n - i(\mu - igA_4))^2}{T^2} \right) \left( \frac{E_p^2 + (-\omega_n - i(\mu - igA_4))^2}{T^2} \right) \right]$$

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^2 + \omega_n^2 - 2i\omega_n(\mu - igA_4) - (\mu - igA_4)^2}{T^2} \right) \left( \frac{E_p^2 + \omega_n^2 + 2i\omega_n(\mu - igA_4) - (\mu - igA_4)^2}{T^2} \right) \right]$$

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^2 + \omega_n^2 - 2i\omega_n(\mu - igA_4) - (\mu - igA_4)^2}{T^2} \right) \left( \frac{E_p^2 + \omega_n^2 + 2i\omega_n(\mu - igA_4) - (\mu - igA_4)^2}{T^2} \right) \right]$$

Se hace la multiplicación de los dos factores:

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{[E_p^2 + \omega_n^2 - 2i\omega_n(\mu - igA_4) - (\mu - igA_4)^2][E_p^2 + \omega_n^2 + 2i\omega_n(\mu - igA_4) - (\mu - igA_4)^2]}{T^4} \right) \right]$$

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{[E_p^2 - (\mu - igA_4)^2 + \omega_n^2 - 2i\omega_n(\mu - igA_4)][E_p^2 - (\mu - igA_4)^2 + \omega_n^2 + 2i\omega_n(\mu - igA_4)]}{T^4} \right) \right]$$

Se multiplican los binomios conjugados:

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{(E_p^2 - (\mu - igA_4)^2 + \omega_n^2)^2 + (2\omega_n(\mu - igA_4))^2}{T^4} \right) \right]$$

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^4 + (\mu - igA_4)^4 + \omega_n^4 - 2E_p^2(\mu - igA_4)^2 + 2E_p^2\omega_n^2 - 2\omega_n^2(\mu - igA_4)^2 + 4\omega_n^2(\mu - igA_4)^2}{T^4} \right) \right]$$

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^4 + (\mu - igA_4)^4 + \omega_n^4 - 2E_p^2(\mu - igA_4)^2 + 2E_p^2\omega_n^2 + 2\omega_n^2(\mu - igA_4)^2}{T^4} \right) \right]$$

Se resta y se suma el término  $2E_p^2(\mu - igA_4)^2$ :

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{E_p^4 + (\mu - igA_4)^4 + \omega_n^4 - 4E_p^2(\mu - igA_4)^2 + 2E_p^2\omega_n^2 + 2\omega_n^2(\mu - igA_4)^2 + 2E_p^2(\mu - igA_4)^2}{T^4} \right) \right]$$

Y ahora se tiene una diferencia de cuadrados:

$$\Omega_q = -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left[ \left( \frac{(E_p^2 + (\mu - igA_4)^2 + \omega_n^2)^2 - [2E_p(\mu - igA_4)]^2}{T^4} \right) \right]$$

La diferencia de cuadrados se expresa en forma de producto de binomios conjugados volviendo a separar al logaritmo:

$$\begin{aligned}
\Omega_q &= -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left( \frac{E_p^2 + (\mu - igA_4)^2 + \omega_n^2 - 2E_p(\mu - igA_4)}{T^2} \right) \left( \frac{E_p^2 + (\mu - igA_4)^2 + \omega_n^2 + 2E_p(\mu - igA_4)}{T^2} \right) \\
\Omega_q &= -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left( \frac{(E_p - (\mu - igA_4))^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \left( \frac{(E_p + (\mu - igA_4))^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \\
\Omega_q &= -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left( \frac{(E_p - \mu + igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \left( \frac{(E_p + \mu - igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \\
\Omega_q &= -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left( \frac{(E_p - \mu + igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \left( \frac{(E_p + \mu - igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \\
\Omega_q &= -T \sum_n \sum_{\vec{p}} \left[ \ln \left( \frac{(E_p - \mu + igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) + \ln \left( \frac{(E_p + \mu - igA_4)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Y con esto se ha separado la expresión en una parte para los quarks, con el signo negativo del potencial químico, y una parte para los antiquarks, con el signo contrario (93).



