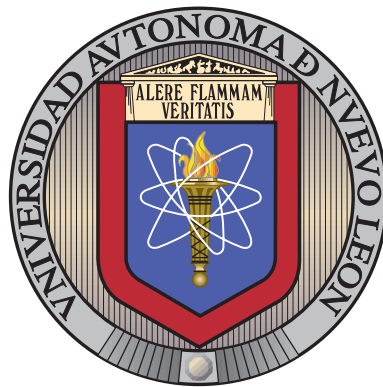


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



UN ENFOQUE LAGRANGIANO PARA  
MODELOS DE OPTIMIZACION EN  
PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO.

POR

ROGELIO JESÚS CORRALES DÍAZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

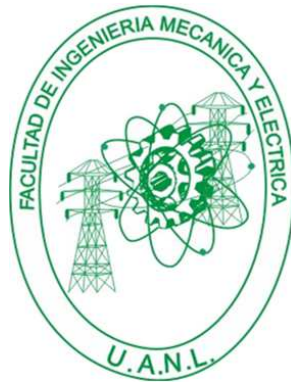
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



UN ENFOQUE LAGRANGIANO PARA  
MODELOS DE OPTIMIZACIÓN EN  
PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO.

POR

ROGELIO JESÚS CORRALES DÍAZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2020

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «UN ENFOQUE LAGRANGIANO PARA MODELOS DE OPTIMIZACION EN PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO.», realizada por el alumno Rogelio Jesús Corrales Díaz, con número de matrícula 1985269, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

---

Dr. Igor Litvinchev

Asesor

---

Dr. Fernando López Irarragorri

Revisor

---

Dr. Jose Daniel Mosquera Artamonov

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirección de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2020

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Problemas de corte y empaquetamiento en dos dimensiones . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Motivación . . . . .	2
1.4. Relevancia . . . . .	3
1.5. Hipótesis . . . . .	3
1.6. Alcance . . . . .	3
<b>2. Un recorrido por el estado del arte.</b>	<b>4</b>
2.1. Actualidad y clasificación . . . . .	5
2.2. Trabajos relacionados . . . . .	6
2.3. Aplicaciones . . . . .	11
<b>3. Modelo matemático</b>	<b>13</b>
3.1. Función Objetivo . . . . .	13
3.2. Condiciones geométricas. . . . .	14
3.2.1. Condiciones de no intersección. . . . .	16

---

3.2.2. Caso lineal . . . . .	18
3.3. Condiciones de contención . . . . .	19
<b>4. Validación y experimentación</b>	<b>27</b>
4.1. AMPL . . . . .	27
4.1.1. Archivo .mod . . . . .	28
4.2. Instancias homogéneas . . . . .	31
4.3. Instancias heterogéneas . . . . .	33
<b>5. conclusiones</b>	<b>37</b>
5.1. Anexos . . . . .	38

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETAMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Los problemas de empaquetamiento son aquellos donde se pretende encontrar la disposición de un conjunto de objetos dentro de un contenedor dado que sea optimizado un resultado. Este resultado se puede definir como minimizar el área desaprovechada, maximizar el área ocupada o un grupo de funciones que luego serán explicadas a más profundidad.

Este tipo de problema está muy relacionado con la industria: en el área de corte y manufacturas. El estudio de esta área de la optimización es ampliamente tratada en la literatura [1],[2],[3], [4]. Los problemas de empaquetamiento pertenecen a la clase de complejidad NP-HARD. Por lo general los modelos matemáticos correspondientes a problemas de empaquetamiento no son lineales [5].

Las formulaciones actuales para estos modelos distan de ser representativas de los problemas de la realidad. Esto es consecuencia de la complejidad que representa resolver una modelo con estas características. Por lo cual es necesario investigar y desarrollar nuevas estrategias de optimización que permitan obtener mejores resultados más cercanos a las necesidades[6].

## 1.2 OBJETIVOS

- Proponer un algoritmo para el problema de empaquetamiento de politopos en contenedores convexos
  1. Formular un modelo matemático descomponiendo objetos según sus lados.
  2. Desarrollar condiciones de no intersección.
  3. Formular condiciones de contenimiento.
  4. Identificar debilidades de la formulación.

## 1.3 MOTIVACIÓN

Los problemas de optimización combinatoria representan un área vital para el desarrollo de la sociedad. Con el actual desarrollo de la ciencia deviene una mayor demanda de recursos. El papel de la investigación de operaciones es elevar los indicadores de eficiencia de los procesos. De esta forma con la optimización de recursos se reducen los impactos ambientales, se reducen costos de producción y se favorece la economía de mercado.

Existen en la literatura un gran número de investigaciones en esta rama y la comunidad científica se encuentra repartida en el estudio de diferentes problemas. En el caso del estudio de problemas de empaquetamiento la comunidad no es muy extensa. Por lo cual surge la necesidad de incentivar la investigación en esta área.

Los retos a los que se enfrentan los investigadores de esta área de la optimización no son pocos. Nos encontramos ante modelos de optimización de gran escala y bilineales, además para representar situaciones reales es necesario empaquetar en tres dimensiones lo cual hace más complicado aún el problema. Las herramientas disponibles para resolver estos modelos ofrecen soluciones para instancias cuyo tamaño no se ajusta a las necesidades de la industria.

A su vez estos retos representan un área de oportunidad para los investigadores del campo de la optimización. Es necesario desarrollar algoritmos capaces de resolver los problemas asociados a la industria. Para lo cual este proyecto pretende emplear una serie de

herramientas bien conocidas en el mundo de la investigación de operaciones, pero en algunos casos poco estudiadas en los problemas de empaquetamiento.

## 1.4 RELEVANCIA

Con el desarrollo de nuevas tecnologías de manufactura, como la impresión *3D*, surge la necesidad de apoyar el proceso de diseño de piezas con propiedades específicas. Es así como toman un nuevo auge los problemas de empaquetamiento ofreciendo soporte a la manufactura aditiva.

## 1.5 HIPÓTESIS

Con la formulación propuesta se pretende encontrar soluciones para el problema de empaquetamiento de polítopos en contenedores convexos.

## 1.6 ALCANCE

Para definir el alcance de este trabajo sería válido señalar que forma parte de un proyecto a largo plazo que busca una aplicación en la industria. Si bien el objetivo del trabajo es plantear y validar el modelo propuesto, se pretende finalmente apoyar con algoritmos los procesos de manufactura aditiva (Impresión en 3D).

Este campo de la manufactura es reciente, cada vez los precios de son menores y los tiempos de producción van disminuyendo. Por lo cual se prevé que en pocos años esta tecnología reemplace a las actuales. Por lo tanto es necesario avanzar de la mano en la parte de desarrollo de algoritmos computacionales.



## CAPÍTULO 2

# UN RECORRIDO POR EL ESTADO DEL ARTE.

---

Es casi obligatorio comenzar este recorrido hablando de Harald Dyckhoff , hasta el momento donde publica [7] los problemas de empaquetamiento no contaban con una tipología definida. Este es el primer esfuerzo por desarrollar un enfoque consistente y sistemático para una tipología integral que englobara a los distintos tipos de problemas de empaquetamiento.

En este artículo se dividen los problemas en dos grandes grupos, con o sin dimensiones espaciales.

Problemas con dimensiones espaciales:

### 1. Corte de materiales.

- Papel.
- Plástico.
- Metal.

### 2. Embalaje de materiales.

- Empaquetamiento o carga de vehículos.
- Embalaje de pallets.
- Carga de contenedores.

Problemas sin dimensiones espaciales:

1. Dimensiones de peso.
  - Problema de la mochila.
  - Carga de vehículos.
2. Dimensiones de tiempo.
  - Balance de líneas.
  - Programación multiprocesador.
3. Problemas financieras.
  - Asignación de presupuesto.
4. Asignación de memoria para almacenamiento de datos.

## 2.1 ACTUALIDAD Y CLASIFICACIÓN

No indagamos mucho en este artículo ya que en 2007 Gerhard Wäscher en su publicación [8] actualiza estas clasificaciones. Wäscher propone nuevos criterios de categorización que definen diferentes problemas en comparación con Dyckhoff.

Otro factor tenido en cuenta por este estudio es la heterogeneidad de los objetos a empaquetar. Por heterogeneidad entendemos cuan diferentes son las características de los objetos. Por ejemplo un conjunto de objetos iguales representan una instancia homogénea para un problema. Por lo general este es uno de los factores que interviene en la complejidad de l problema.

En este caso el primer criterio para clasificar los problemas es atendiendo a su objetivo. Ya sea maximización de salidas o minimización de entradas.

Maximización de salidas:

1. Empaquetamiento de artículos idénticos.

2. Problema de colocación.

3. Problema de la mochila.

Minimización de entradas:

1. Problema de dimensión abierta.

2. Problema de corte de stock.

3. Problema de embalaje del contenedor.

Este trabajo se encuentra enfocado a la segunda clasificación (minimización de entradas). Específicamente a los problemas de dimensión abierta, es por eso que se hará especial énfasis en su formulación y composición.

En este problema se pretende empaquetar un conjunto de objetos dentro de un contenedor con una dimensión fija y otra que es representada en el modelo como una variable.

## 2.2 TRABAJOS RELACIONADOS

En la siguiente sección serán presentados un conjunto de investigaciones que representan lo más novedoso en cuanto a desarrollo de algoritmos de empaquetamiento. Con el objetivo de entender cual es la tendencia de estudio de los trabajos actuales, en cuanto a algunos factores importantes a tener en cuenta.

