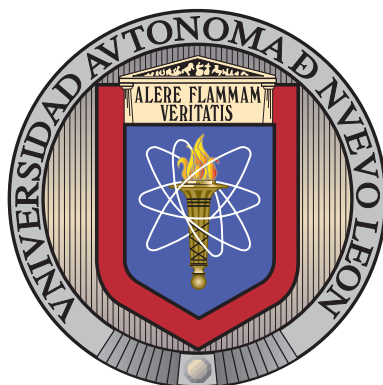


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO DE REGULADORES Y CONTROLADORES
EN TIEMPO PREDEFINIDO

POR

NAÍN DE LA CRUZ ANGELES

EN OPCIÓN AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

AGOSTO 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



DISEÑO DE REGULADORES Y CONTROLADORES
EN TIEMPO PREDEFINIDO

POR

NAÍN DE LA CRUZ ANGELES

EN OPCIÓN AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

AGOSTO 2023

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Diseño de reguladores y controladores en tiempo predefinido”, realizada por el alumno Naín de la Cruz Angeles, con número de matrícula 1828836, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. Mikhail V. Basin
Director

Dr. Pablo César Rodríguez Ramírez
Revisor

Dr. Miguel Hernández González
Revisor

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Revisor

Dr. Jesús Guadalupe Rodríguez González
Revisor

Vo. Bo.

Dr. José Fernando Camacho Vallejo
Coordinador del Posgrado en Ciencias con
Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Agosto 2023

Para: Joel Ikaia de la Cruz.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	xiv
Resumen	xv
Abstract	xvi
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Organización y aportaciones	8
2. Marco Teórico	11
2.1. Estabilidad de sistemas no lineales	11
2.1.1. Estabilidad de sistemas autónomos	11
2.1.2. Estabilidad de sistemas no autónomos	13
2.1.3. Conclusión	15
2.2. Técnica de backstepping	15
2.2.1. Conclusión	20
2.3. Modos deslizantes de alto orden	21
2.3.1. Controladores de modos deslizantes de orden 2	22
2.3.2. Super-twisting	23

2.4. Ruidos Gaussianos blancos	24
3. Control, en tiempo predefinido, con términos exponenciales.	27
3.1. Condiciones de convergencia en tiempo predefinido para un sistema no lineal	27
3.2. Introducción del problema de estabilización de un sistema de cuarto orden	29
3.3. Estabilización en tiempo predefinido de un motor de imanes permanentes cuyos estados son completamente medibles	31
3.3.1. Diseño del algoritmo de control	31
3.3.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	34
3.4. Estabilización en tiempo predefinido de un motor de imanes permanentes con solo un estado medible	36
3.4.1. Diseño del algoritmo de control	37
3.4.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	38
3.5. Estabilización, en tiempo predefinido, de un motor de imanes permanentes sujeto a perturbación acoplada determinista.	40
3.5.1. Diseño del algoritmo de control	40
3.5.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	41
3.6. Estabilización de un motor de imanes permanentes sujeto a perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos	44
3.6.1. Diseño del algoritmo de control	44
3.6.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	46
3.6.3. Conclusiones	48
4. Control, en tiempo predefinido, con términos lineales.	49
4.1. Estabilización en tiempo predefinido de un sistema con estados medibles .	50
4.1.1. Diseño del algoritmo de control.	50
4.1.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control.	53

4.2. Estabilización, en tiempo predefinido, de un sistema con solo un estado medible	56
4.2.1. Diseño del algoritmo de control	56
4.2.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	58
4.3. Estabilización de un sistema sujeto a perturbaciones deterministas con solo un estado medible	61
4.3.1. Diseño del algoritmo de control	61
4.3.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	62
4.4. Estabilización, en tiempo predefinido, de un sistema sujeto a perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados	65
4.4.1. Diseño del algoritmo de control	65
4.4.2. Demostración de la eficiencia del algoritmo de control	66
4.5. Conclusiones	68
5. Control en tiempo predefinido de sistemas con perturbaciones acopladas y no acopladas	70
5.1. Estabilización, en tiempo predefinido, de un sistema con estados completamente medibles	71
5.1.1. Sistema sin perturbación	72
5.1.2. Sistema con perturbaciones deterministas acopladas y no acopladas	76
5.1.3. Sistema con perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acopladas y no acopladas	81
5.2. Estabilización, en tiempo predefinido, de un sistema con solo un estado medible	85
5.2.1. Sistema sin perturbación	86
5.2.2. Sistema con perturbaciones deterministas acopladas y no acopladas	90
5.2.3. Sistema con perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acopladas y no acopladas	93
5.3. Conclusiones	96

6. Conclusiones y trabajo futuro	97
A. Motores de corriente directa	99
A.1. Motores de corriente directa de imanes permanentes	100
A.2. Motores síncronos de imanes permanentes	104

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Arreglo del motor síncrono de imanes permanentes [1].	29
2.	Convergencia de los estados del sistema (3.5) al origen.	35
3.	Trayectoria de la entrada de control u_d usando el algoritmo de control (3.6).	36
4.	Convergencia de los estados del sistema 3.16 y los estimados producidos por el observador 3.17.	39
5.	Trayectoria de la señal de control u_{d2} , ecuación 3.21 basada en los estimados producidos por el observador 3.17.	39
6.	Convergencia de los estados del sistema (3.22) y los estimados producidos por el observador (3.17) al origen, en presencia de perturbaciones deterministas.	43
7.	Trayectoria de la señal de control u_d basado en los estimados producidos por el observador (3.17).	43
8.	Trayectorias del control (3.24) $v(t)$, basado en los estimados producidos por el observador (3.17), y la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 5747(0,1t + 0,001 \cos(10t))$	44
9.	Convergencia del sistema (3.25) y los estados estimados por el observador (3.17) al origen en presencia de una perturbación determinista y ruido estocástico.	46
10.	Trayectoria del control u_d basado en los estimados producidos por el observador (3.17) para el sistema (3.25).	47
11.	Trayectoria del compensador $v(t)$ mostrado en la ecuación (3.24), contra la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 4024,14(0,1t + 0,001 \cos(10t))$, en presencia de ruido blanco con difusión $v_2^{0,75}$	47

12.	Convergencia de los estados del sistema (4.14) al origen.	55
13.	Trayectoria del control $u_d(t)$ mostrado en 4.2.	55
14.	Convergencia de los estados del sistema (4.22) y los estados estimados por el observador (4.23) al origen.	59
15.	Convergencia de los estados del sistema (4.22) al origen.	60
16.	Trayectoria del control u_d basado en los estimados producidos por el observador (4.23).	60
17.	Convergencia de los estados del sistema (4.28) y los estimados producidos por el observador (4.23) al origen en presencia de perturbaciones deterministas.	63
18.	Trayectoria de la entrada de control $u_d(t)$ basada en los estimados producidos por el observador (4.23).	64
19.	Trayectoria del compensador $\chi(t)$ mostrado en 4.26 contra la perturbación $\xi(t)$, basado en los estimados producidos por el observador 4.23.	64
20.	Convergencia de los estados del sistema (4.30) y los estimados producidos por el observador (4.23) al origen, en presencia de perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos.	67
21.	Trayectoria de la señal de control u_d basada en los estimados producidos por el observador (4.23).	68
22.	Trayectoria de la señal de control $\chi(t)$, basado en los estimados producidos por el observador (4.23) contra la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 4024,14(0,1t + 0,001\cos(10t))$ y el ruido estocástico con difusión $v_2^{0,75}$	68
23.	Diagrama de un motor con escobillas de CD [2].	71
24.	Convergencia de los estados del sistema (5.2) al origen.	75
25.	Trayectoria de la señal de control (5.3).	75
26.	Figura superior: Convergencia de los estados del sistema (5.11) al origen. Figura inferior: Trayectoria del algoritmo de control (5.13).	80
27.	Figura superior: Trayectorias de la perturbación $d_1(t)$ y el compensador $\chi_1(t)$ (5.14). Figura inferior: Trayectorias de la perturbación $d_2(t)$ y el compensador $\chi_2(t)$ (5.14).	81

28.	Convergencia de los estados del sistema (5.25) al origen.	83
29.	Trayectoria de la señal de control dada por el algoritmo (5.13).	84
30.	Trayectoria de la perturbación y el ruido $d_1(t) + \sigma_1(t, \omega(t)) dW_1$ contra el compensador $\chi_1(t)$ 5.14.	84
31.	Trayectoria de la perturbación y el ruido $d_2(t) + \sigma_2(t, i_a(t)) dW_2$ contra el compensador $\chi_2(t)$ 5.14.	85
32.	Diagrama de bloques para la implementación del algoritmo de control 5.30	88
33.	Convergencia de los estados del sistema (5.27) y los estados del observador (5.28) al origen.	89
34.	Trayectoria de la señal de control (5.30)	89
35.	Convergencia de los estados del sistema 5.32 al origen.	92
36.	Trayectoria de la señal de control V_{ad} de la ecuación 5.34	92
37.	Trayectorias del compensador $\chi(t)$ contra la perturbación $\xi(t)$	93
38.	Convergencia de los estados del sistema 5.36 y del observador 5.28 al origen.	95
39.	Comportamiento de la señal de control V_{ad} basada en los estados estimados por el observador 5.28.	95
40.	Comportamiento del compensador $\chi(t)$ y de la perturbación $\xi(t)$ y el ruido $\sigma(t, w(t)) dW(t)$	96
41.	Clasificación de motores eléctricos [3].	100
42.	Partes de un motor de CD [4].	101
43.	Funcionamiento de un motor de CD [4].	101
44.	Estructura del rotor de un motor de CD [4].	102
45.	Diagrama eléctrico de un motor con escobillas de CD [2].	102
46.	Diagrama eléctrico de un motor con escobillas de CD [3].	103
47.	SPMSM figuras a y b. IPMSM figuras c y d, [5]	105
48.	Representación equivalente del rotor de un IPMSM [3].	106
49.	Variación de la autoinductancia conforme a la posición del rotor [3].	107

50.	Variación de la mutua inductancia conforme a la posición del rotor [3].	107
51.	Variación de la mutua inductancia debido al rotor conforme a la posición del rotor [3].	108
52.	Transformación de coordenadas del estator a coordenadas $d - q$ [3].	108
53.	Transformación de coordenadas del estator a coordenadas $d - q$ cuando el marco $d - q$ es estacionario [3].	109
54.	Transformación de coordenadas del estator a coordenadas $d - q$ cuando el marco $d - q$ está rotando [3].	110
55.	Conversión entre marcos de referencia $d - q$ [3].	111
56.	Circuito eléctrico equivalente del IPMSM al hacer la transformación del marco a, b, c al marco $d - q$ del rotor. (A) representa el eje d y (B) el eje q [3].	112

ÍNDICE DE TABLAS

1.	Parámetros del motor síncrono de imanes permanentes junto con las condiciones iniciales y valores para la simulación.	35
2.	Valores utilizados para las variables del observador y del control $v(t)$	42
3.	Valores utilizados en el observador junto con las condiciones iniciales y tiempos de convergencia deseados.	58
4.	Valores utilizados en la simulación del desempeño del algoritmo de control 4.26	63
5.	Parámetros del motor.	74
6.	Valores utilizados en la simulación.	88
7.	Valores utilizados en la simulación.	91

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi mas sincero agradecimiento a todos aquellos que de alguna manera aportaron algo en mi paso por el programa de doctorado en el CICFIM. En primer lugar a los coordinadores del programa, al Dr. Omar que en su tiempo estuvo siempre disponible para cualquier duda relacionada con el programa y al Dr. Fernando por su ayuda en la parte final del programa y proceso de titulación. También agradezco el tiempo que los miembros del comité de tesis, el Dr. Mikhail V. Basin, el Dr. Pablo César Rodríguez Ramírez, el Dr. Miguel Hernández González, el Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez y el Dr. Jesús Guadalupe Rodríguez González, dedicaron para la revisión del documento proveyendo de invaluable comentarios para mejorar el mismo. En especial agradezco al Dr. Mikhail V. Basin por su ayuda y disposición durante los tres años de investigación; gracias por todo el apoyo. Finalmente, agradezco a CONAHCYT por la beca que me otorgó durante el programa y a la Lic. Briseida Jacinto por su ayuda con todo lo relacionado al trámite de la beca y evaluación de desempeño. Muchas gracias a todos los que he mencionado en las líneas arriba.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis y diseño de controladores que forzan los estados de un sistema dinámico al origen en tiempo predefinido y de observadores que permiten recuperar los estados de un sistema en tiempo predefinido. Los algoritmos de control y observación propuestos presentan varias ventajas sobre controladores y observadores que convergen en tiempo finito o tiempo fijo. En primer lugar el tiempo de convergencia de los estados del sistema debido a la influencia de la señal de control y la recuperación de los estados del sistema por el observador pueden ser establecidas por el diseñador del algoritmo de control. Esto es una ventaja muy importante, ya que los algoritmos de control y observación en tiempo finito o fijo solo permiten estimar el tiempo de convergencia, el cual puede o no ser el tiempo real de convergencia. La segunda característica sobresaliente de los algoritmos propuestos es que no dependen de las condiciones iniciales. Esto presenta otra ventaja muy importante sobre algoritmos de control y observación en tiempo finito, ya que el tiempo de convergencia de los algoritmos de control y observación en tiempo finito se incrementa al aumentar las condiciones iniciales. Una tercera característica de los algoritmos de control y observación propuestos en este trabajo radica en su robustez, es decir los algoritmos son robustos en contra de perturbaciones deterministas y ruidos blancos Gaussianos que pudieran afectar al sistema de manera acoplada o desacoplada. Para llevar a cabo el análisis se utiliza la técnica de backstepping y teoría de estabilidad de Lyapunov. La eficiencia de los algoritmos diseñados es demostrada a través de simulaciones numéricas, implementadas en el software Simulink de MatLab, utilizando el modelo matemático de un motor síncrono de imanes permanentes y un motor de corriente directa con conmutador.

ABSTRACT

The purpose of this work is to show the analysis and synthesis of control algorithms that drive the states of a dynamical system to the origin in predefined time and of observers that allow to recover the unmeasurable states of a dynamical system in predefined time. The observation and control algorithms presented in this work have many advantages over current finite/fixed-time control and observation algorithms. First, the convergence time of the system states and the time that an observer takes to recover the unmeasurable states of a dynamical system can be assigned at will by the control designer. This is an important advantage over current finite/fixed-time control and observer algorithms, since they only allow the estimation of the convergence time which can be or not the real convergence time. The second characteristic is that the convergence time of the algorithms proposed in this work are independent of initial conditions. This is an important advantage over finite-time controllers and observers, since their convergence time is increased when the value of the initial conditions increase. The third characteristic of the proposed algorithms is that they are robust against matched and unmatched deterministic disturbances and white Gaussian noises that might be affecting the performance of a dynamical system. To carry out the design, the backstepping technique is used to find the form of the control algorithm and Lyapunov theory to analyze the stability of the algorithm. The performance of the proposed algorithms is demonstrated through numerical simulations, implemented in MatLab and Simulink, using the mathematical model of a permanent magnet synchronous motor and a brushed DC motor.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

El avance de la tecnología nos ha permitido presenciar el desarrollo de dispositivos y sistemas que nos permiten tener recreación, llevar a cabo las labores de nuestra vida diaria e incluso tener salud. Sin embargo, para que estos dispositivos y sistemas alcancen un buen desempeño es necesario imponer restricciones sobre su funcionamiento. Restricciones como estabilidad del sistema, alcance de un valor deseado en un intervalo de tiempo corto, buen desempeño del sistema a pesar de que este se vea afectado por variaciones en la demanda de operación o debido a posibles interferencias afectando al sistema, eficiencia en el consumo de energía son solo algunos de los ejemplos mas importantes a los cuales se encuentran sujetos los sistemas y dispositivos creados en el presente.

Asegurar que un sistema opere de la manera deseada es el sujeto de estudio de la teoría de control automático. Por lo menos desde los inicios del siglo 20 los científicos se dieron cuenta de la importancia de las herramientas matemáticas que pueden ser utilizadas en este estudio. Es así como surge la teoría de lo que hoy es conocido como control clásico. Sin embargo, no pasó mucho tiempo para que se dieran cuenta que las ideas utilizadas no eran suficientes para asegurar el desempeño deseado del sistema. Esto dió paso a lo que hoy se conoce como control moderno, lo cual abrió las puertas a nuevas posibilidades. Es en este tiempo donde varias técnicas de control robusto comienzan a nacer por ejemplo, H_∞ , control adaptivo, control óptimo, etc.

Al revisar las diferentes teorías de control propuestas se puede observar que ninguna teoría es autosuficiente para satisfacer los requerimientos que aseguran el buen desempeño de un sistema. Por ejemplo, un algoritmo puede asegurar la robustez de un sistema pero puede ser que la energía utilizada por el sistema no sea óptima. Esta falta de autosuficiencia es lo que impulsa a los investigadores en el área de control a desarrollar nuevas técnicas utilizando diferentes métodos de control a la misma vez.

Aunque es bien cierto que el desempeño de los sistemas puede verse grandemente mejorado utilizando diferentes técnicas de control, el tiempo de reacción del sistema juega un papel primordial en la efectividad del control. No es difícil ver que esto es así por ejemplo, si al conducir un automóvil queremos acelerar y presionamos el pedal pero el automóvil necesitara de 1 minuto para alcanzar el valor de referencia se dudaría mucho de la efectividad del sistema de control que está detrás de este automóvil. Otro ejemplo tiene que ver con el frenado, de nada serviría que el sistema necesitara de 20 segundos para frenar cuando se necesitan 10. Es esta demanda de tiempo de reacción la que ha llevado a los investigadores del área de control a proponer diferentes teorías. Es así como conceptos de controladores de tiempo finito o controladores de tiempo fijo vieron su aparición, ambos tratando de asegurar que el sistema controlado verdaderamente alcance el desempeño deseado en el tiempo deseado.

Los algoritmos de control de tiempo finito o tiempo fijo han sido de gran ayuda para satisfacer la restricción de tiempo impuesta sobre el sistema, pero no suficientes. La razón de esto radica en que las condiciones iniciales influyen en el tiempo de convergencia, como en el caso de controladores en tiempo finito, o bien el tiempo de convergencia solo es un estimado del tiempo real de convergencia. Desafortunadamente, la robustez de un sistema descansa en el tiempo de convergencia. No fue sino en la última década donde el diseñador de algoritmos de control tuvo la oportunidad de implementar un algoritmo de control para el cual el tiempo de convergencia no dependiera de las condiciones iniciales y fuera el valor real de convergencia. Este tipo de controladores recibió el nombre de controladores en tiempo predefinido y ha abierto la puerta a nuevas posibilidades. El concepto de tiempo predefinido no solo es aplicable al diseño de controladores sino también al diseño de observadores, los cuales pueden recuperar los estados no medibles de un sistema o bien detectar fallas en un sistema en tiempo predefinido.

Por lo mencionado anteriormente, este trabajo tiene como finalidad analizar nuevos esquemas de controladores y observadores de tiempo predefinido. Para encontrar la forma que debe tener el algoritmo de control se utilizará la técnica de backstepping la cual permite generar algoritmos de control para sistemas afectados no solo por perturbaciones acopladas sino también desacopladas. Para el estudio de la estabilidad del sistema en tiempo predefinido se utilizará teoría de Lyapunov y para asegurar la robustez del sistema se utilizará un algoritmo de modos deslizantes de segundo orden conocido como supertwisting.

1.2 ANTECEDENTES

La teoría de control robusto se enfoca en la forma de manipular el comportamiento de un sistema para alcanzar algún valor de referencia deseado, independientemente de las condiciones iniciales [6], [7], [8], la incertidumbre del comportamiento real del sistema [9], [10], [11] y las perturbaciones que pudiesen estar afectando al sistema [12], [13], [14], [15]. Para controlar un sistema dinámico eficazmente es necesario conocer tanto la estabilidad del sistema como el tiempo de convergencia.

En la mayoría de aplicaciones, los controladores PID en sus diferentes formas aseguran el buen desempeño de un sistema dinámico lineal. Sin embargo, existen ciertas perturbaciones o incertidumbres que afectan un desempeño robusto de este tipo de controlador [13], [16], [17], [18], [19]. Por otro lado, en la práctica no siempre es posible representar un sistema a través de ecuaciones lineales. Por ejemplo, un servomecanismo que emplea un motor eléctrico para mover un objeto a velocidad baja no puede ser modelado mediante una ecuación lineal debido a la fricción a velocidades bajas [20], [21], el backlash del motor al estar acoplado con una carga [22]. Incluso el frenado del motor introduce no linealidades al sistema [23]. De acuerdo a esto, pareciera ser necesario tratar de obtener un modelo del sistema que modele el comportamiento del sistema en cuestión de manera mas realista. Una búsqueda de la literatura en esta dirección muestra que al proceder de esta manera los sistemas se ven afectados por no linealidades. Sin embargo, aunque tratar de modelar al sistema de una manera mas realista puede parecer la línea de acción a seguir, en realidad no resuelve completamente el problema ya que al tratar de obtener un modelo mas realista se incrementa la complejidad del sistema analizado haciendo mas difícil comprender su comportamiento [10] e incluso tratar de diseñar algoritmos de control para el mismo.

De la discusión anterior se observa que es necesario hacer un compromiso entre un modelo que refleje de manera mas real al sistema y un modelo que sea fácil de analizar y por lo tanto de implementar un algoritmo de control para el mismo. Es por eso que la mayoría de investigadores en el área de control optan por tratar de modelar al sistema lo mas real que se pueda pero conservando la manejabilidad de las ecuaciones que modelan al sistema. Procediendo de esta manera se supone que el sistema tiene cierta incertidumbre y que estará afectado por perturbaciones, lo cual es modelado mediante alguna función pertinente. Para poder proceder de esta manera se requiere que la perturbación y incertidumbre satisfagan ciertas condiciones [24], [25], [26].

Una vez que se ha obtenido un modelo de acuerdo a la discusión anterior, es necesario implementar algún algoritmo de control robusto. Un algoritmo de control es robusto

si fuerza al sistema a comportarse de la manera deseada aunque existan perturbaciones afectando al sistema, incertidumbres en el modelo del sistema e independientemente de las condiciones iniciales. En este respecto se han propuesto varias técnicas de control robusto. Por ejemplo control H_∞ [26], control de lógica difusa [27], redes neuronales [28], modos deslizantes [15], control adaptivo [29], backstepping [30], por mencionar algunos de los mas populares encontrados al revisar la literatura. Como es imposible crear un algoritmo de control que satisfaga todos los requerimientos de control de un sistema no es extraño observar en la literatura combinaciones entre diferentes tipos de control mencionados [31], [32], [31].

Entre los algoritmos de control robustos mas utilizados están los algoritmos de control adaptivo y modos deslizantes. La razón por la cual esto es así es la flexibilidad en el diseño y relativa facilidad de implementación como en el caso de modos deslizantes [33], [34], [35] o la adaptabilidad ante cambios en los parámetros del sistema como en el caso de control adaptivo [29], [36], [37], además de la robustez ante ruidos que pudieran afectar al sistema [19] [17]. Un problema que pudieran presentar los controles adaptivos es la carga excesiva que estos colocan sobre la computadora de control [38], [39].

Inicialmente el problema de robustez de un algoritmo de control fue relegado a mantener el desempeño del sistema deseado a pesar de perturbaciones o parámetros no modelados del sistema [40]. Siguiendo esta línea de acción diferentes propuestas de los algoritmos de control mencionados han sido reportados [41], [42], [43], [44]. Sin embargo, la rapidez con la cual puede actuar un algoritmo de control juega un papel muy importante para asegurar la robustez del sistema [45], [8], [7], [31], [46]. En la práctica, existen diversas aplicaciones donde se requiere que un sistema converja en tiempo finito [47]. En este contexto tiempo finito se refiere a un intervalo de tiempo relativamente breve. Algunos ejemplos de tal caso son los sistemas robóticos, aplicaciones aeroespaciales, UAV's, etc. De acuerdo a [48], todo sistema dinámico estable puede presentar convergencia exponencial o asintótica. Convergencia exponencial o asintótica no implica convergencia en tiempo finito. Convergencia en tiempo finito tiene una rapidez de convergencia mas alta que un sistema con convergencia exponencial o asintótica [49]. La ventaja de un sistema que converge en tiempo finito es que puede tener mejor desempeño en presencia de perturbaciones e incertidumbres [50] [49]. A primera vista se puede pensar que el problema queda resuelto si se asegura la convergencia del sistema en tiempo finito. De acuerdo a esto se han realizado diferentes propuestas utilizando el concepto de convergencia en tiempo finito [51], [52], [53]. Sin embargo, la convergencia de un sistema dinámico en tiempo finito depende de las condiciones iniciales [54], [55], [56], en el mejor de los casos entre mas grande es la condición inicial mayor será el tiempo de convergencia y esta puede ser destruida debido a cambios rápidos en el proceso debido a perturbaciones afectando al sistema [57], [34].

Una solución parcial a este problema se presenta con el concepto de convergencia en tiempo fijo. Un sistema dinámico tiene convergencia en tiempo fijo si el tiempo de convergencia está acotado para cualquier condición inicial posible. De acuerdo a esto, convergencia en tiempo fijo puede verse como una extensión de convergencia global en tiempo finito [58], [59] y significa convergencia del sistema hacia un valor de referencia a lo mas en un valor de tiempo acotado, independientemente de las condiciones iniciales [59], [60], [61]. Un estudio detallado de la literatura relacionada con controladores en tiempo fijo muestra que el tiempo de convergencia real de un sistema que utiliza estos algoritmos no puede ser determinado con precisión sino solo se puede estimar el tiempo de convergencia, es decir el tiempo de convergencia real puede ser mucho menor que el tiempo de convergencia estimado (como ejemplo ver las referencias mencionadas en las líneas precedentes). Además, generalmente la solución es demasiado intrincada como para poder ser implementada. Por lo tanto, teniendo en cuenta la relevancia del tiempo de convergencia de los sistemas dinámicos para asegurar la robustez de los mismos ante perturbaciones o incertidumbres, es imprescindible contar con una forma de asegurar la convergencia del sistema en tiempo finito que no dependa de las condiciones iniciales o de los parámetros del controlador utilizado, que sea posible de asignar a voluntad, algo que ningún algoritmo de control en tiempo fijo permite, y que al mismo tiempo la ley de control sea relativamente fácil de implementar.

Otro problema relacionado con el tiempo de convergencia es el diseño de observadores [47], [62], [63]. Los observadores, también conocidos como diferenciadores [64], son algoritmos que permiten recuperar alguna característica del sistema ya sea los estados [65], [66], [67], perturbaciones o incertidumbres [68], [69], [70], [71] o detectar fallas en un sistema [72], [73], [74]. La teoría de control moderno permite representar el comportamiento interno y externo del sistema. Cuando se diseña un algoritmo de control es deseable que este actue en base a la información, obtenida mediante sensores, del comportamiento interno del sistema. Aunque algunas veces esto es posible, generalmente no es posible obtener medidas del comportamiento interno del sistema. La razón de la imposibilidad radica en varios factores como son la disponibilidad del sensor para medir la variable en cuestión, el costo del sensor el cual puede ser muy caro haciendo prohibitivo el diseño, el tamaño del sensor haciendo que toda la implementación ocupe mas espacio, el acondicionamiento extra requerido para la señal proveniente del sensor [75], [76], [77]. Para sobrepasar el problema del uso de sensores en alguna aplicación específica se utilizan los observadores, los cuales dependen de una medición del comportamiento externo del sistema y en base a esta medición poder recuperar la señal o señales deseadas.

Cuando se analiza el diseño de un algoritmo de observación es necesario que el algoritmo sea robusto y que recupere la señal deseada en el menor tiempo posible [78], [79],

[80]. La razón de esto radica en que la señal recuperada por el observador será utilizada por algún algoritmo de control para estabilizar al sistema en cuestión. Si el algoritmo de observación es muy lento en recuperar los estados el controlador no servirá de nada. La revisión de la literatura muestra que el diseño de los observadores está basado en la teoría de convergencia en tiempo finito o fijo. Es decir el observador puede recuperar la señal deseada dentro de un tiempo estimado el cual puede ser el tiempo real o una cota superior de este. De acuerdo a esto, sería deseable que el algoritmo de observación tuviese la posibilidad de permitir asignar el tiempo deseado para la recuperación de la señal en cuestión.

Por la discusión presentada arriba se observa que es necesario contar con algoritmos de control o de observación que logren la convergencia hacia algún valor de referencia en un tiempo definido por el diseñador del algoritmo. Es decir que el diseñador del algoritmo de control o de observación establezca a su deseo el tiempo máximo en el cual los estados del sistema deben converger o una señal deseada debe ser recuperada, sin importar las condiciones iniciales. Para conseguir esto se ha introducido el concepto de controladores convergentes en tiempo predefinido, que hace alusión a controladores que cumplen con este tipo de característica sin embargo, no se ha introducido para observadores.

El concepto de convergencia en tiempo predefinido es relativamente nuevo. Sin embargo, de acuerdo a [81], la idea de convergencia en tiempo predefinido fue propuesta por primera vez en [82] mediante el concepto “generador de tiempo base”. En ese trabajo los autores proponen que el tiempo de convergencia de un sistema puede ser asegurado si el algoritmo de control contiene una función dependiente del tiempo con exponente negativo. El concepto de generadores de tiempo es retomado nuevamente en [83] para el control de un brazo robótico de dos grados de libertad y en [84] para el posicionamiento de un brazo robótico. El concepto de tiempo predefinido como tal parece ser introducido en [85] para la solución de un problema de programación lineal en tiempo predefinido. Para esto se utiliza una función exponencial dependiente del tiempo. A partir de ahí otros trabajos continúan con la misma idea. Por ejemplo, en [86] se utiliza el concepto para diseñar un algoritmo de control utilizando modos deslizantes de grado uno que converja en tiempo predefinido pero no hay aplicación práctica de la teoría. En [87] se diseña un algoritmo de control en tiempo predefinido para el control de un sistema mecánico de dos grados utilizando backstepping. En [88] se analiza el diseño de controles robustos, utilizando modos deslizantes, que convergen en tiempo predefinido para sistemas de orden uno. A diferencia de los trabajos recién mencionados en [89] se utiliza una función polinomial como propuesta de control para lograr convergencia en tiempo predefinido, la teoría es aplicada en la estabilización de sistemas de primer orden.

Desde los trabajos de [85] y [87] las propuestas de algoritmos de control en tiempo predefinido se ha incrementado. Por ejemplo en [90] se utiliza el concepto de generadores de tiempo base para generar un control en tiempo predefinido para un sistema de segundo orden que puede ser transformado a una cadena de integradores perturbado. En [91] se diseña un algoritmo de control robusto para un sistema de orden tres que puede ser representado en forma de cadena de integradores. Para el diseño se utiliza una función exponencial basada en los estados y una función dependiente del tiempo con exponente negativo sin embargo, el control requiere de una magnitud muy grande para condiciones iniciales negativas lo cual puede causar la divergencia de los estados. En [92] se diseña un control robusto para un sistema de orden uno utilizando términos exponenciales y función signo. En [93] se diseña un control robusto para un sistema de orden uno utilizando términos lineales en las variables de los estados.

Basados en la revisión de la literatura se observa que el diseño de controladores y observadores en tiempo predefinido es un campo activo de investigación. Por ejemplo, de las referencias mencionadas arriba solo se aborda el problema de diseño de controles robustos en tiempo predefinido para sistemas de orden dos, en [91] se hace la extensión a un sistema de orden tres y se propone que el diseño puede ser generalizado a mas alto orden sin embargo, la magnitud del control es excesivamente grande para condiciones iniciales negativas lo cual puede hacer que los estados del sistema diverjan. A excepción de [88] ninguna referencia, por lo menos hasta el inicio de este trabajo, había abordado el problema de diseño de observadores convergentes en tiempo predefinido. De los trabajos mencionados anteriormente todos se concentran en la robustez del sistema ante perturbaciones deterministas acopladas. En la práctica un sistema puede estar afectado por perturbaciones no acopladas, es decir perturbaciones que afectan al sistema a través de un canal que no contiene señal de control. Además, ninguno de los trabajos mencionados aborda el problema de perturbaciones estocásticas afectando al sistema. En la práctica un sistema automático puede ser afectado por ruido eléctrico a través de la señal de los sensores, ruido eléctrico introducido a la línea debido a máquinas de inducción conectados a la misma línea, o dispositivos de conmutación rápida que estén cercanos al sistema de control. Es por eso que en este trabajo se propone estudiar el diseño de controladores y observadores robustos en tiempo predefinido utilizando términos exponenciales para controlar sistemas afectados por perturbaciones y ruidos estocásticos acoplados, utilizando términos lineales en los estados del sistema para controlar sistemas afectados por perturbaciones y ruidos estocásticos acoplados y utilizando términos lineales para sistemas afectados por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados y no acoplados. El trabajo propone que estos algoritmos diseñados permiten llevar todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido y mantenerlos allí después de la convergencia. Para el análisis se supone que todos los estados del sistema pueden ser medibles pero

también se propone que en caso de que esto no sea cierto siempre se puede diseñar un observador convergente en tiempo predefinido que puede recuperar todos los estados no medibles del sistema. Para verificar la eficiencia de los algoritmos diseñados se utilizan simulaciones numéricas utilizando un motor síncrono de imanes permanentes y un motor de CD con escobillas.

1.3 ORGANIZACIÓN Y APORTACIONES

La estructura de este trabajo está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presenta la teoría relacionada con análisis de estabilidad de sistemas no lineales, backstepping, algoritmos de control por modos deslizantes de orden 2, en especial el supertwisting y la teoría relacionada con ruidos blancos Gaussianos.

El capítulo 3 presenta el diseño de un controlador en tiempo predefinido utilizando términos exponenciales en las variables de los estados. Durante el diseño se suponen diferentes escenarios: primero se analiza el diseño de un controlador en tiempo predefinido suponiendo que los estados del sistema son medibles y el sistema no está afectado por perturbaciones ni ruidos estocásticos, después se analiza el diseño de un controlador para controlar un sistema del cual solo un estado es medible y el sistema no está afectado por perturbaciones ni ruidos estocásticos. En este caso como solo un estado del sistema es medible se requiere utilizar un observador que permita recuperar los estados del sistema no medibles. Las salidas del observador servirán para el diseño del control robusto. En seguida se analiza el diseño de un control robusto para un sistema del cual los estados no son medibles y el sistema está afectado por perturbaciones deterministas acopladas. La última parte de esta sección analiza el diseño de un control robusto para un sistema del cual los estados solo un estado es medible y el sistema está afectado por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados. La efectividad de los controles diseñados se demuestran mediante simulaciones numéricas, aplicando los algoritmos de control a un Motor Síncrono de Imanes Permanentes. Los resultados de esta sección fueron presentados en

1. N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of full-scale 4D model of permanent-magnet synchronous motor with deterministic disturbances and stochastic noises,” *Actuators*, vol. 10, no. 11, 2021.
2. N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of full-scale 4D permanent-magnet synchronous motor,” in *2021 IEEE 9th Conference on Systems, Process and Control (ICSPC 2021)*, pp. 81-85, 2021.

El capítulo 4 presenta el diseño de un controlador en tiempo predefinido, utilizando términos lineales en los estados del sistema. Durante el diseño se consideran cuatro escenarios. En primer lugar suponemos que todos los estados del sistema son medibles además, el sistema no está afectado por ruidos ni perturbaciones deterministas. El segundo escenario supone que sólo un estado del sistema es medible y el sistema no está afectado por perturbaciones deterministas ni ruidos estocásticos. Como solo un estado del sistema es medible, se utiliza un observador, convergente en tiempo predefinido, para recuperar los estados no medibles del sistema; una vez que se ha diseñado este observador, las salidas del observador se utilizan para poder diseñar un control en tiempo predefinido. El siguiente escenario que se analiza es el de un sistema del cual sólo se puede medir un estado y el sistema está afectado por perturbaciones deterministas acopladas. El último caso analizado en esta sección es el de un sistema afectado por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados. El desempeño de los controles diseñados se demuestran mediante simulaciones numéricas, utilizando los algoritmos de control para controlar un Motor Síncrono de Imanes Permanentes. Los resultados de esta sección fueron presentados en

1. N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of 4D PMSM system using linear time-varying control input,” in 2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS), pp. 147-152, 2022.
2. N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time stabilization of 4D permanent-magnet synchronous motor system with deterministic and stochastic disturbances using linear time-varying control input,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2022. DOI: 10.1007/s12555-022-0401-4.