**Anexo 13** – Los loops de Polyakov en el gran potencial termodinámico por unidad de volumen

Se tiene la parte térmica del gran potencial termodinámico por unidad de volumen (99):

$$\frac{\Omega_T}{V} = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}} e^{-\frac{igA_4}{T}} \right) \right\} + \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}} e^{\frac{igA_4}{T}} \right) \right\}$$

$A_4$  está descrito por una matriz de  $3 \times 3$  en términos de las constantes de parametrización  $a_3$  y  $a_8$  (101):

$$A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a_8}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Al calcular la cantidad  $e^{\frac{\mp igA_4}{T}}$  se expresa en forma de series de potencias:

$$e^{\frac{\mp igA_4}{T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp ig)^n}{T^n n!} A_4^n$$

Al elevar una matriz diagonal, las potencias de dicha matriz son equivalentes a la matriz formada por las potencias de cada elemento:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

En el caso de  $e^{\frac{igA_4}{T}}$ , cada componente de  $A_4$  queda elevada por separado (102):

$$e^{\frac{\mp igA_4}{T}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix}$$

Ahora se busca la traza que aparece en el gran potencial termodinámico:

$$\text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp igA_4}{T}} \right) \right\}$$

$$\text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix} \right) \right\}$$

La suma de una matriz con 1 se interpreta como una suma con la matriz identidad:

$$\text{Tr} \left\{ T \ln \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\bar{\Gamma} ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$\text{Tr} \left\{ T \ln \begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\bar{\Gamma} ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix} \right\}$$

Se desarrolla el logaritmo en serie de potencias:

$$\ln \begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\bar{\Gamma} ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \begin{pmatrix} e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\bar{\Gamma} ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix}^n$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \begin{pmatrix} \left[ e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\bar{\Gamma} ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right]^n & 0 & 0 \\ 0 & \left[ e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right]^n & 0 \\ 0 & 0 & \left[ e^{-\frac{E_p \bar{\Gamma} \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right]^n \end{pmatrix}$$

Las potencias de cada elemento de la matriz se calculan por separado, pero todas van dentro de la misma suma. Efectivamente, el resultado de la suma de las potencias de cada elemento es igual al logaritmo natural de dicho elemento (más uno):

$$\begin{aligned}
& \ln \begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esta propiedad no sería válida si la matriz original no fuera una matriz diagonal. De esta forma, es sencillo calcular la traza de esta matriz (104):

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ T \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig A_4}{T}} \right) \right\} \\
& = T \left[ \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Se simplifica algebraicamente la suma de logaritmos:

$$\begin{aligned}
& T \left[ \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \right] \\
& T \ln \left[ \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \right] \\
& T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right. \\
& \quad + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \\
& \quad + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \\
& \quad \left. + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right]
\end{aligned}$$

$$T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right. \\ \left. + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right. \\ \left. + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} + e^{-\frac{3(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right]$$

$$T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right. \\ \left. + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig\left[\left(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right) - \left(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)\right]}{2T}} + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig\left[\left(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right) - 2\left(\frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)\right]}{2T}} \right. \\ \left. + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\pm ig\left[\left(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right) + 2\left(\frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)\right]}{2T}} + e^{-\frac{3(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig\left[\left(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right) - \left(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}}\right) - 2\left(\frac{a_8}{\sqrt{3}}\right)\right]}{2T}} \right]$$

$$T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right. \\ \left. + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\mp ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} e^{\frac{\pm ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{3(E_p \mp \mu)}{T}} \right]$$

$$T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}} \left( e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \right. \\ \left. + e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}} \left( e^{\frac{\mp ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} + e^{\frac{\mp ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{\pm ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) + e^{-\frac{3(E_p \mp \mu)}{T}} \right]$$

Nótese que el término que multiplica a  $e^{-\frac{E_p \mp \mu}{T}}$  es el complejo conjugado del que multiplica a  $e^{-\frac{2(E_p \mp \mu)}{T}}$ . En particular,  $\left( e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right)$  es igual a la traza de  $e^{\frac{\mp ig A_4}{T}}$  y su

complejo conjugado es la traza de  $e^{\frac{\pm ig A_4}{T}}$ :

$$e^{\frac{\mp ig A_4}{T}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\mp ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pm ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\pm ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \end{pmatrix}$$

