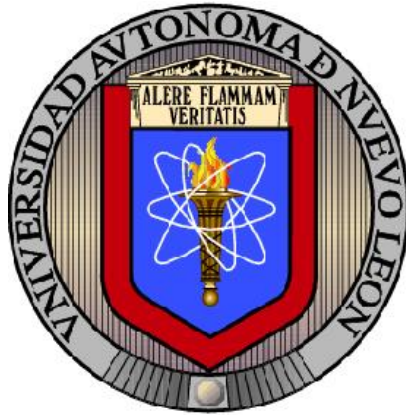


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO DE ALGORITMOS CONVERGENTES EN
TIEMPO PREDEFINIDO Y SUS APLICACIONES
PARA LA ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS
DINÁMICOS Y SINCRONIZACIÓN DE REDES
NEURONALES.

POR

MC. ALISON GARZA ALONSO

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

AGOSTO 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO DE ALGORITMOS CONVERGENTES EN
TIEMPO PREDEFINIDO Y SUS APLICACIONES
PARA LA ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS
DINÁMICOS Y SINCRONIZACIÓN DE REDES
NEURONALES.

POR

MC. ALISON GARZA ALONSO

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

AGOSTO 2023

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Diseño de algoritmos convergentes en tiempo predefinido y sus aplicaciones para la estabilización de sistemas dinámicos y sincronización de redes neuronales.”, realizada por la alumna Mc. Alison Garza Alonso, con número de matrícula 1550905, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería Física Industrial.

El Comité de Tesis

Dr. Pablo Cesar Rodríguez Ramírez

Director

Dr. Mikhail Valentinovich Basin

Director

Dr. Miguel Hernández González

Revisor

Dr. Juan Jose Maldonado Ortiz

Revisor

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez

Revisor

Vo.Bo. Dr. Alvaro Eduardo Cordero Franco

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Agosto 2023

*A Dios, a mis abuelos
y a mis padres.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis asesores por compartir su experiencia y conocimientos, guiándome en el camino de la investigación.

A mi familia, en especial a mis padres que siempre me han impulsado a ser mejor.

Por último agradeciendo a CONACyT por el apoyo económico brindado.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	v
Resumen	xiv
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Algoritmos de control para sistemas determinísticos.	1
1.1.2. Algoritmos de control para sistemas estocásticos.	6
1.2. Motivación y Justificación	8
1.3. Aportaciones	9
1.3.1. Estabilización en tiempo predefinido de un motor síncrono de imanes permanentes.	9
1.3.2. Estabilización en tiempo predefinido por “backstepping” de sistemas no lineales autónomos.	10
1.3.3. Sincronización en tiempo predefinido de redes neuronales competitivas por un control variable en el tiempo.	11
1.4. Organización de tesis	12

2. Marco Teórico	13
2.1. Ecuaciones Diferenciales	13
2.1.1. Tipos de ecuaciones diferenciales	14
2.1.2. Teoría de estabilidad	15
2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	20
2.2.1. Procesos estocásticos	21
2.2.2. Sistemas estocásticos.	26
2.3. Redes Neuronales	28
2.4. Diseños de control	34
2.4.1. Control convergente en tiempo finito	34
2.4.2. Control convergente en tiempo fijo	36
2.4.3. Control convergente en tiempo arbitrario.	37
2.4.4. Control convergente en tiempo fijo para sistemas estocásticos	38
3. Estabilización en tiempo predefinido de un motor síncrono de imanes permanentes.	43
3.1. Planteamiento del problema	43
3.2. Estabilización en tiempo predefinido sin disturbios	46
3.2.1. Diseño de control	46
3.2.2. Simulaciones	47
3.3. Estabilización en tiempo predefinido bajo disturbios determinísticos.	53
3.3.1. Diseño de control	53
3.3.2. Simulación del MSIP	55

3.4. Estabilización en tiempo predefinido con disturbios determinísticos y estocásticos	60
3.4.1. Simulaciones del MSIP	62
3.5. Conclusiones	65
4. Estabilización en tiempo predefinido por “backstepping” de sistemas no lineales autónomos	66
4.1. Planteamiento del problema	66
4.2. Diseño de control	67
4.2.1. Sistema de primer orden	67
4.2.2. Sistema de segundo orden	71
4.2.3. Sistema de n-dimensiones	74
4.3. Conclusiones	77
5. Sincronización en tiempo predefinido de redes neuronales competitivas por un control variable en el tiempo.	78
5.1. Planteamiento del problema	78
5.2. Sincronización de redes neuronales competitivas bajo disturbios determinísticos	81
5.2.1. Simulaciones de la RNC	83
5.3. Sincronización de redes neuronales competitivas bajo disturbios determinísticos y ruidos blancos	84
5.3.1. Simulaciones de la RNC	87
5.4. Conclusiones	93

6. Conclusiones	95
6.1. Conclusiones	95
6.2. Trabajos Futuros	96

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Péndulo simple.	16
2.2. Diagrama de una neurona de una sola entrada.	29
2.3. Diagrama de una neurona con múltiples entradas.	30
2.4. Diagrama de red neuronal de una capa con S neuronas.	31
2.5. Diagrama de una red neuronal con tres capas.	31
2.6. Diagrama de una red neuronal recurrente.	32
3.1. Diagrama electromecánico del motor síncrono de imanes permanentes . . .	44
3.2. Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = 100$	49
3.3. Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = 100$ (acercamiento).	49
3.4. Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = -100$	50
3.5. Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = -100$ (acercamiento).	50
3.6. Entrada de control (3.5) con $\omega_0 = 100$	51
3.7. Entrada de control (3.6) con $\omega_0 = -100$	51
3.8. Entrada de control de [1] con la condición inicial $x_0 = -100$	52
3.9. Acercamiento del comportamiento de la entrada de control de [1] con la condición inicial $x_0 = -100$	52

3.10. Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ cuando $\lambda_2 = 0$ con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$	57
3.11. Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ cuando $\lambda_2 = 0$ con condiciones iniciales $\omega_0 = -100$ y $y_0 = -50$	58
3.12. Entrada de control cuando $\lambda_2 = 0$ y condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$	58
3.13. Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ con $\lambda_2 \neq 0$ y condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$	59
3.14. Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ con $\lambda_2 \neq 0$ y condiciones iniciales $\omega_0 = -100$ y $y_0 = -50$	59
3.15. Historias de tiempo del estado estocástico $\omega(t)$ y $y(t)$ con condiciones iniciales $\omega_0 = -100$ y $y_0 = -50$	63
3.16. Historias de tiempo del estado estocástico $\omega(t)$ y $y(t)$ con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$	64
3.17. Entrada del control estocástico con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$	64
4.1. Historias de tiempo del estado y la ley de control (4.4) para el sistema de primer orden (4.9).	70
4.2. Historias de tiempo del estado (4.9) y la ley de control propuesta en [2] para el sistema de primer orden.	70
4.3. Historias de tiempo de los estados del sistema de segundo orden (4.26) bajo la ley de control (4.12).	75
4.4. Historias de tiempo de los estados del sistema de segundo orden (4.26) bajo la ley de control propuesta en [2].	76
5.1. El esquema de control en tiempo predefinido propuesto.	81

5.2. (RNC) en presencia de disturbios determinísticos bajo la ley de control (5.6).	85
5.3. (RNC) en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos bajo la ley de control (5.6).	86
5.4. Historias de tiempo del sistema de errores de sincronización entre la red neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control 5.10): a.- en presencia de disturbios determinísticos; b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.	90
5.5. Historias de tiempo del sistema de errores de sincronización entre la red neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control (5.11): a.- en presencia de disturbios determinísticos; b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.	91
5.6. Retrato fase de la Red Neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control (5.10): a.- en presencia de disturbios determinísticos; b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.	92
5.7. Retrato fase de la Red Neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control (5.11): a.- en presencia de disturbios determinísticos; b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.	93

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.	47
3.2. Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.	56
3.3. Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.	57
3.4. Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.	63

RESUMEN

En esta tesis se propone un diseño de algoritmos que permiten la estabilización y sincronización de diferentes sistemas dinámicos en un tiempo predefinido. Para lograr esto, se han desarrollado leyes de control que limitan el tiempo de convergencia a un valor arbitrario, independiente de las condiciones iniciales de los estados de los sistemas. Además, se ha establecido el tiempo predefinido como un parámetro del controlador. En primer lugar, se diseña una ley de control para un sistema de motor sincrónico de imanes permanentes (MSIP o PMSM en sus siglas en inglés) en tres casos; a) sin perturbaciones, b) en presencia de un disturbio no acotado que satisface la condición de Lipschitz y c) en presencia de ambos, un ruido blanco estocástico y un disturbio determinista no acotado. Por otro lado, se aplicaron diferentes técnicas para resolver el problema de estabilización/sincronización en tiempo predefinido en sistemas no lineales autónomos y redes neuronales competitivas. En el caso de los sistemas no lineales autónomos, se utilizó la técnica de backstepping para diseñar una ley de control lineal y variable en el tiempo que permite llevar todos los estados al origen en tiempo predefinido. En cuanto a las redes neuronales competitivas, se diseñó una entrada de control continuo lineal y variable en el tiempo que permite lograr la sincronización en tiempo predefinido en presencia de perturbaciones deterministas y ruidos blancos estocásticos. Para validar los resultados teóricos de estos diseños de controles, se han realizado simulaciones numéricas que demuestran la estabilización/sincronización de los estados del sistema al origen en tiempo predefinido.

ABSTRACT

The thesis presents the design of predefined-time convergent algorithms to achieve the stabilization/synchronization of different dynamic systems. In the control laws proposed, the converge time is bounded by an arbitrary time, which is chosen in advance, regardless of the initial values of the systems, and the predefined time can be set as a controller parameter. First, we design a control law for a permanent magnet synchronous motor system (PMSM) in three cases; a) disturbance-free, b) in presence of an unbounded disturbance satisfying a Lipschitz condition and c) in presence of both, a stochastic white noise and an unbounded deterministic disturbance. The backstepping technique is applied to solve the predefined-time stabilization problem for an autonomous nonlinear system, where nonlinear terms are unknown but satisfy a linear growth condition. Consequently, a linear time-varying control law was designed to autonomous nonlinear systems with linearly growing nonlinearities in scalar, two-dimensional, and n-dimensional cases, driving all states to the origin in predefined-time. Finally, the predefined time synchronization of Competitive Neural Networks (CNN) is researched. The aim in this case was designed a linear time-varying continuous control input driving the synchronization error at the origin for a priori predefined-time, where the CNN response system is considered in presence of deterministic disturbances satisfying Lipschitz condition and stochastic white noises. In other words, our goal was to achieve the drive-response CNNs predefined-time synchronization in presence of deterministic disturbances and stochastic white noises. Numerical simulations are provided for each case to validate the stabilization/synchronization of the system states to the origin in predefined-time.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta sección es dar a conocer la historia y el estado del arte sobre los algoritmos de control convergentes en tiempo finito, fijo y predefinido de sistemas dinámicos con diferentes características ya sea escalares, multivariantes, con o sin disturbios determinísticos y estocásticos. El enfoque es dirigido al tiempo de convergencia y las aplicaciones de estos algoritmos en diferentes tipos de sistemas dinámicos.

1.1 ANTECEDENTES

1.1.1 ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS DETERMINÍSTICOS.

La formulación de un control de algún sistema y su modelo matemático puede verse afectado por varias discrepancias como parámetros desconocidos del sistema, disturbios externos desconocidos y dinámicas no modeladas.

Es por eso que para el área de control fue un gran reto el diseñar leyes de control que logren un desempeño deseado para el sistema de lazo cerrado en presencia de perturbaciones/incertidumbres. Con esto surge un enfoque llamado control por modos deslizantes en la década de los setentas, [3, 4], el cual se ha utilizado para resolver diferentes tipos de problemas en la práctica [5, 6, 7]. Como se sabe, existen controles lineales escalares que trabajan por medio de la retroalimentación que logran que un sistema lineal controlable pueda ser llevado asintóticamente al origen [8]. El control PD (proporcional-derivativo) y el control PID (proporcional-integral-derivativo) son dos tipos de controles que se utilizan comúnmente en diversas aplicaciones. El PD utiliza dos términos para regular la salida

de un sistema. Un término que es proporcional al error entre la salida deseada y la salida real, mientras que el término derivativo es proporcional a la tasa de cambio del error [9, 10, 11, 12]. Por otro lado el PID utiliza tres términos para regular la salida de un sistema. Además de los términos proporcional y derivativo, también incluye un término integral, que es proporcional al error acumulado con el tiempo [13, 14, 15, 16, 17, 18]. A pesar de que estos dos tipos de controles son muy sencillos y robustos, tienen varias desventajas como no ser tan precisos y el tiempo de convergencia al punto de equilibrio es asintótico.

Por otro lado, en [19] se presenta el control discontinuo convencional por modos deslizantes que proporciona una convergencia en tiempo finito al origen para sistemas de grado relativo uno, en presencia de disturbios acotados.

El estudio de estabilizar el estado de un sistema lineal en el origen exactamente en un tiempo finito fue dado en [20]. Aquí los autores dieron un primero resultado con respecto a los reguladores en tiempo finito, el cual consistía en establecer el diseño de un regulador continuo llevando todos los estados del sistema en una cadena de integradores al origen en tiempo finito. Sin embargo, este algoritmo de control no es robusto con respecto a disturbios externos, cuya influencia puede cambiar significativamente el punto de equilibrio siendo diferente de cero.

La aplicación de los algoritmos de control convergentes en tiempo finito tuvo tanta importancia que se desarrolló en algunos sistemas dinámicos como: sistemas de estado acotado en tiempo finito [21, 22], sistemas de suspensión automotriz [23, 24], naves espaciales rígidas en presencia de incertidumbres de inercia y perturbaciones externas [25, 26, 27, 28], convertidores de potencia donde el objetivo es generar corrientes de red con la menor distorsión armónica [29], sistemas Takagi-Sugeno [30, 31, 32, 33], sistemas con saltos Markovianos [34, 35, 36], sistemas de control activados por eventos subactuados [37, 38], sistemas polinomiales que comprenden términos inciertos y no linealidades de entrada [39], sistemas de control de rechazo de perturbaciones [40, 41, 42], entre otros.

Una desventaja del problema del control por modos deslizantes es el llamado efecto “chattering” debido a la alta frecuencia de conmutación del control. Sin embargo en las

siguientes investigaciones se ha tratado de reducir el chattering y facilitar el diseño de controles, [43, 44, 45, 46]. Estos algoritmos permiten la adaptación sin sobreestimar la ganancia [47, 48, 49, 50].

Una nueva clase de control por modos deslizantes fue presentado en [51], llamado “twisting”. Una característica notable del control por modos deslizantes de segundo orden consistía en su capacidad para dirigir la variable deslizante (siendo con frecuencia la salida del sistema) a cero en conjunto con su derivada en tiempo finito en presencia de disturbios acotados o con disturbios que cumplieran con la condición de Lipschitz.

Una investigación que siguió, fue diseñar una ley de control continuo convergente en tiempo fijo de modo que el estado del sistema converja al origen en un tiempo fijo [52], ya que como veíamos en el caso finito, el tiempo de convergencia era dependiente de las condiciones iniciales del sistema, es decir, era cambiante con respecto a los valores iniciales y esto es una deficiencia en los casos prácticos, dado que en la mayoría de estos, es deseable garantizar que la función de tiempo de convergencia esté acotada uniformemente y que sea independiente de las condiciones iniciales del sistema, a este algoritmo se le llamó “super-twisting” (ST) [53]. Por lo que en el 2011 [54], se presenta una generalización de un algoritmo escalar super-twisting que da como resultado una convergencia en tiempo fijo. En [55] se introdujeron funciones estrictas de Lyapunov para los algoritmos de control tipo super-twisting.

Las primeras estimaciones de cotas del tiempo de convergencia para los algoritmos de twisting y super-twisting, basados en las funciones de Lyapunov, fueron obtenidas en [56] y [57] respectivamente. Algunos trabajos como [58], [59], han estimado el tiempo de convergencia pero no ofrecieron un diseño de los parámetros del controlador que permita garantizar el tiempo de convergencia deseado. El algoritmo escalar de super-twisting se extendió al caso multivariable en [60], agregando términos lineales que no se presentaban para el caso escalar.

Durante algunos años, un reto interesante fue encontrar una cota de la convergencia que fuera lo más cercana a la real y que además no dependiera de las condiciones iniciales del estado, dado que muchas de las veces se tiene información desconocida del sistema o

se quiere una precisión mas exacta en cuestión al tiempo de convergencia. Por ejemplo, en [61] fue propuesta una ley de control de tipo super-twisting multivariable convergente en tiempo finito donde un estimado de la cota superior de la convergencia era calculado siendo independiente de las condiciones iniciales.

Algunos ejemplos de los sistemas técnicos, donde los algoritmos convergentes en tiempo fijo son directamente aplicables son: el péndulo invertido sobre un carro, motor síncrono de imanes permanente, misil hipersónico impulsado por un motor air-breathing jet, sistemas de robots bajo incertidumbres. [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70].

Un problema importante también para los investigadores ha sido la sincronización de redes neuronales y/o sistemas dinámicos, por lo cual se han desarrollado diversos algoritmos de control que logran una convergencia finita o fija, [71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78], sin embargo estos controles no logran la sincronización en un tiempo deseado, si no, que es dependiente de las condiciones iniciales del estado o solo se sabe una cota superior de la función del tiempo de establecimiento.

Cuando no se tiene información de las condiciones iniciales del estado, se requiere el uso de observadores (diferenciadores). El diferenciador propuesto en [79] permite la diferenciación exacta robusta en tiempo real hasta cualquier orden l , siempre que la $(l+1)$ -ésima derivada esté acotada por una constante conocida. Otros diferenciadores importantes fueron propuestos en: [80, 81, 82]. También se consideran problemas de diseño de control y observador convergentes en tiempo finito para sistemas multidimensionales [83, 84, 85], en particular, una cadena n -dimensional de integradores. Algunos observadores en tiempo fijo se propusieron en [86, 87]

Se puede observar que la mayoría de los algoritmos de control convergentes dependen de las condiciones iniciales, necesitan información del sistema o bien, el tiempo de convergencia no puede ser asignado a priori, solamente se puede calcular una cota superior conservativa de este.

Para resolver el problema de que la cota superior del tiempo de convergencia no fuera tan lejana a la real, dado que en varias áreas de la industria o de la práctica es necesario que el sistema converja en un tiempo deseado asignado a priori, se propuso un nuevo diseño de

control por Pal et al. [1], en el que se aseguraba que el regulador continuo dado, era capaz de estabilizar un sistema dinámico en forma de cadena de integradores n-dimensional al origen dentro de un tiempo deseado, independiente de cualquier parámetro del sistema. Sin embargo, este algoritmo resultó en un crecimiento exponencial en la magnitud del control para condiciones iniciales negativas del estado, además de que solo era robusto con respecto a disturbios determinísticos acotados.

Otros artículos se han dedicado a estudiar las condiciones similares a las de Lyapunov para asegurar la estabilidad en tiempo predefinido de diferentes clases de sistemas dinámicos, estableciendo teoremas importantes, [88, 89, 90, 91].

En el caso de sistemas con funciones no lineales y desconocidas que satisfacen una condición de crecimiento lineal, Zhou and Shi [2] presentan un algoritmo de control basados en las función de Lyapunov asegurando la estabilización global en tiempo prescrito/predefinido.

Además de que los algoritmos convergentes en tiempo predefinido (prescrito, arbitrario) se han implementado en algunas clases de sistemas no lineales, también han tenido importancia en la sincronización de sistemas caóticos [92], anti-sincronización de redes neuronales [93] y sincronización de redes neuronales competitivas o simplemente redes [94, 95].

En el trabajo [94], los autores, diseñan dos tipos de controles para lograr la sincronización en tiempo predefinido, basados en los teoremas de Lyapunov. El primer control propuesto utiliza la función signo que lo hace ser mas sencillo que el segundo, dado que el otro utiliza la función de Lyapunov y exponencial para el diseño del control. La técnica implementada, fue hacer que el sistema del error entre la red neuronal competitiva principal y la de respuesta tendiera a cero, y así lograr la sincronización entre estas dos redes.

Otros resultados presentando algoritmos de control convergentes en tiempo predefinido para varias clases de sistemas no lineales están dados en las siguientes referencias: [96, 97, 98, 99, 100, 101].

En resumen, existe una gran variedad de controles que estabilizan diferentes clases de sistemas dinámicos bajo disturbios determinísticos, donde su convergencia puede ser asintótica, finita, fija y lo mas nuevo que hay; por un tiempo predefinido. Sin embargo, nos dimos a la tarea de investigar en el caso de los sistemas estocásticos qué tipo de reguladores existían y como podíamos mejorarlos. A continuación se muestran algunas investigaciones que han surgido a través de los años para resolver el problema de estabilizar sistemas no determinísticos.

1.1.2 ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS ESTOCÁSTICOS.

Las investigaciones del problema de diseñar algoritmos de control que logren estabilizar sistemas estocásticos se puede clasificar en distintas clases, estabilidad en probabilidad, estabilidad en momento, estabilidad casi segura, estabilidad en tiempo fijo en probabilidad [102, 103, 104, 105]. En las primeras 3 estabilidades estocásticas el comportamiento es asintótico ya que el sistema estocástico es estable cuando el tiempo se acerca al infinito. Por lo que nuestra búsqueda en la literatura se concentrara en la estabilidad en tiempo finito y tiempo fijo que son mas actuales y con mas ventajas.

Los criterios sobre la estabilidad exponencial y la estabilidad del momento ρ para sistemas estocásticos se obtienen en [106].

En sentido de probabilidad, encontramos en [107] un nuevo concepto de estabilidad en tiempo finito, que se introducía en el año 2010 llamado “stochastically finite-time attractiveness”, el cual es definido para una clase de sistemas estocásticos no lineales descritos por las ecuaciones diferenciales de Itô. La función del tiempo de estabilidad propuesto que dan los autores es una variable estocástica y su esperanza es finita.

Un importante teorema de Lyapunov en estabilidad en tiempo finito para los sistemas estocásticos fue establecido en [103], además de que los autores prueban un teorema de Lyapunov de estabilidad en tiempo finito, el cual establece que la estabilidad asintótica globalmente no es equivalente a la estabilidad en tiempo finito para algunos sistemas estocásticos. Por otro lado, en [108] investigan la estabilización casi segura en tiempo finito

de una clase de sistemas autónomos no lineales estocásticos, donde prueban que se puede lograr mediante una ley de control continua.

En [109] por su parte, diseña un control para un sistema estocástico no lineal de alto orden tal que la estabilidad en lazo cerrado es globalmente estable en tiempo finito en probabilidad. Otra técnica utilizada en [110] para la estabilización en tiempo finito de sistemas estocásticos no lineales de orden superior en lazo cerrado es la de *backstepping*.

Como vemos en la parte de algoritmos de control que estabilizan los sistemas estocásticos en tiempo finito en probabilidad hay una gran variedad de resultados [111, 112, 113, 114, 115], sin embargo, como en el caso de sistemas determinísticos la estabilidad de la trayectoria de los sistemas estocásticos converge en probabilidad a un estado de equilibrio durante un intervalo de tiempo finito y permanece en el, además de que es dependiente de los estados iniciales de los sistemas y como sabemos difícilmente se obtienen con precisión o son imposibles de obtener por adelantando.

Por otro lado, en el 2018, [116], presenta una solución al problema de la estabilidad en tiempo fijo para sistemas estocásticos, el cual hasta ese entonces no había sido tratado. Las principales contribuciones que dieron los autores fue establecer una nueva definición sobre la estabilidad de tiempo fijo en probabilidad, además de proponer teoremas y corolarios que prueban la estabilidad en tiempo fijo en probabilidad para sistemas estocásticos no lineales descritos por las ecuaciones diferenciales de Itô.

En [117], se presenta una ley de control continua convergente en tiempo fijo en sentido de media ρ para sistemas estocásticos no lineales descritos por las ecuaciones diferenciales de Itô, donde además se consideraron disturbios determinísticos no acotados que cumplen la condición de Lipschitz.

En conclusión y para nuestro conocimiento bajo la exhaustiva búsqueda en la literatura, no existe un diseño de algoritmos de control que no requiera información de las condiciones iniciales del estado y establezca los sistemas dinámicos estocásticos al origen en un tiempo predefinido, más aún no existe un control que pueda estabilizar sistemas dinámicos que además de estar bajo disturbios estocásticos, se consideren disturbios determinísticos no acotados, y que satisfagan la condición de Lipschitz.

1.2 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Los sistemas de control han tenido una larga historia e interés por parte de los investigadores, empezando desde el siglo XIX, haciendo un gran trabajo en la Segunda Guerra Mundial. Desde ahí, se ha desarrollado intensamente, trayendo beneficios a las grandes aplicaciones en la industria, desde un controlador, que puede ayudar a estabilizar la velocidad del motor de algún auto, hasta tareas importantes como lo son las militares, que podría ser la guía de un misil.

Es un gran reto para el investigador ha sido modelar un sistema dinámico de algún evento físico, ya que, como sabemos, existen muchas discrepancias de por medio, desde parámetros desconocidos, disturbios externos o incluso errores humanos. Esto hizo que se consideraran controles mas poderosos que fueran robustos y pudieran compensar los disturbios o dinámicos no modeladas que había en la planta a controlar. Además de diseñar controles que sean robustos y estabilicen los sistemas dinámicos, se considera otro tipos de problemas, como por ejemplo, el tiempo de estabilización. Como vimos en la literatura, han surgido muchas ideas interesantes con respecto a la función del tiempo de convergencia, algunos autores para eliminar la convergencia asintótica, donde el tiempo de convergencia es infinito, implementaron ideas para asegurar la convergencia en un tiempo finito, luego siguieron investigaciones donde se aseguraba la convergencia en tiempo fijo, donde ya se podía dar una aproximación de la cota superior del tiempo de convergencia, sin embargo todas estas propuestas tenían deficiencias, y la investigación siguió hasta llegar a los conocimientos actuales, donde el tiempo de convergencia lo podemos pre-asignar y asegurar que el estado de los sistemas de alguna planta, se estabilicen en un tiempo predefinido deseado, sin que dependa de condiciones iniciales del estado y en presencia de disturbios. Este tipo de convergencia/ estabilidad es muy beneficioso en todos los aspectos, porque puede ser la clave para elaborar tareas en un tiempo más rápido que los otros controles que han surgido en la historia. Por ejemplo, en el área de la seguridad de comunicación, si el momento de sincronización tarda demasiado, puede filtrarse información importante, poniendo en riesgo la seguridad del sistema de comunicación, es aquí donde una ventaja del control por tiempo predefinido se presenta, asegurando que

el tiempo de la sincronización sea corto y el deseado. Otro ejemplo importante podría ser sobre trabajos militares, donde, para que un avión militar logre el mayor alcance y autonomía, se necesita una gran cantidad de combustible de tal manera que logre todas sus tareas, por lo que interviene un avión cisterna para que pueda transferir combustible al avión militar, sin embargo para que todo este proceso sea un éxito, se necesita una estabilización en un periodo de tiempo corto. Para este tipo de maniobras se tiene que contemplar un control robusto que sea eficiente con todas las perturbaciones que puede haber desde la mas simple que se puede presentar como el flujo de aire.

Es por eso que la motivación a realizar esta tesis, fue principalmente, que al ver todas las aplicaciones existentes que hay en el área de control, desde la mas simple a la mas compleja, se pudiera diseñar un algoritmo de control robusto que fuera capaz de estabilizar en tiempo predefinido a diferentes clases de sistemas dinámicos, desde no lineales bajo disturbios con diferentes propiedades hasta sistemas estocásticos y redes neuronales competitivas.

1.3 APORTACIONES

1.3.1 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE UN MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

El capítulo 3 presenta el diseño de algoritmos de control continuos convergentes en tiempo predefinido para llevar los estados del sistema de un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) en tres casos: libre de disturbios, donde el motor se encuentre en presencia de disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz, y un último caso donde además de disturbios determinísticos, el motor se encuentra bajo disturbios estocásticos, como lo es el ruido blanco. La ley de control diseñada es libre de restricciones de crecimiento exponencial en la magnitud del control y conocimiento de las condiciones iniciales exactas. Para nuestro conocimiento, este es el primer algoritmo de control continuo convergente en tiempo predefinido aplicado para estabilizar un sistema de un MSIP con disturbios determinísticos y/o estocásticos, el cual permite establecer

a priori el tiempo de convergencia incluso en presencia de varios disturbios de diferente naturaleza. Simulaciones numéricas son realizadas para un sistema de un MSIP donde se validan los resultados teóricos obtenidos en cada uno de los tres casos considerados. En las simulaciones presentadas se puede mostrar que los valores empleados de las entradas de control convergentes en tiempo predefinido son aplicables en la práctica.

