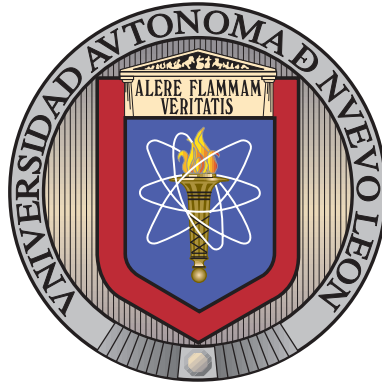


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS
CONVEXOS DEFINIDOS POR SUS VÉRTICES

POR

ALBERTO MARTÍNEZ NOA

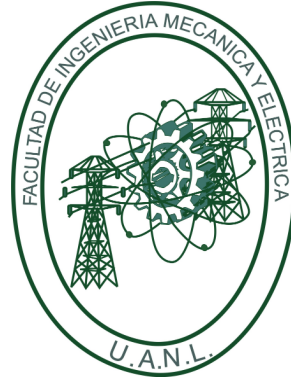
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CON ORIENTACIÓN EN SISTEMAS

JUNIO 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS
CONVEXOS DEFINIDOS POR SUS VÉRTICES

POR

ALBERTO MARTÍNEZ NOA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CON ORIENTACIÓN EN SISTEMAS

JUNIO 2020



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Empaquetamiento óptimo de polígonos convexos definidos por sus vértices», realizada por el alumno Alberto Martínez Noa, con número de matrícula 1985271, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con orientación en Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Igor Semionovich Litvinchev
Asesor

Dr. José Daniel Mosquera Artamonov
Revisor

Dr. Fernando López Irragarri
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2020

A mis padres y hermana, por ser el pilar más importante y por demostrarme siempre su cariño y apoyo incondicional. A mi amada esposa por creer siempre en mí, alentarme y apoyarme incansablemente.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	xv
Resumen	xvi
1. Introducción	1
1.1. Problemas de corte y empaquetamiento	1
1.2. Motivación	4
1.3. Hipótesis	5
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivos específicos:	6
1.5. Metodología	6
1.6. Contribuciones	7
1.7. Estructura de la tesis	7
2. Marco Teórico	9
2.1. Clasificación de los problemas de corte y empaquetamiento	10
2.2. Problema de Dimensiones Abiertas	12

2.2.1.	Problemas de minimización de Área o Perímetro	13
2.2.2.	Problema de Empaquetamiento en Tiras	14
2.2.3.	Problema de Empaquetamiento en Tiras Irregular o de Anidación	16
2.3.	Trabajos encontrado en la literatura sobre el empaquetamiento de diferentes tipos de elementos pequeños	17
2.3.1.	Empaquetamiento en contenedores de dimensiones fijas	17
2.3.2.	Empaquetamiento en contenedores de dimensiones variables	19
2.3.3.	Artículos de Revisión de literatura sobre C&P	23
3.	Metodología de Solución	24
3.1.	Condiciones geométricas.	24
3.2.	Condiciones de no intersección	27
3.3.	Condiciones de contenimiento.	30
3.4.	Formalización del modelo Sección Circular	30
3.5.	Función Objetivo	32
4.	Experimentación y Resultados	35
4.1.	Objetivos	36
4.2.	Experimentación	36
4.2.1.	Instancias analizadas	36
4.3.	Diseño de experimentos	38

4.3.1. Primera fase de experimentación	39
4.3.2. Segunda fase de la experimentación	52
4.3.3. Análisis de los resultados de la segunda fase de experimentación	62
5. Conclusiones	75
5.1. Conclusiones	75
5.2. Limitaciones	77
5.3. Trabajos futuros	77
A. Instancias y Resultados	79
A.1. Descripción detallada de las instancias	79
A.1.1. Triángulos	79
A.1.2. Rectángulos	81
A.1.3. Cuadrados	83
A.1.4. Cuadriláteros mixtos	85
A.1.5. Pentágonos	88
A.1.6. Hexágonos	90

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Artículos relacionados con SPP en los últimos 15 años.	5
2.1. Tipología básica de los problemas de corte y empaquetamiento según [38]	12
2.2. Resultados del modelo que optimiza área o perímetro de un rectángulo	14
2.3. 31 círculos en contenedor circular de radio 6.2907435849	15
2.4. resultado del modelo que minimiza la altura de la plancha	17
3.1. Triángulos equiláteros de lados iguales	26
3.2. Pentágonos diferentes con lados iguales	26
3.3. Pentágono definido por x^s en contenedor Ω	30
4.1. Cinco triángulos en contenedor secc-circular para diferentes valores de ε	40
4.2. Cinco rectángulos contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .	41
4.3. Cinco cuadrados contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .	42
4.4. Cinco pentágonos contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .	43
4.5. Cinco hexágonos contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .	44

4.6. gráfica de barras que muestra los valores de radio, factibilidad y tipo de figura para cada valor de ε	45
4.7. Resultados para cinco triángulos contenedor circular para diferentes valores de ε	46
4.8. Resultados para cinco rectángulo contenedor circular para diferentes valores de ε	47
4.9. Resultados para cinco cuadrados contenedor circular para diferentes valores de ε	48
4.10. Resultados para cinco pentágonos contenedor circular para diferentes valores de ε	49
4.11. Resultados para cinco hexágonos contenedor circular para diferentes valores de ε	50
4.12. Gráfica de barras que muestra valores de radio y factibilidad al variar ε	51
4.13. Resultados de triángulos en contenedor secc-circular	53
4.14. Resultados de rectángulos en contenedor secc-circular	54
4.15. Resultados de cuadrados en contenedor secc-circular	55
4.16. Resultados de cuadriláteros mixtos en contenedor secc-circular	55
4.17. Resultados de pentágonos idénticos en contenedor secc-circular	56
4.18. Ejemplos de hexágonos idénticos en contenedor secc-circular	57
4.19. Resultados de triángulos idénticos en contenedor circular	58
4.20. Resultados de rectángulos idénticos en contenedor circular	58
4.21. Resultados de cuadrados idénticos en contenedor circular	59

4.22. Resultados cuadriláteros mixtos en contenedor circular	60
4.23. Resultados pentágonos idénticos en contenedor circular	61
4.24. Resultados hexágonos idénticos en contenedor circular	61
4.25. Diagrama de caja y bigotes que relaciona los tipos de figuras y el % de ocupación del contenedor.	64
4.26. Diagrama de caja y bigotes que relaciona los cantidad de figuras y el % de ocupación del contenedor.	65
4.27. Diagrama simultaneo que relaciona el % de ocupación del contenedor, con los grupos del factor cantidad de figuras	67
4.28. Diagrama de caja y bigotes que relaciona los tipos de figuras y el % de ocupación del contenedor.	69
4.29. Diagrama simultaneo que relaciona el % de ocupación del contenedor, con los grupos del factor tipos de figuras.	71
4.30. Diagrama de caja y bigotes que relaciona la cantidad de figuras y el % de ocupación del contenedor.	72
4.31. Diagrama de caja y bigotes que relaciona los tipos de contenedores y el % de ocupación del contenedor.	74
A.1. Triángulo equilátero de muestra	79
A.2. Rectángulo de muestra	81
A.3. Cuadrado de muestra	83
A.4. Muestra de los cuadriláteros.	85
A.5. Pentágono de muestra	88

A.6. Pentágono de muestra	90
-------------------------------------	----

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Modelos 2D para minimizar la/s dimensión/es del contenedor	33
4.1. Cantidad de instancias por figuras	37
4.2. Matriz de distancias(d), y ángulos(σ) que forman las figuras	38
4.3. Resultados para cinco triángulos para diferentes valores de ε	40
4.4. Resultados para cinco rectángulos para diferentes valores de ε	41
4.5. Resultados para cinco cuadrados para diferentes valores de ε	42
4.6. Resultados para cinco pentágonos para diferentes valores de ε	43
4.7. Resultados para cinco hexágonos para diferentes valores de ε	44
4.8. Resultados para cinco triángulos para diferentes valores de ε	46
4.9. Resultados para cinco rectángulos para diferentes valores de ε	47
4.10. Resultados para cinco cuadrados para diferentes valores de ε	48
4.11. Resultados para cinco pentágonos para diferentes valores de ε	49
4.12. Add caption	50
4.13. Resultados de la experimentación de Triángulos	53
4.14. Resultados de la experimentación de Rectángulos	54

4.15. Resultados de la experimentación de Cuadrados	54
4.16. Resultados de la experimentación de Cuadriláteros mixtos	55
4.17. Resultados de la experimentación de Pentágonos	56
4.18. Resultados de la experimentación de hexágonos	57
4.19. Triángulos	57
4.20. Rectángulos	58
4.21. Cuadrados	59
4.22. Cuadriláteros mixtos	59
4.23. Pentágonos	60
4.24. Hexágonos	61
4.25. Prueba Shapiro–Wilk a la variable % de ocupación	62
4.26. Influencia del tipo de figura en el % de ocupación del contenedor . . .	63
4.27. Influencia de la cantidad de figura en el % de ocupación del contenedor	65
4.28. Tukey, influencia de la cantidad de figuras en el % de ocupación del contenedor	66
4.29. Prueba Shapiro–Wilk a la variable % de ocupación	68
4.30. Influencia del tipo de figura en el % de ocupación del contenedor . . .	68
4.31. Tukey, influencia de la tipo de figuras en el % de ocupación del con- tenedor	70
4.32. Influencia de la cantidad de figura en el % de ocupación del contenedor	71
4.33. Prueba Shapiro–Wilk a la variable % de ocupación	73

4.34. Prueba H de Kruskal-Wallis que relaciona el % de ocupación con el tipo de contenedor	73
A.1. Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras triangulares	80
A.2. Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras Rectangulares	82
A.3. Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras Cuadradas	84
A.4. Descripción de las instancias y resultados obtenidos cuadriláteros mixtos en contenedor circular	86
A.5. Descripción de las instancias y resultados obtenidos cuadriláteros mixtos en contenedor secc-circular	87
A.6. Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras tipo pentágonos	89
A.7. Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras hexagonales	91

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por darme la fuerza para salir adelante. En especial mis padres y hermana, gracias por estar cerca de mi cuando las he necesitado.

A mi esposa que me ha permitido sobrellevar las vicisitudes que implica estar lejos de tu tierra, sin su ayuda, probablemente hubiera sido más difícil el camino.

A mi asesor el Dr. Igor Litvinchev por dedicarme su tiempo y brindarme sus conocimientos.

A mis revisores de tesis, el Dr. José Daniel Mosquera y el Dr. Fernando López que me con sus consejos me llevaron a la conclusión de este trabajo.

A CONACyT por darme su apoyo y la oportunidad de estudiar una maestría en tan prestigiosa universidad.

A FIME donde me sentí como en casa, facultad que puso tantos recursos en función de mi formación.

A las buenas amistades que hice en mi trayecto por la UANL. A todas las personas que han aportado su granito de arena en la realización de esta tesis de maestría.

A los profesores que, durante toda mi vida, fecundaron mi interés por el conocimiento.

RESUMEN

Alberto Martínez Noa.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con orientación en Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS CONVEXOS DEFINIDOS POR SUS VÉRTICES.

Número de páginas: 96.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: El objetivo principal de esta investigación es encontrar soluciones aceptables en un tiempo razonable a instancias del problema de empaquetamiento de polígonos convexos en contenedores convexos (sección circular y circular) de dimensiones variables, utilizando el modelo de programación no lineal propuesto, que define los polígonos por sus vértices. Además de determinar el efecto en el empaquetamiento teniendo como parámetros de control la cantidad de elementos a empaquetar, el tipo de elemento y el tipo de contenedor.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: El modelo propuesto es integrador ya que permite resolver todos los problemas que se derivan de la clase ODP, cuando se tiene como elementos a empaquetar polígonos convexos en contenedores convexos. El mismo es fácilmente escalable a n dimensiones.

En la fase de la experimentación se comprobó que el tipo de figura no influye en la densidad o porcentaje de ocupación de las figuras en el contenedor tipo seccircular con un intervalo de confianza del 95 %, para la variable de respuesta *% de ocupación* ($pval > 0.05$). En cambio en el contenedor tipo circular el tipo de

figura si influye en el porcentaje de ocupación con el mismo intervalo de confianza, para la variable dependiente ($pval < 0.05$) existiendo las diferencias entre los pares (cuadrados–cuadriláteros mixtos y cuadrados–triángulos).

Además se constató que la cantidad de figuras no influye en la densidad o porcentaje de ocupación de las figuras en el contenedor secc–circular, con un intervalo de confianza del 95 %, para la variable de respuesta **% de ocupación** ($pval > 0.05$). Por el contrario en el contenedor tipo circular la cantidad de figuras no influye en la densidad de empaquetado, con el mismo intervalo de confianza, para la variable dependiente ($pval < 0.05$) existiendo las diferencias estadísticas significativas entre los pares (10–8,10–7,9–8 y 9–7).

Se pudo concluir que el tipo de contenedor influye en la densidad del empaque, con un intervalo de confianza del 95 %, para la variable de respuesta **% de ocupación** ($pval > 0.05$).

La principal contribución de este trabajo investigativo se publico en el artículo en la revista JCR 2.39 de Springer: Litvinchev I., Romanova T., Corrales-Diaz R., Esquerra-Arguelles A., Martinez-Noa A., Lagrangian Approach to Modeling Placement Conditions in Optimized Packing Problems, Mobile Networks and Applications, 2020, ISSN: 1572-8153, <https://doi.org/10.1007/s11036-020-01556-w>.

Firma del asesor: _____
Dr. Igor Semionovich Litvinchev

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Contenido del capítulo

1.1. Problemas de corte y empaquetamiento	1
1.2. Motivación	4
1.3. Hipótesis	5
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivos específicos:	6
1.5. Metodología	6
1.6. Contribuciones	7
1.7. Estructura de la tesis	7

1.1 PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETAMIENTO

El hombre ha estado involucrado desde sus comienzos como ser social en la búsqueda del óptimo aprovechamiento y utilización de los recursos a su disposición. Este *espíritu* o *instinto* de mejora continua se trasmite de sus ancestrales actividades de supervivencia, a sus incipientes procesos productivos, y de ahí toda actividad humana moderna tal como la conocemos. Llegando a ser esta necesidad de superarse

a si mismo, el legado de civilizaciones y generaciones anteriores, convirtiéndose en parte inseparable de la naturaleza del ser humano.

En la era de las comunicaciones e información el enorme poder y la astronómica velocidad de procesamiento alcanzado por las computadoras; el desarrollo logrado en las Ciencias Exactas en la modelación de los fenómenos naturales, sociales y antropogénicos; la aparición y vinculación de las ciencias y disciplinas aplicadas tales como: la Ingeniería Industrial, la Investigación de Operaciones, la Administración de la Producción u Operaciones, la Ingeniería Financiera, entre muchas más todas ellas enfocadas en la búsqueda de soluciones *efectivas* a los problemas que aquejan a la sociedad, permiten al hombre analizar e impactar al recurso más valioso de todos: **el tiempo**.

Hoy en día, el proceso de optimizar puede ser aplicado a cualquier esfera de la vida cotidiana [31], hasta la actividad más insignificante e impensable es susceptible de ser estudiada, impactada y mejorada por métodos y técnicas desarrolladas para estos propósitos, cualquier rama de la actividad humana puede potencialmente convertirse en un área de investigación o un sector de aplicación.

Las industrias productoras de materias primas, manufactureras y de servicios, las empresas logísticas, las cadenas de suministros, los problemas de localización de instalaciones y distribución, son sectores en donde y hacia las cuales se han orientado y realizado la mayor cantidad de investigaciones empleando las técnicas que comprenden estas disciplinas. Lo anterior puede ser apreciado por numerosas investigaciones de alto impacto en la industria de materias primas básicas.

La tipología de problemas que aborda el presente trabajo investigativo está muy vinculada al sector logístico, textil y automotriz, aunque por la versatilidad de los modelos, la cantidad de problemas diferentes dentro de la misma área, y la *facilidad* con la que pueden ser ajustados a muchas situaciones tiene un espectro de aplicación en expansión a otros nichos del conocimiento, estos problemas son los llamados problemas de corte y empaquetamiento.

Los problemas de corte y empaquetamiento (C & P) *del inglés Cutting and Packing Problems* tienen un gran valor como tema de investigación en las últimas décadas. Su amplio abanico de aplicaciones tanto en áreas prácticas como con fines teóricos, convierten a al mismo en un tema con gran presencia en la literatura en temas que van desde la carga de contenedores en logística[35], en la industria del papel, vidrio, siderúrgica y agricultura[41], en áreas vitales como medicina(tratamientos radio-quirúrgicos [37]) y la física (aproximación de materiales granulares [21] y empaquetamiento de partículas [10]), hasta temas actuales y parte del proyecto industria 4.0 como es la manufactura aditiva conocida como impresión 3D en [33, 40, 29].

En los problemas de C & P contamos con un conjunto de elementos pequeños llamados carga que deben ser dispuestos o asignados a uno o varios objetos de gran tamaño llamados contenedores, y se debe cumplir la no superposición entre elementos pequeños y que dichos conjunto de elementos no excedan las dimensiones del contenedor al cual han sido asignados. Dichos problemas se clasifican como NP-duros [8] debido a su complejidad computacional.

Este trabajo de investigación se centrará en la resolución del problema de empaquetamiento de un surtido arbitrario de elementos pequeños convexos en un único contenedor convexo de dimensiones variables que se puede tratar como el problema de dimensión(es) abierta(as)(ODP, por sus siglas en inglés) que consiste:

- El problema de dimensión abierta es un problema en el cual, el conjunto de elementos pequeños debe ser acomodado completamente dentro de un objeto grande o contenedor. El objeto grande, posee al menos una dimensión puede considerarse como una variable. En otras palabras, este problema implica una decisión sobre la fijación de las extensiones en las dimensiones variables de los objetos grandes, así como el valor de la entrada u otra medida como longitud, tamaño o volumen se deben minimizar [38].

1.2 MOTIVACIÓN

Los C&P tienen una gran incidencia en muchos sectores dado la necesidad actual de optimización de los recursos (tiempo, materias primas, combustibles y recursos humanos). Muchas empresas tienen como objeto social la fabricación de productos de diferentes tipos (muebles, alimentos, calzado, electrodomésticos, equipos electrónicos, medicamentos), en la fabricación de estos artículos es muy importante la mayor utilización de los recursos disponible es decir minimizar los residuos de los mismos. Además, dado la gran demanda de dichos los artículos las empresas enfrentan día a día problemas de empaquetamiento de los pedidos. La mayoría de estas empresas pretenden utilizar la menor cantidad de contenedores en el envío de productos para así disminuir los costos por concepto de envío [25]. También dado la crisis energética de hoy la carga eficiente en contenedores minimizará la cantidad de viajes de contenedores al extranjero y, por lo tanto, reducirá el gasto de los combustibles [13].

Dentro de los C&P está la clase de problemas de dimensiones abierta que por sus características es una de las clases más generales y con más presencia en la literatura. Varios de los Problemas mas representativos de esta clases son: problemas de empaquetamiento ortogonal, de empaquetamiento en tiras regular o irregular (SPP) *del inglés strip packing problem* en la figura 1.1 se presentan artículos relacionados a este problema según el portal www.sciencedirect.com, Minimización (área o perímetro en 2D y volumen o área de superficie en 3D).

Los problemas mencionados anteriormente tiene un alto impacto en varias industrias como la textil [16], papelera, del acero [28], automotriz, del vidrio, industria 4.0 [1], además están presentes en sectores como la física, biología moderna, medicina, ciencia de materiales, nanotecnología, codificación, sistemas de reconocimiento de patrones, ingeniería energética, ingeniería civil, construcción naval, construcción de aeronaves, ingeniería mecánica y la química. Esto hace que la resolución de estos



FIGURA 1.1: Artículos relacionados con SPP en los últimos 15 años.

problemas incidan directamente en la sociedad, dado que su principal objetivo es el máximo aprovechamiento de los recursos. En la situación actual que se encuentra el planeta es de vital importancia un uso racional de las materias primas, energía y recursos humanos.

1.3 HIPÓTESIS

Con la utilización del modelo matemático de programación no lineal propuesto, se obtendrán mejoras en las soluciones para los problemas de empaquetamiento polígonos convexos en contenedores convexos (sección circular y circular) de dimensiones variables.

1.4 OBJETIVOS

El objetivo principal de esta investigación es encontrar soluciones aceptables en un tiempo razonable a instancias del problema de empaquetamiento de polígo-

nos convexos en contenedores convexos (sección circular y circular) de dimensiones variables, utilizando el modelo de programación no lineal propuesto, que define los polígonos por sus vértices.

1.4.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Elaborar un modelo matemático de programación no lineal que ayude a encontrar la mejor combinación de elementos a empaquetar, maximizando el espacio ocupado.
- Determinar el efecto en la densidad o porcentaje de ocupación del empaque tomando como factores de control los tipos de figuras y la cantidad de elementos a empaquetar en cada uno de los contenedores analizados.
- Establecer el efecto en la densidad o porcentaje de ocupación del empaque, tomando como factor de control el tipo de contenedor a utilizar.
- Realizar una basta experimentación con el fin validar la metodología propuesta.

1.5 METODOLOGÍA

La metodología a emplear será analítica—experimental por la naturaleza misma de la tipología de problemas seleccionado y por las naturalezas de los enfoques a emplear, para lo cual se realizan las siguientes actividades:

- Análisis y revisión de los modelos exactos tradicionales y clásicos que han sido desarrollados para resolver de 2D-ODP.
- Elaborar el correspondiente modelo matemático no-lineal para resolver el problema de empaquetamiento de diferentes polígonos convexos en contenedores convexos de dimensiones variables.

- Validación del modelo con diferentes instancias para su verificación.
- Realizar experimentación correspondiente para ver que factores afectan el rendimiento del modelo propuesto.

1.6 CONTRIBUCIONES

En la literatura las instancias de problemas que se encuentran reverenciadas para los trabajos con este tipo de problemas es poco variada y permanece estática por mucho tiempo, una de las primeras contribuciones será la creación de un variado grupo de instancias y el desarrollo de un generador de instancias para aumentar la cantidad de datos existentes para experimentación.

Se presentará un modelo no lineal con un enfoque lagrangiano para las condiciones de no intersección, analizando las figuras por sus vértices. La definición de los elementos a empaquetar por sus vértices no ha sido tratado en la literatura existente.

1.7 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Esta investigación está estructurada de la siguiente manera:

El capítulo I introduce de manera somera los problemas de C&P y sobre las algunas de las áreas de aplicación de esta categoría de modelos matemáticos, además se plantean los objetivos de la investigación así como la hipótesis que la sustenta y los aportes que brindará.