Se sustituye esto en la parte térmica del gran potencial termodinámico por unidad de volumen:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_T}{V} = \frac{1}{N_c} & \left( T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}} \left( e^{-\frac{ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-\frac{2(E_p - \mu)}{T}} \left( e^{-\frac{ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} + e^{-\frac{ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{\frac{ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) + e^{-\frac{3(E_p - \mu)}{T}} \right] \right) \\ & + \frac{1}{N_c} \left( T \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}} \left( e^{\frac{ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-\frac{2(E_p + \mu)}{T}} \left( e^{\frac{ig(\frac{a_8}{\sqrt{3}})}{T}} + e^{\frac{ig(a_3 - \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} + e^{-\frac{ig(a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}})}{2T}} \right) + e^{-\frac{3(E_p + \mu)}{T}} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_T}{V} = \frac{T}{N_c} \ln & \left[ 1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}} \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{igA_4}{T}} \right\} + e^{-\frac{2(E_p - \mu)}{T}} \text{Tr} \left\{ e^{\frac{igA_4}{T}} \right\} + e^{-\frac{3(E_p - \mu)}{T}} \right] \\ & + \frac{T}{N_c} \ln \left[ 1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}} \text{Tr} \left\{ e^{\frac{igA_4}{T}} \right\} + e^{-\frac{2(E_p + \mu)}{T}} \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{igA_4}{T}} \right\} + e^{-\frac{3(E_p + \mu)}{T}} \right] \end{aligned}$$

Las trazas  $\text{Tr} \left\{ e^{\frac{igA_4}{T}} \right\}$  y  $\text{Tr} \left\{ e^{-\frac{igA_4}{T}} \right\}$  son los loops de Polyakov (68,69) después de haber integrado el tiempo imaginario (multiplicadas por el número de colores  $N_c = 3$ ):

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \left( e^{i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau)} \right) \right\}$$

$$\Phi^*(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \left( e^{-i \int_0^\beta d\tau A_4^*(\vec{x}, \tau)} \right) \right\}$$

Y finalmente, se dejan estas cantidades expresadas en términos de los loops de Polyakov (106):

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_T}{V} = \frac{T}{N_c} \ln & \left[ 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p - \mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p - \mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p - \mu)}{T}} \right] \\ & + \frac{T}{N_c} \ln \left[ 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p + \mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p + \mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p + \mu)}{T}} \right] \end{aligned}$$

#### Anexo 14 – Relación entre los loops de Polyakov con el potencial químico

Se tiene al gran potencial termodinámico por unidad de volumen (106):

$$\frac{\Omega}{V} = \frac{\sigma^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ E_p + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right) \right]$$

Los parámetros  $\Phi$  y  $\Phi^*$  representan a los loops de Polyakov, siendo uno el complejo conjugado del otro. Queremos saber en qué condiciones estos loops son diferentes o son iguales. Una forma intuitiva de saber si dos parámetros son iguales es hacer un intercambio de uno de los dos por el otro y viceversa. Si el potencial termodinámico permanece invariante ante el intercambio de estos dos parámetros, quedando todos los demás parámetros establecidos de forma arbitraria, entonces estos dos parámetros son (siempre) iguales.

$\Phi$  y  $\Phi^*$  aparecen dos veces en el potencial termodinámico, una en el potencial efectivo  $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$  y otra en la parte térmica de la integral del trimomento. Inmediatamente se puede notar que los tres potenciales efectivos que se usan en este trabajo (109,111,113) son invariantes ante el intercambio  $\Phi \leftrightarrow \Phi^*$ :

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{1}{2} b_2(T) \Phi \Phi^* - \frac{1}{6} b_3(\Phi^3 + \Phi^{*3}) + \frac{1}{4} b_4(\Phi \Phi^*)^2$$

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{1}{2} a(T) \Phi \Phi^* + b_3 \left( \frac{T_0}{T} \right)^3 \ln(1 - 6\Phi \Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi \Phi^*)^2)$$

$$\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) = -bT \left[ 54\Phi \Phi^* e^{-\frac{a}{T}} + \ln(1 - 6\Phi \Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi \Phi^*)^2) \right]$$

En todos los casos, los parámetros que no mencionan a los loops de Polyakov son independientes de éstos. Mientras tanto, los loops de Polyakov aparecen solamente como elementos invariantes ante el intercambio  $\Phi \leftrightarrow \Phi^*$ ,  $\Phi \Phi^*$  y  $(\Phi^3 + \Phi^{*3})$ . Con esto se descarta variabilidad de los loops dependiente de este sector del gran potencial termodinámico.