1. Dimensionalidad de los problemas
  - Problemas de dos dimensiones
  - Problemas de tres dimensiones
2. Naturaleza del problema.
  - Lineal.
  - No lineal
3. Tipo de contenedores.
  - Convexos y lineales
  - Convexos y no lineales
  - No convexos y lineales
  - No convexos y no lineales
4. Naturaleza de los objetos
  - Conjunto de objetos heterogéneos
  - Conjuntos de objetos homogéneos

Por ejemplo [9] plantea un modelo matemático para empaquetar cilindros en contenedores rectangulares y circulares. La formulación se basa en encontrar el máximo de cilindros que pueda ser empaquetados en un contenedor sin intersección entre los cilindros. Es importante resaltar que aunque el modelo planteado no era lineal, las variables del problema eran continuas.

Otro enfoque es el heurístico y meta-heurístico. Debido a la gran complejidad de estos modelos es necesario acudir a técnicas aproximadas como lo hace [10] que presenta un algoritmo genético secuencial y paralelizado con restricción de corte en guillotina.

Una interesante revisión del estado del arte en cuanto a algoritmos metaheurísticos resulta la publicación de E. Hopper B y C. H. Turton [11]. Realiza un estudio de algoritmos genéticos, recocido simulado, búsqueda tabú y redes neuronales. La utilización de redes

neuronales apunta a ser una novedosa herramienta con el desarrollo de métodos como el de aprendizaje reforzado.

Además de los enfoques exacto y aproximado por separado, se pueden utilizar combinados. Este es el caso de Mhand Hifi y Rachid Ouafi [12] que a partir de un modelo matemático plantean un heurístico que arroja buenas soluciones en un tiempo razonable. Se comparan los resultados con el modelo planteado. La formulación exacta soluciona el problema para instancias pequeñas y medianas. Los problemas de empaquetamiento en general se pueden dividir según sus características, a continuación se comentaran distintos trabajos, en su mayoría bien recientes, con el objetivo de establecer el momento en el cual se encuentra el estado del arte. Vale decir que el objetivo propuesto para esta investigación es reportar resultados comparables con los mostrados en artículos relacionados introduciendo formulaciones alternativas.

En [13] podemos encontrar dos enfoques de solución uno exacto y otro aproximado al problema de empaquetamiento de elipsoides en un contenedor cilíndrico. En este trabajo los objetos se pueden rotar y trasladar libremente los modelos no son lineales y se utiliza las técnicas phi-functions [14] para plantear condiciones de no intersección y contenimiento.

Otro ejemplo de aplicación de estos problemas a la manufactura aditiva es [15], donde se propone un algoritmo para empacar elipses de diferentes tamaños en un contenedor poligonal dividido en varias piezas desconectadas. Este problema fue formulado como programación entera mixta. Se propuso un algoritmo que generara soluciones iniciales factibles para definir un punto de partida.

Una estrategia distinta para resolver estos problemas son los métodos de simulación apoyados en las características físicas de los objetos, por lo general este tipo de modelo trabaja con la densidad al empacar. Aquí se introduce el término Powder-Technology. Un ejemplo son los trabajos presentados por [16], [17] y [18].

K A Dowland [19] presenta el que fuera en su momento un nuevo algoritmo donde introduce objetos irregulares con una técnica efectiva para resolver problemas de empaquetamiento. Luego en [20] retoma la investigación con una propuesta que resulta muy interesante. Los autores proponen un enfoque actualizado que les permite agregando estrategias de strip

y aumentando la capacidad de diversificar del algoritmo. Lo cuál permite que los rendimiento del algoritmo aumenten significativamente.

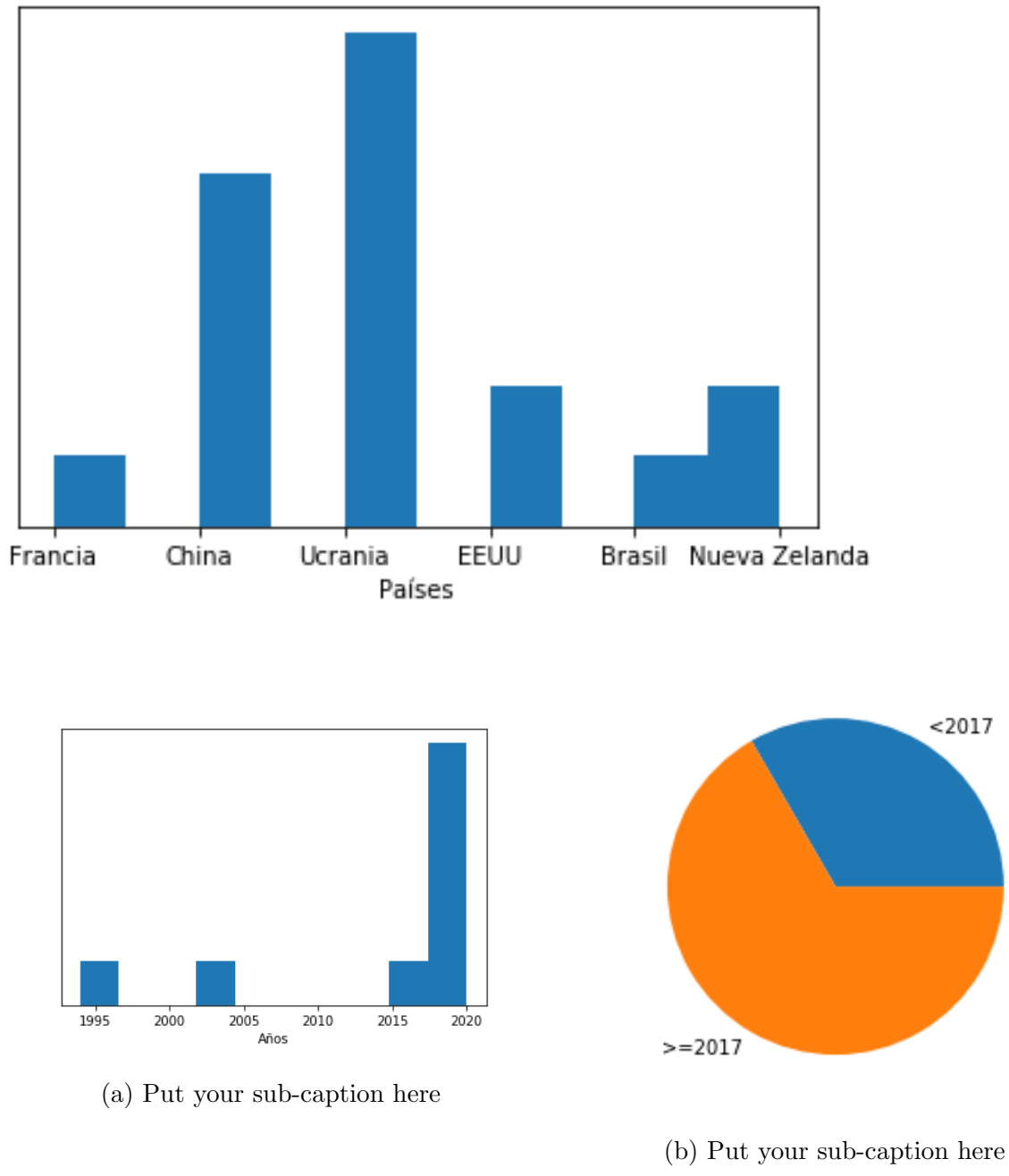
Lo más interesante en el caso de [21] es que trabaja con contenedores que no son convexos. Este enfoque resulta de gran utilidad para lograr una aproximación certera a los problemas presentados en la industria, específicamente en la impresión 3D, ya que este es una de los principales retos que enfrentan los investigadores. Este estudio presenta un algoritmo que trabaja con objetos simétricos en general aunque solo se estudian resultados de círculos empacados por capas.

Para dar solución a problemas de empaquetamiento han sido propuestos varios algoritmos y métodos exactos en [22] se realiza un análisis de varios algoritmos heurísticos, algoritmos genéticos (GA), recocido simulado (SA) y búsqueda local. Luego se combinan entre sí convergiendo a mejores soluciones en menor tiempo de ejecución. Aunque el problema presentado no es una de los mas complejos este sin lugar a dudas representa un ejemplo de cuan útil pueden ser los algoritmos Heurísticos y Meta-heurísticos.

Uno de los trabajos mas recientes que tiene como objetivo oraganizar la terminología existente hasta e momento relacionados con manufactura aditiva y empaquetamiento es [23]. Donde se describen métodos utilizados y se proponen un nuevo grupo de instancias.

Tabla 2.1: Add caption

Autor	Modelo Lineal	Modelo no lineal	Heurísticos	Objetos lineales	Objetos no lineales	Instancia homogénea	Instancia heterogénea	3D
[?]	0	0	X	0	X	X	0	X
[24]	0	0	X	X	X	0	X	X
[25]	0	0	X	0	X	X	0	X
[26]	0	X	X	0	X	X	0	X
[13]	0	X	0	0	X	X	0	X
[27]	0	X	0	X	X	X	0	0
[28]	0	0	X	X	X	0	X	X
[29]	0	0	X	0	X	X	0	X
[30]	0	X	X	0	X	X	0	X
[31]	0	X	0	0	X	X	0	X
[15]	X	0	0	0	X	X	0	X
[32]	0	X	X	0	X	X	0	0
[33]	0	X	0	X	X	X	X	0
[34]	0	X	X	0	X	X	0	0
[2]	0	0	X	X	0	X	0	X
[35]	0	0	X	X	0	X	0	0
[36]	0	X	0	0	X	X	0	0
[37]	0	0	X	0	X	X	0	0



(a) Put your sub-caption here

(b) Put your sub-caption here

Figura 2.1: Put your caption here

### 2.3 APLICACIONES

Jakob Puchinger, Gunther R. Raidl, y Gabriele Koller desarrollan un algoritmo para realizar el corte de piezas de vidrio solicitadas por clientes. El objetivo del problema propuesto



es minimizar el número de láminas a utilizar para realizar los cortes [3]. Se utilizaron técnicas evolutivas que se contrastaron con estrategias greedy y técnicas de ramificación.