El capítulo II presenta una caracterización de los problemas de C&P y dentro de estos se hace énfasis en la clase de problemas a atacar en esta investigación los ODP. De los problemas anteriormente mencionados se muestran algunos modelos matemáticos existentes en la literatura. Además se realiza una revisión en la litera-

tura de los problemas de C&P donde los contenedores presentan dimensiones fijas o variables.

El capítulo III presenta la modelación del modelo propuesto así como su validación.

El capítulo IV presenta la experimentación realizada así como el análisis de los resultados obtenidos.

El capítulo V y último presenta las conclusiones de la investigación, así como sus puntos débiles y trabajos futuros.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Contenido del capítulo

2.1. Clasificación de los problemas de corte y empaquetamiento	10
2.2. Problema de Dimensiones Abiertas	12
2.2.1. Problemas de minimización de Área o Perímetro	13
2.2.2. Problema de Empaquetamiento en Tiras	14
2.2.3. Problema de Empaquetamiento en Tiras Irregular o de Anidación	16
2.3. Trabajos encontrado en la literatura sobre el empaquetamiento de diferentes tipos de elementos pequeños . .	17
2.3.1. Empaquetamiento en contenedores de dimensiones fijas . .	17
2.3.2. Empaquetamiento en contenedores de dimensiones variables	19
2.3.3. Artículos de Revisión de literatura sobre C&P	23

2.1 CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETAMIENTO

De manera general, la estructura del problema de C&P según su tipología cuenta con las siguientes características [38]:

- Tipos de asignación.
 - Maximización de las salidas (Todos los objetos de gran tamaño se utilizan y por tanto la selección se realiza sobre los elementos pequeños, en busca de la maximizar el valor de la asignación)
 - Minimización de las entradas (A diferencia del caso anterior, se debe elegir entre un conjunto de objetos de gran tamaño sobre los que acomodar todos los elementos pequeños de forma que se minimicen las pérdidas).
- Surtido de elementos pequeños.
 - Demandas uniformemente estructuradas.
 - Demandas variables.
- Surtido de objetos de gran tamaño.
 - Rectangular, material homogéneo.
 - Material no homogéneo.
- Dimensionalidad.
 - Problemas de una, dos, tres y múltiples dimensiones ($n > 3$).
- Forma de objetos pequeños.
 - Sin mezclas, diseño ortogonal (rectángulos, círculos, cajas, cilindros, esferas, etc.).

- Diseño no ortogonal (elementos irregulares).

A partir de las características anteriores y como combinación de estas se definen los principales problemas de C& P. Estos se dividen en dos grupos [3].

1. Minimización de las entradas(valor).

- Single Stock-Size Cutting Stock Problem (SSSCSP).
- Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem (MSSCSP).
- Residual Cutting Stock Problem (RCSP).
- Single Bin-Size Bin Packing Problem (SBSBPP).
- Multiple Bin-Size Bin Packing Problem (MBSBPP).
- Residual Bin Packing Problem (RBPP).
- Open Dimension Problem (ODP).

2. Maximización de las salidas(valor).

- Identical Item Packing Problem (IIPP).
- Single Large Object Placement Problem (SLOPP).
- Multiple Identical Large Object Placement Problem (MILOPP).
- Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem (MHLOPP).
- Single Knapsack Problem (SKP).
- Multiple Identical Knapsack Problem (MIKP).
- Multiple Heterogeneous Knapsack Problem (MHKP).

En sentido general, esta vasta lista de enfoques o tipos de problemas de C&P tienen como objetivos principales minimizar el desperdicio de materiales en el proceso de corte y minimizar el espacio vacío en los contenedores en su llenado.

En este trabajo aborda el problema de empaquetamiento de un surtido arbitrario de polígonos convexos (regulares e irregulares) en contenedores convexos de

dimensiones variables. Este tipo de problemas se puede tratar como ODP como se muestra en la figura 2.1

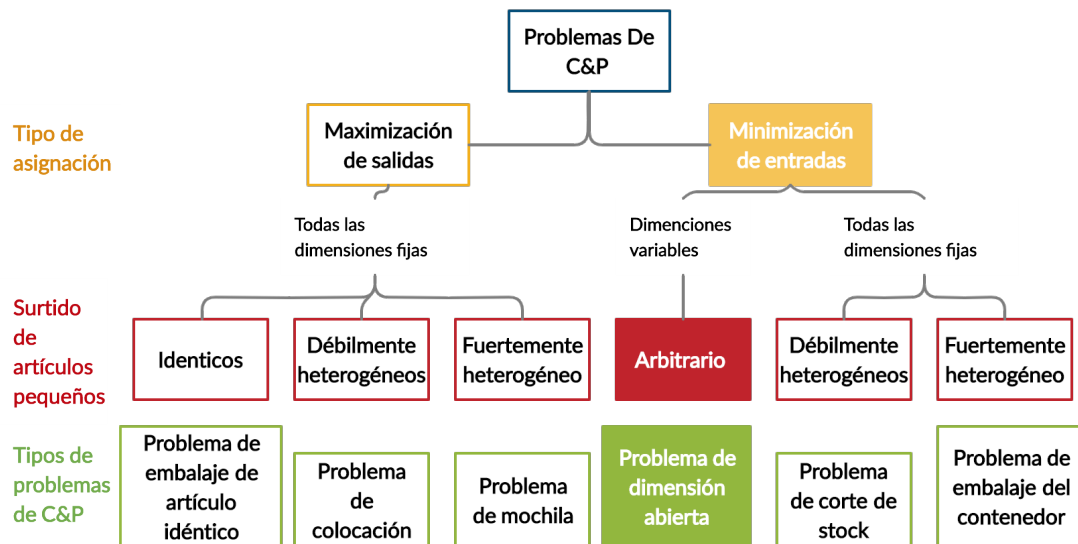


FIGURA 2.1: Tipología básica de los problemas de corte y empaquetamiento según [38]

2.2 PROBLEMA DE DIMENSIONES ABIERTAS

El ODP corresponde al tipo de problemas de minimización de entradas donde contamos con una colección finita de elementos pequeños a empaquetar sobre uno o más elementos de gran tamaño (contenedor). Donde al menos una de las dimensiones del contenedor es variable por lo que siempre será un problema de más de dos dimensiones. Los problemas que podemos encontrar dentro de esta clase con una dimensión variable son el empaquetamiento en tiras (SPP) *del ingles Strip Packing Problem* y el Empaquetamiento Ortogonal (OPP) *del ingles Orthogonal Packing Problem* ambos se pueden catalogar como 2D Rectangular ODP, Otro ejemplo es el problema de empaquetamiento en tiras irregular o de anidación (ISPP) *del ingles Irregular Strip Packing Problem* ampliamente usado en la industria manufacturera (textil, calzado,

automotriz). En este caso el problema es del tipo ODP 2D Irregular. También existen los problemas de minimización de área o perímetro donde ambas dimensiones son variables.

A continuación mostramos modelos presentados en la literatura para los problemas antes mencionados:

2.2.1 PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN DE ÁREA O PERÍMETRO

En [2] encontramos dos formulaciones para el problema de minimización de área o perímetro en el caso de un contenedor rectangular y área en un contenedor circular donde se busca el contenedor rectangular de menor (área o perímetro) o circular de menor área según sea el caso, donde queden contenido un conjunto finito dado de círculos (idénticos o diferentes).

Contenedor rectangular:

$$\text{Minimizar } LW \text{ o } \text{Minimizar } L + W \quad (2.1)$$

sujeto a:

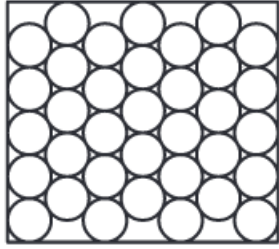
$$r_i \leq x_i \leq L - r_i \quad i \in I \quad (2.2)$$

$$r_i \leq y_i \leq W - r_i \quad i \in I \quad (2.3)$$

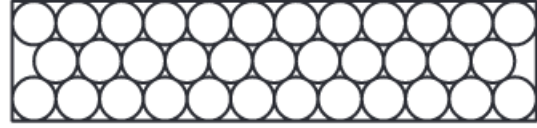
$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \leq (r_i + r_j)^2 \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (2.4)$$

$$W \geq 0 \quad L \geq 0 \quad x_i \geq 0 \quad y_i \geq 0 \quad i \in I \quad (2.5)$$

La ecuación (2.1) representa la función objetivo, donde en el primer caso se minimiza el área del rectángulo y en el segundo el perímetro del mismo. Las restricciones (2.2) y (2.3) son las de contenimiento y la (2.4) la de no solapamiento entre los elementos. En la figura 2.2 se muestran imágenes de resultados obtenidos con este modelo en [2].



(a) 35 círculos dentro de un rectángulo, minimizando el área (23.9970 x 5.4637)



(b) 35 círculos dentro de un rectángulo, minimizando el perímetro (12.3910 x 10.9989)

FIGURA 2.2: Resultados del modelo que optimiza área o perímetro de un rectángulo

Contenedor circular.

$$\text{Minimizar } R \tag{2.6}$$

sujeto a:

$$(x_i)^2 + (y_i)^2 \leq R - r_i, \quad i \in I \tag{2.7}$$

$$R \geq r_{max} \equiv \max_{i=1, \dots, N} \{r_i\} \tag{2.8}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \leq (r_i + r_j)^2 \quad 1 \leq i < j \leq n \tag{2.9}$$

$$R \geq 0 \quad x_i \geq 0 \quad y_i \geq 0 \quad i \in I \tag{2.10}$$

La ecuación (2.6) representa la función objetivo, donde se minimiza el área del círculo, al minimizar su radio. Las restricciones (2.7) y (2.8) son las de contenimiento y la (2.9) como en el caso anterior es la de no solapamiento entre los elementos. En la figura 2.3 se muestran imágenes de resultados obtenidos con este modelo en [2].

2.2.2 PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO EN TIRAS

En el problema de empaquetamiento en tiras en dos dimensiones (2D SPP) se considera un conjunto de N elementos rectangulares, cada elemento i tiene un ancho

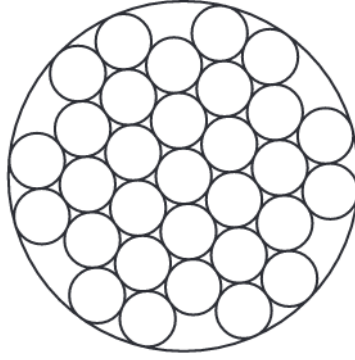


FIGURA 2.3: 31 círculos en contenedor circular de radio 6.2907435849

q_i y un largo p_i , con $i \in N$. Este problema consiste en empaquetar todos los elementos en una tira de ancho W y longitud L (infinita). El objetivo es minimizar el largo total usado para empaquetar los elementos sin la existencia de solapamiento entre ellos. En [4] se presenta una formulación para este problema.

$$\text{Minimizar } L \tag{2.11}$$

sujeto a:

$$x_i + p_i \leq x_k + (1 - a_{ik})M, \quad \forall i, k, i < k \tag{2.12}$$

$$x_k + p_k \leq x_i + (1 - b_{ik})M, \quad \forall i, k, i < k \tag{2.13}$$

$$y_i + q_i \leq y_k + (1 - c_{ik})M, \quad \forall i, k, i < k \tag{2.14}$$

$$y_k + q_k \leq y_i + (1 - d_{ik})M, \quad \forall i, k, i < k \tag{2.15}$$

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} \geq s_j + s_k - 1, \quad \forall i, k, i < k \tag{2.16}$$

$$x_i + p_i + q_i \leq L + (1 - s_i)M, \quad \forall i \tag{2.17}$$

$$y_i + p_i + q_i \leq W + (1 - s_i)M, \quad \forall i \tag{2.18}$$

La ecuación (2.11) representa la función objetivo, donde se minimiza el largo total empleado. Las restricciones (2.16),(2.17) y (2.18) son las de contenimiento y las (2.12),(2.13),(2.14) y (2.15) son las de no solapamiento entre los elementos.

2.2.3 PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO EN TIRAS IRREGULAR O DE ANIDACIÓN

Este problema esta relacionado con el marcado o cortes de elementos irregulares de dos dimensiones sobre una lamina o rollo de material con el objetivo de minimizar el desperdicio de material debido al corte, es muy similar al empaquetado ortogonal con la diferencia que en este caso los elementos a empaacar son irregulares. A continuación, le mostramos una formulación a dicho problema presentado en [11] para polígonos sin ajuste (NFP) *del ingles no-fit polygon*.

$$\text{Minimizar } L \quad (2.19)$$

sujeto a:

$$x_i \leq L - l_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

$$y_i \leq W - l_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.21)$$

$$\alpha_{ijk}(x_j - x_i) + \beta_{ijk}(y_j - y_i) \leq q_{ijk} + M(1 - b_{ijk}) \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad k = 1, \dots, m_{ij} \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=1}^{m_{ij}} b_{ijk} \geq 1 \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (2.23)$$

$$b_{ijk} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (2.24)$$

$$x_i, y_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.25)$$

La ecuación (2.19) representa la función objetivo, donde se minimiza el largo total empleado al igual que en el caso anterior. Las restricciones (2.20), (2.21) y (2.22) son las de contenimiento y la (2.23) son las de no solapamiento entre los elementos. En la figura 2.4 se muestra una imágenes de resultados del modelo empleado [11].

Los modelos anteriormente expuestos nos dan una idea de como abordar los ODP, en esta investigación trataremos con polígonos convexos (regulares e irregulares) como objetos a empaacar por lo que las restricciones de no solapamiento tienden ha ser complejas, pero en el caso de la función objetivo y las restricciones de contenimiento se procederá de manera similar a los modelos propuestos en [2]

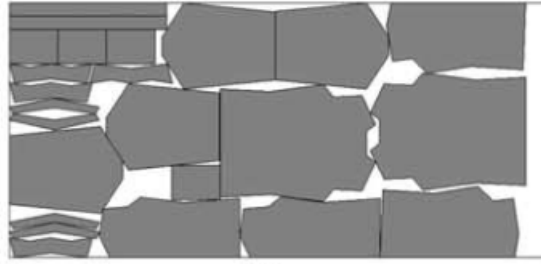


FIGURA 2.4: resultado del modelo que minimiza la altura de la plancha

2.3 TRABAJOS ENCONTRADO EN LA LITERATURA SOBRE EL EMPAQUETAMIENTO DE DIFERENTES TIPOS DE ELEMENTOS PEQUEÑOS

En esta sección se mostrará la revisión de diversos trabajos presentes en la literatura sobre el tema de empaquetamiento, separándolos por contenedores de dimensiones fijas y contenedores de dimensiones variables.

2.3.1 EMPAQUETAMIENTO EN CONTENEDORES DE DIMENSIONES FIJAS

En [5] se trabaja con modelos matemáticos y algoritmos prácticos para resolver el problema C & P. Donde revisan y mejoran la herramienta principal de trabajos anteriores de los autores que son: las funciones ϕ . Aquí se construyen para objetos 2D y 3D, a diferencia de otras herramientas estándar, como los polígonos sin ajuste, que están restringidos a la geometría 2D.

En [18], se considera el problema de encontrar el empaque más denso de N círculos iguales en un círculo. Se proponemos un método de optimización global cuasifísico simulando movimientos (por presiones elásticas, por fuertes fuerzas de

repulsión y fuerzas atractivas).

En [22], para empaquetar número limitado de círculos de radios diferentes en un contenedor rectangular de dimensiones fijas, propone una nueva formulación basada en el uso de una cuadrícula regular que cubre el contenedor y donde se considera a los nodos de la malla como posiciones potenciales para la asignación de centros de los círculos, y se modela el problema como un problema de optimización 0 - 1 a gran escala y es resuelto con un software comercial.

En [23] continua con el uso de la cuadrícula regular para aproximar un contenedor, los objetos de empaque se reducen a asignar objetos a los nodos de la cuadrícula sujetos a restricciones no superpuestas. El problema de empaquetamiento se presenta como un problema de optimización lineal 0-1 a gran escala. Se presentan y comparan diferentes formulaciones para restricciones no superpuestas. Se proponen desigualdades válidas para fortalecer las formulaciones. Este enfoque se aplica para embalar objetos circulares y en forma de L. El objeto circular se considera en un sentido general como un conjunto de puntos que están a la misma distancia (no necesariamente euclidiana) desde un punto dado. Las diferentes formas, como elipses, rombos, rectángulos, octágonos, etc., se tratan de manera similar simplemente cambiando la definición de la norma utilizada para definir la distancia. También se considera anidar objetos uno dentro del otro.

En [26] concedieran las formas más generales de problemas de empaquetamiento de formas irregulares en el espacio 3D, donde tanto los contenedores como los objetos pueden tener cualquier forma, y se permiten rotaciones libres de los objetos. Proponemos un método heurístico para empacar eficientemente objetos irregulares combinando la optimización continua y la optimización combinatoria. A partir de una ubicación inicial de un número apropiado de objetos, optimizamos las posiciones y orientaciones de los objetos mediante la optimización continua. En optimización combinatoria, reducimos aún más los espacios entre objetos intercambiando y reemplazando los objetos desplegados e insertando nuevos objetos. Demostrando la

eficacia del método con experimentos y comparaciones.

En [30] se estudia la cobertura de esferoides (elipsoides de revolución) por diferentes esferas. La investigación está motivada por el empaquetamiento de partículas no esféricas que surgen en las ciencias naturales, por ejemplo, en tecnologías de polvo. El concepto de una cubierta ϵ se introduce como una aproximación multiesférica externa del esferoide con la proximidad ϵ . Se propone un algoritmo heurístico rápido para construir una cubierta ϵ optimizada que proporcione un equilibrio razonable entre el valor del parámetro de proximidad ϵ y el número de esferas utilizadas. Proporcionan resultados computacionales para demostrar la eficiencia del enfoque.

En [32] se presenta el concepto del embalaje más escaso. El embalaje más escaso está destinado a colocar los objetos en el contenedor lo más distantes posible. Más específicamente, se maximiza la distancia euclidiana mínima entre los objetos, así como entre los objetos y el límite del contenedor. Este nuevo enunciado del problema está motivado por las modernas tecnologías limpias y de ahorro de energía, como el endurecimiento ultrasónico y el acabado al detonar mezclas de gases. El embalaje más escaso de objetos bidimensionales en un contenedor circular se considera sujeto a condiciones de equilibrio. Los objetos pueden tener formas regulares o irregulares delimitadas por arcos y segmentos de línea. Usando la técnica de función phi se formula un modelo matemático y se establece un problema de programación no lineal correspondiente.

2.3.2 EMPAQUETAMIENTO EN CONTENEDORES DE DIMENSIONES VARIABLES

En [9], se trata el problema de empaquetamiento de esferas idénticas en un cilindro de altura mínima. Se construye un modelo matemático del problema. Sobre la base de las características de problema, se ofrece una estrategia de búsqueda de una aproximación a un mínimo global. La estrategia incluye una construcción de árbol

de búsqueda especial, una modificación del método $Zoutend_{ijk}$ de direcciones factibles para calcular los mínimos locales, y una modificación del método de vecindad decreciente para buscar una aproximación a un mínimo global.

En [12], se propone un enfoque de salto de cuenca monótona y su variante basada en la población, para resolver el problema de empacar círculos de radios iguales y diferentes dentro de un recipiente circular con mínimo radio.

En [19], dado un conjunto finito de esferas de diferentes tamaños, se estudia el Problema Empaquetado de Tira tridimensional (3DSPP) y el Problema de Mochila tridimensional (3DKP). Para resolver estos problemas se desarrollaron dos algoritmos codiciosos que adaptan los algoritmos propuestos por [17] para 3 dimensiones con algunas mejoras importantes. Este artículo presenta además dos series de 12 instancias cada una para el 3DSPP y para el 3DKP.

En [34], se organiza una cantidad fija n de círculos iguales no superpuestos en un rectángulo con dimensión variable, muestra una notación más corta para los empaques densos hexagonales en contenedores rectangulares. Además, describe un procedimiento determinista para la optimización de empaques que difieren de los patrones hexagonales regulares habituales en una o más variantes, sin depender de programas de simulación. Se encontraron mejoras (para $n = 37, 101, 146, 169$) y se dan valores numéricos para todos los empaques en el rango extendido (excepto para $n = 393, 411, 421, 453$).

En [6] se proponen dos modelos de Programación lineal entera mixta (MIP) *del inglés mixed-integer linear programming* robustos para el problema ISPP. En el primer modelo (DTM) las restricciones no superpuestas se establecen en función de la trigonometría directa, mientras que en el segundo modelo (PFN-CM) las piezas se descomponen primero en partes convexas y luego las restricciones no superpuestas se escriben en base a polígonos no ajustados de las partes convexas. Ambos enfoques son robustos en términos del tipo de geometrías que pueden abordar, considerando cualquier tipo de polígono no convexo con o sin agujeros. También son más simples

de implementar que los modelos anteriores. Esta simplicidad permitió considerar, por primera vez, una variante de los modelos que se ocupa de la rotación de piezas. Los experimentos computacionales con instancias de referencia muestran que PFN-CM supera a DTM y al mejor modelo exacto publicado en la literatura. En el mismo nuevas instancias basadas en el mundo real con geometrías más complejas y se utilizan para verificar la solidez de los nuevos modelos.

En [7], los autores proponen un método alternativo, basado en la descomposición de Benders para problemas 2D-OPP. El problema maestro se resuelve mediante un nuevo modelo ILP basado en la formulación de flujo de arco, mientras que la programación de restricciones se utiliza para resolver el problema esclavo. El método resultante se híbrida con un algoritmo de ramificación y acotamiento de última generación. Experimentos computacionales sobre puntos de referencia clásicos de la literatura muestran la efectividad del enfoque propuesto.

En [36], los autores proponen un enfoque personalizado de ramificación y acotamiento para abordar el problema de anidamiento, para garantizar la optimización. El enfoque utiliza un nuevo esquema de ramificación para tratar las restricciones cuadráticas convexas inversas en el modelo cuadrático e incorpora una serie de ajustes algorítmicos específicos del problema. Los estudios computacionales en un conjunto de 64 instancias de referencia demuestran la efectividad y competitividad del algoritmo personalizado sobre el uso de solucionadores de optimización global de uso general, incluida por primera vez la capacidad de encontrar anidamientos óptimos globales con cinco polígonos bajo rotación libre.

En [15], se estudia dos casos de empaquetamiento de esferas en un cuboide, el primer caso donde las dimensiones del cuboide son fijas y el otro donde las dimensiones del cuboide son variable. En este artículo se consideran las esferas fuertemente heterogéneas. Este problema se aborda aplicando un método de búsqueda local que combina tres características fundamentales: (1) una etapa de procedimiento de mejor posición local (algoritmo codicioso), (2) una etapa de intensificación y (3) una etapa

de diversificación.