El capítulo 5 presenta el diseño de un controlador en tiempo predefinido para un sistema que está afectado por perturbaciones deterministas y ruidos acopladas y no acopladas. Los casos analizados en esta sección los podemos dividir en dos grupos: en el primer grupo se analiza un sistema del cual es posible medir todos sus estados. En este grupo se diseña un control para un sistema cuya operación no está afectada por perturbaciones deterministas ni ruidos, después suponemos que el sistema está afectado por perturbaciones deterministas acopladas y no acopladas. El último análisis realizado en este grupo se centra en un sistema que está afectado por perturbaciones deterministas y ruidos acoplados y no acoplados. El segundo grupo analizado en este capítulo tiene que ver con un sistema del cual sólo podemos medir un estado. Al igual que el grupo anterior se hacen las siguientes suposiciones: que el sistema no está afectado por perturbaciones ni ruidos estocásticos, la segunda suposición es que el sistema está afectado por perturbaciones acopladas y no acopladas, la última su posición en este grupo es que el sistema está afectado por perturbaciones y ruidos acoplados y no acoplados. La efectividad del

control es demostrada mediante simulaciones numéricas aplicando los controles diseñados a un Motor de CD con escobillas.

1. N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time stabilization of brushed direct current motor system affected by matched and unmatched disturbances and stochastic noises,” Sometido a revista Transactions of the Institute of Measurement and Control, en 2022 y está en proceso de revisión.

El capítulo 6 muestra las conclusiones y los alcances del trabajo realizado durante este proyecto. Además se presentan algunas posibles extensiones de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 ESTABILIDAD DE SISTEMAS NO LINEALES

La función de cualquier algoritmo de control es forzar todos los estados de un sistema particular a un valor de referencia deseado. Una vez que el especialista en control automático ha propuesto algún posible algoritmo, es necesario que este se asegure que el algoritmo realmente forzará los estados del sistema al valor de referencia deseado. Al parecer, verificar mediante simulación, que un sistema alcanza el valor de referencia deseado bajo la influencia de un algoritmo de control no es suficiente [98]. Es por eso que el análisis de estabilidad de un sistema es de suma importancia [99],

Existen diferentes herramientas que permiten analizar la estabilidad de un sistema sin embargo, la herramienta más utilizada es el análisis de estabilidad de Lyapunov [100]. Aunque no es posible determinar la estabilidad de todos los sistemas utilizando esta herramienta, para una mayoría de ellos es posible y su uso es relativamente sencillo, esta es la cualidad por la cual el análisis de estabilidad utilizando esta herramienta es preferible a cualquier otra. Esta herramienta también forma parte fundamental de este trabajo y en esta sección se presenta la teoría relacionada a esta herramienta.

2.1.1 ESTABILIDAD DE SISTEMAS AUTÓNOMOS

El análisis de estabilidad en sentido de Lyapunov puede ser determinada utilizando cualesquiera de los siguientes métodos, ya sea linealizando al sistema alrededor del punto de equilibrio o utilizando el método de energía.

Definición 1. Sea x_e un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ entonces,

1. x_e es estable, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

2. De lo contrario x_e es inestable.
3. Además x_e es asintóticamente estable si

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow x_e$$

Definición 2. Sea x_e un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, entonces la región de atracción es el conjunto de todos los estados tal que la solución de $\dot{x} = f(x)$ que comienza en esos estados converge hacia x_e cuando $t \rightarrow \infty$. Si la región de atracción es todo el espacio de estados, entonces x_e es globalmente asintóticamente estable.

La última parte de la definición anterior indica que si x_e es globalmente asintóticamente estable entonces x_e es el único punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

Teorema 1 (Primer método de Lyapunov: Linealización de $\dot{x} = Ax$ alrededor de x_e [101]). Supongamos que $\dot{x} = Ax$ es la linealización del sistema $\dot{x} = f(x)$ alrededor del punto de equilibrio x_e entonces, se puede decir lo siguiente:

1. El punto de equilibrio x_e es estable si y solo si todos los eigenvalores de A satisfacen $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$, y en el caso de eigenvalores $\text{Re}[\lambda_i] = 0$ y de multiplicidad algebraica $q_i \geq 2$ $\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$, donde n es la dimensión de x .
2. El punto de equilibrio x_e es globalmente asintóticamente estable si y solo si todos los eigenvalores de A satisfacen $\text{Re}[\lambda_i] < 0$. En este caso, A es llamada matriz de Hurwitz.
3. El punto de equilibrio $x_e = 0$ es exponencialmente estable si:

$$\|x(t)\| \leq k \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \forall \|x(0)\| < \infty, \quad \forall t \geq 0, \quad k \geq 1, \quad \lambda > 0.$$

4. Si algún $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ entonces el sistema es inestable.

Del teorema anterior se puede observar que estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica sin embargo, estabilidad asintótica no necesariamente implica estabilidad exponencial. Una característica importante de la estabilidad exponencial es que su convergencia hacia el punto de equilibrio es mas rápida que la convergencia asintótica. De acuerdo a la definición anterior, para determinar si un punto de equilibrio es estable es necesario transformar el sistema y encontrar los eigenvalores del sistema transformado. Lyapunov propuso un segundo método que evita el trabajo extra. Antes de presentar las condiciones del segundo método se presentan las siguientes definiciones.

Teorema 2 (Segundo método de Lyapunov [101]). Sea x_e un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo que contiene a x_e . Si existe una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0, \forall x \text{ en } D - \{0\}.$$

y que además sea continuamente diferenciable entonces, la derivada de $V(x)$ dada por la siguiente expresión:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0 \text{ in } D,$$

indica que x_e es estable. Además si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{in} \quad D - \{0\},$$

x_e es asintóticamente estable. Si las condiciones de estabilidad asintótica se cumplen de manera global y $V(x) \rightarrow \infty, \|x\| \rightarrow \infty$ entonces, $x_e = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Comentarios sobre el teorema 2:

1. Puede observarse que si $V(0) = 0, V(x) > 0$ pero $\dot{V}(x) > 0 \forall x$ entonces, x_e es un punto de equilibrio inestable del sistema $\dot{x} = f(x)$.
2. La función $V(x)$ es conocida como función de Lyapunov y $V(x) = c_i > 0$ es conocida como superficie de Lyapunov.
3. La condición de no acotamiento radial es necesaria para asegurar que el conjunto $\{x : V(x) \leq c_i\}$ sea acotado para cada c_i .
4. El teorema presenta condiciones necesarias pero no suficientes, ya que no poder encontrar una función $V(x)$ que satisfaga las condiciones del teorema no significa que el punto de equilibrio sea inestable.

2.1.2 ESTABILIDAD DE SISTEMAS NO AUTÓNOMOS

Para esta sección se analizarán las condiciones bajo las cuales el sistema mostrado en la ecuación 2.1 es estable y los tipos de estabilidad que puede tener.

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.1)$$

Definición 3. *Funciones K y KL :*

- Una función $\phi : R_+ \rightarrow R_+$ es de clase K denotada por $\phi \in K$ si ϕ es continua, estrictamente creciente y $\phi(0) = 0$. Es de clase K_∞ denotada por $\phi \in K_\infty$ si $\phi(p) \rightarrow +\infty$ cuando $p \rightarrow +\infty$.
- Una función $\beta : R_+ \times R_+ \rightarrow R_+$ es de clase KL denotada por $\beta \in L$ si $\beta(p, t)$ es continua, estrictamente creciente con respecto a p , estrictamente decreciente con respecto a t , $\beta(0, t) = 0$, y $\beta(p, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Definición 4. *El punto de equilibrio x_e de 2.1 es :*

1. *Estable de manera uniforme: si y solo si $\alpha \in K$ y un escalar $c > 0$ independiente de t_0 , tal que*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *Asintóticamente estable de manera uniforme: si y solo si existe una $\beta \in L$ y un escalar $c > 0$ independiente de t_0 , tal que*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c.$$

3. *Globalmente asintóticamente estable de manera uniforme: si y solo si es asintóticamente estable de manera uniforme para $x(t_0)$.*

Teorema 3 (Teorema de Lyapunov). *Si existe una función $V(t, x) > 0$ localmente y de clase C^1 decreciente tal que $\dot{V}(t, x) < 0$ entonces, el punto de equilibrio x_e del sistema 2.1 es uniformemente asintóticamente estable. Además, si $V(t, x)$ no está acotada radialmente entonces x_e es globalmente asintóticamente estable de manera uniforme.*

Teorema 4. *La función $V(t, x)$ puede tener siguientes características:*

1. *La función $V(t, x)$ es $V(t, x) > 0$ localmente si $V(t, 0) = 0$ y para algún $\phi_1 \in K$ (y $r > 0$) se tiene:*

$$V(t, x) \geq \phi_1(\|x\|), \quad \forall x \in R^n, \quad (\|x\| < r).$$

2. *La función $V(t, x)$ es no acotada radialmente si $\phi_1 \in K_\infty$.*
3. *La función $V(t, x)$ definida negativa si $-V(t, x)$ definida positiva.*

4. La función $V(t, x)$ es indefinida si tiene cambios de signo.
5. La función $V(t, x)$ es decreciente si para algún $\psi \in K$ y $0 < r \leq +\infty$ se obtiene

$$V(t, x) \leq \psi(\|x\|), \quad \forall \|x\| < r.$$

Definición 5. Una función $\phi : R \rightarrow R$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in R, |x - y| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon.$$

Teorema 5. Sea $\phi : R \rightarrow R$ una función uniformemente continua en el intervalo $[0, +\infty]$. Además, suponga que $\int_0^t \phi(\tau) d\tau$ existe y es finita entonces,

$$\phi(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

2.1.3 CONCLUSIÓN

En esta sección se presentó la teoría relacionada al análisis de estabilidad de sistemas autónomos y no autónomos. Se puede apreciar que la teoría no es difícil sin embargo, encontrar la función de Lyapunov para hacer el análisis de estabilidad es la parte complicada y para ello hay diferentes métodos que pueden ser aplicados para tratar de obtener una función de Lyapunov. Es necesario tener presente que si aun después de aplicar los métodos no es posible determinar una función candidata de Lyapunov eso no significa que el sistema sea inestable.

2.2 TÉCNICA DE BACKSTEPPING

Durante el desarrollo de los algoritmos de control propuestos en este trabajo se utilizará la técnica de backstepping. Es por esa razón que esta sección presenta la teoría fundamental sobre la cual se basa el diseño de los algoritmos de control propuestos en este trabajo. El uso de la técnica de backstepping surge alrededor de 1990 y es propuesta por Peter V. Kokotovic y otros investigadores del área de control [102].

De acuerdo a la literatura, esta técnica permite la estabilización de sistemas que tienen forma estricta de retroalimentación generando de manera recursiva subcontroladores que de manera progresiva permiten estabilizar las ecuaciones de mas alto orden del sistema. El proceso es relativamente sencillo sin embargo, para sistemas de alto orden puede presentar el problema de que el control de la derivada mas alta contenga demasia-

dos términos, haciendolo tedioso para su implementación [103], [104]. Una característica que lo hace muy atractivo en el diseño de controladores es que no solo permite la robustez del sistema ante perturbaciones externas sino también ante perturbaciones internas [105], [106], [107], [108]. Las aplicaciones de este tipo de control se pueden encontrar en sistemas robóticos [109], [110], uav's [111], [112], sistemas microelectromecánicos [113], [114], sistemas biológicos [115], [116], sistemas caóticos [117], [118], sistemas de potencia [119], [120], detección de fallas [121], [122] por nombrar algunos. El proceso para implementar este tipo de control se presenta a continuación.

Supongamos que tenemos un sistema con la forma de la ecuación 2.2

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1 \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, \dots, z_k)u\end{aligned}\tag{2.2}$$

Un sistema con la forma de la ecuación 2.2 se dice que es de retroalimentación estricta porque las ecuaciones f_i y g_i dependen solamente de los estados retroalimentados x, z_1, \dots, z_i [105]. Las variables mostradas en la ecuación satisfacen las siguientes condiciones $x \in \mathfrak{R}$, $z_1 \dots z_k$ son escalares, f_0 a f_k se desvanecen en el origen y $u \in \mathfrak{R}$ representa el control deseado actuando en la derivada de mas alto orden y se asume que $g_i(x, z_1, \dots, z_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$.

El proceso de diseño de u comienza asumiendo que se puede encontrar una ley de control $z_1 = \phi_0(x)$, con $\phi_0(0) = 0$, tal que $\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1$ converja al origen. Para determinar la forma de ϕ_0 se propone la ecuación de Lyapunov $V_0(x) = \frac{1}{2}x^2$ tal que

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)\phi_0(x)] \leq -W(x)\tag{2.3}$$

donde $W > 0$. De la ecuación anterior se observa que ϕ_0 depende solo del estado x , esta característica hace que la convergencia sea asintótica sin embargo, en [92] se ha demostrado que si $\phi_0(x, t)$ entonces, la convergencia hacia el origen será en tiempo predefinido.

Una vez que se ha determinado la forma de z_1 se procede a diseñar z_2 . Entonces se consideran las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1 \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2\end{aligned}\tag{2.4}$$

Para el diseño de z_2 se introduce una nueva variable ξ_1 tal que $\xi_1 = z_1 - z_{1d}$ donde $z_{1d} = \phi_0(x)$. Se puede observar que al derivar ξ_1 se obtiene

$$\dot{\xi}_1 = \dot{z}_1 - \dot{z}_{1d} = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 - \dot{\phi}_0$$

La forma de z_2 se obtiene al utilizar la función de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2$, de tal manera que $\dot{V}_1 \leq -W_2$, donde $W_2 > 0$.

Para z_3

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1 \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Proponiendo $\xi_2 = z_2 - z_{2d}$, donde z_{2d} es el control encontrado en el paso anterior, y derivando ξ_2 se obtiene

$$\dot{\xi}_2 = \dot{z}_2 - \dot{z}_{2d} = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 - \dot{z}_{2d}$$

y la forma de z_3 se obtiene al proponer la ecuación de Lyapunov $V_2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2$ tal que $\dot{V}_2 \leq W_3$, donde $W_3 > 0$. Continuando con el mismo proceso se puede encontrar la forma de u , en este caso $V_k = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \dots + \frac{1}{2}\xi_k^2$ tal que $\dot{V}_{k-1} \leq W_k$, donde $\xi_k = z_k - z_{kd}$ y

$$\dot{\xi}_k = \dot{z}_k - \dot{z}_{kd} = f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, \dots, z_k)u - \dot{z}_{kd}$$

. A continuación se presentarán unos ejemplos que ilustran los conceptos introducidos, las funciones dependientes del tiempo serán mostradas al presentar el sistema de trabajo pero al hacer el análisis se omitirá la variable t .

Ejemplo 1: Supongamos que se tiene un sistema como el mostrado en la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

la ecuación 2.6 satisface las condiciones mencionadas arriba. El problema es encontrar una ley de control $u(t)$ tal que el sistema converja al origen de manera exponencial sin importar las condiciones iniciales. Para eso comenzamos tomando x_2 como un control virtual. La forma que debe tener x_2 se encuentra al suponer una ecuación de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x_1^2$ tal que $\dot{V}(t) \leq -W$. Entonces

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 = x_1(x_1 + x_2) \quad (2.7)$$

si $x_2 = -3x_1$ entonces

$$\dot{V} = -2x_1^2 \leq -x_1^2 = -V \quad (2.8)$$

por lo tanto el origen de \dot{x}_1 es globalmente exponencialmente estable.

La forma de x_3 se encuentra transformando el sistema 2.6 utilizando la variable z_2 . Para la transformación $z_2 = x_2 - x_{2d}$, donde $x_{2d} = -3x_1$ y $\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}$. El sistema transformado tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= z_2 - 2x_1 \\ \dot{z}_2(t) &= z_2 - 3x_1 + x_3 - \dot{x}_{2d} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Al proponer la ecuación de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$, su derivada es,

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 = x_1(z_2 - 2x_1) + z_2(z_2 - 3x_1 + x_3 - \dot{x}_{2d}) = -2x_1^2 + x_1z_2 + z_2(z_2 - 3x_1 + x_3 - \dot{x}_{2d}) \quad (2.10)$$

Como se desea que $\dot{V}(t) \leq -W$ entonces si $x_3 = 2x_1 - 3z_2 + \dot{x}_{2d}$, la derivada de V toma la forma

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 2z_2^2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 = -V \quad (2.11)$$

lo cual muestra que el origen de $\dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_3(t)$ es globalmente exponencial estable. Se procede de una manera semejante para encontrar la forma de u . En este caso se propone $z_3 = x_3 - x_{3d}$ donde x_{3d} es la ley de control encontrada en el paso anterior. El sistema transformado tomaría la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= z_2 - 2x_1 \\ \dot{z}_2(t) &= -2z_2 - x_1 + z_3 \\ \dot{z}_3(t) &= u - \dot{x}_{3d} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ahora proponemos la ecuación de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2$, cuya derivada tendría la forma

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3 = x_1(z_2 - 2x_1) + z_2(-2z_2 - x_1 + z_3) + z_3(u - \dot{x}_{3d}) \quad (2.13)$$

si $u = -z_2 - 2z_3 + \dot{x}_{3d}$ la derivada de V toma la forma

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2 = -V \quad (2.14)$$

lo cual muestra que el origen de \dot{x}_3 es globalmente exponencial estable.

El diseño del control u se simplifica grandemente cuando el sistema tiene la forma de integradores. Un sistema tiene la forma de integradores si está escrito como en la ecuación 2.15

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_k &= f(x_1, x_2, \dots, x_k) + u.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Obviamente no todos los sistemas tendrán la forma de la ecuación 2.15 sin embargo, existe la posibilidad de ser colocado en esta forma al introducir variables auxiliares. El siguiente ejemplo muestra el proceso.

Ejemplo 2: En este ejemplo se desea diseñar una ley de control para un sistema en forma de integradores. Si utilizamos el sistema del ejemplo 1, este puede colocarse en forma de integradores si introducimos variables auxiliares w_2 y w_3 tal que $\dot{x}_1 = w_2$ y $\dot{w}_2 = w_3$. De acuerdo a la ecuación 2.6 $\dot{x}_1 = x_2 + x_3$, por lo tanto $w_2 = x_1 + x_2$, cuya derivada tiene la siguiente forma:

$$\dot{w}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = w_2 + x_2 + x_3 = w_3\tag{2.16}$$

de la ecuación anterior se observa que $w_3 = w_2 + x_2 + x_3$ cuya derivada tiene la forma $\dot{w}_3 = \dot{w}_2 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3$; utilizando la ecuación 2.15 $\dot{w}_3 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = w_2 + 2(w_3 - w_2) + u$. Finalmente, el sistema 2.6 tiene la siguiente forma de integradores:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= w_3, \\ \dot{w}_3 &= 2w_3 - w_2 + u.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Para encontrar la ley de control u de la ecuación 2.17 comenzamos haciendo backstepping con la ecuación $\dot{x}_1 = w_2$. En este caso consideramos que w_2 es nuestro control virtual cuya forma se obtiene al proponer la ecuación de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$ cuya derivada es $\dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 = x_1w_2$. Como se desea que $\dot{V}(t) \leq -W$ entonces $w_2 = -2x_1$ y $\dot{V}_1 = -2x_1^2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2$.

Siguiendo con el proceso ahora consideramos w_3 como el nuevo control virtual. Para encontrar su forma hacemos una transformación parcial del sistema 2.17, proponiendo la variable $z_2 = w_2 - w_{2d}$ cuya derivada es $\dot{z}_2 = \dot{w}_2 - \dot{w}_{2d} = w_3 - \dot{w}_{2d}$ donde $w_{2d} = -2x_1$. El

sistema transformado tendría la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= z_2 - 2x_1, \\ \dot{z}_2 &= w_3 - \dot{w}_{2d}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Ahora proponemos la ecuación de Lyapunov $V_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$, cuya derivada es $\dot{V}_2 = x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2$. Al sustituir la ecuación 2.17 se obtiene $\dot{V}_2 = x_1(z_2 - 2x_1) + z_2(w_3 - \dot{w}_{2d})$. Como se desea que $\dot{V}(t) \leq -W$ eso se logra haciendo que $w_3 = -x_1 - 2z_2 + \dot{w}_{2d}$, que al sustituir en \dot{V}_2 se obtiene $\dot{V}_2 = -2x_1^2 - 2z_2^2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 = -V_2$.

Finalmente para encontrar la forma de u se transforma completamente el sistema 2.16. Para eso se propone $z_2 = w_2 - w_{2d}$ y $z_3 = w_3 - w_{3d}$ donde $w_{2d} = -2x_1$ y $w_{3d} = -x_1 - 2z_2 + \dot{w}_{2d}$. La derivada de z_2 es $\dot{z}_2 = w_3 - \dot{w}_{2d} = z_3 + w_{3d} - \dot{w}_{2d} = z_3 - x_1 - 2z_2$. Por otro lado, la derivada de z_3 es $\dot{z}_3 = \dot{w}_3 - \dot{w}_{3d} = 2w_3 - w_2 + u - \dot{w}_{3d}$. Con esto, el sistema transformado tendría la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= z_2 - 2x_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 - x_1 - 2z_2, \\ \dot{z}_3 &= 2w_3 - w_2 + u - \dot{w}_{3d}\end{aligned}\tag{2.19}$$

Proponiendo la función de Lyapunov $V_3 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2$ y encontrando su derivada $\dot{V}_3 = x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3$ se llega a la ecuación

$$\dot{V}_3 = x_1(z_2 - 2x_1) + z_2(z_3 - x_1 - 2z_2) + z_3(2w_3 - w_2 + u - \dot{w}_{3d}).$$

Como en los casos anteriores, se requiere que $\dot{V}(t) \leq -W$, entonces $u = 2w_3 - w_2 - z_2 - 2z_3^2 + \dot{w}_{3d}$. Lo cual conlleva a $\dot{V}_3 = -2x_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2 = -V_3$, mostrando que el origen del sistema 2.16 es globalmente exponencialmente estable.

2.2.1 CONCLUSIÓN

Esta sección mostró el fundamento de la técnica de backstepping. Se puede observar que la teoría es relativamente sencilla de implementar y que la estabilidad del sistema se puede asegurar utilizando teoría de Lyapunov. Una de las características principales de backstepping es su robustez no solo ante perturbaciones acopladas sino ante perturbaciones no acopladas, conceptos que se explotan el diseño de controles robustos en tiempo predefinido de este trabajo.

2.3 MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

La técnica de control por modos deslizantes clásico es muy atractiva debido a su relativa facilidad de implementación, insensibilidad a incertidumbres en los parámetros del sistema y perturbaciones acopladas y convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante [123]. El proceso de diseño es relativamente sencillo. En este caso, para un sistema dado por la ecuación 2.20

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, t), \quad x(0) = x_0. \quad (2.20)$$

lo único que debe hacerse es encontrar una función $s = Sx$ tal que $s = \dot{s} = 0$ para $t = t_s$ donde t_s es el tiempo de llegada a la superficie deslizante. Cabe aclarar que la característica de insensibilidad ante perturbaciones e incertidumbres mencionadas arriba solo se aseguran una vez que se ha alcanzado la superficie deslizante [123]. Al llevar acabo el análisis de estabilidad de Lyapunov para la función \dot{s} se observa que el control necesario para asegurar la robustez del sistema debe tener la forma:

$$u(x) = u_{nom} + u_p \quad (2.21)$$

donde u_{nom} asegura la convergencia del sistema al origen y u_p contrarresta los efectos de la perturbación sobre el sistema. La forma mas sencilla de u_p es $u_p = \rho \text{sign}(s)$, donde ρ es un parámetro que permite acelerar la convergencia.

Debido al término $\text{sign}(s)$ y que la función s propuesta es de orden uno el algoritmo de control presenta el fenómeno oscilaciones a alta frecuencia [75]. Esto presenta dos problemas desde el punto de vista de implementación, el primero es que esas oscilaciones del control pueden hacer que el sistema entre en resonancia, el segundo tiene que ver con el desgaste del sistema debido a los cambios rápidos en movimiento [57]. Es por eso que se han propuestos diferentes formas para u_p que permiten disminuir la frecuencia de oscilación pero con la desventaja de reducción del efecto de robustez. Para sobrepasar el problema de frecuencia de oscilación pero sin que la robustez del control se vea comprometida se han propuesto algoritmos de control de orden mas alto que uno [124]. En particular el supertwisting, el cual es un algoritmo de orden 2, es un algoritmo muy utilizado para generar algoritmos de control robustos por modos deslizantes.

2.3.1 CONTROLADORES DE MODOS DESLIZANTES DE ORDEN 2

Supongamos que tenemos el siguiente sistema [124]

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \sigma = \sigma(t, x) \quad (2.22)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control, σ es la única señal medible. Además a , b , σ son funciones suaves. El trabajo de diseño es hacer que σ alcance el origen y se mantenga allí mediante una señal de control en retroalimentación discontinua pero globalmente acotada.

Si se asume que $\sigma(t, x)$ es dos veces diferenciable y se imponen las restricciones $\sigma'_x b \equiv 0$ y $(\sigma''_{xx} b) a + \sigma'_x (a'_x b) \neq 0$ entonces, la segunda derivada con respecto al tiempo tendría la forma

$$\ddot{\sigma} = h(t, x) + g(t, x)u \quad (2.23)$$

de tal manera que $h = \ddot{\sigma}|_{u=0}$, $g = \frac{\partial}{\partial u} \ddot{\sigma} \neq 0$ son funciones suaves que satisfacen las restricciones

$$0 < K_m \leq g \leq K_M, |h| \leq C \quad (2.24)$$

para algunas $K_m, K_M, C > 0$. Si se asume 2.24 se satisfacen de manera global entonces, las ecuaciones anteriores implican que

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (2.25)$$

De acuerdo a [124] esta última expresión indica que el sistema no recuerda al sistema original 2.22, lo cual hace que el control u sea robusto con respecto a perturbaciones. El trabajo es entonces determinar la forma de $u = \varphi(\sigma, \dot{\sigma})$.

Teorema 6. *Asuma que existen constantes r_1 y r_2 que satisfacen las siguientes condiciones*

$$(r_1 + r_2) K_m - C > (r_1 - r_2) K_M + C, (r_1 - r_2) K_m > C \quad (2.26)$$

entonces el control

$$u = -(r_1 \text{sign}(\sigma) + r_2 \text{sign}(\dot{\sigma})), \quad r_1 > r_2 > 0 \quad (2.27)$$

atrae las trayectorias de $\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u$ en tiempo finito.

El control 2.27 fue el primer control de orden dos propuesto. La demostración del teorema se puede revisar en [124]. Desafortunadamente el tiempo de convergencia del

algoritmo a la superficie deslizante es

$$T \leq \sum \frac{|\dot{\sigma}_i|}{[K_m(r_1 - r_2) - C]} \leq \frac{|\dot{\sigma}_0|}{(1 - q)[K_m(r_1 - r_2) - C]} \quad (2.28)$$

Lo cual demanda que se investiguen algoritmos de control de mas alto orden en tiempo predefinido.

El algoritmo de control

$$u = -r_1 \text{sign}(\sigma - \sigma^*/2) + r_2 \text{sign}(\sigma^*), \quad r_1 > r_2 > 0 \quad (2.29)$$

permite reducir mas el efecto de oscilaciones a alta frecuencia pero con la desventaja de reducir la robustez. El problema relacionado con los algoritmos de control de orden 2, en cualquiera de sus formas, es que necesitan de la medición de los estados del sistema $\dot{\sigma}$ o por lo menos $\text{sign}(\sigma)$. La siguiente sección presenta algoritmos de control que sobrepasan este problema.

2.3.2 SUPER-TWISTING

Supongamos que tenemos el sistema 2.22 y que existen constantes C, K_M, K_m, U_M, q que satisfacen las siguientes restricciones

$$|\dot{h}| + U_M|\dot{g}| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq g(t, x) \leq K_M, \quad |h/g| < qU_M, \quad 0 < q < 1$$

El siguiente teorema muestra establece que se puede diseñar un algoritmo de control que no necesita medición de $\dot{\sigma}$ o de $\text{sign}(\sigma)$.

Teorema 7. *Si $K_m\alpha > C$ y λ son suficientemente grandes entonces, el algoritmo de control*

$$u = -\lambda|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + u_1, \quad \dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M \\ -\alpha \text{sign}(\sigma), & |u| \leq U_M \end{cases} \quad (2.30)$$

permite $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ en tiempo finito. La señal de control entra en el segmento $[-U_M, U_M]$ y permanece ahí si el valor inicial se encuentra en el segmento desde el inicio.

El valor de λ se determina mediante la siguiente expresión

$$\lambda > \sqrt{\frac{2}{(K_m\alpha - C)} \frac{(K_m\alpha + C) K_M(1 + q)}{K_m^2(1 - q)}} \quad (2.31)$$

Este algoritmo propuesto tiene mejor desempeño que el algoritmo de orden dos mencionado en la sección anterior incluso el tiempo de convergencia es mejor, siendo $T \leq \sum |\dot{\sigma}_i| / (K_m \alpha - C)$. Sin embargo, aun así no hay forma de poder imponer el tiempo de convergencia deseado de manera directa. La demostración del teorema mencionado puede verse en [124].

2.4 RUIDOS GAUSSIANOS BLANCOS

Al diseñar algoritmos de control siempre es bueno comenzar el análisis suponiendo que el sistema es ideal, es decir el modelo utilizado para el diseño y las señales medidas corresponden con el comportamiento real del sistema (no hay incertidumbres) y que el sistema no será perturbado de su punto de operación, es decir no habrá perturbaciones ya sea deterministas o estocásticas afectando al sistema. Sin embargo, en la práctica tanto el sistema controlado como la unidad controladora funcionarán en un ambiente donde existirá incertidumbre en las variables medidas y habrá perturbaciones tanto deterministas como estocásticas afectando al sistema. Las perturbaciones estocásticas a las que nos referimos son perturbaciones eléctricas en forma de ruido. El ruido se introduce en las señales ya sea por causa de los sensores utilizados, de los sistemas utilizados para llevar a cabo control o transmisión digital o debido a las máquinas inductivas operando alrededor del sistema controlado o del controlador o conectada a la misma línea de alimentación [125], [126], [127]. Uno de los modelos mas utilizados para este escenario es el ruido blanco [128], [129], [130]. De acuerdo a la literatura el comportamiento de un sistema controlado sujeto a ruido puede verse grandemente deteriorado [131], [132], [133], [134]. Debido a esto el análisis del desempeño de un sistema controlado sujeto a ruido es de vital importancia. En esta subsección se revisa la teoría básica relacionada con ruidos gaussianos blancos. Los conceptos fundamentales de esta subsección serán utilizados en el diseño de controladores robustos para sistemas sujetos a ruidos estocásticos.

Un proceso estocástico con parámetros continuos x_t , $t \geq 0$ es un proceso de Wiener si

1. $x_t, t \geq 0$ tiene incrementos independientes estacionarios.
2. x_t tiene una distribución normal para todo $t \geq 0$.
3. $E(x_t) = 0$ para todo $t \geq 0$.
4. $P(x_0 = 0) = 1$.
5. x_t tiene realizaciones continuas.

La primera condición se puede comprobar si para cualquier conjunto finito $\{t_i \mid t_i \leq t_{i+1}\} \in T$ de un un proceso con parámetros continuos $\{x_t, t \in T\}$, las variables aleatorias

$$x_{t_2} - x_{t_1}, x_{t_3} - x_{t_2}, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$$

son independientes. Además el proceso x_t tiene incrementos independientes estacionarios si tiene la misma distribución como $x_t - x_\tau$ para todo $t > \tau \in T$ y cualquier $h > 0$.

$$x_{t+h} - x_{\tau+h}$$

En esta caso la función de covarianza de un proceso de Wiener esta dada por

$$E \left[(x_t - E(x_t)) (x_\tau - E(x_\tau))^T \right] = Q \min(t, \tau) \quad (2.32)$$

donde Q es una matriz definida positiva.

El ruido blanco Gaussiano es un proceso Gaussiano cuya función de covarianza está definida de la siguiente manera:

$$E \left[(x_t - E(x_t)) (x_\tau - E(x_\tau))^T \right] = Q \delta(t - \tau) \quad (2.33)$$

Al comparar las ecuaciones 2.32 y 2.33 puede observarse una semejanza, esto es porque un ruido blanco Gaussiano puede ser considerado como la derivada débil en promedio cuadrático de un proceso de Wiener. Para ver que esto es así, sea $\{x_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener, del cual su función de covarianza es $P_x(t, \tau) = Q \min(t, \tau)$ entonces, la función de covarianza del proceso $\left\{ \frac{dx_t}{dt}, t \geq 0 \right\}$ es

$$P_{\dot{x}}(t, \tau) = \frac{\partial^2 P_x(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$$

sustituyendo $P_x(t, \tau) = Q \min(t, \tau)$ se tiene

$$P_{\dot{x}}(t, \tau) = Q \frac{\partial^2 \min(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$$

como

$$\min(t, \tau) = \begin{cases} \tau, & \tau < t \\ t, & \tau > t \end{cases}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \min(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < t \\ 1, & \tau > t \end{cases}$$

y su derivada con respecto a τ es la delta de Dirac $\delta(t - \tau)$ dando como resultado

$$P_{\dot{x}}(t, \tau) = Q\delta(t - \tau)$$

de lo cual se observa que un ruido blanco Gaussiano es la derivada en promedio cuadrático débil del proceso de Wiener.

Supongamos que se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t) + G(x_t, t) \psi_t, \quad t \geq t_0 \quad (2.34)$$

donde ψ representa un ruido blanco Gaussiano y la condición inicial x_{t_0} es independiente del ruido blanco Gaussiano. Además sea $\{W_t, t \geq t_0\}$ un proceso de Wiener. Entonces

$$\psi_t \sim \frac{dW_t}{dt}$$

Lo cual nos permite reescribir la ecuación 2.34 de la siguiente manera

$$x_t - x_{t_0} = \int_{t_0}^t f(x_\tau, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t G(x_\tau, \tau) dW_\tau$$

donde la primera integral puede ser vista como una integral en promedio cuadrático o como una integral ordinaria y la segunda integral es definida como una integral estocástica de Itô. La integral de Itô puede verse como el límite en promedio cuadrático de una suma, es decir

$$\int_T g_t(\omega) dW_t = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i}(\omega) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

entonces

$$E \left(\int_T g_t(\omega) dW_t \right) = 0$$

Esta sección presentó la teoría básica de ruido blanco y su relación con ecuaciones diferenciales. De la discusión presentada se observa que el ruido blanco puede ser visto como un derivada débil en promedio cuadrático de un proceso de Wiener y al ser introducida en una ecuación diferencial surge la integral de Itô.

CAPÍTULO 3

CONTROL, EN TIEMPO PREDEFINIDO, CON TÉRMINOS EXPONENCIALES.

La contribución de esta sección radica en el diseño de un algoritmo de control que forza todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido, utilizando una función exponencial dependiente de los estados del sistema y una función dependiente del tiempo. En [85] se ha sugerido que esta es la única forma de asegurar convergencia en tiempo predefinido. Para iniciar el diseño se supone que controles virtuales de la forma $u(x, t) = -\eta_1 \frac{(e^{|x|}-1)}{e^{|x|}(t_f-t)} \text{sign}(x)$ pueden llevar los estados del sistema al equilibrio en tiempo predefinido asegurando al mismo tiempo la robustez del sistema debido al factor $\text{sign}(x)$. Procediendo de manera recursiva, utilizando la técnica de backstepping mostrada en la sección 2.1, se demostrará que el algoritmo de control diseñado forza todos los estados del sistema en tiempo predefinido a pesar de las condiciones iniciales, perturbaciones deterministas y ruidos blancos afectando al sistema. Durante la etapa de diseño se considera el caso donde los estados del sistema no están disponibles para ser medidos, una situación común en la práctica. Para sobrepasar este problema se utiliza un observador que recupere los estados del sistema en tiempo fijo.