Reinaldo Morabito y Marcos Arenales un enfoque clásico para solucionar un problema de corte de piezas de madera en una fábrica de muebles [4]. se logra una compensación entre cortar patrones más simples y patrones que generen menor desecho.

## CAPÍTULO 3

# MODELO MATEMÁTICO

---

A continuación será formalizado el modelo propuesto para el problema empaquetamiento de un conjunto de objetos heterogéneos en contenedores convexos y no convexos. En cada uno de los siguientes tópicos se explicará detalladamente las condiciones y partes que conforman al modelo matemático. Se finalizará con una de metodología para realizar la validación del mismo.

### 3.1 FUNCIÓN OBJETIVO

El problema de empacar objetos en un contenedor puede tener varias funciones objetivos asociadas. Las expresiones objetivos suelen ser funciones de las dimensiones de contenedor o del área utilizada por los objetos.

La naturaleza puede ser tanto minimizar como maximizar, a continuación se muestran ejemplos de ambos casos:

Maximizar:

- Maximizar el área o volumen ocupado.
- Maximizar la distancia entre distintos subgrupos de objetos.
- Maximizar la cantidad de objetos dentro de un contenedor.

Minimizar:

- Minimizar el espacio desocupado.
- Encontrar el número mínimo de contenedores para empaquetar un conjunto de objetos.
- Encontrar el contenedor rectangular de mínima altura que contiene a un conjunto de objetos.

Estos son solo algunos ejemplos, es importante señalar que en los casos donde la función objetivo está relacionada con el área esta no será lineal lo cual complejiza más aún el proceso e solución. Es por esto que resulta el muy importante escoger muy bien la formulación para no agregar no linealidades innecesarias.

## 3.2 CONDICIONES GEOMÉTRICAS.

Las condiciones geométricas son aquellas que definen a un objeto en el espacio. Existen varias formas de definir estas condiciones, en este caso los objetos serán representados como un conjunto de desigualdades que representan sus lados.

Estas figuras se dividen en dos grupos por sus características: regulares e irregulares. Los regulares tienen como característica que cada uno de sus lados y ángulos son iguales. Para los polígonos irregulares basta aclarar que son aquellos que no cumplen con las anteriores características.

Serán utilizadas propiedades de optimización para la formulación de las condiciones de no intersección y contenimiento. Mientras que para representar la movilidad de figuras en el plano se utilizará una transformación, que permitirá la rotación de la cada figura sujeta al ángulo  $\Phi$  y la traslación descrita por la variación  $\Delta T$ .

De forma tal que esta transformación queda representada de la siguiente forma.

Supóngase que  $G$  es un objeto representado por sus  $j$  lados por las curvas  $g_j$  y a su vez  $G \in \mathbb{R}^2$ :

$$G = \{x : g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J\},$$

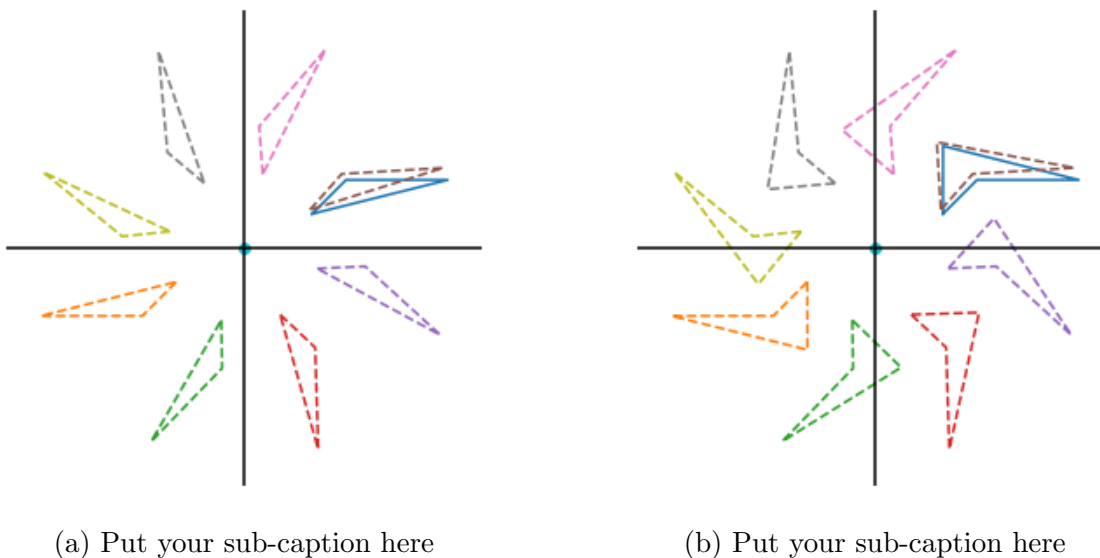


Figura 3.1: Put your caption here

Entonces si la figura en cuestión estuviera representada por un tres lados lineales (triángulo) la correspondiente matriz que la representa estaría dada por:

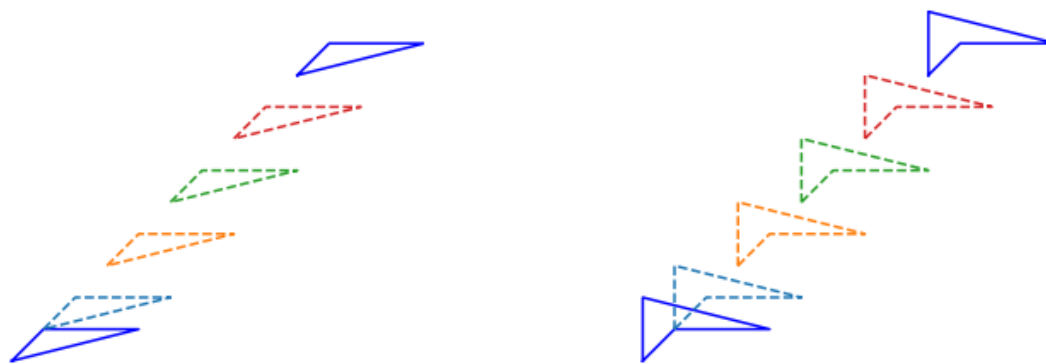
$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Las matrices de rotación y traslación para dos dimensiones están dadas por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\Delta T = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

De esta forma realizando una transformación lineal es posible abarcar todo el espacio



(a) Put your sub-caption here

(b) Put your sub-caption here

Figura 3.2: Put your caption here

de posibles soluciones para cada una de los objetos. Por lo cual resulta interesante el planteamiento del modelo de esta forma y que en el mejor de los casos se garantiza que el óptimo del modelo planteado de esta forma coincidiría con el óptimo teórico del problema.

### 3.2.1 CONDICIONES DE NO INTERSECCIÓN.

Si decimos que  $G$  y  $P$  son conjuntos acotados en  $R^n$  y nos gustaría comprobar si  $G \cap P = \emptyset$ . Tenemos:

$$G = \{x : g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J\},$$

$$P = \{x : p_k(x) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, J\}.$$

Por definición,  $G \cap P = \emptyset$  si para cualquier  $x \in P$  se viola al menos una restricción en  $G$ , es decir.

$$\forall x \in P \text{ tenemos } \max_j g_j(x) \geq 0. \tag{3.4}$$

No es difícil verificar que esto es equivalente a:

$$\delta \equiv \min_{x \in P} \max_j g_j(x) \geq 0. \tag{3.5}$$

Por la definición de maximizar, la última desigualdad puede expresarse como:

$$\delta \equiv \min_{x,z} \{z : z \geq g_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad x \in P\} \geq 0. \tag{3.6}$$

Asumiendo que  $g_j(x), p_k(x)$  son funciones convexas y diferenciables. Entonces el problema optimización es un problema de programación convexo. El correspondiente lagrangiano de la función tiene la forma:

$$L(x, z, u, v) = z + \sum_j u_j (g_j(x) - z) + \sum_k v_k p_k(x), \quad u, v \geq 0.$$

Las condiciones de optimalidad se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial z &= 1 - \sum_j u_j = 0, \\ \partial L / \partial x &= \sum_j u_j \nabla g_j(x) + \sum_k v_k \nabla p_k(x) = 0, \\ g_j(x) - z &\leq 0, \quad u_j (g_j(x) - z) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ p_k(x) &\leq 0, \quad u_k (p_k = 0), \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la condición (3.6) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \sum_j u_j &= 1, \tag{3.7} \\ \sum_j u_j \nabla g_j(x) + \sum_k v_k \nabla p_k(x) &= 0, \\ g_j(x) - z &\leq 0, \quad u_j (g_j(x) - z) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ p_k(x) &\leq 0, \quad u_k p_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ z, u, v &\leq 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $J + K$  y las condiciones complementarias  $u_j (g_j(x) - z) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J$  y  $u_k (p_k = 0), \quad k = 1, 2, \dots, K$ , son equivalentes a 2 restricciones

$$\sum_j u_j (g_j(x) - z) = 0, \quad \sum_k u_k p_k(x) = 0.$$

Por lo tanto, para establecer la no intersección, necesitamos restricciones  $K + J + n + 3$  con respecto a  $n + K + J = 1$  variables  $(z, x, u, v)$ .