Los resultado se este capítulo se publicaron en:

- a) Garza-Alonso, A., Basin, M., & Rodriguez-Ramirez, P. (2021). Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 43(13), 3044-3054. [118]
- b) Garza-Alonso, A., Basin, M., & Rodriguez-Ramirez, P. (2021, October). Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor system using linear time-varying control input. In *2021 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)* (pp. 1412-1417). IEEE. [119]

1.3.2 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO POR “BACKSTEPPING” DE SISTEMAS NO LINEALES AUTÓNOMOS.

En el capítulo 4, se considera una clase de sistemas autónomos no lineales, donde las términos no lineales son desconocidos pero satisfacen una condición de crecimiento lineal, similar a [2]. Como se sabe, la condición de crecimiento lineal esencialmente significa que el estado del sistema no puede divergir a infinito en un tiempo finito. Por lo tanto, esta es una condición convencional para incertidumbres no lineales en un sistema práctico. La ley de control lineal variable en el tiempo convergente por un tiempo predefinido, que estabiliza el estado del sistema al origen en presencia de no linealidades desconocidas, es diseñada en base a la técnica convencional de backstepping, el cual hace que sea sencillo de obtener e intuitivamente consistente. En las simulaciones numéricas realizadas se puede ver que la entrada de control diseñada proporciona una menor magnitud y, en algunos casos, los tiempos de convergencia real son más rápidos y además otra ventaja es que este control propuesto es mas fácil de calcular que algunas leyes de control existentes como lo es en el trabajo de [2].

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

a) Garza-Alonso, A., Basin, M., & Rodriguez-Ramirez, P. C. (2022). Predefined-Time Backstepping Stabilization of Autonomous Nonlinear Systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 9(11), 2020-2022. [120]

1.3.3 SINCRONIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE REDES NEURONALES COMPETITIVAS POR UN CONTROL VARIABLE EN EL TIEMPO.

Otra aportación de esta tesis la encontramos en el capítulo 5, donde se presenta el diseño de leyes de control que resuelven el problema de lograr la sincronización en tiempo predefinido para redes neuronales competitivas (RNC) afectadas por disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz y/o disturbios estocásticos como ruidos blancos. Las principales contribuciones son las siguientes:

- El diseño de leyes de control lineales continuas variables en el tiempo que dirijan los errores de sincronización de las redes neuronales competitivas al cero en un tiempo predefinido a priori, donde la red neuronal de respuesta esta en presencia de disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz.
- Una ley de control es diseñada para llevar el sistema de errores de sincronización de la RNC al cero por un tiempo predefinido a priori en presencia de disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz y también considerando ahora ruidos blancos presentes.
- Validando la eficiencia de las leyes de control desarrolladas para las redes neuronales competitivas se realizaron simulaciones numéricas y se compararon los resultados con algunas técnicas de sincronización en tiempo predefinido ya existentes en cada uno de los casos mencionados anteriormente.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

a) Garza-Alonso, A., Basin, M., & Rodriguez-Ramirez, P. (2023). Predefined-time synchronization of competitive neural networks with deterministic disturbances and stochas-

tic noises. Transactions of the Institute of Measurement and Control [121].

b) Garza-Alonso, A., Basin, M., & Rodriguez-Ramirez, P. (2022, September). Predefined-Time Synchronization of Competitive Neural Networks via Continuous Time-Varying Control. In 2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS) (pp. 219-224). IEEE. [122]

1.4 ORGANIZACIÓN DE TESIS

En el capítulo 2 se presenta una síntesis teórica de sistemas dinámicos, no lineales, estocásticos, redes neuronales y diferentes tipos de controles. En el capítulo 3, se plantea y, se resuelve el problema del diseño de leyes de controles convergentes en tiempo predefinido para estabilizar un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) en tres distintos escenarios; sin disturbios, con disturbios no acotados y en presencia de disturbios determinísticos no acotados y ruidos estocásticos. Una técnica de “backstepping” para resolver el problema de la estabilización en tiempo predefinido de sistemas autónomos no lineales, donde los términos no lineales son desconocidos pero satisfacen una condición de crecimiento lineal es presentado en el capítulo 4. En el capítulo 5 se presenta el problema y la solución de la sincronización en tiempo predefinido de redes neuronales competitivas (RNC), donde la red neuronal de respuesta es considerada en presencia de disturbios determinísticos y estocásticos. Por último, en el capítulo 6 se presenta las conclusiones y trabajos futuros.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales surgen con la necesidad de describir o modelar fenómenos físicos en términos matemáticos.

Definición 1. *Una ecuación diferencial (ED), es cualquier ecuación donde lo desconocido es una función y tanto la función como su derivada pueden aparecer en la ecuación.*

Algunos ejemplos importantes de ecuaciones diferenciales son:

- Ley de Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = f \left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t) \right) \quad (2.1)$$

donde m es la masa de la partícula, f es la fuerza que actúa en la partícula y $x(t)$ es la posición de la partícula en el espacio en el tiempo t .

- La ecuación de calor: la temperatura T en un material sólido cambia en el tiempo en un espacio de tres dimensiones, definido por $\mathbf{x} = (x, y, z)$ puede ser descrita con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, \mathbf{t}) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t, \mathbf{x}) \right), \quad k > 0, \quad (2.2)$$

donde k es una constante positiva representando propiedades térmicas del material.

2.1.1 TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuación diferencial ordinaria (EDO) [123]. Es una ecuación diferencial que contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

Ecuación diferencial parcial (EDP). Es una ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.

El **orden** de una ecuación diferencial ya sea EDO o EDP, representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación.

Ecuaciones diferenciales autónomas. Se dice que una ecuación diferencial autónoma o también llamada sistema autónomo, es un sistema de EDO, las cuales no dependen explícitamente de la variable independiente. Cuando la variable es tiempo, también se les llama sistema invariante en el tiempo.

Ecuaciones diferenciales no autónomas. Si el sistema de ecuaciones diferenciales depende del tiempo, entonces es un sistema no autónomo.

Una clasificación importante de las ecuaciones diferenciales es si es lineal o no. La ecuación diferencial ordinaria

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.3)$$

se dice ser lineal si F es una función lineal de las variables $(y, y', \dots, y^{(n)})$, una definición similar aplica para las EDP. Entonces, la ecuación general de una EDO lineal de orden n es

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t). \quad (2.4)$$

Una ecuación que no es de la forma anterior es una ecuación no lineal [124].

Dado que la mayoría de los fenómenos físicos son representados por ecuaciones diferenciales no lineales, nuestro enfoque principal en esta tesis, serán sistemas dinámicos no lineales.

Un ejemplo simple de lo que es un sistema no lineal, tomado del libro [125], se presenta a continuación. Consideremos el péndulo simple (ver figura 2.1), donde l denota la longitud de la cuerda y m la masa de la bola. Para este caso se asume que la cuerda es rígida y tiene masa cero. Denotamos θ como el ángulo de la cuerda al pivote en el eje vertical. El péndulo oscila libremente en el plano vertical. La bola del péndulo se mueve en un círculo de radio l .

Para escribir la ecuación de movimiento del péndulo, vamos a identificar las fuerzas que actúan en la bola. Existe una fuerza gravitatoria igual a mg , donde g es la aceleración debido a la gravedad. También existe una fuerza de fricción, asumimos que es proporcional a la velocidad de la bola con un coeficiente de fricción k . Usando la segunda ley de movimiento de Newton, podemos escribir la ecuación de movimiento en dirección tangencial como:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) - kl\dot{\theta}$$

De aquí se obtiene el modelo de estado tomando las variables de estado como $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$. Por lo que las ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

Si igualamos $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ y resolvemos para x_1 y x_2 , obtendríamos los puntos de equilibrio que se definirán a continuación para el caso general.

2.1.2 TEORÍA DE ESTABILIDAD

En esta sección se dará a conocer definiciones y teoremas fundamentales de estabilidad que nos servirán para el desarrollo de los capítulos 3, 4 y 5.

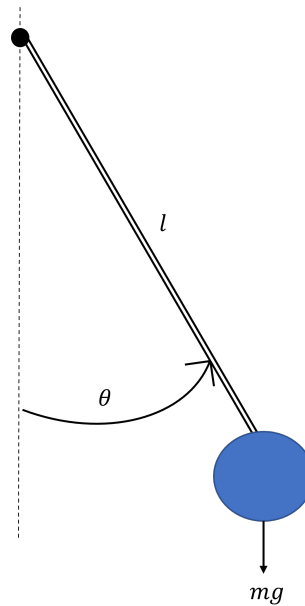


Figura 2.1: Péndulo simple.

Definición 2. Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de la ecuación siguiente:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.5)$$

si $f(x^*) = 0$.

SISTEMAS AUTÓNOMOS

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.6)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo localmente Lipschitz de un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n . Suponemos que $x^* \in D$ es un punto de equilibrio de (2.6), y considerando que este punto de equilibrio sera el origen, esto es, $x^* = 0$, tenemos la siguiente definición:

Definición 3. El punto de equilibrio $x^* = 0$ de (2.6) es:

- estable si, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ si $\|x(0)\| < \delta$ entonces $\|x(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$,

- *inestable, si no es estable*
- *asintóticamente estable si, este es estable y δ puede ser elegido si $\|x(0)\| < \delta$ entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Teorema 1. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (2.6) y $D \subset \mathbb{R}^n$ sea un dominio que contiene $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función continuamente diferenciable tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$, y $\dot{V}(x) \leq 0$ en D . entonces $x = 0$ es estable, además, si $\dot{V}(x) < 0$ en $D - \{0\}$, entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.*

Teorema 2. *El punto de equilibrio $x = 0$ de un sistema lineal invariante en el tiempo dado de la siguiente forma*

$$\dot{x} = Ax \tag{2.7}$$

es estable si y solo si todos los valores propios de A satisfacen que la parte real de ellos es menor o igual a cero ($Re\lambda_i \leq 0$) y para cada valor propio con la parte real igual a cero ($Re\lambda_i = 0$) y multiplicidad algebraica $q_i \geq 2$, rango $(A - \lambda_i I) = n - q_i$ donde n es la dimensión de x . El punto de equilibrio $x = 0$ es (globalmente) asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A satisfacen $Re\lambda_i < 0$.

Cuando todos los valores propios de A satisfacen $Re\lambda_i < 0$, A es llamada la matriz Hurwitz o matriz de estabilidad. Por lo que el origen de (2.7) es asintóticamente estable si y solo si A es Hurwitz.

Estabilidad asintótica al origen puede ser también investigada usando el método de Lyapunov, (Teorema 1). Considere una función candidata de Lyapunov como

$$V(x) = x^T P x \tag{2.8}$$

donde P es una matriz definida positiva. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema lineal (2.7) es dada por

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x \tag{2.9}$$

donde Q es una matriz simétrica definida por

$$PA + A^T P = -Q. \quad (2.10)$$

Si Q es definida positiva, podemos concluir que el origen es asintóticamente estable; esto es $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ para todo valor propio de A .

Teorema 3. *Una matriz A es Hurwitz; esto es $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ para todos los eigenvalores de A , si y solo si para cualquier matriz simétrica definida positiva Q existe una matriz P simétrica definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov (2.10). Además si A es Hurwitz, entonces P es la única solución de (2.10).*

SISTEMAS NO AUTÓNOMOS

Las nociones de estabilidad y estabilidad asintótica de puntos de equilibrio de sistemas no autónomos son básicamente los mismos que fueron introducidos para los sistemas autónomos. Lo diferente es que la solución de un sistema autónomo puede depender tanto de t como de t_0 . Por lo tanto, el comportamiento de estabilidad del punto de equilibrio en general, será dependiente de t_0 .

Consideremos el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.11)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua por partes en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times D$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$, donde este es un punto de equilibrio para (2.11) en $t = 0$ si $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Definición 4. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.11) es*

- estable si, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.12)$$

- *uniformemente estable si, para cada $\varepsilon > 0$, hay $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, independiente de t_0 , tal que (2.12) se satisface,*
- *inestable si este no es estable,*
- *asintóticamente estable si este es estable y existe una constante positiva $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty \forall \|x(t_0)\| < c$.*

En el caso de sistemas no lineales no autónomos tenemos el siguiente teorema de estabilidad.

Teorema 4. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para el sistema no lineal (2.11) donde ahora $f(t, x)$ es una función no lineal y $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$, y la matriz Jacobiana $[\partial f / \partial x]$ es acotada y Lipschitz en D , uniformemente en t . Sea $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|_{x=0}$, entonces, el origen es un punto de equilibrio estable exponencialmente para el sistema no lineal si este es un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema lineal $\dot{x} = A(t)x$.*

Nota: Las demostraciones de los teoremas 1, 2, 3, 4 y 5 están dados en el libro [125].

En el siguiente subtema se verán los teoremas de existencia y unicidad en general para sistemas no lineales.

TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Consideremos un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.13}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 5. [126] *Una función $g(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (2.13) en un intervalo I si $g(t)$ es diferenciable en I y si para todo $t \in I$*

$$g(t) = \int_{t_0}^t f(t, g(t))dt, \quad g(t_0) = g_0 \tag{2.14}$$

Teorema 5. [126] *Asumimos que $f(t, x)$ es una función continua y sus derivadas parciales $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ existen y son continuas. Entonces para cada x_0 existe un $t_{-1} < t_0$ y $t_1 > t_0$ tal que la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.15)$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo (t_{-1}, t_1) .

Además de que este intervalo de existencia es máximo. Cabe aclarar que t_{-1} puede ser $-\infty$ y t_1 puede ser ∞ .

2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

En los capítulos 3 y 5 se presentan problemas relacionados con sistemas estocásticos o bien ecuaciones diferenciales estocásticas, por consiguiente en esta sección se presentarán algunos conceptos preliminares de ecuaciones diferenciales estocásticas para el mejor entendimiento de ellos.

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

El concepto fundamental en la teoría de probabilidad es el espacio de probabilidad, el cual puede ser denotado por Ω , con elementos denotados por ω . Donde Ω es el espacio de una muestra simple y sus elementos ω son muestras o resultados experimentales. Ciertos subconjuntos de Ω se llaman eventos.

Asignaremos probabilidades a eventos como una función de probabilidad $Pr(\cdot)$ definida en la clase de eventos, esto es a cada evento A asignaremos un número $Pr(A)$, a esto se le dice la probabilidad de A .

Las probabilidades pueden ser asignadas para todos los conjuntos ω , todos los conjuntos ω son eventos. Ahora, al definir la clase de eventos, queremos que las operaciones de conjuntos (uniones, intersecciones, complementos) realizadas en eventos produzcan conjuntos

que también son eventos. Una clase de conjuntos que tenga esas propiedades es llamado σ -álgebra de Borel. Mas precisamente, una clase F de ω es llamado σ -álgebra de Borel si

1. $\Omega \in F$
2. si $A \in F$ entonces $\Omega - A \in F$
3. si $A_1, A_2, \dots, A_n \in F$ entonces $\cup_1^n A_i \in F$ y $\cap_1^n A_i \in F$
4. si $A_1, A_2, \dots \in F$, entonces $\cup_1^\infty A_i \in F$ y $\cap_1^\infty A_i \in F$

Dada una clase F_0 de conjuntos ω , existe un único σ -álgebra de Borel $B(F_0)$ de conjuntos ω con las propiedades

1. $F_0 \subset B(F_0)$;
2. si F_1 es un σ -álgebra de Borel de conjuntos ω y si $F_0 \subset F_1$, entonces $B(F_0) \subset F_1$

$B(F_0)$ es el más pequeño σ -álgebra de Borel de conjuntos ω el cual contiene todos los conjuntos de F_0 y es llamado σ -álgebra de Borel generado por F_0 .

La clase de eventos es un σ -álgebra de Borel B y la función de probabilidad es definida en B . Suponemos que el espacio de probabilidad Ω , σ -álgebra de Borel B , y la función de probabilidad $Pr(\cdot)$ han sido bien definidos. El triplete $(\Omega, B, Pr(\cdot))$ es llamado espacio probabilístico.

2.2.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Un proceso estocástico $\{x_t, t \in T\}$ es una familia de variables aleatorias indexada por el conjunto de parámetros T . El parámetro t se refiere al tiempo en nuestras aplicaciones. Si las variables aleatorias x_t son discretos, decimos que el proceso estocástico tiene un espacio de estados discretos. Si son continuos, el proceso se dice tener un espacio de estados continuos. Note que un proceso estocástico es realmente una función de dos variables, el parámetro tiempo t y el parámetros de probabilidad ω . La notación $\{X_t, t \in T\}$ es la manera corta de expresar $\{X_t, t \in T, \omega \in \Omega\}$. Para cada t , $X_t(\cdot)$ es una variable aleatoria. Para cada ω , $X(\omega)$ es una realización del proceso.

LEYES DE PROBABILIDAD DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO.

Sea $\{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico. Su conjunto de parámetros T puede ser discreto o continuo. Para cualquier conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} = \{t_i\} \in T$, la función de distribución conjunta de las variables aleatorias X_{t_1}, \dots, X_{t_n} es llamada la distribución finito dimensional del proceso estocástico

$$F_X(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad (2.16)$$

para todo conjunto finito $\{t_i\} \in T$. Con esto queremos decir que con las funciones de distribución en la mano, podemos responder todas las preguntas probabilísticas del proceso. Equivalentemente, el proceso estocástico puede ser caracterizado por la función de densidad conjunta.

$$p_X(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad (2.17)$$

o la función característica conjunta

$$\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(u_1, \dots, u_n) \quad (2.18)$$

para todos los conjuntos finitos $\{t_i\} \in T$. Estas tres últimas ecuaciones sirven para especificar la ley de probabilidad del proceso estocástico. Lo cual podemos escribir

$$p(X_t) = p(X, t) \quad (2.19)$$

para cada t , $p(\cdot, t)$ es la densidad $p_{X_t}(\cdot)$ de la variable aleatoria $X_t(\cdot)$. Similarmente $p(X_t, X_\tau) = p(X, Y, t, \tau)$, para cada t y τ , $p(\cdot, \cdot, t, \tau)$ es la densidad conjunta $p_{X_t, X_\tau}(\cdot, \cdot)$ de las variables aleatorias $X_t(\cdot)$ y $X_\tau(\cdot)$.

La densidad condicional se define como $p(X_t|X_\tau) = \frac{p(X_t, X_\tau)}{p(X_\tau)}$.

Las densidades de primer y segundo orden de un proceso estocástico pueden contestar muchas preguntas importantes sobre el proceso. Para los procesos Gaussiano y de Markov, estos contestan todas las preguntas sobre los procesos. Esto es, estos especifican la ley de probabilidad de los procesos. Ahora se va a definir algunos parámetros asociados

con el primer y segundo orden de densidades de los procesos estocásticos.

Sea $\{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico. La función del tiempo t

$$m_X(t) = E[X_t]$$

es llamada la función de esperanza del proceso.

La función de los tiempos t, τ es llamada la función de correlación del proceso

$$\gamma_X(t, \tau) = E[X_t, X_\tau].$$

La función de covarianza del proceso es expresada como:

$$C_X(t, \tau) = E[(X_t - m_X(t))(X_\tau - m_X(\tau))].$$

La función matricial de t

$$P_X(t) = P_X(t, t)$$

es la matriz de varianzas para el vector aleatorio X_t .

CONVERGENCIA DE SECUENCIAS ALEATORIAS

Sea $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ una secuencia aleatoria, hay un número de maneras en la cual la secuencia puede converger (cuando $n \rightarrow \infty$). La secuencia $\{X_n\}$ se dice convergente a X con probabilidad 1 si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

para casi todas las ω . Esto es, excepto quizás en un evento A tal que $Pr(A) = 0$.

La secuencia $\{X_n\}$ se dice convergente a X en probabilidad si para cada $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) = 0.$$

La secuencia $\{X_n\}$ se dice que converge a X en promedio cuadrático si $E[|X_n|^2] < \infty \forall n$, $E[|X|^2] < \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X - X_n|^2] = 0$. Representado normalmente como:

l.i.m. $X_n = x$.

PROCESO DE WIENER

Un proceso con parámetros continuos $\{X_t, t \in T\}$ tiene incrementos independientes si, para cualquier conjunto finito $\{t_i | t_i \leq t_{i+1}\} \in T$, las variables aleatorias

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes. El proceso X_t se dice que tiene incrementos independientes estacionarios si, además

$$X_{t+h} - X_{\tau+h}$$

tiene la misma distribución como $X_t - X_\tau$ para todo $t > \tau \in T$ y cualquier $h > 0$.

Un proceso estocástico que es de gran importancia en la teoría y aplicaciones y que fue tratado en esta tesis, es el proceso de Wiener o movimiento Browniano.

Un proceso con parámetros continuos $X_t, t \geq 0$ es un proceso de Wiener si

1. $X_t, t \geq 0$ tiene incrementos independientes estacionarios;
2. para todo $t \geq 0$, X_t tiene una distribución normal;
3. para todo $t \geq 0$, $E[X_t] = 0$
4. $Pr(X_0 = 0) = 1$,
5. tiene realizaciones continuas.

El proceso de Wiener tiene incrementos independientes estacionarios

$$var[X_t - X_\tau] = \sigma^2(t - \tau)$$

donde la varianza σ^2 es una constante positiva. La función de correlación esta dada como

$$\gamma(t, \tau) = \sigma^2 \min(t, \tau) \quad (2.20)$$

RUIDO BLANCO

En el modelado de cualquier proceso físico o dispositivo, el ingeniero procede a modelar las variables que describen el proceso para poder predecir el proceso físico. Sin embargo a veces encuentra que sus predicciones son inexactas. Por lo que busca como mejorarlo y procede a repetir muchas veces el proceso hasta llegar a un punto en el que los modelos no mejoran su predicción. Esto puede ser debido a errores en los instrumentos o algunas fluctuaciones impredecibles en el proceso. Esto podría ser llamado un ruido blanco. Formalmente definimos un proceso blanco Gaussiano $\{X_t, t \in T\}$ como un proceso Gaussiano con

$$E\{[X_t - E(X_t)][X_\tau - E(X_\tau)]^T\} = Q(t)\delta(t - \tau)$$

donde $Q(t)$ es una matriz de covarianza definida positiva y $\delta(t - \tau)$ es una función delta de Dirac.

Como sabemos el proceso de Wiener no es diferenciable en cualquier sentido. Sea $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener, sabemos que la covarianza es

$$C_x(t, \tau) = \sigma^2 \min(t, \tau)$$

entonces, la función covarianza del proceso $\{dX_t/dt\}$ es

$$C_{\dot{X}} = \frac{\partial^2 C_X(t, \tau)}{\partial t \partial \tau},$$

sigue que

$$C_{\dot{X}}(t, \tau) = \sigma^2 \frac{\partial^2 \min(t, \tau)}{\partial t \partial \tau},$$

ahora

$$\min(t, \tau) = \begin{cases} \tau & \text{si } \tau < t \\ t & \text{si } \tau > t \end{cases}$$

así que

$$\frac{\partial}{\partial t} \min(t, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < t \\ 1 & \text{si } \tau > t \end{cases}$$

el cual es la función Heaviside o función salto (en τ) y su derivada con respecto a τ es la función Dirac $\delta(t - \tau)$ como resulta

$$C_{\dot{X}}(t, \tau) = \sigma^2 \delta(t - \tau)$$

y \dot{X} es un proceso delta-correlacionado. Por lo tanto el ruido Blanco es la derivada en promedio cuadrático débil del Proceso de Wiener.

2.2.2 SISTEMAS ESTOCÁSTICOS.

Sistemas dinámicos continuos con estado finito-dimensionales, que son sujetos a disturbios aleatorios pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Sean X_t y W_t el vector de estado n-dimensional y el disturbio aleatorio m-dimensional en el tiempo t, respectivamente. Entonces una ecuación diferencial general del tipo descrito puede ser escrita como

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, W_t, t) \quad t \geq t_0 \quad (2.21)$$

donde f es una función no lineal n-dimensional. La ecuación anterior es llamada una ecuación diferencial estocástica o sistema dinámico estocástico continuo. La función del disturbio aleatorio W_t es llamado función *driving*. La condición inicial para (2.21) puede ser una constante fija o una variable aleatoria X_{t_0} , con una distribución específica. La ley de probabilidad del proceso $\{W_t, t \geq t_0\}$ es asumida como especificada.

Un caso especial importante de la ecuación (2.21) es el sistema estocástico con un ruido blanco Gaussiano.

$$\frac{dX_t}{dt} = \delta(X_t, t) + G(X_t, t)\psi_t \quad t \geq t_0 \quad (2.22)$$

donde G es una función matricial $n \times m$ y la condición inicial X_{t_0} que es independiente del ruido blanco Gaussiano $\{\psi_t, t \geq t_0\}$.

Como el proceso $\{\psi_t\}$ es delta-correlacionado, y por lo tanto, el ψ_t no es integrable en promedio cuadrático, y dado el resultado de la sección anterior que un ruido blanco Gaussiano es la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso de Wiener. Sea $\{W_t, t \geq t_0\}$ un proceso de Wiener independiente. Entonces

$$\psi_t \sim \frac{dW_t}{dt} \quad (2.23)$$

o una forma equivalente sería

$$dX_t = f(X_t, t)dt + G(X_t, t)dW_t \quad t > t_0 \quad (2.24)$$

Ahora, la ecuación (2.24) solo tiene sentido cuando la integral existe

$$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^t f(X_\tau, \tau)d\tau + \int_{t_0}^t G(X_\tau, \tau)dW_\tau \quad (2.25)$$

donde la primera integral puede ser definida como una integral en promedio cuadrático o como una integral ordinaria, la segunda integral sería definida como integral estocástica de Itô, y por lo tanto es una ecuación diferencial estocástica de Itô.

CALCULO ESTOCÁSTICO DE ITÔ

Lema 1. [127] Sea X_t la solución única de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = f(X_t, t)dt + G(X_t, t)dW_t \quad (2.26)$$

donde X_t y f son vectores n -dimensionales, G es $n \times m$, y $\{W_t, t \geq t_0\}$ es un proceso de Wiener m -dimensionales con $E[dW_t dW_t^T] = Qdt$. Sea $\phi(X_t, t)$ una función real escalar, continuamente diferenciable en t y tenga segunda derivada parcial mixta continua con respecto a los elementos de X . Entonces la ecuación diferencial estocástica $d\phi$ de ϕ es

$$d\phi = \phi_t dt + \phi_X^T dX_t + \frac{1}{2} \text{tr}(GQG^T) \phi_{XX} dt \quad (2.27)$$

donde

$$\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}; \quad \phi_X^T \left[\frac{\partial \phi}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial X_n} \right] \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1 X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1 X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_n X_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_n X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_n^2} \end{pmatrix}$$

Observe que la ecuación (2.27) puede ser expresada también como

$$d\phi = (\phi_t + \phi_X^T f + \frac{1}{2} \text{tr}(GQG^T) \phi_{XX}) dt + \phi_X^T G dW_t$$

2.3 REDES NEURONALES

Debido al gran auge y aplicación de redes neuronales, se le ha dado importancia en la investigación, en particular a las redes neuronales competitivas [128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135]. En base a esto, en esta tesis se planteó el problema de lograr una sincronización de redes neuronales competitivas en tiempo predefinido. En esta sección se definen conceptos importantes que nos ayudaran a entender el funcionamiento de este tipo de redes neuronales.

Una red neuronal artificial es un esquema de computación inspirado en la estructura del sistema nervioso de los seres humanos, siendo este un sistema adaptativo que posee un algoritmo para ajustar sus pesos (parámetros libres) para alcanzar requerimientos de desempeño del problema basado en muestras representativas [136].

MODELO NEURONAL

Hay varios tipos de modelos de redes neuronales.

Neurona de una entrada.

En la figura (2.2) se representa el diagrama de la neurona de una sola entrada. La entrada escalar p es multiplicada por el peso escalar w , para formar wp , uno de los términos que

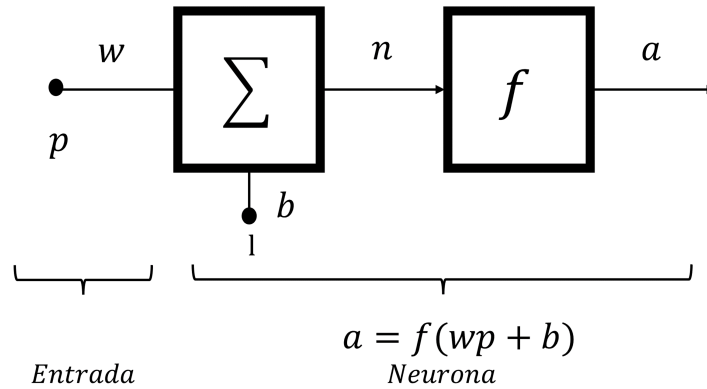


Figura 2.2: Diagrama de una neurona de una sola entrada.

es enviado para la sumatoria. La otra entrada, 1, es multiplicada por un *bias* b y entonces pasa sumando. La salida n , a veces se dice como entrada neta, esta entra en una función de transferencia f o función de activación, la cual produce la salida escalar de la neurona a . La salida de la neurona es calculada como:

$$a = f(wp + b).$$

Note que w y b son ambos parámetros escalares ajustables de la neurona. Algunas funciones de transferencia más usadas son por ejemplo: la función log-sigmoide, tangente hiperbólica sigmoide, entre otras.