En [40] aborda el empaquetamiento de diferentes partículas tetraédricas de un solo tamaño bajo vibraciones 3D, mediante experimentos físicos y simulaciones DEM. los autores investigan y optimizan exhaustivamente los efectos de las condiciones de vibración y la forma de las partículas en la densificación del empaque. Las propiedades microscópicas características correspondientes, como el número de coordinación (CN), el tipo de contacto de partículas, la función de distribución radial (RDF) y las orientaciones de partículas se caracterizaron y analizaron numéricamente. En sus resultados se evidencia que dichos puede validarse bien mediante experimentos físicos. El análisis realizado arrojó que el CN medio mínimo se evidencia para partículas tetraédricas con forma regular. Además muestra que la evolución de los conglomerados demuestra que la reducción o desaparición de dos conglomerados locales importantes (estructuras de dímero y rueda de carreta) es una de las principales razones para la disminución de la densidad de empaquetamiento de partículas tetraédricas irregulares.

En [35] se presenta un estudio logístico que utiliza un modelo matemático basado en el problema de embalaje rectangular tridimensional de dimensión abierta (3D-ODRPP), Este modelo se ocupa de la rotación ortogonal, la estabilidad estática y las restricciones de voladizo de los productos, tres de las condiciones más importantes del mundo real que garantizan la viabilidad de la solución. El método propuesto puede encontrar el óptimo global factible de un 3D-ODRPP. Los resultados experimentales muestran la mejora de la calidad de la solución en términos de volumen del contenedor y estabilidad del empaque en comparación con los modelos existentes en la literatura.

2.3.3 ARTÍCULOS DE REVISIÓN DE LITERATURA SOBRE C&P

En [14] se realiza una revisión de la literatura más relevante sobre modelos y métodos eficientes para empaquetar elementos circulares en regiones del plano euclidiano donde los elementos y regiones son bidimensionales o tridimensionales. Estos problemas se han abordado utilizando varios algoritmos basados en enfoques que van desde pruebas de optimización asistidas por computadora, hasta procedimientos ramificados y acotamiento, enfoques constructivos, minimización no convexa de inicio múltiple, simulación de billar, heurística multifase y metaheurística.

En [39] se presentan y clasifican los enfoques de solución en la literatura para el problema de C&P regular e irregular en 2D. La atención se centra en el análisis de los métodos y la aplicación de algoritmos de inteligencia de enjambre.

En [20], se plantea que recientemente se ha propuesto una variedad de modelos matemáticos para problemas de anidamiento, y realizan una revisión de estos modelos matemáticos bajo un marco de notación común, lo que permite resaltar las diferencias y similitudes entre ellos. También se proporcionan algunas ideas sobre debilidades y fortalezas. Al construir esta revisión estructurada de modelos matemáticos para problemas de anidación, se proponen oportunidades de investigación en el campo.

Con esta revisión de la literatura existente sobre el tema que aborda este trabajo, se constata la vigencia y necesidad de continuar trabajando y mejorando las herramientas par atacar este problema. Además ninguna de la literatura consultada presenta las condiciones de no interceptación basada en la convención convexa de los vértices de los polígonos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

Contenido del capítulo

3.1. Condiciones geométricas.	24
3.2. Condiciones de no intersección	27
3.3. Condiciones de contenimiento.	30
3.4. Formalización del modelo Sección Circular	30
3.5. Función Objetivo	32

Para llegar comprender en su totalidad un problema es fundamental estudiarlo y lograr una formulación del mismo, en esta investigación se proporciona una nueva formulación al problema de empaquetamiento de polígonos convexos definidos por sus vértices(regulares e irregulares) en contenedores convexos de dimensiones variables.

3.1 CONDICIONES GEOMÉTRICAS.

Las condiciones geométricas son aquellas que definen a un objeto en el espacio. Existen varias formas de definir estas condiciones, en este caso los objetos de estudio serán polígonos.

Estas figuras se dividen en dos grupos por sus características (clasificación de acuerdo a los ángulos internos del figura): regulares e irregulares. Los regulares tienen como característica que todos sus ángulos internos son iguales. Luego para los polígonos irregulares basta aclarar que son aquellos que no cumplen con la anterior característica.

Dentro de los polígonos irregulares se pueden separar en polígonos convexos y no convexos. En este trabajo nos apoyaremos de las propiedades de convexidad de los objetos para plantear condiciones de no intersección. Por lo cual los objetos utilizados en la investigación son convexos.

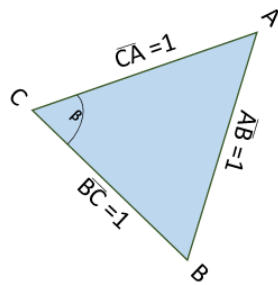
Otra de las propiedades en que nos auxiliamos comprende la formulación rígida de los objetos. Se entiende por formulación rígida aquella forma de representar un conjunto de puntos que definen una región en el plano (objeto), que al variar la posición del conjunto de puntos en el plano, el objeto que describen mantiene sus ángulos y distancias entre vértices originales.

Los triángulos son los únicos polígonos que si fijamos la distancia entre sus vértices adyacentes podemos variar su posición sin que cambien sus ángulos o lados. Esto basado en el teorema de igualdad de triángulos que establece como condición suficiente la igualdad entre los lados para asegurar la igualdad entre triángulos.

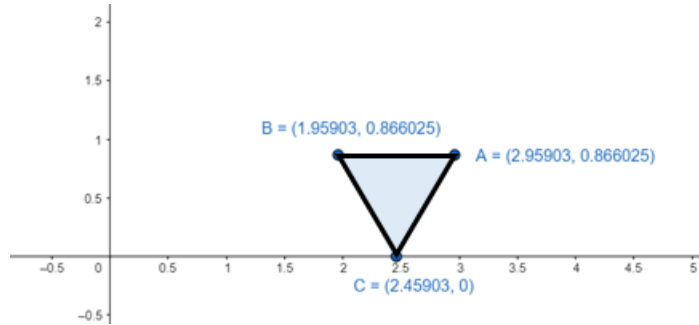
En la figura 3.1 se muestra un triángulo equilátero de lado 1, al cual se reubican los vértices de manera arbitraria solo manteniendo la distancia entre los vértices adyacentes el resultado es el mismo triángulo pero en otra posición.

En este caso se fijará la distancia entre vértices utilizando la norma euclidiana:

$$D_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$



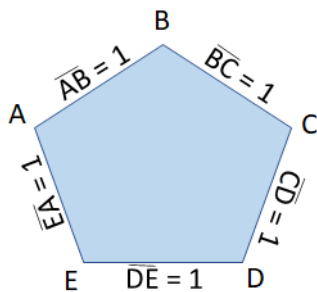
(a) Triángulo equilátero de lado 1



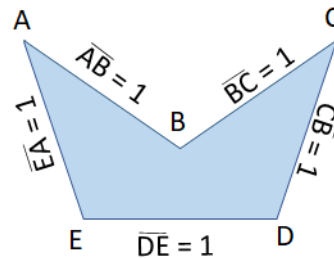
(b) Triángulo equilátero de lado 1 formado por el movimiento arbitrario de los vértices del triángulo a)

FIGURA 3.1: Triángulos equiláteros de lados iguales

En el caso de los polígonos restantes, mantener la distancias entre los vértices adyacentes no garantiza la rigidez de los objetos. Ejemplo de esto se muestra en la figura 3.2 a) , donde se tiene un pentágono regular de lado 1, y en la figura 3.2 b) se muestra pentágono que mantiene sus lados de dimensión 1, dando como resultado una figura diferente a la mostrada en a).



(a) Pentágono regular(convexo) de lado 1



(b) Pentágono irregular(no convexo) de lado 1

FIGURA 3.2: Pentágonos diferentes con lados iguales

Para asegurarnos de la rigidez de el resto de los polígonos, además de mantener la distancia entre los vértices adyacente, por la ecuación 3.1. Mantenemos el valor de los ángulos comprendidos entre lados adyacentes. De esta forma se asegura que al mover arbitrariamente los vértices de los objetos se obtengan los mismos sin

deformaciones. Lo anterior lo se logra fijando el producto escalar de los vectores correspondientes a los lados adyacentes. Si tenemos el pentágono de la figura 3.2, al ser un pentágono regular cada uno de sus ángulos interiores tienen 108° por lo que los ángulos se asegurarían con la ecuación siguiente:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.2)$$

$$(x_1 - x_2, x_3 - x_2) = 1^2 \cos 108^\circ, (x_2 - x_3, x_4 - x_3) = 1^2 \cos 108^\circ \quad (3.3)$$

De esta forma, si tiene la información sobre la longitud de los lados que conforman la figura y el valor de los ángulos comprendidos entre ellos, tendremos una formulación rígida de los mismos.

Representar politopos por los vértices puede ser útil en el caso de objetos con formas flexibles. Supongamos que un lado del politopo no es fijo, pero puede variar en un intervalo determinado. Esto se puede formalizar fácilmente considerando en (8) como una variable del mismo intervalo. Del mismo modo, los ángulos interiores también se pueden considerar como variables.

3.2 CONDICIONES DE NO INTERSECCIÓN

Las condiciones de no interceptación, es es una característica fundamental en los problemas de empaquetamiento. Seguidamente presentaremos dichas condiciones, las mismas fueron presentadas en [24], artículo resultante de esta investigación y otras de el grupo de trabajo a que pertenece el autor.

P y G son dos politopos en \mathbb{R}^n definidos por sus vértices.

$$P = \{x^s, s = 1, 2, 3 \dots S\} \quad G = \{y^l, l = 1, 2, 3 \dots L\} \quad (3.4)$$

Por convexidad cualquier punto en P o G puede ser expresado como combinación convexa de sus vértices:

$$x \in P \Leftrightarrow x = \sum_s \lambda_s x^s, \quad \sum_s \lambda_s = 1, \quad \lambda_s \geq 0 \quad (3.5)$$

$$y \in G \Leftrightarrow y = \sum_l \mu_l y^l, \quad \sum_l \mu_l = 1, \quad \mu_l \geq 0 \quad (3.6)$$

Por definición $P \cap G \neq \emptyset$ si existe un punto que esté contenido en ambos conjuntos. Entonces si $P \cap G \neq \emptyset$ existe valores para λ_s, μ_l tal que:

$$\sum_s \lambda_s x^s = \sum_l \mu_l y^l, \quad \sum_s \lambda_s = 1, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \sum_l \mu_l = 1, \quad \mu_l \geq 0. \quad (3.7)$$

Por lo tanto si el sistema de ecuaciones 3.7 no tiene solución, entonces $P \cap G = \emptyset$. Para comprobar si 3.7 es factible considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} z &= \text{máx} \sum_s \lambda_s + \sum_l \mu_l \\ &\sum_s \lambda_s x^s = \sum_l \mu_l y^l \\ &\sum_s \lambda_s \leq 1, \quad \lambda_s \geq 0 \\ &\sum_l \mu_l \leq 1, \quad \mu_l \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que el modelo de optimización 3.8 siempre tiene solución factible en el punto $\lambda_s = 0, \mu_l = 0$. Además por las restricciones los valores de la función objetivo no van a ser mayores que 1. Por tanto cuando el valor objetivo es $z = 2$ entonces la solución óptima coincide con la solución del sistema de ecuaciones 3.7 y $P \cap G \neq \emptyset$. De otra manera si $z < 2$ entonces el sistema de ecuaciones 3.7 no tiene solución y $P \cap G = \emptyset$.

La función lagrangiana para 3.8 tiene la forma:

$$L(\lambda, \mu, v, \alpha, \beta) = \sum_s \lambda_s + \sum_l \mu_l + v (\sum_s \lambda_s x^s - \sum_l \mu_l y^l) - \alpha (\sum_s \lambda_s - 1) - \beta (\sum_l \mu_l - 1) \quad (3.9)$$

$$v \in \mathbb{R}_n, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Para x^s, y^l fijas este es un problema de optimización lineal y dual asociado tiene la forma:

$$z = \text{mín} \{ \alpha + \beta \} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_s} = 1 + vx^s - \alpha \leq 0, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_l} = 1 + vy^l - \beta \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$v \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \geq 0. \quad (3.13)$$

Por el teorema de dualidad fuerte para problema de optimización lineal, podemos plantear las condiciones de no intersección $P \cap G = \emptyset$ como:

$$\alpha + \beta = \sum_s \lambda_s + \sum_l \mu_l < 2 \quad (3.14)$$

$$1 + v \cdot x^s - \alpha \leq 0 \quad (3.15)$$

$$1 + v \cdot y^l - \beta \leq 0 \quad (3.16)$$

$$\sum_s \lambda_s x^s = \sum_l \mu_l y^l \quad (3.17)$$

$$\sum_s \lambda_s \leq 1, \quad \lambda_s \geq 0 \quad (3.18)$$

$$\sum_l \mu_l \leq 1, \quad \mu_l \geq 0 \quad (3.19)$$

$$v \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta, \mu_l, \lambda_s \geq 0 \quad (3.20)$$

Es necesario señalar que $P \cap G = \emptyset$ sí y solo sí existen $(x^s, y^l, v \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \lambda_s, \mu_l \geq 0)$. El modelo tiene $S + L + n + 4$ restricciones lineales. Como se puede observar que las variables a definir son los vértices lo cuál concuerda con la formulación de las condiciones geométricas.

3.3 CONDICIONES DE CONTENIMIENTO.

Para el contenedor convexo Ω , las condiciones de contención son equivalentes a:

$$x^s \in \Omega, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (3.21)$$

En la figura 3.3 se muestra un ejemplo de lo anteriormente planteado.

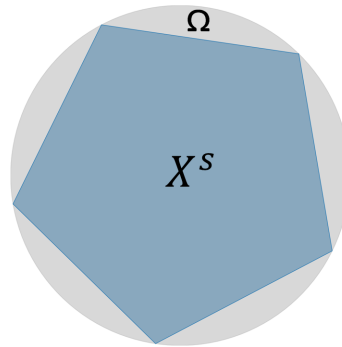


FIGURA 3.3: Pentágono definido por x^s en contenedor Ω

3.4 FORMALIZACIÓN DEL MODELO SECCIÓN CIRCULAR

Declaración de variables:

- **i** Conjunto de politopos.
- **j** Conjunto de vértices
- **k** Dimensiones.
- **R_s** Radio del contenedor sección circular.
- $\alpha_{i,h}$ Multiplicador de lagrange.

- $\beta_{i,h}$ Multiplicador de lagrange.
- $v_{i,h,k}$ Multiplicador de lagrange.
- $\lambda_{i,h,j}$ Factor de la combinación convexa del politopo i .
- $\mu_{i,h,j}$ Factor de la combinación convexa del politopo h
- $\mathbf{x}_{i,j,k}$ Variable decisión.

la ecuación 3.22 representa la función objetivo del modelo de empaquetamiento en el contenedor con forma de sección circular de radio mínimo.

$$Z = \text{Min } Rs \quad (3.22)$$

S.a

las ecuaciones (3.23) y (3.24) son las condiciones geométricas que conservan la forma de los polígonos a empaquetar. En la ecuación (3.23) $D(i, j, j+1)^2$ es la distancia en la figura i entre los puntos j y $j+1$.

$$\sum_k (x_{ijk} - x_{ij+1k})^2 = D(i, j, j+1)^2 \quad (3.23)$$

$$\sum_k (x_{ij-1k} - x_{ijk})(x_{ij+1k} - x_{ijk}) = D(i, j-1, j) \cdot D(i, j, j+1) \cdot \cos \sigma_{j-1} \quad \forall i, 1 < j < |J| \quad (3.24)$$

las ecuaciones (3.25),(3.26),(3.27),(3.28),(3.29),(3.30)y(3.31) garantizan la no intersección entre los polígonos.

$$\alpha_{ih} + \beta_{ih} < 2, \quad i, h \in I, \quad h > i \quad (3.25)$$

$$\sum_j (\lambda_{ihj} + \mu_{ihj}) = \alpha_{ih} + \beta_{ih}, \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.26)$$

$$\sum_j \sum_k \lambda_{ihj} \cdot x_{ijk} = \sum_j \sum_k \mu_{ihj} \cdot x_{ijk}, \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.27)$$

$$1 + \sum_k v_{i,h,k} \cdot x_{i,j,k} - \alpha_{i,h} \leq 0, \quad \forall i, h, \quad h > i, \quad \forall j \quad (3.28)$$

$$1 - \sum_k v_{ihk} \cdot x_{hjk} + \beta_{i,h} \leq 0, \quad \forall i, h, \quad h > i, \quad \forall j \quad (3.29)$$

$$\sum_j \lambda_{ihj} \leq 1 \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.30)$$

$$\sum_j \mu_{ihj} \leq 1 \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.31)$$

la restricción (3.32) garantiza que los polígonos estén contenidos en la sección circular que representa el contenedor.

$$x_{ij1}^2 + x_{ij2}^2 \leq R^2 \quad (3.32)$$

la restricción (3.33) la naturaleza no negativa de las variables.

$$x_{ijk}, v \in \mathbb{R}_+, \alpha_{ih}, \beta_{ih}, \lambda_{ihj}, \mu_{ihj}, R \geq 0 \quad \forall i, j, k \quad (3.33)$$

3.5 FUNCIÓN OBJETIVO




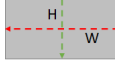

El problema del tipo 2D-ODP puede tener varias funciones objetivos asociadas. Las expresiones objetivos suelen ser funciones de las dimensiones de contenedor o del área utilizada por los objetos.

Dada la naturaleza de esta clase de problemas, las funciones objetivos son del tipo minimización de entradas, a continuación se muestran ejemplos:

- Minimizar el espacio desocupado (área o perímetro).
- Encontrar el número mínimo de contenedores para empaquetar un conjunto de objetos.
- Encontrar el contenedor rectangular de mínima altura que contiene a un conjunto de objetos.

Con el modelo resultante en la sección anterior se presentan varias funciones objetivos y sus respectivas condiciones de contenimiento teniendo en cuenta el tipo de contenedor (sección circular, circular, cuadrado, rectangular y tira). Esto se evidencia en la tabla 3.1 de la página 33

TABLA 3.1: Modelos 2D para minimizar la/s dimensión/es del contenedor

Tipo de contenedor	Modelo	Representación gráfica
Sección-circular	Modelo presentado en la sección (3.4)	(a) 
	$Min \quad R$	(b) 
Circular	$(x_{ij1} - 30)^2 + (x_{ij2} - 30)^2 \leq R^2$ Condiciones de no intersección sección (3.4) Condiciones de no negatividad sección (3.4)	
	$Min \quad H$	(c) 
Cuadrado	$x_{ijk} \leq H \quad \forall i, j, k$ Condiciones de no intersección sección (3.4) Condiciones de no negatividad sección (3.4)	
	$Min \quad H + W$ (perímetro) o $H \cdot W$ (área)	(d) 
Rectangular	$x_{ij2} \leq H \quad \forall i, j$ $x_{ij1} \leq W \quad \forall i, j$ Condiciones de no intersección sección (3.4) Condiciones de no negatividad sección (3.4)	
	$Min \quad H$	(e) 
Tira	$x_{ij2} \leq H \quad \forall i, j$ $x_{ij1} \leq W \quad \forall i, j$ Condiciones de no intersección sección (3.4) Condiciones de no negatividad sección (3.4)	

En los casos de los contenedor sección-circular y circular minimizar el área es

equivalente a minimizar el radio R_s y R respectivamente, el contenedor circular se desplaza del origen en ambas dimensiones 30 unidades $((x_{ij1}-30)^2+(x_{ij2}-30)^2 \leq R^2)$ para cumplir con la no negatividad de las variables. En el contenedor cuadrado al minimizar el lado H se está minimizando el área del cuadrado. Además, suponiendo que la esquina inferior izquierda del contenedor esté fija en el origen y que sus lados sean paralelos al eje, el contenimiento de un polígono definido por sus vértices se puede representar con la restricción $x_{ijk} \leq H \quad \forall i, j, k$. Los casos del contenedor rectangular y tira son análogos. El rectángulo es el único de los contenedores presentados que sus dimensiones dependen de más de un parámetro por lo que minimizar el área es diferente a minimizar el perímetro. La extensión para considerar contenedores convexos formados por restricciones lineales es trivial.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

Contenido del capítulo

4.1. Objetivos	36
4.2. Experimentación	36
4.2.1. Instancias analizadas	36
4.3. Diseño de experimentos	38
4.3.1. Primera fase de experimentación	39
4.3.2. Segunda fase de la experimentación	52
4.3.3. Análisis de los resultados de la segunda fase de experimen- tación	62

En este capítulo se detalla la experimentación de empaquetamiento con polígonos convexos (triángulos, cuadrados rectángulos, pentágonos y hexágonos) en contenedores convexos con forma sección-circular y circular, la misma se llevada a cabo con el modelo matemático propuesto.

4.1 OBJETIVOS

En la siguiente experimentación se busca comprobar el rendimiento del modelo propuesto y comparar los resultados obtenidos en cuanto a los dos tipos de contenedores, además de comparar el empaquetamiento por tipos de figuras.

4.2 EXPERIMENTACIÓN

Los experimentos de esta sección están dados por empaquetar polígonos convexos (triángulos, cuadrados rectángulos, pentágonos y hexágonos) en contenedores convexos (sección-circular y circular) de radio variables.

4.2.1 INSTANCIAS ANALIZADAS

Las instancias analizadas en esta investigación fueron creadas, con un generador de instancias programado en lenguaje Python, con fin de validar el modelo. En la tabla 4.1 se muestra de las instancias para los dos contenedores analizados (sección-circular, circular):

- figuras a empaquetar
- tipo de figura
- cantidad de instancias según el tamaño

TABLA 4.1: Cantidad de instancias por figuras

Tipo contenedor	Figuras	Tipo de figuras	Cantidad de instancias
sección-circular	triángulos	regulares	6
	rectángulos	regulares	6
	cuadrados	regulares	6
	pentágonos	regulares	6
		irregulares	6
	cuadriláteros mixtos	regulares e irregulares	6
	hexágonos	regulares	6
circular	triángulos	regulares	6
	rectángulos	regulares	6
	cuadrados	regulares	6
	pentágonos	regulares	6
		irregulares	6
	cuadriláteros mixtos	regulares e irregulares	6
	hexágonos	regulares	6

4.2.1.1 ESTRUCTURA DE LAS INSTANCIAS

Cada instancia utilizada en la experimentación tiene como datos:

- cantidad de figuras de instancia
- cantidad de vértices de las figuras ($n-1$)
- cantidad de dimensiones (K)

En la tabla 4.2 se puede observar la matriz que da forma a cada figura donde (\mathbf{d}) es la distancia entre los vértices, ($\mathbf{n}-1$) es la cantidad de vértices y (σ) es el ángulo comprendido entre los lados de la figura.

TABLA 4.2: Matriz de distancias(d), y ángulos(σ) que forman las figuras

param distancias:=						
[1,*,*]:		1	2	3	...	n:=
	1	0	d	0	0	σ
	2	0	0	d	0	σ
	...	0	0	0	d	σ
	n-1	d	0	0	0	σ

Todas las instancias utilizadas en esta investigación así como los resultados obtenidos se muestran más a detalle en el apéndice A.