3.1 CONDICIONES DE CONVERGENCIA EN TIEMPO PREDEFINIDO PARA UN SISTEMA NO LINEAL

Antes de iniciar con la solución del problema a resolver en esta sección se introducen definiciones necesarias que aseguran la convergencia de un sistema a su punto de equilibrio en tiempo predefinido. Para eso, supongamos que tenemos un sistema dinámico general como el mostrado en la siguiente ecuación:

$$dx(t) = (f(x, t, u(t)) + \xi(t)) dt + \sigma(t, x(t))dW(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

En este caso $x(t) \in R^n$ representa los estados del sistema, $u(t) \in R^m$ es la entrada del control, $\xi(t)$ es una perturbación determinista que satisface la condición de Lipschitz

$$\|\xi(t_1) - \xi(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|, \quad (3.2)$$

con valor L y $W(t)$ es un proceso de Wiener definido en el espacio de probabilidad (Ω, F, P) , donde Ω es el espacio de la muestra, F es un campo σ con filtrado $\{F_t\}_{(t \geq 0)}$, y P una medida de probabilidad. La condición $\sigma(t, 0) = 0$ debe ser satisfecha para todo $t \geq t_0$.

De acuerdo a [92] las siguientes definiciones aseguran la convergencia de un sistema en tiempo predefinido:

1. El sistema 3.1 es solo afectado por perturbaciones deterministas, es decir $\sigma(t, x(t)) = 0$. Entonces:

Definición 6 (Convergencia en tiempo predefinido para un sistema determinista).

El sistema 3.1 es llamado convergente al origen en tiempo predefinido si:

- a) *Es convergente al origen en tiempo fijo, es decir para cualquier estado inicial x_0 existe una constante $T_{\text{máx}} > 0$ independiente de x_0 tal que $x(t) = 0$ para todo $t \geq T_{\text{máx}}$.*
 - b) *$T_{\text{máx}}$ es independiente de cualquier condición inicial y puede ser escogido de antemano de manera arbitraria.*
 - c) *$T_{\text{máx}} \geq T_f$, donde T_f es el tiempo de convergencia verdadero.*
2. El sistema 3.1 es afectado por perturbaciones deterministas y ruido estocástico, es decir $\sigma(t, x(t)) \neq 0$. En este caso:

Definición 7 (Convergencia en tiempo predefinido para un sistema estocástico).

El sistema 3.1 es llamado convergente al origen el tiempo predefinido en promedio ρ , si

- a) *Es convergente al origen en tiempo fijo en promedio ρ , es decir para cualquier estado inicial x_0 existe una constante $T_{\text{máx}} > 0$ independiente de x_0 tal que $E[x(t)]^\rho = 0$ para todo $t \geq T_{\text{máx}}$.*
- b) *$T_{\text{máx}}$ es independiente de cualquier condición inicial, perturbaciones y ruidos afectando al sistema y puede ser escogido de antemano de manera arbitraria.*
- c) *$T_{\text{máx}} \geq T_f$, donde T_f es el tiempo de convergencia verdadero.*

3.2 INTRODUCCIÓN DEL PROBLEMA DE ESTABILIZACIÓN DE UN SISTEMA DE CUARTO ORDEN

Para llevar a cabo el diseño del algoritmo de control en tiempo predefinido, utilizaremos el modelo matemático de un motor síncrono de imanes permanentes de cuarto orden cuyo arreglo se muestra en la siguiente Figura 1:

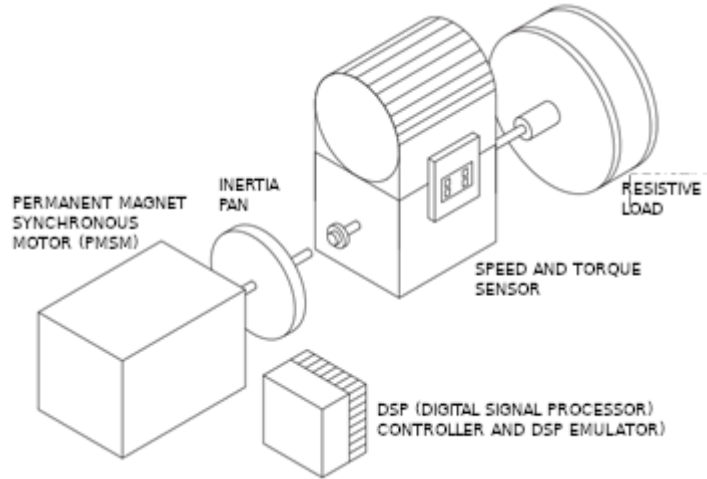


Figura 1: Arreglo del motor síncrono de imanes permanentes [1].

Aunque los resultados son obtenidos para este sistema, estos pueden ser extendidos fácilmente para cualquier sistema de cuarto orden que cumpla las condiciones establecidas en este apartado y pueden ser extendidas para sistemas de mas alto orden.

La representación matemática del comportamiento dinámico del motor mostrado en la Figura 1 se muestra en la siguiente ecuación [135] (una descripción detallada de la obtención del modelo se encuentra en la sección 2.2.2):

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega, \\
 \dot{\omega} &= \frac{K_t}{J} i_q - \frac{B}{J} \omega - \frac{T_L}{L}, \\
 \dot{i}_d &= -\frac{R_s}{L_d} i_d + n_p \omega_o i_q + \frac{u_d}{L_d}, \\
 \dot{i}_q &= -\frac{R_s}{L_q} i_q - n_p \omega_o i_d - \frac{n_p \phi_v \omega}{L_q} + \frac{u_q}{L_q}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las variables utilizadas en la ecuación 3.3 se definen de la siguiente manera: $\theta(t)$ es la posición angular, $\omega(t)$ es la velocidad angular del rotor, $i_d(t)$ e $i_q(t)$ son las corrientes de los ejes d y q del estator, u_d (la entrada de control) y u_q son los voltajes del estator

en los ejes d y q , T_L (perturbación desacoplada) representa la carga, L_d y L_q son las inductancias de los ejes d y q las cuales satisfacen la siguiente condición $L_d = L_q = L$, R_s es la resistencia de los devanados del estator, n_p es el número de pares de polos, ϕ_v es el flujo magnético acoplado, J es el momento de inercia, ω_0 es la velocidad a la cual rota el campo magnético, B es el coeficiente de fricción viscosa y $K_T = (3n_p\phi_v)/2$. Las variables $\theta(t)$, $\omega(t)$, $i_q(t)$, e $i_d(t)$ representan los estados del sistema.

Para realizar el diseño del algoritmo de control reescribimos la ecuación 3.1 en forma de cadena de integradores, así como se muestra en [1], dando como resultado la ecuación 3.4:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \omega, \\
\dot{\omega} &= v_1, \\
\dot{v}_1 &= v_2, \\
\dot{v}_2 &= v_1 \left[-n_p^2 \omega_0^2 - \frac{R_s B}{J L_q} - \frac{R_s^2}{L_q L_d} - \frac{R_s B}{J L_d} - \frac{K_T n_p \phi_v}{J L_q} \right] \\
&\quad + T_L \left[-\frac{n_p^2 \omega_0^2}{J} - \frac{R_s^2}{J L_q L_d} \right] + \omega \left[-\frac{n_p^2 \omega_0 B}{J} - \frac{R_s^2}{J L_q L_d} - \frac{K_T R_s n_p \phi_v}{J L_q L_d} \right] \\
&\quad + v_2 \left[-\frac{R_s}{L_q} - \frac{R_s}{L_d} - \frac{B}{J} \right] + u_q \frac{K_T R_s}{J L_q L_d} - u_d \frac{K_T n_p \omega_0}{J L_d}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El problema en esta sección se puede enunciar de la siguiente manera: Teniendo el sistema mostrado en la Figura 1 y modelado por la ecuación 3.4 se desea encontrar un algoritmo de control que lleve todos los estados del sistema, al origen, en tiempo predefinido independientemente de condiciones iniciales, perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos afectando al sistema.

El algoritmo de control buscado se desarrolla en etapas en las siguientes secciones considerando los siguientes casos:

1. Todos los estados del sistema son perfectamente medibles y el sistema 3.4 no es afectado por perturbaciones deterministas ni ruidos. En este caso se diseña un algoritmo de control de manera directa, que lleva todos los estados del sistema 3.4 al origen.
2. Los estados del sistema no son afectados por perturbaciones deterministas ni ruidos estocásticos pero solo un estado del sistema es medible. En este caso se emplea un observador convergente en tiempo fijo que permita reconstruir las variables que no son medibles y sus valores son utilizados para diseñar el algoritmo de control.

3. Solo un estado del sistema es medible y hay perturbaciones deterministas afectando el sistema pero no hay ruido. En este caso es necesario diseñar un compensador convergente en tiempo predefinido que estime la perturbación.
4. Solo un estado del sistema es medible y el sistema es afectado por perturbaciones y ruidos blancos.

3.3 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE UN MOTOR DE IMÁNES PERMANENTES CUYOS ESTADOS SON COMPLETAMENTE MEDIBLES

3.3.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta subsección se presenta el diseño del algoritmo de control en tiempo predefinido suponiendo que el sistema 3.4 no es afectado por perturbaciones deterministas ni ruidos estocásticos. Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, el sistema 3.4 puede ser reducido a la ecuación 3.5

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= v_1 \\
 \dot{v}_1 &= v_2 \\
 \dot{v}_2 &= K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -n_p^2 \omega_o^2 - \frac{R_s B}{J L_q} - \frac{R_s^2}{L_q L_d} - \frac{R_s B}{J L_d} - \frac{K_T n_p \phi_v}{J L_q} \\
 K_2 &= -\frac{n_p^2 \omega_o B}{J} - \frac{R_s^2}{J L_q L_d} - \frac{K_T R_s n_p \phi_v}{J L_q L_d}, \\
 K_3 &= -\frac{R_s}{L_q} - \frac{R_s}{L_d} - \frac{B}{J} \\
 K_4 &= \frac{K_T n_p \omega_o}{J L_d}
 \end{aligned}$$

El siguiente teorema presenta el algoritmo de control que lleva todos los estados del sistema 3.5 al origen en tiempo predefinido y estos se mantienen ahí una vez que han convergido:

Teorema 8. *La ley de control*

$$u_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_4} \left(-z_3 + K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - \frac{\partial v_{2d}}{\partial \theta} (z_2 - \psi_1) \right. \\ \left. - \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_2} (z_3 - \psi_2 - \theta) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_3} (z_4 - z_2 - \psi_3) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial t} + \psi_4 \right), & 0 \leq t < t_f, \\ 0, & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.6)$$

lleva todos los estados del sistema 3.5 al origen en tiempo predefinido t_f y estos se mantienen allí para todo $t \geq t_f$.

La forma de u_d presentada en el teorema mencionado puede verse de la siguiente manera

$$u_d(t) = u_{d1}(t) + u_{d2}(t)$$

donde el término

$$u_{d1}(t) = \frac{1}{K_4} (K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2)$$

contrarresta los efectos de ω , v_1 , v_2 y

$$u_{d2}(t) = \frac{1}{K_4} \left(-z_3 - \frac{\partial v_{2d}}{\partial \theta} (z_2 - \psi_1) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_2} (z_3 - \psi_2 - \theta) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_3} (z_4 - z_2 - \psi_3) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial t} + \psi_4 \right)$$

provee la convergencia del sistema 3.5 al origen en tiempo predefinido.

Demostración 1. *La demostración del teorema utiliza la técnica de backstepping así como en [91]. En primer lugar consideramos la siguiente ley de control*

$$u(t) = -\eta_1 \frac{(e^{|\theta|} - 1)}{e^{|\theta|} (t_f - t)} \text{sign}(\theta)$$

con $\eta_1 \geq 1$, la cual hace que el sistema escalar $\dot{\theta} = u(t)$ converja al origen en tiempo predefinido tal como se muestra en [92]. Haciendo la iteración requerida de backstepping, el sistema mostrado en la ecuación 3.5 puede ser convertido a un nuevo sistema con variables

$$\begin{aligned} z_2 &= \omega - \omega_d, \text{ donde } \omega_d(\theta, t) = -\psi_1, \\ z_3 &= v_1 - v_{1d}, \text{ donde } v_{1d}(\theta, z_2, t) = -\theta - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - (z_2 - \psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \psi_2, \\ z_4 &= v_2 - v_{2d}, \text{ donde } v_{2d}(\theta, z_2, z_3, t) = -z_2 + \omega \frac{\partial v_{1d}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{1d}}{\partial z_2} (z_3 - \psi_2 - \theta) + \frac{\partial v_{1d}}{\partial t} - \psi_3, \end{aligned} \quad (3.7)$$

las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones en 3.7 tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{\omega} - \dot{\omega}_d = v_1 + \frac{\partial \omega_d}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \\ \dot{z}_3 &= \dot{v}_1 - \dot{v}_{1d} = v_2 - \left(\frac{\partial v_{1d}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial v_{1d}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial v_{1d}}{\partial t} \right) \\ \dot{z}_4 &= \dot{v}_2 - \dot{v}_{2d} = u_d - \left(\frac{\partial v_{2d}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_3} \dot{z}_3 + \frac{\partial v_{2d}}{\partial t} \right)\end{aligned}\quad (3.8)$$

donde

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \eta_1 \frac{(e^{|\theta|} - 1)}{e^{|\theta|} (t_f - t)} \text{sign}(\theta), \\ \psi_2 &= \eta_2 \frac{(e^{|z_2|} - 1)}{e^{|z_2|} (t_f - t)} \text{sign}(z_2), \\ \psi_3 &= \eta_3 \frac{(e^{|z_3|} - 1)}{e^{|z_3|} (t_f - t)} \text{sign}(z_3), \\ \psi_4 &= \eta_4 \frac{(e^{|z_4|} - 1)}{e^{|z_4|} (t_f - t)} \text{sign}(z_4),\end{aligned}\quad (3.9)$$

y $\eta_1 \geq 1$, $\eta_2 \geq 1$, $\eta_3 \geq 1$, $\eta_4 \geq 1$. Los valores de ω_d , v_{1d} , v_{2d} pueden ser vistos como controles virtuales.

Ahora definimos una ecuación de Lyapunov de la forma

$$V(\theta, z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 \quad (3.10)$$

El sistema 3.5 es convergente al origen si $\dot{V} \leq 0$. Entonces tomando la derivada de la ecuación 3.10 se obtiene

$$\dot{V} = \theta \dot{\theta} + z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 \quad (3.11)$$

al introducir los valores de la ecuación 3.8 se obtiene

$$\dot{V}_4 = -\theta \psi_1 - z_2 \psi_2 - z_3 \psi_3 + z_3 z_4 + z_4 \left[u_d - \left(\frac{\partial v_{2d}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_3} \dot{z}_3 + \frac{\partial v_{1d}}{\partial t} \right) \right] \quad (3.12)$$

al sustituir el control 3.6 en la ecuación anterior se observa que

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 &= -\theta \psi_1 - z_2 \psi_2 - z_3 \psi_3 - z_4 \psi_4 \leq -\frac{\eta_1 |\theta| (e^{|\theta|} - 1)}{e^{|\theta|} (t_f - t)} - \frac{\eta_2 |z_2| (e^{|z_2|} - 1)}{e^{|z_2|} (t_f - t)} \\ &\quad - \frac{\eta_3 |z_3| (e^{|z_3|} - 1)}{e^{|z_3|} (t_f - t)} - \frac{\eta_4 |z_4| (e^{|z_4|} - 1)}{e^{|z_4|} (t_f - t)}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Como $V_4 = \theta^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$ entonces

$$V_4 \leq 2 (\max \{|\theta|, |z_2|, |z_3|, |z_4|\})^2 \quad y \quad \sqrt{\frac{V_4}{2}} \leq \max \{|\theta|, |z_2|, |z_3|, |z_4|\} \quad (3.14)$$

sustituyendo este resultado en la desigualdad 3.13 transforma la desigualdad a

$$\dot{V}_4 \leq -\frac{\eta \sqrt{\frac{V_4}{2}} \left(e^{\sqrt{\frac{V_4}{2}}} - 1 \right)}{e^{\sqrt{\frac{V_4}{2}}} (t_f - t)}$$

en este caso $\eta = \min \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$. Finalmente, haciendo el cambio de variables $\zeta = \sqrt{\frac{V_4}{2}}$ y sustituyendo en \dot{V}_4 se obtiene

$$\dot{\zeta} \leq -\frac{\eta' (e^\zeta - 1)}{e^\zeta (t_f - t)} \quad (3.15)$$

donde $\eta' = \frac{\eta}{4}$.

Ya que la desigualdad anterior es un caso particular de $\dot{\zeta} \leq -\frac{\eta'(e^{|\zeta|}-1)}{e^{|\zeta|}(t_f-t)} \text{sign}(\zeta)$ para ζ positiva, entonces $\zeta(t)$ converge al origen en tiempo predefinido t_f y permanece ahí para todo t , tal como se ha demostrado en [92]. Por lo tanto la función de Lyapunov V_4 converge al origen en tiempo predefinido t_f y permanece ahí para todo t . Esto implica que todos los estados del sistema 3.5 convergen a cero en tiempo predefinido t_f y permanecen ahí para todo t .

3.3.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta sección se analiza el desempeño del algoritmo de control 3.6. Para llevar a cabo el análisis se usarán simulaciones numéricas empleando el sistema 3.5 cuyos parámetros se muestran en la Tabla 1. El software utilizado para la simulación es Simulink de MATLAB 2020a. El tiempo de simulación está discretizado en pasos de 10^{-3} . Los resultados se muestran en las figuras 2 y 3.

La Figura 2 muestra que el algoritmo de control 3.6 es capaz de llevar los estados del sistema 3.5 al origen en tiempo predefinido de 10s. La ventana de acercamiento mostrada en la esquina inferior derecha de la Figura 2 muestra que el grado de precisión de la convergencia es del orden de 10^{-12} lo cual satisface la prueba de convergencia de Levant para un paso e discretización de 10^{-3} y un sistema de dimensión $n = 4$. Es importante notar que aunque la simulación muestra la convergencia para un tiempo deseado de 10s este valor es el valor límite que debe satisfacer el algoritmo de control 3.6 sin embargo,

Variable	Valor	Unidad
n_p	4	
R_s	0,01	Ω
L_q	0,1	H
L_d	0,1	H
B	$7,403 \times 10^{-5}$	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
J	$1,74 \times 10^4$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
ϕ_v	0,1167	wb
K_T	0,7002	
ω_0	1	rpm
t_f	10	s
η	[20, 20, 20, 20]	
x_0	[-0,5, -3, -3, -5]	

Tabla 1: Parámetros del motor síncrono de imanes permanentes junto con las condiciones iniciales y valores para la simulación.

el tiempo de convergencia puede acelerarse si se ajustan los valores de η_i mostrados en la ecuación 3.9. La Figura 3 muestra la trayectoria del control y se puede notar que las trayectorias son diferentes que la de un control que converge de manera asintótica debido a la inclusión de la variable de tiempo en el algoritmo de control. Finalmente, la trayectoria del control muestra que la magnitud de la energía requerida para llevar los estados del sistema al equilibrio se mantiene dentro de valores que pueden ser implementados de manera real.

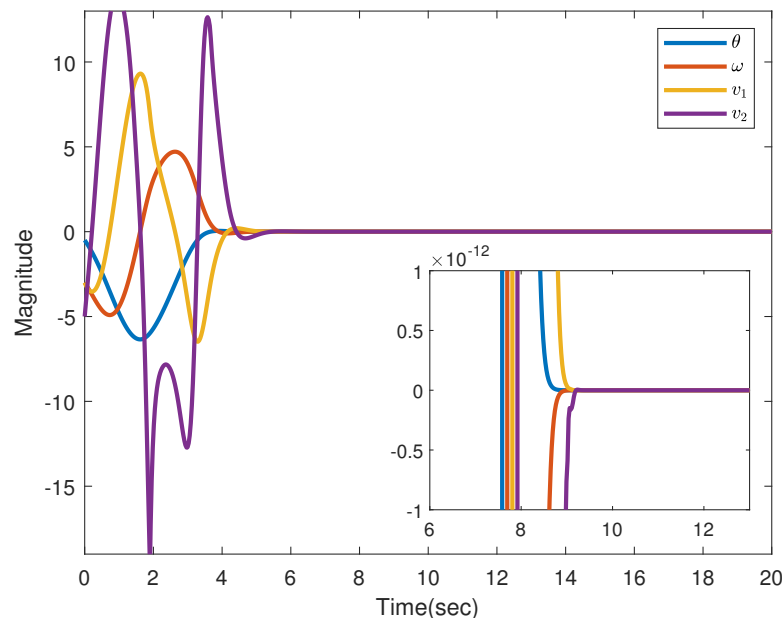


Figura 2: Convergencia de los estados del sistema (3.5) al origen.

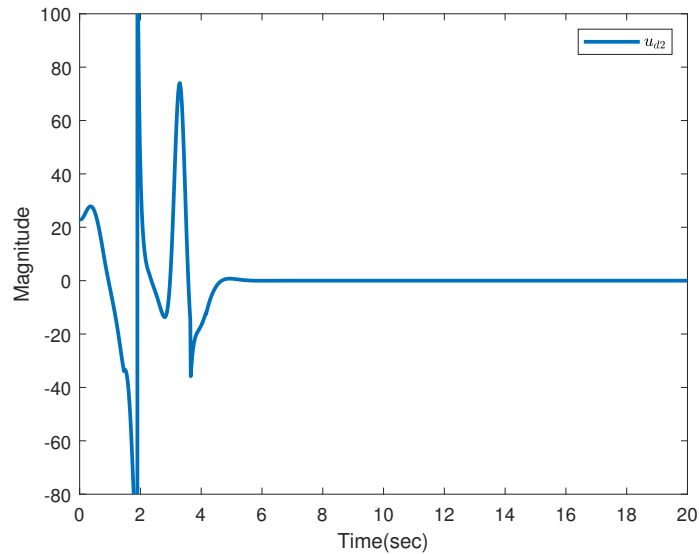


Figura 3: Trayectoria de la entrada de control u_d usando el algoritmo de control (3.6).

3.4 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE UN MOTOR DE IMÁNES PERMANENTES CON SOLO UN ESTADO MEDIBLE

El diseño del algoritmo de control, en la sección anterior, asume que todos los estados son medibles, es decir se tienen sensores disponibles para medir la variable en cuestión y por lo tanto están disponibles para ser utilizados en el algoritmo de control. Sin embargo, en la práctica puede no ser cierto debido a que el costo del sensor es alto, haciendo que el costo de la implementación se incremente o simplemente no existe.

Para sobrepasar este problema es necesario diseñar un observador. El observador permite estimar los estados del sistema que no pueden ser medidos y estos valores pueden ser utilizados en el algoritmo de control en lugar de los estados del sistema original. En esta sección se introducirá un observador convergente en tiempo fijo que permite estimar los estados no medibles del sistema y estos valores estimados se utilizarán para diseñar el algoritmo de control.

3.4.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Para el análisis de esta sección, suponemos que tenemos el modelo dinámico de un motor síncrono de imanes permanentes dado por la ecuación

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega, \\
 \dot{\omega} &= v_1, \\
 \dot{v}_1 &= v_2, \\
 \dot{v}_2 &= K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d \\
 y &= \theta(t),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Los valores de K_1 , K_2 , K_3 , K_4 son los mismos que en la ecuación 3.5. La ecuación $y = \theta(t)$ indica que solo un estado del sistema es medible, en este caso solo se puede medir la posición angular θ , por lo tanto los valores de ω , v_1 y v_2 se estimarán utilizando el observador propuesto en [62] y los valores estimados se utilizarán para diseñar el algoritmo de control. En este caso el observador tendría la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\theta}} &= \hat{\omega} - \gamma k_1 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_1} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_1} \right) \\
 \dot{\hat{\omega}} &= \hat{v}_1 - \gamma^2 k_2 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_2} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_2} \right) \\
 \dot{\hat{v}}_1 &= \hat{v}_2 - \gamma^3 k_3 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_3} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_3} \right) \\
 \dot{\hat{v}}_2 &= -\gamma^4 k_4 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_4} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_4} \right)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

las variables $\hat{\theta}$, $\hat{\omega}$, \hat{v}_1 , y \hat{v}_2 representan los valores estimados de θ , ω , v_1 , and v_2 , respectivamente. Los valores de α , β , y γ se asignan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= i\alpha - (i - 1), \quad \alpha \in [1 - \epsilon_1, 1], \quad \epsilon_1 > 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\
 \beta_i &= i\beta - (i - 1), \quad \beta \in [1, 1 + \epsilon_2], \quad \epsilon_2 > 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\
 \gamma &\geq 1,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

los valores de k_i se asignan de manera que la matriz

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 1 \\ -k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

sea Hurwitz. De acuerdo a [62], el tiempo de convergencia del observador 3.17 está acotado por la siguiente expresión:

$$T \leq \frac{4}{\gamma} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\beta-1} \right) \quad (3.20)$$

Una vez que se han recuperado los estados no medibles del sistema 3.16 utilizamos los valores estimados para diseñar el algoritmo de control el cual tendría la misma forma que la ecuación 3.6 excepto que las variables de los estados son reemplazadas por los valores estimados. El algoritmo de control se presenta en la ecuación 3.21.

$$u_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_4} \left(\hat{z}_3 + K_1 \hat{v}_1 + K_2 \hat{\omega} + K_3 \hat{v}_2 - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial \hat{\theta}} \left(\hat{z}_2 - \hat{\psi}_1 \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial \hat{z}_2} \left(\hat{z}_3 - \hat{\psi}_2 - \hat{\theta} \right) - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial \hat{z}_3} \left(\hat{z}_4 - \hat{z}_2 - \hat{\psi}_3 \right) - \frac{\partial \hat{z}_{2d}}{\partial t} + \hat{\psi}_4 \right), & t_0 \leq t < t_f, \\ 0, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (3.21)$$

El comportamiento del observador y la eficiencia del controlador se demostrarán en la siguiente sección.

3.4.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

Para demostrar la eficiencia del controlador propuesto en la ecuación 3.21 se llevará a cabo una simulación numérica utilizando las ecuaciones 3.16 y 3.17 y el software Simulink de Matlab 2020a. El tiempo de simulación tiene pasos discretos de 10^{-3} . Los parámetros del observador tienen los siguientes valores $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,1$, $\gamma = 20$, y $K = [4, 6, 4, 1]$. Después de sustituir los valores de α , β y γ en la ecuación 3.20 se tiene que el tiempo de convergencia estimado del observador es de 4s. Hay que recordar que este tiempo de convergencia es solo una estimación ya que el observador es diseñado con técnicas de tiempo fijo, sin embargo, el tiempo de convergencia real puede ser mucho menor y este es el caso en la simulación. También es necesario tener en mente que la convergencia deseada para los estados del sistema es establecida para un tiempo máximo de 10s. Los resultados de la simulación se muestran en las Figuras 4 y 5.

La Figura 4 muestra que el algoritmo de control 3.21 efectivamente lleva todos los estados del sistema 3.16 al origen en tiempo predefinido aun cuando la referencia utilizada para el algoritmo de control son los estados estimados en lugar de los estados originales. El acercamiento, mostrado en la parte superior de la Figura 4 muestra que la convergencia del observador hacia los estados del sistema es mucho menor que la estimada por la desigualdad 3.20, es decir la convergencia real es de 0,5s. El acercamiento mostrado en

la parte inferior de la Figura 4 muestra que la precisión de la convergencia es de 10^{-9} lo cual satisface la condición de convergencia de Levant, para pasos de simulación de 10^{-3} y un sistema de orden $n = 4$. Finalmente, la Figura 5 muestra que la magnitud de la señal de control se mantiene dentro de parámetros que pueden ser implementados de manera práctica.

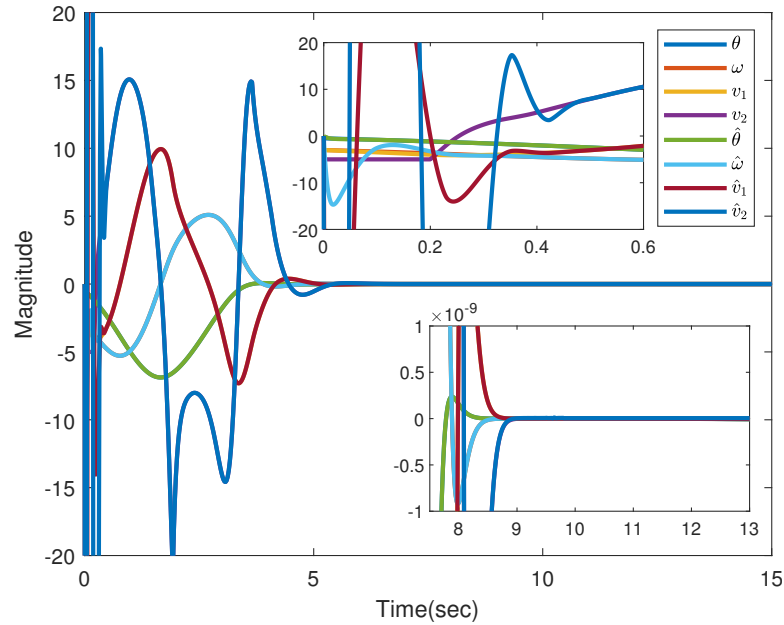


Figura 4: Convergencia de los estados del sistema 3.16 y los estimados producidos por el observador 3.17.

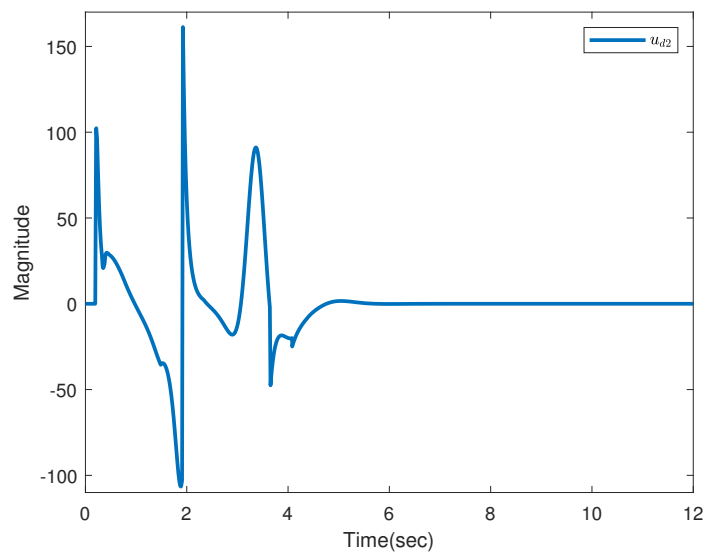


Figura 5: Trayectoria de la señal de control u_{d2} , ecuación 3.21 basada en los estimados producidos por el observador 3.17.

3.5 ESTABILIZACIÓN, EN TIEMPO PREDEFINIDO, DE UN MOTOR DE IMANES PERMANENTES SUJETO A PERTURBACIÓN ACOPLADA DETERMINISTA.

En un ambiente real los sistemas para los cuales se diseñan algoritmos de control están sujetos a perturbaciones. En el caso del sistema con el cual se ha venido trabajando las perturbaciones pueden deberse a variaciones en los voltajes, corrientes o carga aplicada al eje del motor. Esta sección analiza el diseño de un algoritmo de control en tiempo predefinido para este escenario además se supone que solo un estado del sistema es medible.

3.5.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Para el diseño del algoritmo se utilizará el siguiente modelo de un motor síncrono de imanes permanentes sujeto a una perturbación acoplada, es decir la perturbación entra al sistema a través de la misma derivada que por donde entra la señal de control.

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= v_1 \\
 \dot{v}_1 &= v_2 \\
 \dot{v}_2 &= K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d + K_5 u_q \\
 y &= \theta
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

El sistema mostrado en la ecuación 3.22 es semejante al sistema 3.16 excepto que se ha agregado el término $K_5 u_q$ el cual representa una perturbación determinista acoplada. En este caso se asume que el término $\xi = K_5 u_q$ satisface la condición de Lipschitz con constante L y $K_5 = \frac{K_T R_s}{J L_d L_q}$.

El algoritmo de control diseñado en esta sección está compuesto de dos partes. Una parte se encarga de llevar los estados del sistema 3.22 al origen en tiempo predefinido y la otra parte se encarga de contrarrestar la perturbación que afecta el sistema, esto asegura que aunque la perturbación existe los estados del sistema se mantendrán en el origen. La ley de control tendrá la forma de la ecuación 3.23

$$u(t) = \begin{cases} u_d(t) + v(t), & t_0 \leq t < t_f \\ v(t), & t_f \leq t \end{cases} \tag{3.23}$$

El término u_d de la ecuación 3.23 tiene la misma forma que el control 3.21. El término $v(t)$ tiene la siguiente forma:

$$v(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |s(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s(t)) - \lambda_2 |s(t)|^p \text{sign}(s(t)) - \alpha_s \int_0^t \text{sign}(s(t)) ds \\ -\eta_s \frac{(e^{|s(t)|} - 1)}{e^{|s(t)|} (t_f - t)} \text{sign}(s(t)), & t_0 \leq t < t_{fc} \\ -\lambda_1 |s(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s(t)) - \lambda_2 |s(t)|^p \text{sign}(s(t)) - \alpha_s \int_0^t \text{sign}(s(t)) ds, & t_{fc} \leq t. \end{cases} \quad (3.24)$$

donde $s(t) = v_2 - r(t)$, $\dot{r}(t) = u_d(t) - v(t)$. Además λ_i , α_s , η , p son constantes que satisfacen las siguientes condiciones $\lambda_1, \alpha_s > 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\eta > 1$ y $p > 1$. El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales el algoritmo de control propuesto lleva todos los estados del sistema al origen y estos se mantienen allí a pesar de las perturbaciones que afectan al sistema.

Teorema 9. *El algoritmo de control 3.23 cuyos términos están dados por las ecuaciones 3.21 y 3.24 lleva todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido y estos se mantienen allí para todo $t \geq t_f$ aun en presencia de una perturbación determinista que satisface la condición de Lipschitz con constante L si las siguientes condiciones se cumplen: $\eta > 1$, $\alpha_s > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$ y $p > 1$.*

Demostración 2. *Utilizando los resultados del Teorema 2 presentado en [92], si las condiciones del teorema mencionado se satisfacen entonces se asegura que la variable $s(t)$ converge al origen en tiempo predefinido, esto a su vez resulta en $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ para todo t . Como $\dot{s}(t) = \dot{v}_2(t) - \dot{r}(t)$, entonces $0 = \dot{v}_2(t) - \dot{r}(t) = u_d(t) + \xi(t) - u_d(t) + v(t)$, lo cual lleva a $v(t) = -\xi(t)$, así que $v(t)$ contrarresta efectivamente la perturbación $\xi(t)$. Después de contrarrestar la perturbación $\xi(t)$, el control u_d asegura la convergencia de los estados del sistema 3.22 al origen en tiempo predefinido, de acuerdo al Teorema 1 de la sección 3.3. Como la compensación de la perturbación $v(t) = -\xi(t)$ es válida para todo $t \geq t_f$, entonces todos los estados del sistema 3.22 permanecen en el origen aun después de la convergencia.*

3.5.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta sección se realiza una simulación numérica con el sistema 3.22 para verificar la eficiencia del control propuesto en la ecuación 3.23. Para la simulación se utilizan los mismo valores del motor mostrados en la Tabla 1, el tiempo de convergencia deseado es de 20s, la perturbación tiene la siguiente forma $u_q = 0,1t + 0,001 \cos(10t)$ el valor de $K_5 = 4024,14$ por lo tanto la constante de Lipschitz tiene un valor de $L = 443$. Se asume

Variable	Value	Unit
t_f	20	s
η	[10, 10, 10, 10]	
K	[4, 6, 4, 1]	
x_0	[-0,5, -10, -40, -60]	
α	0,9	
β	1,1	
γ	10	
λ_1	50	
λ_2	1	
α_s	445	

Tabla 2: Valores utilizados para las variables del observador y del control $v(t)$.

que solo la posición angular θ es medible así que se emplea el observador dado por la ecuación 3.17 y los valores utilizados para el observador y el control $v(t)$ se muestran en la Tabla 2. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 6-8.

La Figura 6 muestra que el control u_d de la ecuación 3.23 basado en los estimados producidos por el observador 3.17 lleva de manera efectiva todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido, es decir antes de $t_f = 20s$. La precisión de la convergencia es de 10^{-4} que al compararla contra la precisión de las secciones anteriores es mucho menor, esto debido a la presencia de la perturbación. También, la figura muestra que aunque la magnitud de la perturbación alcanza valores de 10^3 , los estados del sistema se mantienen en el origen para todo $t \geq t_f$. Hay que recordar que el control u_d está encargado de llevar los estados del sistema al punto de equilibrio y la Figura 7 muestra que la magnitud de este control se mantiene dentro de valores que pueden ser aplicados de manera práctica, aunque si se compara con los resultados de las secciones anteriores el control presente tiene una magnitud mas grande debido a la presencia de la perturbación la cual afecta los estados del sistema. Algo que es importante recalcar es que a pesar de la magnitud del control mostrado en la Figura 7 esta es mucho menor que la obtenida en [1] para valores aproximados de los parámetros del motor y la perturbación determinista.