Neurona con entradas múltiples.

Típicamente, una neurona tiene más que una entrada. Una neurona con R entradas es mostrada en la figura (2.3). Las entradas individuales p_1, p_2, \dots, p_R son multiplicadas por los elementos correspondientes $w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,R}$ de la matriz peso \mathbf{W} .

La neurona tiene una *bias* b , la cual es sumada con las entradas de los pesos para formar la entrada neta n .

$$n = w_{1,1}p_1 + w_{1,2}p_2 + \dots + w_{1,R}p_R + b.$$

Esta expresión puede ser escrita en la forma matricial

$$n = \mathbf{W}\mathbf{p} + b$$

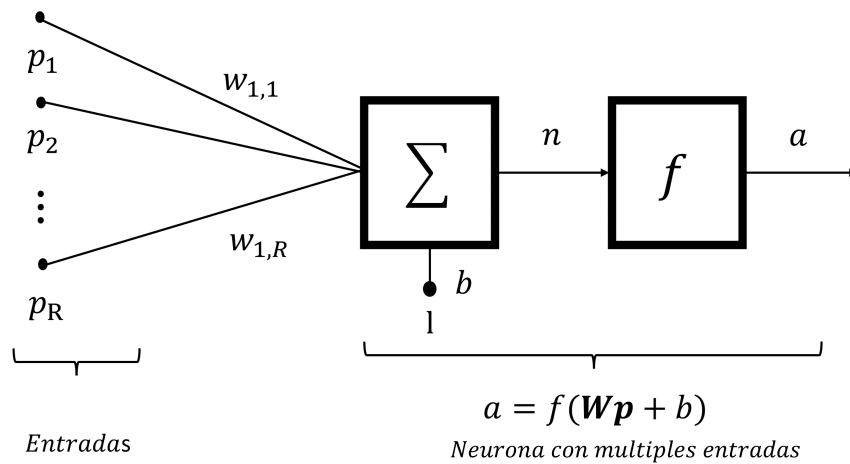


Figura 2.3: Diagrama de una neurona con múltiples entradas.

donde la matriz \mathbf{W} para el caso de una sola neurona tiene solo una fila.

Ahora la salida de la neurona puede ser escrita como

$$a = f(\mathbf{W}\mathbf{p} + b).$$

Los índices en los pesos indican el destino particular de la neurona para ese peso y el segundo índice indica la fuente de la señal alimentada a la neurona. Por ejemplo $w_{1,2}$ dice que este peso representa la conexión a la primera neurona de la segunda fuente.

Neurona con una capa (layer).

Comúnmente una neurona, con incluso muchas entradas, puede no ser suficiente. Tal vez se necesiten 5 o 10 operando en paralelo, lo cual llamaremos una capa. En el diagrama siguiente en la figura (2.4), note que cada R entradas es conectada a cada neurona y que la matriz de pesos ahora tiene S filas. La capa incluye la matriz de peso, se suma el vector de *bias* \mathbf{b} , las funciones de transferencia y el vector de salida \mathbf{a} . Cada elemento de la entrada \mathbf{p} es conectada a cada neurona a través de la matriz de pesos \mathbf{W} . Cada neurona tiene una *bias* b_i , una suma de función de transferencia f y una salida a_i . Todo junto, forma el vector salida \mathbf{a} .

Neurona con múltiples capas.

Ahora consideremos una red con varias capas. Cada capa tiene su propia matriz de pesos

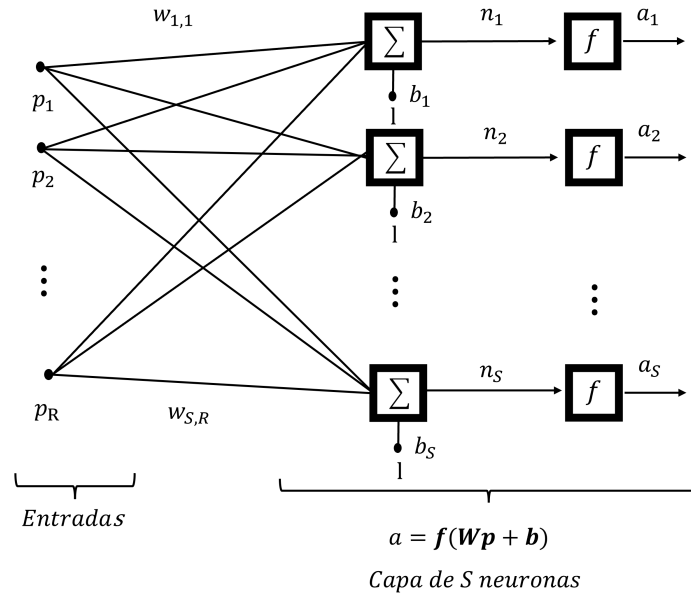


Figura 2.4: Diagrama de red neuronal de una capa con S neuronas.

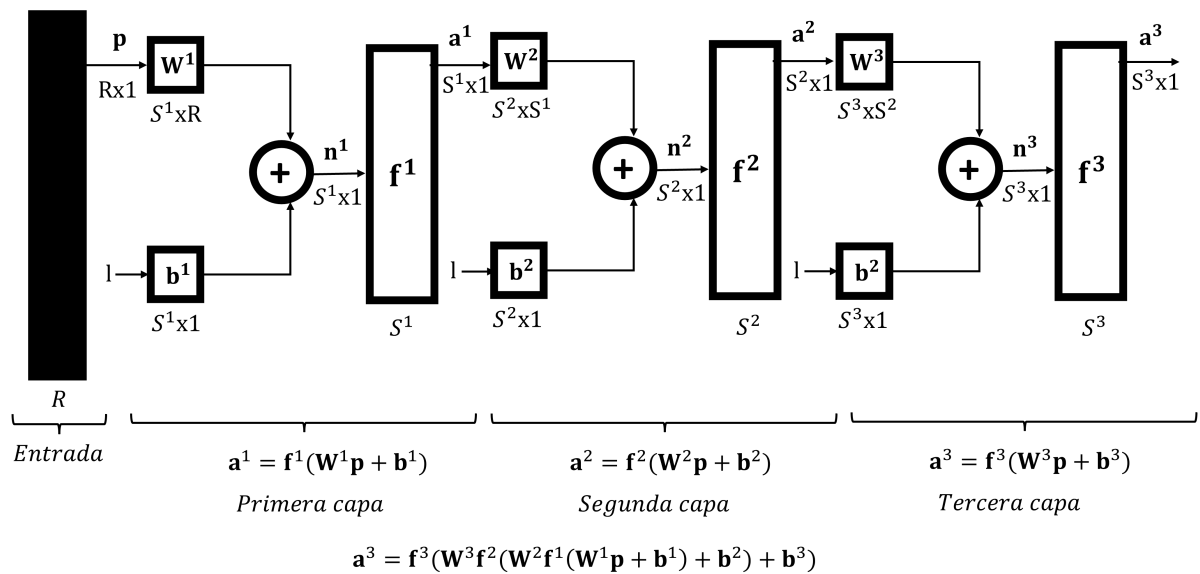


Figura 2.5: Diagrama de una red neuronal con tres capas.

W , su propio vector de *bias* b , una entrada neta como vector n y una salida vector a . Como se muestra en la figura (2.5), hay R entradas, S^1 neuronas en la primera capa, S^2 neuronas en la segunda y así sucesivamente. Cada capa puede tener diferente número de neuronas. Las salidas de las capas 1 y 2 son las entradas para las capas 2 y 3.

Una capa que es la salida de la red es llamada la capa salida mientras que las otras son capas ocultas.

Redes Recurrentes.

Una red recurrente es una red con retroalimentación, donde alguna de sus salidas son conectadas a sus entradas. Un tipo de red recurrente en tiempo discreto se muestra en la siguiente figura (2.6) El vector p suple la condición inicial.

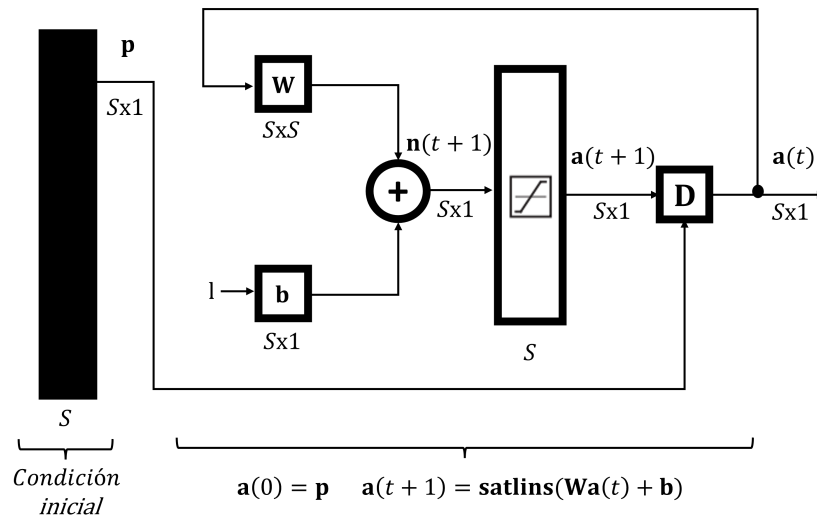


Figura 2.6: Diagrama de una red neuronal recurrente.

Ahora bien, ya que se introdujo el concepto de red neuronal artificial vamos a definir el tipo de red en específico que se utilizó en esta tesis.

Redes neuronales competitivas.

Las redes competitivas de Grossberg [137], están inspiradas en el sistema visual, constan de 3 componentes: capa 1, capa 2 y los pesos adaptativos. La capa 1 es un modelo aproximado del funcionamiento de la retina, mientras que la capa 2 representa la corteza visual. La red incluye, Memoria de Corto Plazo (MCP o STM por sus siglas en inglés) y Memoria de Largo Plazo (MLP o LTM por sus siglas en inglés), mecanismos, realiza la adaptación, el filtrado, la normalización y la mejora del contraste.

La capa 1. La capa 1 de la red de Grossberg recibe entradas externas y normaliza la intensidad del patrón de entrada. La ecuación de la operación de la capa 1 es

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{n}^1(t)}{dt} = -\mathbf{n}^1(t) + (\mathbf{b}^{1+} - \mathbf{n}^1(t))[\mathbf{W}^{1+}]\mathbf{p}^+ - (\mathbf{n}^1(t) + \mathbf{b}^{1-})[\mathbf{W}^{1-}]\mathbf{p}^- \quad (2.28)$$

donde ε es una constante de tiempo y es la velocidad de respuesta. El \mathbf{p}^+ es un valor positivo representando la entrada excitadora a la red (la entrada que causa que la respuesta aumente) y \mathbf{p}^- es un valor no negativo que representa la entrada inhibidora (que causa que la respuesta decrezca). Los *bias* \mathbf{b}^+ y \mathbf{b}^- son constantes no negativos que determinan el límite superior e inferior en la respuesta de la neurona. \mathbf{W}^{1+} es la entrada inhibidora de la capa 1 es $[\mathbf{W}^{1-}]\mathbf{p}$, donde

$$\mathbf{W}^{1-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

La entrada excitadora a la neurona i es la i -ésimo elemento del vector de entrada y

$$\mathbf{W}^{1+} = I \quad (2.30)$$

donde I es la matriz identidad.

La capa 2. La segunda capa de la red de Grossberg, es una capa de estadios de tiempo continuos y realiza varias funciones. Primero, como la capa 1 normaliza la actividad total en la capa. En segundo lugar, el contraste mejora su patrón de modo que la neurona que recibe la entrada mas grande dominara la respuesta. Por último, funciona como una memoria a corto plazo (STM) al almacenar el patrón de contraste mejorado. La principal diferencia entre la capa 1 y la capa 2 es que la 2 usa conexiones de retroalimentación. La retroalimentación permite a la red almacenar un patrón, incluso después de que se haya eliminado la entrada. También realiza la competencia que causa el realce del contraste del patrón.

La ecuación de la operación de la capa 2 es

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{n}^2(t)}{dt} = -\mathbf{n}^2(t) + (\mathbf{b}^{2+} - \mathbf{n}^2(t))\{[\mathbf{W}^{2+}]\mathbf{f}^2(\mathbf{n}^2(t)) + \mathbf{W}^2\mathbf{a}^1\} - (\mathbf{n}^2(t) + \mathbf{b}^{2-})[\mathbf{W}^{2-}]\mathbf{f}^2(\mathbf{n}^2(t)). \quad (2.31)$$

Esto es la entrada excitadora $\{[\mathbf{W}^{2+}]\mathbf{f}^2(\mathbf{n}^2(t)) + \mathbf{W}^2\mathbf{a}^1\}$ donde $\mathbf{W}^{2+} = \mathbf{W}^{1+}$, la cual proporciona conexiones de retroalimentación en el centro y consiste en pesos adaptativos \mathbf{W}^2 . Las filas de \mathbf{W}^2 después del entrenamiento, representaran los patrones prototipo. La entrada inhibitoria en este caso es $[\mathbf{W}^{2-}]\mathbf{f}^2(\mathbf{n}^2(t))$ la cual proporciona conexiones de retroalimentación.

2.4 DISEÑOS DE CONTROL

Como se vió en las secciones anteriores de este capítulo, se definieron conceptos preliminares de los distintos sistemas dinámicos y tipos de redes neuronales que se tomaron en consideración en este trabajo. Sin embargo, falta considerar los distintos diseños de control que se han implementado o definido en estas ultimas décadas para poder analizar las mejoras que se proponen en esta tesis.

2.4.1 CONTROL CONVERGENTE EN TIEMPO FINITO

Consideramos el sistema dinámico de la forma

$$\dot{x}(t) = u(t) + \zeta(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.32)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el sistema de estado, $u(t) \in R^n$ es la entrada del control, $\zeta(t) \in R^n$ es un disturbio que satisface la condición de Lipschitz con una constante L conocida

$$\|\zeta(t_1) - \zeta(t_2)\| \leq L(t_1 - t_2)$$

para cualquier $t_1, t_2 \geq t_0$

Definición 6. *El sistema de control vectorial (2.32) es llamado convergente al origen en tiempo finito si para una condición inicial $x_0 \in R^n$, existe un momento de tiempo $T(x_0)$ tal que el estado del sistema $x(t) \in R^n$ es igual a cero, $x(t) = 0$, para todo $t \geq T$.*

Un ejemplo de un control convergente en tiempo finito fue el algoritmo propuesto por Levant (1993) [51], de la siguiente manera. Consideremos un sistema dinámico

$$\ddot{x} = a(t) + b(t)u \quad (2.33)$$

donde $|a(t, x)| < C, 0 \leq K_m \leq b(t, x) \leq K_M$

$$u = -r_1 \text{sgn}(x) - r_2 \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.34)$$

donde $r_1, r_2 > 0$, por lo que sigue con el siguiente lema:

Teorema 6. [3] *Sea r_1 y r_2 que satisface las condiciones*

$$K_m(r_1 + r_2) - C > K_M(r_1 - r_2) + C, K_m(r_1 - r_2) > C$$

entonces, el controlador (2.34) provee convergencia de las trayectorias $x = \dot{x} = 0$ en tiempo finito por el control de orden 2 en modos deslizantes.

La demostración de este teorema se puede ver en el libro [3].

Como bien se dijo en el teorema este algoritmo se caracteriza por la forma en que las trayectorias del sistema convergen al origen del plano de desplazamiento, $x = \dot{x} = 0$, luego de infinitos giros a su alrededor.

El algoritmo (2.34) es muy sencillo, pero tiene la desventaja de requerir información sobre la derivada de la variable de desplazamiento, es decir, requiere al menos conocer el signo de $\dot{\sigma}$, además es una ley de control discontinua y esto es poco práctico para la vida real.

2.4.2 CONTROL CONVERGENTE EN TIEMPO FIJO

En 1998, Levant [52] propone un algoritmo robusto para sistemas dinámicos bajo disturbios determinísticos, el cual, era convergente en tiempo finito y además daba una estimación de la cota superior del tiempo de convergencia. Este trabajo inspiró a muchos otros investigadores para diseñar algoritmos convergentes en tiempo fijo según la siguiente definición.

Definición 7. *El sistema de control vectorial (2.32) es llamado convergente al origen en tiempo fijo, si existe un momento de tiempo T tal que el estado del sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es igual a cero, esto es; $x(t) = 0$, para todo $t \geq T$, empezando de cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Por ejemplo para el sistema (2.32), se introdujo una ley de control continua [138],

$$u(t) = -\lambda_1|x(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(x) - \lambda_2|x(t)|^p\text{sign}(x(t)) - \alpha \int_{t_0}^t \text{sign}(x(s))ds, \quad (2.35)$$

la cual es una entrada de control llamada de tipo “super-twisting”, donde el sistema resultante en lazo cerrado es representado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\lambda_1|x(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(x) - \lambda_2|x(t)|^p\text{sign}(x(t)) + y(t), & x(t_0) &= (x_0) \\ \dot{y}(t) &= -\alpha\text{sign}(x(t)) + \dot{\zeta}(t), & y(t_0) &= \zeta(t_0), \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $|x|$ representa la norma de un escalar. Entonces sigue el siguiente teorema:

Teorema 7. *Considere un sistema dinámico (2.36) en presencia de un disturbio $\zeta(t)$ que satisface la condición de Lipschitz con una constante conocida L y una condición inicial $y(t_0) = \zeta(t_0)$ acotada por una constante K . Entonces, ambos estados $x(t)$ y $y(t)$ convergen al origen uniformemente en tiempo fijo T_f dado por*

$$\begin{aligned} T_f \leq & \left(\frac{1}{\lambda^2(p-1)} e^{p-1} + \frac{2\epsilon^{1/2}}{\lambda_1} + \frac{K}{M} \right) \\ & \times \left(1 + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{M - h(\lambda_1)/\lambda_1} \right) \right) + \frac{K}{m}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $\epsilon > 0$, $M = \alpha + L$, $m = \alpha - L$, $h(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{2e}{m\lambda_1}\right)^{1/3}$, y e es la base del logaritmo natural. Si se cumplen las siguientes condiciones para las ganancias del control: $\alpha > L$, $\lambda_1 h^{-1}(\lambda_1) > M$. El mínimo valor de $T_f(\epsilon)$ es alcanzado por $\epsilon = (\lambda_1/\lambda_2)^{(p+1)/2}$.

La demostración de este teorema se encuentra en el apéndice de [138].

2.4.3 CONTROL CONVERGENTE EN TIEMPO ARBITRARIO.

Definición 8. [1](Estable en tiempo arbitrario) El origen del sistema (2.32) es llamado estable en tiempo arbitrario si,

- es estable en tiempo fijo,
- $\exists T_a > 0$, el cual depende de los parámetros del sistema y los cuales pueden ser evaluados por adelantado.
- es posible ajustar T_a arbitrariamente haciendo variaciones en los parámetros del sistema bajo la suposición de que estas variaciones son permitidas para el diseño propuesto y
- para cualquier conjunto de parámetros, cualquiera de los siguientes enunciados puede ser establecido
 1. $T_f \leq T_a$ (estabilidad débil en tiempo arbitrario)
 2. $T_f = T_a$ (estabilidad fuerte en tiempo arbitrario)

donde T_f es el tiempo fijo verdadero.

Definición 9. (Estable en tiempo arbitrario libre) El origen del sistema (2.32) es llamado estable en tiempo arbitrario libre si,

- es estable en tiempo fijo,
 - $\exists T_a > 0$, el cual es independiente de cualquier parámetro y condiciones iniciales del sistema y puede ser elegido arbitrariamente por adelantado y,
-

■ cualquiera de los siguientes enunciados puede ser establecido

1. $T_f \leq T_a$ (estabilidad débil en tiempo arbitrario libre)
2. $T_f = T_a$ (estabilidad fuerte en tiempo arbitrario libre)

Un ejemplo de una ley de control convergente en tiempo arbitrario libre fue propuesta en [1]. Sea el sistema (2.32) en el caso escalar, donde se desprecia el término $\zeta(t)$, y sea $u(t)$ la ley de control no autónoma como sigue

$$u(t) = \begin{cases} -\eta \frac{(e^{x(t)}-1)}{e^{x(t)}(t_f-t)}, & t_0 \leq t < t_f, \\ 0, & t_f \leq t, \end{cases} \quad (2.38)$$

aquí las constantes del control son definidas positivas. Los autores mediante los teoremas 1 y 2 en [1] prueban la convergencia en tiempo arbitrario libre del sistema (2.32) en sentido de la definición 9 para sistemas n-dimensionales.

2.4.4 CONTROL CONVERGENTE EN TIEMPO FIJO PARA SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

Ademas de los controles para sistemas dinámicos determinísticos, los reguladores para sistemas estocásticos han tenido gran auge en la investigación, en esta sección se presentará definiciones importantes de convergencia y un ejemplo de un control para estabilizar un sistema dinámico estocástico.

Considere un sistema dinámico estocástico de n-dimensiones

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW \quad (2.39)$$

$$X(0) = X_0 \in \mathbb{R} \quad t \geq 0 \quad (2.40)$$

Donde el proceso estocástico $X(t) = X_t(W)$, $X(t) \in \mathbb{R}$ es el vector de estado con una condición inicial $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$, $W(t) \in \mathbb{R}$ es un proceso de Wiener definido en el espacio de probabilidad (ω, F, Pr) , ω es el espacio muestra, F es un σ -álgebra con una

filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$ y Pr una medida de probabilidad. Asumiendo que los coeficientes de la ecuación (2.39) son Borel, continuos en X y satisfaciendo $f(t, 0) = 0$, $\sigma(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Definición 10. [117] *La solución trivial del sistema en la ecuación (2.39) se dice globalmente convergente en tiempo fijo en media ρ , si para cualquier condición inicial del estado X_0 existe una constante positiva $T_{max} > 0$ (independiente de X_0) tal que $E[X(t)]^\rho = 0$.*

Consideremos el sistema estocástico escalar sin la presencia de disturbios determinísticos, como

$$dx(t) = u(t)dt + \sigma(t, x(t))dW(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.41)$$

satisfaciendo las mismas condiciones para (2.39). Se establece el siguiente teorema con las condiciones suficientes para convergencia en tiempo fijo en media ρ del sistema estocástico (2.41).

Teorema 8. [117] *El sistema en lazo cerrado del sistema estocástico (2.41) y la entrada de control (2.42) es convergente en tiempo fijo al origen en media ρ , $\rho > 1$, si $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$ y $\sigma(t, x(t)) = |x|^r$ donde $(1 + q) \leq 2r \leq (1 + p)$.*

$$u(t) = -\lambda_1|x|^q \text{sign}(x) - \lambda_2|x|^p \text{sign}(x). \quad (2.42)$$

El sistema en lazo cerrado está dado por la siguiente ecuación:

$$dx(t) = [-\lambda_1|x|^q \text{sign}(x) - \lambda_2|x|^p \text{sign}(x)]dt + \sigma(t, x(t))dW(t) \quad (2.43)$$

Demostración.

Considere una función de Lyapunov

$$V(x) = E[|x|^\rho], \quad \rho > 1 \quad (2.44)$$

Entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = E[\rho|x|^{\rho-1}\text{sign}(x)] \quad (2.45)$$

y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = E[\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2}\text{sign}(x)] \quad (2.46)$$

Aplicando la formula de Itô sigue que

$$\begin{aligned} dV &= E[\rho|x|^{\rho-1}\text{sign}(x)[- \lambda_1|x|^q\text{sign}(x) - \lambda_2|x|^p\text{sign}(x) + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(t, x(t))\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2}]]dt \\ &+ E[\rho|x|^{\rho-1}\text{sign}(x)\sigma(t, x(t))]dW \\ &= E[-\rho\lambda_1|x|^{\rho-1+q} - \rho\lambda_2|x|^{\rho-1+p} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x(t))\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2p}]dt \\ &+ E[\rho|x|^{\rho-1}\text{sign}(x)\sigma(t, x(t))]dW \end{aligned}$$

Denotando $V_t = V(x(t))$ y usando la forma integral de (2.39), obtenemos

$$V_{t+\Delta t} - V_t = \int_t^{t+\Delta t} E[\psi(\tau)]d\tau + E\left[\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial V}{\partial x}\sigma(\tau, x(\tau))dW(\tau)\right] \quad (2.47)$$

donde $\psi(t) = -\rho\lambda_1|x|^{\rho-1+q} - \rho\lambda_2|x|^{\rho-1+p} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x(t))\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2p}$

Dividiendo por Δt , donde $\Delta t \rightarrow 0$ y asumiendo que

$$\int_t^{t+\Delta t} E\left[\sigma^2(\tau, x(\tau))\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau < \infty \quad (2.48)$$

se obtiene

$$\frac{dV(x)}{dt} = E[-\rho\lambda_1|x|^{\rho-1+q} - \rho\lambda_2|x|^{\rho-1+p} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x(t))\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2}] \quad (2.49)$$

tomando en cuenta que

$$E\left[\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial V}{\partial x}\sigma(\tau, x(\tau))dW(\tau)\right] = 0 \quad (2.50)$$

Note que la integral dada en (2.48) es finita para todo $\sigma(t, x(t))$ satisfaciendo $\sigma(t, x(t)) = |x|^r$ donde $(1 + q) \leq 2r \leq (1 + p)$.

Expresando el lado derecho de la ecuación (2.49) en términos de $|x|$ resulta como,

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq E[-\rho\lambda_1|x|^{\rho-1+q} - \rho\lambda_2|x|^{\rho-1+p} + \frac{1}{2}\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2r}] \quad (2.51)$$

donde $0 < \frac{\rho-1+q}{\rho} = 1 - \frac{1-q}{\rho} < 1$ y $\frac{\rho-1+p}{\rho} = 1 - \frac{\rho-1}{\rho} > 1$.

Se consideran 2 casos:

1. Si $|x| \leq 1$. Usando la condición $(1 + q) \leq 2r$ y $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$ implica que $\rho\lambda_1|x|^{\rho-1+q} > \frac{1}{2}\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2r}$ y por lo tanto, $\frac{1}{2}\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2r} - \rho\lambda_1|x|^{\rho-1+q} \leq (\frac{1}{2}(\rho-1) - \lambda_1)\rho|x|^{\rho-1+q} < 0$.
2. Si $|x| \geq 1$. Usando la condición $(1 + p) \geq 2r$ y $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$ implica que $\rho\lambda_2|x|^{\rho-1+p} > \frac{1}{2}\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2r}$ y por lo tanto, $\frac{1}{2}\rho(\rho-1)|x|^{\rho-2+2r} - \rho\lambda_2|x|^{\rho-1+p} \leq (\frac{1}{2}(\rho-1) - \lambda_2)\rho|x|^{\rho-1+p}$.

Así que, la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov satisface la desigualdad

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -aV(x)^b - cV(x)^d, \quad (2.52)$$

donde $a = \rho(\lambda_1 - \frac{1}{2}(\rho-1)) > 0$, $c = \rho(\lambda_2 - \frac{1}{2}(\rho-1)) > 0$, $b = \frac{\rho-1+q}{\rho} \in (0, 1)$, $d = \frac{\rho-1+p}{\rho} > 1$.

Por lo tanto, en vista del Lema 1 en [53], el sistema (2.43) es globalmente convergente en tiempo fijo en el origen en media ρ . ■

Ahora consideremos el siguiente teorema para el caso de un sistema estocástico bajo disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz, como sigue:

$$\begin{aligned} dx(t) &= [-\lambda_1|x|^q \text{sign}(x) - \lambda_2|x|^p \text{sign}(x)]dt + \sigma(t, x(t))dW(t) \\ dy(t) &= [-\alpha \text{sign}(x(t)) + \dot{\xi}(t)]dt \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = 0$, $[x(t), y(t)] \in \mathbb{R}^2$ es un proceso estocástico de dos dimensiones, $W(t)$ es un proceso de Wiener descrito para el caso sin disturbios y $\xi(t)$ es un

disturbio determinístico que satisface la condición de Lipschitz y las características de las constantes del control $\lambda_1, \lambda_2, \alpha > 0$.

Teorema 9. [117] *Sea el sistema estocástico en lazo cerrado de la ecuación (2.53) es globalmente convergente en tiempo fijo al origen en media ρ , $\rho > 1$, siempre que las condiciones para las ganancias $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ obtenidas en [52, 61, 57, 55, 139] se asumen adicionalmente.*

Demostración. Se considera dos casos, el primero es si $\sigma(t, x(t)) = 0$, lo cual reduciría el sistema (2.53) a un sistema determinístico “super-twisting”, el cual es convergente en tiempo fijo al origen como se mostró en la sección (2.4.2).