4.2.1.2 HADWARE Y SOFTWARE UTILIZADOS

Toda la experimentación se llevada a cabo en una Dell Latitude 5580, 16gb 256gb Ssd Fhd 15.6 with Intel (R) Core (TM) i7-7600, CPU @ 3.4Ghz, 3201Mhz, 4 núcleos, 8 hilos, usando Win 10 y como lenguaje de modelación matemático AMPL. Para solucionar los problemas no lineales se utilizo el solver de optimización global Baron (*del ingles Branch & Reduce Optimization Navigator*) para AMPL versión 19.12.7.

4.3 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Al momento de ejecutar el modelo en el optimizador global barón, se presento un error en la restricción (3.25), dado que el optimizador no admite el $<$ estricto por lo que se realizo una adecuación a esta restricción quedando de la siguiente manera:

$$\alpha_{ih} + \beta_{ih} \leq 2 - \varepsilon, \quad i, h \in I, \quad h > i \quad (4.1)$$

Donde ε es un valor lo suficientemente pequeño para que la suma sea lo mas cercano posible a dos, sin llegar a dos.

Debido a esto la experimentación estará dividida en dos fases. La primera fase se centra en encontrar el mejor valor de ε para el modelo. En la segunda fase ya con un valor de ε definido se resuelve el problema para todas las instancias creadas.

4.3.1 PRIMERA FASE DE EXPERIMENTACIÓN

Para definir el mejor valor de ε realiza una primera fase de experimentación, se contemplan dos tipos de contenedores, seis tipos de figuras diferentes a empacar y seis valores diferentes de ε . Se utiliza un diseño factorial completo como el empleado en [27] con tres factores de control por tratamiento, por lo que se tiene 60 tratamientos. Dichos factores de control son:

- Valores de ε de seis niveles (10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6})
- Tipo de contenedor de dos niveles (sección-circular, circular)
- Tipos de figuras de cinco niveles (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos y hexágonos)

4.3.1.1 RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN (ε)

Para llevar a cabo esta experimentación se utiliza una instancia de cinco elementos para cada una de las figuras en los dos contenedores y valores diferentes de ε en el rango de 10^{-1} a 10^{-6} con un incremento de 10^{-1} , por un tiempo de 100 segundos para cada tratamiento.

CONTENEDOR SECCIÓN CIRCULAR A continuación se muestran los resultados obtenidos de la experimentación realizada con contenedor tipo secc-circular.

TABLA 4.3: Resultados para cinco triángulos para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	2.1446	factible
5	10^{-2}	2.0059	factible
5	10^{-3}	1.9948	factible
5	10^{-4}	1.9937	factible
5	10^{-5}	1.9913	infactible
5	10^{-6}	1.0000	infactible

En la figura 4.1 de la página 40 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.3 para tres valores de tolerancia, en el empaquetado de cinco figuras. Donde las figuras (a) y (b) muestran resultados factibles y (c) es infactible ya que presenta intersección entre los elementos empaquetados.

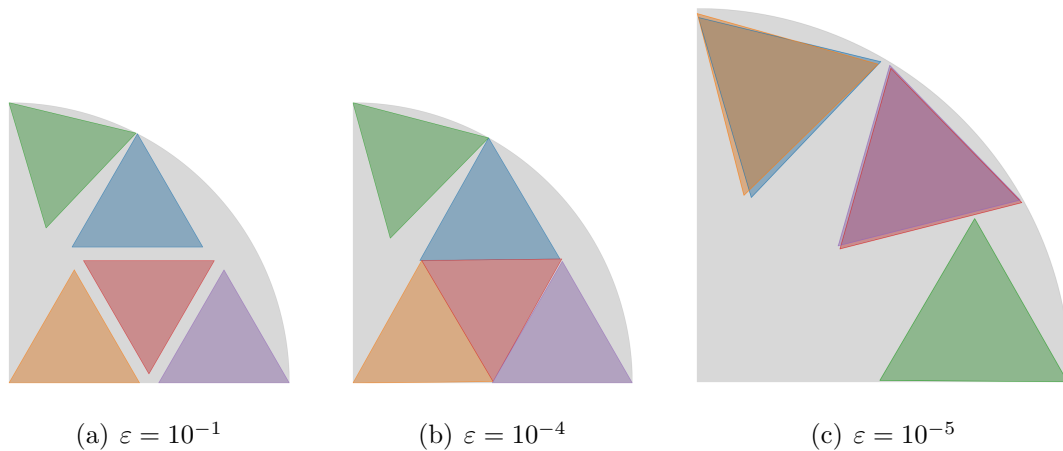


FIGURA 4.1: Cinco triángulos en contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.4: Resultados para cinco rectángulos para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	4.3390	factible
5	10^{-2}	4.2052	factible
5	10^{-3}	4.1992	factible
5	10^{-4}	4.1986	factible
5	10^{-5}	2.2361	infactible
5	10^{-6}	2.2361	infactible

En la figura 4.2 de la página 41 se muestra gráficamente algunos de los resultados obtenidos en la tabla 4.4 para diferentes valores de tolerancia y cinco rectángulos a empaquetar. Donde (a) y (b) son resultados factibles y (c) es infactible ya que presenta superposición entre las figuras.

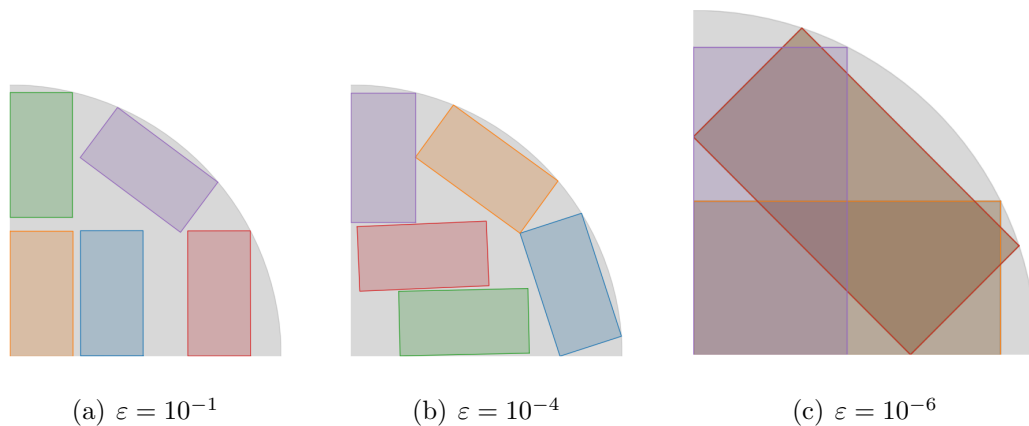


FIGURA 4.2: Cinco rectángulos contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.5: Resultados para cinco cuadrados para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	3.3738	factible
5	10^{-2}	3.1814	factible
5	10^{-3}	3.1642	factible
5	10^{-4}	3.1558	factible
5	10^{-5}	1.4142	infactible
5	10^{-6}	1.4142	infactible

En la figura 4.3 de la página 42 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.5 para tres valores de tolerancia para cinco en el empaquetado de 5 elementos. Donde (a) y (b) son soluciones factibles, (c) es infactible ya que presenta superposición de todos los cuadrados empaquetados.

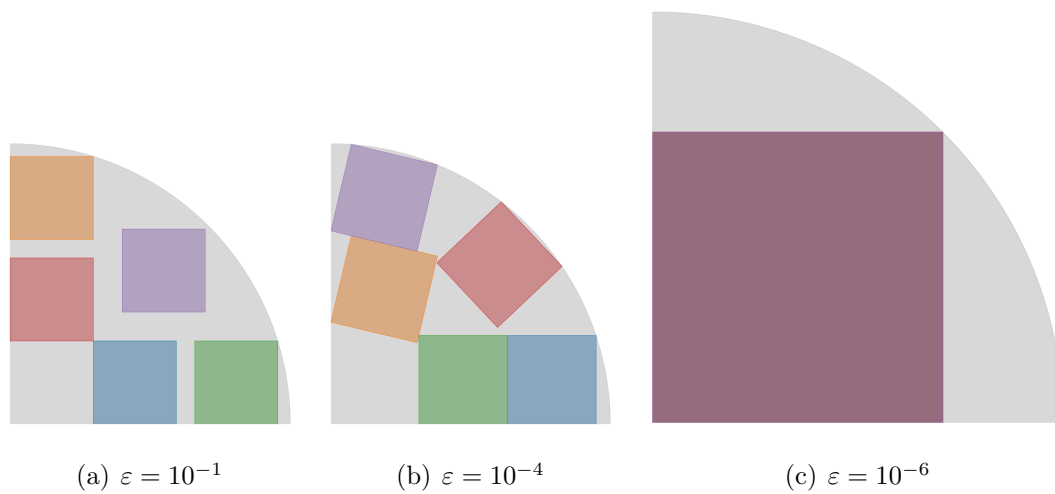
FIGURA 4.3: Cinco cuadrados contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.6: Resultados para cinco pentágonos para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	4.2930	factible
5	10^{-2}	4.0632	factible
5	10^{-3}	4.0426	factible
5	10^{-4}	4.0405	factible
5	10^{-5}	1.8543	infactible
5	10^{-6}	1.8297	infactible

En la figura 4.4 de la página 43 muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.6 para tres valores de tolerancia para cinco figuras. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible ya que presenta solapamiento entre los los pentágonos.

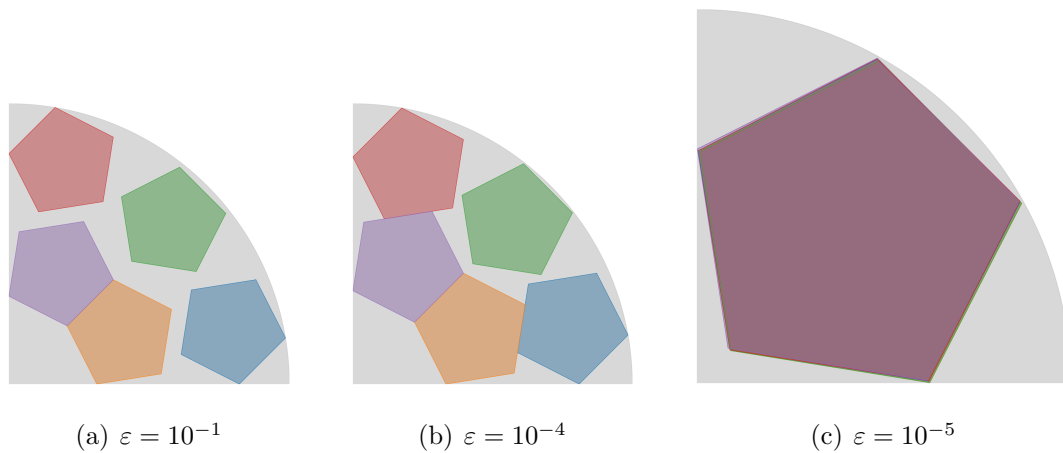
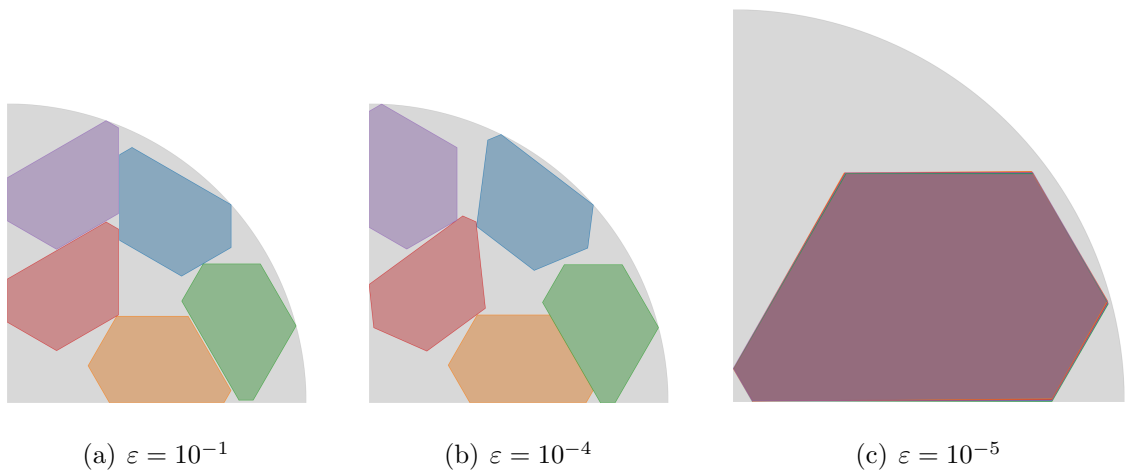


FIGURA 4.4: Cinco pentágonos contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.7: Resultados para cinco hexágonos para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	5.52301	factible
5	10^{-2}	5.23041	factible
5	10^{-3}	5.20082	factible
5	10^{-4}	5.1551	factible
5	10^{-5}	2.61126	infactible
5	10^{-6}	2.21126	infactible

En la figura 4.5 de la página 44 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.7 para tres valores de tolerancia para cinco figuras. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible ya que presenta solapamiento entre los los hexágonos.

FIGURA 4.5: Cinco hexágonos contenedor secc-circular para diferentes valores de ε .

A continuación se muestra una gráfica de barras 4.6 que muestra el valor de radio, la factibilidad y tipo de figura para cada valor de ε . En este gráfico se puede observar que en todos los caso el donde el resultado es factible el valor de $\varepsilon = 10^{-4}$ muestra un valor mínimo para el radio del contenedor secc-circular.

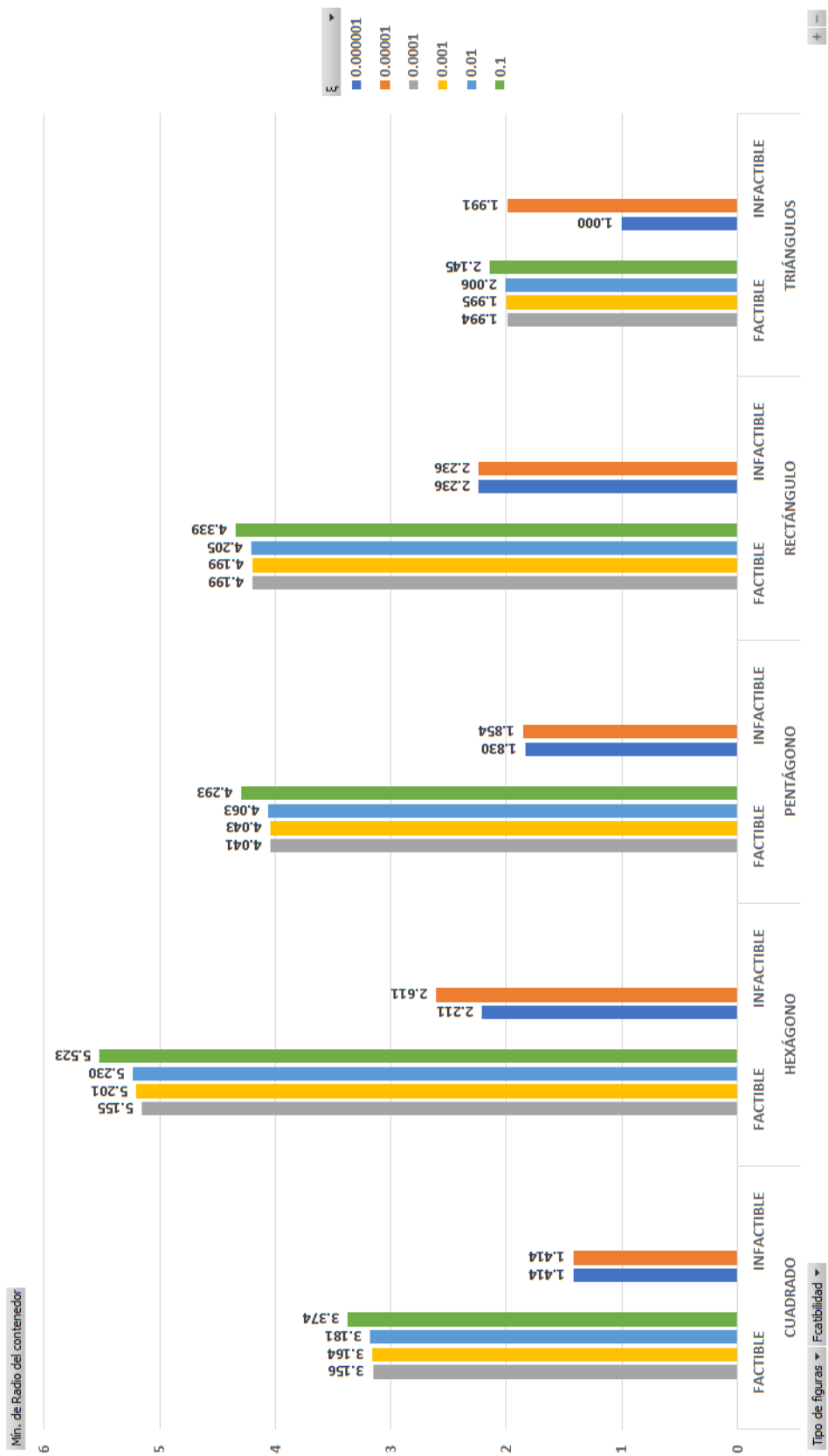


FIGURA 4.6: gráfica de barras que muestra los valores de radio, factibilidad y tipo de figura para cada valor de ϵ

CONTENEDOR CIRCULAR Análogamente al apartado anterior a continuación se muestran los resultados del experimento en contenedores tipo circular.

TABLA 4.8: Resultados para cinco triángulos para diferentes valores de ε

cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	2.1363	factible
5	10^{-2}	1.3345	factible
5	10^{-3}	1.0329	factible
5	10^{-4}	1.0032	factible
5	10^{-5}	1.0003	infactible
5	10^{-6}	0.9990	infactible

En la figura 4.7 de la página 46 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.8 para tres valores de tolerancia. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible dado que existe solapamiento entre los triángulos.

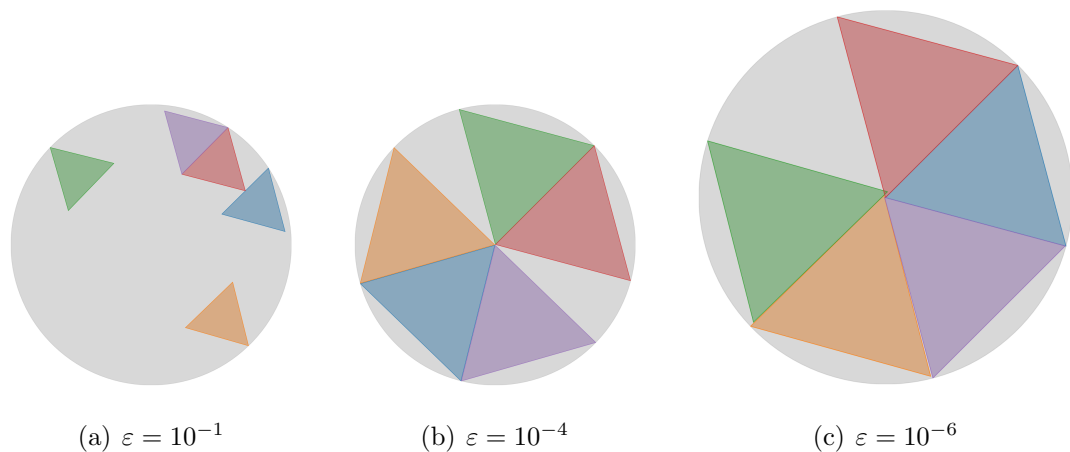


FIGURA 4.7: Resultados para cinco triángulos contenedor circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.9: Resultados para cinco rectángulos para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	2.6853	factible
5	10^{-2}	2.2451	factible
5	10^{-3}	2.2030	factible
5	10^{-4}	2.1845	factible
5	10^{-5}	1.1180	infactible
5	10^{-6}	1.1180	infactible

En la figura 4.8 de la página 47 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.9 para tres valores de tolerancia. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible dado que existe solapamiento entre los rectángulo.

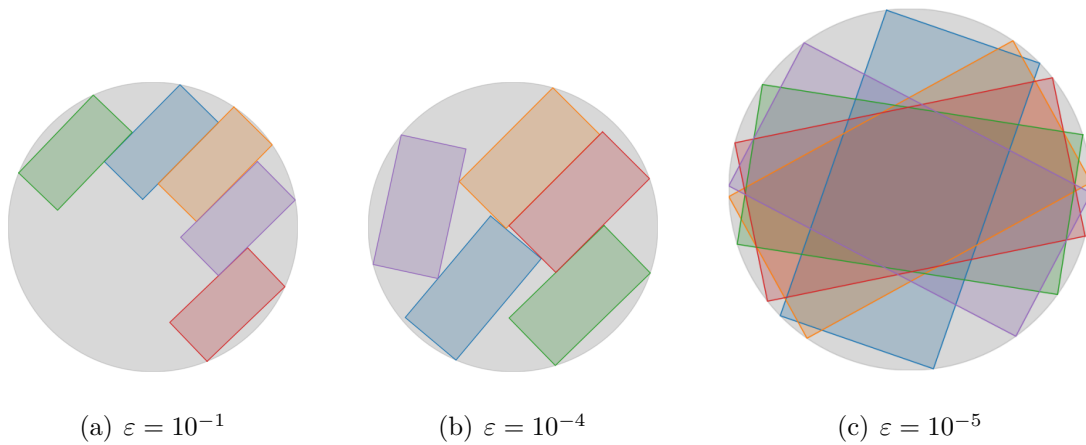


FIGURA 4.8: Resultados para cinco rectángulo contenedor circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.10: Resultados para cinco cuadrados para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	2.5252	factible
5	10^{-2}	1.8355	factible
5	10^{-3}	1.6484	factible
5	10^{-4}	1.5878	factible
5	10^{-5}	0.7071	infactible
5	10^{-6}	0.7071	infactible

En la figura 4.9 de la página 48 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.10 para tres valores de tolerancia. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible dado que existe superposición entre los cuadrados.