## 3.2.2 CASO LINEAL

Suponiendo que  $G$  y  $P$  son politopos:

$$g_j(x) = a_jx + b_j, \quad p_k(x) = c_kx + d_k,$$

donde  $a_j, c_k \in R^n, b_j, d_k \in R$ . Entonces el problema de optimización en (3.6) es un problema de programación lineal.

$$\delta \equiv \min_{x,z} \{z : z \geq a_jx + b_j, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad c_kx + d_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \} \geq 0. \quad (3.8)$$

La función lagrangiana correspondiente es

$$L(x, z, u, v) = z + \sum_j u_j(a_jx + b_j - z) + \sum_k v_k(c_kx + d_k), \quad u, v \geq 0.$$

El dual asociado esta dado por::

$$\max \sum_j u_j b_j + \sum_k v_k d_k$$

s. t.

$$\begin{aligned} \sum_j u_j &= 1, \\ \sum_j u_j a_j + \sum_k v_k c_k &= 0, \\ u, v &\geq 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de la dualidad fuerte (la solución factible primal-dual es óptima si los objetivos correspondientes son iguales) tenemos que su la solución óptima de los modelos es equivalente al siguiente sistema de desigualdades.

$$\sum_j u_j b_j + \sum_k v_k d_k = z \quad (3.9)$$

$$\sum_j u_j = 1, \quad (3.10)$$

$$\sum_j u_j a_j + \sum_k v_k c_k = 0, \quad (3.11)$$

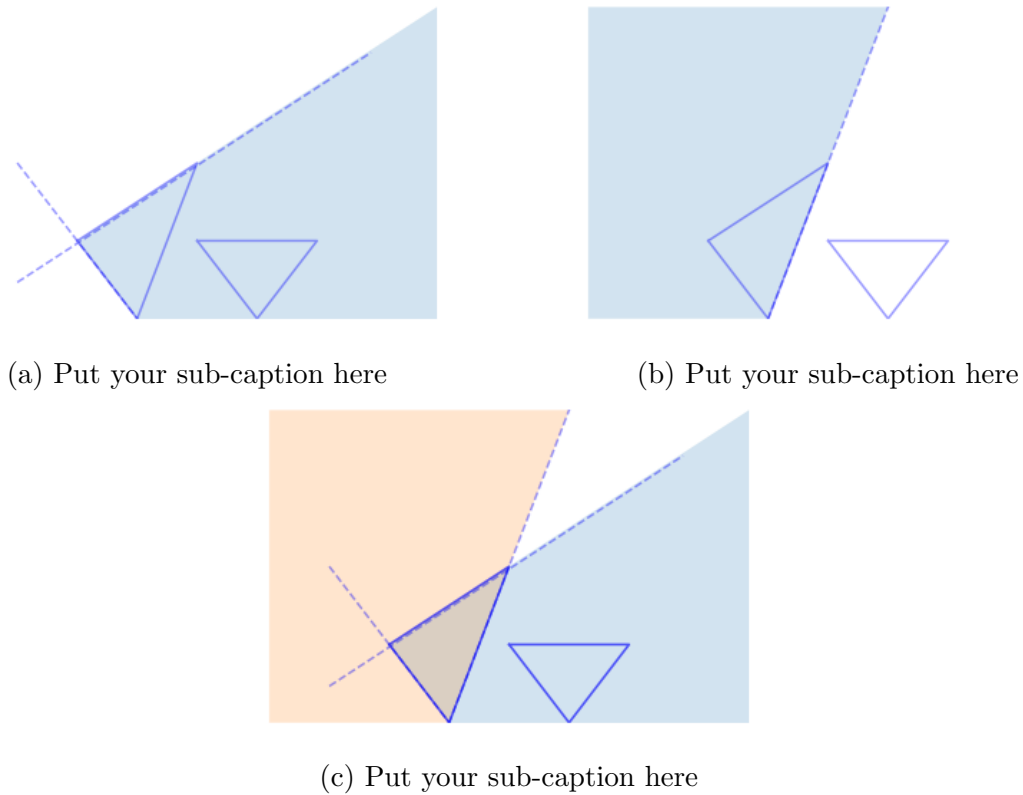


Figura 3.3: Put your caption here

$$a_j x + b_j - z \leq 0, \quad j = 1, 2 \dots J, \tag{3.12}$$

$$c_k x + d_k \leq 0, \quad k = 1, 2 \dots K, \tag{3.13}$$

$$z, u, v \geq 0. \tag{3.14}$$

Aquí tenemos  $J + K + n + 2$  restricciones con respecto a las  $J + K + n + 1$  variables .

### 3.3 CONDICIONES DE CONTENCIÓN

Se define el contenedor  $\Omega$  como un conjunto acotado en  $R^n$  definido de la siguiente manera

$$\Omega = \{x : w_l(x) \leq 0, \quad j = 1, 2 \dots J\},$$

Nos gustaría comprobar si el objeto  $G$ ,

$$G = \{x : g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2 \dots J\},$$



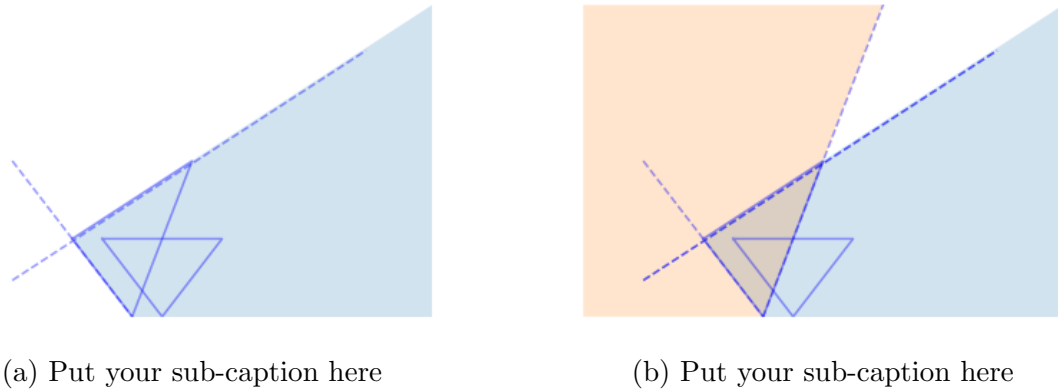


Figura 3.4: Put your caption here

está contenido completamente en  $\Omega$ , es decir  $G \subseteq \Omega$ . Por simple consideración, asumimos que todas Las funciones  $g_j(x)$  son convexas y por tanto,  $G$  es convexo.

Por definición,  $G \subseteq \Omega$  si y solo si para cualquier  $x \in G$  tenemos que  $x \in \Omega$ . Es decir, para cualquier  $x \in G$  tenemos que  $w_l(x) \leq 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ . se puede escribir esta condición de la forma:

$$\delta_l \equiv \max\{w_l(x) : x \in G\} \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

En general, este problema no es convexo, incluso si todas las  $w_l(x)$  son funciones convexas. A continuación destacamos algunos casos especiales en los que el problema es convexo y es fácil establecer condiciones de optimización para el problema  $\max\{w_l(x) : x \in G\}$ .

1. Todas las  $w_l(x)$  son cóncavas. Por ejemplo, este es el caso de un contenedor tipo "florero".
2. Todas las  $w_l(x)$  son lineales.
3. Todas las  $w_l(x)$  son lineales y  $G$  es un politopo. En este caso el problema para cada  $\delta_l$  es un problema de programación lineal y la condición  $\delta_l \leq 0$  pueden establecerse utilizando el teorema de la dualidad fuerte. Y la condición obvia para  $G \subseteq \Omega$  es que todos los vértices de  $G$  pertenecen a  $\Omega$ . Sin embargo, estos vértices no se conoce a priori y el número de vértices puede ser grande.



[H]

Example 1 (nonconvex "Florerocontainer"). El contenedor  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  definido de la siguiente forma:

$$\Omega = \{(x, y) : (x - x_{10})^2 + (y - y_0)^2 \geq R^2, \\ (x - x_{10} - 2R - d)^2 + (y - y_0)^2 \geq R^2, \\ x_{10} + 2R + d \geq x, y_0 + R \leq y\}$$

Geoméricamente,  $\Omega$  es un contenedor representado por el espacio entre los arcos de dos circunferencias con centro a la misma altura  $y_0$  y una distancia entre los centro de círculos de  $2R + d$ . Este contenedor se encuentra delimitado por encima por la línea horizontal  $y_0 + R - \delta$  y su límite inferior es la línea  $y_0 - R + \epsilon$ . Entonces para podemos verificar las condiciones de contentamiento para este caso de la siguiente forma:

$$\delta_1 \equiv \max \{R^2 - (x - x_{10})^2 - (y - y_0)^2 : x \in G\} \leq 0 \\ \delta_2 \equiv \max \{R^2 - (x - x_{10} - 2R - d)^2 - (y - y_0)^2 : x \in G\} \leq 0$$

Por simplicidad se decidió no plantear las condiciones lineales de límites superior e inferior  $\omega_l(x)$ . El problema de optimización de calcular  $\delta_1, \delta_2$  es un problema convexo. Usando condiciones de KKT es posible establecer  $\delta_1 \leq 0$  y  $\delta_2 \leq 0$  de forma explícita en forma de un sistema de inecuaciones.

Agregar visualización de "florero" hecha en python.