En el segundo caso, si $\sigma(t, x(t)) \neq 0$ y el disturbio es ausente, esto es, $\xi = 0$, el sistema (2.53) es convergente en tiempo fijo en el origen en media ρ para $\alpha = 0$ por el teorema 8. Si el disturbio es distinto de cero, es compensado asumiendo adicionalmente cualquiera de las condiciones para las constantes $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ obtenidas en [52, 61, 57, 55, 139], siguiendo del artículo [52], aplicando consideraciones geométricas relacionadas con una “curva mayor”, en vista de $\alpha > L$, donde L es la constante de Lipschitz, la suma del vector de velocidad del sistema (2.53) dada por el término $\alpha \text{sign}(x(t)) + \dot{\xi}(t)$ siempre sería dirigida dentro de la curva definida por el lado derecho de la ecuación (2.41), que converge en un tiempo fijo debido al teorema 8. Por lo tanto el sistema (2.53) converge al origen en un tiempo fijo en presencia de disturbios determinísticos. ■

Teniendo todas estas definiciones y teoremas importantes podemos proceder a los siguientes capítulos donde se plantean y resuelven los problemas para la realización de esta tesis.

CAPÍTULO 3

ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE UN MOTOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El modelo matemático de un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) puede ser representado por las siguientes ecuaciones [140]

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_t}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega - \frac{F}{J} \\ \frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d}i_d + n_p\omega i_q + \frac{u_d}{L_d} \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q}i_q + n_p\omega i_d - \frac{n_p\phi_v}{L_q}\omega + \frac{u_q}{L_q}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Donde, L_d y L_q son las inductancias de los ejes $d - q$ satisfaciendo $L_d = L_q = L$, u_d y u_q los voltajes del estátor de los ejes $d - q$, i_d y i_q las corrientes del estátor de los ejes $d - q$, R_s las resistencias del estátor, ω la velocidad del rotor, n_p el número de pares de polos, ϕ_v el enlace de flujo del rotor, $K_t = \frac{3n_p\phi_v}{2}$, F el par de carga, J el momento de inercia, y B el coeficiente de fricción viscosa. En este trabajo, la estrategia de $i_d = 0$ es utilizada. Entonces, la primera ecuación en (3.1) puede ser reescrita como

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_t}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega + \zeta, \quad \omega(t_0) = \omega_0,\tag{3.2}$$

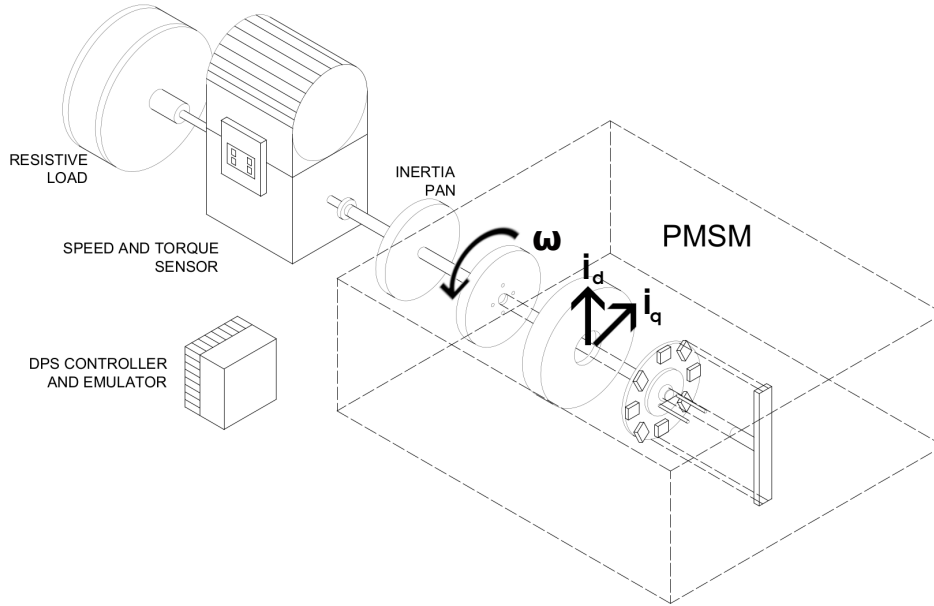


Figura 3.1: Diagrama electromecánico del motor síncrono de imanes permanentes

aquí i_q es la entrada de control y $\zeta = -\frac{F}{J}$ es un disturbio.

El problema de control es diseñar una ley de control continua llevando los estados del sistema en lazo cerrado resultante al origen por un tiempo predefinido en el sentido de las siguientes definiciones.

Considere un sistema de n dimensiones

$$\begin{aligned} dx(t) &= (u(t) + \xi(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t), \\ x(t_0) &= x_0 \in R^n, t > 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $x(t) \in R^n$ es un estado, $u(t) \in R^n$ es una entrada de control, $\xi \in R^n$ es un disturbio que satisface la condición de Lipschitz

$$\|\xi(t_1) - \xi(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|$$

para cualquier $t_1, t_2 \leq t_0$, con una cierta constante L . $W(t)$ es un proceso de Wiener definido en el espacio de probabilidad completo (Ω, F, P) , donde Ω es el espacio muestra, F es un σ -campo con una filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$, y P una medida de probabilidad. La condición

$\sigma(t, 0) = 0$ se satisface para todo $t \geq 0$.

Considere dos casos:

a) $\sigma(t, x(t)) = 0$. El sistema (3.3) se reduce a un sistema determinístico.

Definición 11. (Convergencia en tiempo predefinido para un sistema determinístico.) El sistema (3.3) es llamado convergente en tiempo predefinido al origen, si

1. es convergente en tiempo fijo al origen para cualquier condición inicial del estado $x_0, \in R^n$, existe una constante positiva $T_{max} > 0$ independiente de x_0 tal que $x(t) = 0$ para todo $t \geq T_{max}$,
2. T_{max} es independiente de las condiciones iniciales y disturbios además puede ser elegido arbitrariamente por adelantado, y
3. $T_{max} \geq T_f$, donde T_f es el tiempo de convergencia real.

b) $\sigma(t, x(t)) \neq 0$. El sistema (3.3) es un sistema estocástico.

Definición 12. (Convergencia en tiempo predefinido para un sistema estocástico.) El sistema (3.3) es llamado convergente en tiempo predefinido al origen en media ρ , si

1. es convergente en tiempo predefinido al origen en media ρ , esto es, para cualquier condición inicial del estado $x_0 \in R^n$, existe una constante positiva $T_{max} > 0$ independiente de x_0 , tal que $E[(x(t)^\rho)] = 0$ para todo $t \geq T_{max}$,
 2. T_{max} es independiente de las condiciones iniciales y disturbios además puede ser elegido arbitrariamente por adelantado, y
 3. $T_{max} \geq T_f$, donde T_f es el tiempo de convergencia real.
-

3.2 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO SIN DISTURBIOS

3.2.1 DISEÑO DE CONTROL

Considere el sistema (3.2), donde $\zeta = 0$. Entonces, la ecuación (3.2) se reduce a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_t}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad (3.4)$$

donde la ley de control es diseñada como

$$i_q = \frac{J}{K_t}(u_1(t) + u_2(t)). \quad (3.5)$$

. Definiendo $u_1(t) = \frac{B}{J}\omega$ es el término de compensación y $u_2(t)$ es definido como

$$u_2(t) = \begin{cases} -\eta \frac{(e^{|\omega(t)|} - 1)}{e^{|\omega(t)|(t_f - t)}} \text{sign}(\omega(t)), & t_0 \leq t < t_f, \\ 0, & t_f \leq t, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $\eta > 1$.

Teorema 10. *La ley de control (3.5) lleva al estado $\omega(t)$ del sistema (3.4) y su derivada $\dot{\omega}(t)$ al origen para un tiempo asignado a priori t_f y permanece ahí después para cualquier $t \geq t_f$. En otras palabras, el sistema en lazo cerrado (3.4),(3.5) es convergente al origen en tiempo predefinido.*

Demostración.

Sustituyendo (3.5) en (3.4) da como resultado la siguiente ecuación

$$\dot{\omega}(t) = u_2(t), \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad (3.7)$$

o, equivalentemente

$$\dot{\omega}(t) = \frac{-\eta(e^{|\omega(t)|} - 1)}{e^{|\omega(t)|(t_f - t)}} \text{sign}(\omega(t)), \quad t_0 \leq t < t_f, \quad (3.8)$$

$$\dot{\omega}(t) = 0, \quad t \geq t_f,$$

$$\omega(t_0) = \omega_0,$$

cuya solución es dada por

$$\omega(t) = \ln(C_1(t_f - t)^\eta + 1) \text{sign}(\omega_0), \quad t_0 \leq t < t_f \quad (3.9)$$

$$\omega(t) = 0, \quad t \geq t_f$$

donde $C_1 = \frac{e^{|\omega_0|} - 1}{(t_f - t_0)^\eta}$. Por consiguiente, $\omega(t)$ es una función suave, igual a cero para todo $t \geq t_f$. La derivada de (3.9) es dada por

$$\dot{\omega}(t) = \frac{-\eta C_1 (t_f - t)^{\eta-1}}{C_1 (t_f - t)^\eta + 1} \text{sign}(\omega(t)). \quad (3.10)$$

Se puede ver de la ecuación (3.10) que cuando $\dot{\omega}(t) = 0$ para $t_f = t$ y también para $t_f > t$. Por lo tanto, $\dot{\omega}(t)$ es una función continua, igual a cero para todo $t \geq t_f$. $\dot{\omega}(t)$ también es suave, si $\eta > 2$. ■

3.2.2 SIMULACIONES

Para demostrar la eficiencia de la ley de control propuesta, se presentan simulaciones numéricas de el sistema del motor síncrono de imanes permanentes conformado por las ecuaciones (3.4),(3.5). Los parámetros del MSIP usados en la simulación son asignados como $J = 1.74 \times 10^{-4} \text{kg} \times \text{m}^2$, $B = 7.403 \times 10^{-5} \text{N}$, $n_p = 4$, $\phi_v = 0.1167 \text{wb}$. Los parámetros del control son $\eta = 30$, $t_f = 20$. Las condiciones iniciales tratadas y los tiempos correspondientes obtenidos por la simulación están dados en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.

x_0	10	100	1000	10^4	10^5
t_{sim}	15.5	19.65	19.9	20	20

Las figuras de la 3.2 a la 3.5 presentan las historias de tiempo de $\omega(t)$ para las condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $\omega_0 = -100$, también se muestra un acercamiento de las historias de tiempo, las cuales demuestran que el sistema (3.4) es convergente al origen en tiempo predefinido para un tiempo deseado t_f , como se estableció en el Teorema 10. Finalmente, la figura 3.6 muestra el comportamiento de la entrada de control (3.5) para la condición inicial $w_0 = 100$.

Se hicieron comparaciones con la ley de control de tiempo predefinido dada en [1] dada en la ecuación (2.38). Las simulaciones numéricas son realizadas para el sistema (3.7) con la condición inicial $w_0 = -100$ y el sistema (1) en [1] con la condición inicial $x_0 = -100$. Las correspondientes gráficas de las entradas de control se muestran en las Figuras 3.8-3.9. Los resultados de la simulación muestra que la ley de control de [1] no es factible en vista de su magnitud tan grande, mientras que la ley de control (3.6) permanece en el rango de los valores aceptados en la práctica.

Note que la ley de control (3.6) depende solamente de los valores absolutos del estado $\omega(t)$. Por lo tanto, las trayectorias del estado y las entradas de control correspondientes a los valores iniciales positivos y negativos de la misma magnitud se reflejan simétricamente con respecto al eje del tiempo, por lo tanto el fenómeno de crecimiento no toma lugar ni siquiera para valor iniciales del estado negativos.

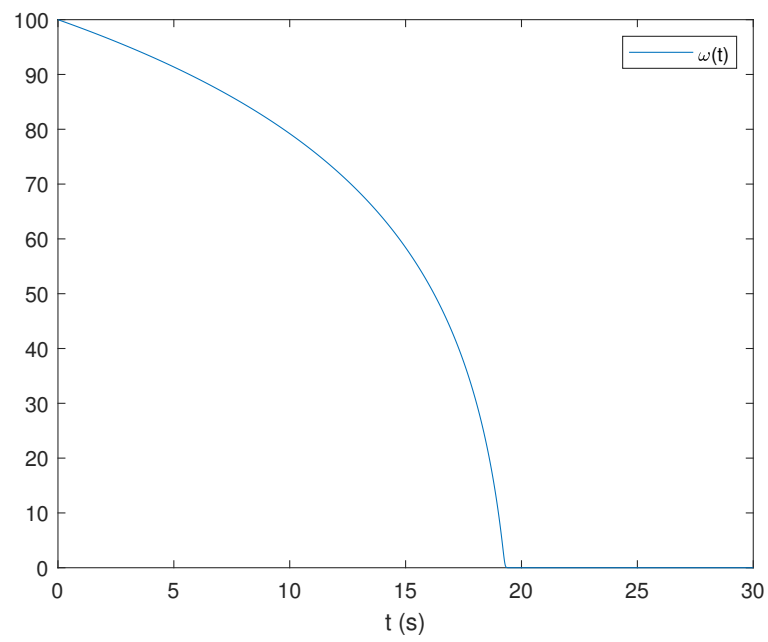


Figura 3.2: Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = 100$.

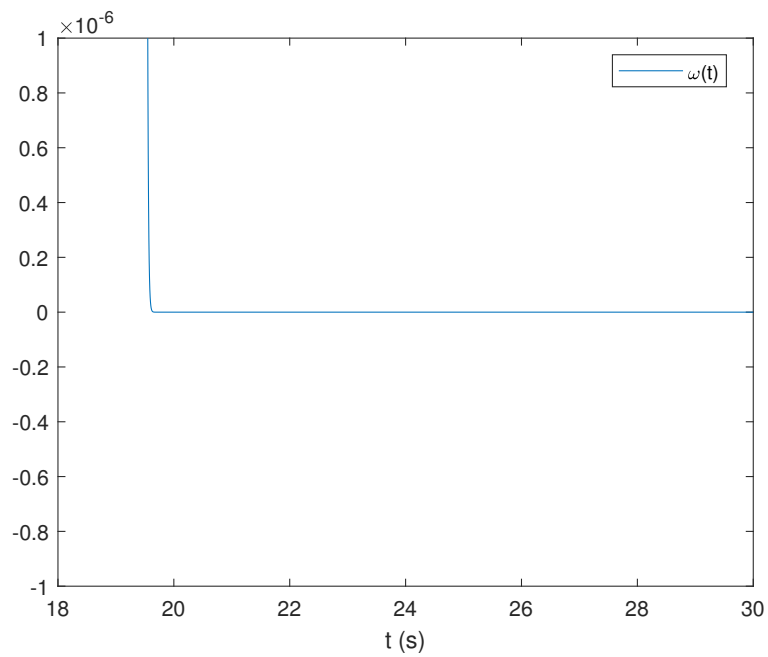


Figura 3.3: Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = 100$ (acercamiento).

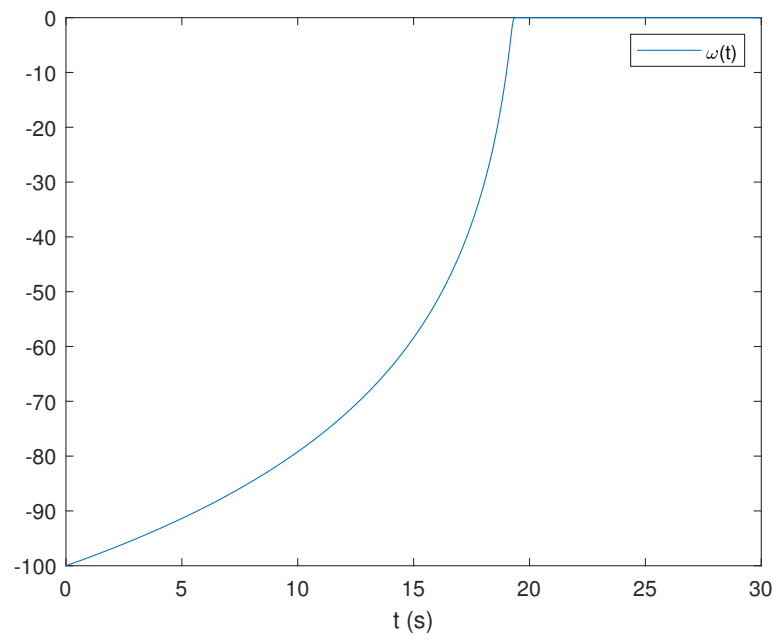


Figura 3.4: Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = -100$.

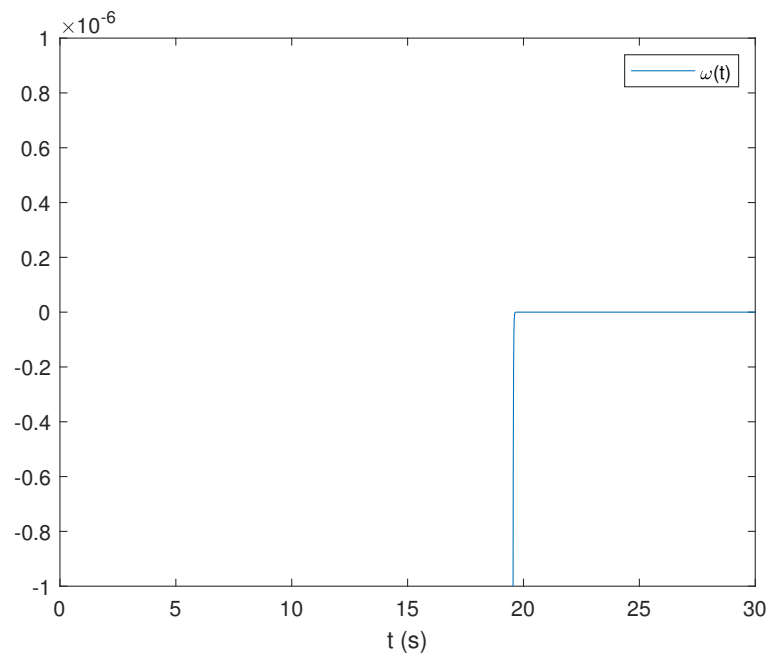
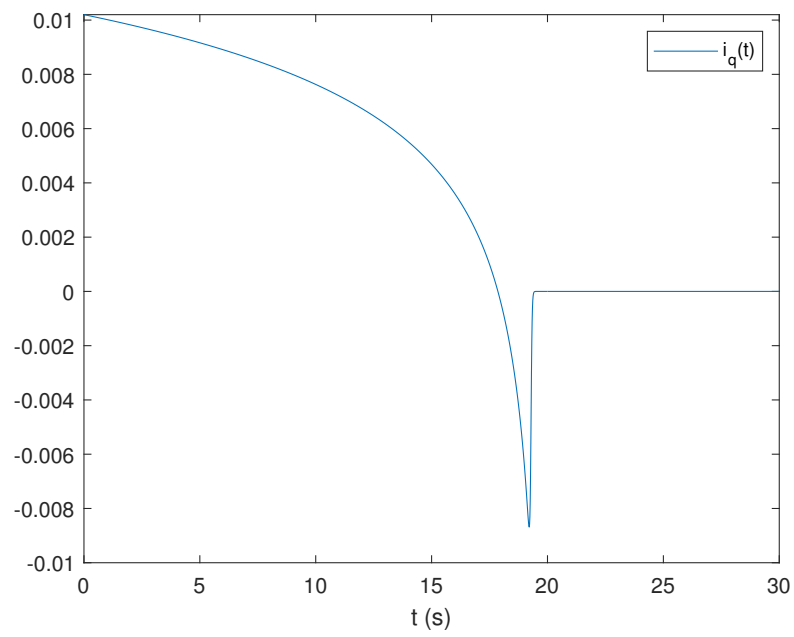
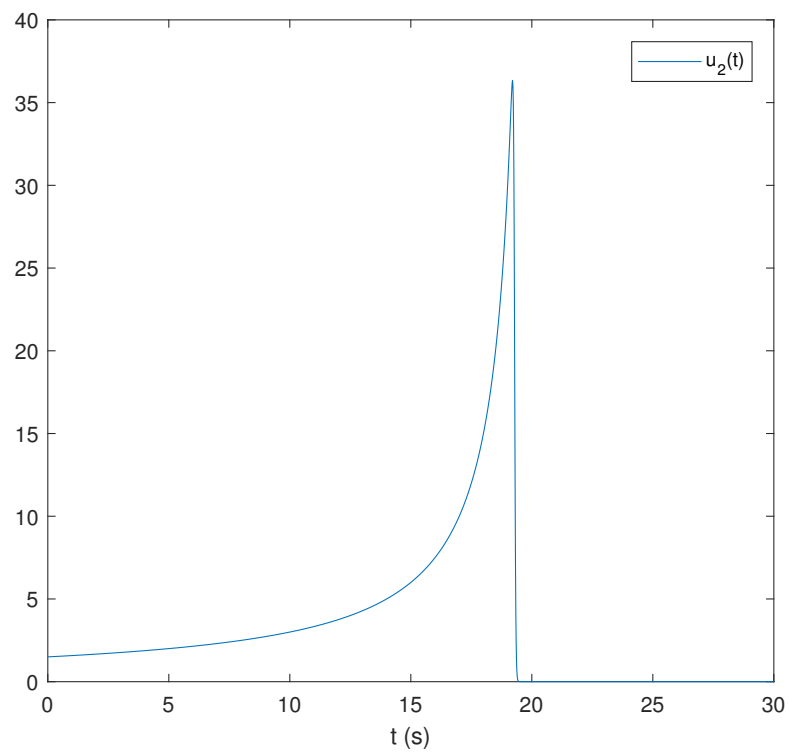


Figura 3.5: Historias de tiempo de $\omega(t)$ con la condición inicial $\omega_0 = -100$ (acercamiento).

Figura 3.6: Entrada de control (3.5) con $\omega_0 = 100$.Figura 3.7: Entrada de control (3.6) con $\omega_0 = -100$.

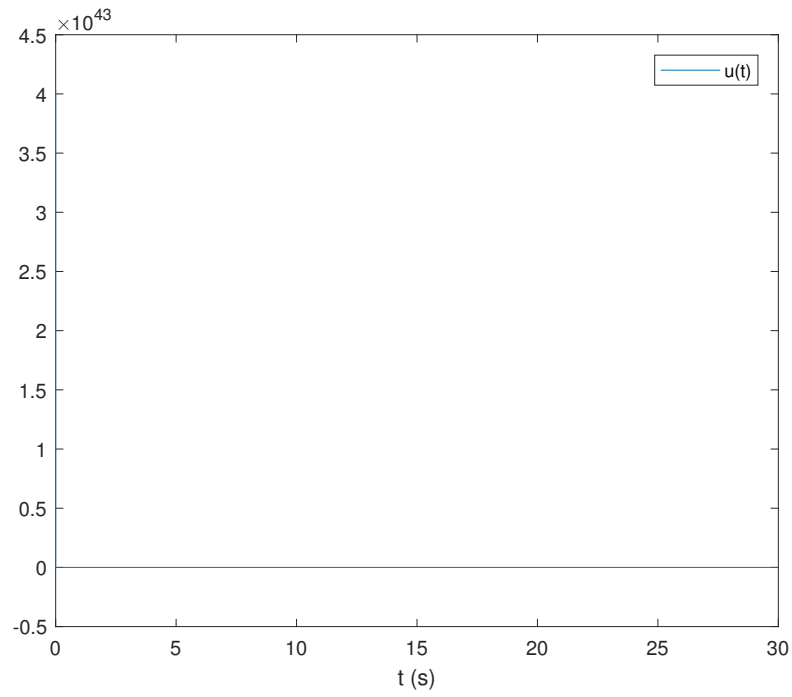


Figura 3.8: Entrada de control de [1] con la condición inicial $x_0 = -100$.

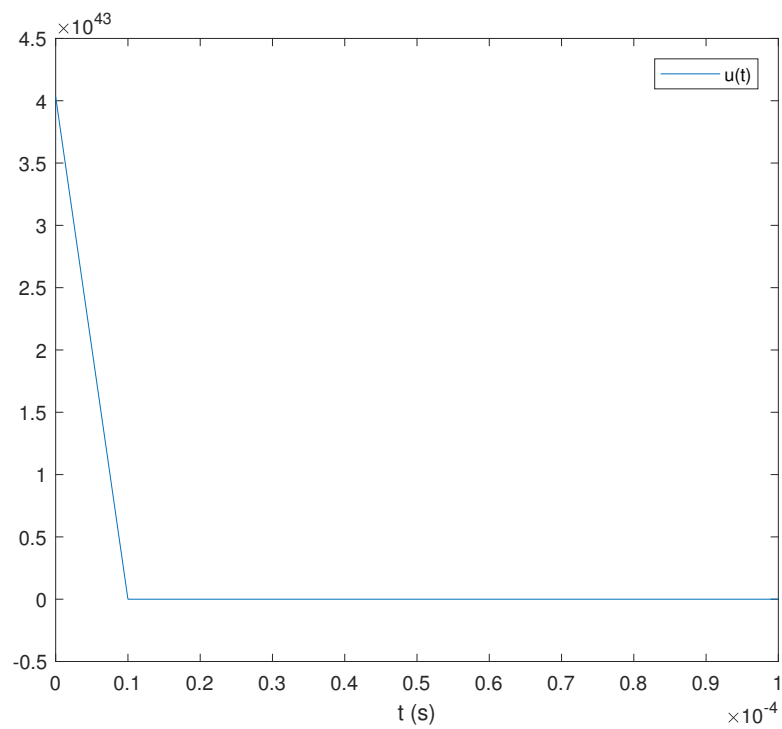


Figura 3.9: Acercamiento del comportamiento de la entrada de control de [1] con la condición inicial $x_0 = -100$.

3.3 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO BAJO DISTURBIOS DETERMINÍSTICOS.

Por otro lado, se diseñaron dos leyes de control convergentes en tiempo predefinido para un sistema de un MSIP en presencia de un disturbio determinístico $\zeta(t)$ que satisface la condición de Lipschitz con una constante L .

3.3.1 DISEÑO DE CONTROL

Considere la ecuación (3.2), donde $\zeta \neq 0$ y la ley de control es diseñada como

$$i_q = \frac{J}{K_t}(u_1(t) + u_2(t)), \quad (3.11)$$

donde $u_1(t)$ es definido en la sección anterior y $u_2(t)$ es para ser asignado. Sustituyendo $i_q(t)$ en (3.2) resulta

$$\dot{\omega}(t) = u_2(t) + \zeta(t),$$

donde $u_2(t)$ es dado por

$$u_2(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t)) - \lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t)) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(s))ds \\ -\eta \frac{(e^{|\omega(t)|}-1)}{e^{|\omega(t)|(t_f-t)}}\text{sign}(\omega(t)), & t_0 \leq t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t)) - \lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t)) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(s))ds, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (3.12)$$

Aquí, $\lambda_1, \alpha > 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\eta > 1$, y $p > 1$. la constante λ_2 puede ser seleccionada como $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_2 > 0$.

Teorema 11. *La ley de control (3.11) lleva al estado $\omega(t)$ del sistema (3.4) y su derivada $\dot{\omega}(t)$ al origen para un tiempo asignado a priori t_f y permanece ahí después para cualquier*

$t \geq t_f$. En otras palabras, el sistema en lazo cerrado (3.4), (3.11) es convergente al origen en tiempo predefinido en presencia de un disturbio determinístico $\zeta(t)$ satisfaciendo la condición de Lipschitz con una constante L , si las siguientes condiciones se mantienen: $\eta > 1$, $\alpha > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$, y $p > 1$.

El sistema de control en lazo cerrado puede ser representado en la forma convencional de “super-twisting”

$$\dot{\omega}(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t)) \\ -\lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t)) \\ -\eta\frac{(e^{|\omega(t)|}-1)}{e^{|\omega(t)|(t_f-t)}}\text{sign}(\omega(t)) + y(t), & t_0 \leq t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t)) \\ -\lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t)) + y(t), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha\text{sign}(\omega(t)) + \dot{\zeta}(t), \quad \omega(t_0) = \omega_0, y(t_0) = y_0.$$

Entonces, ambos estados $\omega(t)$ y $y(t)$ convergen al origen en tiempo predefinido t_f .

Demostración.

Como sigue del Teorema 4.5 en [3], las condiciones $\alpha > L$ y $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$ aseguran convergencia al origen en tiempo finito de ambos estados del sistema “super-twisting” (3.13), si $\eta = 0$, donde el término $-\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t))$ es responsable de la convergencia en tiempo finito de un sistema sin disturbios y el término $-\alpha\text{sign}(\omega(t))$ es responsable de suprimir el disturbio $\dot{\zeta}(t)$. Por lo tanto, el primero y tercer término en la ley de control (3.12), $-\eta\frac{(e^{|\omega(t)|}-1)}{e^{|\omega(t)|(t_f-t)}}\text{sign}(\omega(t))$, hace esta convergencia en tiempo finito predefinida por un tiempo no mayor que t_f . Finalmente, como sigue del teorema 1 en [138] agregando el segundo término en la ley de control (3.12) $-\lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t))$, da como resultado una convergencia en tiempo fijo de los estados del sistema (3.13) al origen, si $\eta = 0$, y la supresión del disturbio $\dot{\zeta}(t)$. Por consiguiente, la combinación de todos los cuatro términos en la ley de control (3.12) con $\lambda_2 > 0$ hace esta convergencia en tiempo fijo predefinida por

un tiempo no mayor a t_f y puede aumentar la tasa de convergencia en el caso de $\lambda_2 = 0$.