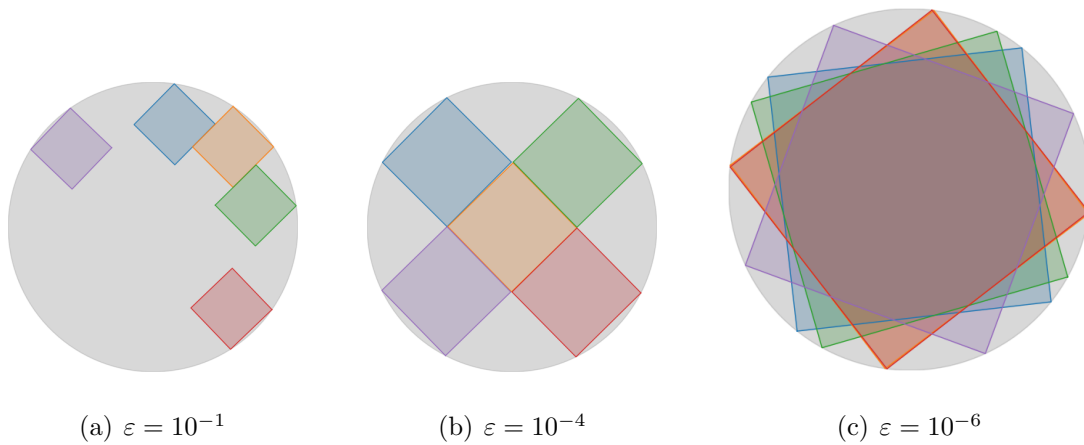


FIGURA 4.9: Resultados para cinco cuadrados contenedor circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.11: Resultados para cinco pentágonos para diferentes valores de ε

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	3.7621	factible
5	10^{-2}	2.3488	factible
5	10^{-3}	2.0592	factible
5	10^{-4}	2.0354	factible
5	10^{-5}	1.5400	infactible
5	10^{-6}	1.5389	infactible

En la figura 4.10 de la página 49 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.11 para tres valores de tolerancia. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible dado que existe superposición entre los pentágonos.

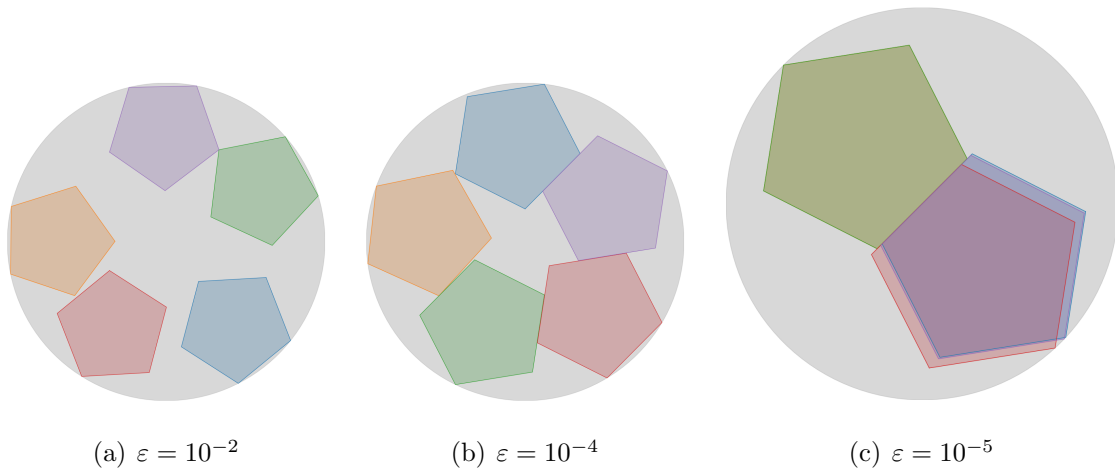


FIGURA 4.10: Resultados para cinco pentágonos contenedor circular para diferentes valores de ε .

TABLA 4.12: Add caption

Cantidad de figuras	ε	Radio	Factibilidad
5	10^{-1}	3.7860	factible
5	10^{-2}	3.7860	factible
5	10^{-3}	3.1250	factible
5	10^{-4}	2.6486	factible
5	10^{-5}	2.5871	infactible
5	10^{-6}	1.4429	infactible

En la figura 4.11 de la página 50 se muestra gráficamente los resultados obtenidos en la tabla 4.12 para tres valores de tolerancia. donde (a) y (b) son factibles y (c) es infactible dado que existe superposición entre los pentágonos.

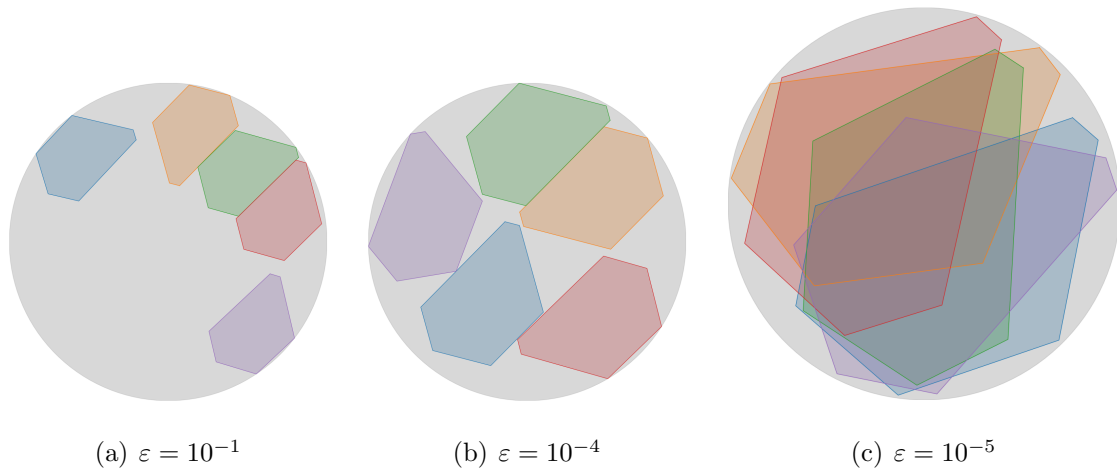


FIGURA 4.11: Resultados para cinco hexágonos contenedor circular para diferentes valores de ε .

A continuación se muestra una gráfica de barras(4.12) que muestra el valor de radio, la factibilidad y tipo de figura para cada valor de ε . En este gráfico se puede observar que al igual que en el contenedor secc-circular cuando el resultado es factible el valor de $\varepsilon = 10^{-4}$ muestra un valor mínimo para el radio del contenedor.

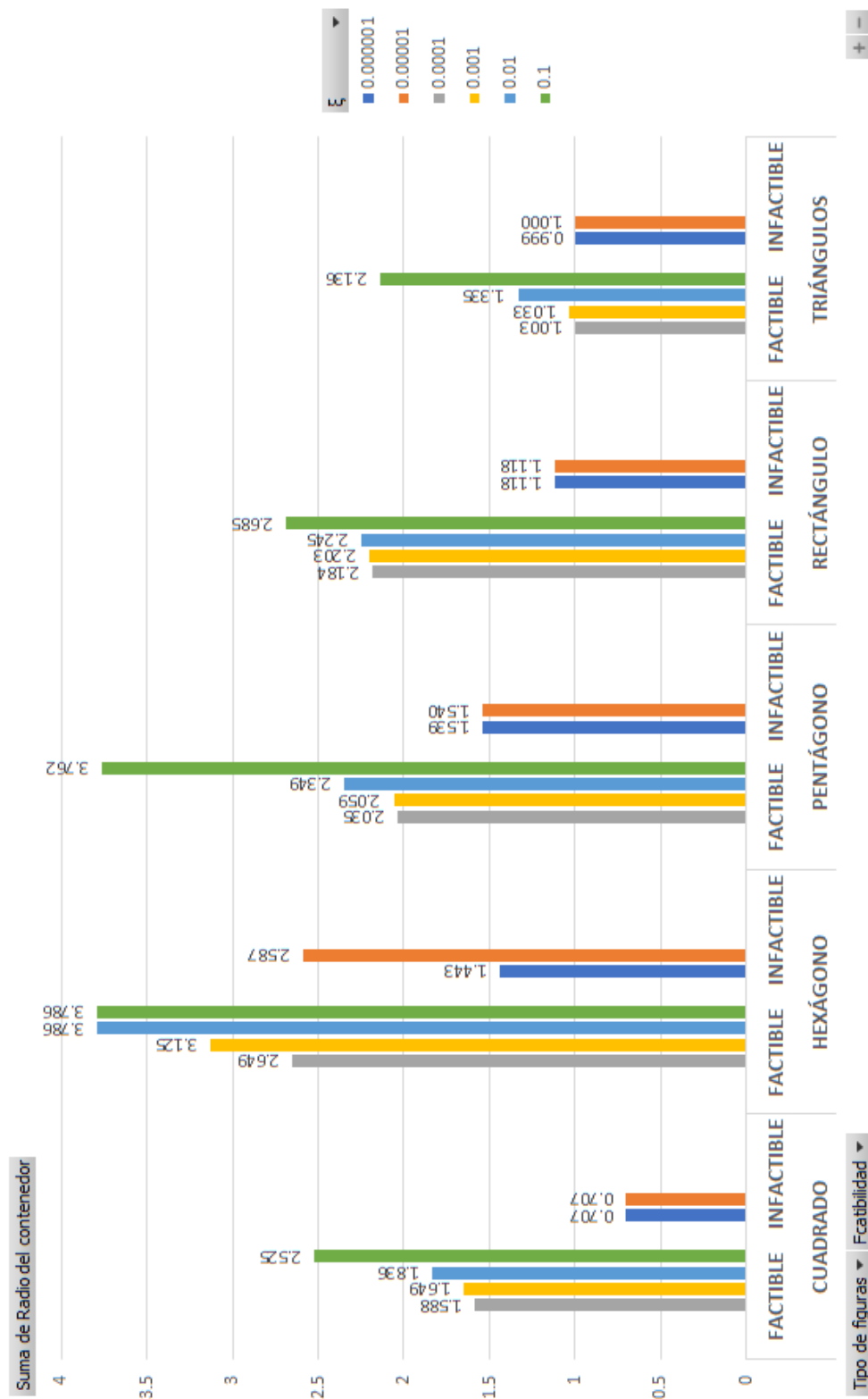


FIGURA 4.12: Gráfica de barras que muestra valores de radio y factibilidad al variar ϵ .

4.3.1.2 CONCLUSIONES

De los resultados expuestos en la gráfica 4.6 de la página 45 que muestra como se comporta el valor del radio del contenedor secc-circular en el empaquetamiento de cinco tipos de figuras para cada valor de ε y la tabla 4.12 de la página 51 que análogamente a la anterior pero en contenedor circular. Podemos fijar el valor de ε en 10^{-4} ya que para este valor se obtuvieron los mejores valores objetivos obtenidos en la experimentación.

4.3.2 SEGUNDA FASE DE LA EXPERIMENTACIÓN

En esta fase de experimentación se contemplan dos tipos de contenedores y seis tipos de figuras diferentes a empacar y con $\varepsilon = 10^{-4}$ definido en la experimentación anterior. Por lo que se utiliza un diseño factorial completo con dos factores de control por tratamiento por lo que se tiene 12 tratamientos. Dichos factores de control son:

- Tipo de contenedor de dos niveles (sección-circular, circular)
- Tipos de figuras de seis niveles (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos (regulares e irregulares) y hexágonos, cuadriláteros mixtos)

4.3.2.1 RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Esta experimentación se realiza para una instancia de 5, 6, 7, 8, 9, 10 elementos idénticos para todas las figuras, con excepción de los cuadriláteros mixtos que presentan elementos heterogéneos. Dichos figuras son empaquetados en dos tipos de contenedores(secc-circular y circular). Se define como criterio de paro un tiempo de 500 segundos para cada tratamiento.

A continuación mostramos los resultados obtenidos en la experimentación separados por tipos de contenedor y tipos de figuras:

CONTENEDOR SECCIÓN CIRCULAR Para este tipo de contenedor se muestran tablas de resultados del empaquetamiento de cada tipo de figuras 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18. Además se muestran gráficamente una selección de dichos resultados para cada figura 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18.

TABLA 4.13: Resultados de la experimentación de Triángulos

Elementos		Contenedor		Modelo		Resultados
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	1.9937	131	140	69.3510
2	Regular	6	2.1607	187	201	70.8561
3	Regular	7	2.2834	253	273	74.0180
4	Regular	8	2.5593	329	356	67.3382
5	Regular	9	2.7844	415	450	64.0015
6	Regular	10	2.8688	551	555	66.9900

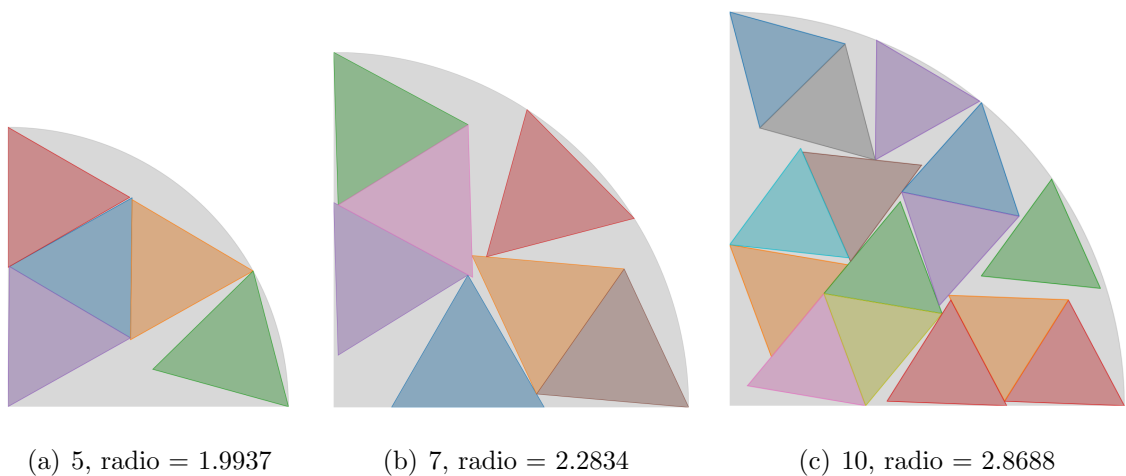


FIGURA 4.13: Resultados de triángulos en contenedor secc-circular

TABLA 4.14: Resultados de la experimentación de Rectángulos

Elementos		Contenedor	Modelo		Resultados	
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	4.1234	161	180	74.8858
2	Regular	6	4.6571	271	297	70.4466
3	Regular	7	4.85837	309	343	75.5191
4	Regular	8	5.1379	473	516	77.1718
5	Regular	9	5.7457	505	558	69.4219
6	Regular	10	6.09458	621	685	68.5571

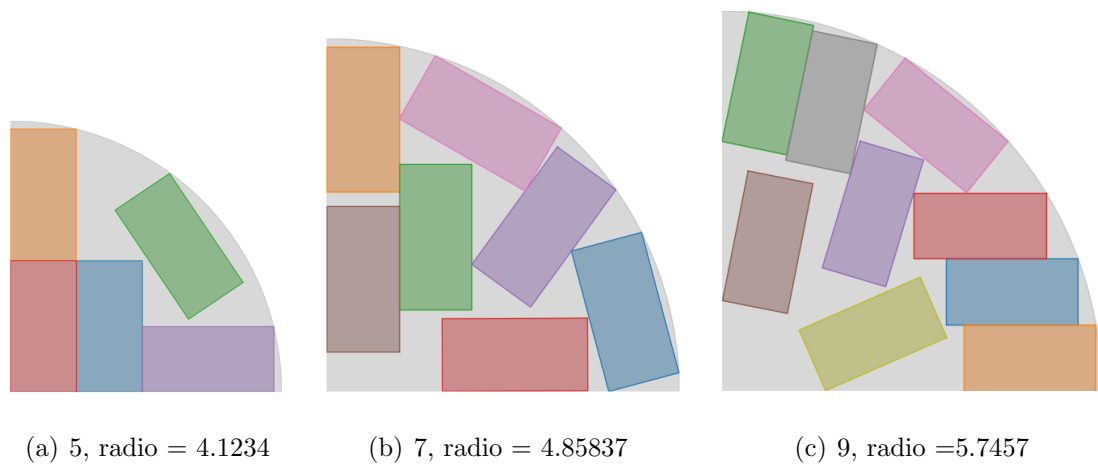
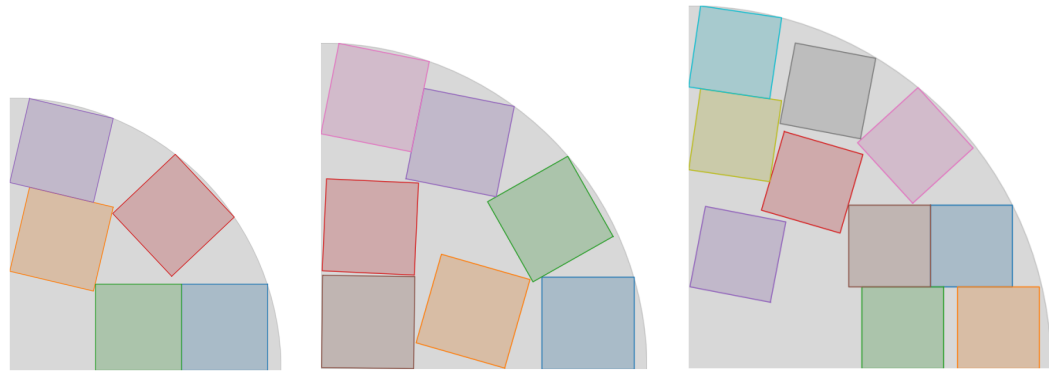


FIGURA 4.14: Resultados de rectángulos en contenedor secc-circular

TABLA 4.15: Resultados de la experimentación de Cuadrados

Elementos		Contenedor	Modelo		Resultados	
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	3.15583	161	180	63.9224
2	Regular	6	3.4213	271	297	65.2648
3	Regular	7	3.54008	309	343	71.1184
4	Regular	8	3.8742	473	516	67.8635
5	Regular	9	4.1534	595	648	66.4271
6	Regular	10	4.42759	621	685	64.9494

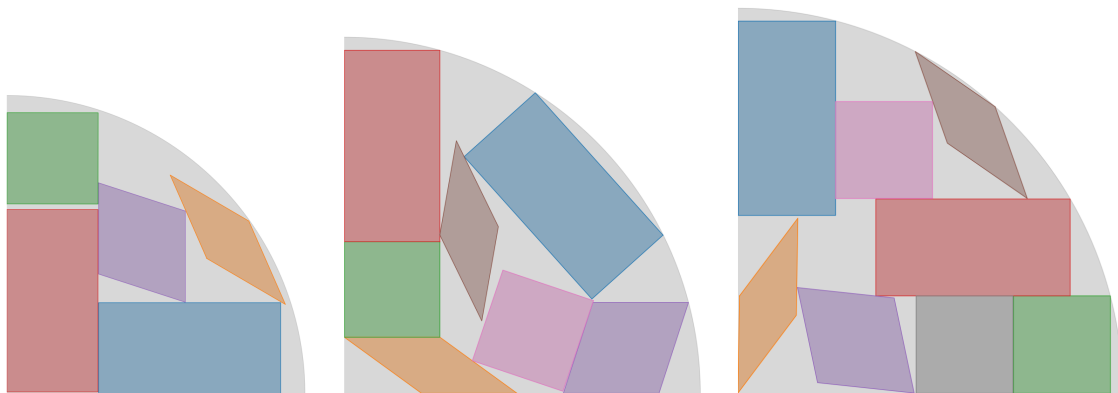


(a) 5,radio = 3.15583 (b) 7,radio = 3.54008 (c) 10,radio =4.42759

FIGURA 4.15: Resultados de cuadrados en contenedor secc-circular

TABLA 4.16: Resultados de la experimentación de Cuadriláteros mixtos

Elementos		Contenedor	Modelo		Resultados	
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular e irregular	5	3.27443	191	210	77.6503
2	Regular e irregular	6	3.74991	271	297	64.5293
3	Regular e irregular	7	3.72475	365	399	74.5813
4	Regular e irregular	8	3.96078	473	516	74.0734
5	Regular e irregular	9	4.77338	595	648	56.3150
6	Regular e irregular	10	5.54264	731	795	50.0570



(a) 5,radio = 3.27443 (b) 7,radio = 3.72475 (c) 8,radio =3.96078

FIGURA 4.16: Resultados de cuadriláteros mixtos en contenedor secc-circular

TABLA 4.17: Resultados de la experimentación de Pentágonos

Elementos		Contenedor	Modelo		Resultados	
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	4.0405	191	215	67.0712
2	Regular	6	4.4079	271	303	67.6274
3	Regular	7	4.7022	421	462	69.3318
4	Regular	8	4.9109	473	524	72.6457
5	Regular	9	6.0324	685	747	54.1626
6	Regular	10	6.2677	841	915	55.7471
7	Irregular	5	4.6306	221	245	75.6797
8	Irregular	6	5.3032	313	345	69.2407
9	Irregular	7	5.6060	421	462	72.2905
10	Irregular	8	5.9150	545	596	74.2115
11	Irregular	9	6.4690	685	747	69.8000
12	Irregular	10	6.9163	841	915	67.8482

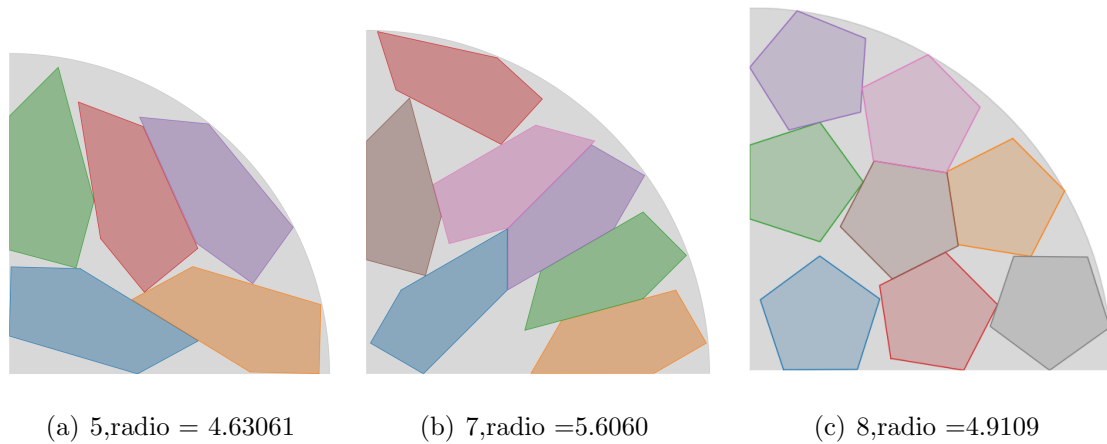


FIGURA 4.17: Resultados de pentágonos idénticos en contenedor secc-circular

TABLA 4.18: Resultados de la experimentación de hexágonos

		Elementos	Contenedor	Modelo		Resultados
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	5.2226	251	280	68.8514
2	Regular	6	5.56975	355	393	72.6434
3	Regular	7	6.25374	477	525	67.2256
4	Regular	8	6.44886	617	676	72.2504
5	Regular	9	7.32532	775	846	62.9949
6	Regular	10	7.4584	951	1035	67.5188