La Figura 8 muestra el desempeño del compensador $v(t)$, el cual está basado en los valores estimados por el observador 3.17, contra la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 4024,14(0,1t + 0,001 \cos(10t))$. De la figura se puede observar que el control $v(t)$ contrarresta de manera efectiva la perturbación de manera inmediata.

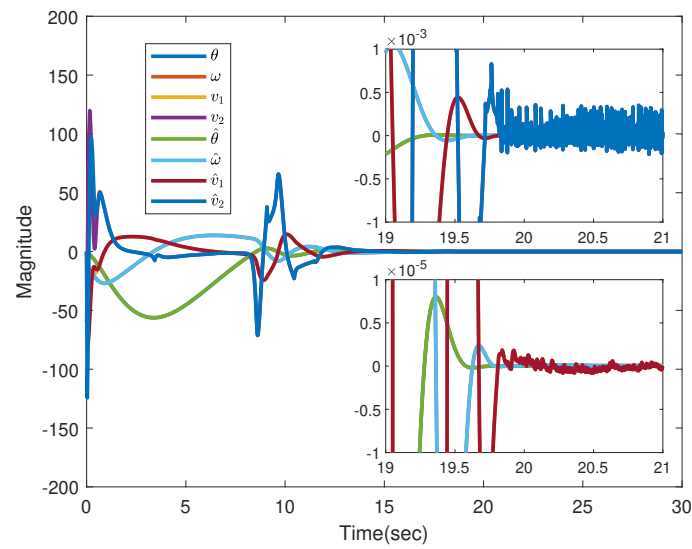


Figura 6: Convergencia de los estados del sistema (3.22) y los estimados producidos por el observador (3.17) al origen, en presencia de perturbaciones deterministas.

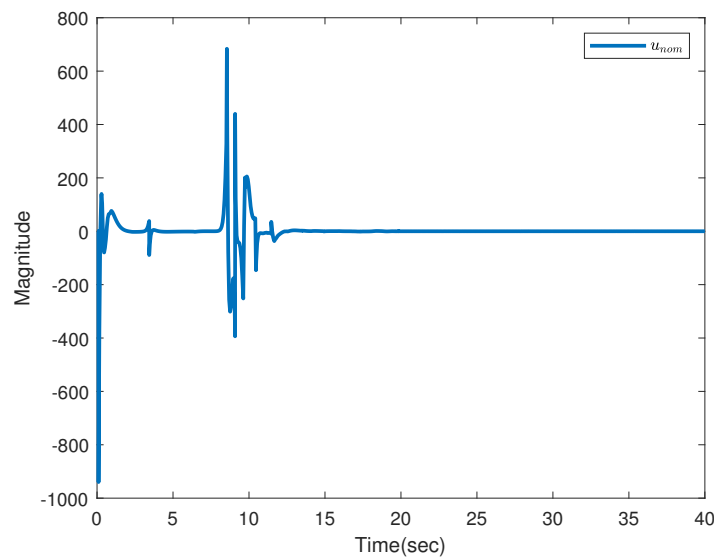


Figura 7: Trayectoria de la señal de control u_d basado en los estimados producidos por el observador (3.17).

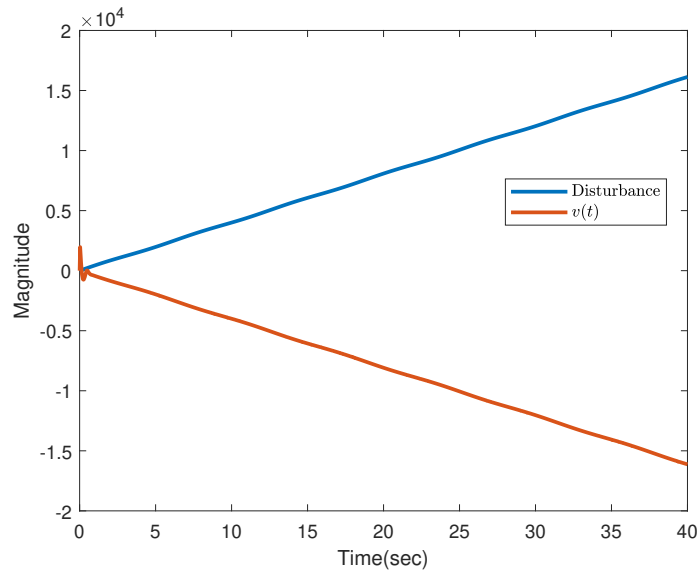


Figura 8: Trayectorias del control (3.24) $v(t)$, basado en los estimados producidos por el observador (3.17), y la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 5747(0,1t + 0,001 \cos(10t))$.

3.6 ESTABILIZACIÓN DE UN MOTOR DE IMANES PERMANENTES SUJETO A PERTURBACIONES DETERMINISTAS Y RUIDOS ESTOCÁSTICOS

Cuando se implementa un algoritmo de control para un sistema generalmente este actúa en un ambiente donde hay otros sistemas operando que pueden introducir ruido, por ejemplo microcontroladores, PLC's, computadoras industriales, motores, etc. Todos estos dispositivos pueden introducir ruido al sistema bajo control y esto puede afectar el desempeño del control. Por lo tanto el ingeniero de control necesita verificar que el algoritmo diseñado será eficaz aun en presencia de ruidos en la señal. El propósito de esta sección es diseñar un algoritmo de control robusto que lleva los estados del sistema al origen en tiempo predefinido aun en presencia de perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos.

3.6.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta sección se analiza el diseño de un control robusto en tiempo predefinido para el sistema modelado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \omega \\
\dot{\omega} &= v_1 \\
\dot{v}_1 &= v_2 \\
dv_2 &= (K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d + K_5 u_q) dt + \sigma(t, v_2(t)) dW(t) \\
y &= \theta.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

los coeficientes K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ son los mismos que en la ecuación 3.16, el término $\xi(t) = K_5 u_q$ es una perturbación que satisfaca la condición de Lipschitz con constante L , y $W(t)$ es un proceso de Wiener cuya derivada en promedio cuadrático es un ruido Gaussiano Blanco. La ecuación $y = \theta$ indica que solo un estado del sistema es medible y en este caso es la posición angular. El objetivo de esta sección es diseñar un algoritmo de control que lleve todos los estados del sistema 3.25 al origen en promedio ρ en tiempo predefinido t_f , independientemente de las condiciones iniciales del sistema y perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos afectando al sistema, y los mantenga allí para todo $t \geq t_f$. El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales se puede diseñar un control de este tipo para el sistema 3.25.

Teorema 10. *El algoritmo de control 3.23 lleva todos los estados del sistema 3.25 al origen en promedio ρ en tiempo predefinido t_f y los mantiene allí para todo $t \geq t_f$ aun en presencia de perturbaciones deterministas que satisfacen la condición de Lipschitz con constante L y ruidos blancos estocásticos acoplados con difusión $\sigma(t) = |v_2(t)|^r$, si se aseguran las siguientes condiciones: $\rho > 1$, $\eta > 1$, $\alpha_s > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$, $p > 1$, $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$, y $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$*

Demostración 3. *Si se asegura que $\rho > 1$, $\eta > 1$, $\alpha_s > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$, $p > 1$, $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$, si $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$ entonces, de acuerdo al Teorema 3 en [92] la convergencia de $s(t)$ al cero en promedio ρ a lo mas en t_f está asegurada. Esto da como resultado que $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ en promedio ρ para todo $t \geq t_f$. Como $\dot{s}(t) = \dot{v}_2(t) - \dot{r}(t)$, entonces $0 = \dot{v}_2(t) - \dot{r}(t) = u_d(t) + \xi(t) + \sigma(t, v_2(t)) \phi - u_d(t) - v(t)$, lo cual lleva a $v(t) = -(\xi(t) + \sigma(t, v_2(t)) \phi)$, así que $v(t)$ contrarresta la perturbación $\xi(t)$ y el ruido $\sigma(t, v_2(t)) \phi$ en promedio ρ . Una vez que $v(t)$ empieza a compensar la perturbación $\xi(t)$, el control u_d lleva todos los estados del sistema 3.25 al origen en tiempo predefinido en promedio ρ , de acuerdo al Teorema 1. Ya que $v(t) = -(\xi(t) + \sigma(t, v_2(t)) \phi)$ para todo $t \geq t_f$, entonces todos los estados del sistema permanecerán en el origen después de hayan convergido.*

3.6.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

El propósito de esta sección es mostrar la eficiencia del algoritmo de control diseñado en esta sección. Para la simulación se utilizan los valores mostrados en la Tabla 1 y en la Tabla 2. El tiempo de convergencia deseado es de $20s$; la perturbación está dada por la siguiente ecuación $u_q = 0,1t + 0,001 \cos(10t)$ el valor de $K_5 = 4024,14$ por lo tanto la constante de Lipschitz tiene un valor de $L = 443$. De acuerdo a la ecuación 3.25 solo la posición angular θ es medible así que se emplea el observador dado por la ecuación 3.17 para estimar los estados no medibles y los valores estimados por el observador son utilizados por el control $u_d(t)$ y el control $v(t)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 9-11.

La Figura 9 muestra que la entrada de control 3.21 y el control 3.24, basado en los estimados producidos por el observador 3.17 llevan todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido de $20s$, con la precisión de 10^{-4} , aun cuando la magnitud de la perturbación alcanza valores del orden 10^3 .

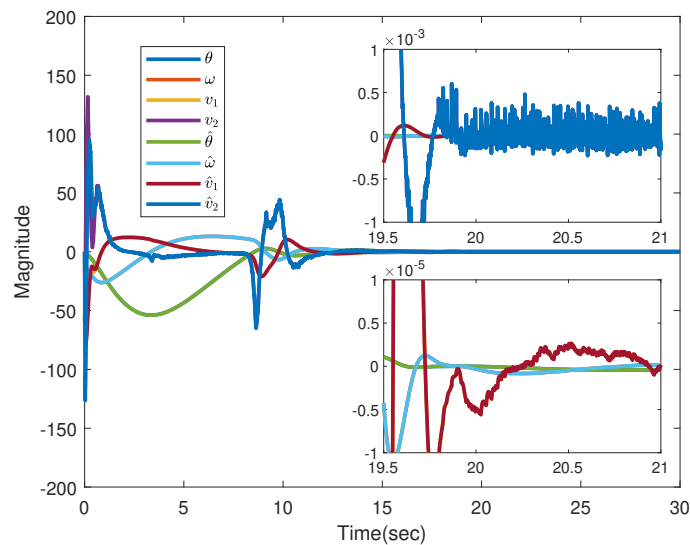


Figura 9: Convergencia del sistema (3.25) y los estados estimados por el observador (3.17) al origen en presencia de una perturbación determinista y ruido estocástico.

De la Figura 10 se observa que la magnitud del control u_d aun se mantiene aceptable. También puede observarse que el control solo se activa después de $t = 0,4s$ para dar tiempo al observador de estabilizarse, esto con la finalidad de evitar introducir valores altos de los estados estimados al control lo cual haría que el control enviara señales de control con magnitudes altas al sistema, haciendo que este diverja. Aun así, de los resultados obtenidos

se observa que el control provee de mejor precisión en la convergencia y menor magnitud en la señal de control que los resultados presentados en [1], para valores aproximados de simulación, lo cual presenta una mejora.

Finalmente, la Figura 11 muestra el comportamiento del compensador $v(t)$, basado en los estimados producidos por el observador 3.17 contra la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 4024,14(0,1t + 0,001 \cos(10t))$ en presencia de ruido blanco con difusión $v_2^{0,75}$. Se puede observar que el control $v(t)$ compensa la perturbación y el ruido de manera inmediata y se mantiene activa para continuar la compensación para todo $t \geq t_f$.

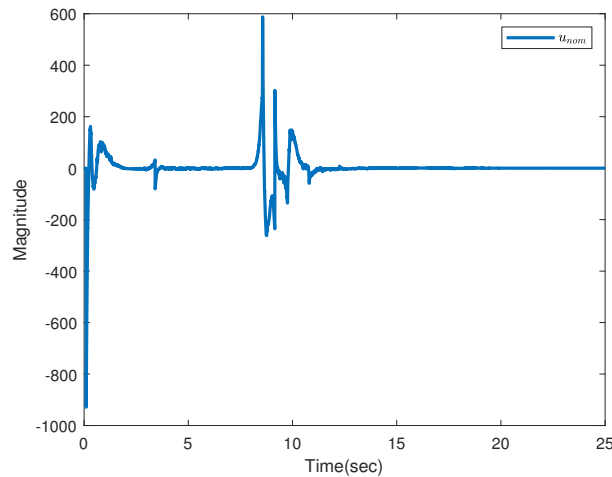


Figura 10: Trayectoria del control u_d basado en los estimados producidos por el observador (3.17) para el sistema (3.25).

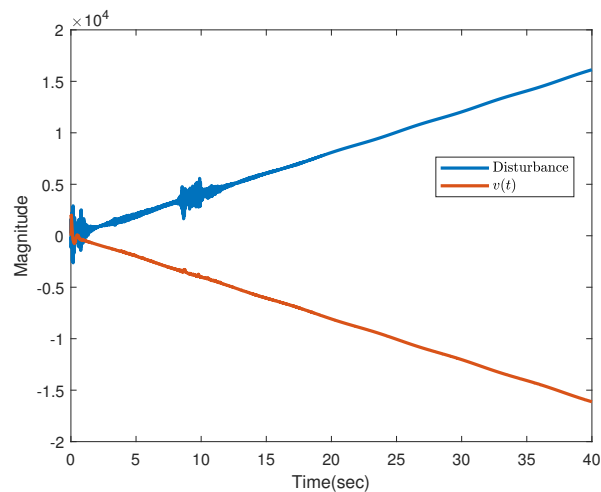


Figura 11: Trayectoria del compensador $v(t)$ mostrado en la ecuación (3.24), contra la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 4024,14(0,1t + 0,001 \cos(10t))$, en presencia de ruido blanco con difusión $v_2^{0,75}$.

3.6.3 CONCLUSIONES

El algoritmo de control diseñado en esta sección muestra ser capaz de forzar todos los estados del sistema en tiempo predefinido, asegurando la robustez del sistema en contra de perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados. También se mostró que aun cuando los estados del sistema no están disponibles para su uso en el diseño del controlador estos pueden ser recuperados utilizando un observador convergente en tiempo fijo. De los resultados obtenidos en las simulaciones, se puede observar que aunque el controlador cumple con su función la trayectoria tanto del controlador como de los estados del sistema no son suaves debido al uso de la función $\text{sign}(x)$, este fenómeno es mas perceptible aún en presencia de perturbaciones y ruidos. Además la magnitud del control aunque aplicable en situaciones reales en varios puntos de la trayectoria alcanza valores relativamente grandes debido al uso de la función exponencial. El siguiente capítulo corrige estos problemas introduciendo funciones con términos lineales.

CAPÍTULO 4

CONTROL, EN TIEMPO PREDEFINIDO, CON TÉRMINOS LINEALES.

La sección anterior mostró el diseño de un algoritmo de control robusto para un sistema de cuarto orden. Los resultados mostraron que el algoritmo es capaz de forzar los estados del sistema al punto de equilibrio en tiempo predefinido. Para diseñar el algoritmo de control fue necesario utilizar términos de la forma $u(x, t) = \eta \frac{(e^{|x|}-1)}{e^{|x|}(t_f-t)} \text{sign}(x)$. Las desventajas de tener controles basados en esta expresión son magnitudes mas grandes de la señal de control y de los estados debido al término exponencial y trayectorias tanto de los estados como de la señal de control que no son suaves, debido a la presencia de la función signo. En este capítulo se propone que una forma de mitigar estos problemas es utilizando términos lineales en las variables de los estados y no utilizar la función signo, es decir términos de la forma $u(x, t) = \eta \frac{x}{(t_f-t)}$. El propósito de la sección será demostrar que un algoritmo de control basado en términos de la forma mencionada forza los estados del sistema al origen en tiempo predefinido independientemente de las condiciones iniciales, perturbaciones deterministas y ruidos afectando al sistema. Además, se introduce un observador que permite recuperar todos los estados del sistema en tiempo predefinido, el cual es una mejora del observador mostrado en la sección anterior. La eficiencia de los algoritmos propuestos serán verificadas mediante simulaciones numéricas utilizando el modelo matemático de un motor síncrono de imanes permanentes.

4.1 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO DE UN SISTEMA CON ESTADOS MEDIBLES

4.1.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL.

En esta sección se analiza el diseño de un algoritmo de control, en tiempo predefinido, para un sistema como el mostrado en la ecuación 4.1

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(t_0) &= x_{10} \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t), & x_2(t_0) &= x_{20} \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t), & x_3(t_0) &= x_{30} \\
 \dot{x}_4(t) &= u(t), & x_4(t_0) &= x_{40}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

La ecuación 4.1 indica que el sistema bajo análisis tiene estados x_i completamente medibles y no hay perturbaciones o ruidos afectando al sistema. El término $u(t)$ representa una señal de control la cual forzará los estados del sistema en tiempo predefinido hacia el punto de equilibrio del sistema independiente de las condiciones iniciales. Antes de iniciar el análisis es necesario tener presente que para el análisis deben cumplirse las condiciones 2 y 3 del capítulo 3.

La solución a este problema extiende los resultados obtenidos en [91, 93]. El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales existe un algoritmo de control, en tiempo predefinido, para el sistema 4.1.

Teorema 11. *La ley de control dada por la ecuación 4.2*

$$u_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_4} \left(-z_3 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial x_1} (z_2 - \psi_1) \right. \\ \left. + \frac{\partial x_{4d}}{\partial z_2} (z_3 - \psi_2 - x_1) + \frac{\partial x_{4d}}{\partial z_3} (z_4 - z_2 - \psi_3) + \frac{\partial x_{4d}}{\partial t} - \psi_4 \right), & 0 \leq t < t_f \\ 0, & t \geq t_f \end{cases} \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
z_2 &= x_2 - x_{2d} \\
x_{2d}(x_1, t) &= -\psi_1 \\
\psi_1 &= \eta_1 \frac{x_1}{t_f - t} \\
z_3 &= x_3 - x_{3d} \\
x_{3d}(x_1, z_2, t) &= -x_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - (z_2 - \psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \psi_2 \\
\psi_2 &= \eta_2 \frac{z_2}{t_f - t} \\
z_4 &= x_4 - x_{4d} \\
x_{4d}(x_1, z_2, z_3, t) &= -z_2 + \frac{\partial x_{3d}}{\partial t} + (z_2 - \psi_1) \frac{\partial x_{3d}}{\partial x_1} \\
&\quad + (z_3 - \psi_2 - x_1) \frac{\partial x_{3d}}{\partial z_2} - \psi_3 \\
\psi_3 &= \eta_3 \frac{z_3}{t_f - t}, \\
\psi_4 &= \eta_4 \frac{z_4}{t_f - t}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

forza todos los estados del sistema 4.1 al origen, en tiempo predefinido t_f independientemente de las condiciones iniciales, y estos permanecen ahí para todo $t \geq t_f$.

Demostración 4. La demostración del teorema mencionado utiliza backstepping. En este caso primero introducimos el siguiente control

$$u(t) = \begin{cases} \eta_1 \frac{x}{(t_f - t)}, & \text{if } t_0 \leq t < t_f \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases} \tag{4.4}$$

el cual hace que el sistema

$$\dot{x}(t) = -u(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.5}$$

converja al origen en tiempo predefinido y se mantenga ahí para todo $t \geq t_f$, tal como lo muestra la siguiente ecuación

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{\eta_1}, & \text{if } t_0 \leq t < t_f \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.6}$$

la cual es solución de 4.5. El parámetro η_1 , el cual debe satisfacer $\eta_1 \geq 1$, permite ajustar la razón de convergencia de los estados haciendo que estos puedan converger antes que t_f .

Teniendo en cuenta el resultado anterior, para el caso $n = 4$ se aplica la técnica de backstepping para transformar el sistema 4.1 para lo cual se necesita introducir nuevas variables ψ_i basados en 4.4, y variables z_i . La forma que tienen estas variables se presentan en 4.3.

Para demostrar la convergencia del sistema 4.1 en tiempo predefinido se propone las siguientes funciones recursivas de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V_1(x_1) &= \frac{1}{2}x_1^2(t) \\ V_2(x_1, z_2) &= V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \\ V_3(x_1, z_2, z_3) &= V_2 + \frac{1}{2}z_3^2, \\ V_4(x_1, z_2, z_3, z_4) &= V_3 + \frac{1}{2}z_4^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La derivada total de V_4 tendría la siguiente forma:

$$\dot{V}_4 = x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3 + z_4\dot{z}_4 \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z_2 - \psi_1 \\ \dot{z}_2 &= x_3 + \frac{\partial x_{2d}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial x_{2d}}{\partial t} \\ \dot{z}_3 &= x_4 - \left(\frac{\partial x_{3d}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial x_{3d}}{\partial z_2}\dot{z}_2 + \frac{\partial x_{3d}}{\partial t} \right) \\ \dot{z}_4 &= u_d - \left(\frac{\partial x_{4d}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial z_2}\dot{z}_2 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial z_3}\dot{z}_3 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

los cuales al ser sustituidos en 4.8 conducen a la siguiente ecuación

$$\dot{V}_4 = -x_1\psi_1 - z_2\psi_2 - z_3\psi_3 + z_3z_4 + z_4 \left[u_d - \left(\frac{\partial x_{4d}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial z_2}\dot{z}_2 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial z_3}\dot{z}_3 + \frac{\partial x_{4d}}{\partial t} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Al sustituir el control mostrado en la ecuación 4.2 y los valores de ψ_i mostrados en 4.3 se obtiene la ecuación:

$$\dot{V}_4 = -\eta_1 \frac{x_1^2}{t_f - t} - \eta_2 \frac{z_2^2}{t_f - t} - \eta_3 \frac{z_3^2}{t_f - t} - \eta_4 \frac{z_4^2}{t_f - t} \quad (4.11)$$

Finalmente, la convergencia en tiempo predefinido se muestra al observar que $V_4 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4^2$, entonces $V_4 \leq 2(\text{máx}\{|x_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|\})^2$ o bien

$$\frac{V_4}{2} \leq (\text{máx}\{|x_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|\})^2 \quad (4.12)$$

Lo cual al sustituir en 4.11 conduce a

$$\dot{V}_4 \leq -\eta \frac{V_4}{4(t_f - t)}, \quad (4.13)$$

donde $\eta = \text{mín}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$, implicando que $V(t)$ converge al origen en tiempo predefinido t_f y permanece ahí para todo $t \geq t_f$. Esto también asegura que todos los estados del sistema convergen al origen en tiempo predefinido y permanecen ahí para todo $t \geq t_f$.

La siguiente subsección presenta el una simulación numérica, la cual demuestra la eficiencia del control 4.2.

4.1.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL.

Para demostrar la eficiencia del control 4.2 se utilizará el motor mostrado en la Figura 1. El modelo dinámico del sistema está gobernado por la ecuación 2, la cual al ser transformada en forma de cadena de integradores tiene la forma de la ecuación 3.6 y se muestra a continuación como referencia:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= v_1, \\ \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d, \end{aligned} \quad (4.14)$$

los valores de K_i están definidos en la ecuación 3.5. El algoritmo de control para este sistema tomaría la siguiente forma, $u_d(t) = u_{d1}(t) + u_{d2}(t)$, donde $u_{d1}(t) = \frac{1}{K_4}(K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2)$ y

$$u_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_4} \left((K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2) + z_3 - \frac{\partial v_{2d}}{\partial \theta} (z_2 - \psi_1) \right. \\ \left. - \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_2} (z_3 - \psi_2 - \theta) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial z_3} (z_4 - z_2 - \psi_3) - \frac{\partial v_{2d}}{\partial t} + \psi_4 \right), & 0 \leq t < t_f \\ 0, & t \geq t_f \end{cases} \quad (4.15)$$

Los valores de z_i y ψ_i se presentan a continuación

$$\begin{aligned}
z_2 &= \omega - \omega_d, \\
\omega_d(\theta, t) &= -\psi_1, \\
\psi_1 &= \eta_1 \frac{\theta}{t_f - t}, \\
z_3 &= v_1 - v_{1d}, \\
v_{1d}(\theta, z_2, t) &= -\theta - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - (z_2 - \psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \psi_2, \\
\psi_2 &= \eta_2 \frac{z_2}{t_f - t}, \\
z_4 &= v_2 - v_{2d}, \\
v_{2d}(\theta, z_2, z_3, t) &= -z_2 + \frac{\partial v_{1d}}{\partial t} + (z_2 - \psi_1) \frac{\partial v_{1d}}{\partial \theta} \\
\psi_3 &= \eta_3 \frac{z_3}{t_f - t} + (z_3 - \psi_2 - \theta) \frac{\partial v_{1d}}{\partial z_2} - \psi_3, \\
\psi_4 &= \eta_4 \frac{z_4}{t_f - t}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Los parámetros del motor se presentan en la Tabla 1, en esta simulación establecemos el valor de $t_f = 15s$, $\eta = [20, 20, 20, 20]$ y $x_0 = [5, 5, 5, 5]$. El paso de la simulación es de 10^{-3} . Los resultados se muestran en las figuras 12 y 13.

En la Figura 12 se observa que el control de la ecuación 4.15 es capaz de llevar todos los estados del sistema 4.14 al origen en tiempo predefinido de $15s$, tal como se deseaba. La esquina inferior izquierda muestra un acercamiento en el cual se observa que la precisión de convergencia es de 10^{-10} lo cual satisface la prueba de convergencia de Levant. De la figura también se observa que las trayectorias de los estados del sistema 4.15 son mas suaves que las trayectorias de los estados del sistema 3.5 mostrados en la Figura 2, esto muestra una ventaja del algoritmo de control de este capítulo sobre el algoritmo de control del capítulo 3.

En la Figura 13 se muestra la trayectoria del algoritmo de control presentado en la ecuación 4.15. Claramente se observa una diferencia considerable de la suavidad de la trayectoria al ser comparada contra la trayectoria de la Figura 3. Aparte de la suavidad de la trayectoria también se observa una mejora en la magnitud de la trayectoria del control aun cuando las condiciones iniciales para el sistema 4.15 son un poco mayores, esto demuestra que el algoritmo de control 4.15 puede ser utilizado en aplicaciones prácticas.

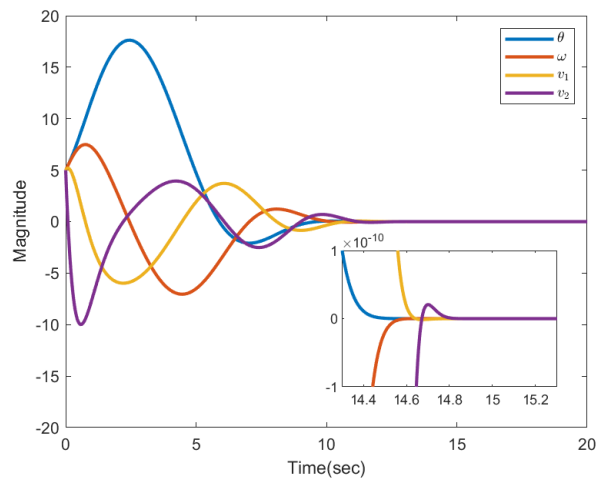


Figura 12: Convergencia de los estados del sistema (4.14) al origen.

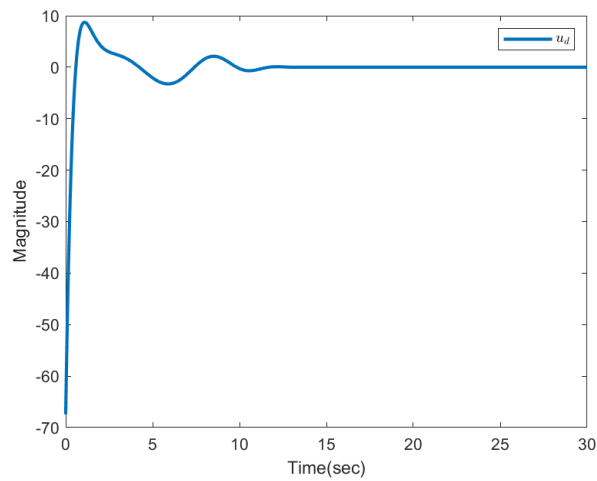


Figura 13: Trayectoria del control $u_d(t)$ mostrado en 4.2.

4.2 ESTABILIZACIÓN, EN TIEMPO PREDEFINIDO, DE UN SISTEMA CON SOLO UN ESTADO MEDIBLE

4.2.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta subsección se diseña un algoritmo de control para el sistema modelado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4, & x_3(t_0) &= x_{30} \\
 \dot{x}_4(t) &= u(t), & x_4(t_0) &= x_{40}, \\
 y(t) &= x_1(t).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Los términos $x_i(t) \in R$ representa los estados del sistema y $u(t) \in R$ representa la señal de control.

La ecuación 4.17 muestra que el sistema no es afectado por perturbaciones ni ruidos y la ecuación $y(t) = x_1(t)$ indica que solo un estado del sistema es medible. El problema en esta sección es diseñar un algoritmo de control $u(t)$ el cual sea capaz de llevar todos los estados del sistema 4.17 al origen en tiempo predefinido t_f .

Para resolver este problema es necesario utilizar un observador que nos permita recuperar los estados no medibles del sistema 4.17, es decir x_2, x_3, x_4 . Una vez recuperados los estados no medibles estos se utilizan para diseñar el algoritmo de control.

Para recuperar los estados del sistema se utiliza el siguiente observador:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - \mu_1 \frac{\hat{x}_1 - y}{t_{fo} - t} - \gamma k_1 \text{sign}(\hat{x}_1 - y) \left(|\hat{x}_1 - y|^{\alpha_1} + |\hat{x}_1 - y|^{\beta_1} \right), \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 - \mu_2 \frac{\hat{x}_1 - y}{t_{fo} - t} - \gamma^2 k_2 \text{sign}(\hat{x}_1 - y) \left(|\hat{x}_1 - y|^{\alpha_2} + |\hat{x}_1 - y|^{\beta_2} \right), \\
 \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 - \mu_3 \frac{\hat{x}_1 - y}{t_{fo} - t} - \gamma^3 k_3 \text{sign}(\hat{x}_1 - y) \left(|\hat{x}_1 - y|^{\alpha_3} + |\hat{x}_1 - y|^{\beta_3} \right), \\
 \dot{\hat{x}}_4 &= -\mu_4 \frac{\hat{x}_1 - y}{t_{fo} - t} - \gamma^4 k_4 \text{sign}(\hat{x}_1 - y) \left(|\hat{x}_1 - y|^{\alpha_4} + |\hat{x}_1 - y|^{\beta_4} \right),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde las variables $\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \hat{x}_3(t)$ y $\hat{x}_4(t)$ son los estimados de los estados $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ y $x_4(t)$, respectivamente. Los valores de α, β , y γ son asignados de la misma manera que

en 3.18, es decir:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= i\alpha - (i - 1), & \alpha &\in [1 - \epsilon_1, 1], & \epsilon_1 &> 0, & i &= 1, \dots, 4, \\ \beta_i &= i\beta - (i - 1), & \beta &\in [1, 1 + \epsilon_2], & \epsilon_2 &> 0, & i &= 1, \dots, 4, \\ \gamma &\geq 1,\end{aligned}\tag{4.19}$$

y los valores de k_i deben satisfacer que la siguiente matriz

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 1 \\ -k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{4.20}$$

sea Hurwitz.

El observador propuesto en 4.18 es semejante al propuesto en [62], excepto de que se ha agregado el término $\mu_i \frac{\hat{x}_1 - y}{t_{fo} - t}$, $i = 1, \dots, 4$, donde t_{fo} representa el tiempo de convergencia deseado para el observador, μ_i permite ajustar la razón de convergencia del observador y solo permanece activo para $0 \leq t < t_{fo}$. De la sección anterior se observó que el observador propuesto, sin este término, recupera los estados del sistema original a lo mas en $T \leq \frac{4}{\gamma} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\beta-1} \right)$, sin embargo este valor es un estimado del tiempo de convergencia, es decir no se puede establecer el tiempo de convergencia del observador, lo cual se puede observar en la sección 3.2. Con el término μ_i se puede establecer el tiempo de convergencia del observador.

Una vez que se han estimado los estados del sistema 4.17 estos se utilizan para diseñar el algoritmo de control, el cual tiene la siguiente forma:

$$u_d(t) = \begin{cases} -\hat{z}_3 + \frac{\partial \hat{x}_{4d}}{\partial \hat{x}_1} (\hat{z}_2 - \hat{\psi}_1) + \frac{\partial \hat{x}_{4d}}{\partial \hat{x}_2} (\hat{z}_3 - \hat{\psi}_2 - \hat{x}_1) \\ + \frac{\partial \hat{x}_{4d}}{\partial \hat{z}_3} (\hat{z}_4 - \hat{z}_2 - \hat{\psi}_3) + \frac{\partial \hat{x}_{4d}}{\partial t} - \hat{\psi}_4, & t_0 \leq t < t_f \\ 0, & t \geq t_f \end{cases}\tag{4.21}$$

donde las variables $\hat{x}_{4d}, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3, \hat{\psi}_4$ tienen la misma forma que en 4.2 y los estados $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, and $x_4(t)$ son reemplazados por los estimados del observador 4.18. La siguiente sección muestra el desempeño del control propuesto en 4.21.

4.2.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

Para demostrar la eficiencia del algoritmo propuesto se utiliza el mismo sistema representado por la ecuación 3.16

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega, \\
 \dot{\omega} &= v_1, \\
 \dot{v}_1 &= v_2 \\
 \dot{v}_2 &= K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d \\
 y &= \theta(t),
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

la ecuación $y = \theta(t)$ indica que solo la posición angular es medible, así que es necesario recuperar los estados ω , v_1 , v_2 . Para hacerlo el observador 4.18 tomaría la forma de la ecuación 4.23. Los parámetros del motor se muestran en la Tabla 1 y los parámetros del observador se muestran en la Tabla 3.

Variable	Value
α	0,9
β	0,01
γ	10
K	0,1
t_{fo}	0,5s
t_f	15s
η	[20, 20, 20, 20]
x_0	[5, 5, 5, 5]

Tabla 3: Valores utilizados en el observador junto con las condiciones iniciales y tiempos de convergencia deseados.

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\theta}} &= \hat{\omega} - \mu_1 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma k_1 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_1} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_1} \right), \\
 \dot{\hat{\omega}} &= \hat{v}_1 - \mu_2 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma^2 k_2 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_2} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_2} \right), \\
 \dot{\hat{v}}_1 &= \hat{v}_2 - \mu_3 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma^3 k_3 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_3} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_3} \right), \\
 \dot{\hat{v}}_2 &= -\mu_4 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma^4 k_4 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_4} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_4} \right).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

El término $\mu_i \frac{\hat{x}_1 - y}{t_{fo} - t}$ solo permanece activo para $0 \leq t < t_{fo}$. El algoritmo de control tiene la forma mostrada en la ecuación 4.15.

$$u_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_4} \left((K_1 \hat{v}_1 + K_2 \hat{\omega} + K_3 \hat{v}_2) + \hat{z}_3 - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial \hat{\theta}} (\hat{v}_2 - \hat{\psi}_1) \right) \\ - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial \hat{z}_2} (\hat{z}_3 - \hat{\psi}_2 - \hat{\theta}) - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial \hat{z}_3} (\hat{z}_4 - \hat{z}_2 - \hat{\psi}_3) - \frac{\partial \hat{v}_{2d}}{\partial t} + \hat{\psi}_4, & t_0 \leq t < t_f \\ 0, & t \geq t_f \end{cases} \quad (4.24)$$

La simulación fue llevada a cabo utilizando pasos de tiempo discreto de 10^{-3} , los resultados se muestran en las figuras 14-16

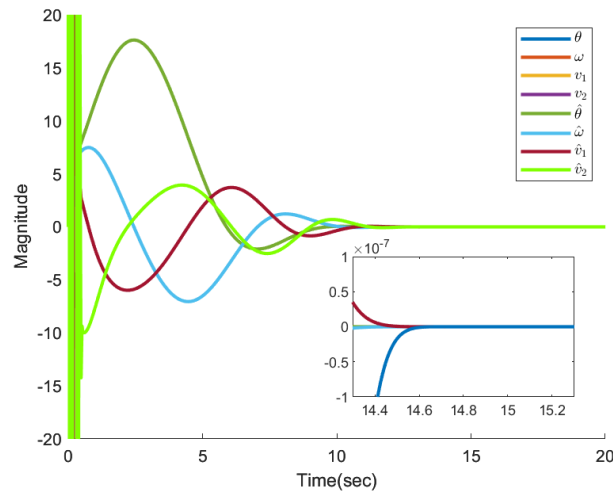


Figura 14: Convergencia de los estados del sistema (4.22) y los estados estimados por el observador (4.23) al origen.