■

3.3.2 SIMULACIÓN DEL MSIP

Para demostrar la eficiencia de la ley de control propuesta, simulaciones numéricas han sido realizadas para un sistema de un MSIP (3.2), (3.12). Primero se consideró el caso donde $\lambda_2 = 0$. Los parámetros del MSIP usados en la simulación son asignados como $J = 1.74 \times 10^{-4} kg \times m^2$, $B = 7.403 \times 10^{-5} N$, $n_p = 4$, $\phi_v = 0.1167wb$. El disturbio determinístico es seleccionado como $\zeta(t) = \frac{1}{J}(0.1t + 0.01\cos(t))$; y en acorde a la condición de Lipschitz, $L = 633$. Los parámetros del control son $\eta = 30$, $t_f = 20$, $\lambda_1 = 50$, $\alpha = 635$, los cuales son seleccionados de tal modo que satisfacen las condiciones del Teorema 11. Las condiciones iniciales que se trataron y los tiempos correspondientes obtenidos en la simulación son dados en la tabla 3.2. Las figuras 3.10 y 3.11 presentan las historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ para las condiciones iniciales $\omega_0 = 100$, $y_0 = -50$ y $\omega_0 = -100$, $y_0 = -50$, además su respectivo acercamiento a las historias de tiempo, el cual demuestra convergencia en tiempo predefinido de los estados del MSIP al origen en un tiempo deseado t_f , como se estableció en el Teorema 11. La figura 3.12 muestra la entrada de control (3.11) para las condiciones iniciales $w_0 = 100$ y $y_0 = -50$. Luego, se consideró el caso donde $\lambda_2 > 0$, donde los valores de $\lambda_2 = 1$, $p = 1.5$ son seleccionados satisfaciendo las condiciones del Teorema 11 y los parámetros del control son los mismos que se han mencionado en la simulación anterior. Las condiciones iniciales y los tiempos correspondientes que se dieron en las simulaciones son dados en la tabla 3.3. Las figuras 3.13 y 3.14 presentan las historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ para las condiciones iniciales $\omega_0 = 100$, $y_0 = -50$ y $\omega_0 = -100$, $y_0 = -50$, así también se muestra el acercamiento de las gráficas correspondientes, el cual muestra la convergencia la convergencia al origen en tiempo predefinido de los estados del MSIP por un tiempo deseado t_f , como establece el teorema 11. La figura 3.15 muestra la entrada del control (3.11) para las condiciones iniciales $w_0 = 100$ y $y_0 = -50$. Note que en ambos casos la magnitud de la entrada del control i_q queda en menos de $5A$, el cual es aceptable en la práctica. Por lo tanto ambas leyes de control aseguran la estabilización de los estados del MSIP al origen en presencia de un disturbio determinístico dentro de

Tabla 3.2: Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.

$y_0 \setminus x_0$	10	100	1000	10^4	10^5
-100	0.35	0.55	1.37	6.49	13.67
-50	0.23	0.47	1.33	6.40	13.61
-10	0.15	0.42	1.31	6.31	13.55
-5	0.14	0.42	1.31	6.30	13.54
-1	0.13	0.42	1.31	6.30	13.54
1	0.11	0.41	1.31	6.29	13.54
5	0.12	0.41	1.31	6.28	13.53
10	0.15	0.41	1.30	6.27	13.52
50	0.64	0.64	1.30	6.18	13.47
100	1.12	1.12	1.33	6.06	13.40

el tiempo pre-asignado de 20 segundos. La segunda ley de control con $\lambda_2 \neq 0$ produce tiempos de convergencia considerablemente menores para los valores iniciales grandes del estado, a pesar de que su magnitud es solo ligeramente mayor que la del primer caso.

Observación 1. Las simulaciones presentadas fueron realizadas en MatLab con un paso de discretización 0.001. La discretización es la razón de porque la trayectoria de los estados no alcanza el cero exactamente pero forma ciclos límites (“chattering”) con una cierta amplitud. En este caso, la convergencia en tiempo finito es determinada de acuerdo a la prueba de Levant [3], el cual establece que la convergencia en tiempo finito toma lugar si la magnitud del ciclo límite para la variable de estado de grado relativo uno con respecto a la entrada de control discontinua es del mismo orden que el paso de discretización, la magnitud del ciclo límite de la variable de estado de grado relativo dos es del mismo orden que el cuadrado del paso de discretización, la magnitud del ciclo límite de la variable de estado de grado relativo tres es del mismo orden que el cubo del paso de discretización y así sucesivamente. En el caso considerado, la variable de estado de grado relativo uno, $y(t)$, con respecto a la ley de control discontinua $sign(\omega(t))$ alcance el ciclo límite de magnitud 10^{-3} , el cual es igual al paso de discretización, y la variable de estado de grado relativo dos, $\omega(t)$, alcance el ciclo límite de magnitud 10^{-9} , el cual es menor que el cuadrado del paso de discretización 10^{-6} . Por lo tanto la convergencia en tiempo finito de ambas variables de estado al cero se establece de acuerdo a la prueba de Levant.

Tabla 3.3: Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.

$y_0 \setminus x_0$	10	100	1000	10^4	10^5
-100	0.34	0.46	0.57	0.62	0.63
-50	0.23	0.37	0.48	0.53	0.54
-10	0.14	0.30	0.42	0.46	0.48
-5	0.13	0.29	0.41	0.46	0.47
-1	0.11	0.28	0.40	0.45	0.46
1	0.11	0.28	0.40	0.45	0.46
5	0.11	0.25	0.40	0.44	0.46
10	0.15	0.26	0.39	0.44	0.45
50	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64
100	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12

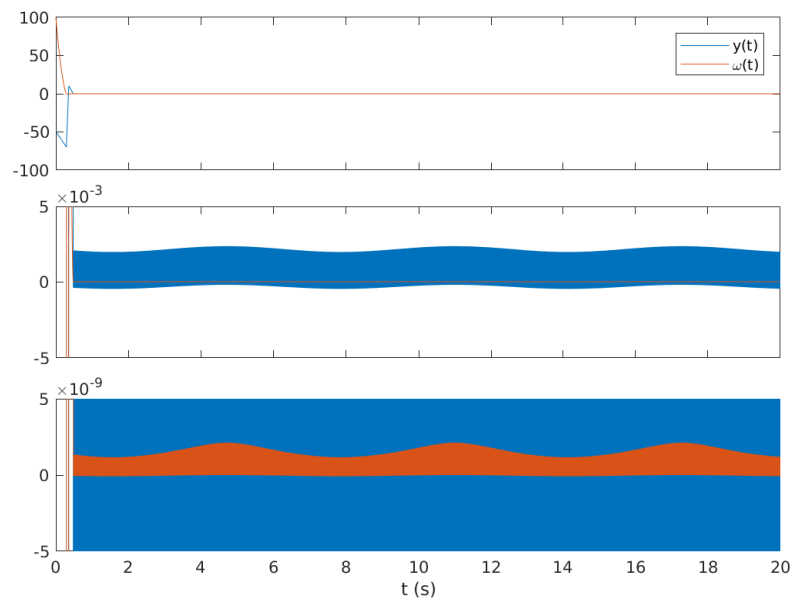


Figura 3.10: Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ cuando $\lambda_2 = 0$ con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$.

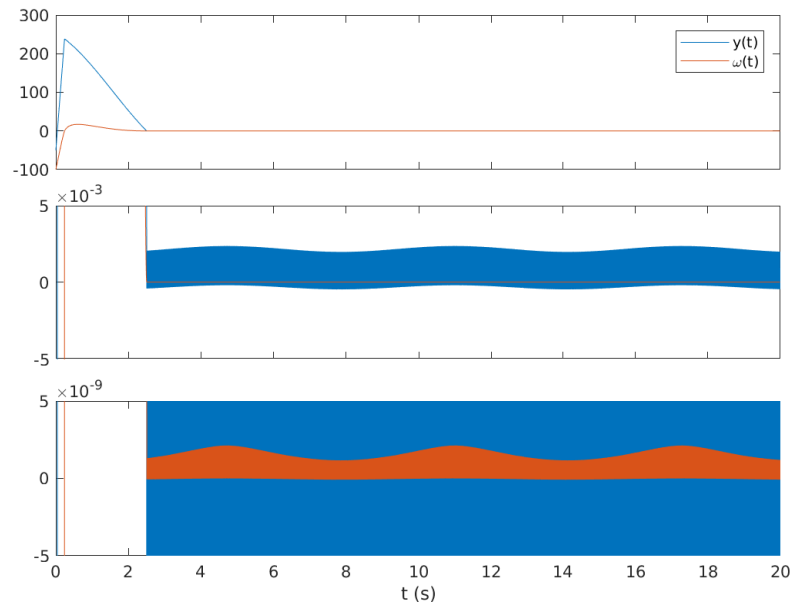


Figura 3.11: Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ cuando $\lambda_2 = 0$ con condiciones iniciales $\omega_0 = -100$ y $y_0 = -50$.

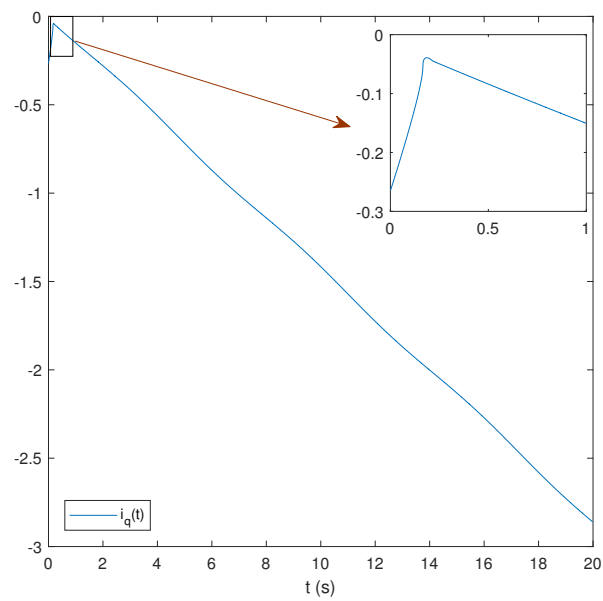


Figura 3.12: Entrada de control cuando $\lambda_2 = 0$ y condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$.

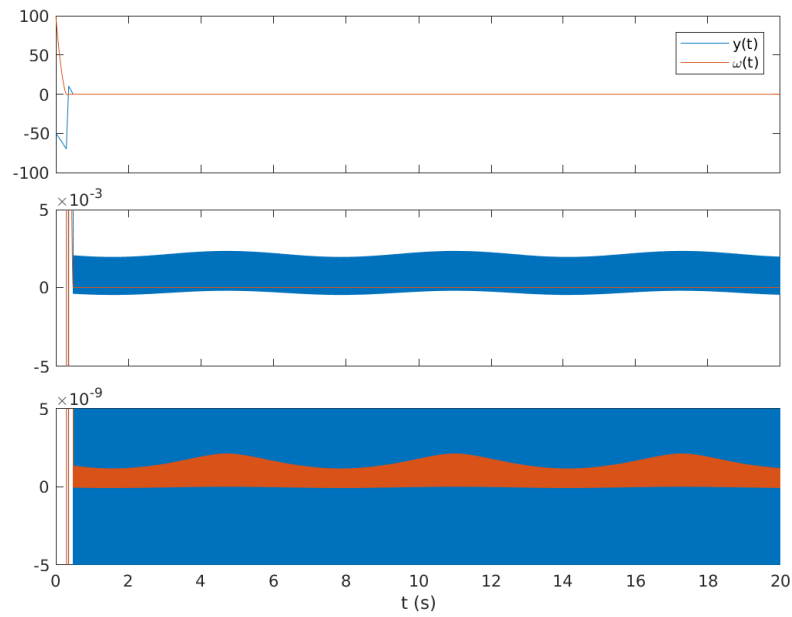


Figura 3.13: Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ con $\lambda_2 \neq 0$ y condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$.

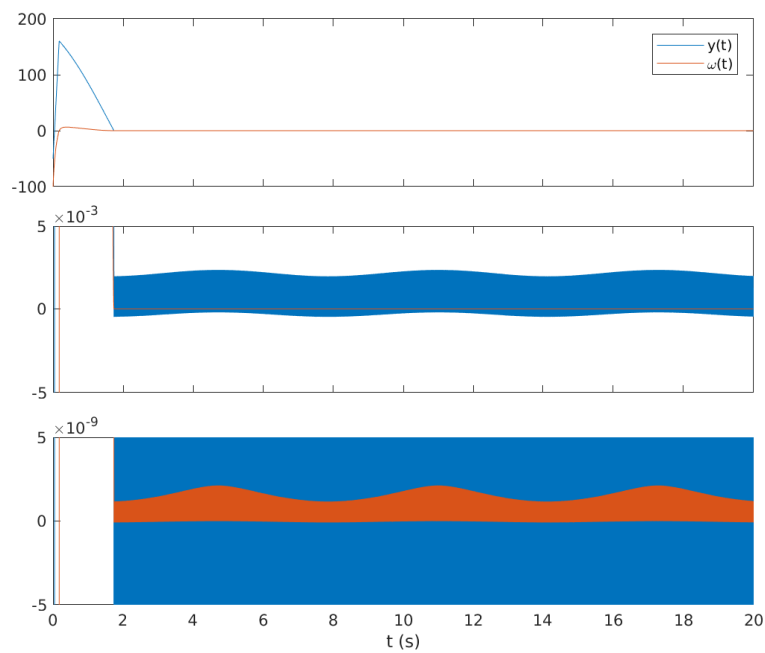


Figura 3.14: Historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ con $\lambda_2 \neq 0$ y condiciones iniciales $\omega_0 = -100$ y $y_0 = -50$.

3.4 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO CON DISTURBIOS DETERMINÍSTICOS Y ESTOCÁSTICOS

En esta sección, una ley de control convergente en tiempo predefinido es diseñada para un sistema de un MSIP en presencia de un disturbio determinístico $\zeta(t)$ que satisface la condición de Lipschitz con una constante L y un ruido blanco.

Considere el sistema del MSIP (3.2) en presencia de un disturbio determinístico $\zeta(t)$ satisfaciendo la condición de Lipschitz y un ruido blanco

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{K_t}{J} i_q - \frac{B}{J} \omega + \zeta \right) dt + \sigma(t, \omega) dW(t), \\ \omega(0) &= \omega_0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener definido en (3.3). La ley de control es representada como

$$i_q = \frac{J}{K_t} (u_1(t) + u_2(t)), \quad (3.15)$$

donde $u_1(t)$ fue definido en la sección 3.2 y $u_2(t)$ está por asignarse. Sustituyendo $i_q(t)$ en la ecuación (3.2) resulta en

$$d\omega(t) = (u_2(t) + \zeta(t)) dt + \sigma(t, \omega) dW(t),$$

donde $u_2(t)$ esta dado por

$$u_2(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |\omega(t)|^{1/2} \text{sign}(\omega(t)) - \lambda_2 |\omega(t)|^p \text{sign}(\omega(t)) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(s)) ds \\ -\eta \frac{(e^{|\omega(t)|} - 1)}{e^{|\omega(t)|(t_f - t)}} \text{sign}(\omega(t)), & t_0 \leq t < t_f, \\ -\lambda_1 |\omega(t)|^{1/2} \text{sign}(\omega(t)) - \lambda_2 |\omega(t)|^p \text{sign}(\omega(t)) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(s)) ds, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (3.16)$$

Aquí $\lambda_1, \alpha > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\eta > 1$, y $p > 1$.

Teorema 12. *La ley de control (3.15) lleva el ρ -ésimo momento inicial $E[\omega(t)]^\rho$ del estado $\omega(t)$ del estado (3.14) al origen por un tiempo asignado a priori t_f y permanece ahí después de cualquier tiempo $t_f \leq t$. En otras palabras, el sistema en lazo cerrado (3.14), (3.15) es convergente en tiempo predefinido al origen en media ρ en presencia de un disturbio determinístico $\zeta(t)$ satisfaciendo la condición de Lipschitz con una constante L y un ruido blanco con difusión $\sigma(t, \omega) = |\omega|^r$, si las siguientes condiciones se mantienen: $\rho > 1$, $\eta > 1$, $\alpha > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$, $p > 1$, $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$, y $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$.*

El sistema de control en lazo cerrado resultante puede ser representado en la forma convencional “super-twisting”

$$d\omega(t) = \begin{cases} \begin{cases} (-\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t))) \\ -\lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t)) \\ -\eta\frac{(e^{|\omega(t)|}-1)}{e^{|\omega(t)|(t_f-t)}}\text{sign}(\omega(t)) \\ +y(t)dt + \sigma(t, \omega)dW(t), \quad t_0 \leq t < t_f, \end{cases} \\ \begin{cases} (-\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t))) \\ -\lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t)) \\ +y(t)dt + \sigma(t, \omega)dW(t), \quad t \geq t_f, \end{cases} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha\text{sign}(\omega(t)) + \dot{\zeta}(t), \quad \omega(t_0) = \omega_0, y(t_0) = y_0.$$

Entonces, ambos estados $\omega(t)$ y $y(t)$ convergen al origen por un tiempo predefinido t_f .

Note que la convergencia en tiempo predefinido de $E[\omega(t)]^\rho$ a cero significa que la esperanza y el valor absoluto en la potencia ρ de la diferencia centralizada de los valores de un proceso estocástico $x(t)$ converge al cero cuando el tiempo tiende a un valor predefinido a priori. Convencionalmente, el valor de ρ es seleccionado como 2, el cual corresponde a la convergencia en la media cuadrada de un proceso estocástico $x(t)$ a cero.

Demostración.

Como sigue del teorema 2 en [117], las condiciones $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$ y $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$ prueba convergencia en tiempo fijo al origen en media ρ de ambos estados del sistema “super-twisting” estocástico (3.17), si $\eta = 0$, donde los términos $-\lambda_1|\omega(t)|^{1/2}\text{sign}(\omega(t))$ y $-\lambda_2|\omega(t)|^p\text{sign}(\omega(t))$ con $\lambda_2 > 0$ son responsables de la convergencia en tiempo fijo en ρ -media de un sistema sin disturbios y el término $-\alpha\text{sign}(\omega(t))$ es responsable de suprimir el disturbio $\dot{\zeta}(t)$. Por lo tanto, los primero tres términos en la ley de control (3.16), sin el cuarto término exponencial (3.6) ya resulta en una convergencia en ρ -media de los estados del sistema (3.17) al origen y la supresión del disturbio $\dot{\zeta}(t)$. Como sigue del teorema 10 de este trabajo, agregando el cuarto término exponencial (3.6) en la ley de control (3.16), $-\eta\frac{(e^{|\omega(t)|}-1)}{e^{|\omega(t)|(t_f-t)}\text{sign}(\omega(t))}$, hace la convergencia en tiempo fijo en ρ -media predefinido por un tiempo no mayor que t_f .

3.4.1 SIMULACIONES DEL MSIP

Para demostrar la eficacia de la ley de control propuesta, simulaciones numéricas han sido realizadas para el sistema del MSIP (3.14), (3.15). Los parámetros del MSIP, disturbio determinista, constante de Lipschitz y los parámetros del control son los mismos que se presentaron en la sección 3.3. El parámetro del ruido estocástico es dado por $r = 0.75$. La convergencia estocástica es considerada en sentido de media-cuadrático, $\rho = 2$, para satisfacer las condiciones del Teorema 12. Las condiciones iniciales tratadas y los correspondientes tiempos obtenidos por la simulación son dados en la tabla (3.4). Las figuras (3.15) y (3.16) presentan las historias de tiempo de $\omega(t)$ y $y(t)$ para las condiciones iniciales $w_0 = 100$, $y_0 = -50$ y $w_0 = -100$, $y_0 = -50$, también un acercamiento del tiempo de historias, el cual muestra la convergencia en tiempo predefinido de los estados del sistema del MSIP al origen en ρ -media para el tiempo deseado t_f , así como lo establece el Teorema 12. La figura 3.17 muestra la entrada del control (3.15) para las condiciones iniciales $w_0 = 100$, $y_0 = -50$. La magnitud de la entrada de control i_q también resulta ser menor que $5A$, lo cual es aceptable en la practica. Por lo tanto, ambas leyes de control aseguran la estabilización de los estados del MSIP al origen en presencia de disturbio determinístico y un ruido estocástico dentro de un tiempo asignado a priori de 20 segundos.

Tabla 3.4: Tiempos de convergencia vs. condiciones iniciales.

$y_0 \setminus x_0$	10	100	1000	10^4	10^5
-100	0.32	0.49	0.62	0.64	0.65
-50	0.22	0.38	0.51	0.54	0.54
-10	0.14	0.30	0.43	0.46	0.46
-5	0.13	0.30	0.43	0.45	0.45
-1	0.13	0.29	0.42	0.44	0.45
1	0.12	0.28	0.41	0.44	0.44
5	0.12	0.27	0.40	0.43	0.44
10	0.15	0.27	0.39	0.42	0.44
50	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64
100	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12

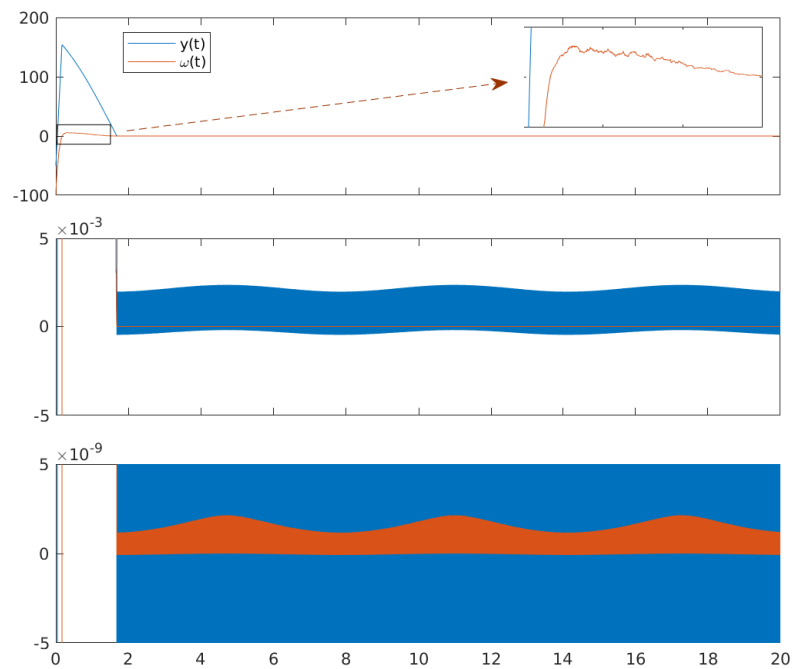


Figura 3.15: Historias de tiempo del estado estocástico $\omega(t)$ y $y(t)$ con condiciones iniciales $\omega_0 = -100$ y $y_0 = -50$.

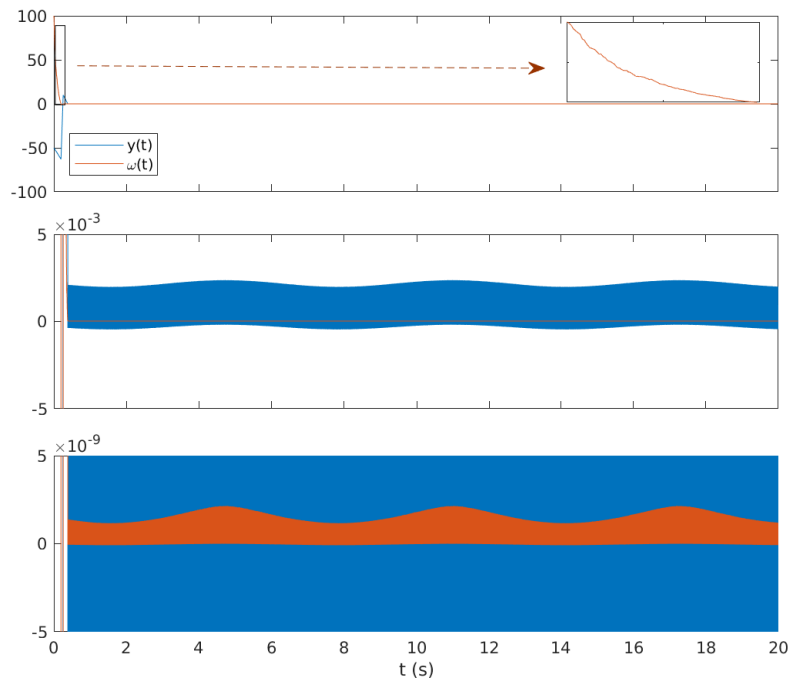


Figura 3.16: Historias de tiempo del estado estocástico $\omega(t)$ y $y(t)$ con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$.

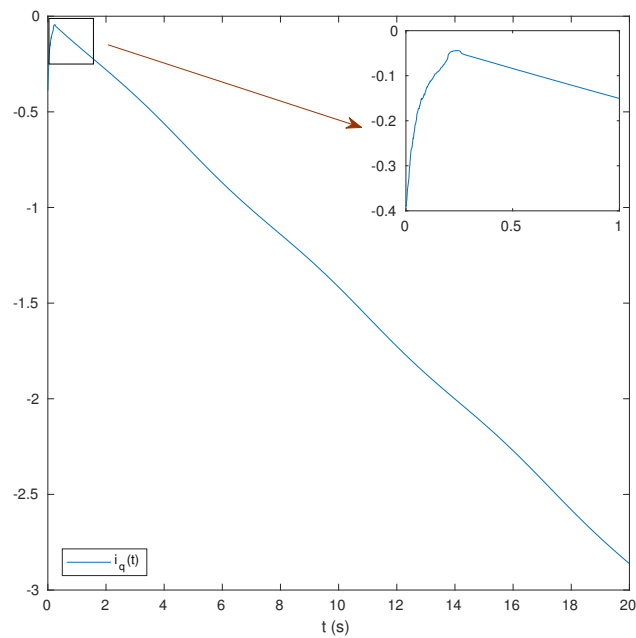


Figura 3.17: Entrada del control estocástico con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$.

3.5 CONCLUSIONES

Este capítulo ha presentado un algoritmo de control continuo convergente en tiempo predefinido para un MSIP el cual es libre de restricciones de crecimiento exponencial y condiciones iniciales exactas conocidas. Tres casos fueron considerados:

- libre de disturbios,
- en presencia de un disturbio determinístico satisfaciendo la condición de Lipschitz, y
- en presencia de un disturbio determinístico y un ruido blanco estocástico.

El funcionamiento del algoritmo desarrollado es verificado con simulaciones numéricas, el cual muestran una convergencia confiable en tiempo predefinido de los estados del sistema del MSIP al origen en los tres casos. Los valores empleados del control convergente en tiempo predefinido son aplicables en casos prácticos de la estabilización del MSIP.

CAPÍTULO 4

ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO POR “BACKSTEPPING” DE SISTEMAS NO LINEALES AUTÓNOMOS

4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema no lineal autónomo [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x, u), \\ \dot{x}_2 = x_3 + \phi_2(x, u), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \phi_{n-1}(x, u), \\ \dot{x}_n = u + \phi_n(x, u), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $\phi_i(x, u)$, $i = 1, 2, \dots, n$ son funciones continuas desconocidas (disturbios) que satisfacen una condición creciente lineal, esto es, existe algunas constantes conocidas $c_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, tal que

$$|\phi_i(t, x, u)| \leq c_{i1}|x_1| + c_{i2}|x_2| + \dots + c_{in}|x_n|. \quad (4.2)$$

El problema de control es diseñar una ley de control suave que lleve los estados del sistema (4.1) al origen en sentido de la definición (11) mostrada en el capítulo 3.

El problema fue originalmente investigado en [2], aquí, presentamos una solución alterna para este problema y demostramos sus ventajas con respecto a algunos índices de desempeño, tal como la magnitud de la entrada de control. Note que la condición lineal de crecimiento (4.2) no tiene que ser en forma triangular como lo asumieron en [2]. En contraste a [96], el sistema (4.1) contiene perturbaciones no lineales incomparables que aparecen en cada ecuación del sistema.

4.2 DISEÑO DE CONTROL

En esta sección, las leyes de control lineales variantes en el tiempo convergentes en tiempo predefinido se diseñan para un sistema autónomo no lineal (4.1) con no linearidades de crecimiento lineal para sistemas escalares, de dos dimensiones y n -dimensiones.

4.2.1 SISTEMA DE PRIMER ORDEN

Consideremos un sistema autónomo escalar no lineal

$$\dot{x}(t) = u(t) + \phi(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.3)$$

donde el disturbio no lineal satisface la condición de crecimiento lineal $|\phi(x, u)| \leq c|x|$, y la entrada de control dada como

$$u(t) = \begin{cases} -\eta \frac{x(t)}{(t_f - t)}, & t_0 \leq t < t_f, \\ 0, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $\eta > c(t_f - t) + 1$.