La otra parte del gran potencial termodinámico que depende de los loops de Polyakov es la parte térmica de la integral del trimomento:

$$\frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right)$$

Se hace el intercambio  $\Phi \leftrightarrow \Phi^*$  y se resta la parte térmica después del intercambio y la original. Sólo si el resultado es cero,  $\Phi$  y  $\Phi^*$  son iguales:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right) \right] \\
& - \left[ \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{T}{N_c} \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right) \right] \\
& \frac{T}{N_c} \left\{ \left[ \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[ \ln \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right) \right] \right\} \\
& \frac{T}{N_c} \ln \frac{\left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right)}{\left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right)}
\end{aligned}$$

Lo que se busca para que el resultado sea cero es que el argumento del logaritmo sea uno. En otras palabras, que el numerador y el denominador sean iguales:

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right) \\
& = \left( 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} \right) \left( 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} \right. \\
& \quad \left. + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} \right)
\end{aligned}$$

Se hacen las multiplicaciones a los dos lados del igual:

$$\begin{aligned}
& 1 + 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 9\Phi\Phi^* e^{-\frac{2E_p}{T}} + 9\Phi^*{}^2 e^{-\frac{3E_p+\mu}{T}} \\
& + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p+2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p-\mu}{T}} + 9\Phi\Phi^* e^{-\frac{4E_p}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{5E_p+\mu}{T}} \\
& + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{4E_p-2\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p-\mu}{T}} + e^{-\frac{6E_p}{T}} \\
& = 1 + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + e^{-\frac{3(E_p+\mu)}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 9\Phi\Phi^* e^{-\frac{2E_p}{T}} \\
& + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{4E_p+2\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + 9\Phi^*{}^2 e^{-\frac{3E_p-\mu}{T}} + 9\Phi\Phi^* e^{-\frac{4E_p}{T}} \\
& + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p+\mu}{T}} + e^{-\frac{3(E_p-\mu)}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p-2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{5E_p-\mu}{T}} + e^{-\frac{6E_p}{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3\Phi e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 9\Phi^{*2} e^{-\frac{3E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p+2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} \\
& + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p-\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{5E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{4E_p-2\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p-\mu}{T}} \\
& = 3\Phi^* e^{-\frac{E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2(E_p+\mu)}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{E_p-\mu}{T}} + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{4E_p+2\mu}{T}} \\
& + 3\Phi^* e^{-\frac{2(E_p-\mu)}{T}} + 9\Phi^{*2} e^{-\frac{3E_p-\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p+\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p-2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{5E_p-\mu}{T}} \\
& 3\Phi e^{-\frac{E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{2E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 9\Phi^{*2} e^{-\frac{3E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} \\
& + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{5E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{4E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} \\
& = 3\Phi^* e^{-\frac{E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{2E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{4E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} \\
& + 3\Phi^* e^{-\frac{2E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} + 9\Phi^{*2} e^{-\frac{3E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}} + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p}{T}} e^{-\frac{2\mu}{T}} + 3\Phi e^{-\frac{5E_p}{T}} e^{-\frac{\mu}{T}}
\end{aligned}$$

Se agrupan los términos semejantes de un lado del igual:

$$\begin{aligned}
& 3\Phi e^{-\frac{E_p}{T}} \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) + 3\Phi^* e^{-\frac{2E_p}{T}} \left( e^{-\frac{2\mu}{T}} - e^{-\frac{2\mu}{T}} \right) + 3\Phi^* e^{-\frac{E_p}{T}} \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) \\
& + 9\Phi^{*2} e^{-\frac{3E_p}{T}} \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) + 3\Phi^* e^{-\frac{4E_p}{T}} \left( e^{-\frac{2\mu}{T}} - e^{-\frac{2\mu}{T}} \right) + 3\Phi e^{-\frac{2E_p}{T}} \left( e^{-\frac{2\mu}{T}} - e^{-\frac{2\mu}{T}} \right) \\
& + 9\Phi^2 e^{-\frac{3E_p}{T}} \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) + 3\Phi e^{-\frac{5E_p}{T}} \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) + 3\Phi e^{-\frac{4E_p}{T}} \left( e^{-\frac{2\mu}{T}} - e^{-\frac{2\mu}{T}} \right) \\
& + 3\Phi^* e^{-\frac{5E_p}{T}} \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) = 0
\end{aligned}$$