La Figura 14 muestra las trayectorias del sistema 4.17 comparadas contra las trayectorias del observador 4.23. Se puede observar que el algoritmo de control propuesto fuerza todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido. También se observa que los estimados del observador tienen la misma forma que los estados del sistema 4.23 desde $t = t_{fo}$, donde $t_{fo} = 0,5$. De la Figura 15 se observa que la convergencia de los estados del sistema es de 10^{-10} . Cuando comparamos estas trayectorias contra las obtenidas en la Figura 4 se observa que las trayectorias obtenidas en esta sección son mas suaves y se logra mejor precisión.

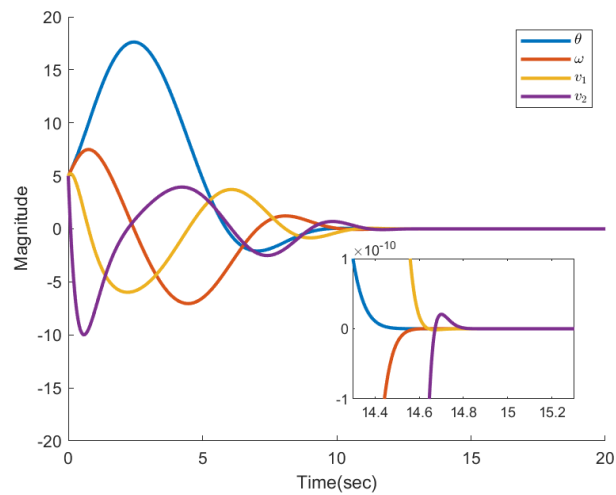


Figura 15: Convergencia de los estados del sistema (4.22) al origen.

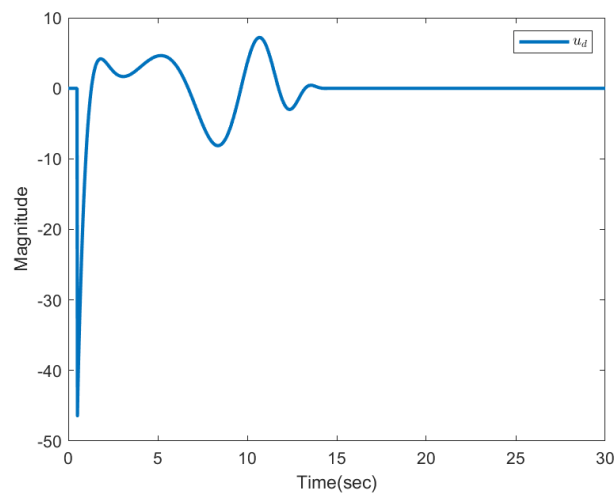


Figura 16: Trayectoria del control u_d basado en los estimados producidos por el observador (4.23).

La Figura 16 muestra la trayectoria del control. De la figura sobresalen dos cosas, la primera es que la trayectoria del algoritmo de control de esta sección es mas suave que la obtenida para el algoritmo de control de la sección 3.4. La segunda tiene que ver con la magnitud del control, la cual es menor que la magnitud del control de la sección 3.4, especialmente este último resultado muestra que el algoritmo de control propuesto en esta sección puede ser utilizado en aplicaciones reales.

4.3 ESTABILIZACIÓN DE UN SISTEMA SUJETO A PERTURBACIONES DETERMINISTAS CON SOLO UN ESTADO MEDIBLE

4.3.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta sección presenta el diseño de un algoritmo de control para un sistema que está siendo afectado por perturbaciones deterministas acopladas. Un sistema de este tipo está representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2(t) &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3(t) &= x_4, & x_3(t_0) &= x_{30}, \\ \dot{x}_4(t) &= u(t) + \xi(t), & x_4(t_0) &= x_{40}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

El término $\xi(t)$ satisface la condición de Lipschitz con constante L . El sistema mostrado en la ecuación 4.25 supone que todos los estados del sistema son medibles. Si este no fuera el caso, es necesario utilizar un observador, como el mostrado en la sección anterior, para recuperar los estados no medibles del sistema y utilizar estas estimaciones para diseñar el algoritmo de control. El siguiente teorema muestra las condiciones para diseñar tal algoritmo.

Teorema 12. *El algoritmo de control de la ecuación 4.26*

$$u(t) = \begin{cases} u_d(t) + \chi(t), & t_0 \leq t < t_f \\ \chi(t), & t_f \leq t \end{cases} \quad (4.26)$$

donde $u_d(t)$ tiene la forma del control mostrado en 4.21 y $\chi(t)$

$$\chi(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |s(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s(t)) - \lambda_2 |s(t)|^p \text{sign}(s(t)) - \alpha_s \int_0^t \text{sign}(s(s)) ds \\ -\eta_s \frac{s(t)}{(t_f - t)}, & t_0 \leq t < t_{fc} \\ -\lambda_1 |s(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s(t)) - \lambda_2 |s(t)|^p \text{sign}(s(t)) - \alpha_s \int_0^t \text{sign}(s(s)) ds, & t_{fc} \leq t. \end{cases} \quad (4.27)$$

tal que $s(t) = x_4(t) - r(t)$, and $\dot{r}(t) = u_d(t) - \chi(t)$, forza todos los estados del sistema 4.25 al origen en tiempo predefinido t_f y los mantiene allí para todo $t \geq t_f$, aun en presencia

de perturbaciones deterministas que satisfacen la condición de Lipschitz con constante L si se aseguran las siguientes condiciones $\eta_s > 1$, $\alpha_s > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$ y $p > 1$.

Demostración 5. Utilizando los resultados del Teorema 2 en [92], la variable $s(t)$ converge a cero, en tiempo predefinido debido a que $\eta_s > 1$, $\alpha_s > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$ y $p > 1$. Esto a su vez resulta en $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ para todo $t \geq t_f$. Ya que $\dot{s}(t) = \dot{x}_4(t) - \dot{r}(t)$, entonces $0 = \dot{x}_4(t) - \dot{r}(t) = u_d(t) + \xi(t) - u_d(t) + \chi(t)$, esto conduce a $\chi(t) = -\xi(t)$, así que $\chi(t)$ compensa la perturbación $\xi(t)$. Ya que el control $\chi(t)$ compensa la perturbación entonces el control $u_d(t)$ provee la convergencia de todos los estados del sistema 4.25 al origen, en tiempo predefinido, de acuerdo al Teorema 4.1. Como el control $\chi(t) = -\xi(t)$ compensa la perturbación para todo $t \geq t_f$ entonces, todos los estados del sistema 4.25 permanecen en el origen aun después de su convergencia.

El desempeño del algoritmo de control propuesto en el Teorema 12 se demuestra en la siguiente sección.

4.3.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

Para demostrar la eficiencia del control propuesto en el Teorema 12 se utiliza el modelo dinámico del motor síncrono de imanes permanentes utilizado en la ecuación 4.22, pero esta vez el sistema es afectado por una perturbación determinista. La ecuación de este sistema se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= v_1 \\
 \dot{v}_1 &= v_2 \\
 \dot{v}_2 &= K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d + K_5 u_q \\
 y &= \theta
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

El término $K_5 u_q$ en la ecuación 4.28 es una perturbación determinista que satisface la condición de Lipschitz y $K_5 = -\frac{K_T R_s}{J L_d L_q}$. En este caso $u_q = 0,1t + 0,001 \cos(10t)$ y $K_5 = 4024,14$. Entonces, la constante de Lipschitz es $L = 443$. Los valores que satisfacen la condición del Teorema 12 se muestran en la Tabla 4. La ecuación $y = \theta$ en 4.28, muestra que solo la posición angular es medible así que es necesario recuperar los estados no medibles utilizando el observador 4.23 y los estados estimados son utilizados por el control 4.26.

Los parámetros del motor son los mismos que los mostrados en la Tabla 1. Los valores para el observador y las condiciones para la simulación se muestran en la siguiente tabla:

Variable	Value	Unit
t_f	15	s
η	[10, 10, 10, 10]	
K	[4, 6, 4, 1]	
x_0	[-0,4, 0, 50, 50]	
α	0,9	
β	1,1	
γ	10	
λ_1	50	
λ_2	1	
α_S	445	
η_S	5	

Tabla 4: Valores utilizados en la simulación del desempeño del algoritmo de control 4.26

Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 17-19. La Figura 17 muestra que el control propuesto en 4.26 basado en los estimados producidos por el observador 4.23 es capaz de forzar todos los estados del sistema 4.28 al origen en tiempo predefinido de $t_f = 15s$. La figura muestra dos ventanas de aproximación las cuales muestran que el sistema converge al origen con precisión de 10^{-5} , en presencia de las perturbaciones. También puede observarse que a pesar de la presencia de perturbaciones deterministas las trayectorias de los estados se mantienen suaves.

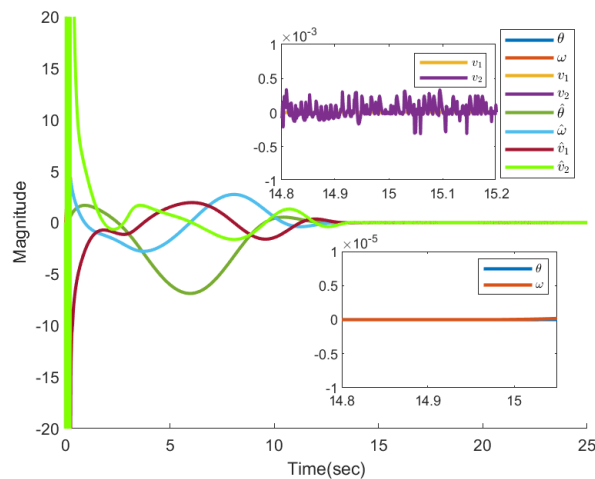


Figura 17: Convergencia de los estados del sistema (4.28) y los estimados producidos por el observador (4.23) al origen en presencia de perturbaciones deterministas.

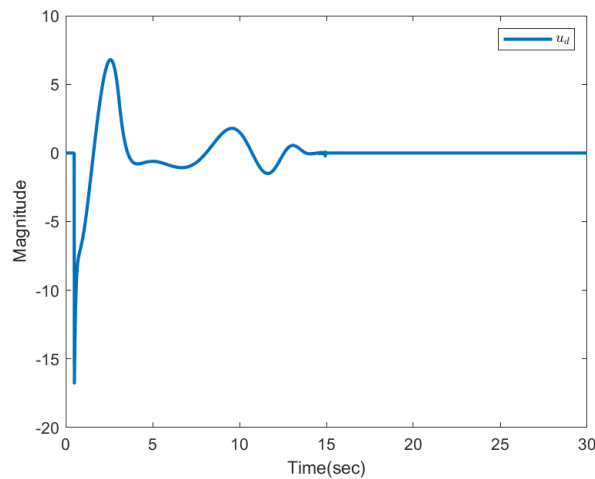


Figura 18: Trayectoria de la entrada de control $u_d(t)$ basada en los estimados producidos por el observador (4.23).

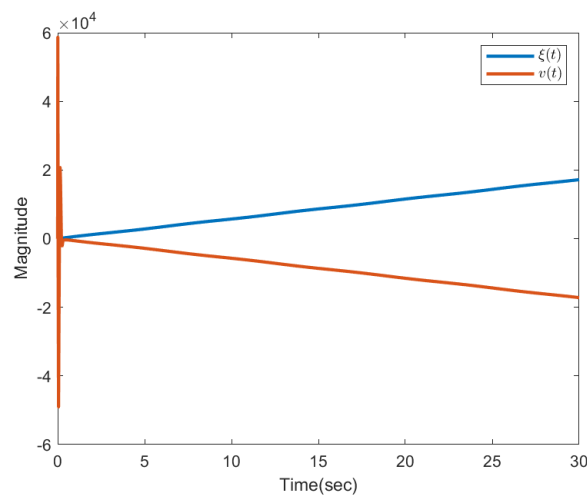


Figura 19: Trayectoria del compensador $\chi(t)$ mostrado en 4.26 contra la perturbación $\xi(t)$, basado en los estimados producidos por el observador 4.23.

La Figura 18 muestra la trayectoria del control $u_d(t)$. De la figura se aprecia que la trayectoria es suave y las magnitudes del control son menores que las obtenidas en la sección 3.5. También de la figura se observa que es necesario que el control $u_d(t)$ se mantenga apagado durante 0,5 segundos para permitir que el observador recupere los estados no medibles del sistema 4.28, de otro modo la magnitud del controlador tendría valores elevados que harían que el sistema diverja. Por los valores de control mostrados en la figura se puede decir que este algoritmo puede ser implementado de manera práctica.

Finalmente, la Figura 19 muestra el comportamiento del control $\chi(t)$ contra la perturbación $\xi(t)$. La figura muestra que el control $\chi(t)$ compensa efectivamente la perturbación en tiempo predefinido. También se observa que la compensación de $\chi(t)$ se extiende aun después del tiempo de convergencia deseado, lo cual asegura que los estados del sistema permanecerán en el origen para todo $t \geq t_f$.

4.4 ESTABILIZACIÓN, EN TIEMPO PREDEFINIDO, DE UN SISTEMA SUJETO A PERTURBACIONES DETERMINISTAS Y RUIDOS ESTOCÁSTICOS ACOPLADOS

4.4.1 DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta sección de muestra el diseño de un algoritmo de control que permite llevar todos los estados de un sistema, afectado por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados, al origen en tiempo predefinido, independientemente de las condiciones iniciales del sistema. La estructura del sistema para el cual se diseña este algoritmo de control tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10} \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4, & x_3(t_0) &= x_{30}, \\
 dx_4(t) &= (u(t) + \xi(t))dt + \sigma(t, x_4(t)) dW(t), & x_4(t_0) &= x_{40}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

el término $\xi(t) = K_5 u_q$ es una perturbación determinista que satisface la condición de Lipschitz con constante L y $W(t)$ es un proceso de Wiener cuya derivada media cuadrática débil es un ruido Gaussiano blanco. En la ecuación 4.29 se asume que todos los estados del sistema son medibles sin embargo, si esto no es cierto se debe emplear un observador como el propuesto por la ecuación 4.18 para recuperar los estados no medibles del sistema. El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales existe el control deseado.

Teorema 13. *El algoritmo de control mostrado en la ecuación 4.26 fuerza todos los estados del sistema 4.29 al origen en promedio ρ en tiempo predefinido independientemente de las condiciones iniciales del sistema y de perturbaciones deterministas que satisfacen la condición de Lipschitz con constante L y ruidos blancos estocásticos Gaussianos con difusión $\sigma(t) = |x_4(t)|^r$ afectando al sistema y los mantiene allí para todo*

$t \geq t_f$ si se cumplen las siguientes condiciones: $\rho > 1, \eta > 1, \alpha_s > L, \lambda_1 > \sqrt{2\alpha}, \lambda_2 \geq 0, p > 1, 2\lambda_1 > \rho - 1 > 0, 2\lambda_2 > \rho - 1 > 0, y \frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$.

Demostración 6. Suponiendo que las condiciones $\rho > 1, \eta > 1, \alpha_s > L, \lambda_1 > \sqrt{2\alpha}, \lambda_2 \geq 0, p > 1, 2\lambda_1 > \rho - 1 > 0, 2\lambda_2 > \rho - 1 > 0, y \frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$ se cumplen entonces, de acuerdo al Teorema 3 en [92] $s(t)$ converge al origen en $t = t_{fs}$ en promedio ρ , lo cual resulta en $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ en promedio ρ para todo $t \geq t_{fs}$. Considerando que $s(t) = x_4(t) - r(t)$ y que $r(t) = u_d(t) - \chi(t)$ entonces $\dot{s}(t) = \dot{x}_4(t) - \dot{r}(t)$ implica que $0 = \dot{x}_4(t) - \dot{r}(t)$ o bien $0 = u_{d2}(t)dt + \xi(t)dt + \sigma(t, x_4(t))dW(t) - u_{d2}(t)dt + \chi(t)dt$, lo cual conduce a $\chi(t)dt = -\xi(t)dt - \sigma(t, x_4(t))dW(t)$, así que $\chi(t)dt$ compensa la perturbación determinista $\xi(t)dt$ y el ruido estocástico $\sigma(t, x_4(t))dW(t)$ en promedio ρ . Además, ya que la perturbación determinista $\xi(t)dt$ y el ruido estocástico $\sigma(t, x_4(t))dW(t)$ son compensados entonces, de acuerdo al Teorema 11 el algoritmo de control u_d forza los estados del sistema 4.29 al origen en sentido de promedio ρ . Ya que $\chi(t)dt$ compensa la perturbación $\xi(t)dt$ y el ruido estocástico $\sigma(t, x_4(t))dW(t)$ en sentido de promedio ρ para todo $t \geq t_f$ entonces todos los estados del sistema 4.29 permanecen allí para todo t .

La eficiencia del algoritmo de control diseñado en esta sección se muestra a continuación.

4.4.2 DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta sección se demuestra la eficiencia del algoritmo de control diseñado en la sección anterior. Para esto se utiliza el modelo dinámico de un motor síncrono de imanes permanentes sujeto a una perturbación determinista y ruido estocástico acoplado, el cual se muestra en la ecuación

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= v_1 \\
 \dot{v}_1 &= v_2 \\
 dv_2 &= (K_1 v_1 + K_2 \omega + K_3 v_2 - K_4 u_d + K_5 u_q) dt + \sigma(t, v_2(t)) dW(t) \\
 y &= \theta
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

La perturbación determinista tiene la siguiente forma $u_q = 0,1t + 0,001 \cos(10t)$ y $K_5 = 4024,14$. Entonces la constante de Lipschitz tiene el siguiente valor $L = 443$. El parámetro del ruido estocástico es $r = 0,75$. Se asume que la convergencia estocástica es en promedio $\rho = 2$ para satisfacer las condiciones del Teorema 13. La ecuación $y = \theta$ en

4.30 muestra que solo la posición angular del sistema está disponible para ser medida. Entonces se emplea el observador 4.23 para recuperar los estados no medibles del sistema. Los parámetros de este observador junto con los valores que satisfacen las condiciones del teorema se muestran en la Tabla 4. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 20-22.

La Figura 20 muestra que el algoritmo de control 4.26 es capaz de forzar todos los estados del sistema 4.30 al origen en tiempo predefinido a pesar de que el sistema está siendo afectado por una perturbación determinista y un ruido estocástico. De la gráfica también se puede observar que la precisión de la convergencia es de 10^{-5} y que las trayectorias son suaves. Por otro lado la Figura 21 muestra la trayectoria del control 4.26, de la gráfica puede apreciarse que el control permanece apagado por aproximadamente 0,5s para permitir que el observador se estabilice de lo contrario la magnitud del control puede alcanzar magnitudes que harán que el sistema diverja. La magnitud de la trayectoria del control $u_d(t)$ muestra que el algoritmo puede ser implementado en aplicaciones prácticas.

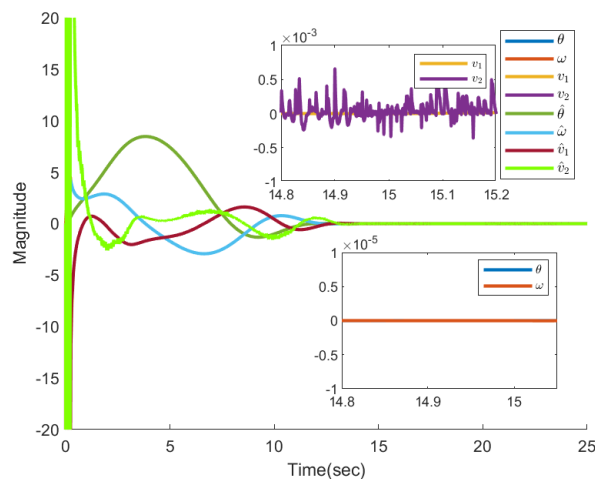


Figura 20: Convergencia de los estados del sistema (4.30) y los estimados producidos por el observador (4.23) al origen, en presencia de perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos.

Finalmente, la Figura 22 muestra la trayectoria del control $\chi(t)$ contra la perturbación $\xi(t)$ y el ruido estocástico de magnitud σ . La gráfica muestra que verdaderamente el control $\chi(t)$ compensa la perturbación y el ruido desde $t = t_{fs}$. Esta compensación se prolonga para todo $t \geq t_{fs}$, lo cual asegura que los estados del sistema se mantendrán en el origen, lo cual se observa de la Figura 20.

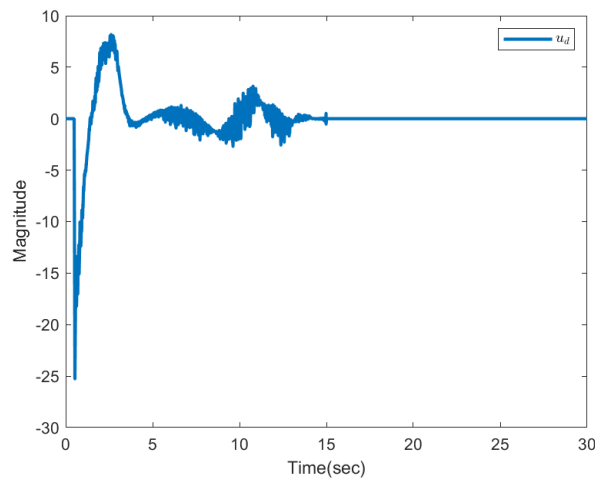


Figura 21: Trayectoria de la señal de control u_d basada en los estimados producidos por el observador (4.23).

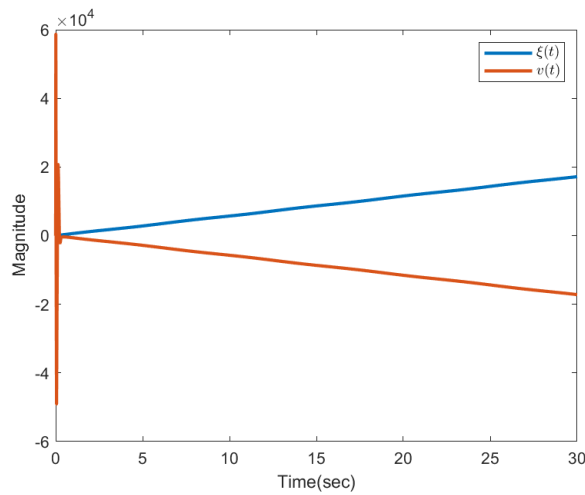


Figura 22: Trayectoria de la señal de control $\chi(t)$, basado en los estimados producidos por el observador (4.23) contra la perturbación $\xi(t) = K_5 u_q = 4024,14(0,1t + 0,001\cos(10t))$ y el ruido estocástico con difusión $v_2^{0,75}$.

4.5 CONCLUSIONES

Los resultados mostrados en esta sección indican que un algoritmo de control que contenga términos de la forma $u(x, t) = \eta \frac{x}{t_f - t}$ permite forzar todos los estados del sistema en tiempo predefinido y es robusto en contra de perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos. A diferencia del algoritmo de control que utiliza términos exponenciales, el algoritmo de esta sección permite tener trayectorias de los estados y de la señal de control

mas suaves y con menor magnitud. Los resultados también muestran que el observador propuesto, permite recuperar los estados del sistema en tiempo predefinido y que las salidas del observador pueden ser utilizadas por el algoritmo de control para generar la señal de control. Tanto en este capítulo como en el anterior se supuso que los sistemas están afectados por perturbaciones y ruidos estocásticos están acopladas. Así que los resultados no necesariamente son válidos para el caso cuando las perturbaciones y ruidos no están acopladas. El siguiente capítulo analiza esta situación y propone algoritmos de control para sistemas afectados por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos acoplados y no acoplados.

CONTROL EN TIEMPO PREDEFINIDO DE SISTEMAS CON PERTURBACIONES ACOPLADAS Y NO ACOPLADAS

Cuando se diseñan algoritmos de control robustos las perturbaciones y ruidos afectando el sistema pueden estar acoplados o no acoplados. Una perturbación es acoplada cuando esta entra al sistema a través de la misma derivada que lo hace la señal de control. De otra manera la perturbación es no acoplada. Esta sección analiza el diseño de algoritmos de control robustos para sistemas de este tipo. En el capítulo anterior se demostró que un algoritmo de control que tiene la forma $u(x, t) = \eta \frac{x}{t_f - t}$ permite tener trayectorias de los estados del sistema y de la señal de control más suaves y con menos magnitud. Estas características son explotadas en el diseño de los algoritmos de control presentados en este capítulo. La sección está dividida en dos partes, la primera analiza el diseño de algoritmos de control para sistemas cuyos estados son completamente medibles, la segunda parte analiza el diseño de algoritmos de control para sistemas que solo tienen un estado medible. En ambos casos se suponen los siguientes escenarios:

1. El sistema no es afectado por perturbaciones deterministas o ruidos estocásticos.
2. El sistema es afectado por perturbaciones deterministas.
3. El sistema es afectado por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos.

Cada parte de este capítulo demuestra la eficiencia del algoritmo diseñado utilizando simulaciones numéricas aplicadas sobre el modelo dinámico de un motor de corriente directa con escobillas.

5.1 ESTABILIZACIÓN, EN TIEMPO PREDEFINIDO, DE UN SISTEMA CON ESTADOS COMPLETAMENTE MEDIBLES

En esta sección se analiza el diseño de un algoritmo de control para un sistema cuyos estados son completamente medibles. Para el análisis se considera el modelo dinámico de un motor con escobillas de CD, mostrado en la Figura 23, el cual se presenta en la ecuación 5.1

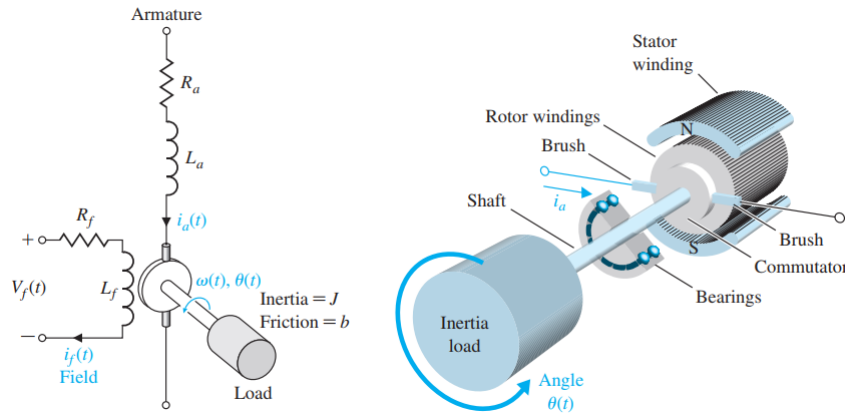


Figura 23: Diagrama de un motor con escobillas de CD [2].

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\
 d\omega &= \frac{1}{J} (-b\omega + K_m i_a + d_1) dt + \frac{1}{J} (\sigma_1(t, \omega(t)) dW_1(t)) \\
 di_a &= \frac{1}{L_a} (-R_a i_a - K_b \omega + V_a + d_2) dt + \frac{1}{L_a} (\sigma_2(t, i_a(t)) dW_2(t))
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

En la ecuación 5.1, θ (posición angular), ω (velocidad angular) e i_a (corriente en los devanados) representan los estados del sistema, V_a (el voltaje de armadura) representa una señal de control. Se asume que las variables mencionadas anteriormente son todas dependientes del tiempo. Por otro lado J es la inercia del rotor, K_m es una constante del motor, K_b es la fuerza electromotriz del motor, R_a es la resistencia de armadura, L es la inductancia de armadura y b es el coeficiente de fricción; se asume que estos parámetros se mantienen constantes durante la operación del motor. Las variables d_1 y d_2 representan perturbaciones deterministas no acopladas y acopladas, respectivamente, que deben satisfacer la condición de Lipschitz con constantes L_1 y L_2 respectivamente. Los términos $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos independientes de Wiener cuya derivada débil en promedio cuadrático son ruidos blancos Gaussianos.

5.1.1 SISTEMA SIN PERTURBACIÓN

DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta sección se analiza el diseño de un algoritmo de control para un motor con escobillas de CD que no está sujeto a perturbaciones ni ruidos de ningún tipo. El modelo de este motor se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{J}(-b\omega + K_m i_a) \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{L_a}(-R_a i_a - K_b \omega + V_a)\end{aligned}\tag{5.2}$$

El problema en esta sección es diseñar un algoritmo de control que lleve todos los estados del sistema 5.2 al origen en tiempo predefinido t_f , independientemente de las condiciones iniciales y se mantengan allí para todo $t \geq t_f$. El siguiente teorema establece las condiciones necesarias para este algoritmo de control.

Teorema 14. *Sean $\eta_1 > 1, \eta_2 > 2, \eta_3 > 3$. Entonces, la ley de control*

$$V_a = \begin{cases} (R_a i_a(t) + K_b \omega(t)) + L_a(-z_2 - \psi_3) + L_a \left(\frac{\partial i_{ad}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial i_{ad}}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial i_{ad}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial i_{ad}}{\partial t} \right), & 0 \leq t < t_f, \\ 0, & t \geq t_f. \end{cases}\tag{5.3}$$

forza todos los estados del sistema 5.2 al origen en tiempo predefinido t_f donde

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}\psi_1 &= \eta_1 \frac{\theta}{t_f - t}, \\
z_2 &= \omega - \omega_d, \\
\dot{z}_2 &= K_m z_3 - \theta - \psi_2, \\
\omega_d(\theta, t) &= -\psi_1, \\
\psi_2 &= \eta_2 \frac{z_2}{t_f - t}, \\
\psi_3 &= \eta_3 \frac{z_3}{t_f - t}, \\
i_{ad}(\theta, \omega, t) &= \frac{b}{K_m} \omega + \frac{J}{K_m} \left(-\theta - \psi_2 + \frac{\partial \omega_d}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right), \\
\frac{di_{ad}}{dt} &= \frac{\partial i_{ad}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial i_{ad}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial i_{ad}}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial i_{ad}}{\partial t}, \\
z_3 &= i_a - i_{ad}, \\
\dot{z}_3 &= \frac{di}{dt} - \frac{di_{ad}}{dt} = \frac{1}{L_a} (-R_a i_a - K_b \omega + V_a) - \frac{di_{ad}}{dt}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Demostración 7. Para la demostración del Teorema 14 utilizamos la técnica de backstepping. En primer lugar el algoritmo de control

$$\psi_1(\theta, t) = \begin{cases} \eta_1 \frac{\theta}{(t_f - t)}, & t_0 \leq t < t_f \\ 0, & t \geq t_f \end{cases} \tag{5.5}$$

forza el estado del sistema

$$\dot{\theta} = -\psi_1, \theta(t_0) = \theta_0 \tag{5.6}$$

al origen en tiempo predefinido t_f independientemente del estado inicial θ_0 , [92].

Ahora, se propone la siguiente ecuación de Lyapunov $V_3(\theta, z_2, z_3) = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2$ cuya derivada da como resultado

$$\dot{V}_3 = \theta\dot{\theta} + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3 \tag{5.7}$$

después de sustituir $\dot{\theta}$, \dot{z}_2 y \dot{z}_3 se obtiene la siguiente ecuación

$$\dot{V}_3 = \theta(z_2 - \psi_1) + z_2(z_3 - \theta - \psi_2) + z_3 \left(\frac{1}{L_a} (-R_a i_a - K_b \omega + V_a) - \frac{di_{ad}}{dt} \right) \tag{5.8}$$

lo cual muestra que V_a debe tener la forma mostrada en la ecuación 5.3. Esto se observa al substituir V_a en la ecuación anterior, lo cual lleva a

$$\dot{V}_3 = -\theta\psi_1 - z_2\psi_2 - z_3\psi_3 = -\eta_1\frac{\theta^2}{t_f - t} - \eta_2\frac{z_2^2}{t_f - t} - \eta_3\frac{z_3^2}{t_f - t}. \quad (5.9)$$

Finalmente, haciendo que $\eta = 2 \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ se obtiene la desigualdad

$$\dot{V}_3 = -\eta_1\frac{\theta^2}{t_f - t} - \eta_2\frac{z_2^2}{t_f - t} - \eta_3\frac{z_3^2}{t_f - t} \leq -\frac{\eta}{t_f - t} \left(\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 \right) = -\frac{\eta}{t_f - t} V_3. \quad (5.10)$$

Se puede observar que la ecuación 5.10 tiene la misma forma que la ecuación 5.6 entonces, $V_3(\theta, z_2, z_3)$ converge al origen en tiempo predefinido t_f . Esto a su vez implica que todos los estados del sistema 5.2 convergen al origen en tiempo predefinido t_f también.

DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta sección muestra el desempeño del algoritmo de control mostrado en la ecuación 5.3. Los parámetros del motor se muestran en la Tabla 5. El tiempo de convergencia deseado $t_f = 5s$, las condiciones iniciales son $x_0 = [\theta_0, \omega_0, i_{a0}] = [1, 0, 2]$, los valores de η_i son $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 10$. La discretización de la simulación es de 10^{-3} . Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 24 y 25.

Constant	Value	Unit
K_b	0,001	A/rad
K_m	0,001	Nm/A
L_a	0,1	H
R_a	2	Ω
b	0,003	Nms/rad
J	0,005	Nms ² /rad

Tabla 5: Parámetros del motor.

La Figura 24 muestra la trayectoria de los estados del sistema 5.2 al origen. De la figura se observa que el algoritmo de control diseñado es capaz de llevar los estados del sistema al origen en tiempo predefinido de 5s. El acercamiento mostrado en la esquina inferior derecha de la Figura 24 muestra que la precisión de convergencia es de 10^{-12} .

La Figura 25 muestra la trayectoria de la señal de control dada por la ecuación 5.3. La Figura muestra que la magnitud máxima de esta señal es de 80V lo cual se presenta al inicio de la simulación haciendo que el algoritmo pueda ser aplicado de manera práctica. También se observa que la trayectoria de la señal de control es suave. Por último se observa

que aunque el control ha sido apagado en $t_f = 5s$ los estados del sistema permanecen en el origen, tal como lo indica el Teorema 14, suponiendo que no hay perturbaciones.

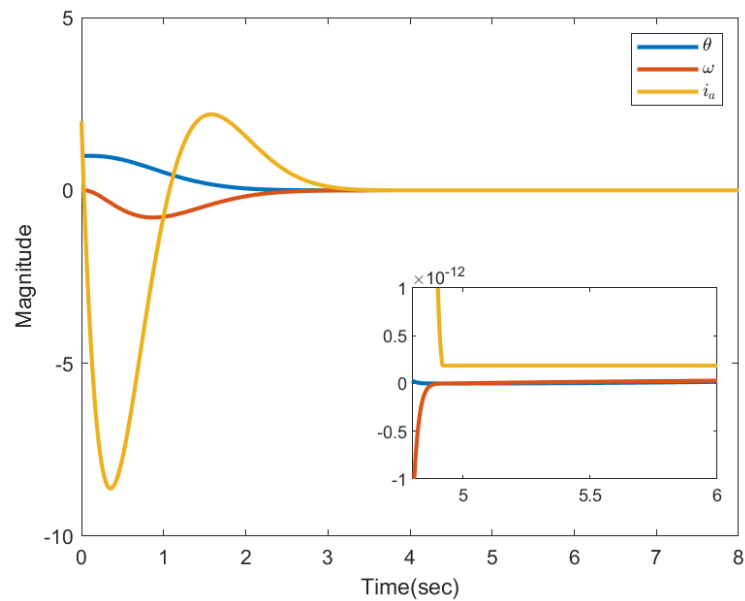


Figura 24: Convergencia de los estados del sistema (5.2) al origen.