Ejemplo 2 (contenedor con forma poligonal): Supóngase que  $G$  y  $\Omega$  son polítopos.

$$g_j(x) = a_jx + b_j, \quad \omega_l(x) = c_lx + d_l$$

Entonces es necesario asegurar:

$$\delta_l \equiv \max\{ \omega_l(x) : x \in G \leq 0, \quad l = 1, 2, 3 \dots L \}$$

El correspondiente modelo de programación lineal tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \max \quad c_lx + d_l \\ a_jx + b_j &\leq 0, \quad j = 1, 2, 3 \dots J \end{aligned}$$

La función lagrangiana asociada es la siguiente:

$$L(x, u) = c_lx - \sum_j u_j(a_jx + b_j), \quad u_j \geq 0$$

Las condiciones de optimalidad están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c_l - \sum_j u_j a_j = 0$$

El problema dual se expresa de esta forma:

$$\delta = d_l + \min\left(-\sum_j u_j b_j\right)$$

*s.a*

$$c_l - \sum_j u_j a_j = 0$$

Por el teorema de dualidad fuerte se formalizan las siguientes como condiciones de conteni-  
miento:

$$\left. \begin{array}{l}
 c_l x^l = \sum_j u_j^l \\
 c_l x^l + d_l \leq 0 \\
 c_l - \sum_j u_j a_j = 0 \\
 a_j x^l + b_j \leq 0 \\
 u_j^l \leq 0
 \end{array} \right\} l = 1, 2, 3, \dots, L \quad j = 1, 2, 3, \dots, J$$

Si fuera considerado el caso particular de un contenedor de forma rectangular:

$$\Omega = \{x : 0 \leq x_i \leq d_i\} \equiv \{x : e_i x - d_i \leq 0, \quad -e_i \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Donde  $e_i$  es un vector de valor 1 en la  $i$ -ésima posición y 0 en otro caso, mientras que el objeto  $G$  está definido por:

$$G = \{x : Ax \leq b\}$$

las condiciones de contenimiento se expresan como:

$$\delta_i^1 = \max\{e_i x - d_i : Ax \leq b\} \quad \text{and} \quad \delta_i^2 = \max\{-e_i x : Ax \leq b\} \leq 0 \quad \text{for all } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Se presentan dos problemas de programación lineal a resolver. El primer problema tiene esta forma:

$$\max \{e_i x : Ax \leq b\}$$

El modelo dual asociado es:

$$\min \{u^i b : u^i A = e_i, \quad u^i \geq 0\}$$

Por el teorema de dualidad fuerte se tiene que la condición  $\delta_i^1 \leq 0$  es equivalente a:

$$\{e_i x^i = u^i b, Ax^i \leq b, \quad u^i A = e_i, \quad u^i \geq 0, \quad e_i x^i - d_i = 0\} \quad \text{for all } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

De forma similar el segundo problema:

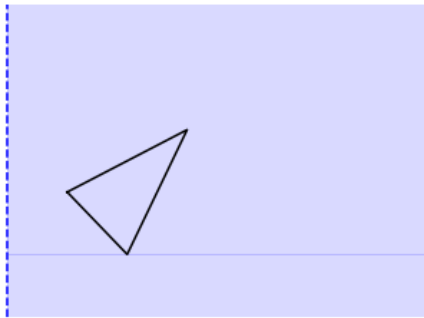
$$\max \{-e_i : Ax \leq b\}$$

el problema dual asociado tiene la siguiente forma:

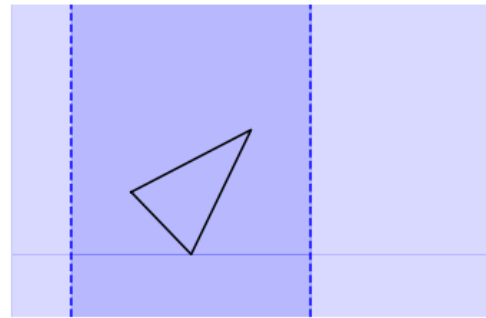
$$\min \{v^i : v^i A = -e_i, \quad v^i \geq 0\}$$

Por último por el teorema de dualidad fuerte se puede afirmar que  $\delta_i^2 \leq 0$  es equivalente a:

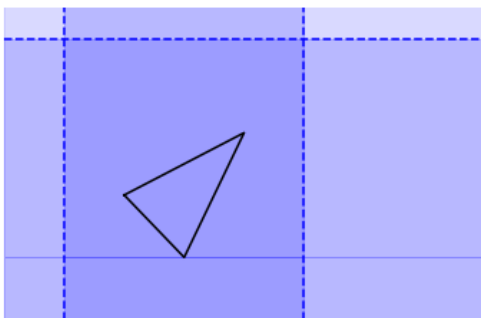
$$\{-e_i y^i = v^i b, \quad u^i A = -e_i, \quad e_i y^i \leq 0\} \quad \text{for all } i = 1, 2, 3 \dots n$$



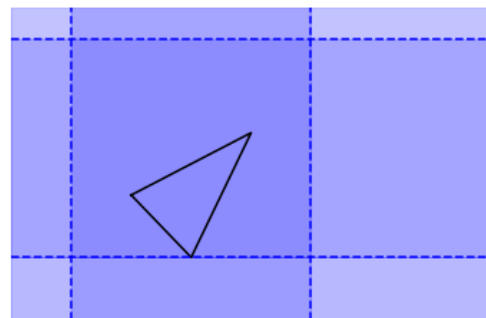
(a) Put your sub-caption here



(b) Put your sub-caption here



(c) Put your sub-caption here



(d) Put your sub-caption here

Figura 3.5: Put your caption here

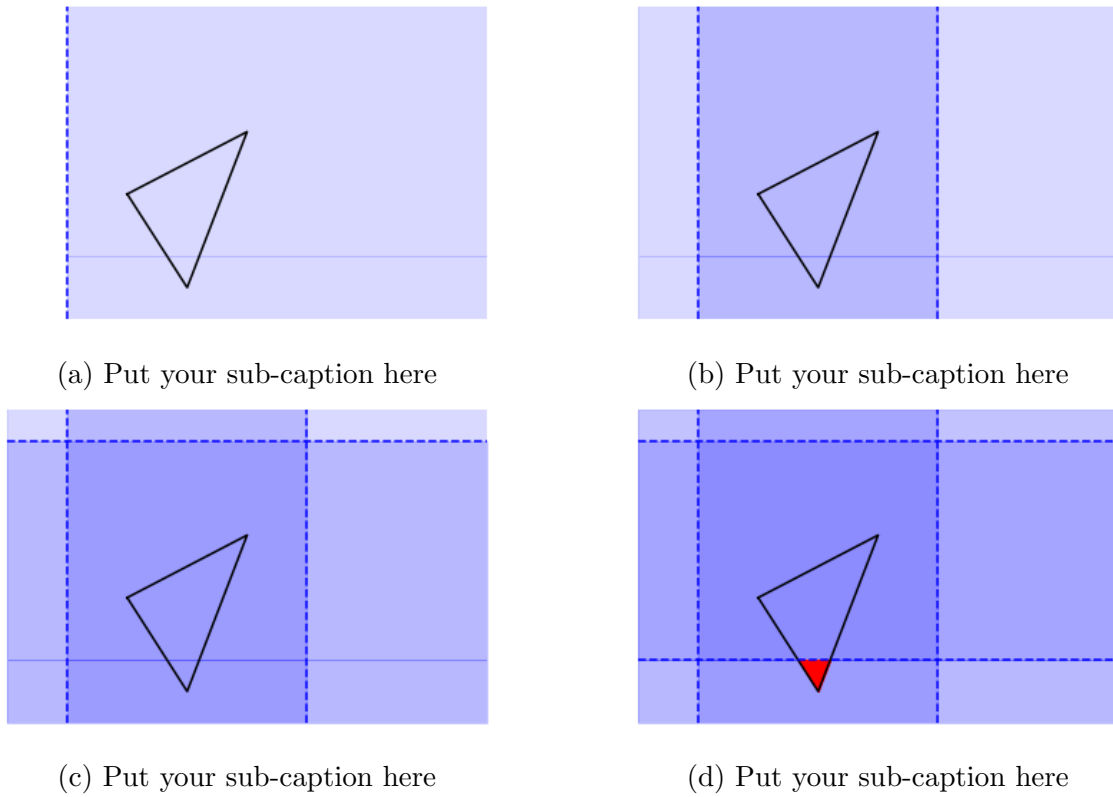


Figura 3.6: Put your caption here

Declaración de variables:

$i$  Conjunto de objetos.

$j$  Conjunto de lados.

$k$  coeficientes del lado  $j$ .

$B$  Altura del contenedor.

$x_{i,j,k}$  Variable decisión.

$$Z = \text{mín} \{H\}$$

S.A

$$c_l x^l = \sum_j u_j^l \quad (3.15)$$

$$c_l x^l + d_l \leq 0 \quad (3.16)$$

$$c_l - \sum_j u_j a_j = 0 \quad (3.17)$$

$$a_j x^l + b_j \leq 0 \quad (3.18)$$

$$u_l^l \leq 0 \quad (3.19)$$

$$\sum_j u_j b_j + \sum_k v_k d_k = z \quad (3.20)$$

$$\sum_j u_j = 1, \quad (3.21)$$

$$\sum_j u_j a_j + \sum_k v_k c_k = 0, \quad (3.22)$$

$$a_j x + b_j - z \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.23)$$

$$c_k x + d_k \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.24)$$

$$z, u, v \geq 0. \quad (3.25)$$

## CAPÍTULO 4

# VALIDACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN

---

Una vez formalizado el modelo matemático se procedió a validarlo y realizar experimentación con el fin de comprender más sus potencialidades y debilidades. Para esto se modeló en lenguaje AMPL y se resolvió a través de NEOS server desde donde se accedieron al optimizador Ipopt.

Además se realizó un generador de instancias de prueba, así como un graficador de soluciones para validar visualmente los resultados. Este procedimiento se realizó para problemas en dos y tres dimensiones obteniendo los resultados que se muestran a continuación.

## 4.1 AMPL

En esta sección será mostrado paso a paso la forma en la cual se codificó e modelo en lenguaje AMPL, esperando que funciones como ejemplo para futuros trabajos que encuentren en este lenguaje de modelación la opción más idónea. Primeramente sería válido resaltar las características y algunas de sus ventajas.

Este lenguaje de modelación, tiene acceso a un grupo de solvers lineales y no lineales que lo hacen una opción bastante completa para resolver problemas de optimización. Además, mediante el lenguaje AMPL es posible tener acceso a la plataforma en línea de solución NEOS server. Esta última constituye una herramienta muy útil para validar y realizar experimentaciones a pequeña escala si no se tiene una licencia del solver y/o no se tiene una capacidad de cómputo requerida.