Ya que  $\Phi$  y  $\Phi^*$  son parámetros libres, éstos no pueden ser cero de forma incondicional. Por lo tanto, los únicos factores que pueden ser cero son las restas de las exponenciales. Todas estas restas tienen una de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
& \pm \left( e^{-\frac{\mu}{T}} - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) \\
& \pm \left( e^{-\frac{2\mu}{T}} - e^{-\frac{2\mu}{T}} \right)
\end{aligned}$$

Como la temperatura y el potencial químico son reales, estas dos igualdades se reducen:

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{\mu}{T}} = e^{\frac{\mu}{T}}, e^{-\frac{2\mu}{T}} = e^{\frac{2\mu}{T}} \\
& -\frac{\mu}{T} = \frac{\mu}{T}, -\frac{2\mu}{T} = \frac{2\mu}{T} \\
& \mu = -\mu \rightarrow \mu = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mu = 0$  es una condición necesaria y suficiente para que  $\Phi$  y  $\Phi^*$  sean iguales cuando éstas son diferentes de cero.



**Anexo 15 – Invariancia del determinante de la ‘matriz de concavidad adimensional’**

Se tienen los elementos para la matriz de concavidad adimensional (114):

$$C_{ab} = \frac{\beta \partial^2}{\Lambda \partial c_a \partial c_b} \left( \frac{\Omega}{V} \right)$$

Los índices  $ab$  van de 1 a 3 y están representados por los parámetros de orden; las masas y los loops de Polyakov. Se construye la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} \partial_{mm} & \partial_{m\Phi} & \partial_{m\Phi^*} \\ \partial_{\Phi m} & \partial_{\Phi\Phi} & \partial_{\Phi\Phi^*} \\ \partial_{\Phi^* m} & \partial_{\Phi^*\Phi} & \partial_{\Phi^*\Phi^*} \end{pmatrix}$$

Buscamos probar que el determinante de  $C$  permanece invariante si los elementos donde se deriva con respecto a la masa sólo una vez cambian de signo. Primero se calcula el determinante de  $C$  mediante expansión de cofactores:

$$\begin{aligned} \text{Det}\{C\} &= \partial_{mm} \begin{vmatrix} \partial_{\Phi\Phi} & \partial_{\Phi\Phi^*} \\ \partial_{\Phi^*\Phi} & \partial_{\Phi^*\Phi^*} \end{vmatrix} - \partial_{m\Phi} \begin{vmatrix} \partial_{\Phi m} & \partial_{\Phi\Phi^*} \\ \partial_{\Phi^* m} & \partial_{\Phi^*\Phi^*} \end{vmatrix} + \partial_{m\Phi^*} \begin{vmatrix} \partial_{\Phi m} & \partial_{\Phi\Phi} \\ \partial_{\Phi^* m} & \partial_{\Phi^*\Phi} \end{vmatrix} \\ \text{Det}\{C\} &= \partial_{mm} \partial_{\Phi\Phi} \partial_{\Phi^*\Phi^*} - \partial_{mm} \partial_{\Phi\Phi^*} \partial_{\Phi^*\Phi} - \partial_{m\Phi} \partial_{\Phi m} \partial_{\Phi^*\Phi^*} + \partial_{m\Phi} \partial_{\Phi\Phi} \partial_{\Phi^* m} \\ &\quad + \partial_{m\Phi^*} \partial_{\Phi m} \partial_{\Phi^*\Phi} - \partial_{m\Phi^*} \partial_{\Phi\Phi} \partial_{\Phi^* m} \end{aligned}$$