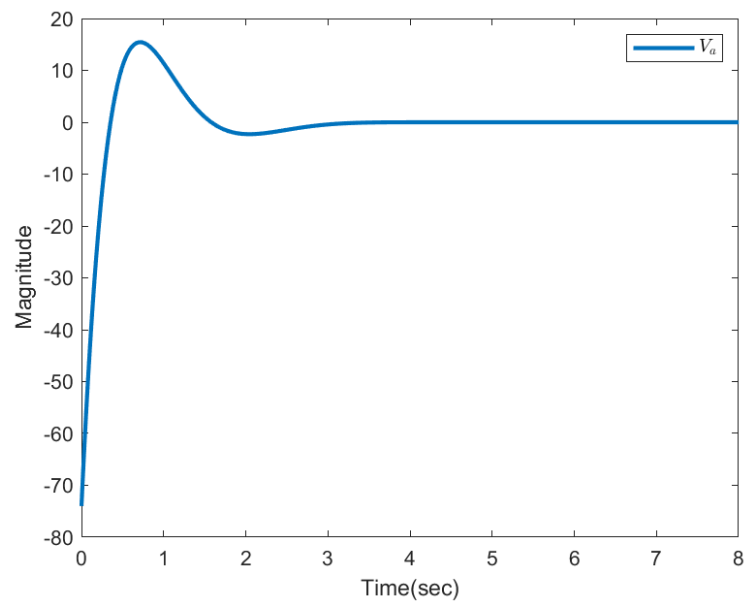


Figura 25: Trayectoria de la señal de control (5.3).

5.1.2 SISTEMA CON PERTURBACIONES DETERMINISTAS ACOPLADAS Y NO ACOPLADAS

DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta sección analiza el diseño de un algoritmo de control robusto que lleva los estados de un sistema sujeto a perturbaciones deterministas acopladas y no acopladas al origen en tiempo predefinido. El sistema para el cual se diseña el algoritmo de control está dado por la ecuación 5.11:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega(t), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{J} (-b\omega(t) + K_m i_a(t) + d_1(t)), \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{L_a} (-R_a i_a(t) - K_b \omega(t) + V_a(t) + d_2(t)).\end{aligned}\tag{5.11}$$

las perturbaciones $d_1(t)$ y $d_2(t)$ satisfacen la condición de Lipschitz con constantes L_1 y L_2 respectivamente. En este caso se observa que las perturbaciones están entrando a través de las ecuaciones de velocidad y corriente, esto se debe a cambios en torque debido a la carga y variaciones de voltaje debido a la fuente de alimentación. El siguiente teorema establece las condiciones para el diseño del algoritmo de control.

Teorema 15. Sean $\omega_d(t)$ e $i_{ad}(t)$ entradas de control virtual deseables definidas por las ecuaciones en 5.12

$$\begin{aligned}\omega_d(t) &= -\psi_1 \\ i_{ad}(t) &= \frac{b}{K_m} \omega(t) + \frac{\chi_1(t)}{K_m} + \frac{J}{K_m} \left(-\theta - \psi_2 - \frac{d\psi_1}{dt} \right)\end{aligned}\tag{5.12}$$

y $\eta_1 > 1$, $\eta_2 > 2$, $\eta_3 > 3$. Entonces la ley de control

$$V_a = \begin{cases} (R_a i_a(t) + K_b \omega(t)) + \chi_2(t) + L_a \left(-\frac{K_m}{J} z_2 - \psi_3 \right) \\ + L_a \left(\frac{\partial i_{ad}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial i_{ad}}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial i_{ad}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial i_{ad}}{\partial t} \right), & 0 \leq t < t_f, \\ \chi_2(t), & t \geq t_f. \end{cases}\tag{5.13}$$

donde

$$\chi_i(t) = \begin{cases} -\lambda_{i,1} |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t)) - \lambda_{i,2} |s_i(t)|^{p_i} \text{sign}(s_i(t)) \\ -\alpha_i \int_{t_0}^t \text{sign}(s_i(t)) ds_i - \eta_{si} \frac{s_i(t)}{(t_f-t)}, & 0 \leq t < t_{fc}, \\ -\lambda_{i,1} |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t)) - \lambda_{i,2} |s_i(t)|^{p_i} \text{sign}(s_i(t)) \\ -\alpha_i \int_{t_0}^t \text{sign}(s_i(t)) ds_i, & t \geq t_{fc}, \end{cases} \quad (5.14)$$

y

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \omega(t) - r_1(t), & \dot{r}_1(t) &= i_{ad}(t) - \chi_1(t) \\ s_2(t) &= i_a(t) - r_2(t), & \dot{r}_2(t) &= V_a(t) - \chi_2(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

lleva todos los estados del sistema 5.11 al origen, en tiempo predefinido t_f a pesar de que haya perturbaciones afectando el sistema e independientemente de las condiciones iniciales, y los mantiene allí para todo $t \geq t_f$, si se cumplen las siguientes condiciones: $\eta_{s1}, \eta_{s2} > 1, \alpha_1 > L_1, \alpha_2 > L_2, \lambda_{11} > \sqrt{2\alpha_1}, \lambda_{21} > \sqrt{2\alpha_2}, \lambda_{12}, \lambda_{22} \geq 0$, y $p_1, p_2 > 1$.

En el Teorema 15, t_f representa el tiempo de convergencia deseado para los estados del sistema 5.11 mientras que $t_{fc} < t_f$ representa el tiempo de convergencia deseado para la señal de control auxiliar $\chi_i(t), i = 1, 2$. Además las variables $\psi_i, i = 1, 2$ tienen la misma forma que las variables en 5.4.

Demostración 8. Para la demostración del Teorema 15, comenzamos transformando las dos primeras ecuaciones del sistema 5.11 introduciendo las variables $z_2 = \omega - \omega_d = \omega + \psi_1$. Al tomar la derivada de z obtenemos el sistema transformado:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= z_2 - \psi_1 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \frac{1}{J} (-b\omega(t) + K_m i_a(t) + d_1(t)) + \frac{d\psi_1}{dt} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ahora, se propone la ecuación de Lyapunov $V_2(\theta, z_2) = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}z_2^2$ cuya derivada es $\frac{dV_2}{dt} = \theta\dot{\theta} + z_2\dot{z}_2$. Al sustituir 5.16 en la derivada anterior se obtiene la ecuación 5.17

$$\frac{dV_2}{dt} = \theta(z_2 - \psi_1) + z_2 \left(\frac{1}{J} (-b\omega(t) + K_m i_a(t) + d_1(t)) + \frac{d\psi_1}{dt} \right). \quad (5.17)$$

eso quiere decir que i_a debe tener la forma mostrada en 5.12. Al sustituir i_a en 5.17 se obtiene

$$\frac{dV_2}{dt} = -\theta\psi_1 - z_2\psi_2 + z_2 \frac{\chi_1 + d_1}{J} \quad (5.18)$$

utilizando los resultados del Teorema 2 en [92] la igualdad $s_1(t) = \dot{s}_1(t) = 0$ es válida para $t \geq t_{fc}$, lo cual implica que $\dot{s}_1(t) = \dot{\omega} - \dot{r}_1$ por lo tanto, $0 = \dot{\omega} - \dot{r}_1 = i_{ad} + \frac{d_1}{J} - i_{ad} + \frac{\chi_1}{J}$ para $t \geq t_{fc}$. Así, la igualdad $\chi_1 = -d_1$ es válida para $t \geq t_{fc}$, demostrando que χ_1

efectivamente compensa la perturbación desacoplada $d_1(t)$ a partir de $t = t_{fc}$. Entonces, la ecuación 5.17 obtiene la forma $\frac{dV_2}{dt} = -\theta\psi_1 - z_2\psi_2$ a partir de $t = t_{fc}$, así V_2 converge al origen en tiempo predefinido t_f tomando en cuenta las condiciones del Teorema 14.

Para continuar, se hace la transformación completa del sistema 5.11 utilizando las variables $z_2 = \omega - \omega_d$, $z_3 = i_a - i_{ad}$, donde ω_d y i_{ad} son los controles virtuales definidos en 5.12, entonces el sistema 5.11 transformado tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= z_2 - \psi_1 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \frac{K_m}{J}z_3 - \theta - \psi_2 + \frac{\chi_1 + d_1}{J} \\ \frac{dz_3}{dt} &= \frac{1}{L_a}(-R_a i_a(t) - K_b \omega(t) + V_a(t) + d_2(t)) - \frac{di_{ad}}{dt}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Utilizando la función de Lyapunov $V_3(\theta, z_2, z_3) = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2$, cuya derivada es $\frac{dV_3}{dt} = \theta\dot{\theta} + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3$, y después de sustituir 5.19 se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{dV_3}{dt} &= -\theta\psi_1 + z_2\left(\frac{K_m}{J}z_3 - \psi_2 + \frac{\chi_1 + d_1}{J}\right) \\ &\quad + z_3\frac{1}{L_a}(-R_a i_a(t) - K_b \omega(t) + V_a(t) + d_2(t)) - \frac{di_{ad}}{dt}\end{aligned}\quad (5.20)$$

Al sustituir el control mostrado en 5.13 la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dV_3}{dt} = -\theta\psi_1 - z_2\psi_2 - z_3\psi_3 + z_2\frac{\chi_1 + d_1}{J} + z_3\frac{\chi_2 + d_2}{L_a}.\quad (5.21)$$

y ya que $\chi_1 = -d_1$ es válida para $t \geq t_{fc}$ entonces

$$\frac{dV_3}{dt} = -\theta\psi_1 - z_2\psi_2 - z_3\psi_3 + z_3\frac{\chi_2 + d_2}{L_a}\quad (5.22)$$

Como las condiciones del Teorema 2 en [92] son válidas a partir de $t = t_{fc}$, la igualdad $s_2(t) = \dot{s}_2(t) = 0$ es válida para $t \geq t_{fc}$, lo cual implica que $\dot{s}_2(t) = \frac{di_{ad}}{dt} - \dot{r}_2$ por lo tanto, $0 = \frac{di_{ad}}{dt} - \dot{r}_2 = V_a + d_2 - V_a + \chi_2$ para $t \geq t_{fc}$. De esa manera la igualdad $\chi_2 = -d_2$ es válida para $t \geq t_{fc}$, lo cual demuestra que χ_2 compensa de manera efectiva la perturbación acoplada $d_2(t)$ después de $t = t_{fc}$. Entonces la ecuación 5.22 toma la siguiente forma

$$\frac{dV_3}{dt} = -\theta\psi_1 - z_2\psi_2 - z_3\psi_3 = -\eta_1\frac{\theta^2}{t_f - t} - \eta_2\frac{z_2^2}{t_f - t} - \eta_3\frac{z_3^2}{t_f - t}\quad (5.23)$$

Finalmente, haciendo que $\eta = 2 \min \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ se obtiene la igualdad

$$\frac{dV_3}{dt} = -\frac{\eta_1}{t_f - t} \frac{\theta^2}{2} - \frac{\eta_2}{t_f - t} \frac{z_2^2}{2} - \frac{\eta_3}{t_f - t} \frac{z_3^2}{2} = -\frac{\eta}{t_f - t} V_3 \quad (5.24)$$

Se observa que la ecuación anterior tiene la misma forma que la ecuación 5.6. Lo anterior implica que $V_3(\theta, z_2, z_3)$ converge al origen en tiempo predefinido t_f , esto a su vez implica que todos los estados del sistema 5.11 convergen al origen en tiempo predefinido t_f también.

DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta sección demuestra la eficiencia del algoritmo propuesto en la ecuación 5.13, utilizando el sistema propuesto en la ecuación 5.11. Los parámetros del motor se muestran en la Tabla 5 y el tiempo de convergencia deseado junto con las condiciones iniciales son de $t_f = 5\text{sec}$ y $x_0 = [\theta_0, \omega_0, i_{a0}] = [1, 0, 2]$ respectivamente. Los valores de η_i son $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 10$ los cuales son idénticos a la sección anterior y permiten tener una referencia de comparación. El tiempo de convergencia asignado al compensador de la perturbación es de $t_{fc} = 2\text{sec}$ lo cual es menor a t_f , sus valores de ganancia son $\eta_{s1} = \eta_{s2} = 20$. Los valores para las perturbaciones no acoplada y acoplada es $d_1(t) = 0,02 \sin(0,1t)\text{rad/s}$ y $d_2(t) = 0,004 + 0,004 \sin(t)\text{A/s}$ respectivamente, lo cual satisface la condición de Lipschitz con constantes $L_1 = 0,002$ y $L_2 = 0,004$, respectivamente. Finalmente, para satisfacer las condiciones del Teorema 15 seleccionamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,1$, $\lambda_{11} = \lambda_{21} = 0,55$, $\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0,01$ y $p_1 = p_2 = 1,5$. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 26 y 27.

La Figura 26 muestra que el algoritmo de control propuesto en 5.13 es capaz de forzar todos los estados del sistema 5.11 al origen en tiempo predefinido de $t_f = 5\text{sec}$, a pesar de las perturbaciones desacoplada $d_1(t)$ y acoplada $d_2(t)$ que están afectando al sistema. El tiempo de convergencia puede adelantarse a menos de 5sec si se incrementan los valores de η_i pero esto trae como consecuencia el incremento de la magnitud del control. De la figura también se aprecia que la precisión de convergencia decreció a $\times 10^{-6}$, cuando se compara contra $\times 10^{-12}$ en el caso tratado en la sección anterior donde no había perturbaciones. La razón de esta diferencia radica en las perturbaciones afectando al sistema. Otra cosa que puede observarse en la figura 26 es que la magnitud del control $V_a(t)$ permanece casi igual que en el caso sin perturbación tratado en la sección anterior (ver la Figura 25) esto se debe a que la única función del compensador $\chi_i(t)$ es compensar la perturbación $d_i(t)$. También se observa que las trayectorias tanto de los estados del sistema 5.11 como la del control 5.13 son suaves y la magnitud del control $V_a(t)$ permanece dentro de valores que pueden ser aplicados de manera práctica.

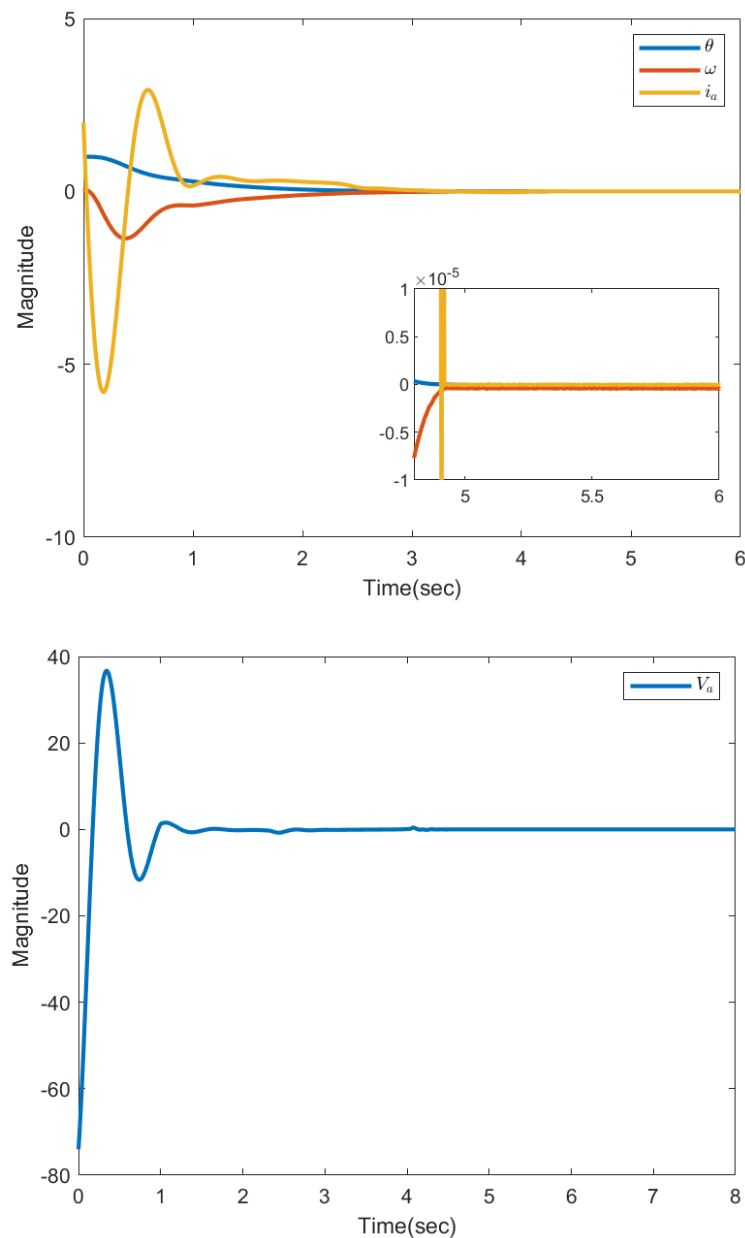


Figura 26: Figura superior: Convergencia de los estados del sistema (5.11) al origen. Figura inferior: Trayectoria del algoritmo de control (5.13).

Finalmente la Figura 27 muestra las trayectorias de la perturbación d_i contra χ_i , $i = 1, 2$, demostrando que el compensador χ_i contrarresta perfectamente a la perturbación d_i . Es necesario tener en cuenta que el control χ_i debe permanecer activo para todo $t \geq t_{fc}$ con la finalidad de seguir contrarrestando las perturbaciones acoplada y no acoplada y así mantener los estados del sistema en el origen.

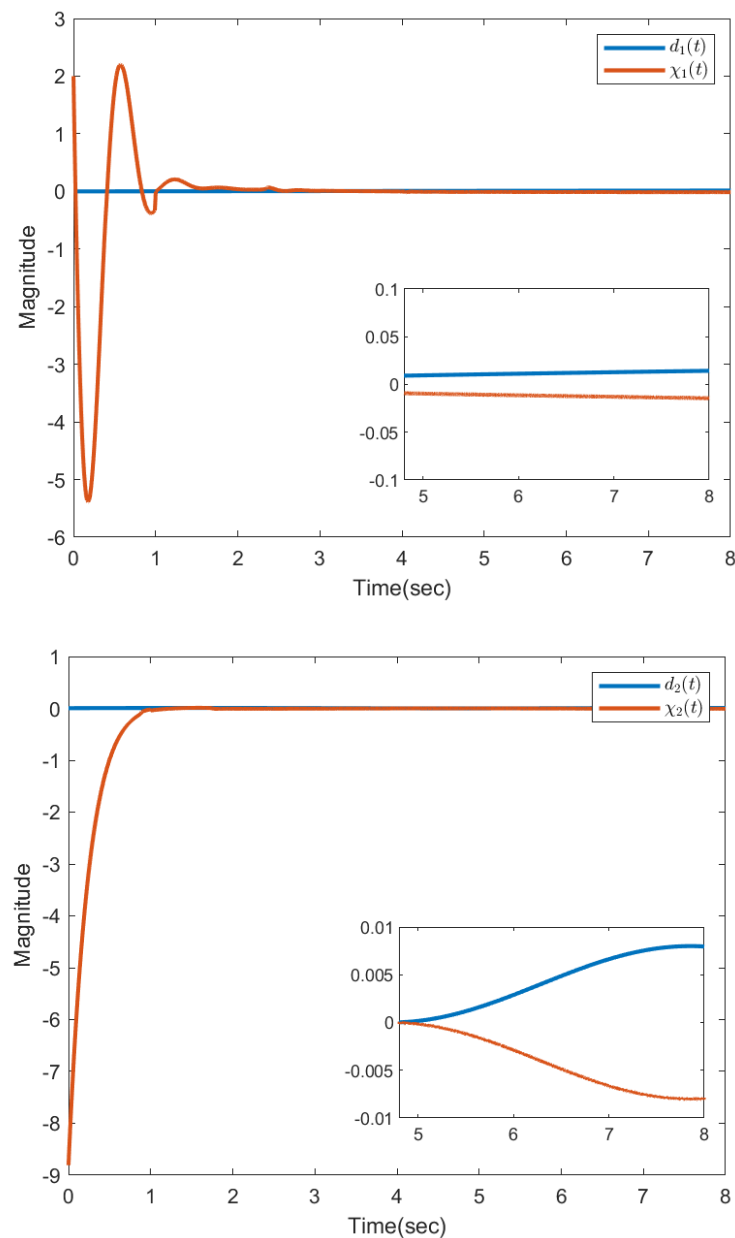


Figura 27: Figura superior: Trayectorias de la perturbación $d_1(t)$ y el compensador $\chi_1(t)$ (5.14). Figura inferior: Trayectorias de la perturbación $d_2(t)$ y el compensador $\chi_2(t)$ (5.14).

5.1.3 SISTEMA CON PERTURBACIONES DETERMINISTAS Y RUIDOS ESTOCÁSTICOS ACOPLADAS Y NO ACOPLADAS

DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

En esta sección se diseña un algoritmo de control robusto que lleva todos los estados de un sistema, afectado por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos no acopla-

dos y acoplados, al origen en tiempo predefinido. Para llevar cabo el diseño de utiliza el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega(t), \\ d\omega &= \frac{1}{J} (-b\omega(t) + K_m i_a(t)) dt + \frac{1}{J} (d_1(t)dt + \sigma_1(t, \omega(t))dW_1(t)), \\ di_a &= \frac{1}{L_a} (-R_a i_a(t) - K_b \omega(t) + V_a(t)) dt + \frac{1}{L_a} (d_2(t)dt + \sigma_2(t, i_a(t)) dW_2(t)). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Las perturbaciones $d_1(t)$ y $d_2(t)$ mostradas en la ecuación 5.25 deben satisfacer la condición de Lipschitz con constantes L_1 y L_2 , respectivamente. Por otro lado los términos $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos de Wiener independientes, cuyas derivadas débiles en promedio cuadrático son ruidos Gaussianos blancos. El siguiente teorema presenta las condiciones bajo las cuales existe un control robusto que conduce todos los estados del sistema 5.25 al origen en tiempo predefinido.

Teorema 16. *Asuma que las condiciones del Teorema 15 se cumplen. Entonces el algoritmo de control 5.13 forza todos los estados del sistema 5.25 al origen en tiempo predefinido t_f , en promedio ρ , a pesar de las perturbaciones deterministas y ruidos Gaussianos blancos con difusión $\sigma_1(t) = |\omega(t)|^{r_1}$, $\sigma_2(t) = |i_a(t)|^{r_2}$, respectivamente, afectando al sistema e independientemente de las condiciones iniciales y los mantiene allí para todo $t \geq t_f$, si se cumplen las siguientes condiciones: $\eta_{s1}, \eta_{s2} > 1$, $\alpha_1 > L_1$, $\alpha_2 > L_2$, $\lambda_{11} > \sqrt{2\alpha_1}$, $\lambda_{21} > \sqrt{2\alpha_2}$, $\lambda_{12}, \lambda_{22} \geq 0$, y $p_1, p_2 > 1$, $2\lambda_{i1} > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_{i2} > \rho - 1 > 0$, y $\frac{3}{2} \leq 2r_i \leq (1 + p)$*

Demostración 9. *Utilizando los resultados mostrados en el Teorema 3 de [93], las condiciones del teorema implican que la variable $s_i(t)$, $i = 1, 2$, converge al origen en tiempo predefinido t_{fc} , en promedio ρ , esto a su vez resulta en $s_i(t) = \dot{s}_i(t) = 0$, en promedio ρ para $t \geq t_{fc}$. De acuerdo a la definición de \dot{s} en 5.15, esto implica que $\dot{s}_1(t) = \frac{d\omega}{dt} - \frac{dr_1}{dt} = 0$ y $\dot{s}_2(t) = \frac{di_a}{dt} - \frac{dr_2}{dt} = 0$ para todo $t \geq t_{fc}$ por lo tanto, $(i_a + d_1) dt + \sigma_1(\omega)dW_1(t) - (i_a - \chi_1) dt = 0$ y $(V_a + d_2) dt + \sigma_2(i_a)dW_2(t) - (V_a - \chi_2) dt = 0$. Así, $\chi_i(t)dt$, $i = 1, 2$, compensa las perturbaciones deterministas $d_i(t)dt$ y los ruidos estocásticos $\sigma_i dW_i(t)$ en promedio ρ . Además, ya que las perturbaciones deterministas $d_i(t)dt$ y los ruidos estocásticos $\sigma_i dW_i(t)$ han sido compensados entonces, de acuerdo al Teorema 16 el algoritmo de control 5.13 forza los estados del sistema hacia el origen en tiempo predefinido en promedio ρ . Finalmente, ya que $\chi_i(t)dt$ compensa las perturbaciones $d_i(t)dt$ y los ruidos estocásticos $\sigma_i dW_i(t)$ en promedio ρ para todo $t \geq t_{fc}$ entonces, todos los estados del sistema 5.25 permanecen en el origen también, después de su convergencia. ■*

DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

La eficiencia del algoritmo de control, mostrado en esta sección, es demostrada a través de una simulación utilizando el sistema 5.25. Los parámetros del motor se muestran en la Tabla 5 y el tiempo de convergencia deseado junto con las condiciones iniciales son de $t_f = 5\text{sec}$ y $x_0 = [\theta_0, \omega_0, i_{a0}] = [1, 0, 2]$ respectivamente. Con la finalidad de hacer comparación contra los resultados obtenidos en la sección anterior los valores de η_i son semejantes a los de las sección anterior, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 10$. El tiempo de convergencia asignado al compensador de la perturbación es de $t_{fc} = 2\text{sec}$ lo cual es menor a t_f , sus valores de ganancia son $\eta_{s1} = \eta_{s2} = 20$. Los valores para las perturbaciones no acoplada y acoplada es $d_1(t) = 0,02 \sin(0,1t)\text{rad/s}$ y $d_2(t) = 0,004 + 0,004 \sin(t)\text{A/s}$ respectivamente, lo cual satisface la condición de Lipschitz con constantes $L_1 = 0,002$ y $L_2 = 0,004$, respectivamente. Las difusiones de los ruidos estocásticos son $\sigma_1(t) = |\omega(t)|^{r_1}$, $\sigma_2(t) = |i_a(t)|^{r_2}$, donde $r_1 = r_2 = 1,1$. La potencia $\rho = 2$ corresponde a la convergencia en promedio cuadrático. Finalmente, para satisfacer las condiciones del Teorema 16 seleccionamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,1$, $\lambda_{11} = \lambda_{21} = 0,55$, $\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0,01$ y $p_1 = p_2 = 1,5$. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 28-31.

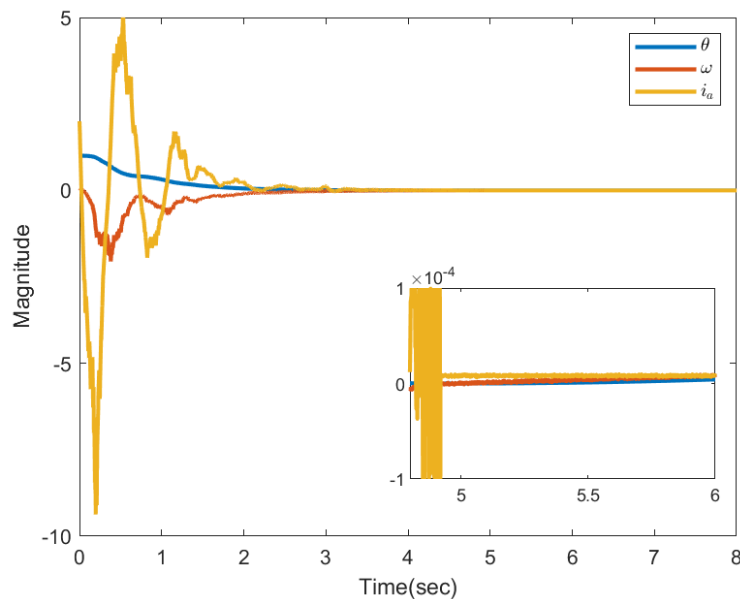


Figura 28: Convergencia de los estados del sistema (5.25) al origen.

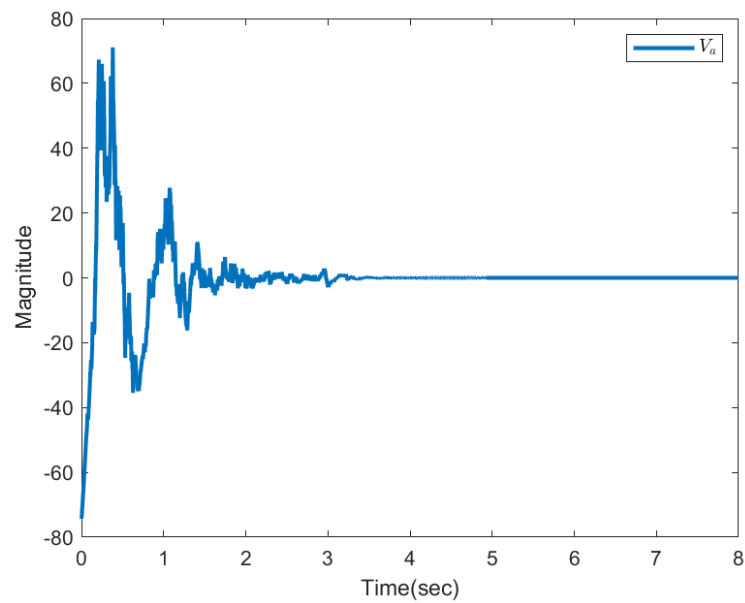


Figura 29: Trayectoria de la señal de control dada por el algoritmo (5.13).

Los resultados obtenidos en la Figura 28 demuestran que el algoritmo de control 5.13 es capaz de llevar todos los estados del sistema 5.25 al origen en tiempo predefinido de $t_f = 5s$, a pesar de que el sistema es afectado por perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos. Por otro lado la Figura 29 muestra que la magnitud de la señal de control permanece dentro de valores aceptables.

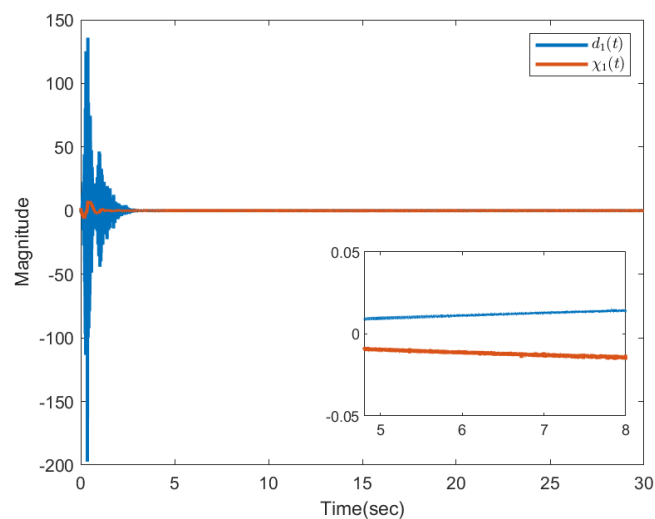


Figura 30: Trayectoria de la perturbación y el ruido $d_1(t) + \sigma_1(t, \omega(t)) dW_1$ contra el compensador $\chi_1(t)$ 5.14.

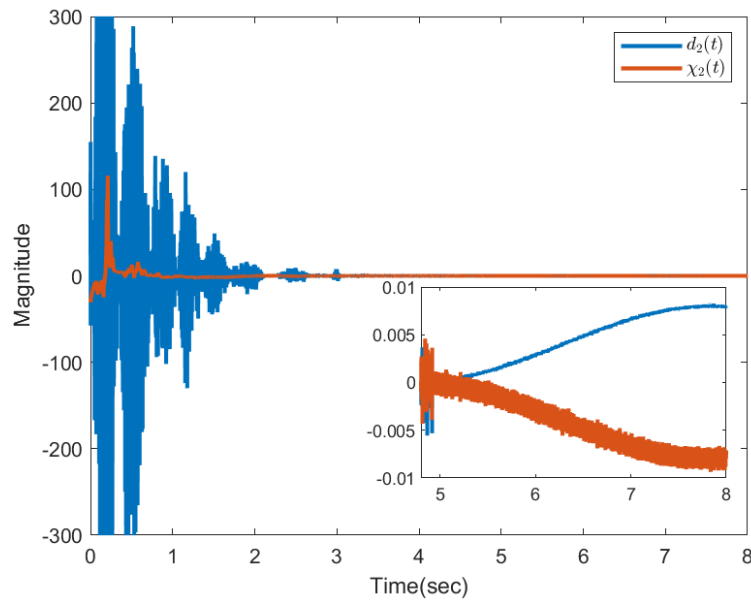


Figura 31: Trayectoria de la perturbación y el ruido $d_2(t) + \sigma_2(t, i_a(t)) dW_2$ contra el compensador $\chi_2(t)$ 5.14.

Finalmente, las Figuras 30 y 31 muestran que los compensadores χ_i contrarrestan los efectos de las perturbaciones deterministas y ruidos estocásticos $d_1(t) + \sigma_1(t, \omega(t)) dW_1$ y $d_2(t) + \sigma_2(t, i_a(t)) dW_2$. De las mismas figuras también se observa que a diferencia del control $V_a(t)$, el cual permanece apagado desde $t = t_f$, ambos controles χ_i necesitan permanecer encendidos para todo $t \geq t_{fc}$ con la finalidad de seguir contrarrestando las perturbaciones y ruidos afectando el sistema y así mantener todos los estados del sistema 5.25 en el origen.

5.2 ESTABILIZACIÓN, EN TIEMPO PREDEFINIDO, DE UN SISTEMA CON SOLO UN ESTADO MEDIBLE

En la sección anterior se supuso que todos los estados del sistema eran completamente medibles. Esta sección muestra el diseño de algoritmos de control robustos en tiempo predefinido para sistema donde solo un estado del sistema es medible. En este caso es necesario utilizar un observador convergente en tiempo predefinido para estimar los estados del sistema no medibles. Los estados estimados a través del observador se utilizan en lugar de los estados del sistema original para diseñar el algoritmo de control. Durante todo el análisis se utilizará el modelo del motor de corriente directa mostrado en la ecuación 5.1 pero en esta ocasión el sistema se muestra en forma de cadena de integradores

[136]. De la ecuación se observa una nueva variable, $w(t)$, la cual permite hacer la transformación a cadena de integradores y puede considerarse como la aceleración angular del sistema. También, al comparar la ecuación 5.26 con la ecuación 5.1 se observa la ecuación $y(t) = \theta(t)$ la cual indica que solo un estado del sistema es medible, el cual es la posición angular.

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= w(t), \\
 \dot{w}(t) &= - \left(\frac{K_b K_m}{J L_a} + \frac{R_a b}{J L_a} \right) \omega(t) - \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) w(t) + \frac{K_m}{J L_a} V_a(t) \\
 &\quad + \frac{K_m}{J L_a} \left(\frac{R_a}{K_m} d_1(t) + d_2(t) \right) + \frac{1}{J} \dot{d}_1(t), \\
 y(t) &= \theta(t).
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

En la siguiente subsección se muestra un observador convergente en tiempo predefinido que permite recuperar todos los estados del sistema no medibles.