Teorema 13. *La ley de control (4.4) dirige el estado $x(t)$ del sistema (4.3) al origen por un tiempo t_f asignado a priori y permanece ahí para cualquier $t \geq t_f$, o, en otras palabras, el sistema en lazo cerrado (4.3), (4.4) es convergente en tiempo predefinido al origen, si*

las siguientes condiciones se cumplen: $\eta > c(t_f - t) + 1$, donde la constante c satisface:

$$|\phi(x, u)| \leq c|x|.$$

Demostración.

Sea la función de Lyapunov como

$$V = \frac{1}{2}x^2. \quad (4.5)$$

Entonces la derivada de la función de Lyapunov con respecto al tiempo esta dada como:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x \left(-\eta \frac{x}{(t_f - t)} + \phi(x, u) \right).$$

Tomando la cota superior de $|\phi(t, x, u)| \leq c|x|$ resulta en

$$\dot{V} = x\dot{x} \leq x \left(-\eta \frac{x}{(t_f - t)} + cx \right).$$

Sea $\eta > c(t_f - t) + 1$, entonces

$$\dot{V} < x \left(-cx - \frac{x}{t_f - t} + cx \right) = -\frac{x^2}{t_f - t}.$$

En vista de (4.5), la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\dot{V} < \frac{-2V}{t_f - t}, \quad (4.6)$$

lo cual implica que

$$\frac{\dot{V}}{V} < \frac{-2}{t_f - t}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad diferencial (4.6) satisface

$$V(t) < K(t_f - t)^2, \quad t_0 \leq t < t_f, \quad (4.8)$$

donde $K = \frac{V(x_0)}{(t_f - t_0)^2}$. Por lo tanto, si $t = t_f$, entonces $V(t_f) = 0$, lo cual resulta en $x(t_f) = 0$, en vista de la ecuación (4.5). Dado que $u(t) = 0$ para $t \geq t_f$ y el disturbio se

desvanece en el tiempo $t = t_f$, $|\phi(t, x, u)| \leq c|x| = 0$, el estado del sistema $x(t)$ permanece igual a cero, $x(t) = 0, \forall t \geq t_f$. ■

Observación 1. El estado del sistema $x(t)$ permanece en el origen después de alcanzarlo en el tiempo $t = t_f$, dado que el disturbio se desvanece en el $t = t_f$, $|\phi(t, x, u)| \leq c|x| = 0$, en vista de la condición (4.2). Si los disturbios no se desvanece, una entrada de control adicional es requerida para mantener el estado del sistema en el equilibrio. (ver, por ejemplo, [118],[100]).

SIMULACIONES

Consideremos el sistema no lineal autónomo como

$$\dot{x} = u + x \sin(x^2) + x, \quad x(0) = x_0, \quad (4.9)$$

donde $|\phi(t, x, u)| = |x \sin(x^2) + x| \leq |x \sin(x^2)| + |x| \leq |x| + |x| = 2|x|$, por lo tanto, $c = 2$. La entrada de control es definida por (4.4). El tiempo de convergencia es seleccionado como $t_f = 1$ y el parámetro del control η es elegido como 4. La condición inicial del estado es $x_0 = 5$. La figura 4.1 muestra las historias de tiempo del estado del sistema (4.9) para la ley de control (4.4), mientras que en la figura 4.2 se muestra las historias de tiempo del estado del sistema (4.9) para la ley de control propuesta en el Teorema 1 de [2] con el mismo t_f y la misma condición inicial que se mencionaron para nuestra ley de control. Con estas figuras, se puede observar que la magnitud de la entrada de control (4.4) es menor que la entrada de control propuesta en [2] y el tiempo de convergencia correspondiente a la entrada de control (4.4) es también menor que el algoritmo de control correspondiente propuesto en [2].

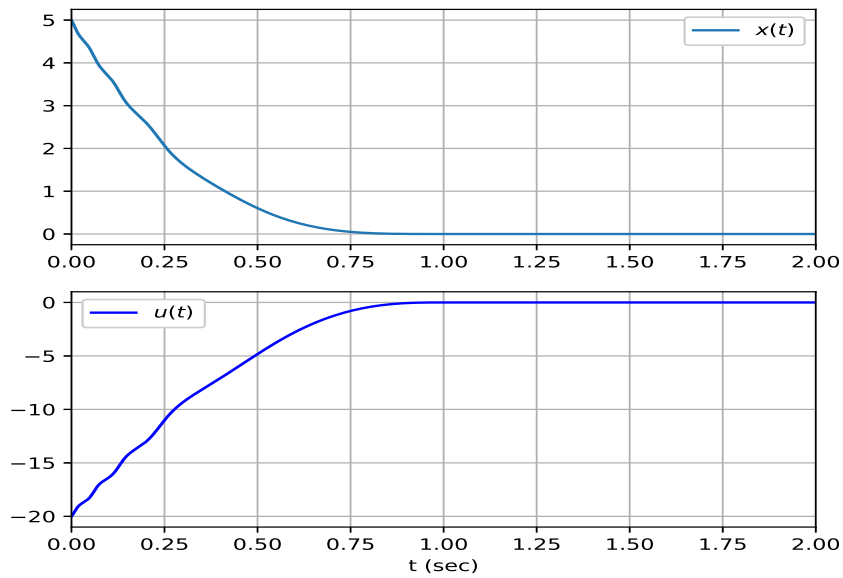


Figura 4.1: Historias de tiempo del estado y la ley de control (4.4) para el sistema de primer orden (4.9).

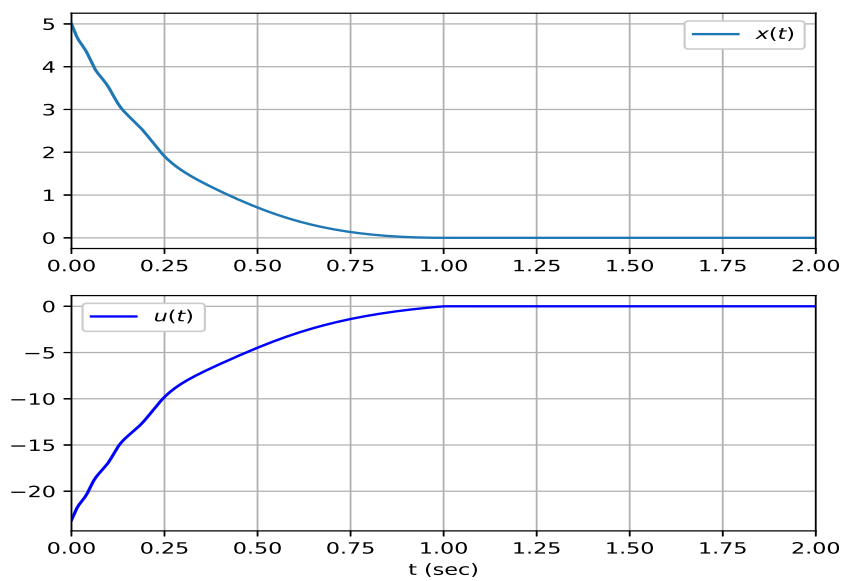


Figura 4.2: Historias de tiempo del estado (4.9) y la ley de control propuesta en [2] para el sistema de primer orden.

4.2.2 SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Consideremos el sistema no lineal autónomo (4.1) de segundo orden, el cual se puede escribir como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x, u), \\ \dot{x}_2 = u + \phi_2(x, u), \end{cases} \quad (4.10)$$

donde los disturbios no lineales satisfacen las condiciones de crecimiento lineal siguientes

$$\begin{aligned} \phi_1(x, u) &\leq c_{11}|x_1| + c_{12}|x_2|, \\ \phi_2(x, u) &\leq c_{21}|x_1| + c_{22}|x_2|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

con algunas constantes conocidas $c_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$, y la entrada de control es dada como

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho_{12}} \left(-x_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - x_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) & t_0 \leq t < t_f, \\ -\psi_2 - \rho_{21}x_1, & \\ 0, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (4.12)$$

donde $\psi_1 = \eta_1 \frac{x_1}{(t_f-t)}$, $\psi_2 = \eta_2 \frac{x_2}{(t_f-t)}$, y las ganancias del control $\eta_1, \eta_2, \rho_{12}, \rho_{21} > 0$ definidas en el siguiente teorema.

Teorema 14. *La ley de control (4.12) lleva el estado $x(t)$ del sistema (4.10) al origen por un tiempo asignado a priori t_f y permanece ahí después para cualquier $t \geq t_f$, o, en otras palabras, el lazo en sistema cerrado (4.12), (4.10) es convergente en tiempo predefinido al origen, si las condiciones siguientes se cumplen: $\eta_1 > c_{11}(t_f - t) + 1$, $\eta_2 > c_{22}(t_f - t) + 1$, $\rho_{12} > c_{12}$, $\rho_{21} > c_{21}$.*

Demostración.

Usando la técnica “backstepping”, asignamos el valor deseado x_{2d} como

$$x_{2d} = \frac{-\eta_1 x_1}{(t_f - t)} - \rho_{12} x_2 = -\psi_1 - \rho_{12} x_2. \quad (4.13)$$

Aplicando el cambio de variables

$$z_2 = x_2 - x_{2d} = x_2 + \psi_1 + \rho_{12}x_2 \quad (4.14)$$

y tomando la deriva con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_{12} \dot{x}_2. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el sistema transformado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= z_2 - \psi_1 - \rho_{12}x_2 + \phi_1(x, u), \\ \dot{z}_2 &= (1 + \rho_{12})(u(t) + \phi_2(x, u)) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Eligiendo la función compuesta de Lyapunov como

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2, \quad (4.16)$$

donde $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$ es la función de Lyapunov (4.5) para el sistema de primer orden. Entonces, tomando la derivada con respecto al tiempo de V_2 resulta

$$\dot{V}_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + z_2 \dot{z}_2 = x_1 \dot{x}_1 + z_2 \dot{z}_2. \quad (4.17)$$

Sustituyendo \dot{x}_1 y \dot{z}_2 en la última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= x_1(z_2 - \psi_1 - \rho_{12}x_2 + \phi_1) \\ &+ z_2 \left[(1 + \rho_{12})(u + \phi_2) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Entonces, la ley de control es definida como

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho_{12}} \left(-x_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - x_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) & t_0 \leq t < t_f, \\ -\psi_2 - \rho_{21}x_1, & \\ 0, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (4.19)$$

donde $\psi_2 = \eta_2 \frac{z_2}{(t_f - t)}$.

Por lo que, \dot{V}_2 se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= x_1(-\psi_1 - \rho_{12}x_2 + \phi_1) \\ &+ z_2(1 + \rho_{12})(-\rho_{21}x_1 - \psi_2 + \phi_2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tomando las cotas superiores de ϕ_1 y ϕ_2 en (4.11) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &< x_1 \left(-\eta_1 \frac{x_1}{(t_f - t)} - \rho_{12}x_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \right) \\ &+ z_2(1 + \rho_{12}) \left(-\rho_{21}x_1 - \eta_2 \frac{z_2}{(t_f - t)} + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usando $z_2 = x_2 - x_{2d}$,

$$z_2 = x_2 + \frac{\eta_1 x_1}{(t_f - t)} + \rho_{12}x_2 = (1 + \rho_{12})x_2 + \frac{\eta_1 x_1}{(t_f - t)}$$

y se sigue que

$$x_2 = \frac{z_2}{(1 + \rho_{21})} - \frac{\eta_1 x_1}{(t_f - t)(1 - \rho_{12})}. \quad (4.22)$$

Sustituyendo (4.22) en (4.21) implica que los parámetros del control son definidos como

$$\begin{aligned} \eta_1 &> c_{11}(t_f - t) + 1, \\ \eta_2 &> c_{22}(t_f - t) + 1 > \frac{1}{1 + \rho_{12}} (c_{22}(t_f - t) + 1), \\ \rho_{12} &> c_{12}, \\ \rho_{21} &> c_{21} > c_{21} - \left(\frac{1}{1 + \rho_{12}} \right) \left(\frac{c_{22}\eta_1}{(t_f - t)} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

tomando en cuenta $0 < \frac{1}{1 + \rho_{12}} < 1$, entonces

$$\dot{V}_2 < -\frac{x_1^2}{(t_f - t)} - \frac{z_2^2}{(t_f - t)} = -\frac{1}{(t_f - t)}(x_1^2 + z_2^2). \quad (4.24)$$

En vista de (4.16), la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\dot{V}_2 < \frac{-2V_2}{(t_f - t)}, \quad (4.25)$$

lo cual coincide con la desigualdad (4.6) del Teorema 13. Por lo tanto, siguiendo la desigualdad (4.8), si $t = t_f$, entonces $V_2(t_f) = 0$, lo cual implica que $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$, en vista de (4.16). Dado que $u(t) = 0$ para $t \geq t_f$ y los disturbios se desvanecen en el $t = t_f$, por la condición (4.11), los estados del sistema permanecen en el cero, $x_1(t) = x_2(t) = 0$, $\forall t \geq t_f$. ■

SIMULACIONES

Considerando el siguiente sistema no lineal autónomo de dos dimensiones [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin(x_2^2), \\ \dot{x}_2 = u + x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \quad (4.26)$$

En este caso, $|\phi_1(x, u)| = |x_1 \sin(x_2^2)| \leq |x_1|$, entonces, $c_{11} = 1$ y $c_{12} = 0$. Por otro lado, $|\phi_2(x, u)| = |x_1 x_1 x_2|^{\frac{1}{3}} \leq \frac{|x_1| + |x_1| + |x_2|}{3} = \frac{2}{3}|x_1| + \frac{1}{3}|x_2|$, por lo tanto, $c_{21} = \frac{2}{3}$ y $c_{22} = \frac{1}{3}$. La entrada de control es definida en (4.12). El tiempo de convergencia se elige como $t_f = 1$ y los parámetros del control son asignados como $\eta_1 = 5$, $\eta_2 = 3$, $\rho_{12} = 0$ y $\rho_{21} = 0.7$. Siguiendo los resultados en [2], la condición inicial es seleccionada como $x_0 = [5, 50]$. La figura 4.3 muestra las historias de tiempo de los estados del sistema (4.26) bajo la ley de control (4.12), mientras que la figura 4.4 muestra las historias de tiempo de los estados del sistema (4.26) donde la entrada de control es la propuesta en el Teorema 1 de [2] con el mismo parámetro de t_f y x_0 . Puede observarse en las figuras que la magnitud del control propuesto por nosotros es menor que el control en [2]. Note que la ley de control (4.12) es suave en el $t = t_f$. En adición, el cálculo de las ganancias del algoritmo de control (4.12) es mas fácil de calcular que las ganancias del control propuesto en [2].

4.2.3 SISTEMA DE N-DIMENSIONES

Para diseñar una ley de control estabilizadora en tiempo predefinido suave para un sistema no lineal autónomo de n dimensiones, existen dos maneras: la primera es, las ganancias del control pueden ser calculadas recursivamente en cada paso (similarmente al

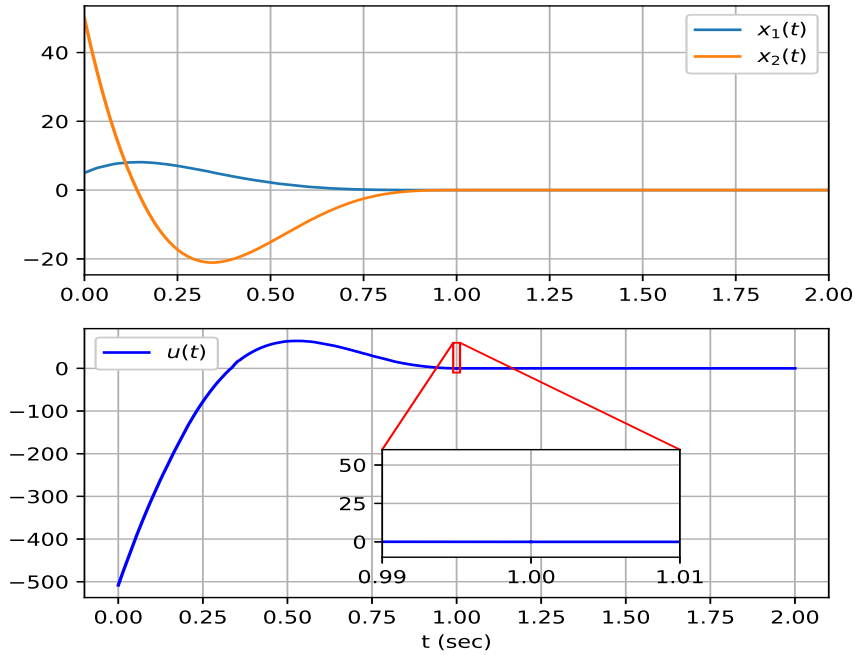


Figura 4.3: Historias de tiempo de los estados del sistema de segundo orden (4.26) bajo la ley de control (4.12).

caso de dos dimensiones), usando el enfoque de estabilidad de Lyapunov, donde la función de Lyapunov en el paso i -ésimo es definida por

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2. \quad (4.27)$$

La segunda manera sería, empleando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz como sigue. En el i -ésimo paso, la entrada de control virtual deseada puede ser representada como

$$x_{id} = -\psi_i - \sum_{j=1}^n \rho_{ij}x_j + \zeta_i, \quad (4.28)$$

para $i = 1, \dots, n$, donde ζ_i denota todos los términos inducidos por “backstepping” acumulados de los pasos anteriores y

$$\psi_i = \eta_i \frac{z_i(t)}{(t_f - t)}. \quad (4.29)$$

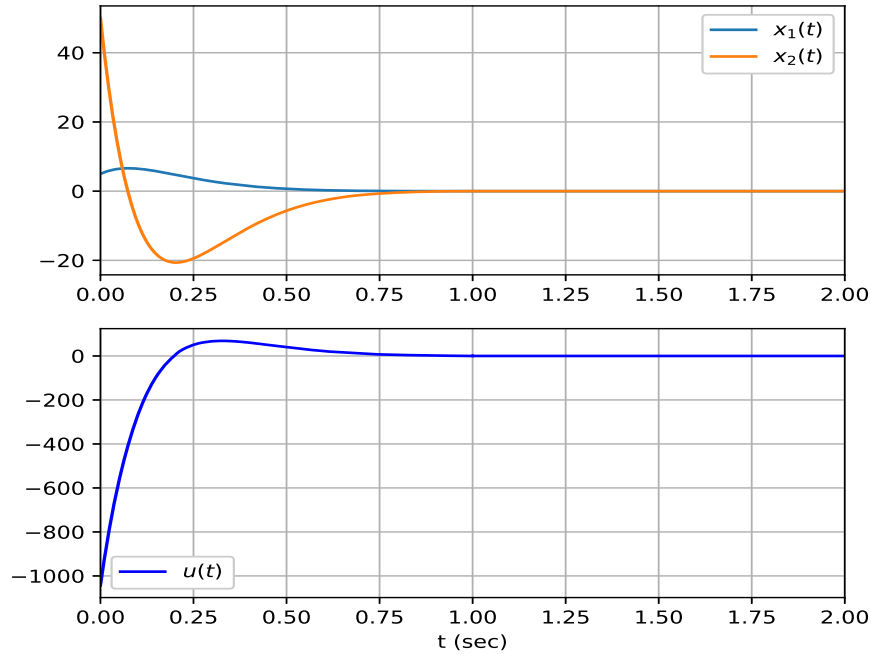


Figura 4.4: Historias de tiempo de los estados del sistema de segundo orden (4.26) bajo la ley de control propuesta en [2].

Asumiendo que los parámetros del control satisfacen las condiciones siguientes

$$\eta_i > c_{ii}(t_f - t) + 1,$$

$$\rho_{ij} > c_{ij},$$

para $i, j = 1, \dots, n$, seguiría la convergencia en tiempo predefinido del sistema en lazo cerrado al origen, si la matriz dinámica de la parte lineal del sistema

$$A = \begin{pmatrix} -\eta_1 & -\rho_{12} & \cdots & -\rho_{1n} \\ -\rho_{21} & -\eta_2 & \cdots & -\rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_{n1} & \cdots & \cdots & -\eta_n \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

es Hurwitz. Note que las condiciones obtenidas en (4.23) en la demostración del Teorema 5 son más relajadas que las condiciones establecidas en el Teorema. Sin embargo, se

fortalecen intencionalmente para unificarlas con las condiciones inducidas por el hecho de que la matriz A en (4.30) es Hurwitz.

4.3 CONCLUSIONES

Este capítulo presenta el diseño de leyes de control convergentes en tiempo predefinido suaves basadas en el método de “backstepping” para sistemas no lineales autónomos con términos no lineales con crecimiento lineal en sistemas escalares, bidimensionales y n -dimensionales. En el caso escalar y de dos dimensiones, las expresiones de la entrada de control son obtenidas explícitamente. El desempeño del algoritmo desarrollado es verificado mediante simulaciones numéricas, el cual muestra la convergencia confiable en tiempo predefinido al origen y demuestra sus ventajas con respecto a algunas leyes de control existentes.

CAPÍTULO 5

SINCRONIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE REDES NEURONALES COMPETITIVAS POR UN CONTROL VARIABLE EN EL TIEMPO.

5.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere una red neuronal competitiva (RNC) que contiene dos tipos de variables de estado, las variables de la memoria a corto plazo correspondientes a la actividad neuronal rápida y las de memoria a largo plazo que describen la modificación sináptica lenta no supervisada. Esta RNC puede ser representada por las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} STM : \varepsilon \dot{x}_i(t) = -\delta_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) \\ \quad + B_i \sum_{k=1}^p m_{ik}(t) w_k, \\ LTM : \dot{m}_{ik}(t) = -\kappa_i m_{ik}(t) + \beta_i w_k f_i(x_i(t)), \end{array} \right. \quad (5.1)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, p$, $x_i(t)$ representa el nivel de actividad de la neurona, $(m_{i1}(t), m_{i2}(t), \dots, m_{ip}(t))^T$ denota el vector sináptico de la neurona, el cual recibe el estímulo externo $w = (w_1, w_2, \dots, w_p)^T$, ε es la escala de tiempo del estado de la variable de memoria a corto plazo, $\delta_i > 0$ es la constante de tiempo de la neurona, a_{ij} denota denotes

el peso de la conexión entre la i -ésima y j -ésima neurona, $f_i(\cdot)$ es la salida de la neurona, y $B_i > 0$, $\kappa_i > 0$ y β_i son constantes de operación. Las funciones $f_i(\cdot)$ satisfacen la condición de Lipschitz, esto es, existen constantes $k_i > 0$ tal que $|f_i(\mu) - f_i(\nu)| \leq k_i|\mu - \nu|, \forall \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Sea $R_i(t) = \sum_{k=1}^p m_{ik}(t)w_k$, entonces, podemos reescribir las ecuaciones de la RNC (5.1) como

$$\left\{ \begin{array}{l} STM : \varepsilon \dot{x}_i(t) = -\delta_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) \\ \quad + B_i R_i(t), \\ LTM : \dot{R}_i(t) = -\kappa_i R_i(t) + \beta_i \|w_k\|^2 f_i(x_i(t)), \end{array} \right. \quad (5.2)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$, $\|w\|^2 = w_1^2 + w_2^2 \dots + w_p^2$. Se asume que $\varepsilon = 1$ y $\|w\|^2 = 1$, entonces las ecuaciones de la RNC (5.2) son simplificadas como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} STM : \dot{x}_i(t) = -\delta_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) \\ \quad + B_i R_i(t), \\ LTM : \dot{R}_i(t) = -\kappa_i R_i(t) + \beta_i f_i(x_i(t)), \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Sea $e_{1i}(t) = y_i(t) - x_i(t)$, $e_{2i}(t) = S_i(t) - R_i(t)$ las señales de error, donde $y(t)$ y $S(t)$ son los estados del sistema de respuesta, correspondientes a la RNC (5.3), que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} STM : dy_i(t) = (-\delta_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(y_j(t)) \\ \quad + B_i S_i(t) + u_i(t) + \phi_i(t))dt + \sigma(t, e_{1i})dW_i(t), \\ LTM : dS(t) = (-\kappa_i S_i(t) + \beta_i f_i(y_i(t)) + v_i(t) \\ \quad + \phi_i(t))dt + \sigma(t, e_{2i})dW'_i(t), \end{array} \right. \quad (5.4)$$

donde $u_i(t)$, $v_i(t)$ denotan las entradas de control, y ϕ_i es un disturbio que satisface la condición de Lipschitz

$$\|\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)\| \leq L_i|t_1 - t_2|,$$

para cualquier $t_1, t_2 \geq t_0$, con una cierta constante L_i , $i = 1, 2, \dots, n$. $W_i(t)$ y $W'_i(t)$ son procesos de Wiener definidos en el espacio de probabilidad completo (Ω, F, P) , donde Ω es el espacio muestral, F es un campo σ con una filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$, y P una medida de probabilidad. La condición $\sigma(t, 0) = 0$ se mantiene para todo $t \geq t_0$.

Por lo tanto, los errores de sincronización satisface las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} STM : de_{1i}(t) = (-\delta_i e_{1i}(t) + B_i e_{2i}(t) \\ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))] + u_i(t) \\ \quad + \phi_i(t))dt + \sigma(t, e_{1i})dW_i, \\ \\ LTM : de_{2i}(t) = (-\kappa_i e_{2i}(t) + v_i(t) + \phi_i(t) \\ \quad + \beta_i [f_i(y_i(t)) - f_i(x_i(t))])dt + \sigma(t, e_{2i})dW'_i(t), \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

El problema de control es diseñar una ley de control continua que lleve los errores de sincronización al origen en presencia de disturbios determinísticos y/o ruidos estocásticos en un tiempo predefinido. En consecuencia, si el sistema de error de sincronización es convergente al origen en tiempo predefinido, entonces la RNC guía y de respuesta lograrán una sincronización en tiempo predefinido. El esquema de control en tiempo predefinido para la sincronización entre la red guía y de respuesta es ilustrado en la siguiente figura 5.1.

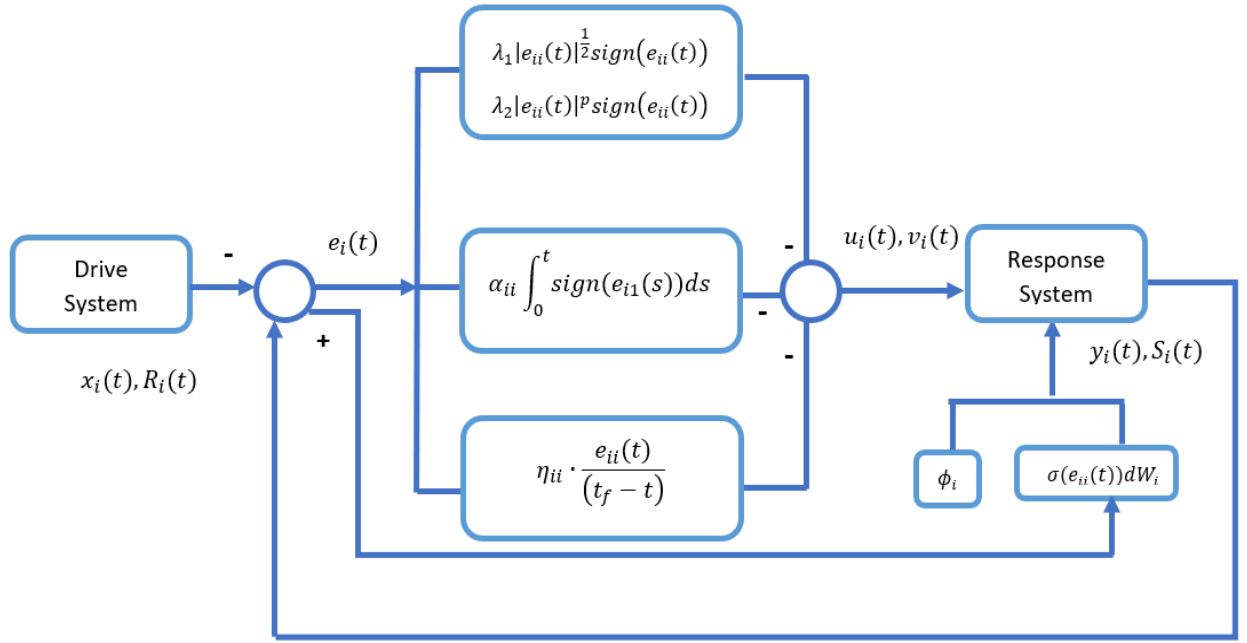


Figura 5.1: El esquema de control en tiempo predefinido propuesto.

5.2 SINCRONIZACIÓN DE REDES NEURONALES

COMPETITIVAS BAJO DISTURBIOS DETERMINÍSTICOS

En esta sección, una ley de control continua convergente en tiempo predefinido es diseñada para la sincronización del sistema de error (5.5) en presencia de disturbios determinísticos ϕ_i que satisfacen la condición de Lipschitz con constantes L_i .