Ahora se hace la transformación de  $C$ , cambiando de signo las derivadas parciales con respecto a la masa una vez y se calcula su determinante:

$$C' = \begin{pmatrix} \partial_{mm} & -\partial_{m\Phi} & -\partial_{m\Phi^*} \\ -\partial_{\Phi m} & \partial_{\Phi\Phi} & \partial_{\Phi\Phi^*} \\ -\partial_{\Phi^* m} & \partial_{\Phi^*\Phi} & \partial_{\Phi^*\Phi^*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}\{C'\} &= \partial_{mm} \begin{vmatrix} \partial_{\Phi\Phi} & \partial_{\Phi\Phi^*} \\ \partial_{\Phi^*\Phi} & \partial_{\Phi^*\Phi^*} \end{vmatrix} + \partial_{m\Phi} \begin{vmatrix} -\partial_{\Phi m} & \partial_{\Phi\Phi^*} \\ -\partial_{\Phi^* m} & \partial_{\Phi^*\Phi^*} \end{vmatrix} - \partial_{m\Phi^*} \begin{vmatrix} -\partial_{\Phi m} & \partial_{\Phi\Phi} \\ -\partial_{\Phi^* m} & \partial_{\Phi^*\Phi} \end{vmatrix} \\ \text{Det}\{C'\} &= \partial_{mm} \partial_{\Phi\Phi} \partial_{\Phi^*\Phi^*} - \partial_{mm} \partial_{\Phi\Phi^*} \partial_{\Phi^*\Phi} - \partial_{m\Phi} \partial_{\Phi m} \partial_{\Phi^*\Phi^*} + \partial_{m\Phi} \partial_{\Phi\Phi} \partial_{\Phi^* m} \\ &\quad + \partial_{m\Phi^*} \partial_{\Phi m} \partial_{\Phi^*\Phi} - \partial_{m\Phi^*} \partial_{\Phi\Phi} \partial_{\Phi^* m} \\ \text{Det}\{C'\} &= \text{Det}\{C\} \end{aligned}$$

## Anexo 16 – Cálculo computacional del diagrama de fases

El diagrama de fases se calcula de forma discreta, los parámetros y las susceptibilidades se calcularon en Mathematica para cada par ordenado  $(\mu, T)$  que se encuentra en el mallado de la Fig. 8. Esto se hizo mediante un ciclo “for” anidado, es decir, un ciclo dentro de otro. En todos los casos, se hizo variar al potencial químico para valores entre 0 y 350 MeV, con un paso de 1 MeV, esto para cada valor de temperatura que se usó, que en este trabajo fueron los valores entre 1 y 300 MeV, con un paso de 1 MeV. Un ejemplo de esto son las Figs. 11, 13 y 14.

Las Figs. 11, 13 y 14 son en realidad una colección de puntos discretizados obtenidos de la susceptibilidad, la masa constitutiva y el loop de Polyakov, respectivamente. En cada uno de los pasos intermedios del ciclo “for” resuelve para una coordenada  $(\mu, T)$  la susceptibilidad quiral (115), la susceptibilidad del loop de Polyakov (116) y los parámetros de orden (107). En las ecuaciones de gap, la masa constitutiva y los loops de Polyakov aparecen en ambos lados del igual sin la posibilidad de despejarlos de manera convencional, por lo que se encuentra el valor de forma numérica en esta ecuación autoconsistente mediante un comando que se llama “findroot”.

Todas las coordenadas que se obtuvieron en el ciclo “for” anidado se guardan en un archivo de valores separados por comas (extensión .csv), el cual consta de cinco valores por cada renglón: la temperatura y el potencial químico (que son los valores de entrada para el ciclo “for”), la masa constitutiva, el loop de Polyakov y su complejo conjugado (siendo éstos últimos tres los parámetros de orden). Después, este archivo es usado para alimentar otro código cuya finalidad es calcular las susceptibilidades correspondientes. Después de esto, el nuevo archivo .csv tendrá siete valores por cada renglón: los cinco del original mas la susceptibilidad quiral (115) y la susceptibilidad promedio del loop de Polyakov (116).

Al graficar en un sistema de coordenadas de tres dimensiones alguno de los elementos calculados, los ejes que representan a los parámetros libres (temperatura y potencial químico) forman al plano horizontal, mientras que el eje vertical puede ser cualquiera de los otros elementos calculados del archivo .csv (por ejemplo, en la Fig. 11 el eje vertical representa a la susceptibilidad quiral, en la Fig. 13 a la masa constitutiva y en la Fig. 14 al loop de Polyakov). Es a partir de estas gráficas de donde se crean los diagramas de fases. El comportamiento de los parámetros de orden y de las susceptibilidades determina dónde se encuentran las líneas de crossover y de cambio de fase concorde a lo descrito en la sección 6.4.