5.2.1 SISTEMA SIN PERTURBACIÓN

DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta primera subsección introduce un observador convergente en tiempo predefinido que puede utilizarse para recuperar todos los estados no medibles de un sistema. Para introducir el problema supongamos que tenemos un sistema como el mostrado en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= w(t) \\
 \dot{w}(t) &= - \left(\frac{K_b K_m}{J L_a} + \frac{R_a b}{J L_a} \right) \omega(t) - \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) w(t) \\
 &\quad + \frac{K_m}{J L_a} V_a(t) \\
 y(t) &= \theta(t)
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

La ecuación $y(t) = \theta(t)$ indica que el único estado medible del sistema es la posición angular. Así que es necesario estimar los estados ω y w del sistema. Para eso se utiliza el observador mostrado en 4.18 acoplado para el sistema 5.27.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}} &= \hat{\omega} - \mu_1 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma k_1 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_1} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_1} \right), \\
\dot{\hat{\omega}} &= \hat{w}_1 - \mu_2 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma^2 k_2 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_2} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_2} \right), \\
\dot{\hat{w}} &= -\mu_3 \frac{\hat{\theta} - y}{t_{fo} - t} - \gamma^3 k_3 \text{sign}(\hat{\theta} - y) \left(|\hat{\theta} - y|^{\alpha_3} + |\hat{\theta} - y|^{\beta_3} \right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

las variables $\hat{\theta}$, $\hat{\omega}(t)$, y $\hat{w}(t)$ representan los valores estimados de $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $w(t)$, respectivamente. El término t_{fo} representa el tiempo de convergencia deseado para el observador 5.28. Los valores de $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, 3$ y γ se asignan de acuerdo a la siguiente regla $\alpha_i = i\alpha - (i - 1)$, $\alpha \in [1 - \varepsilon_1, 1]$, $\varepsilon_1 > 0$ y $\beta_i = i\beta - (i - 1)$, $\beta \in [1, 1 + \varepsilon_2]$, $\varepsilon_2 > 0$, $i = 1, \dots, 3$, y $\gamma \geq 1$. Por último las ganancias k_1, k_2, k_3 son escogidas tal que la siguiente matriz es Hurwitz:

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

En el capítulo 4 se demostró que una vez que el observador ha recuperado los estados del sistema, prácticamente tenemos los estados del sistema original. Por lo tanto se puede utilizar el siguiente algoritmo de control

$$V_a = \begin{cases} \left(\left(\frac{K_b K_m}{J L_a} + \frac{R_a b}{J L_a} \right) \hat{\omega}(t) + \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) \hat{w}(t) \right) + \frac{K_m}{J L_a} \left(-\hat{z}_2 + \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{\theta}} \left(\hat{z}_2 - \hat{\psi}_1 \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{z}_2} \left(\hat{z}_3 - \hat{\psi}_2 - \hat{\theta} \right) + \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial t} - \hat{\psi}_3 \right), & t_0 \leq t < t_f, \\ 0, & t \geq t_f, \end{cases} \tag{5.30}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{z}_2 &= \hat{\omega} - \hat{\omega}_d, \\
\hat{\omega}_d(\hat{\theta}, t) &= -\hat{\psi}_1, \\
\hat{\psi}_1 &= \eta_1 \frac{\hat{\theta}}{t_f - t}, \\
\hat{z}_3 &= \hat{w} - \hat{w}_d, \\
\hat{w}_d(\hat{\theta}, \hat{z}_2, t) &= -\hat{\theta} - \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial t} - \left(\hat{z}_2 - \hat{\psi}_1 \right) \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \hat{\theta}} - \hat{\psi}_2, \\
\hat{\psi}_2 &= \eta_2 \frac{\hat{z}_2}{t_f - t}, \\
\hat{\psi}_3 &= \eta_3 \frac{\hat{z}_3}{t_f - t}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

El desempeño del observador 5.28 y del algoritmo de control 5.30 se demuestran utilizando una simulación con el sistema 5.27. La Figura 32 muestra la configuración del sistema. Los valores utilizados en la simulación se muestran en la Tabla 6.

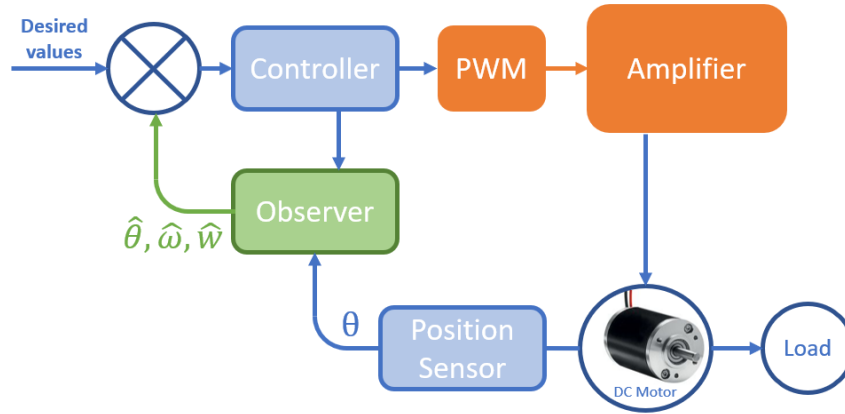


Figura 32: Diagrama de bloques para la implementación del algoritmo de control 5.30

Condición	Valor
x_0	$[5, 0, 2]$
μ	$[2, 2, 2]$
k	$[3, 3, 1]$
γ	20
η	$[10, 10, 10]$
t_f	5sec
t_{fo}	0,5sec

Tabla 6: Valores utilizados en la simulación.

La Figura 33 muestra la convergencia de los estados tanto del observador 5.28 como del sistema 5.27 al origen. De la figura se aprecia que el observador es capaz de recuperar los estados del sistema 5.27 en tiempo predefinido de $t_{fo} = 0,5s$. Además, se observa que la convergencia de los estados del sistema 5.27 ocurre en $t_f = 5s$. En la parte inferior derecha de la figura se muestra la precisión de convergencia la cual es de 10^{-12} , ya que el sistema no es afectado por perturbaciones ni ruidos. Por lo tanto se puede concluir que el algoritmo de control propuesto en 5.30 es capaz de llevar todos los estados del sistema 5.27 al origen en tiempo predefinido $t_f = 5s$.

Al observar la Figura 34 se nota que la magnitud del control mantiene valores que pueden ser implementados de manera práctica. También se observa que es necesario mantener el control apagado por cierto tiempo, esto con la finalidad de dar tiempo al

observador para estabilizarse y de esa manera evitar que la señal de control haga que los estados del sistema diverjan. Una vez que la señal de control ha sido habilitada se observa que la trayectoria del mismo es suave.

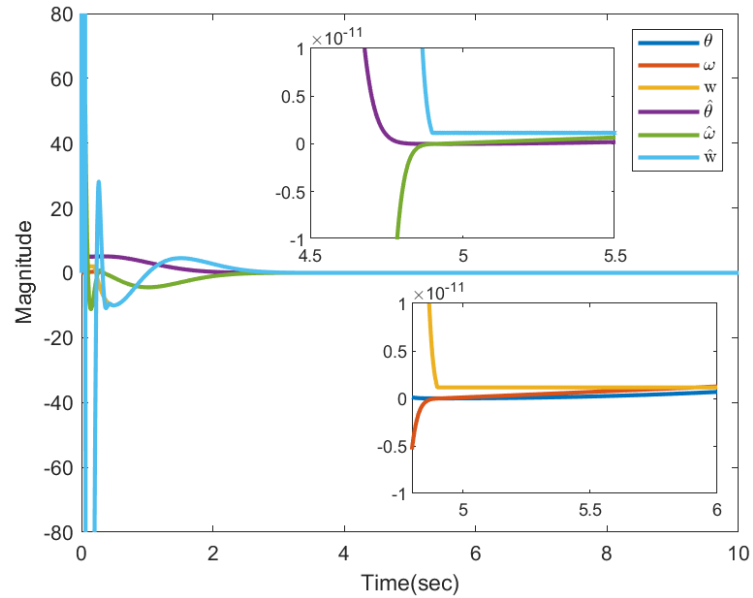


Figura 33: Convergencia de los estados del sistema (5.27) y los estados del observador (5.28) al origen.

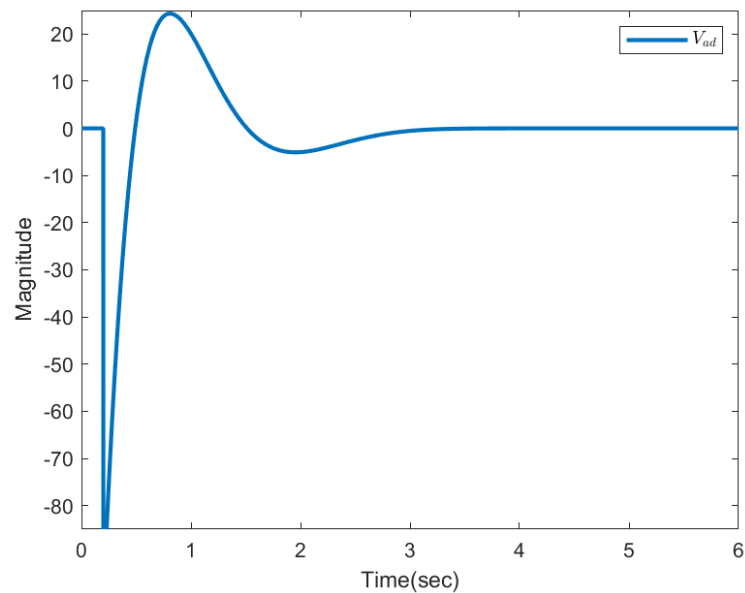


Figura 34: Trayectoria de la señal de control (5.30)

5.2.2 SISTEMA CON PERTURBACIONES DETERMINISTAS ACOPLADAS Y NO ACOPLADAS

DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

El propósito de esta sección es mostrar el diseño de un algoritmo de control que permita llevar todos los estados de un sistema, afectado por perturbaciones deterministas acopladas y no acopladas, al origen en tiempo predefinido independientemente de las condiciones iniciales. Para llevar a cabo el diseño se coloca el sistema en forma de cadena de integradores

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= w(t), \\
 \dot{w}(t) &= - \left(\frac{K_b K_m}{J L_a} + \frac{R_a b}{J L_a} \right) \omega(t) - \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) w(t) + \frac{K_m}{J L_a} V_a(t) \\
 &\quad + \frac{K_m}{J L_a} \left(\frac{R_a}{K_m} d_1(t) + d_2(t) \right) + \frac{1}{J} \dot{d}_1(t), \\
 y(t) &= \theta(t).
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Las perturbaciones $d_1(t)$, $d_2(t)$ y $\dot{d}_1(t)$ mostradas en la ecuación 5.32 deben satisfacer la condición de Lipschitz con constantes L_1 , L_2 y L_3 respectivamente. El siguiente teorema establece las condiciones para la existencia de un control robusto que lleve todos los estados del sistema 5.32 al origen en tiempo predefinido a pesar de las perturbaciones afectando al sistema y de las condiciones iniciales del sistema.

Teorema 17. Sean $\omega_d(t)$ e $i_{ad}(t)$ señales de control virtuales definidas por

$$\begin{aligned}
 \omega_d(t) &= -\psi_1, \\
 w_d(t) &= -\theta - \psi_2 - \frac{d\psi_1}{dt}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

y $\eta_1 > 1, \eta_2 > 2, \eta_3 > 3$. Entonces el algoritmo de control

$$V_a = \begin{cases} V_{ad} + \chi(t), & t_0 \leq t < t_f \\ \chi, & t \geq t_f \end{cases} \tag{5.34}$$

forza todos los estados del sistema 5.32 al origen en tiempo predefinido t_f a pesar de las perturbaciones deterministas afectando al sistema e independientemente de las condiciones iniciales y los mantiene allí para todo $t \geq t_f$, si se cumplen las siguientes condiciones: $\eta_s > 1, \alpha_s > L, \lambda_1 > \sqrt{2\alpha}, \lambda_2 \geq 0$, y $p > 1$. La variable, t_f representa el tiempo de

convergencia deseado para los estados del sistema mientras que $t_{fc} < t_f$ es el tiempo de convergencia deseado para $\chi(t)$. La forma de V_{ad} está dada por la ecuación 5.34 y

$$\chi(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |s(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s(t)) - \lambda_2 |s(t)|^p \text{sign}(s(t)) \\ -\alpha_s \int_0^t \text{sign}(s(t)) ds - \eta_s \frac{s(t)}{(t_f - t)}, & 0 \leq t < t_{fc}, \\ -\lambda_1 |s(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s(t)) - \lambda_2 |s(t)|^p \text{sign}(s(t)) \\ -\alpha_s \int_0^t \text{sign}(s(t)) ds, & t \geq t_{fc}, \end{cases} \quad (5.35)$$

Demostración 10. La perturbación acoplada $\xi(t) = \frac{K_m}{JL_a} \left(\frac{R_a}{K_m} d_1(t) + d_2(t) \right) + \frac{1}{J} \dot{d}_1(t)$ de la ecuación 5.32 satisface la condición de Lipschitz con constante $L = \frac{K_m}{JL_a} \left(\frac{R_a}{K_m} L_1 + L_2 \right) + \frac{1}{J} L_3$. Por lo tanto después de que el observador 5.28 ha recuperado los estados no medibles del sistema 5.32 en t_{fo} , el algoritmo de control 5.34 fuerza todos los estados del sistema 5.32 al origen en tiempo predefinido t_f , de acuerdo a los resultados obtenidos en el Teorema 15.

DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

La eficiencia del algoritmo de control propuesto en la ecuación 5.34, es demostrada mediante una simulación numérica utilizando el sistema 5.32. Los valores utilizados para la simulación se presentan en la Tabla 7. Los resultados se muestran en las figuras 35-37

Condición	Valor
x_0	[5, 0, 2]
μ	[2, 2, 2]
k	[3, 3, 1]
γ	20
η	[10, 10, 10]
t_f	5sec
t_{fo}	0,5sec
t_{fc}	0,2sec
r	0,75
ρ	2

Tabla 7: Valores utilizados en la simulación.

La Figura 35 muestra la convergencia de los estados del sistema 5.32 y el observador 5.28 al origen. De los resultados mostrados en la figura se observa que el algoritmo de control 5.34 conduce todos los estados del sistema al origen en tiempo predefinido de $t_f = 5\text{sec}$, a pesar de que el sistema es afectado por perturbaciones deterministas. Por otro lado la Figura 36 muestra el comportamiento de la señal de control V_{ad} de la

ecuación 5.34. Es importante recalcar que el funcionamiento del algoritmo está basado en los estados estimados por el observador por lo tanto, es necesario que la señal de control permanezca apagada durante un breve tiempo, en este caso de $0,5\text{sec}$, de otro modo la magnitud de la señal de control puede incrementar haciendo que los estados del sistema diverjan. De la misma figura se observa que la magnitud de la señal de control se mantiene dentro de valores que pueden ser implementados de manera práctica. Finalmente, la Figura 37 muestra el comportamiento del compensador mostrado en la ecuación 5.35 y la perturbación $\xi(t)$. De la figura se puede observar que el compensador contrarresta los efectos de la perturbación desde aproximadamente $t_{fc} = 0,2\text{s}$ tal como se deseaba.

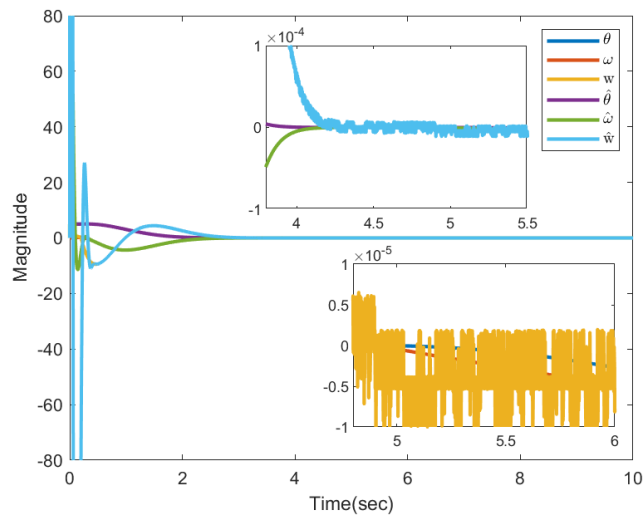


Figura 35: Convergencia de los estados del sistema 5.32 al origen.

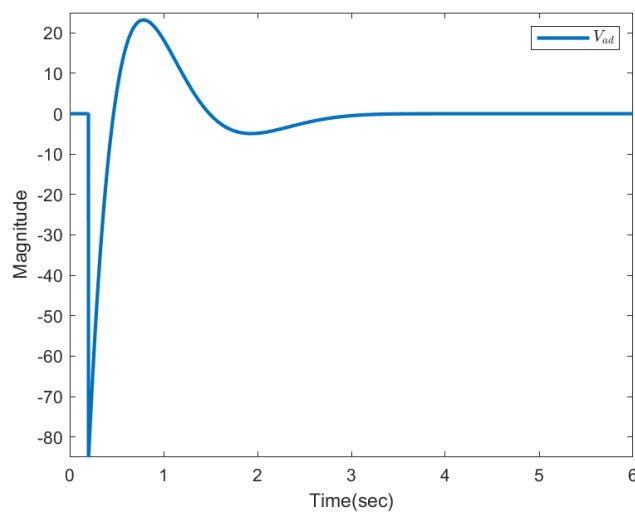


Figura 36: Trayectoria de la señal de control V_{ad} de la ecuación 5.34 .

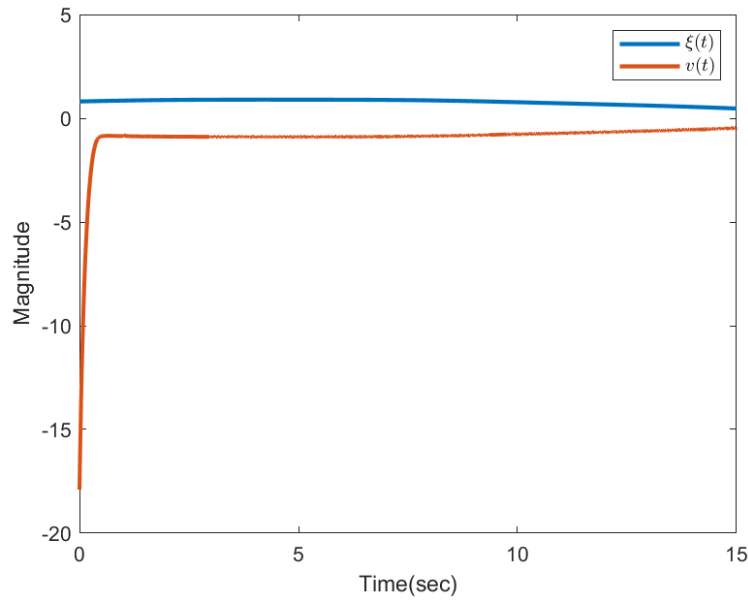


Figura 37: Trayectorias del compensador $\chi(t)$ contra la perturbación $\xi(t)$.

5.2.3 SISTEMA CON PERTURBACIONES DETERMINISTAS Y RUIDOS ESTOCÁSTICOS ACOPLADAS Y NO ACOPLADAS

DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta última sección muestra un algoritmo de control robusto capaz de llevar todos los estados de un sistema afectado por perturbaciones y ruidos estocásticos al origen, en tiempo predefinido. El sistema para el cual se diseña el algoritmo de control se muestra en la ecuación 5.36.

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= w(t), \\
 dw(t) &= \left(- \left(\frac{K_b K_m}{J L_a} + \frac{R_a b}{J L_a} \right) \omega(t) - \left(\frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) i_a(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K_m}{J L_a} V_a(t) + \xi(t) \right) dt + \sigma(t, w(t)) dW(t), \\
 y(t) &= \theta(t),
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

De la ecuación 5.36 se observa que solo un estado del sistema está disponible, es decir solo la posición angular puede ser medida. También se observa que el sistema es afectado por perturbaciones deterministas agrupadas en el término $\xi(t) = \frac{K_m}{J L_a} \left(\frac{R_a}{K_m} d_1(t) + d_2(t) \right) +$

$\frac{1}{T} \dot{d}_1(t)$ donde $d_1(t)$, $d_2(t)$ y $\dot{d}_1(t)$ deben satisfacer la condición de Lipschitz con constantes L_1 , L_2 y L_3 respectivamente. Además el término $W(t)$ representa un proceso de Wiener independiente cuya derivada débil en sentido de promedio cuadrático es un ruido Gaussiano blanco. El siguiente teorema presenta las condiciones necesarias para diseñar un algoritmo de control que lleva los estados del sistema 5.36 al origen en tiempo predefinido t_f y lo hace robusto ante perturbaciones deterministas y ruidos.

Teorema 18. *Suponga que las condiciones establecidas en el Teorema 17 se cumplen. Entonces el algoritmo de control 5.34 conduce todos los estados del sistema 5.36 al origen en tiempo predefinido t_f en promedio ρ a pesar de las perturbaciones y ruidos Gaussianos blancos con difusión $\sigma(t) = |w(t)|^r$ afectando al sistema, e independientemente de las condiciones iniciales y mantiene los estados del sistema en el origen para todo $t \geq t_f$, si se satisfacen las siguientes condiciones: $\eta_s > 1$, $\alpha > L$, $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 \geq 0$, $p > 1$, $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$, y $\frac{3}{2} \leq 2r \leq (1 + p)$.*

Demostración 11. *Se observa que la perturbación determinista $\xi(t)$ en 5.36 satisface la condición de Lipschitz con constante L . Entonces, después que el observador ha recuperado los estados del sistema 5.36 en tiempo predefinido t_{fo} el algoritmo de control 5.34 provee la convergencia de los estados del sistema al origen en tiempo predefinido t_f , en vista de los resultados obtenidos en el Teorema 16. ■*

DEMOSTRACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL ALGORITMO DE CONTROL

Esta sección muestra el desempeño del algoritmo de control propuesto en esta sección para el sistema 5.36. Los valores utilizados en la simulación, y que permiten una comparación con los resultados obtenidos anteriormente, se muestran en la Tabla 7. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 38-40.

La Figura 38 muestra que el algoritmo de control diseñado en esta sección es capaz de forzar todos los estados del motor de CD al origen en tiempo predefinido de $t_f = 5\text{sec}$ a pesar de las perturbaciones y ruidos acoplados y no acoplados. La Figura 39 muestra que la señal de control debe permanecer apagado por aproximadamente $0,5\text{sec}$ para dar tiempo al observador de estabilizarse además de aprecia que la magnitud del control puede ser implementada de manera práctica. Finalmente la Figura 40 muestra que el compensador χ efectivamente contrarresta tanto las perturbaciones como los ruidos acoplados y no acoplados.

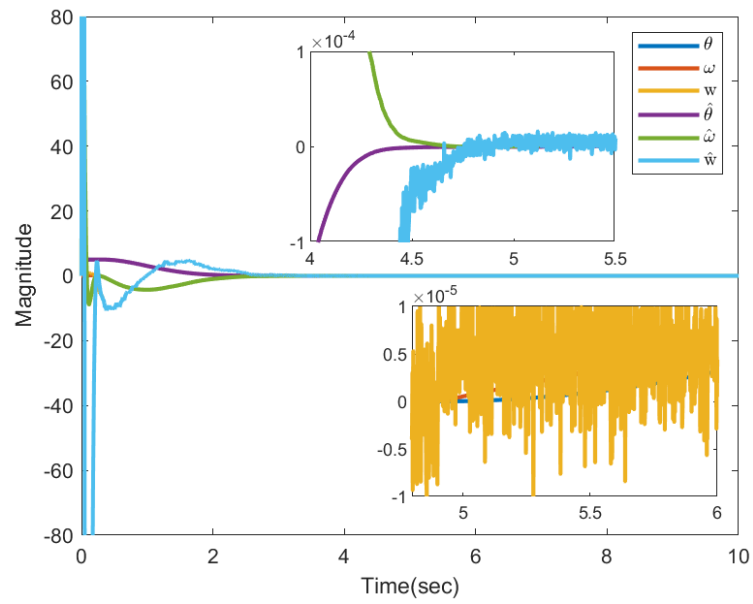


Figura 38: Convergencia de los estados del sistema 5.36 y del observador 5.28 al origen.

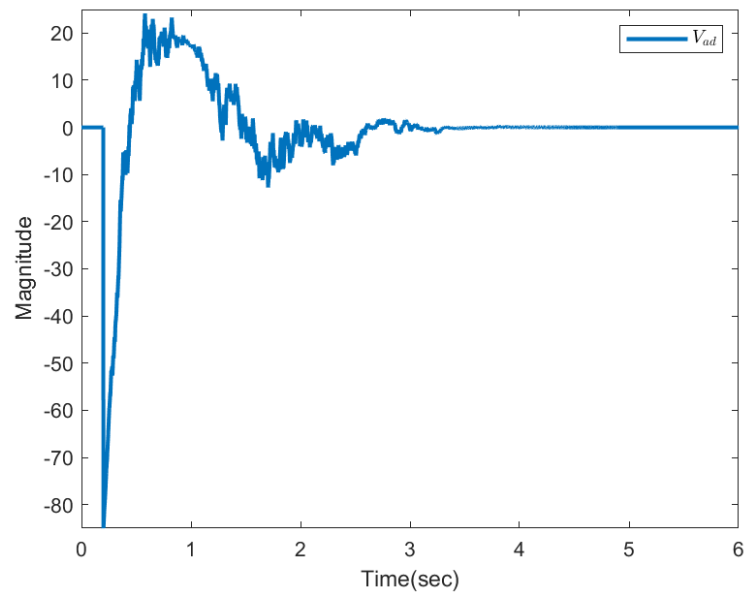


Figura 39: Comportamiento de la señal de control V_{ad} basada en los estados estimados por el observador 5.28.

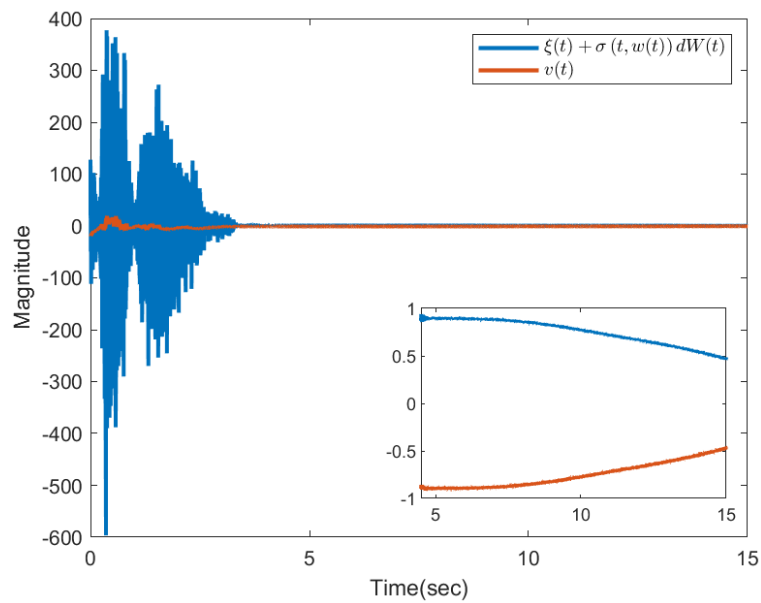


Figura 40: Comportamiento del compensador $\chi(t)$ y de la perturbación $\xi(t)$ y el ruido $\sigma(t, w(t)) dW(t)$.

5.3 CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos en este capítulo se observa que los algoritmos de control propuestos forzan todos los estados del sistema al origen independientemente de las condiciones iniciales y a pesar de que el sistema es afectado por perturbaciones y ruidos estocásticos. El proceso desarrollado muestra que el problema puede resolverse de dos formas: aplicando backstepping sobre el sistema sin que este tenga la forma de cadena de integradores y colocando al sistema en forma de integradores. Uno de los aspectos importantes del segundo método es que al colocar el sistema en forma de cadena de integradores, las perturbaciones quedarán acopladas a la señal de control.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo presentó el diseño de algoritmos de control que forzan los estados de un sistema dinámico al origen en tiempo predefinido independientemente de las condiciones iniciales. Los algoritmos presentados tienen la ventaja sobre algoritmos basados en la teoría de control finito o fijo en que el diseñador puede asignar el valor de convergencia deseado y la convergencia del sistema hacia el valor de referencia es independiente de las condiciones iniciales del sistema. Los resultados obtenidos de las simulaciones muestran que los algoritmos diseñados aseguran la estabilidad robusta del sistema en contra de perturbaciones y ruidos blancos afectando al sistema. Las perturbaciones y ruidos consideradas en este trabajo pueden estar acopladas y no acopladas.

Para el diseño de los algoritmos se utilizó análisis de Lyapunov y la técnica de backstepping. El análisis de Lyapunov permite demostrar la convergencia del sistema en tiempo predefinido, por otro lado la técnica de backstepping permite encontrar la forma que debe tener el algoritmo de control y así asegurar la robustez del sistema en contra de perturbaciones acopladas y no acopladas. Una desventaja de la técnica de backstepping es que la forma final del algoritmo de control crece conforme crece el orden del sistema haciéndolo tedioso para su implementación.

También en el trabajo se presentó el diseño de observadores convergentes en tiempo predefinido los cuales son de gran ayuda en caso de no tener la posibilidad de medir todos los estados del sistema.

En el trabajo se consideraron dos tipos de algoritmos de control uno basado en términos de la forma $u(x, t) = \eta \frac{(e^{|x|}-1)}{e^{|x|}(t_f-t)} \text{sign}(x)$ y otro en términos de la forma $u(x, t) = \eta \frac{x}{(t_f-t)}$. Los resultados muestran que un algoritmo de control basado en términos de la forma $u(x, t) = \eta \frac{x}{(t_f-t)}$ presenta trayectorias más suaves tanto en la señal de control como en los estados del sistema además que magnitudes más pequeñas. Sin embargo, en ambos casos el algoritmo de control puede ser implementado en aplicaciones reales.

Algunas de las extensiones de este trabajo pueden ser:

- Diseño de controles en tiempo predefinido utilizando modos deslizantes de órdenes superiores.
- Diseño de controles adaptivos en tiempo predefinido.
- Diseño de algoritmos de filtrado utilizando controles en tiempo predefinido.
- Diseño de controles óptimos utilizando controles en tiempo predefinido.

APÉNDICE A

MOTORES DE CORRIENTE DIRECTA

El uso de motores eléctricos en la vida cotidiana es abundante. Una pequeña mirada a nuestro entorno nos permite observar sus amplias aplicaciones en juguetes, artículos de cocina, electrodomésticos, etc. El uso de motores en la industria es casi imprescindible. Por ejemplo de acuerdo a [137] el ingreso por venta de motores (industriales) fue de \$121,81 billones de dólares en el 2021 y se estima que para 2030 el consumo industrial de motores genere un ingreso de \$209,68 billones de dólares. Por otro lado de acuerdo a [138] se estima que el consumo global de energía eléctrica de los motores se encuentra entre 43 – 46 %. Estos datos muestran no solo la presencia de los motores eléctricos en la vida cotidiana sino el área de oportunidad para la generación de algoritmos de control mas eficientes. Por ejemplo de acuerdo a [139] la eficiencia de un sistema electromecánico se incrementa entre 15 y 27 % al utilizar un controlador para el motor en lugar de utilizar reductores de velocidad.

Los motores eléctricos pueden clasificarse, de acuerdo al tipo de voltaje utilizado para su operación, en motores de corriente directa y motores de corriente alterna. La Figura 41 muestra esta clasificación. Cada tipo de motor tiene sus aplicaciones sin embargo, entre los mas utilizados se encuentran los motores de corriente directa de imanes permantes con escobillas, BLDC y el motor síncrono de imanes permanentes [4]. En esta sección se analizarán el motor de CD de imanes permanentes y el motor síncrono los cuales serán utilizados como modelos para la implementación de los algoritmos de control diseñados en este trabajo.

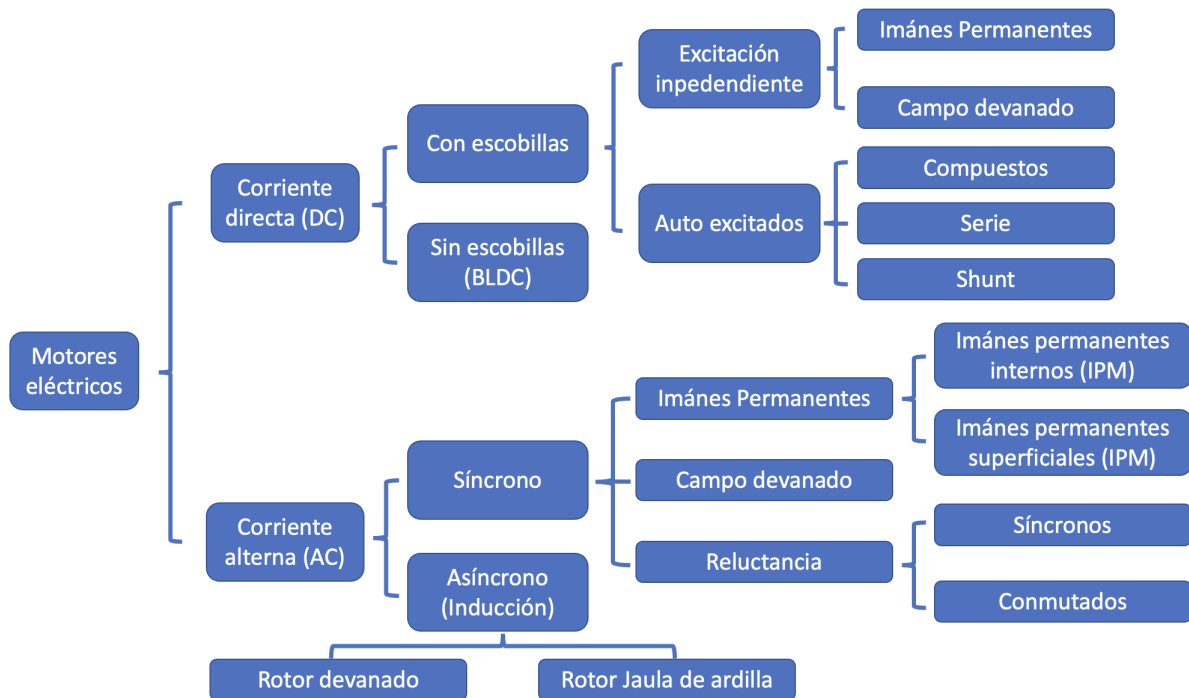


Figura 41: Clasificación de motores eléctricos [3].

A.1 MOTORES DE CORRIENTE DIRECTA DE IMÁNES PERMANENTES

Los motores de corriente directa (CD) de imanes permanentes son los más utilizados en servomecanismos, debido a la facilidad de control e implementación del circuito de control [140], [141]. Los componentes mas importantes (Figura 42) de un motor de CD son el estator, el rotor (también conocido como armadura), un conmutador y escobillas las cuales están en contacto con el conmutador.

Un diagrama general para los motores de corriente directa se presenta en la Figura 43. El funcionamiento se resume de la siguiente manera:

1. Un flujo de corriente pasa a través del devanado del rotor. Esto hace que se forme un campo magnético cuyos polos serán atraídos por el campo magnético del estator.
2. Al continuar el giro, llegará un momento en el cual el campo del conmutador y del estator estén alineados. En este momento, las escobillas del motor estarán en los espacios que tiene el conmutador (de manera ideal).
3. Debido a la inercia del rotor el movimiento del rotor continuará, revirtiendo el flujo de la corriente y por lo tanto el sentido del campo magnético. Esto a su vez hace

que polos de misma polaridad estén frente a frente creando una repulsión. Una vez que esto sucede se vuelve a repetir el proceso.

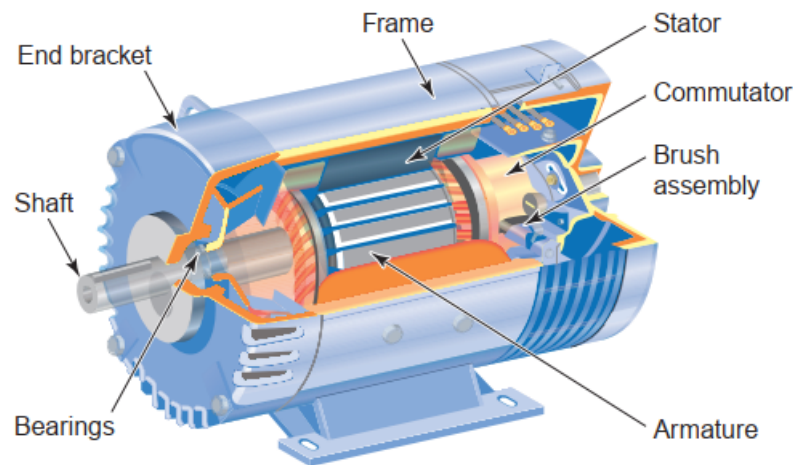


Figura 42: Partes de un motor de CD [4].

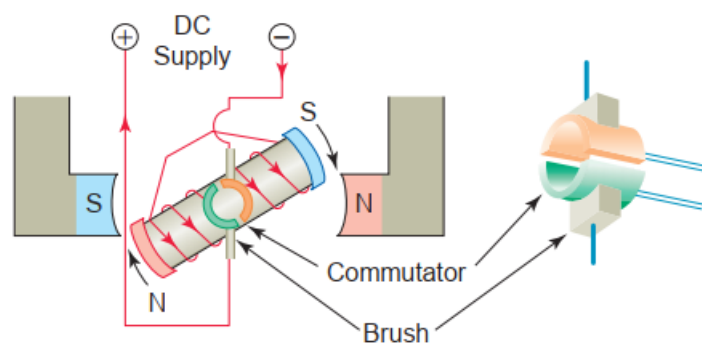


Figura 43: Funcionamiento de un motor de CD [4].