Como todo producto de esta naturaleza AMPL tiene variedad de documentación disponible en su sitio oficial. Este paquete tiene una versión académica disponible y relativamente fácil de gestionar, esta tiene algunas limitaciones ya que no es posible acceder a todos los solvers internos como IPOPT pero esa desventaja la suple el acceso a NEOS server.

Entrando mas en materia, la codificación de un modelo matemático con AMPL consta de tres archivos fundamentales con tres extensiones distintas. Primero un archivo `.mod` donde se codifica el modelos con os diferentes conjuntos, variables, parámetros, restricciones y objetivos. Otro con extensión `.dat` que es donde se representa la instancia del problema modelado y por último la extensión `.run` donde se especifican una serie de parámetros deseables para resolver el problema de optimización.

#### 4.1.1 ARCHIVO `.MOD`

En esta parte se comienzan definiendo lo conjuntos sobre los que se encuentran definidos las variables y parámetros del modelo. La sintaxis correcta es la siguiente:

```
set figures = {1,2,3,4};
set side = {1,2,3};
set comp = {1,2,3};
set containment_conditions = {1,2,3,4};
set containment_conditions_comp = {1,2,3};
```

Otra manera de hacer más general es la siguiente:

```
set figures =1 .. nfigures by 1;
set side = 1 .. nsides by 1;
set comp = 1 .. ncomp by 1;
set containment_conditions = 1 .. conditions by 1;
```

Donde *nfigures*, *nsides*, *ncomp*, *conditions* son parámetros que deberán ser introducido en el archivo con extensión *.dat* esto permite generalizar el código y hacer más amigable el proceso de experimentación. Luego de que son definidos los conjuntos se procede a definir variables y parámetros para cada uno de los cuales es necesario especificar sus conjuntos correspondientes y la naturaleza de las variables. En este caso todas las variables son continuas por lo tanto no es necesario hacer muchas especificaciones. Solo en aquellos casos cuyo dominio esté restringido a valores positivos.

```
# Parameters setting
param containment_conditions_param{containment_conditions , containment_c
param param_restit{figures , side , comp};

# Variables declaration
var rot_tras{figures , side , comp};
var z{figures , figures} >= 0;
var U_j{figures , figures , side} >=0;
var V_k{figures , figures , side} >=0;
var dual_containment{containment_conditions , figures , side} >=0;
var X_continuous_int {figures , figures , dim} >= 0;
var X_continuous_cont{containment_conditions , figures , dim}>= 0;
var Trig_v{figures , dim} >= 0;
var Tras_X{figures , dim} >= 0;
var F_obj >= 0;
```

```
var ang{figures} >= 0;
```

Nótese que las palabras reservadas para que la palabra reservada para declarar una variable es *var* mientras que para un parámetro es *param*. Para definir los conjuntos sobre los que se encuentran definidos se utilizan `{}` y cada renglón termina con un `;`. El próximo paso será definir restricciones y la función objetivo, comenzando por las restricciones estas se definen con la frase reservada *subject to* seguido por el nombre que se le quiera asignar a la restricción. Luego entre `{}` son definidos los iteradores y sus respectivos conjuntos. Además es posible añadir una condición posterior a `:` dentro de las llaves.

Es posible hacer sumatorias dentro del ciclo original de la restricción:

```
subject to non_intersection_1 {i in figures, j in figures: j > i}:
    sum{l in side} (rot_tras[i, l, 3] * U_j[i, j, l]) +
    sum{l in side} (rot_tras[j, l, 3] * V_k[i, j, l]) = z[i, j]
;
```

Esta operación puede ser representada en lenguajes clásicos con un grupo de ciclos anidados, por último la forma de definir el objetivo en AMPL es:

```
minimize Objective:
    F_obj
;
```

En la primera parte se define si el objetivo es de minimizar o de maximizar, luego en el cuerpo de la función se introduce una expresión.

En la sección de anexos se muestra el resultado final de codificar el modelo matemático planteado.

## 4.2 INSTANCIAS HOMOGÉNEAS

En las primeras fases se trabajó con instancias homogéneas formadas por conjunto de objeto del mismo tamaño y de la misma naturaleza. Como es posible observar en la figura para instancias de pequeño tamaño se cumplen las condiciones planteadas en apéndices anteriores. La figuras se encuentran dentro del contenedor definido por el conjunto de desigualdades planteadas en el problema. Además no hay intersección entre ellas y por último es posible afirmar que la solución en este caso coincide con el óptimo teórico.

Sin embargo en los siguientes casos de la figura el modelo propuesto no encuentra los mejores posicionamiento posibles aunque con soluciones aceptables. Esto permite concluir de forma preliminar que el modelo representa efectivamente el objetivo a optimizar lo cual hace que surja la incógnita de como funcionará para otro tipo de objetos.

Tabla 4.1: Add caption

Instancias	Homogéneas	Heterogénea	Tipo	F.O	Densidad
Obj2	x		Círculo	2	0.62
Obj3	x		Círculo	3.9	0.48
Obj4	x		Círculo	5	0.5
Obj5	x		Círculo	6	0.52
Obj5.2		x	Círculo	8.75	0.43

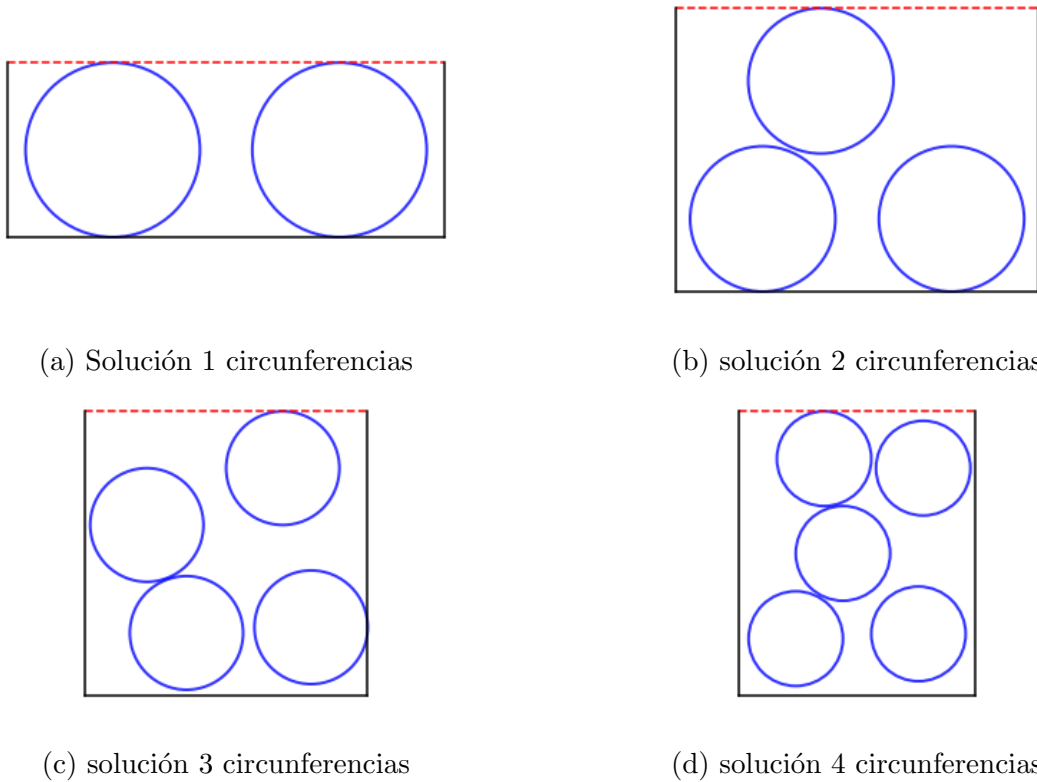


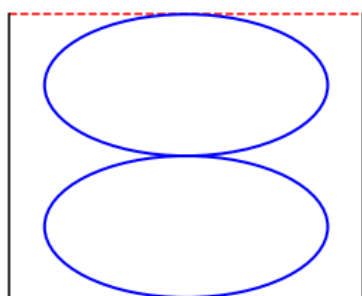
Figura 4.1: Put your caption here

Para dar solución a esta incógnita se procedió a elaborar un grupo de instancias conformadas por elipses y se procedió a solucionarlas con el modelo de optimización propuesto. Primeramente es posible observar como nuevamente en el caso de dos elipses es posible encontrar una solución que cumpla con las restricciones del modelo y además a simple apreciación no parece haber una mejor solución para este caso. En los siguientes casos es posible apreciar como las soluciones representadas tienen son relativamente mejores que las instancias anteriores.

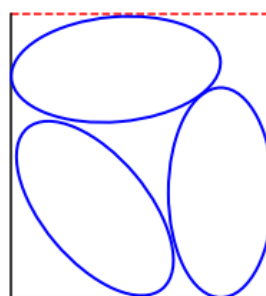
Nuevamente surge una interrogante, hasta ahora solo se ha trabajado con conjuntos de objetos iguales (instancias homogéneas). Que sucederá si se varía el tamaño de los objetos tanto en el caso de los elipses como en el de las circunferencias.