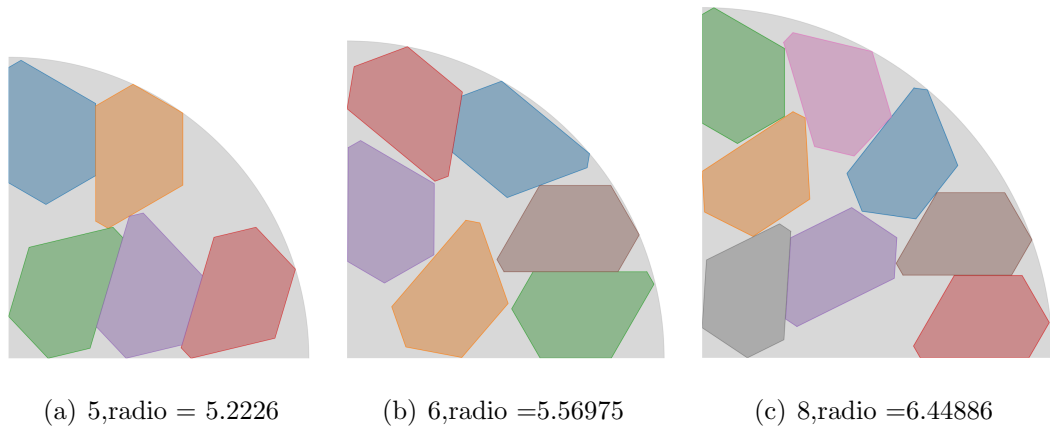
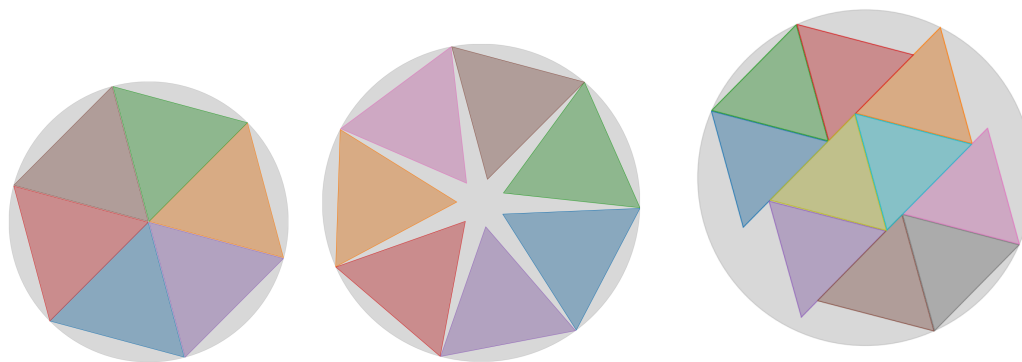


FIGURA 4.18: Ejemplos de hexágonos idénticos en contenedor secc-circular

Contenedor circular

TABLA 4.19: Triángulos

		Elementos	Contenedor	Modelo		Resultados
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	1.00334	131	140	68.4580
2	Regular	6	1.00424	187	201	82.0025
3	Regular	7	1.15669	253	273	72.1132
4	Regular	8	1.26829	329	356	68.5494
5	Regular	9	1.37191	415	450	65.9086
6	Regular	10	1.43058	511	555	67.3483



(a) 6,radio = 1.00424

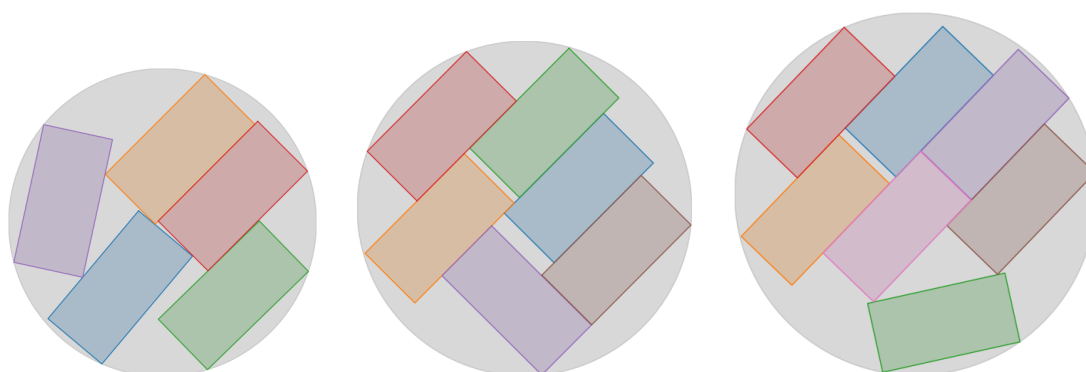
(b) 7,radio =1.15669

(c) 10,radio = 1.43058

FIGURA 4.19: Resultados de triángulos idénticos en contenedor circular

TABLA 4.20: Rectángulos

		Elementos		Contenedor		Modelo		Resultados
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras		Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación	
1	Regular	5		2.1800	161	180	66.9788	
2	Regular	6		2.3781	229	255	67.5410	
3	Regular	7		2.5711	309	343	67.4702	
4	Regular	8		2.8261	401	444	63.7669	
5	Regular	9		3.1500	505	558	57.7433	
6	Regular	10		3.6028	621	685	49.0456	



(a) 5,radio = 2.1800

(b) 6,radio = 2.3781

(c) 7,radio =2.5711

FIGURA 4.20: Resultados de rectángulos idénticos en contenedor circular

TABLA 4.21: Cuadrados

Elementos		Contenedor		Modelo		Resultados
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	1.6483	161	180	58.5762
2	Regular	6	1.8086	271	297	58.3831
3	Regular	7	2.2590	309	343	43.6597
4	Regular	8	2.5125	473	516	40.3367
5	Regular	9	2.9646	505	558	32.5957
6	Regular	10	3.1530	731	795	32.0186

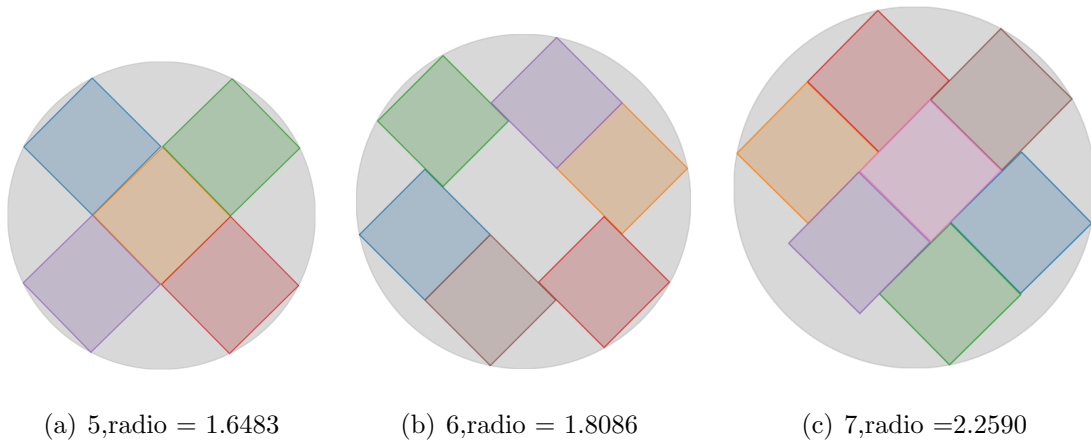
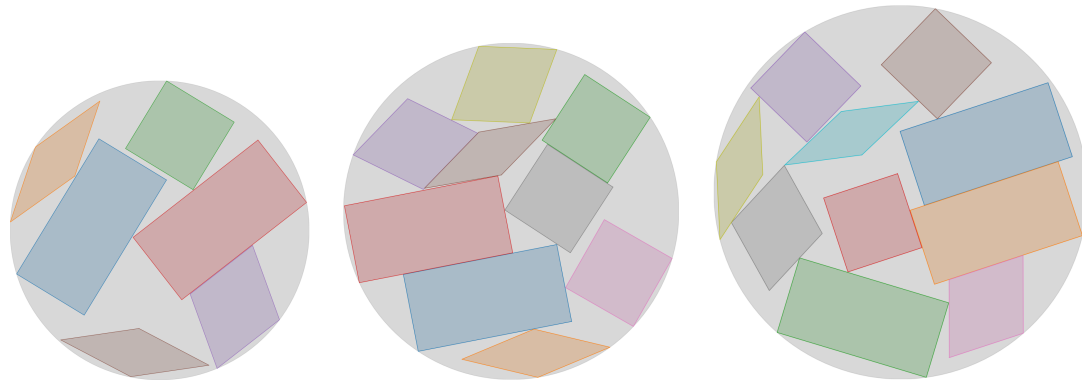


FIGURA 4.21: Resultados de cuadrados idénticos en contenedor circular

TABLA 4.22: Cuadriláteros mixtos

Elementos		Contenedor		Modelo		Resultados
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular e irregular	5	1.9212	191	210	56.3869
2	Regular e irregular	6	1.8897	271	297	63.5215
3	Regular e irregular	7	1.8770	365	399	73.4213
4	Regular e irregular	8	2.0471	473	516	69.3237
5	Regular e irregular	9	2.1465	595	648	69.6213
6	Regular e irregular	10	2.3991	731	795	66.7918



(a) 6,radio = 1.8897

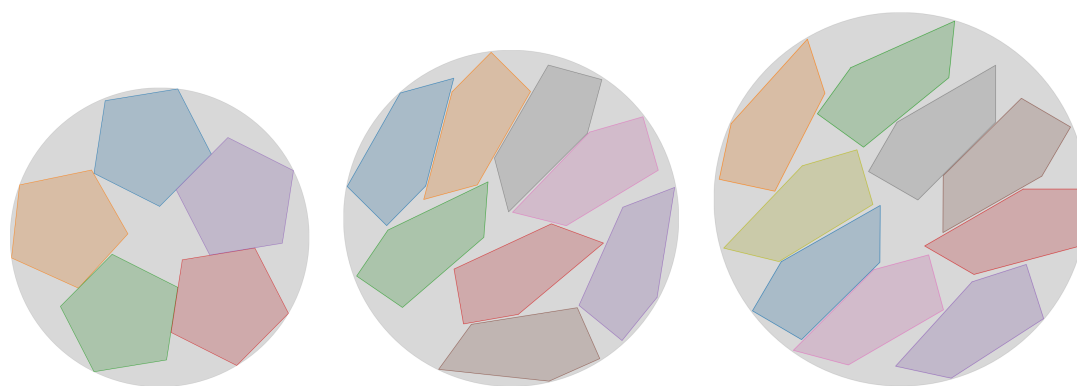
(b) 9,radio = 2.1465

(c) 10,radio = 2.3991

FIGURA 4.22: Resultados cuadriláteros mixtos en contenedor circular

TABLA 4.23: Pentágonos

		Elementos		Contenedor		Modelo		Resultados	
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras		Dim. (radio)	Variables	Restricciones		% ocupación	
1	Regular	5		2.0354	191	215		66.0768	
2	Regular	6		2.31735	271	303		61.1711	
3	Regular	7		2.6981	421	462		52.6454	
4	Regular	8		3.0125	545	596		48.2630	
5	Regular	9		3.2537	685	747		46.5443	
6	Regular	10		3.8476	841	915		36.9827	
7	Irregular	5		2.40124	221	245		70.3599	
8	Irregular	6		2.6302	313	345		70.3720	
9	Irregular	7		2.87786	421	462		68.5780	
10	Irregular	8		3.02036	545	596		71.1539	
11	Irregular	9		3.28145	685	747		67.8168	
12	Irregular	10		3.65709	841	915		60.6673	



(a) 5,radio = 2.0354

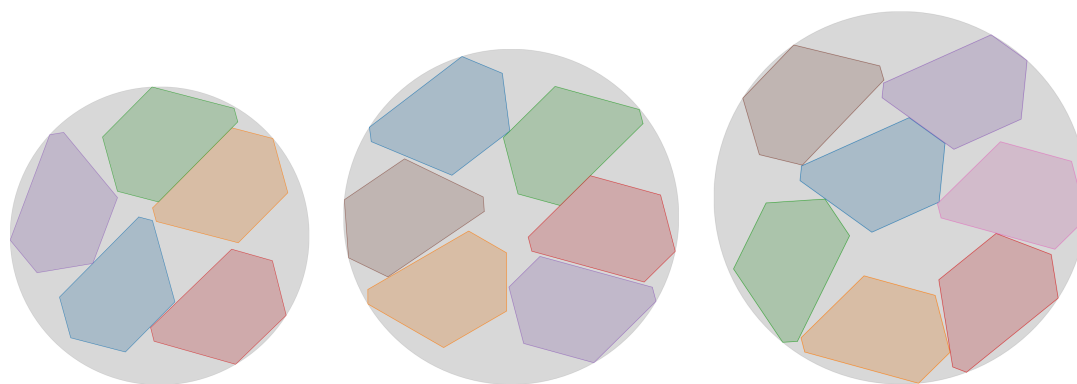
(b) 8,radio = 3.02036

(c) 9,radio =3.28145

FIGURA 4.23: Resultados pentágonos idénticos en contenedor circular

TABLA 4.24: Hexágonos

Elementos		Contenedor	Modelo		Resultados	
Inst.	Tipo	Cantidad de figuras	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% ocupación
1	Regular	5	2.64861	251	280	66.9253
2	Regular	6	2.87904	355	393	67.9692
3	Regular	7	3.16636	477	525	65.5592
4	Regular	8	3.46419	617	676	62.5954
5	Regular	9	3.69173	775	846	62.0067
6	Regular	10	4.14012	951	1035	54.7810



(a) 5,radio = 2.64861

(b) 6,radio = 2.87904

(c) 7,radio =3.16636

FIGURA 4.24: Resultados hexágonos idénticos en contenedor circular

4.3.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SEGUNDA FASE DE EXPERIMENTACIÓN

Uno de los objetivos específicos de esta investigación es determinar si los tipos de figuras, la cantidad de las mismas y el tipo de contenedor influyen en el porcentaje de ocupación de los elementos en el contenedor. Para cumplir dichos objetivos realizaremos un análisis estadístico de los datos, dividiéndolos por tipos de contenedor.

4.3.3.1 ANÁLISIS ESTADÍSTICO CONTENEDOR SECC-CIRCULAR

Antes de realizar cualquier análisis a los datos se debe realizar la prueba de Shapiro–Wilk, que calcula un W estadístico que prueba si una muestra aleatoria x_1, x_2, \dots, x_n proviene de una distribución normal. El resultado de esta prueba se muestra en la tabla 4.25. En dicha tabla con un $\mathbf{W} = 0.9537$ y un $\mathbf{pval} = 0.0877$ se puede observar que la variable dependiente (% de ocupación) sigue una distribución normal con un intervalo de confianza del 95 %.

TABLA 4.25: Prueba Shapiro–Wilk a la variable % de ocupación

	\mathbf{W}	\mathbf{pval}
% de ocupación	0.9537	0.0877

Dado lo anterior se puede utilizar un análisis de varianza (ANOVA) unidireccional, donde se toma como variable dependiente el % de ocupación y como factores el tipo de figura, la cantidad de figuras a empaquetar en cada caso.

Para el primer factor (Tipo de figura) se plantea la siguiente pregunta: ¿Existe diferencia entre el promedio de ocupación de los diferentes tipos de figuras?. La

respuesta a esta pregunta se obtiene al contrastar las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 \quad (4.2)$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para alguna } i \neq j \quad (4.3)$$

En la tabla 4.26 se muestra el resultado de la aplicación del ANOVA. Con los valores del estadístico de prueba $\mathbf{F} = 1.0302$ y $\mathbf{pval} = 0.4117$ tenemos pruebas para aceptar la hipótesis H_0 que nos indica que no existe diferencias significativas entre los tratamientos con un intervalo de confianza del 95%. Esto se puede observar en la figura 4.25.

TABLA 4.26: Influencia del tipo de figura en el % de ocupación del contenedor

	Factor	SS	DF	MS	F	pval	np2
0	Tipo de figura	0.0132	5	0.0026	1.0302	0.4147	0.1252
1	Within	0.0920	36	0.0026			

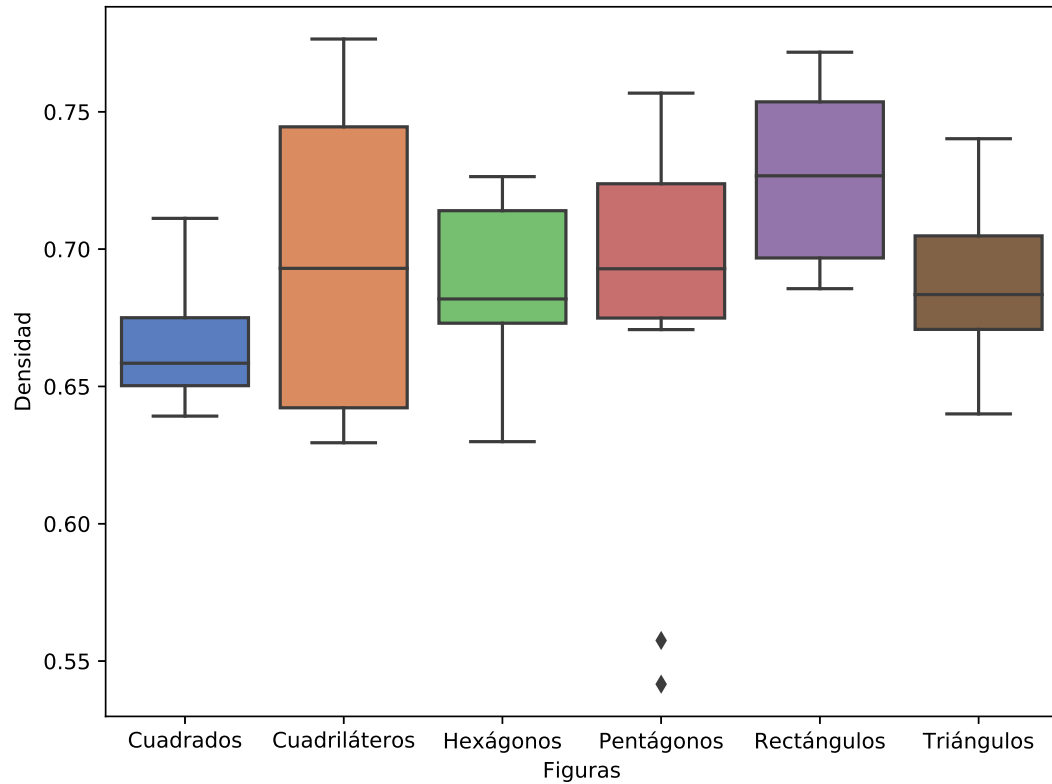


FIGURA 4.25: Diagrama de caja y bigotes que relaciona los tipos de figuras y el % de ocupación del contenedor.

Análogamente al análisis del primer factor, se realiza la misma prueba para el factor de control cantidad de figuras. Obtenemos como resultado la tabla 4.27. Con los valores del estadístico de prueba $F = 4.9514$ y $pval = 0.0015$, se tiene evidencia para rechazar la hipótesis H_0 ya que existe diferencias estadísticas al menos entre algunos de los grupos los grupos con un intervalo de confianza de un **95%** como se muestra en la figura 4.26 de la página 65.

El ANOVA no ofrece información suficiente para señalar entre que grupos existe la diferencia. Por lo que se aplica una prueba Tukey HSD (*del inglés honestly significant difference*) que muestra las diferencias entre las medias de los grupos. Lo anterior se evidencia en la tabla 4.28 de la página 66 donde se puede apreciar que se rechaza la hipótesis en los casos de pareo de la instancia (10-8, 10-7, 9-7 y 9-8). esto

se aprecia gráficamente en la figura 4.27 de la página 67.

TABLA 4.27: Influencia de la cantidad de figura en el % de ocupación del contenedor

	Factor	SS	DF	MS	F	pval	np2
0	Cantidad defiguras	0.0429	5.0000	0.0086	4.9514	0.0015	0.4075
1	Within	0.0623	36.0000	0.0017	–	–	–

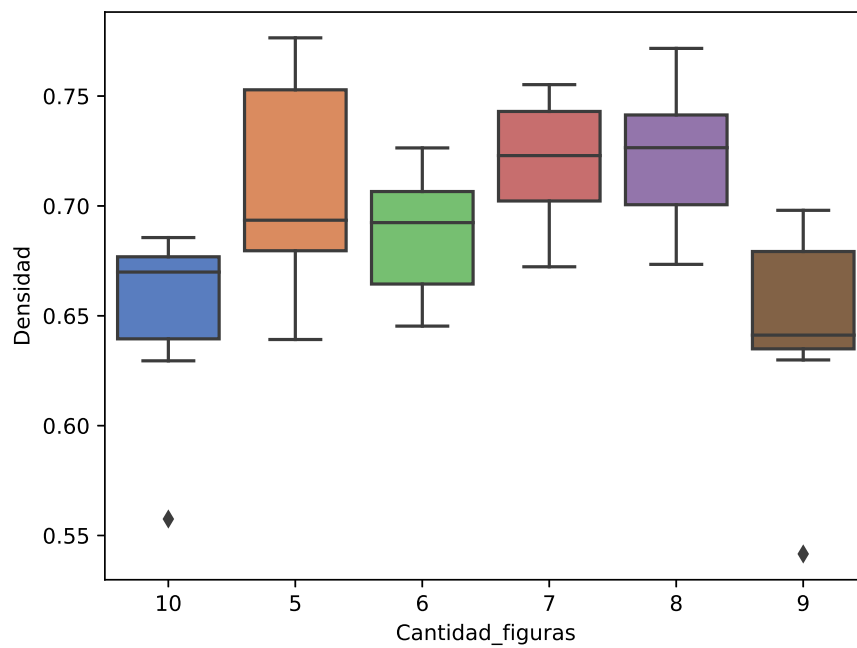


FIGURA 4.26: Diagrama de caja y bigotes que relaciona los cantidad de figuras y el % de ocupación del contenedor.