Considere el sistema (5.5) con $\sigma(t, x(t)) = 0$ para $\pi = 1, 2, i = 1, \dots, n$ y la ley de control dada como

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= -\eta_{1i} \frac{e_{1i}(t)}{(t_f - t)} - \lambda_{1i} |e_{1i}|^{1/2} \text{sign}(e_{1i}) \\
 &\quad - \lambda'_{1i} |e_{1i}|^p \text{sign}(e_{1i}) - \alpha_{1i} \int_0^t \text{sign}(e_{1i}(s)) ds, \\
 v_i(t) &= -\eta_{2i} \frac{e_{2i}(t)}{(t_f - t)} - \lambda_{2i} |e_{2i}|^{1/2} \text{sign}(e_{2i}) \\
 &\quad - \lambda'_{2i} |e_{2i}|^p \text{sign}(e_{2i}) - \alpha_{2i} \int_0^t \text{sign}(e_{2i}(s)) ds,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde u_i y v_i son entradas de control para $y(t)$ y $S(t)$, respectivamente.

Corolario 1. *La ley de control (5.6) dirige al error de sincronización y sus derivadas al origen en un tiempo preasignado a priori t_f y permanece en él para cualquier $t \geq t_f$. En otras palabras, el sistema en lazo cerrado (5.5), (5.6) es convergente al origen en tiempo predefinido en presencia de disturbios $\phi_i(t)$ que satisface la condición de Lipschitz con constantes L_i , si las siguientes condiciones se cumplen: $\eta_{1i}, \eta_{2i} > 1$, $\alpha_{1i}, \alpha_{2i} > L_i$, $\lambda_{1i} > \sqrt{2\alpha_{1i}}$, $\lambda_{2i} > \sqrt{2\alpha_{2i}}$, $\lambda'_{1i}, \lambda'_{2i} \geq 0$, $\eta_{1i} > B_i + |\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j| + 1$, $\eta_{2i} > B_i + \beta_i k_i + 1$ y $p > 1$. El sistema en lazo cerrado resultante puede ser representado en la forma convencional de "super-twisting"*

$$\left\{ \begin{array}{l} STM : \dot{e}_{1i}(t) = -\delta_i e_{1i}(t) + B_i e_{2i}(t) - \eta_{1i} \frac{e_{1i}(t)}{(t_f - t)} \\ \quad + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))] \\ \quad - \lambda_{1i} |e_{1i}|^{1/2} \text{sign}(e_{1i}) - \lambda'_{1i} |e_{1i}|^p \text{sign}(e_{1i}) \\ \quad - \alpha_{1i} \int_0^t \text{sign}(e_{1i}(s)) ds + \phi_i(t), \\ \\ LTM : \dot{e}_{2i}(t) = -\kappa_i e_{2i}(t) - \eta_{2i} \frac{e_{2i}(t)}{(t_f - t)} \\ \quad \beta_i [f_i(y_i(t)) - f_i(x_i(t))] \\ \quad - \lambda_{2i} |e_{2i}|^{1/2} \text{sign}(e_{2i}) - \lambda'_{2i} |e_{2i}|^p \text{sign}(e_{2i}) \\ \quad - \alpha_{2i} \int_0^t \text{sign}(e_{2i}(s)) ds + \phi_i(t). \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Entonces, todos los estados del error convergen al origen en un tiempo predefinido t_f .

Demostración.

De acuerdo con el teorema 11, $\alpha_{1i}, \alpha_{2i} > L_i$ y $\lambda_{1i} > \sqrt{2\alpha_{1i}}$, $\lambda_{2i} > \sqrt{2\alpha_{2i}}$ para $i = 1, \dots, n$ proporcionan convergencia en tiempo finito al origen del sistema de error obtenido de (5.7), tomando $\eta = 0$, donde los términos $-\lambda_{1i} |e_{1i}|^{1/2} \text{sign}(e_{1i})$ y $-\lambda_{2i} |e_{2i}|^{1/2} \text{sign}(e_{2i})$ para $i = 1, \dots, n$ son responsables de la convergencia en tiempo finito de un sistema sin disturbios, y los términos $-\alpha_{2i} \text{sign}(e_{2i}(t))$, $-\alpha_{1i} \text{sign}(e_{1i}(t))$ son responsables de suprimir los disturbios ϕ_i . Por otro lado, los términos $-\eta_{1i} \frac{e_{1i}(t)}{(t_f - t)}$, $-\eta_{2i} \frac{e_{2i}(t)}{(t_f - t)}$ con las condiciones $\eta_{1i} > B_i + |\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j| + 1$ y $\eta_{2i} > B_i + \beta_i k_i + 1$ bajo la suposición de que f_i satisfacen la condición

de Lipschitz con las constantes k_i asegura la convergencia en tiempo predefinido al origen en un tiempo no mayor que t_f . Los términos $-\lambda'_{1i}|e_{1i}|^p \text{sign}(e_{1i})$, $-\lambda'_{2i}|e_{2i}|^p \text{sign}(e_{2i})$ con $\lambda'_{1i}, \lambda'_{2i} > 0$ para $i = 1, \dots, n$ pueden solo incrementar la tasa de convergencia. ■

5.2.1 SIMULACIONES DE LA RNC

Considere el sistema de error de sincronización (5.5) solamente en presencia de disturbios determinísticos ϕ_i , $i = 1, 2$, esto es, $\sigma(t, e_{1i}) = \sigma(t, e_{2i}) = 0$. Considere el modelo de RNC (5.3), donde $i = 1, 2$ y los parámetros de la red neuronal son dados como $\delta_1 = 1.3$, $\delta_2 = 0.8$, $a_{11} = 3$, $a_{12} = -0.3$, $a_{21} = 8$, $a_{22} = 5$, $B_1 = 2.3$, $B_2 = 1$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1.5$, $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = -3$, $f_i(x_i(t)) = \tanh(x_i(t))$, $i = 1, 2$, entonces $k_1 = k_2 = 1$. Los valores iniciales de la RNC (5.3) son $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -0.6$, $R_1(0) = -0.1$, $R_2(0) = 6$. Tomando el sistema (5.4) como el sistema de respuesta, donde los valores iniciales son seleccionados como $y_1(0) = -2$, $y_2(0) = 5$, $S_1(0) = 7$, $S_2(0) = -2$. Los disturbios determinísticos son asignados como

$$\phi_i(t) = \begin{cases} t + \sin(10t) & t \leq 0.25, \\ -t + \sin(10t) + 0.5 & 0.25 < t \leq 0.5, \\ t + \cos(10t) - 1.74 & 0.5 < t \leq 0.1, \\ -0.05t + \cos(10t) - 0.24 & t \geq 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Por consiguiente, las constantes de Lipschitz corresponden a $L_i = 11$, $i = 1, 2$.

Basados en el Corolario 1, la ley de control (5.6) lleva los errores de sincronización al origen en un tiempo asignado a priori, dado como $t_f = 1$, entonces el sistema guía y de respuesta logran la sincronización en tiempo predefinido. Las constantes del control son dadas como $\eta_{11} = \eta_{12} = \eta_{21} = \eta_{22} = 16$, $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = 7.5$, $\lambda'_{11} = \lambda'_{12} = \lambda'_{21} = \lambda'_{22} = 3$, $p = 1.5$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 25$.

Un retrato fase de la red neuronal guía y de respuesta se muestra en la figura 5.2(a), donde se aprecia la sincronización entre las redes bajo disturbios determinísticos. La figura 5.2(b) muestra que los errores de sincronización $e_{11}(t)$, $e_{12}(t)$, $e_{21}(t)$, $e_{22}(t)$ tienden a cero dentro del tiempo deseado t_f , satisfaciendo la prueba de Levant [3] con la precisión 10^{-6}

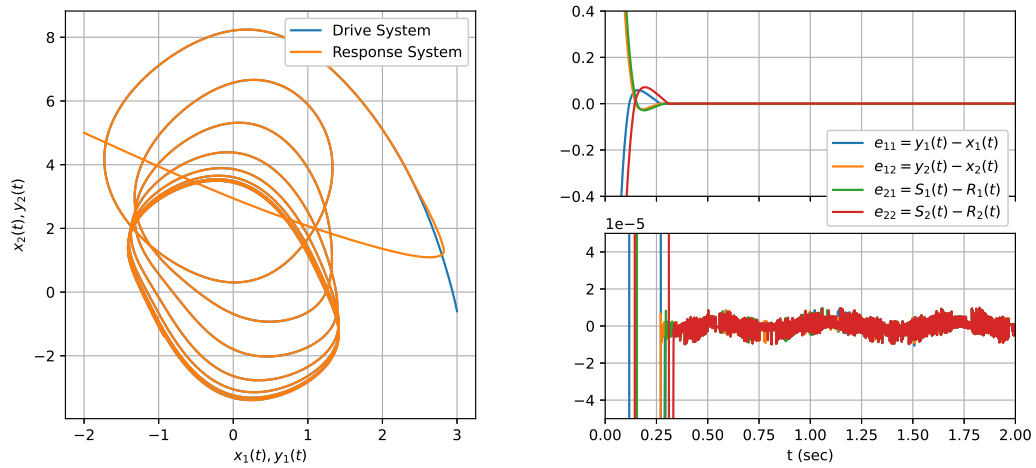
para el paso de discretización 10^{-3} , el cual verifica que las RNC (5.4) y (5.3) logran la sincronización en tiempo predefinido $t_f = 1$. La entrada de control (5.6) junto con el comportamiento del disturbio es mostrada en la figura (5.2(c)).

5.3 SINCRONIZACIÓN DE REDES NEURONALES COMPETITIVAS BAJO DISTURBIOS DETERMINÍSTICOS Y RUIDOS BLANCOS

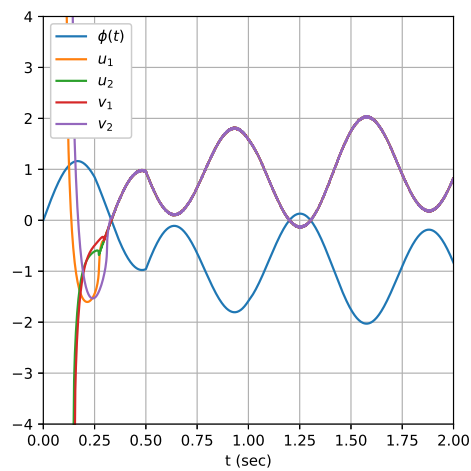
En esta sección una ley de control convergente en tiempo predefinido es diseñada para la sincronización del sistema de error (5.5) en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.

Considere el sistema (5.5) y la ley de control (5.6), donde u_i y v_i son las entradas de control para $y(t)$ y $S(t)$ respectivamente.

Corolario 2. *La ley de control (5.6) dirige los ρ -ésimos momentos iniciales $E[(e_{\pi i}(t))^\rho]$ de los estados $e_{\pi i}(t)$ ($\pi = 1, 2$ y $i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (5.5) al origen por un tiempo asignado a priori t_f y permanece allí después para cualquier $t \geq t_f$. En otras palabras, el sistema en lazo cerrado (5.5), (5.6) es convergente al origen en tiempo predefinido en presencia de disturbios determinísticos y estocásticos que cumplen las propiedades antes mencionadas, si se satisface las siguientes condiciones: $\eta_{1i}, \eta_{2i} > 1$, $\alpha_{1i}, \alpha_{2i} > L_i$, $\lambda_{1i} > \sqrt{2\alpha_{1i}}$, $\lambda_{2i} > \sqrt{2\alpha_{2i}}$, $\lambda'_{1i}, \lambda'_{2i} \geq 0$, $p > 1$, $\rho > 1$, $2\lambda_{1i} > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_{2i} > \rho - 1 > 0$, $2\lambda'_{1i} > \rho - 1 > 0$, $2\lambda'_{2i} > \rho - 1 > 0$, $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$ y $\eta_{1i} > B_i + |\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j| + 1$, $\eta_{2i} > B_i + \beta_i k_i + 1$. El sistema en lazo cerrado resultante puede ser representado en la*

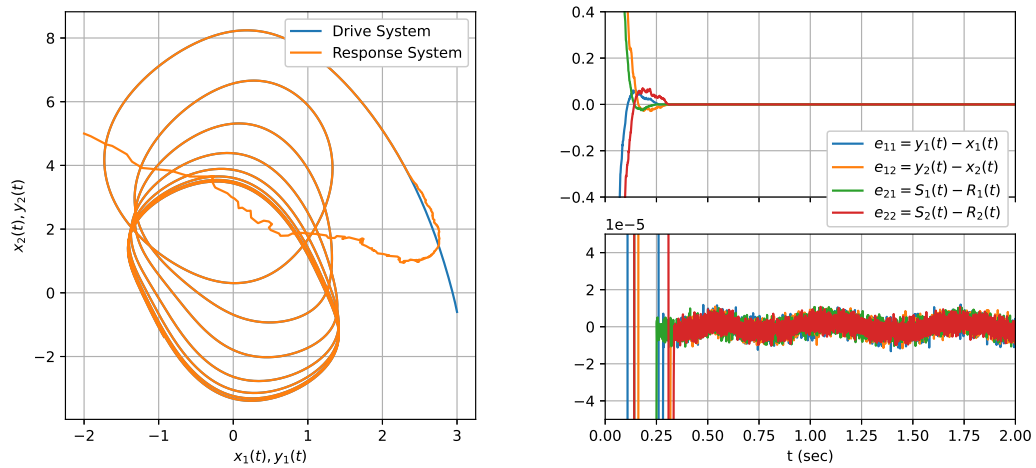


(a) Retrato fase de la red neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4). (b) Historias de tiempo del sistema de errores de sincronización entre la red neuronal (5.3) y la de respuesta (5.4).

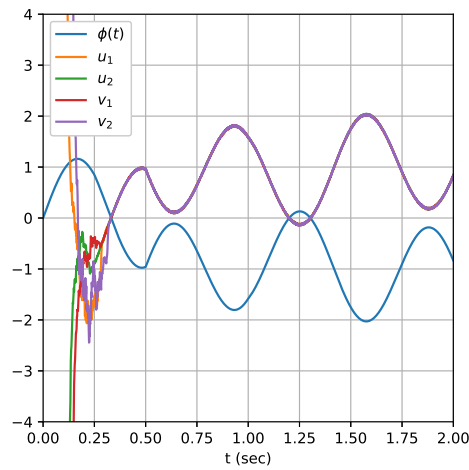


(c) Historia de tiempo de la ley de control (5.6) y los disturbios (5.8).

Figura 5.2: (RNC) en presencia de disturbios determinísticos bajo la ley de control (5.6).



(a) Retrato fase de la red neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4).
 (b) Historias de tiempo con del sistema de errores de sincronización entre la red neuronal (5.3) y la de respuesta (5.4).



(c) Historia de tiempo de la ley de control (5.6) y los disturbios (5.8).

Figura 5.3: (RNC) en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos bajo la ley de control (5.6).

forma convencional de "super-twisting"

$$\left\{ \begin{array}{l}
 STM : de_{1i}(t) = (-\delta_i e_{1i}(t) + B_i e_{2i}(t) - \eta_{1i} \frac{e_{1i}(t)}{t_f - t}) \\
 \quad + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))] \\
 \quad - \lambda_{1i} |e_{1i}|^{1/2} \text{sign}(e_{1i}) - \lambda'_{1i} |e_{1i}|^p \text{sign}(e_{1i}) \\
 \quad - \alpha_{1i} \int_0^t \text{sign}(e_{1i}(s)) ds + \phi_i(t) dt \\
 \quad + \sigma(t, e_{1i}) dW_i(t), \\
 \\
 LTM : de_{2i}(t) = (-\kappa_i e_{2i}(t) - \eta_{2i} \frac{e_{2i}(t)}{t_f - t}) \\
 \quad + \beta_i [f_i(y_i(t)) - f_i(x_i(t))] \\
 \quad - \lambda_{2i} |e_{2i}|^{1/2} \text{sign}(e_{2i}) - \lambda'_{2i} |e_{2i}|^p \text{sign}(e_{2i}) \\
 \quad - \alpha_{2i} \int_0^t \text{sign}(e_{2i}(s)) ds + \phi_i(t) dt \\
 \quad + \sigma(t, e_{2i}) dW'_i(t).
 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Entonces, todos los estados $e_{\pi_i}(t)$ convergen al origen en un tiempo predefinido t_f .

Demostración.

De acuerdo con el Teorema 12 y el Corolario 1, las condiciones $2\lambda_{1i} > \rho_{i1} - 1 > 0$, $2\lambda_{2i} > \rho_{2i} - 1 > 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$ prueban convergencia al origen en tiempo finito $\rho - media$ de los estados del sistema estocástico "super-twisting" (5.9) con $\eta_{1i}, \eta_{2i} = 0$ para $i = 1, \dots, n$, si el sistema determinístico obtenido de (5.9) seleccionando $\sigma(t, e_{1i}), \sigma(t, e_{2i}) = 0$ para $i = 1, \dots, n$ es convergente al origen en tiempo finito. Entonces, agregando las condiciones del Corolario 1 para la convergencia en tiempo predefinido determinista diferente de cero $\eta_{1i}, \eta_{2i} \neq 0$ asegura la convergencia en tiempo predefinido al origen en $\rho - media$ en un tiempo no mayor que t_f . ■

5.3.1 SIMULACIONES DE LA RNC

Ahora, consideremos el sistema de error de sincronización (5.5) en presencia tanto de disturbios determinísticos ϕ_i , $i = 1, 2$ y ruidos blancos estocásticos, esto es, $\sigma(t, e_{1i}) \neq 0$ y

$\sigma(t, e_{2i}) \neq 0$. Considere el modelo de la RNC (5.3) para $i = 1, 2$ y los valores iniciales, el sistema de parámetros y las constantes de control dadas en la sección 5.2.1. El parámetro del ruido estocástico es dado como $r = 0.75$. La convergencia estocástica es considerada en sentido de la media cuadrada, $\rho = 2$, para satisfacer las condiciones del corolario 5.9. En la figura 5.3(a) se observa un retrato fase entre la RNC guía y respuesta, donde se aprecia la sincronización entre las redes neuronales bajo disturbios estocásticos y determinísticos. La figura 5.3(b) muestra la convergencia en tiempo predefinido de la sincronización de los errores $e_{11}(t)$, $e_{12}(t)$, $e_{21}(t)$, $e_{22}(t)$ al origen en sentido de la media cuadrada, para un tiempo deseado $t_f = 1$, satisfaciendo la prueba de Levant con la precisión 10^{-6} , el cual prueba que las redes neuronales (5.3) y (5.4) logran la sincronización en tiempo predefinido en media cuadrada dentro de un tiempo deseado $t_f = 1$. La figura 5.3(c) muestra la entrada de control (5.6) del sistema de la RNC bajo disturbios determinísticos y estocásticos, además del comportamiento de los disturbios ϕ_i .

Finalmente, la ley de control (5.6) es comparada con dos leyes de control definidas en [94] como sigue:

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= -\rho_{1i}e_{1i}(t) - \frac{\omega}{T_c}\lambda_{1i}|e_{1i}|^\xi \text{sign}(e_{1i}) \\
 &\quad - \frac{\omega}{T_c}\sigma_{1i}|e_{1i}|^\eta \text{sign}(e_{1i}), \\
 v_i(t) &= -\rho_{2i}e_{2i}(t) - \frac{\omega}{T_c}\lambda_{2i}|e_{2i}|^\xi \text{sign}(e_{2i}) \\
 &\quad - \frac{\omega}{T_c}\sigma_{2i}|e_{2i}|^\eta \text{sign}(e_{2i}),
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

y

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= -\rho_{1i}e_{1i}(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2\xi T_c} \exp(V^{-\xi}(e(t))) V^{-\xi}(e(t)) e_{1i}(t) \\
 v_i(t) &= -\rho_{2i}e_{2i}(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2\xi T_c} \exp(V^{-\xi}(e(t))) V^{-\xi}(e(t)) e_{2i}(t),
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_{1i}(t))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_{2i}(t))^2$$

denota una función de Lyapunov y los parámetros de control son los mismos definidos previamente. Las leyes de control son comparadas en ambos casos: en presencia de disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz y en presencia tanto de ruidos blancos estocásticos como de disturbios determinísticos que cumplan la condición de Lipschitz. Los resultados obtenidos de la simulación son mostrados en las figuras 5.4 y 5.5, el cual muestra los errores de sincronización bajo las entradas de control (5.10) y (5.11), respectivamente. Se puede observar que ninguno de las leyes de control antes mencionadas lleva los errores de sincronización al origen en ambos considerados (bajo disturbios determinísticos y/o ruidos blancos estocásticos). Por lo tanto, las leyes de control (5.10) y (5.11) no pueden probar la sincronización en tiempo predefinido de las RNC guía y de respuesta (5.3), (5.4) en presencia de disturbios determinísticos y/o estocásticos.

Las figuras 5.6 y 5.7 representan la sincronización de la red neuronal guía y de respuesta bajo los controles (5.10) y (5.11), respectivamente. Con lo cual se puede verificar los resultados obtenidos en la correspondiente evolución de la sincronización de los errores ilustrados en las figuras anteriormente mencionadas. Por lo tanto las leyes de control (5.10) y (5.11) no pueden probar la sincronización en tiempo predefinido entre la red neuronal guía y de respuesta en presencia de disturbios determinísticos y/o ruidos estocásticos.

Basado en las simulaciones realizadas, se puede concluir que el diseño de la ley de control (5.6) proporciona una confiable sincronización en tiempo predefinido entre la RNC de respuesta (5.4) y la de guía (5.3) en presencia de disturbios determinísticos y estocásticos, en contraste a algunos algoritmos convergentes en tiempo predefinido existentes, tal como (5.10) y (5.11).

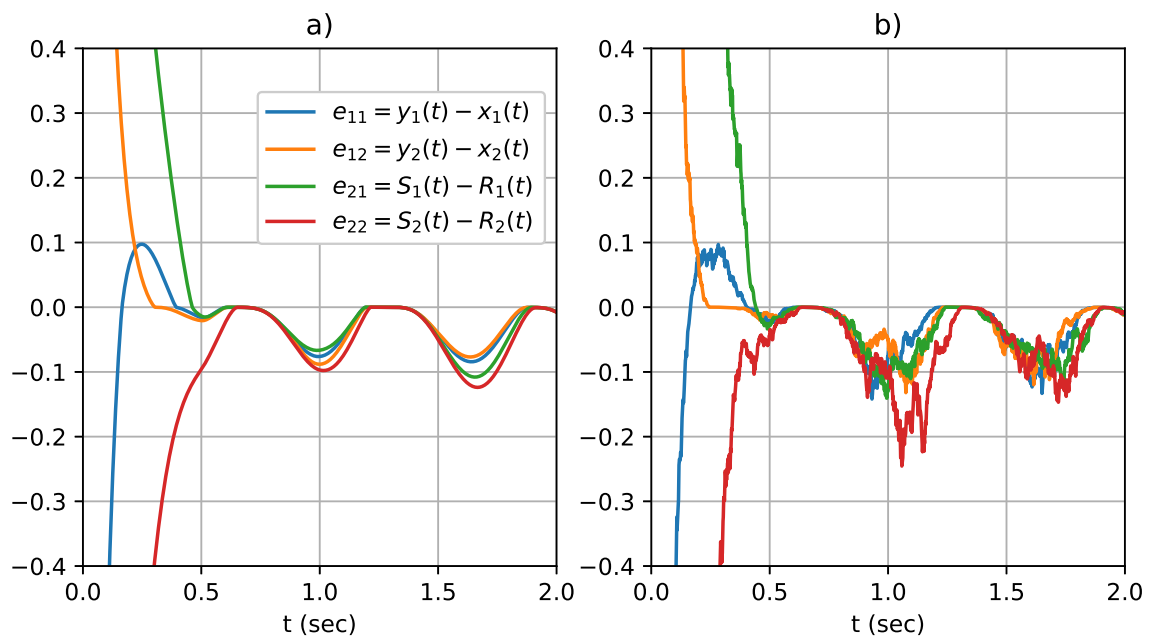


Figura 5.4: Historias de tiempo del sistema de errores de sincronización entre la red neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control 5.10):

- a.- en presencia de disturbios determinísticos;
- b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.

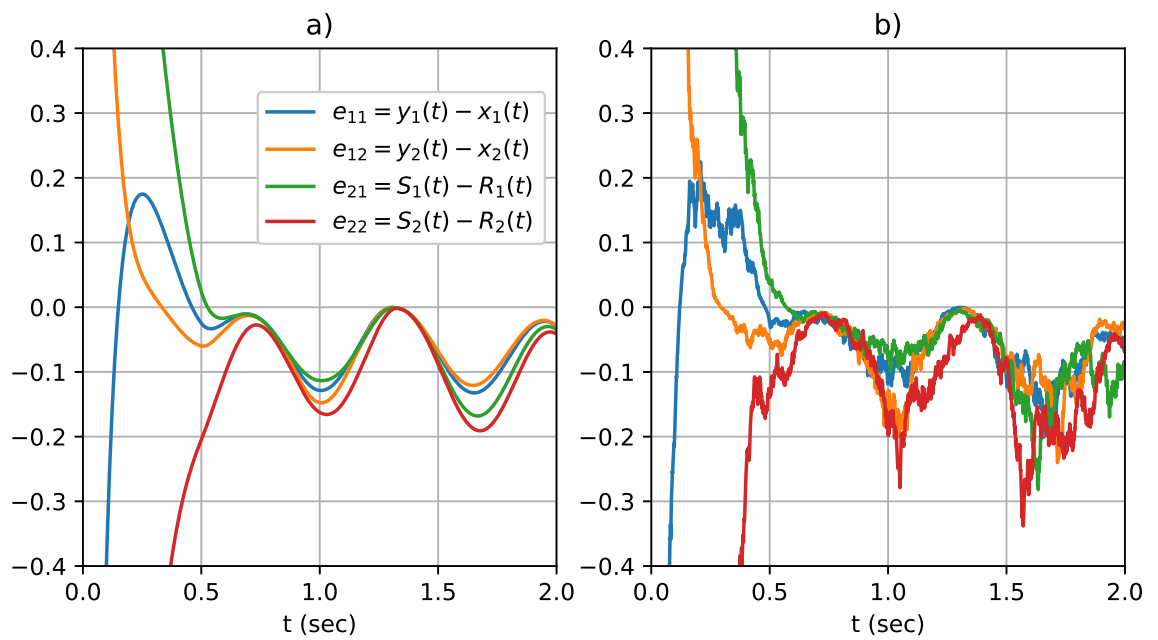


Figura 5.5: Historias de tiempo del sistema de errores de sincronización entre la red neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control (5.11):

a.- en presencia de disturbios determinísticos;

b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.

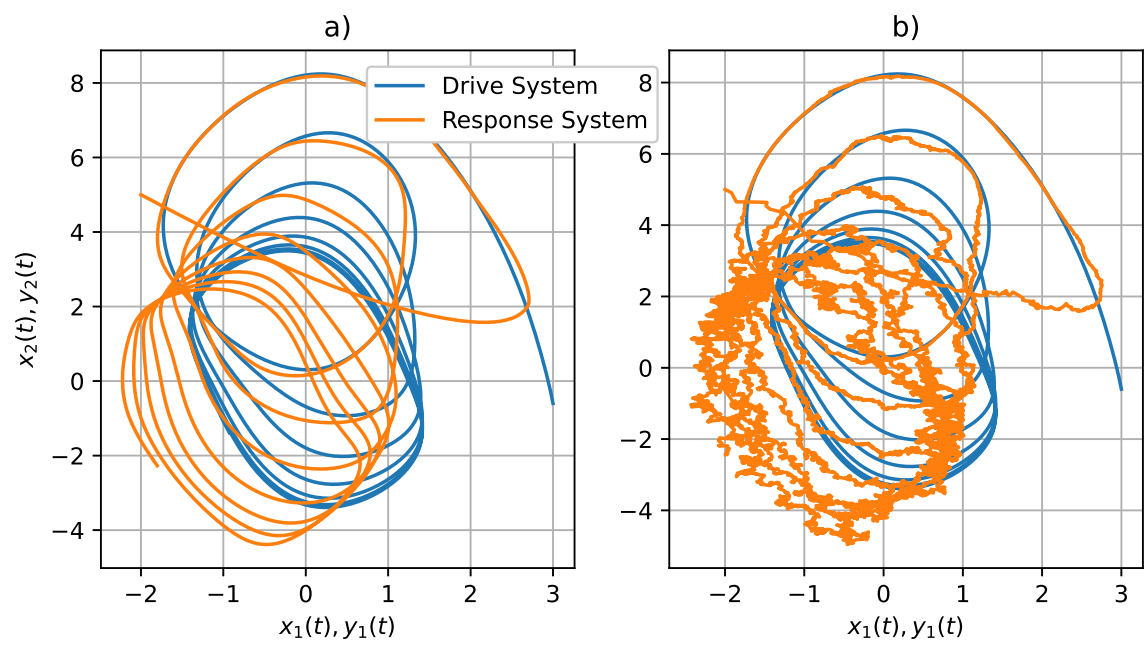


Figura 5.6: Retrato fase de la Red Neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control (5.10):

- a.- en presencia de disturbios determinísticos;
- b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.