Tabla 4.2: Add caption

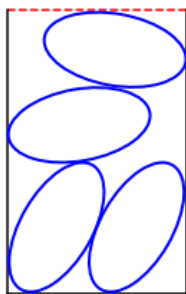
Instancias	Homogéneas	Heterogénea	Tipo	F.O	Densidad
Obj2.1	x		Elipse	4	0.62
Obj3.1	x		Elipse	5.4	0.698
Obj4.1	x		Elipse	7.9	0.636
Obj5.1	x		Elipse	9.7	0.64
Obj5.3		x	Elipse	9.8	0.57



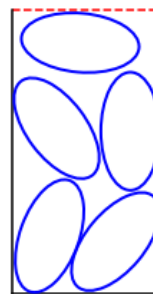
(a) Put your sub-caption here



(b) Put your sub-caption here



(c) Put your sub-caption here



(d) Put your sub-caption here

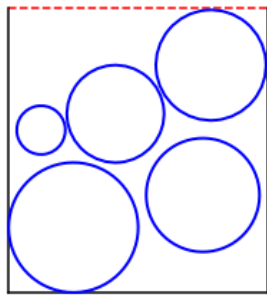
Figura 4.2: Put your caption here

### 4.3 INSTANCIAS HETEROGÉNEAS

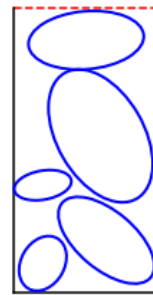
Para comenzar a estudiar este tipo de conjunto de objetos se crearon instancias formadas por objetos de la misma naturaleza variando su tamaño. Aunque es intuitivo el hecho de que variando los tamaños de los objetos se puede realizar un mejor aprovechamiento del

espacio, este factor también complejiza el modelo y aumenta su combinatoriedad por lo cual es más complicado llegar a la solución óptima del problema.

Este tipo de problemas son un reto para los investigadores de la rama, y el planteamiento desarrollado facilita su formulación. A continuación se muestran las soluciones obtenidas para las instancia creadas y es posible observar que son soluciones mejorables pero eficientes. El próximo paso será trabajar con conjuntos de objeto combinados (elipses y circunferencias).



(a) Put your sub-caption here



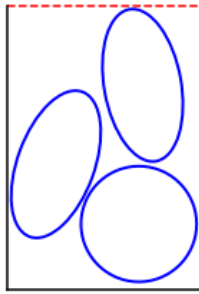
(b) Put your sub-caption here

En este punto ya se ha validado la funcionalidad del modelo presentado y se ha estudiado su funcionamiento bajo distintas condiciones. Como fue comentado una de las principales ventajas que brinda este modelo es la facilidad de representar instancias heterogéneas. En este grupo de conjuntos cada uno de los objetos tiene un tamaño generado aleatoriamente y se encuentra definidos como circunferencias o elipses.

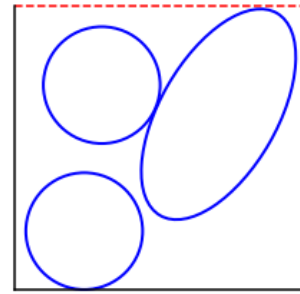
En esta ocasión es sencillo encontrar al menos una solución mejor para la instancia que representa dos objetos como se muestra en la figura. Esto pudiera estar dado por lo antes mencionado en cuanto a la dificultad de instancias heterogéneas. Sin embargo, es posible observar como nuevamente se encuentran buenas soluciones para todos los casos.

Tabla 4.3: Add caption

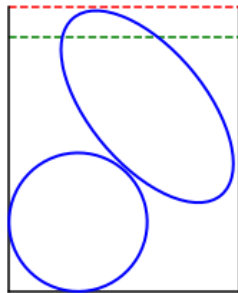
Instancias	Homogéneas	Heterogénea	Tipo	F.O	Densidad
Obj2.2		x	Combinada	6.5	0.55
Obj3.2		x	Combinada	7.35	0.53
Obj3.3		x	Combinada	4.85	0.51
Obj4.2		x	Combinada	10.3	48
Obj4.3		x	Combinada	14	0.48
Obj4.4		x	Combinada	9.6	5
Obj5.4		x	Combinada	12.1	0.6
Obj5.5		x	Combinada	12	0.446



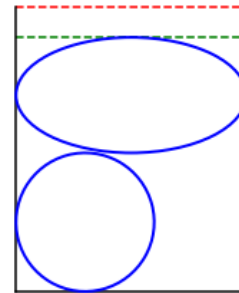
(a) Put your sub-caption here



(b) Put your sub-caption here

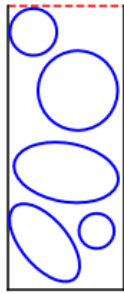


(a) Put your sub-caption here

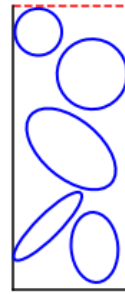


(b) Put your sub-caption here

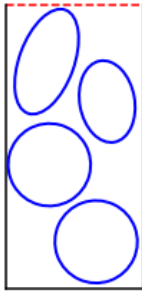




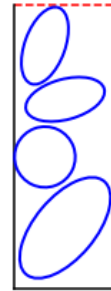
(a) Put your sub-caption here



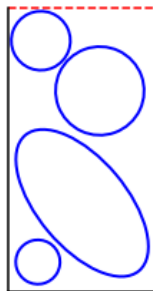
(b) Put your sub-caption here



(a) Put your sub-caption here



(b) Put your sub-caption here



(c) Put your sub-caption here

## CAPÍTULO 5

# CONCLUSIONES

---

Fue obtenido un modelo matemático en el cual los objetos son representados como un conjunto de desigualdades (lados). Apoyados de las condiciones de KKT se presentaron dos grupos de restricciones (no intersección y contenimiento). El modelo matemático planteado es de gran complejidad ya que es un problema de programación no lineal y además es un problema no convexo.

Con el fin de representar la movilidad de los objetos se utilizaron transformaciones lineales que permiten la rotación y la traslación de los mismos. Estas transformaciones representan todos las posibles posiciones de un objeto en el plano por lo cual en conjunto representan todo el espacio de posibles soluciones al modelo de optimización planteado. Esto último permite asegurar que al reportar un óptimo en la formulación esta solución es además el óptimo teórico del problema planteado.

Se validó la formulación planteada y se encontraron buenos resultados para tamaños de instancias pequeños. Además, se realizó experimentación con distintos tipos de objetos variando la heterogeneidad de las instancias estudiadas. El planteamiento matemático realizado facilita la representación de conjuntos de objetos con diferentes entre sí.

Como recomendaciones a futuros proyectos sobresalió la necesidad de linealizar el modelo matemático. Además, de que fue propuesto diseñar un método heurístico para ser utilizado como solución inicial que alimente al modelo matemático. La naturaleza de la formulación facilita utilizar la paralelización para el diseño de la heurística. En general la investigación contribuyó al planteamiento de nuevos objetivos que darán continuidad al estudio.

## 5.1 ANEXOS

```
1 # Sets definition
2 set figures = {1,2,3,4};
3 set side = {1,2,3};
4 set comp = {1,2,3};
5 set contaiment_conditions = {1,2,3,4};
6 set contaiment_conditions_comp = {1,2,3};
7 set dim = {1,2};
8
9 # Parameters setting
10 param contaiment_conditions_param {contaiment_conditions , contaiment_conditio
11 param param_rett {figures , side , comp};
12
13
14
15 # Variables declaration
16 var rot_tras {figures , side , comp};
17 var z {figures , figures} >= 0;
18 var U_j {figures , figures , side} >= 0;
19 var V_k {figures , figures , side} >= 0;
20 var dual_contaiment {contaiment_conditions , figures , side} >= 0;
21 var X_continuous_int {figures , figures , dim} >= 0;
22 var X_continuous_cont {contaiment_conditions , figures , dim} >= 0;
23 var Trig_v {figures , dim} >= 0;
24 var Tras_X {figures , dim} >= 0;
25 var F_obj >= 0;
26 var ang {figures} >= 0;
27
28 # Objective function
29 minimize Objective:
```

```

30  F_obj
31  ;
32
33  ##### RESTRICCIONES DE NO INTERSECCION #####
34
35  subject to int_1 {i in figures , j in figures: j > i}:
36      sum{l in side} (rot_tras[i, l, 3] * U_j[i,j,l]) +
37      sum{l in side} (rot_tras[j, l, 3] * V_k[i,j,l]) = z[i,j]
38  ;
39
40  subject to nint_2 {i in figures , j in figures:i<j}:
41      sum{l in side} U_j[i,j,l] =1
42  ;
43
44  subject to int_3 {i in figures , j in figures , k in comp: j > i and k < 3}:
45      sum{l in side} (rot_tras[i, l, k] * U_j[i,j, l] +
46      rot_tras[j, l, k] * V_k[i,j,l]) = 0
47  ;
48
49  subject to int_4 {i in figures , j in figures , l in side: j > i}:
50      sum{k in dim }(rot_tras[i, l, k] * X_continuous_int[i,j,k]) +
51      rot_tras[i, l, 3] - z[i,j]  <= 0
52  ;
53  subject to int_5 {i in figures , j in figures , l in side: j > i}:
54      sum{k in dim }(rot_tras[j, l, k] * X_continuous_int[i,j,k]) +
55      rot_tras[j, l, 3]  <= 0
56  ;
57
58  ##### CONTENIMIENTO#####
59
60  subject to cont_1 {x in containement_conditions , i in figures}:
61      (containement_conditions_param[x,1]* X_continuous_cont[x,i,1] +

```

```

62      containement_conditions_param [x,2]* X_continuous_cont [x,i,2]) +
63      (sum{l in side} dual_containement [x,i,1]*rot_tras [i,1,3])=0
64 ;
65
66
67 #####LIMITES#####
68
69 subject to cont_2 {i in containement_conditions , j in figures: i < 4}:
70      containement_conditions_param [i,1]* X_continuous_cont [i,j,1] +
71      containement_conditions_param [i,2]* X_continuous_cont [i,j,2] +
72      containement_conditions_param [i,3] <= 0
73 ;
74
75
76 subject to FO {i in containement_conditions , j in figures: i = 4}:
77      containement_conditions_param [i,1]* X_continuous_cont [i,j,1] +
78      containement_conditions_param [i,2]* X_continuous_cont [i,j,2] -
79      F_obj <= 0
80 ;
81 #####FIN LIMITES#####
82
83 subject to cont_5 {i in containement_conditions ,
84 k in containement_conditions_comp , j in figures:k<3}:
85      containement_conditions_param [i,k] -
86      sum{s in side} dual_containement [i,j,s] * rot_tras [j,s,k]=0
87 ;
88
89 subject to Constraint_6 {i in containement_conditions , j in figures , k in side}:
90      sum{ l in comp: l<=2} rot_tras [j,k,l]* X_continuous_cont [i,j,l]+
91      rot_tras [j,k,3] <= 0
92 ;
93 ##### CONDICIONES DE TRASLACION ROTACION #####