TABLA 4.28: Tukey, influencia de la cantidad de figuras en el % de ocupación del contenedor

grupo1	grupo2	meandiff	pval	lower	upper	Rechazar
10	5	0.0612	0.0893	-0.0057	0.1281	No rechazar
10	6	0.0372	0.5508	-0.0297	0.1041	No rechazar
10	7	0.0707	0.0331	0.0038	0.1377	Se rechaza
10	8	0.0728	0.0262	0.0059	0.1397	Se rechaza
10	9	-0.0052	0.9	-0.0721	0.0617	No rechazar
5	6	-0.024	0.8801	-0.0909	0.0429	No rechazar
5	7	0.0095	0.9	-0.0574	0.0765	No rechazar
5	8	0.0116	0.9	-0.0553	0.0785	No rechazar
5	9	-0.0664	0.0527	-0.1333	0.0005	No rechazar
6	7	0.0335	0.6421	-0.0334	0.1005	No rechazar
6	8	0.0356	0.59	-0.0313	0.1025	No rechazar
6	9	-0.0424	0.4163	-0.1093	0.0245	No rechazar
7	8	0.0021	0.9	-0.0648	0.069	No rechazar
7	9	-0.076	0.0183	-0.1429	-0.009	Se rechaza
8	9	-0.078	0.0144	-0.145	-0.0111	Se rechaza

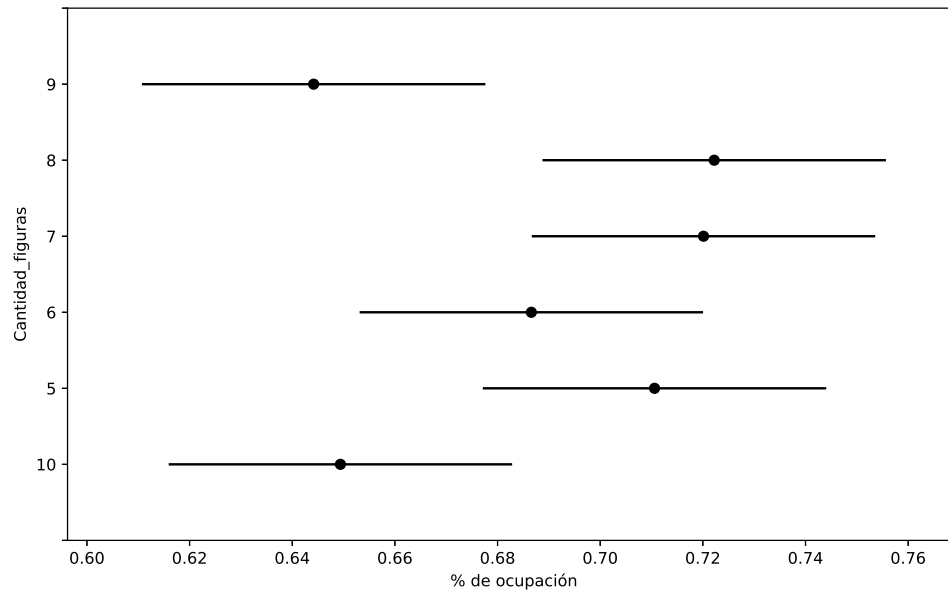


FIGURA 4.27: Diagrama simultaneo que relaciona el % de ocupación del contenedor, con los grupos del factor cantidad de figuras .

De los resultados obtenidos del análisis estadístico de los datos de la experimentación de empaquetamiento en contenedor secc-circular, se concluye que el tipo de figura no influye en porcentaje de ocupación del contenedor. Que coincide con un resultado presentado en [27]. Además podemos afirmar que el tipo de figura sí influye en la variable dependiente analizada.

4.3.3.2 ANÁLISIS ESTADÍSTICO CONTENEDOR CIRCULAR

Para el análisis estadístico en este contenedor comenzamos con la aplicación de la prueba de Shapiro-Wilk para corroborar que la variable dependiente (% de ocupación) sigue una distribución normal. El resultado de esta prueba se puede observar en la tabla 4.29 el cual con un $\mathbf{W} = 0.9601$ y $\mathbf{pav} = 0.1489$, nos muestra que dicha variable sigue una distribución normal con un intervalo de confianza del **95 %**

TABLA 4.29: Prueba Shapiro–Wilk a la variable % de ocupación

	W	pval
% de ocupación	0.9601	0.1489

Al validar la normalidad de los valores de la variable dependiente, se puede utilizar un análisis de varianza (ANOVA) unidireccional. Como en el caso del contenedor secc-circular se toma como factores el tipo de figura, la cantidad de figuras a empaquetar en cada caso.

Para el primer factor (Tipo de figura) se plantea la interrogante y hipótesis planteada en la sección 4.3.3.1.

En la tabla 4.30 se muestra el resultado de la aplicación del ANOVA. Con los valores del estadístico de prueba $F = 4.7355$ y $pval = 0.0020$, se tiene evidencia para rechazar la hipótesis H_0 ya que existe diferencias estadísticas al menos entre algunos de los grupos los grupos con un intervalo de confianza de un **95 %** como se muestra en la figura 4.28de la página 69.

TABLA 4.30: Influencia del tipo de figura en el % de ocupación del contenedor

Factor	SS	DF	MS	F	pval	np2
Figuras	967.1788	5.0000	193.4358	4.7355	0.0020	0.3968
Within	1470.5424	36.0000	40.8484			

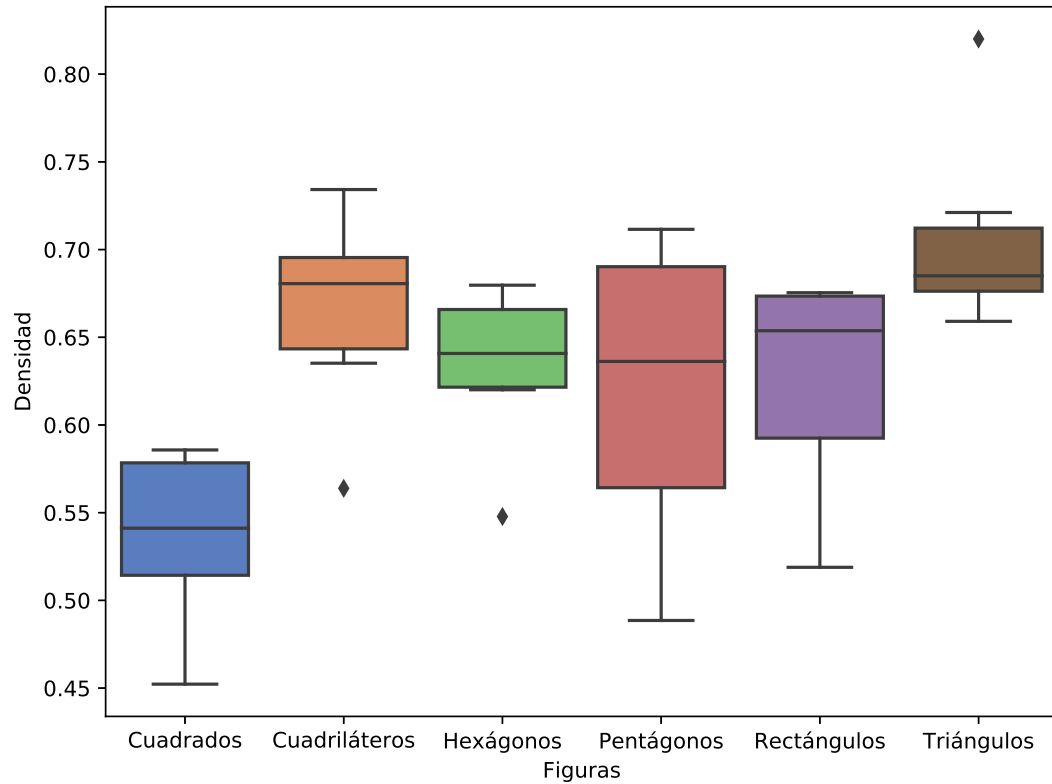


FIGURA 4.28: Diagrama de caja y bigotes que relaciona los tipos de figuras y el % de ocupación del contenedor.

El ANOVA no ofrece información suficiente para señalar entre que grupos del factor existe la diferencia. Se aplica una prueba Tukey HSD. Lo anterior se evidencia en la tabla 4.31 de la página 70 donde se puede apreciar que se rechaza la hipótesis en los casos de pareo de las figuras (Cuadrados – Cuadriláteros y Cuadrados – Triángulos), en el resto de los casos no existen diferencias estadísticas significativas. Esto se aprecia gráficamente en la figura 4.29 de la página 71.

TABLA 4.31: Tukey, influencia de la tipo de figuras en el % de ocupación del conte-

nedor

Grupo1	Grupo2	Meandiff	pval	Lower	Upper	Rechasar
Cuadrados	Cuadriláteros	12.9025	0.0149	1.8009	24.0041	Se rechaza
Cuadrados	Hexágonos	9.6976	0.1167	-1.404	20.7992	No rechaza
Cuadrados	Pentágonos	8.8094	0.0884	-0.8049	18.4237	No rechaza
Cuadrados	Rectángulos	8.9558	0.1743	-2.1458	20.0574	No rechaza
Cuadrados	Triángulos	17.1214	0.0010	6.0198	28.223	Se rechaza
Cuadriláteros	Hexágonos	-3.2049	0.9000	-14.3065	7.8966	No rechaza
Cuadriláteros	Pentágonos	-4.0931	0.7682	-13.7074	5.5212	No rechaza
Cuadriláteros	Rectángulos	-3.9467	0.8854	-15.0483	7.1549	No rechaza
Cuadriláteros	Triángulos	4.2189	0.8445	-6.8827	15.3205	No rechaza
Hexágonos	Pentágonos	-0.8882	0.9000	-10.5024	8.7261	No rechaza
Hexágonos	Rectángulos	-0.7418	0.9000	-11.8434	10.3598	No rechaza
Hexágonos	Triángulos	7.4239	0.3564	-3.6777	18.5255	No rechaza
Pentágonos	Rectángulos	0.1464	0.9000	-9.4679	9.7606	No rechaza
Pentágonos	Triángulos	8.312	0.1234	-1.3022	17.9263	No rechaza
Rectángulos	Triángulos	8.1657	0.2570	-2.9359	19.2672	No rechaza

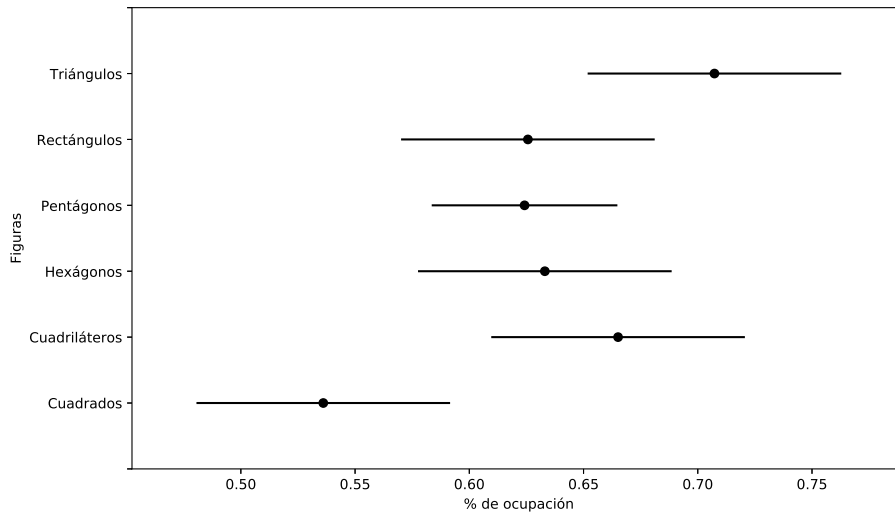


FIGURA 4.29: Diagrama simultaneo que relaciona el % de ocupación del contenedor, con los grupos del factor tipos de figuras.

Para el análisis con respecto al segundo factor (cantidad de figuras) se aplica nuevamente un ANOVA cuyos resultados se presentan en la tabla 4.32 de la página 71. De los cuales, con un valor del estadístico de prueba $F = 2.0028$ y $pval = 0.1017$, se tiene evidencia para aceptar la hipótesis H_0 . Por tanto se puede afirmar que la cantidad de figuras no influyen en el % de ocupación del contenedor circular con un intervalo de confianza del 95 % esto se observa en la figura 4.30 de la página 72.

TABLA 4.32: Influencia de la cantidad de figura en el % de ocupación del contenedor

Factores	SS	DF	MS	F	pval	np2
Cantidad de figuras	0.0531	5.0000	0.0106	2.0028	0.1017	0.2176
Within	0.1907	36.0000	0.0053			

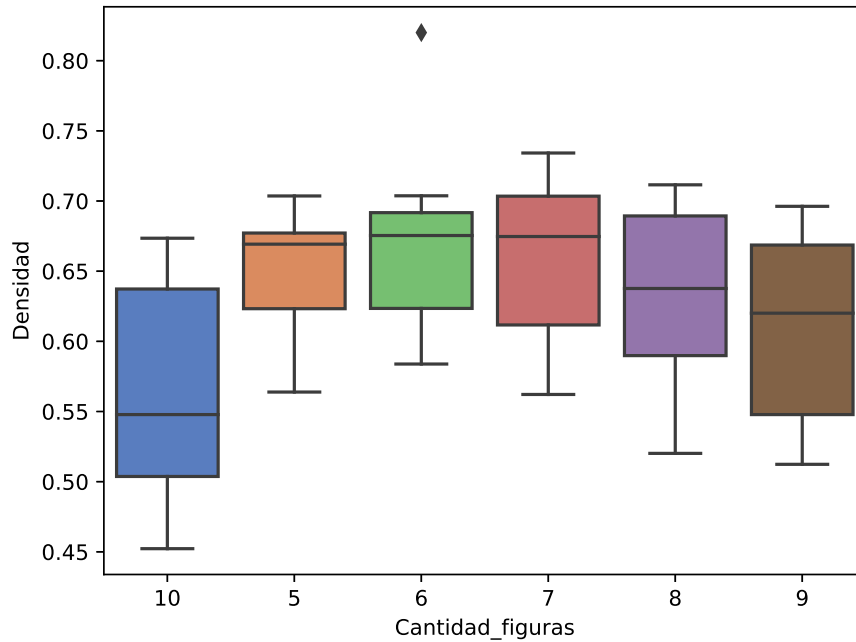


FIGURA 4.30: Diagrama de caja y bigotes que relaciona la cantidad de figuras y el % de ocupación del contenedor.

Del análisis anterior podemos concluir que para contenedores tipo circular el tipo de figuras influye en el porcentaje de ocupación del contenedor. Además podemos afirmar que para este contenedor la cantidad de elementos no es determinante en el porcentaje de ocupación de contenedor.

4.3.3.3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO RESPECTO AL TIPO DE CONTENEDOR

Como se ha aplicado en los casos anteriores se realiza una prueba de Shapiro–Wilk para corroborar que la variable dependiente (% de ocupación) sigue una distribución normal. Los resultados obtenidos con un $\mathbf{W} = 0.9528$ y $\mathbf{pav} = 0.0038$, nos muestra que dicha variable no sigue una distribución normal con un intervalo de confianza del **95 %**. Lo antes expuestos se puede observar en la tabla 4.33 de la página 73.

TABLA 4.33: Prueba Shapiro–Wilk a la variable % de ocupación

	W	pval	normal
Densidad	0.95276719	0.00376588	Falso

Dado que los valores de la variable dependiente no sigue una distribución normal, se procede a aplicar la prueba H de Kruskal-Wallis que es una versión no paramétrica de ANOVA. En este caso se plantea la interrogante: existe diferencias en el % de ocupación según el tipo de contenedor?.

Según los datos obtenidos en la prueba que se muestran en la tabla 4.34 de la página 73. estos resultados con un valor del estadístico de prueba $\mathbf{H} = 13.9167$ y $\mathbf{pval} = 0.0002$, se rechaza la hipótesis H_0 aceptando la H_1 , la cual indica que existen diferencias estadísticamente diferentes entre los tipos de contenedores. En esta ocasión con los resultados de la prueba H de Kruskal-Wallis son suficientes para asegurar lo anterior dado que solo son dos los tipos de contenedores analizados. Gráficamente se puede observar esta conclusión en la figura 4.31 de la página 74.

TABLA 4.34: Prueba H de Kruskal-Wallis que relaciona el % de ocupación con el tipo de contenedor

	Factor	ddof1	H	pval
Kruskal	Contenedor	1.0000	13.9167	0.0002

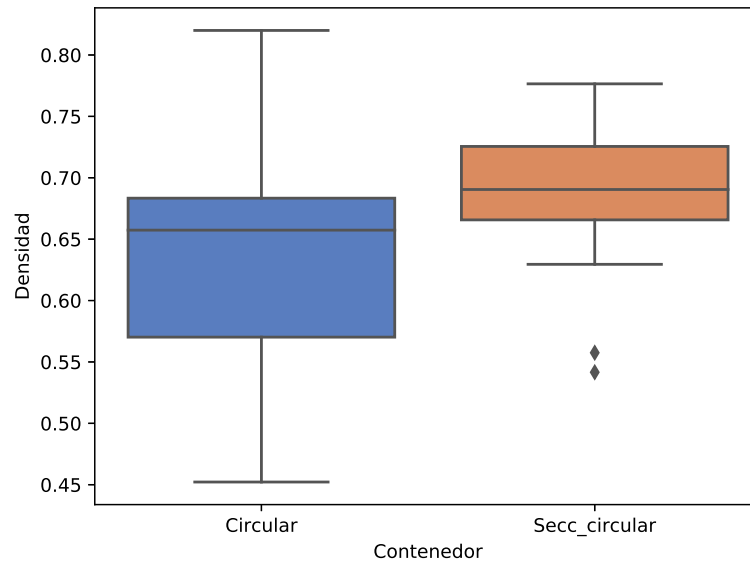


FIGURA 4.31: Diagrama de caja y bigotes que relaciona los tipos de contenedores y el % de ocupación del contenedor.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Contenido del capítulo

5.1. Conclusiones	75
5.2. Limitaciones	77
5.3. Trabajos futuros	77

Este capítulo presenta las conclusiones de este trabajo, en el mismo se resumen los logros y debilidades. Los cuales fueron resultado del trabajo en las diferentes fases de la investigación y el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación realizada. Además incluye los trabajos futuros que buscan seguir profundizando y realizando aportes a la resolución de problemas de empaquetamiento.

5.1 CONCLUSIONES

- El modelo propuesto es integrador ya que permite resolver todos los problemas que se derivan de la clase ODP, cuando se tiene como elementos a empaquetar polígonos convexos en contenedores convexos. El mismo es fácilmente escalable a n dimensiones.
- Como resultado de la primera fase de la experimentación se definió el valor del

parámetro $\varepsilon = 10^{-4}$. Dado que con dicho valor de ε se obtuvieron los mejores valores objetivos para todas las instancias.

- En la segunda fase de la experimentación se comprobó que el tipo de figura no influye en la densidad o porcentaje de ocupación de las figuras en el contenedor tipo secc-circular con un intervalo de confianza del 95 %, para la variable de respuesta **% de ocupación** ($pval > 0.05$). En cambio en el contenedor tipo circular el tipo de figura si influye en el porcentaje de ocupación con el mismo intervalo de confianza, para la variable dependiente ($pval < 0.05$) existiendo las diferencias entre los pares (cuadrados-cuadriláteros mixtos y cuadrados-triángulos) .
- En la segunda fase de la experimentación se constató que la cantidad de figuras no influye en la densidad o porcentaje de ocupación de las figuras en el contenedor secc-circular, con un intervalo de confianza del 95 %, para la variable de respuesta **% de ocupación** ($pval > 0.05$). Por el contrario en el contenedor tipo circular la cantidad de figuras no influye en la densidad de empaquetado, con el mismo intervalo de confianza, para la variable dependiente ($pval < 0.05$) existiendo las diferencias estadísticas significativas entre los pares (10-8,10-7,9-8 y 9-7).
- Como resultado de la segunda fase de experimentación se concluyo que el tipo de contenedor influye en la densidad del empaque, con un intervalo de confianza del 95 %, para la variable de respuesta **% de ocupación** ($pval > 0.05$).
- Aunque el modelo propuesto no arroja buenas soluciones en tiempos razonable para instancias medianas y grandes (más de 20 elementos triangulares y más de 10 en los casos restantes), para las instancias analizadas se obtuvieron buenos resultados en tiempos razonables.

5.2 LIMITACIONES

- Al definir las figuras por sus vértices, es bastante engorroso el trabajo con elementos formados por curvas suavizadas como es el caso de los círculos y elipses.
- En el trabajo no se abordó ni se utilizó métodos alternativos de solución para el problema a tratar, como son heurísticas, metaheurísticas. El uso de tales métodos podrían haber aportado un mejor punto de inicio al solucionador.
- El modelo planteado no devuelve buenas soluciones en tiempos razonables para instancias de más de 20 elementos para el caso de las figuras triangulares y más de 10 elementos para el resto de los polígonos analizados.
- En la experimentación no se realizó una comparación con trabajos de la literatura existente, dado que los objetivos del trabajo se enfocan en la validación del enfoque propuesto.
- Para lograr una mayor generalidad del modelo se tiene que considerar además elementos irregulares no convexos.

5.3 TRABAJOS FUTUROS

Enfocados en dar solución a las limitaciones detectadas en la investigación. Se plantean nuevas líneas de investigación a seguir en trabajos futuros.

- Desarrollar o implementar algún método alternativo de solución (Heurística o Metaheurística), para abordar este problema. De este modo contaremos con una solución inicial al problema. Esta solución puede servir como punto de inicio de solucionador utilizado.

-
- modificar instancias de la literatura y realizar una comparación del modelo propuesto con los ya existentes.
 - Realizar una descomposición del modelo para tratar de escalar las soluciones a tamaños de instancias de la vida real(300 elementos). Además de escalar en cantidad de lados y tipos de elementos a empacar.
 - Realizar modificaciones al modelo para permitir el empaquetado de figuras no convexas formadas por elementos convexos.

APÉNDICE A

INSTANCIAS Y RESULTADOS

A.1 DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LAS INSTANCIAS

A.1.1 TRIÁNGULOS

Las instancias con figuras triangulares se crearon con triángulos equiláteros como se muestra en la figura A.1 de la página 79, sus características están detalladas en la tabla A.1 de la página 80. Dicha tabla muestra tanto las características de los elementos a empaquetar como las del contenedor óptimo encontrado. Las coordenadas solución de las figuras se pueden encontrar en [Optimal packaging/Triangles](#).

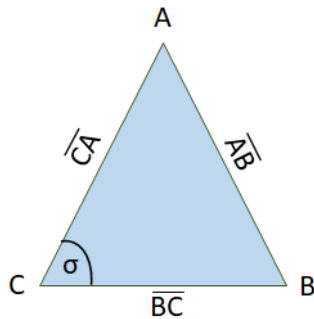


FIGURA A.1: Triángulo equilátero de muestra

TABLA A.1: Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras triangulares

Inst.	Elementos										Contenedor				Resultado	
	Dim. lados figura			Ángulos entre los lados (σ)							Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones		% de Ocup
	AB	BC	CA	AB-BC	BC-CA	CA-AB	Cant. Figuras									
1	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	5	Circular	1.0033	131	140	68.4580
2	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	6	Circular	1.0042	187	201	82.0025
3	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	7	Circular	1.1567	253	273	72.1132
4	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	8	Circular	1.2683	329	356	68.5494
5	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	9	Circular	1.3719	415	450	65.9086
6	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	10	Circular	1.4306	511	555	67.3483
7	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	5	Secc-circular	1.9937	131	140	69.3510
8	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	6	Secc-circular	2.1607	187	201	70.8561
9	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	7	Secc-circular	2.2834	253	273	74.0180
10	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	8	Secc-circular	2.5593	329	356	67.3382
11	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	9	Secc-circular	2.7844	415	450	64.0015
12	Regular	1	1	1	60	60	60	60	60	60	10	Secc-circular	2.8688	551	555	66.9900

A.1.2 RECTÁNGULOS

Las instancias con figuras Rectangulares se utilizaron rectángulos como el que se muestra en la figura A.2 de la página 81, sus características están detalladas en la tabla A.1 de la página 80. Dicha tabla muestra tanto las características de los elementos a empaquetar como las del contenedor óptimo encontrado. Las coordenadas solución de las figuras se pueden encontrar en [Optimal packaging/Rectangles](#).