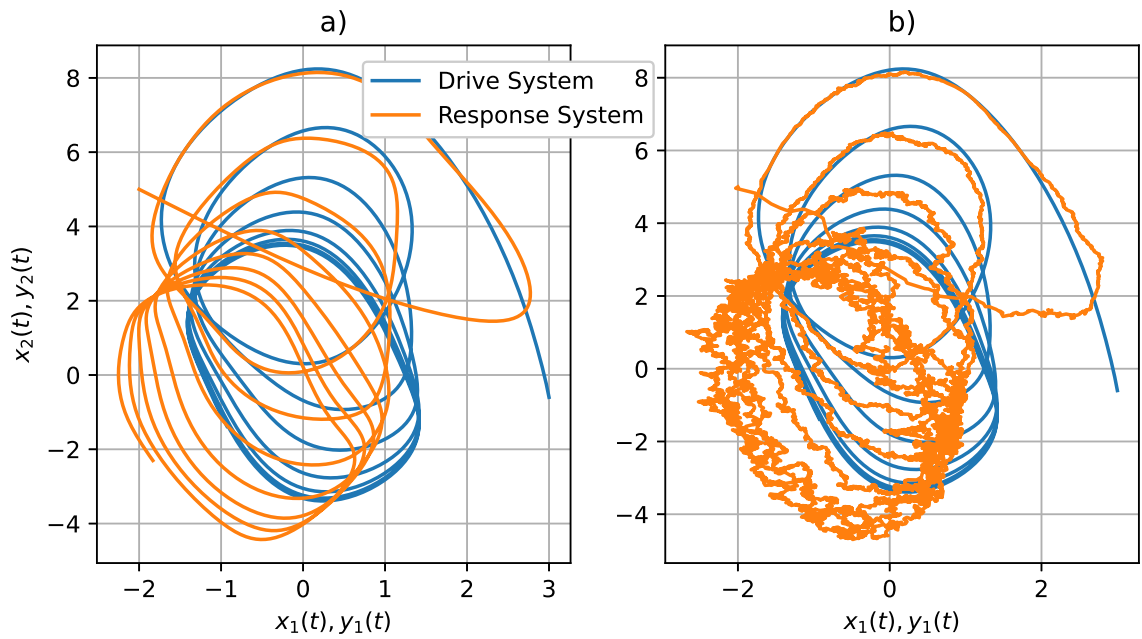


Figura 5.7: Retrato fase de la Red Neuronal guía (5.3) y de respuesta (5.4) bajo la ley de control (5.11):

- a.- en presencia de disturbios determinísticos;
- b.- en presencia de disturbios determinísticos y ruidos blancos.

5.4 CONCLUSIONES

Este capítulo ha presentado una ley de control continuo variable en el tiempo convergente en tiempo predefinido para la sincronización de los errores de las Redes Neuronales Competitivas guía y de respuesta en dos casos

- en presencia de disturbios determinísticos que satisfacen la condición de Lipschitz, y
- en presencia de ambos, disturbios determinísticos con las características anteriores y ruidos blancos,

el cual, dirige el sistema de sincronización del error al origen para un tiempo asignado *a priori*, independiente de las condiciones iniciales de la Red Neuronal Competitiva, dis-

turbios determinísticos, y ruidos estocásticos. El desempeño del algoritmo desarrollado es verificado mediante simulaciones numéricas, el cual muestra validez en la convergencia en tiempo predefinido del sistema del error de sincronización al origen en los dos casos considerados, logrando así la sincronización en tiempo predefinido entre la Red Neuronal Competitiva guía y de respuesta. Además, la comparación con otros algoritmos de control convergentes en tiempo predefinido ya existentes revela un mejor desempeño de nuestro diseño de ley de control.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIONES

En esta tesis se diseñaron algoritmos continuos robustos que permiten la estabilización y sincronización de diferentes sistemas dinámicos en un tiempo predefinido asignado a priori e independiente de los valores iniciales de los sistemas. En primer lugar, se diseñó una ley de control para un sistema de motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) en tres casos; a) sin perturbaciones, b) en presencia de un disturbio no acotada que satisface una condición de Lipschitz y c) en presencia tanto de un ruido blanco estocástico como de un disturbio determinista no acotado. Por otro lado se resolvió el problema de estabilización/sincronización en tiempo predefinido en sistemas no lineales autónomos y redes neuronales competitivas. En el caso de los sistemas no lineales autónomos, se implementó la técnica de backstepping para diseñar una ley de control lineal y variable en el tiempo que permite llevar todos los estados al origen en tiempo predefinido. En cuanto a las redes neuronales competitivas, se propuso una entrada de control continuo lineal y variable en el tiempo que permite lograr la sincronización de las redes neuronales competitivas en tiempo predefinido en presencia de perturbaciones deterministas y ruidos blancos estocásticos. Para validar estos resultados teóricos de las leyes de control propuestas, se realizaron simulaciones numéricas que demostraron la estabilización/sincronización de los estados del sistema al origen en tiempo predefinido.

6.2 TRABAJOS FUTUROS

- Diseño de leyes de control en tiempo predefinido aplicados a vehiculos de guiado automático.
 - Diseño de algoritmos de control con entradas y salidas múltiples para sistemas complejos n-dimensionales que aseguren la convergencia en tiempo predefinido.
 - Usar la técnica de "sistemas dominantes" para estabilizar sistemas no lineales mediante leyes de control convergentes en tiempo predefinido.
 - Diseño de leyes de control robusto convergentes en tiempo predefinido aplicado a procesos químicos complejos.
 - Diseño de algoritmo de control neuronal en tiempo predefinido basado en mecanismos de aprendizaje extremo.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. K. Pal, S. Kamal, S. K. Nagar, B. Bandyopadhyay, and L. Fridman, “Design of controllers with arbitrary convergence time,” *Automatica*, vol. 112, p. 108710, 2020.
- [2] B. Zhou and Y. Shi, “Prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems by linear time-varying feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 12, pp. 6123–6130, 2021.
- [3] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, Basel, 2014.
- [4] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press, 1998.
- [5] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press, 2017.
- [6] D. Zhao, F. Gao, D. Bouquain, M. Dou, and A. Miraoui, “Sliding-mode control of an ultrahigh-speed centrifugal compressor for the air management of fuel-cell systems for automotive applications,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 63, no. 1, pp. 51–61, 2013.
- [7] A. Sabanovic and D. B. Izosimov, “Application of sliding modes to induction motor control,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, no. 1, pp. 41–49, 1981.
- [8] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear optimal control systems*, vol. 1072. Wiley-interscience New York, 1969.

-
- [9] P. Tomei, "A simple pd controller for robots with elastic joints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 10, pp. 1208–1213, 1991.
- [10] P. Tomei, "Adaptive pd controller for robot manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 565–570, 1991.
- [11] W. Yu and F. Ortiz, "Stability analysis of pd regulation for ball and beam system," in *Proceedings of 2005 IEEE Conference on Control Applications, 2005. CCA 2005.*, pp. 517–522, IEEE, 2005.
- [12] L. Wang, T. Chai, and L. Zhai, "Neural-network-based terminal sliding-mode control of robotic manipulators including actuator dynamics," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3296–3304, 2009.
- [13] B. Parvat, V. Jadhav, and N. Lokhande, "Design and implementation of sliding mode controller for level control," *IOSR Journal of Electronics and Communication Engineering (IOSR-JECE)*, pp. 51–54, 2012.
- [14] A. A. Hassan, N. K. Al-Shamaa, and K. K. Abdalla, "Comparative study for dc motor speed control using pid controller," *International Journal of Engineering and Technology*, vol. 9, no. 6, pp. 4181–4192, 2017.
- [15] A. Rubaai, M. J. Castro-Sitiriche, and A. R. Ofoli, "Design and implementation of parallel fuzzy pid controller for high-performance brushless motor drives: an integrated environment for rapid control prototyping," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 44, no. 4, pp. 1090–1098, 2008.
- [16] R. Shakya, K. Rajanwal, S. Patel, and S. Dinkar, "Design and simulation of pd, pid and fuzzy logic controller for industrial application," *International Journal of Information and Computation Technology*, vol. 4, no. 4, pp. 363–368, 2014.
- [17] A. Nasir, R. Ismail, and M. Ahmad, "Performance comparison between sliding mode control (smc) and pd-pid controllers for a nonlinear inverted pendulum system," *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 71, pp. 400–405, 2010.

-
- [18] V. Parra-Vega, S. Arimoto, Y.-H. Liu, G. Hirzinger, and P. Akella, “Dynamic sliding pid control for tracking of robot manipulators: Theory and experiments,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, no. 6, pp. 967–976, 2003.
- [19] V. I. Utkin, *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Geometric homogeneity with applications to finite-time stability,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101–127, 2005.
- [21] J. Song, Y. Niu, and Y. Zou, “Finite-time stabilization via sliding mode control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 3, pp. 1478–1483, 2016.
- [22] Y. Guo, Y. Yao, S. Wang, K. Ma, K. Liu, and J. Guo, “Input–output finite-time stabilization of linear systems with finite-time boundedness,” *ISA Transactions*, vol. 53, no. 4, pp. 977–982, 2014.
- [23] J. J. Rath, M. Defoort, H. R. Karimi, and K. C. Veluvolu, “Output feedback active suspension control with higher order terminal sliding mode,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 2, pp. 1392–1403, 2016.
- [24] H. Pan, W. Sun, H. Gao, and J. Yu, “Finite-time stabilization for vehicle active suspension systems with hard constraints,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 16, no. 5, pp. 2663–2672, 2015.
- [25] K. Lu, Y. Xia, M. Fu, and C. Yu, “Adaptive finite-time attitude stabilization for rigid spacecraft with actuator faults and saturation constraints,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 1, pp. 28–46, 2016.
- [26] E. Jin and Z. Sun, “Robust controllers design with finite time convergence for rigid spacecraft attitude tracking control,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 324–330, 2008.

-
- [27] Z. Zhu, Y. Xia, and M. Fu, "Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 6, pp. 686–702, 2011.
- [28] Y. Xia, J. Zhang, K. Lu, N. Zhou, Y. Xia, J. Zhang, K. Lu, and N. Zhou, "Finite-time attitude stabilization for rigid spacecraft," *Finite Time and Cooperative Control of Flight Vehicles*, pp. 27–49, 2019.
- [29] J. Liu, S. Vazquez, L. Wu, A. Marquez, H. Gao, and L. G. Franquelo, "Extended state observer-based sliding-mode control for three-phase power converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 1, pp. 22–31, 2016.
- [30] H. Li, J. Wang, H. Du, and H. R. Karimi, "Adaptive sliding mode control for takagi-sugeno fuzzy systems and its applications," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 531–542, 2017.
- [31] T. Ma, B. Wang, Z. Zhang, and B. Ai, "A takagi-sugeno fuzzy-model-based finite-time h-infinity control for a hydraulic turbine governing system with time delay," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 132, p. 107152, 2021.
- [32] M. Van, H.-J. Kang, and Y.-S. Suh, "A novel fuzzy second-order sliding mode observer-controller for a ts fuzzy system with an application for robot control," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 14, pp. 1703–1711, 2013.
- [33] J. Salcedo and M. Martinez, "Bibo stabilisation of takagi-sugeno fuzzy systems under persistent perturbations using fuzzy output-feedback controllers," *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, no. 6, pp. 513–523, 2008.
- [34] H. Li, H. Gao, P. Shi, and X. Zhao, "Fault-tolerant control of markovian jump stochastic systems via the augmented sliding mode observer approach," *Automatica*, vol. 50, no. 7, pp. 1825–1834, 2014.

-
- [35] L. Wu, X. Su, and P. Shi, "Sliding mode control with bounded l_2 gain performance of markovian jump singular time-delay systems," *Automatica*, vol. 48, no. 8, pp. 1929–1933, 2012.
- [36] H. Li, P. Shi, D. Yao, and L. Wu, "Observer-based adaptive sliding mode control for nonlinear markovian jump systems," *Automatica*, vol. 64, pp. 133–142, 2016.
- [37] L. Wu, Y. Gao, J. Liu, and H. Li, "Event-triggered sliding mode control of stochastic systems via output feedback," *Automatica*, vol. 82, pp. 79–92, 2017.
- [38] H. Wang, Z. Zhou, C. Hao, Z. Hu, and W. Zheng, "Fteso-based finite time control for underactuated system within a bounded input," *Asian Journal of Control*, vol. 20, no. 4, pp. 1427–1439, 2018.
- [39] M. M. Mardani, N. Vafamand, M. Shokrian Zeini, M. Shasadeghi, and A. Khayatian, "Sum-of-squares-based finite-time adaptive sliding mode control of uncertain polynomial systems with input nonlinearities," *Asian Journal of Control*, vol. 20, no. 4, pp. 1658–1662, 2018.
- [40] Q. Wang, M. Ran, and C. Dong, "On finite-time stabilization of active disturbance rejection control for uncertain nonlinear systems," *Asian Journal of Control*, vol. 20, no. 1, pp. 415–424, 2018.
- [41] J. Pan, N. Cheung, and J. Yang, "Auto-disturbance rejection controller for novel planar switched reluctance motor," *IEE Proceedings-Electric Power Applications*, vol. 153, no. 2, pp. 307–316, 2006.
- [42] Y. X. Su, C. H. Zheng, and B. Y. Duan, "Automatic disturbances rejection controller for precise motion control of permanent-magnet synchronous motors," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 52, no. 3, pp. 814–823, 2005.
- [43] I. Boiko and L. Fridman, "Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 9, pp. 1442–1446, 2005.

-
- [44] N. Wang and H. Adeli, “Algorithms for chattering reduction in system control,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 8, pp. 2687–2703, 2012.
- [45] H. Lee, V. I. Utkin, and A. Malinin, “Chattering reduction using multiphase sliding mode control,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 9, pp. 1720–1737, 2009.
- [46] P. Kachroo and M. Tomizuka, “Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 7, pp. 1063–1068, 1996.
- [47] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak, “New methodologies for adaptive sliding mode control,” *International Journal of Control*, vol. 83, no. 9, pp. 1907–1919, 2010.
- [48] Y. Shtessel, M. Taleb, and F. Plestan, “A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application,” *Automatica*, vol. 48, no. 5, pp. 759–769, 2012.
- [49] V. I. Utkin and A. S. Poznyak, “Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method,” *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 39–47, 2013.
- [50] C. Edwards and Y. B. Shtessel, “Adaptive continuous higher order sliding mode control,” *Automatica*, vol. 65, pp. 183–190, 2016.
- [51] A. Levant, “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control,” *International Journal of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [52] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [53] A. Polyakov, “Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2106–2110, 2011.

-
- [54] E. Cruz-Zavala, J. A. Moreno, and L. M. Fridman, “Uniform robust exact differentiator,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 11, pp. 2727–2733, 2011.
- [55] J. A. Moreno and M. Osorio, “Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [56] A. Polyakov and A. Poznyak, “Lyapunov function design for finite-time convergence analysis:twisting controller for second-order sliding mode realization,” *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 444–448, 2009.
- [57] A. Polyakov and A. Poznyak, “Reaching time estimation for super-twisting second order sliding mode controller via lyapunov function designing,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 8, pp. 1951–1955, 2009.
- [58] M. T. Angulo, J. A. Moreno, and L. Fridman, “Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator,” *Automatica*, vol. 49, no. 8, pp. 2489–2495, 2013.
- [59] M. L. Corradini and A. Cristofaro, “Nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear planar systems with global fixed-time stability guarantees,” *Automatica*, vol. 95, pp. 561–565, 2018.
- [60] I. Nagesh and C. Edwards, “A multivariable super-twisting sliding mode approach,” *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 984–988, 2014.
- [61] M. Basin, C. Bharath Panathula, and Y. Shtessel, “Multivariable continuous fixed-time second-order sliding mode control: Design and convergence time estimation,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 8, pp. 1104–1111, 2017.
- [62] M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, and V. Ramos-Lopez, “Continuous fixed-time convergent controller for permanent-magnet synchronous motor with unbounded perturbations,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 16, pp. 11900–11913, 2020.

-
- [63] M. V. Basin, P. C. R. Ramírez, and F. Guerra-Avellaneda, “Continuous fixed-time controller design for mechatronic systems with incomplete measurements,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 23, no. 1, pp. 57–67, 2017.
- [64] M. V. Basin, P. Yu, and Y. B. Shtessel, “Hypersonic missile adaptive sliding mode control using finite-and fixed-time observers,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, no. 1, pp. 930–941, 2017.
- [65] Y. Hu, H. Yan, H. Zhang, M. Wang, and L. Zeng, “Robust adaptive fixed-time sliding-mode control for uncertain robotic systems with input saturation,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022.
- [66] S. Huang, B. Zhou, S. Bu, C. Li, C. Zhang, H. Wang, and T. Wang, “Robust fixed-time sliding mode control for fractional-order nonlinear hydro-turbine governing system,” *Renewable Energy*, vol. 139, pp. 447–458, 2019.
- [67] W. Gong, B. Li, Y. Yang, H. Ban, and B. Xiao, “Fixed-time integral-type sliding mode control for the quadrotor uav attitude stabilization under actuator failures,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 95, p. 105444, 2019.
- [68] L. Wang, H. Du, W. Zhang, D. Wu, and W. Zhu, “Implementation of integral fixed-time sliding mode controller for speed regulation of pmsm servo system,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 102, pp. 185–196, 2020.
- [69] O. Mechali, L. Xu, X. Xie, and J. Iqbal, “Fixed-time nonlinear homogeneous sliding mode approach for robust tracking control of multicopter aircraft: Experimental validation,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 359, no. 5, pp. 1971–2029, 2022.
- [70] M. Van and D. Ceglarek, “Robust fault tolerant control of robot manipulators with global fixed-time convergence,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 358, no. 1, pp. 699–722, 2021.
- [71] Y. Wan, J. Cao, G. Wen, and W. Yu, “Robust fixed-time synchronization of delayed cohen–grossberg neural networks,” *Neural Networks*, vol. 73, pp. 86–94, 2016.

-
- [72] C. Chen, L. Li, H. Peng, and Y. Yang, “Fixed-time synchronization of inertial memristor-based neural networks with discrete delay,” *Neural Networks*, vol. 109, pp. 81–89, 2019.
- [73] X. Liu, D. W. Ho, Q. Song, and W. Xu, “Finite/fixed-time pinning synchronization of complex networks with stochastic disturbances,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 49, no. 6, pp. 2398–2403, 2018.
- [74] J. Cao and R. Li, “Fixed-time synchronization of delayed memristor-based recurrent neural networks,” *Science China Information Sciences*, vol. 60, pp. 1–15, 2017.
- [75] C. Chen, L. Li, H. Peng, and Y. Yang, “Fixed-time synchronization of memristor-based bam neural networks with time-varying discrete delay,” *Neural Networks*, vol. 96, pp. 47–54, 2017.
- [76] C. Chen, L. Li, H. Peng, Y. Yang, L. Mi, and H. Zhao, “A new fixed-time stability theorem and its application to the fixed-time synchronization of neural networks,” *Neural networks*, vol. 123, pp. 412–419, 2020.
- [77] C. Chen, L. Li, H. Peng, Y. Yang, L. Mi, and L. Wang, “A new fixed-time stability theorem and its application to the synchronization control of memristive neural networks,” *Neurocomputing*, vol. 349, pp. 290–300, 2019.
- [78] J. Xiao, Z. Zeng, S. Wen, A. Wu, and L. Wang, “A unified framework design for finite-time and fixed-time synchronization of discontinuous neural networks,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 51, no. 6, pp. 3004–3016, 2019.
- [79] A. Levant, “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control,” *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [80] R. Engel and G. Kreisselmeier, “A continuous-time observer which converges in finite time,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 7, pp. 1202–1204, 2002.

-
- [81] F. Lopez-Ramirez, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, “Finite-time and fixed-time observer design: Implicit lyapunov function approach,” *Automatica*, vol. 87, pp. 52–60, 2018.
- [82] Y. Shen, Y. Huang, and J. Gu, “Global finite-time observers for lipschitz nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 2, pp. 418–424, 2010.
- [83] A. Levant, “Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence,” *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 9, pp. 1447–1451, 2001.
- [84] A. Levant, “Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers,” in *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, vol. 5, pp. 4605–4610, IEEE, 2003.
- [85] W. Perruquetti, T. Floquet, and E. Moulay, “Finite-time observers: application to secure communication,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 1, pp. 356–360, 2008.
- [86] T. Ménard, E. Moulay, and W. Perruquetti, “Fixed-time observer with simple gains for uncertain systems,” *Automatica*, vol. 81, pp. 438–446, 2017.
- [87] J. Ni, L. Liu, M. Chen, and C. Liu, “Fixed-time disturbance observer design for brunovsky systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 65, no. 3, pp. 341–345, 2017.
- [88] E. Jiménez-Rodríguez, A. J. Muñoz-Vázquez, J. D. Sánchez-Torres, M. Defoort, and A. G. Loukianov, “A lyapunov-like characterization of predefined-time stability,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 11, pp. 4922–4927, 2020.
- [89] J. D. Sánchez-Torres, M. Defoort, and A. J. Munoz-Vázquez, “A second order sliding mode controller with predefined-time convergence,” in *2018 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 1–4, IEEE, 2018.

-
- [90] J. D. Sánchez-Torres, D. Gómez-Gutiérrez, E. López, and A. G. Loukianov, “A class of predefined-time stable dynamical systems,” *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 35, no. Supplement_1, pp. i1–i29, 2018.
- [91] J. D. Sánchez-Torres, E. N. Sanchez, and A. G. Loukianov, “Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes,” in *2015 American Control Conference (ACC)*, pp. 5842–5846, IEEE, 2015.
- [92] C. A. Anguiano-Gijón, A. J. Muñoz-Vázquez, J. D. Sánchez-Torres, G. Romero-Galván, and F. Martínez-Reyes, “On predefined-time synchronisation of chaotic systems,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 122, pp. 172–178, 2019.
- [93] L. Lin, “Predefined-time antisynchronization of two different chaotic neural networks,” *Complexity*, vol. 2020, 2020.
- [94] C. Chen, L. Mi, Z. Liu, B. Qiu, H. Zhao, and L. Xu, “Predefined-time synchronization of competitive neural networks,” *Neural Networks*, vol. 142, pp. 492–499, 2021.
- [95] C. Hu, H. He, and H. Jiang, “Fixed/preassigned-time synchronization of complex networks via improving fixed-time stability,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 51, no. 6, pp. 2882–2892, 2020.
- [96] Y. Song, Y. Wang, J. Holloway, and M. Krstic, “Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time,” *Automatica*, vol. 83, pp. 243–251, 2017.
- [97] Y. Cao, C. Wen, S. Tan, and Y. Song, “Prespecifiable fixed-time control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 3, pp. 1203–1222, 2020.
- [98] P. Krishnamurthy, F. Khorrami, and M. Krstic, “Robust adaptive prescribed-time stabilization via output feedback for uncertain nonlinear strict-feedback-like systems,” *European Journal of Control*, vol. 55, pp. 14–23, 2020.

-
- [99] B. Ning, Q.-L. Han, and Z. Zuo, “Bipartite consensus tracking for second-order multiagent systems: A time-varying function-based preset-time approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 6, pp. 2739–2745, 2020.
- [100] N. de la Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of full-scale 4d model of permanent-magnet synchronous motor with deterministic disturbances and stochastic noises,” in *Actuators*, vol. 10, p. 306, MDPI, 2021.
- [101] E. Jiménez-Rodríguez, J. D. Sánchez-Torres, and A. G. Loukianov, “On optimal predefined-time stabilization,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 17, pp. 3620–3642, 2017.
- [102] H. Kushner, “Stochastic stability and control, acad,” *Press, New York*, 1967.
- [103] X. Mao, *Exponential stability of stochastic differential equations*. Marcel Dekker, 1994.
- [104] X. Mao, “Stochastic differential equations and their applications, horwood publ,” *House, Chichester*, 1997.
- [105] F. Wang, B. Chen, Y. Sun, and C. Lin, “Finite time control of switched stochastic nonlinear systems,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 365, pp. 140–152, 2019.
- [106] R. Khasminskii, *Stochastic stability of differential equations*, vol. 66. Springer Science & Business Media, 2011.
- [107] W. Chen and L. Jiao, “Finite-time stability theorem of stochastic nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 12, pp. 2105–2108, 2010.
- [108] S. Khoo, J. Yin, Z. Man, and X. Yu, “Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form,” *Automatica*, vol. 49, no. 5, pp. 1403–1410, 2013.
- [109] J.-y. Zhai, “Finite-time output feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 33, no. 12, pp. 3809–3837, 2014.

-
- [110] H. Wang and Q. Zhu, “Finite-time stabilization of high-order stochastic nonlinear systems in strict-feedback form,” *Automatica*, vol. 54, pp. 284–291, 2015.
- [111] H. Kushner, “Finite time stochastic stability and the analysis of tracking systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 2, pp. 219–227, 1966.
- [112] J. Zhang, J. Xia, W. Sun, G. Zhuang, and Z. Wang, “Finite-time tracking control for stochastic nonlinear systems with full state constraints,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 338, pp. 207–220, 2018.
- [113] T. Zhang, F. Deng, and W. Zhang, “Finite-time stability and stabilization of linear discrete time-varying stochastic systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, no. 3, pp. 1247–1267, 2019.
- [114] Y. Zhang, C. Liu, and X. Mu, “Robust finite-time h_∞ control of singular stochastic systems via static output feedback,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 9, pp. 5629–5640, 2012.
- [115] J. Yin and S. Khoo, “Continuous finite-time state feedback stabilizers for some nonlinear stochastic systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 11, pp. 1581–1600, 2015.
- [116] J. Yu, S. Yu, J. Li, and Y. Yan, “Fixed-time stability theorem of stochastic nonlinear systems,” *International Journal of Control*, vol. 92, no. 9, pp. 2194–2200, 2019.
- [117] F. Guerra-Avellaneda and M. Basin, “Continuous fixed-time convergent control design for stochastic super-twisting system,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 16, pp. 11793–11806, 2020.
- [118] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 13, pp. 3044–3054, 2021.
- [119] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor system using linear time-varying

-
- control input,” in *2021 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 1412–1417, IEEE, 2021.
- [120] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. C. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time backstepping stabilization of autonomous nonlinear systems,” *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 9, no. 11, pp. 2020–2022, 2022.
- [121] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time synchronization of competitive neural networks with deterministic disturbances and stochastic noises,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2023.
- [122] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time synchronization of competitive neural networks via continuous time-varying control,” in *2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 219–224, IEEE, 2022.
- [123] D. G. Zill, *Differential equations with boundary-value problems*. Cengage Learning, 2016.
- [124] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 2021.
- [125] H. K. Khalil, *Nonlinear control*, vol. 406. Pearson New York, 2015.
- [126] J. Engwerda, *LQ dynamic optimization and differential games*. John Wiley & Sons, 2005.
- [127] A. H. Jazwinski, *Stochastic processes and filtering theory*. Courier Corporation, 2007.
- [128] A. Meyer-Baese, S. S. Pilyugin, and Y. Chen, “Global exponential stability of competitive neural networks with different time scales,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 14, no. 3, pp. 716–719, 2003.
- [129] X. Nie and J. Cao, “Multistability of competitive neural networks with time-varying and distributed delays,” *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 10, no. 2, pp. 928–942, 2009.

-
- [130] X. Yang, C. Huang, and J. Cao, “An lmi approach for exponential synchronization of switched stochastic competitive neural networks with mixed delays,” *Neural Computing and Applications*, vol. 21, pp. 2033–2047, 2012.
- [131] X. Lou and B. Cui, “Synchronization of competitive neural networks with different time scales,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 380, pp. 563–576, 2007.
- [132] H. Gu, “Adaptive synchronization for competitive neural networks with different time scales and stochastic perturbation,” *Neurocomputing*, vol. 73, no. 1-3, pp. 350–356, 2009.
- [133] Y. Li, X. Yang, and L. Shi, “Finite-time synchronization for competitive neural networks with mixed delays and non-identical perturbations,” *Neurocomputing*, vol. 185, pp. 242–253, 2016.
- [134] L. Duan, M. Zhang, and Q. Zhao, “Finite-time synchronization of delayed competitive neural networks with different time scales,” *Journal of Information and Optimization Sciences*, vol. 40, no. 4, pp. 813–837, 2019.
- [135] C. Aouiti, E. A. Assali, F. Chérif, and A. Zeglaoui, “Fixed-time synchronization of competitive neural networks with proportional delays and impulsive effect,” *Neural Computing and Applications*, vol. 32, pp. 13245–13254, 2020.
- [136] M. T. Hagan, H. B. Demuth, and M. Beale, *Neural Network Design*. PWS Publishing Co., 1997.
- [137] M. A. Cohen and S. Grossberg, “Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, no. 5, pp. 815–826, 1983.
- [138] M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, and A. Garza-Alonso, “Continuous fixed-time convergent super-twisting algorithm in case of unknown state and disturbance initial conditions,” *Asian Journal of Control*, vol. 21, no. 1, pp. 323–338, 2019.

- [139] V. Utkin, “On convergence time and disturbance rejection of super-twisting control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 8, 2013.
- [140] G. Wang, G. Zhang, and D. Xu, *Position Sensorless Control Techniques for Permanent Magnet Synchronous Machine Drives*. Springer, 2020.