```

```
94
95 subject to tras_rot_Constraint_1 {i in figures , j in side}:
96     rot_tras[i,j,1] = param_restt[i,j,1]*cos(ang[i]) +
97     param_restt[i,j,2]*sin(ang[i])
98 ;
99
100 subject to tras_rot_Constraint_2 {i in figures , j in side}:
101     rot_tras[i,j,2]=param_restt[i,j,2]*sin(ang[i]) -
102     param_restt[i,j,1]*cos(ang[i])
103 ;
104
105 subject to tras_rot_Constraint_3 {i in figures , j in side}:
106     rot_tras[i,j,3] = param_restt[i,j,1]*Tras_X[i,1] -
107     param_restt[i,j,2]*Tras_X[i,2] + param_restt[i,j,3]
108 ;
109
110 subject to Constraint_pi {i in figures}:
111     ang[i] <= 3.14
112 ;
```

Tabla 5.1: Add caption

Instancias	Homogéneas	Heterogénea	Tipo	F.O	Densidad
Obj2	x		Círculo	2	0.62
Obj2.1	x		Elipse	4	0.62
Obj2.2		x	Combinada	6.5	0.55
Obj3	x		Círculo	3.9	0.48
Obj3.1	x		Elipse	5.4	0.698
Obj3.2		x	Combinada	7.35	0.53
Obj3.3		x	Combinada	4.85	0.51
Obj4	x		Círculo	5	0.5
Obj4.1	x		Elipse	7.9	0.636
Obj4.2		x	Combinada	10.3	48
Obj4.3		x	Combinada	14	0.48
Obj4.4		x	Combinada	9.6	5
Obj5	x		Círculo	6	0.52
Obj5.1	x		Elipse	9.7	0.64
Obj5.2		x	Círculo	8.75	0.43
Obj5.3		x	Elipse	9.8	0.57
Obj5.4		x	Combinada	12.1	0.6
Obj5.5		x	Combinada	12	0.446

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] E. Baltacioglu, J. T. Moore, and R. Hill, “The distributor’s three-dimensional pallet-packing problem: A human intelligence-based heuristic approach,” *International Journal of Operational Research*, vol. 1, 03 2006.
- [2] H. J. Fraser and J. A. George, “Integrated container loading software for pulp and paper industry,” *European Journal of Operational Research*, vol. 77, no. 3, pp. 466 – 474, 1994.
- [3] J. Puchinger, G. R. Raidl, and G. Koller, “Solving a real-world glass cutting problem,” in *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization* (J. Gottlieb and G. R. Raidl, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 165–176, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [4] R. Morabito and M. Arenales, “Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company,” *International Journal of Production Research*, vol. 38, no. 12, pp. 2725–2742, 2000.
- [5] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, “Nonlinear programming,” in *Traces and emergence of nonlinear programming*, pp. 247–258, Springer, 2014.
- [6] A. Sutou and Y. Dai, “Global optimization approach to unequal global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3d,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 114, pp. 671–694, Sep 2002.
- [7] “Una tipología de problemas de corte y embalaje,” *European Journal of Operational Research*.



- 
- [8] G. Wäscher, H. Haußner, and H. Schumann, “An improved typology of cutting and packing problems,” *European journal of operational research*, vol. 183, no. 3, pp. 1109–1130, 2007.
- [9] E. G. Birgin, J. Martinez, and D. P. Ronconi, “Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach,” *European Journal of Operational Research*, vol. 160, no. 1, pp. 19–33, 2005.
- [10] B. Kröger, “Guillotineable bin packing: A genetic approach,” *European Journal of Operational Research*, vol. 84, no. 3, pp. 645–661, 1995.
- [11] E. Hopper and B. C. Turton, “A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2d strip packing problems,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 16, no. 4, pp. 257–300, 2001.
- [12] M. Hifi and R. Ouafi, “A best-first branch-and-bound algorithm for orthogonal rectangular packing problems,” *International Transactions in Operational Research*, vol. 5, no. 5, pp. 345–356, 1998.
- [13] T. Romanova, I. Litvinchev, and A. Pankratov, “Packing ellipsoids in an optimized cylinder,” *European Journal of Operational Research*, 2020.
- [14] Y. Stoyan and T. Romanova, “Mathematical models of placement optimisation: two- and three-dimensional problems and applications,” *Modeling and optimization in space engineering*, pp. 363–388, 2012.
- [15] T. Romanova, Y. Stoyan, A. Pankratov, I. Litvinchev, K. Avramov, M. Chernobryvko, I. Yanchevskiy, I. Mozgova, and J. Bennell, “Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing,” *International Journal of Production Research*, pp. 1–16, 2019.
- [16] B. Zhao, X. An, Y. Wang, H. Zhao, L. Shen, X. Sun, and R. Zou, “Packing of different shaped tetrahedral particles: Dem simulation and experimental study,” *Powder Technology*, vol. 360, pp. 21–32, 2020.

- 
- [17] J. Gan and A. Yu, “Dem study on the packing density and randomness for packing of ellipsoids,” *Powder Technology*, vol. 361, pp. 424–434, 2020.
- [18] C. Li, R. Zou, D. Pinson, A. Yu, and Z. Zhou, “An experimental study of packing of ellipsoids under vibrations,” *Powder Technology*, vol. 361, pp. 45–51, 2020.
- [19] K. Dowsland, W. Dowsland, and J. Bennell, “Jostling for position: local improvement for irregular cutting patterns,” *Journal of the Operational Research Society*, vol. 49, no. 6, pp. 647–658, 1998.
- [20] R. P. Abeysooriya, J. A. Bennell, and A. Martinez-Sykora, “Jostle heuristics for the 2d-irregular shapes bin packing problems with free rotation,” *International Journal of Production Economics*, vol. 195, pp. 12–26, 2018.
- [21] J. Machchhar and G. Elber, “Dense packing of congruent circles in free-form non-convex containers,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 52, pp. 13–27, 2017.
- [22] E. Hopper and B. C. Turton, “An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2d packing problem,” *European Journal of Operational Research*, vol. 128, no. 1, pp. 34–57, 2001.
- [23] L. J. Araújo, E. Özcan, J. A. Atkin, and M. Baumers, “Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset,” *International Journal of Production Research*, vol. 57, no. 18, pp. 5920–5934, 2019.
- [24] Y. Ma, Z. Chen, W. Hu, and W. Wang, “Packing irregular objects in 3d space via hybrid optimization,” in *Computer Graphics Forum*, vol. 37, pp. 49–59, Wiley Online Library, 2018.
- [25] A. Pankratov, T. Romanova, I. Litvinchev, and J. A. Marmolejo-Saucedo, “An optimized covering spheroids by spheres,” *Applied Sciences*, vol. 10, no. 5, p. 1846, 2020.
- [26] J. D. Pintér, F. J. Kampas, and I. Castillo, “Globally optimized packings of non-uniform size spheres: a computational study,” *Optimization Letters*, vol. 12, no. 3, pp. 585–613, 2018.

- 
- [27] T. Romanova, A. Pankratov, I. Litvinchev, S. Plankovskyy, Y. Tsegelnyk, and O. Shypul, “Sparsest packing of two-dimensional objects,” *International Journal of Production Research*, pp. 1–16, 2020.
- [28] C. Zhao, L. Jiang, and K. L. Teo, “A hybrid chaos firefly algorithm for three-dimensional irregular packing problem,” *Journal of Industrial & Management Optimization*, vol. 13, no. 5, p. 1, 2018.
- [29] Y. Yuan, L. Liu, W. Deng, and S. Li, “Random-packing properties of spheropolyhedra,” *Powder technology*, vol. 351, pp. 186–194, 2019.
- [30] E. G. Birgin and R. D. Lobato, “A matheuristic approach with nonlinear subproblems for large-scale packing of ellipsoids,” *European Journal of Operational Research*, vol. 272, no. 2, pp. 447–464, 2019.
- [31] J. Kallrath, “Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes,” *Journal of Global Optimization*, vol. 67, no. 1-2, pp. 151–185, 2017.
- [32] A. Pankratov, T. Romanova, and I. Litvinchev, “Packing ellipses in an optimized convex polygon,” *Journal of Global Optimization*, vol. 75, no. 2, pp. 495–522, 2019.
- [33] T. Romanova, A. Pankratov, I. Litvinchev, Y. Pankratova, and I. Urniaieva, “Optimized packing clusters of objects in a rectangular container,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2019, 2019.
- [34] J. A. George, J. M. George, and B. W. Lamar, “Packing different-sized circles into a rectangular container,” *European Journal of Operational Research*, vol. 84, no. 3, pp. 693 – 712, 1995. Cutting and Packing.
- [35] L. Wei and A. Lim, “A bidirectional building approach for the 2d constrained guillotine knapsack packing problem,” *European Journal of Operational Research*, vol. 242, no. 1, pp. 63 – 71, 2015.
- [36] Y. Stoyan and G. Yaskov, “A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip,” *European Journal of Operational Research*, vol. 156, pp. 590–600, 02 2004.

- 
- [37] D. Zhang, Y. Liu, and S. Chen, “Packing different-sized circles into a rectangular container using simulated annealing algorithm.,” pp. 388–391, 01 2004.