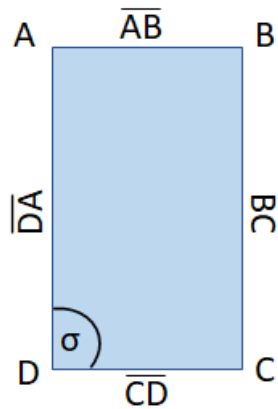


FIGURA A.2: Rectángulo de muestra

TABLA A.2: Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras Rectangulares

Inst.	Elementos										Contenedor				Modelo		Resultado
	Dim. lados figura			Ángulos entre los lados (σ)							Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% de Ocup		
	AB	BC	CD	DA	AB-BC	BC-CD	CD-CA	CA-AB	Cant. Figuras								
1	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	5	Circular	2.1800	161	180	66.9788
2	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	6	Circular	2.3781	229	255	67.5410
3	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	7	Circular	2.5700	309	343	67.4702
4	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	8	Circular	2.8261	401	444	63.7669
5	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	9	Circular	3.1500	505	558	57.7433
6	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	10	Circular	3.6028	621	685	49.0456
7	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	5	Secc-circular	4.1234	161	180	74.8858
8	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	6	Secc-circular	4.6571	271	297	70.4466
9	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	7	Secc-circular	4.85837	309	343	75.5191
10	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	8	Secc-circular	5.1379	473	516	77.1718
11	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	9	Secc-circular	5.7457	505	558	69.4219
12	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	10	Secc-circular	6.09458	621	685	68.5571

A.1.3 CUADRADOS

Las instancias con figuras cuadradas, son como el que se muestra en la figura A.3 de la página 83, sus características están detalladas en la tabla A.1 de la página 80. Dicha tabla muestra tanto las características de los elementos a empaquetar como las del contenedor óptimo encontrado. Las coordenadas solución de las figuras se pueden encontrar en [Optimal packaging/Squares](#).

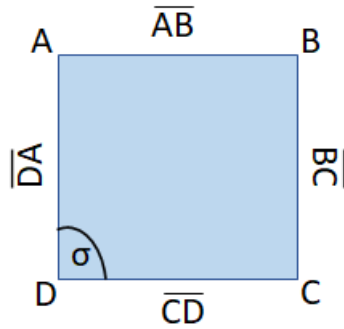


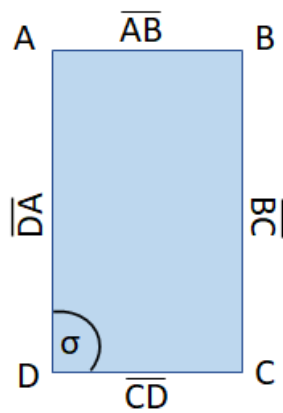
FIGURA A.3: Cuadrado de muestra

TABLA A.3: Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras Cuadradas

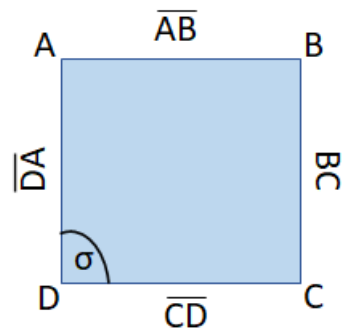
Inst.	Elementos										Contenedor				Modelo		Resultado
	Dim. lados figura			Ángulos entre los lados (σ)							Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% de Ocup		
	AB	BC	CD	DA	AB-BC	BC-CD	CD-CA	CA-AB	Cant. Figuras								
1	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	5	Circular	2.1800	161	180	66.9788
2	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	6	Circular	2.3781	229	255	67.5410
3	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	7	Circular	2.5700	309	343	67.4702
4	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	8	Circular	2.8261	401	444	63.7669
5	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	9	Circular	3.1500	505	558	57.7433
6	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	10	Circular	3.6028	621	685	49.0456
7	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	5	Secc-circular	1.6484	161	180	58.5762
8	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	6	Secc-circular	1.8087	271	297	58.3831
9	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	7	Secc-circular	1.8085	309	343	43.6597
10	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	8	Secc-circular	2.5126	473	516	40.3367
11	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	9	Secc-circular	2.9646	505	558	32.5957
12	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	10	Secc-circular	3.1530	731	795	32.0186

A.1.4 CUADRILÁTEROS MIXTOS

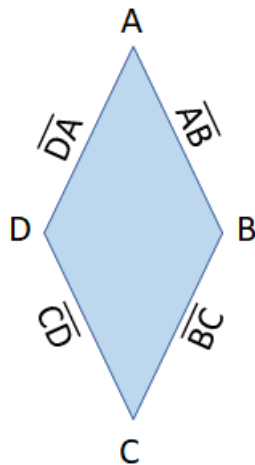
Las instancias con cuadriláteros, están formadas por diferentes cuadriláteros como se observa en la figura A.4 de la página 85, sus características están detalladas en la tabla A.4 de la página 86. Dicha tabla muestra tanto las características de los elementos a empaquetar como las del contenedor óptimo encontrado. Las coordenadas solución de las figuras se pueden encontrar en [Optimal packaging/Mixed quadrilaterals](#).



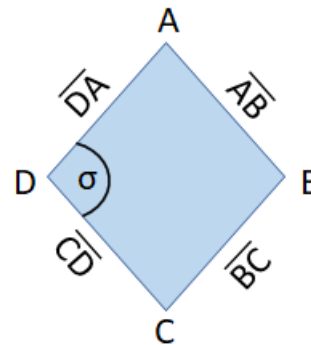
(a) Rectángulo



(b) Cuadrado



(c) Rombo1



(d) Rombo2

FIGURA A.4: Muestra de los cuadriláteros.

TABLA A.4: Descripción de las instancias y resultados obtenidos cuadriláteros mixtos en contenedor circular

		Elementos												Contenedor			Modelo	Resultado				
		Ángulos entre los lados (σ)																				
		Dim. lados figura																				
Inst.	Figura	Tipo	AB	BC	CD	DA	AB-BC	BC-CD	CD-CA	CA-AB	AB-BC	BC-CD	CD-CA	CA-AB	Cant. Por tipo	Cant. Figuras	Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% de Ocup	
1	Rectángulos	Regular	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	90	90	1							
	Rombos1	Irregular	1	1	1	1	144	36	144	36	144	36	144	36	1	5	Circular	1.9213	191	210	56.3869	
	Rombos2	Irregular	1	1	1	1	108	72	108	72	108	72	108	72	1							
2	Rectángulos	Regular	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	90	90	1							
	Rombos1	Irregular	1	1	1	1	144	36	144	36	144	36	144	36	2	5	Circular	1.8898	271	297	63.5215	
	Rombos2	Irregular	1	1	1	1	108	72	108	72	108	72	108	72	1							
3	Rectángulos	Regular	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Rombos1	Irregular	1	1	1	1	144	36	144	36	144	36	144	36	2	5	Circular	1.8770	365	399	73.4213	
	Rombos2	Irregular	1	1	1	1	108	72	108	72	108	72	108	72	1							
4	Rectángulos	Regular	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	90	90	3							
	Rombos1	Irregular	1	1	1	1	144	36	144	36	144	36	144	36	2	5	Circular	2.0471	473	516	69.3237	
	Rombos2	Irregular	1	1	1	1	108	72	108	72	108	72	108	72	1							
5	Rectángulos	Regular	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	90	90	3							
	Rombos1	Irregular	1	1	1	1	144	36	144	36	144	36	144	36	2	5	Circular	2.1465	595	648	69.6213	
	Rombos2	Irregular	1	1	1	1	108	72	108	72	108	72	108	72	2							
6	Rectángulos	Regular	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	Regular	1	1	1	1	90	90	90	90	90	90	90	90	3							
	Rombos1	Irregular	1	1	1	1	144	36	144	36	144	36	144	36	2	5	Circular	2.3992	731	795	66.7918	
	Rombos2	Irregular	1	1	1	1	108	72	108	72	108	72	108	72	2							

TABLA A.5: Descripción de las instancias y resultados obtenidos cuadriláteros mixtos en contenedor secc-circular

		Elementos										Contenedor	Modelo	Resultado				
Inst.	Figura	Dim. lados figura										Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% de Ocup		
		AB	BC	CD	DA	AB-BC	BC-CD	CD-CA	CA-AB	Cant. Por tipo	Cant. Figuras							
		Ángulos entre los lados(σ)																
1	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	90	2	5	Secc-circular	3.2744	191	210	77.6503
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	1							
	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	1							
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	72	1							
	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	1							
2	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2	5	Secc-circular	3.7499	271	297	64.5293	
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	1								
	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	2							
	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2							
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	72	1							
3	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	2	5	Secc-circular	3.7248	365	399	74.5813	
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	2								
	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2							
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	72	1							
	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	2							
4	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2	5	Secc-circular	3.9608	473	516	74.0734	
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	1								
	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	2							
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	3							
	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2							
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	72	1							
5	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	2	5	Secc-circular	4.7734	595	648	56.3150	
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	3							
	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2							
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	72	2							
	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	3							
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	3							
6	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2	5	Secc-circular	5.5426	731	795	50.0570	
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	2								
	Rectángulos	1	2	1	2	90	90	90	90	90	3							
	Cuadrados	1	1	1	1	90	90	90	90	90	3							
	Rombos1	1	1	1	1	144	36	144	36	36	2							
	Rombos2	1	1	1	1	108	72	108	72	72	2							

A.1.5 PENTÁGONOS

En la figura A.5 de la página 88 se muestra la nomenclatura de los lados y ángulos de los pentágonos descritos en la tabla A.1 de la página 80. Dicha tabla muestra tanto las características de los elementos a empaquetar como las del contenedor óptimo encontrado. Las coordenadas solución de las figuras se pueden encontrar en [Optimal packaging/Pentagons](#).

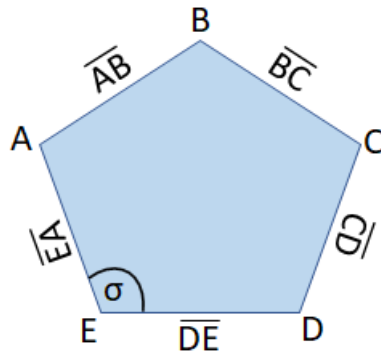


FIGURA A.5: Pentágono de muestra

TABLA A.6: Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras tipo pentágonos

Inst.	Tipo	Elementos										Contenedor				Modelo		Resultado				
		Dim. lados figura										Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones	% de Ocup						
		AB	BC	CD	DE	EA	AB-BC	BC-CD	CD-DE	DE-EA	EA-AB						Cant. Figuras					
Ángulos entre los lados (σ)																						
1	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	5	Circular	2.0354	191	215	66.0768
2	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	6	Circular	2.31735	271	303	61.1711	
3	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	7	Circular	2.6981	421	462	52.6454	
4	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	8	Circular	3.0125	545	596	48.2630	
5	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	9	Circular	3.2537	685	747	46.5443	
6	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	10	Circular	3.8476	841	915	36.9827	
7	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	5	Secc-circular	4.0405	191	215	67.0712	
8	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	6	Secc-circular	4.4079	271	303	67.6274	
9	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	7	Secc-circular	4.7022	421	462	69.3318	
10	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	8	Secc-circular	4.9109	473	524	72.6457	
11	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	9	Secc-circular	6.0324	685	747	54.1626	
12	Regular	1	1	1	1	1	1	1	1	108	108	108	108	108	108	10	Secc-circular	6.2677	841	915	55.7471	
13	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	5	Circular	2.40124	221	245	70.3599	
14	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	6	Circular	2.6302	313	345	70.3720	
15	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	7	Circular	2.87786	421	462	68.5780	
16	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	8	Circular	3.02036	545	596	71.1539	
17	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	9	Circular	3.28145	685	747	67.8168	
18	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	10	Circular	3.63709	841	915	60.6673	
19	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	5	Secc-circular	4.0405	191	215	67.0712	
20	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	6	Secc-circular	4.4079	271	303	67.6274	
21	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	7	Secc-circular	4.7022	421	462	69.3318	
22	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	8	Secc-circular	4.9109	473	524	72.6457	
23	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	9	Circular	6.0324	685	747	54.1626	
24	Irregular	2	1	1.9318	1	1	1	1	1	60	135	105	90	150	150	10	Circular	6.2677	841	915	55.7471	

A.1.6 HEXÁGONOS

En la figura A.6 de la página 90 se muestra la nomenclatura de los lados y ángulos de los Hexágonos descritos en la tabla A.1 de la página 80. Dicha tabla muestra tanto las características de los elementos a empaquetar como las del contenedor óptimo encontrado. Las coordenadas solución de las figuras se pueden encontrar en [Optimal packaging/Hexagons](#).

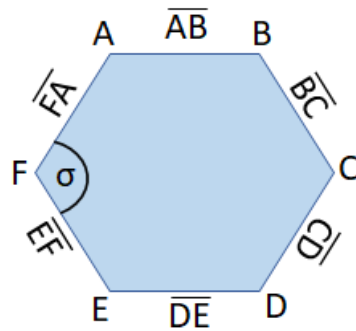


FIGURA A.6: Pentágono de muestra

TABLA A.7: Descripción de las instancias y resultados obtenidos con figuras hexagonales

Inst.	Tipo	Elementos												Contenedor				Modelo	Resultado	
		Dim. lados figura						Ángulos entre los lados						Tipo	Dim. (radio)	Variables	Restricciones			% de Ocup
		AB	BC	CD	DE	EF	FA	AB-BC	BC-CD	CD-DE	DE-EF	EF-FA	FA-AB							
1	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	5	Circular	2.6486	251	280	66.9253
2	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	6	Circular	2.8790	355	393	67.9692
3	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	7	Circular	3.1664	477	525	65.5592
4	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	8	Circular	3.4642	617	676	62.5954
5	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	9	Circular	3.6917	775	846	62.0067
6	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	10	Circular	4.1401	951	1035	54.7810
7	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	5	Secc-circular	5.2226	251	280	68.8514
8	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	6	Secc-circular	5.56975	355	393	72.6434
9	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	7	Secc-circular	6.25374	477	525	67.2256
10	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	8	Secc-circular	6.44886	617	676	72.2504
11	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	9	Secc-circular	7.32532	775	846	62.9949
12	Regular	0.25	1.5	1.25	1	0.75	2	120	120	120	120	120	120	120	10	Secc-circular	7.4584	951	1035	67.5188

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Luiz J.P. Araújo, Ender Özcan, Jason A.D. Atkin, and Martin Baumers. Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset. *International Journal of Production Research*, 57(18):5920–5934, 2019.
- [2] E.G. Birgin and F.N.C. Sobral. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers & Operations Research*, 35(7):2357 – 2375, 2008. Part Special Issue: Includes selected papers presented at the ECCO'04 European Conference on combinatorial Optimization.
- [3] Andreas Bortfeldt and Gerhard Wascher. Constraints in container loading a state of the art review. *European Journal of Operational Research*, 229(1):1 – 20, 2013.
- [4] C.S. Chen, S.M. Lee, and Q.S. Shen. An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 80(1):68 – 76, 1995.
- [5] N. Chernov, Yu. Stoyan, and T. Romanova. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry*, 43(5):535 – 553, 2010.
- [6] Luiz H. Cherri, Leandro R. Mundim, Marina Andretta, Franklina M.B. Toledo, José F. Oliveira, and Maria Antónia Carravilla. Robust mixed-integer linear

- programming models for the irregular strip packing problem. *European Journal of Operational Research*, 253(3):570 – 583, 2016.
- [7] Maxence Delorme, Manuel Iori, and Silvano Martello. Logic based benders' decomposition for orthogonal stock cutting problems. *Computers & Operations Research*, 78:290 – 298, 2017.
- [8] Robert J. Fowler, Michael S. Paterson, and Steven L. Tanimoto. Optimal packing and covering in the plane are np-complete. *Information Processing Letters*, 12(3):133 – 137, 1981.
- [9] Yu G. Stoyan and G Yaskov. Packing identical spheres into a cylinder. *International Transactions in Operational Research*, 17:51 – 70, 12 2009.
- [10] Jieqing Gan and Aibing Yu. Dem study on the packing density and randomness for packing of ellipsoids. *Powder Technology*, 361:424 – 434, 2020.
- [11] A. Miguel Gomes and José F. Oliveira. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171(3):811 – 829, 2006. Feature Cluster: Heuristic and Stochastic Methods in Optimization Feature Cluster: New Opportunities for Operations Research.
- [12] A. Grosso, A. R. M. J. U. Jamali, M. Locatelli, and F. Schoen. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container. *Journal of Global Optimization*, 47(1):63–81, May 2010.
- [13] Kun He and Wenqi Huang. A caving degree based flake arrangement approach for the container loading problem. *Computers & Industrial Engineering*, 59(2):344 – 351, 2010.
- [14] Mhand Hifi and Rym M'Hallah. A literature review on circle and sphere packing problems: Models and methodologies. *Adv. Operations Research*, 2009:150624:1–150624:22, 2009.

-
- [15] Mhand Hifi and Labib Yousef. A local search-based method for sphere packing problems. *European Journal of Operational Research*, 274(2):482 – 500, 2019.
- [16] Xiaoyin Hu, Jianshu Li, and Jinchuan Cui. Greedy adaptive search: A new approach for large-scale irregular packing problems in the fabric industry. *IEEE Access*, 8:91476 – 91487, 05 2020.
- [17] W Q Huang, Y Li, H Akeb, and C M Li. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container. *Journal of the Operational Research Society*, 56(5):539–548, 2005.
- [18] Wenqi Huang and Tao Ye. Global optimization method for finding dense packings of equal circles in a circle. *European Journal of Operational Research*, 210(3):474 – 481, 2011.
- [19] Timo Kubach, Andreas Bortfeldt, Thomas Tilli, and Hermann Gehring. Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 28(06):739–753, 2011.
- [20] Aline A.S. Leao, Franklina M.B. Toledo, José Fernando Oliveira, Maria Antónia Carravilla, and Ramón Alvarez-Valdés. Irregular packing problems: A review of mathematical models. *European Journal of Operational Research*, 282(3):803 – 822, 2020.
- [21] Yanheng Li and Wei Ji. Stability and convergence analysis of a dynamics-based collective method for random sphere packing. *Journal of Computational Physics*, 250:373 – 387, 2013.
- [22] I. Litvinchev and E.L. Ozuna. Approximate packing circles in a rectangular container: Valid inequalities and nesting. *Journal of Applied Research and Technology*, 12(4):716 – 723, 2014.
- [23] Igor Litvinchev, Luis Infante, and Lucero Ozuna. *Approximate Packing: Integer Programming Models, Valid Inequalities and Nesting*, pages 187–205. Springer International Publishing, Cham, 2015.

-
- [24] Igor Litvinchev, Tatiana Romanova, Rogelio Corrales-Diaz, Aned Esquerra-Arguelles, and Alberto Martínez-Noa. Lagrangian approach to modeling placement conditions in optimized packing problems. *Mobile Networks and Applications*, 05 2020.
- [25] Jiamin Liu, Yong Yue, Zongran Dong, Carsten Maple, and Malcolm Keech. A novel hybrid tabu search approach to container loading. *Computers & Operations Research*, 38(4):797 – 807, 2011.
- [26] Y. Ma, Z. Chen, W. Hu, and W. Wang. Packing irregular objects in 3d space via hybrid optimization. *Computer Graphics Forum*, 37:49–59, 08 2018.
- [27] José Daniel Mosquera Artamonov. Empaquetamiento de objetos regulares en un contenedor rectangular. Master’s thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2016.
- [28] José Daniel Mosquera Artamonov. *Empaquetamiento anidado de objetos circulares*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2019.
- [29] Yosep Oh, Chi Zhou, and Sara Behdad. Part decomposition and assembly-based (re) design for additive manufacturing: A review. *Additive Manufacturing*, 22:230 – 242, 2018.
- [30] Alexander Pankratov, Tatiana Romanova, Igor Litvinchev, and Jose Marmolejo. An optimized covering spheroids by spheres. *Applied Sciences*, 10:1846, 03 2020.
- [31] Mara García Rodríguez. *Un enfoque multidisciplinar de la optimización*. Universidad de Burgos, 2018.
- [32] T. Romanova, Alexander Pankratov, Igor Litvinchev, Plankovskyy Sergiy, Yevgen Tsegelnyk, and Olga Shypul. Sparsest packing of two-dimensional objects. *International Journal of Production Research*, 0(0):1–16, 05 2020.
- [33] Tatiana Romanova, Yuri Stoyan, Alexandr Pankratov, Igor Litvinchev, Konstantin Avramov, M. Chernobryvko, Ihor Yanchevskyy, Irina Mozgova, and Julia

- Bennell. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing. *International Journal of Production Research*, 0(0):1–16, 12 2019.
- [34] E. Specht. High density packings of equal circles in rectangles with variable aspect ratio. *Computers & Operations Research*, 40(1):58 – 69, 2013.
- [35] Cong-Tan-Trinh Truong, Lionel Amodeo, and Farouk Yalaoui. A mathematical model for three-dimensional open dimension packing problem with product stability constraints. In Bernabé Dorronsoro, Patricia Ruiz, Juan Carlos de la Torre, Daniel Urda, and El-Ghazali Talbi, editors, *Optimization and Learning*, pages 241–254, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [36] Akang Wang, Christopher Hanselman, and Chrysanthos Gounaris. A customized branch-and-bound approach for irregular shape nesting. *Journal of Global Optimization*, 71, 03 2018.
- [37] Jie Wang. Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3(4):453–463, Dec 1999.
- [38] Gerhard Wascher, Heike Haubner, and Holger Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109 – 1130, 2007.
- [39] Yanxin Xu, Gen Ke Yang, Jie Bai, and Changchun Pan. A review of the application of swarm intelligence algorithms to 2d cutting and packing problem. In Ying Tan, Yuhui Shi, Yi Chai, and Guoyin Wang, editors, *Advances in Swarm Intelligence*, pages 64–70, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [40] Bo Zhao, Xizhong An, Yang Wang, Haiyang Zhao, Lingling Shen, Xudong Sun, and Ruiping Zou. Packing of different shaped tetrahedral particles: Dem simulation and experimental study. *Powder Technology*, 360:21 – 32, 2020.
- [41] Shengchao Zhou, Xueping Li, Kaike Zhang, and Ni Du. Two-dimensional knapsack-block packing problem. *Applied Mathematical Modelling*, 73, 04 2019.