Para incrementar la eficiencia del motor se construyen mas de un devanado en el rotor, tal como se muestra en la Figura 44. En esta construcción se asegura que solo dos devanados a la vez estén en funcionamiento, esto se logra a través del conmutador.

Para diseñar un algoritmo de control se necesita un modelo matemático que describa, lo mas aproximado posible, el comportamiento del motor. A pesar de que el motor de CD es un sistema relativamente sencillo su comportamiento real es muy complejo, en [142] se muestran herramientas que permiten encontrar un modelo mas realista.

Un estudio de la literatura muestra que un modelo aproximado del motor de CD es suficiente para diseñar un algoritmo de control. Un circuito electromecánico simplificado del comportamiento de un motor de CD se muestra en la Figura 45.

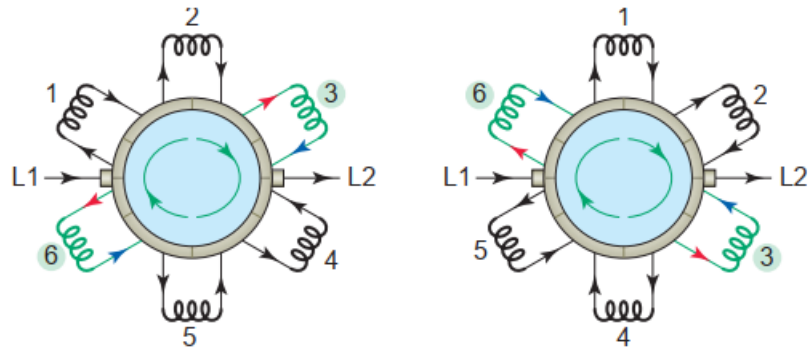


Figura 44: Estructura del rotor de un motor de CD [4].

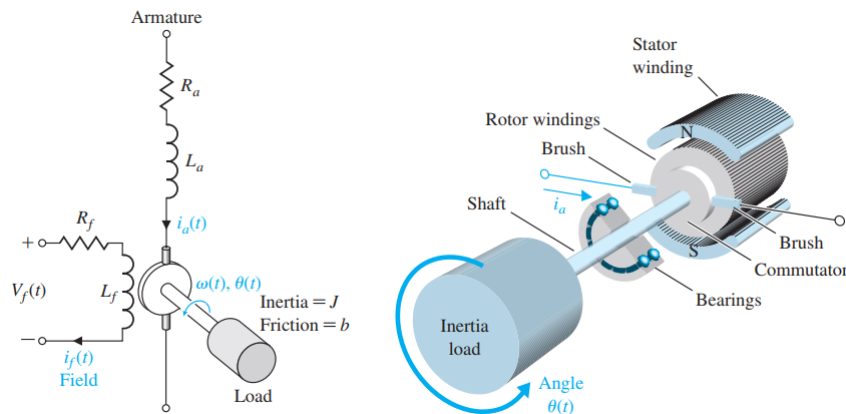


Figura 45: Diagrama eléctrico de un motor con escobillas de CD [2].

El diagrama eléctrico, mostrado en la Figura 45, corresponde a un motor de CD de campo devanado. En este tipo de motor, tanto el estator como el rotor tienen devanados. Estos devanados son modelados mediante inductancias y resistencias en el diagrama eléctrico, es por eso que el circuito eléctrico, mostrado en la izquierda de la Figura 45, muestra un circuito eléctrico para el devanado del estator y un circuito eléctrico para el devanado del rotor. Si el campo magnético producido por el devanado del estator es constante o el devanado es remplazado por imanes, entonces se tiene un motor de CD de imanes permanentes y para su análisis solo se ocupa el circuito eléctrico de la armadura, ver Figura 46

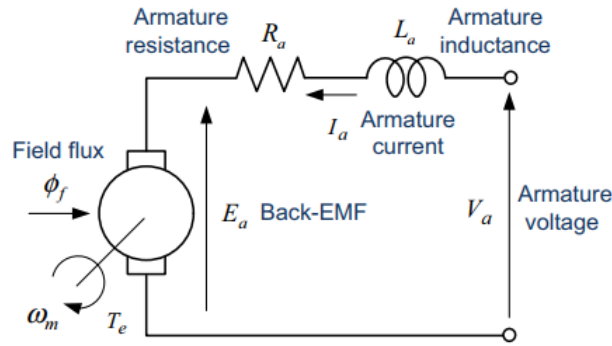


Figura 46: Diagrama eléctrico de un motor con escobillas de CD [3].

Para obtener el modelo se puede comenzar analizando el comportamiento eléctrico del motor utilizando ley de ohm y ley de voltajes de Kirchoff. Este modelo se conoce como “Modelo de Cuadratura Directa” [142] y se asume que los campos magnéticos del estator y del rotor son ortogonales y siempre dirigidos sobre los ejes de ortogonalidad “ $d - q$ ”, respectivamente. En este caso se suman algebraicamente las caídas de voltaje alrededor de la malla mostrada en la Figura 46, lo cual tendría la forma $-v + v_R + v_L + e = 0$. En la ecuación se omite el subíndice a puesto que solo estamos trabajando con el circuito de la armadura y la variable v representa un voltaje que depende del tiempo, de igual manera se utilizará la variable i . Suponiendo que la resistencia y la inductancia de la armadura se mantienen constantes $v_R = iR$ y $v_L = L \frac{di}{dt}$ donde i es la corriente que fluye a través de los devanados “activos” del rotor (ver la discusión arriba sobre el funcionamiento del motor de CD) e incluye tanto la autoinductancia del devanado como la mutua-inductancia ejercida sobre el devanado debido al campo magnético de los imanes permanentes y $e = k_e \phi_f \omega$. De esa manera, el comportamiento eléctrico del motor quedaría descrito por la ecuación

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(-iR - k_e \phi_f \omega + v) \quad (\text{A.1})$$

Para modelar la parte mecánica del motor es necesario utilizar la segunda ley de Newton para sistemas en rotación. En este caso $\Sigma T = J\alpha$, donde T representa los torques aplicados sobre el eje del motor, J representa la inercia del rotor y α la aceleración angular del rotor. En esta caso la ecuación tomaría la siguiente forma $T_M - T_F - T_L = J\alpha$, donde T_M es el torque producido por el motor debido a la corriente que fluye por el devanado del rotor y generalmente tiene la siguiente forma $T_M = k_T \phi_f i$, T_F representa la oposición a la rotación del eje debido a la fricción su forma depende del tipo de fricción que se presenta en el sistema si la fricción es viscosa tendría la forma $T_F = B\omega$, T_L representa el torque ejercido por la carga sobre el eje del motor. Considerando $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ e introduciendo estos

términos en la ecuación mecánica del motor se obtiene la ecuación A.2

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(k_T\phi_f i - T_F - T_L) \quad (\text{A.2})$$

Utilizando las ecuaciones A.1, A.2 y considerando $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ el comportamiento del motor de CD de imanes permanentes puede ser modelado utilizando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales [143]

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{J}(k_T\phi_f i - T_F - T_L), \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L}(-iR - k_e\phi_f\omega + v). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde k_e es una constante de proporcionalidad debido a la fuerza electromotriz y se mide en $Vs/rad/Wb$, k_T es una constante de proporcionalidad debido al torque producido por la corriente que fluye por el rotor y se mide en $Nm/Wb/A$ y ϕ_f es el flujo magnético producido por el estator medido en Wb .

El propósito de esta subsección fue el de introducir las herramientas necesarias para el modelado de motores de CD de imanes permanentes con escobillas. Del procedimiento puede observarse el acoplamiento que hay entre las variables que representan los estados del motor y que la ecuación puede ser lineal o no lineal dependiendo del tipo de fricción presente en el sistema y la carga acoplada al mismo.

A.2 MOTORES SÍNCRONOS DE IMÁNES PERMANENTES

El uso de imanes permanentes permitió la introducción de nuevas topologías de motores haciendo a estos no solo mas eficientes sino también menos voluminosos [139]. Entre los motores de imanes permanentes sobresale el motor síncrono. En principio este motor es un motor de CD sin escobillas sin embargo, en cuanto al funcionamiento siempre se cataloga dentro de los motores de CA debido a que sus devanados se alimentan mediante señales senoidales. Entre las características que hacen de este motor sobrepasar el desempeño de los motores de CD conmutados y sin escobillas e incluso a motores de inducción se encuentran: un torque mas elevado, respuesta dinámica mas rápida, y mayor eficiencia que los motores de inducción debido a que no hay pérdidas de energía en el devanado del rotor [3]. Algunas de las aplicaciones de los motores síncronos incluyen propulsores de trénes [144], motores de automóviles eléctricos [145], robots industriales [146] y generación de energía eléctrica [147].

Los motores síncronos tienen dos tipos de construcción, dependiendo de la configuración de los imanes permanentes. Si los imanes permanentes están montados sobre la superficie del rotor, se tiene un Motor Síncrono de Imanes Permanentes Montados en la Superficie (SPMSM, por sus siglas en inglés). Por otro lado, si los imanes están insertados en ranuras acanaladas debajo de la superficie del rotor se tiene un Motor Síncrono de Imanes Permanentes Internos (IPMSM). La Figura 47 muestra estas configuraciones. De acuerdo a [5] los SPMSM se utilizan en aplicaciones de potencia mientras que los IPMSM se utilizan en aplicaciones de alta velocidad.

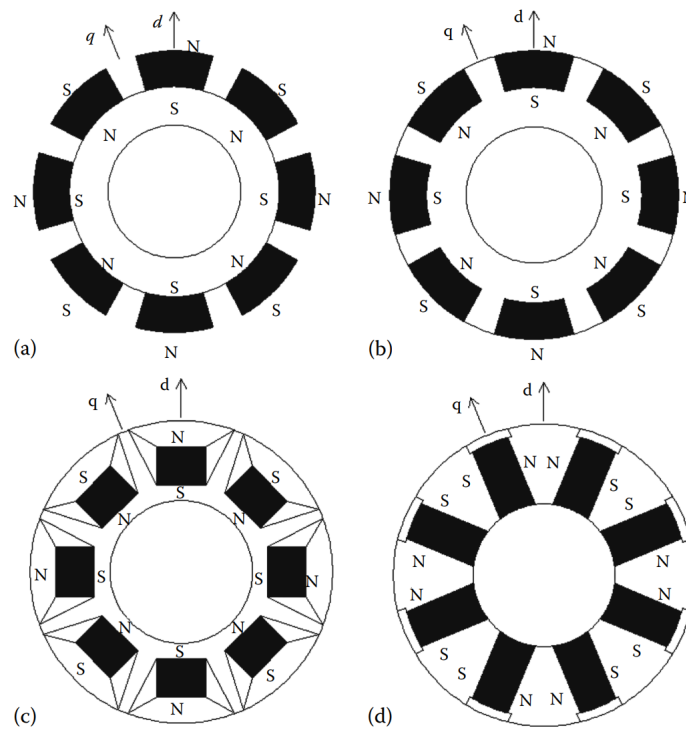


Figura 47: SPMSM figuras a y b. IPMSM figuras c y d, [5]

Para la deducción del modelo matemático se utilizará un IPMSM correspondiente a la Figura 47.c. En esta configuración los imanes del rotor están orientados de manera radial. Para el análisis, el rotor de esta configuración puede verse como un rotor de polos salientes, tal como se muestra en la Figura 48. A la hora de modelar el motor síncrono este presenta la ventaja sobre el motor de inducción en que solo es necesario modelar el devanado del estator generando así menos ecuaciones. En este sentido el circuito eléctrico del motor síncrono puede verse como la resistencia y el inductor mostrado en la izquierda de la Figura 45 cuyas ecuaciones tendrían la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{abcs} = \mathbf{R}_s \mathbf{i}_{abcs} + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_{abcs}}{dt} \tag{A.4}$$

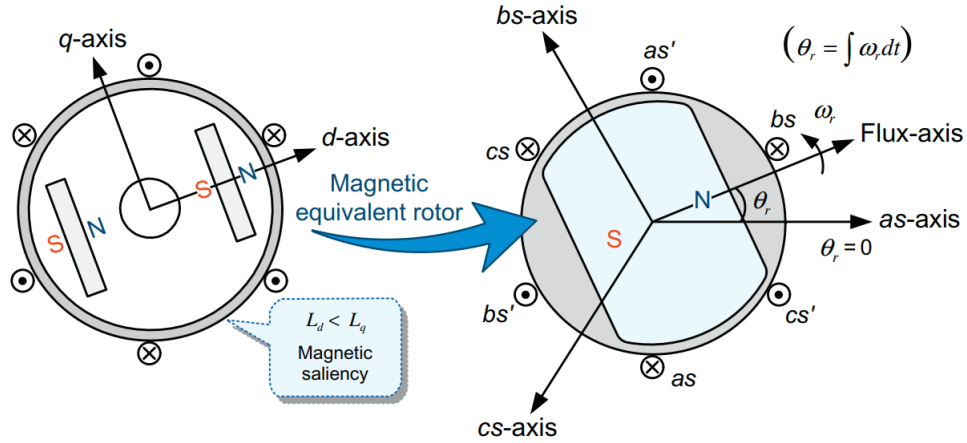


Figura 48: Representación equivalente del rotor de un IPMSM [3].

Donde $\mathbf{v}_{abc} = [v_{as} v_{bs} v_{cs}]^T$, $\mathbf{i}_{abc} = [i_{as} i_{bs} i_{cs}]^T$, $\boldsymbol{\lambda}_{abc} = [\lambda_{as} \lambda_{bs} \lambda_{cs}]^T$. Los subíndices a, b, c se refieren al devanado a, b y c ; el subíndice s hace referencia al estator. Debido a la interacción entre los flujos magnéticos producidos por cada devanado y los imanes permanentes del rotor, el valor total de λ_i se obtiene de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \lambda_{as} &= L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L_{asf} I_f \\ \lambda_{bs} &= L_{bsas} i_{as} + L_{bsbs} i_{bs} + L_{bscs} i_{cs} + L_{bsf} I_f \\ \lambda_{cs} &= L_{csas} i_{as} + L_{csbs} i_{bs} + L_{cscs} i_{cs} + L_{csf} I_f \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Donde L_{asas} es la autoinductancia del devanado a mientras que L_{asbs} , L_{ascs} son las mutuas inductancias ejercidas sobre el devanado a debido al campo generado por los devanados b y c respectivamente. El factor L_{asf} se refiere a la mutua inductancia ejercida sobre el devanado a debido al campo generado por los imanes permanentes. Los valores de las autoinductancias se pueden expresar mediante las ecuaciones en A.6. Los términos L_{ls} , L_A y L_B se refieren a la inductancia de fuga, la inductancia magnetizante promedio del devanado y la inductancia magnetizante variante del devanado, ver Figura 49. Como todos los devanados tienen el mismo número de vueltas L_{ls} , L_A y L_B tienen el mismo valor para todos los devanados.

$$\begin{aligned} L_{asas} &= L_{ls} + L_A - L_B \cos 2\theta_r \\ L_{bsbs} &= L_{ls} + L_A - L_B \cos 2(\theta_r - 120) \\ L_{cscs} &= L_{ls} + L_A - L_B \cos 2(\theta_r + 120) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

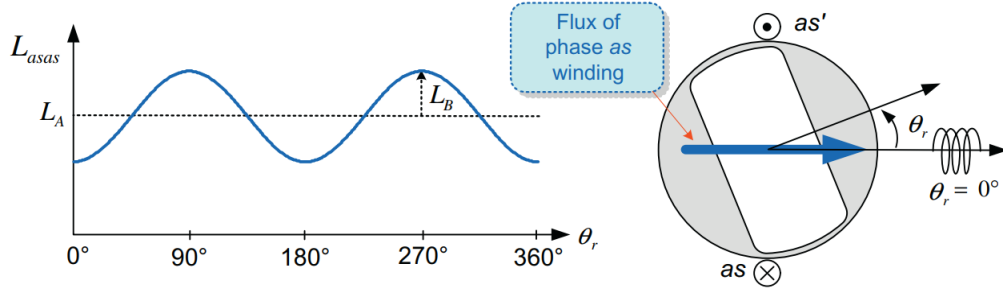


Figura 49: Variación de la autoinductancia conforme a la posición del rotor [3].

La obtención de la mutua inductancia sigue un argumento similar al de la autoinductancia, ver Figura 50. De esa manera el valor de las inductancias mutuas debidas a los campos magnéticos generados por las otras inductancias quedarían expresadas como en la ecuación A.7.

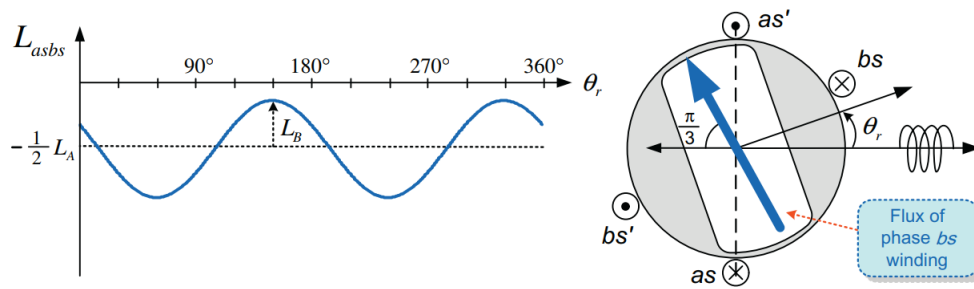


Figura 50: Variación de la mutua inductancia conforme a la posición del rotor [3].

$$\begin{aligned}
 L_{asbs} = L_{bsas} &= -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r - 60) \\
 L_{ascs} = L_{csas} &= -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r + 60) \\
 L_{bscs} = L_{csbs} &= -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2\theta_r
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

Finalmente, la mutua inductancia debido a los imanes del rotor tendrían la forma de la ecuación A.8, al observar que el valor máximo del campo magnético del rotor sobre algún devanado del estator ocurre cada vuelta completa del rotor, ver Figura

$$\begin{aligned}
 L_{asf} &= L_{sf} \cos \theta_r \\
 L_{bsf} &= L_{sf} \cos (\theta_r - 120\pi) \\
 L_{csf} &= L_{sf} \cos (\theta_r + 120\pi)
 \end{aligned}
 \tag{A.8}$$

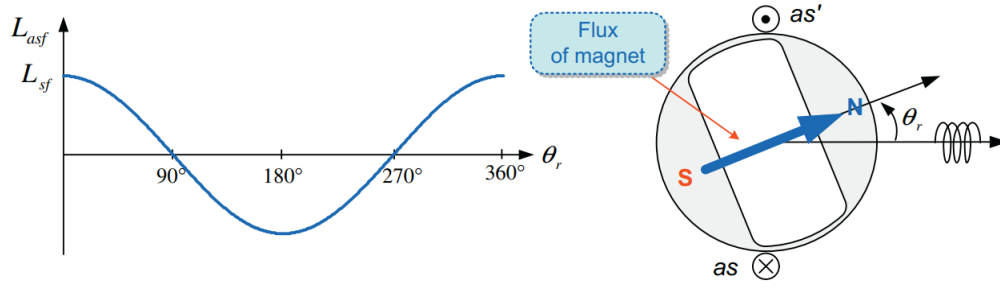


Figura 51: Variación de la mutua inductancia debido al rotor conforme a la posición del rotor [3].

Al sustituir las ecuaciones A.6, A.7 y A.8 en la ecuación A.5 se obtiene la ecuación A.9 para $\mathbf{L}_s \dot{\mathbf{i}}_{abc}$ y la ecuación A.10 para $\mathbf{L}_f \mathbf{I}_f$.

$$\begin{bmatrix} L_{ls} + L_A - L_B \cos 2\theta_r & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r - 60) & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r + 60) \\ -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r - 60) & L_{ls} + L_A - L_B \cos 2(\theta_r - 120) & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2\theta_r \\ -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r + 120) & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2\theta_r & L_{ls} + L_A - L_B \cos 2(\theta_r - 240) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{L}_{sf} \begin{bmatrix} \cos \theta_r \\ \cos(\theta_r - 120) \\ \cos(\theta_r - 240) \end{bmatrix} \mathbf{I}_f \quad (\text{A.10})$$

De las ecuaciones A.9 y A.10 se observa que el valor de las inductancias depende de la posición del rotor. Los especialistas prefieren quitar esa dependencia haciendo una transformación de los ejes del estator hacia los ejes $d - q$. Donde el eje d representa la dirección del flujo magnético y q está adelantado al eje d por 90° , la Figura 52 muestra esta transformación.

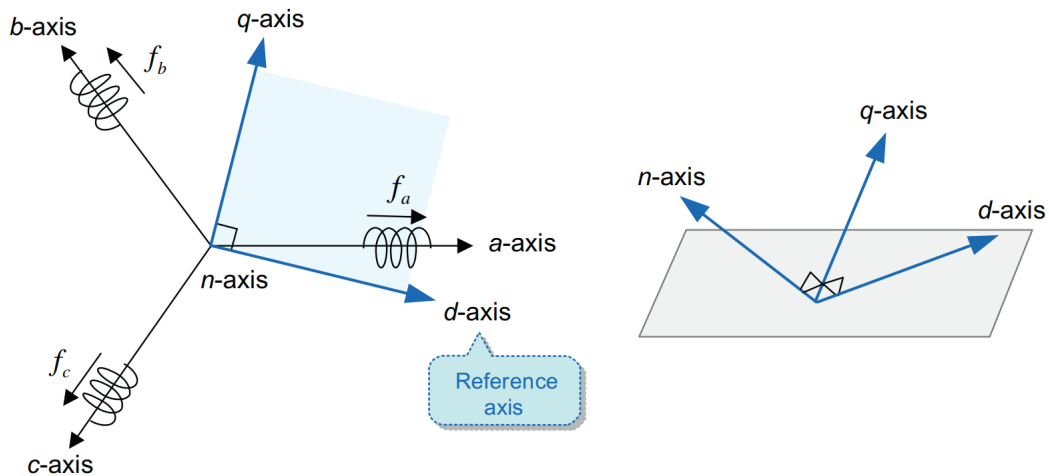


Figura 52: Transformación de coordenadas del estator a coordenadas $d - q$ [3].

El marco de referencia $d - q$ puede rotar o permanecer estacionario. Si permanece estacionario el eje d es colineal con el eje a . Por otro lado si el marco $d - q$ rota, este puede hacerlo a cualquier velocidad sin embargo, generalmente se utilizan dos tipos de velocidades las cuales son marco de referencia síncrono y marco de referencia del rotor ([3]). En el marco de referencia síncrono el marco $d - q$ rota a la misma velocidad que el campo magnético, mientras que en el marco de referencia del rotor el marco de referencia $d - q$ rota a la misma velocidad que el rotor. Este tipo de transformación fue introducida en 1920 por R. H. Park en 1920 [5], aunque después se encontró que al variar la velocidad de rotación del marco se pueden encontrar diferentes marcos de referencia [143]. El proceso para encontrar la transformación puede llevarse a cabo por matrices o por números complejos las siguientes referencias hacen el uso de uno o de otro método [143], [5], [142], [3].

Ya sea que el marco de referencia $d - q$ esté rotando o esté estacionario, al hacer el cambio de marco de referencia se proyecta de manera ortogonal el marco de referencia a, b, c sobre el marco de referencia $d - q$ tal como se muestra en las Figuras 53 y 54.

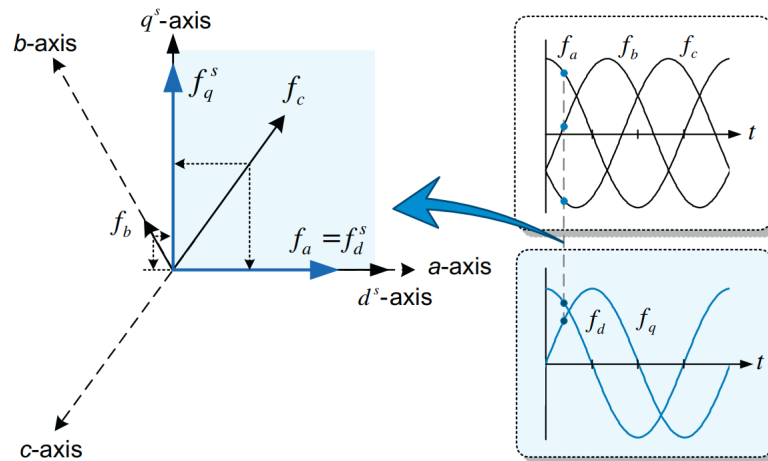


Figura 53: Transformación de coordenadas del estator a coordenadas $d - q$ cuando el marco $d - q$ es estacionario [3].

Definición 8. Si el marco de referencia $d - q$ rota a una velocidad ω entonces la transformación de coordenadas a, b, c del estator tendrán su representación en el marco de referencia $d - q$ utilizando la siguiente expresión

$$\mathbf{f}_{dq}^\omega = \mathbf{T}(\theta) \mathbf{f}_{abc} \tag{A.11}$$

donde $\mathbf{f}_{dq} = [f_d f_q f_n]^T$, $\mathbf{f}_{abc} = [f_a f_b f_c]^T$ y $\mathbf{T}(\theta)$ tiene la forma de la ecuación A.12.

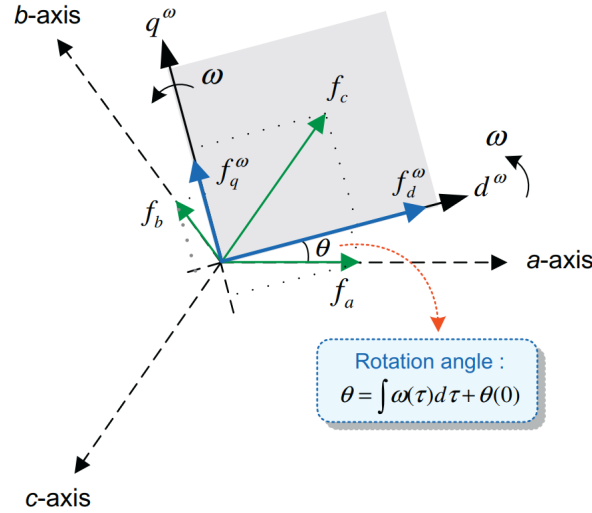


Figura 54: Transformación de coordenadas del estator a coordenadas $d - q$ cuando el marco $d - q$ está rotando [3].

$$\mathbf{T}(\theta) = k \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \cos \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ -\sin \theta & -\sin \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) & -\sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

La variable k utilizada en las ecuaciones anteriores puede tomar valores arbitrarios. Sin embargo, generalmente se utilizan los valores $\frac{2}{3}$ y $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Cuando $k = \frac{2}{3}$ la transformación se conoce como transformación de magnitud invariante y la potencia y torque evaluados en el marco $d - q$ tienen una magnitud $\frac{2}{3}$ menos. Por otro lado si $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$ la potencia tiene la misma magnitud en ambos marcos y esta transformación se conoce como transformación de potencia invariante. Cuando $\theta = 0$ en la ecuación A.12 el marco de referencia $d - q$ está fijo. A esta transformación se le conoce con el nombre de Transformación de Clark. Suponiendo que f_a, f_b, f_c forman un sistema trifásico balanceado entonces $f_a + f_b + f_c = 0$ lo cual permite definir la transformación del marco de referencia a, b, c al marco de referencia estacionario $d - q$ mediante la ecuación A.13.

$$\begin{aligned} f_d^s &= f_a \\ f_q^s &= \frac{1}{\sqrt{3}} (f_b - f_c) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La transformación del marco $d - q$ hacia el marco a, b, c estaría dada por la ecuación A.14.

$$\begin{aligned}
 f_a &= f_d^s \\
 f_b &= -\frac{1}{2}f_d^s + \frac{\sqrt{3}}{2}f_q^s \\
 f_c &= -\frac{1}{2}f_d^s - \frac{\sqrt{3}}{2}f_q^s
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$

También se puede transformar entre marcos de referencia $d - q$ estacionario a rotatorio y viceversa a esta transformación se le conoce como transformación de Park. La siguiente figura muestra la relación y la ecuación A.15 es la ecuación de transformación.

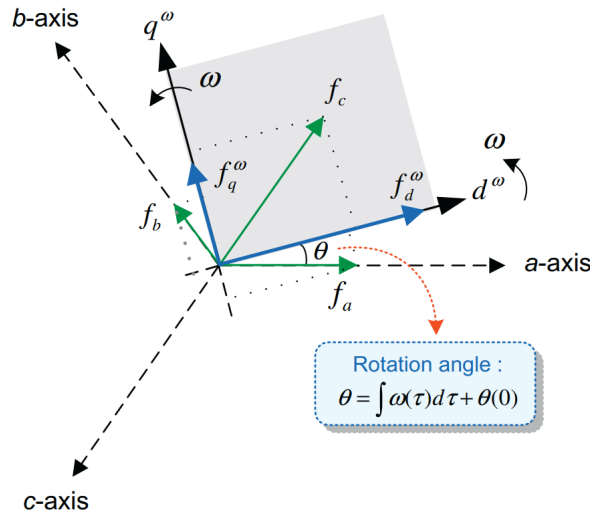


Figura 55: Conversión entre marcos de referencia $d - q$ [3].

$$\mathbf{f}_{dq_n}^e = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{f}_{dq_n}^s = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d^s \\ f_q^s \\ f_n^s \end{bmatrix}
 \tag{A.15}$$

Al igual que el caso anterior si $f_n^s = 0$ entonces la transformación del marco de referencia estacionario al marco de referencia rotatorio tendría la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 f_d^e &= f_d^s \cos \theta + f_q^s \sin \theta \\
 f_q^e &= -f_d^s \sin \theta + f_q^s \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

mientras que la transformación del marco de referencia rotatorio al marco de referencia estacionario tendría la forma de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 f_d^s &= f_d^e \cos \theta - f_q^e \sin \theta \\
 f_q^s &= f_d^e \sin \theta + f_q^e \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{A.17}$$

Utilizando la teoría recién presentada se puede proceder a encontrar la transformación del marco de referencia a, b, c del IPMSM hacia el marco de referencia $d-q$. Considere la ecuación A.4, al aplicar la ecuación A.12 se obtiene la relación

$$\mathbf{v}_{dqns}^\omega = \mathbf{T}(\theta)\mathbf{v}_{abcs} = \mathbf{T}(\theta)\mathbf{R}_s\mathbf{i}_{abcs} + \mathbf{T}(\theta)\frac{d\boldsymbol{\lambda}_{abcs}}{dt} \quad (\text{A.18})$$

lo cual al resolver quedaría expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v_{ds}^\omega &= R_s i_{ds}^\omega + \frac{d\lambda_{ds}^\omega}{dt} - \omega \lambda_{qs}^\omega \\ v_{qs}^\omega &= R_s i_{qs}^\omega + \frac{d\lambda_{qs}^\omega}{dt} + \omega \lambda_{ds}^\omega \\ v_{ns}^\omega &= R_s i_{ns}^\omega + \frac{d\lambda_{ns}^\omega}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{ds}^r &= L_{ds} i_{ds}^r + \phi_f \\ \lambda_{qs}^r &= L_{qs} i_{qs}^r \\ \lambda_{ns}^r &= L_{ls} i_{ns}^r \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

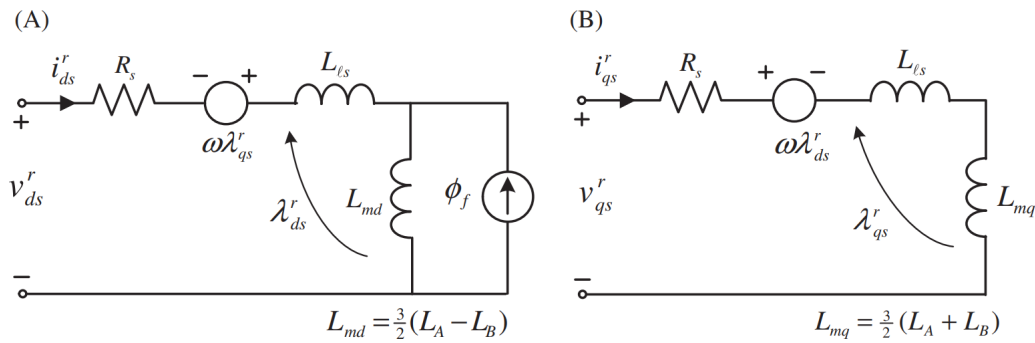


Figura 56: Circuito eléctrico equivalente del IPMSM al hacer la transformación del marco a, b, c al marco $d-q$ del rotor. (A) representa el eje d y (B) el eje q [3].

De la Figura 56 se puede obtener la siguiente relación $P_{in} = \frac{3}{2} (v_{ds}^r i_{ds}^r + v_{qs}^r i_{qs}^r)$ la cual nos permitirá encontrar el torque desarrollado por el IPMSM sin carga. Al hacer el análisis de las mallas mostradas en la Figura 56 se obtiene la siguiente relación

$$P_{in} = \frac{3}{2} \left(R_s (i_{ds}^{r2} + i_{qs}^{r2}) + i_{ds}^r \frac{d\lambda_{ds}^r}{dt} + i_{qs}^r \frac{d\lambda_{qs}^r}{dt} + \omega_r \phi_f i_{qs}^r + \omega_r (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^r i_{qs}^r \right) \quad (\text{A.21})$$

Donde $R_s (i_{ds}^{r2} + i_{qs}^{r2})$ representa las pérdidas debido al devanado del estator, $i_{ds}^r \frac{d\lambda_{ds}^r}{dt} + i_{qs}^r \frac{d\lambda_{qs}^r}{dt}$ representa la variación de la energía en el motor y solo $\omega_r \phi_f i_{qs}^r + \omega_r (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^r i_{qs}^r$ representa la potencia mecánica efectiva. Al dividir todo por ω_r se obtiene la ecuación que representa el torque desarrollado por un motor síncrono sin carga.

$$T_e = \frac{P}{2} \frac{3}{2} \left[\phi_f i_{qs}^r + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^r i_{qs}^r \right] \quad (\text{A.22})$$

Donde P representa el número de polos del motor. Cuando el motor necesita mover una carga la ecuación del torque del motor tendría la siguiente forma.

$$T_e - T_L = J \frac{d\omega_r}{dt} + B\omega_r \quad (\text{A.23})$$

Donde B representa la constante de fricción viscosa. De esta manera, suponiendo que se hace transformación de Clark y uniendo todos los resultados mostrados arriba se puede expresar el modelo matemático del IPMSM con la ecuación A.24.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -B\omega + \frac{P}{2} \frac{3}{2} \left[\phi_f i_{qs}^r + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^r i_{qs}^r \right] - T_L \\ \frac{di_{ds}}{dt} &= \frac{1}{L_{ds}} [-L_{qs}\omega i_{ds} - R_s i_d + v_{ds}] \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= \frac{1}{L_{qs}} [-(L_{ds} i_{ds} + \phi_f)\omega - R_s i_{qs} + v_{qs}] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Esta subsección presentó el método utilizado para la obtención del modelo matemático de un motor síncrono de imanes permanentes. Obtener el modelo matemático inicial es relativamente directo sin embargo, se observa que las ecuaciones obtenidas son altamente acopladas debido a la estrecha relación que existe entre las inductancias del estator y la velocidad angular de los imanes permanente en el rotor. Una forma de sobrepasar este problema es utilizando la descomposición de Clark-Park. Esto permite considerar solamente dos corrientes, las cuales pueden verse como corrientes virtuales, haciendo el proceso del diseño de control mas manejable. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que la descomposición mencionada debe tomarse en cuenta en ambas direcciones para que el control diseñado pueda ser implementado de manera física.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, and V. Ramos-Lopez, “Continuous fixed-time convergent controller for permanent-magnet synchronous motor with unbounded perturbations,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 16, pp. 11900–11913, 2020.
- [2] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*. New Jersey: Pearson Education, 2017.
- [3] S.-H. Kim, *Electric motor control: DC, AC, and BLDC motors*. Elsevier, 2017.
- [4] F. D. Petruzella, *Electric motors and control systems*. McGraw Hill Higher Education, 2010.
- [5] R. Krishnan, *Permanent magnet synchronous and brushless DC motor drives*. CRC press, 2017.
- [6] S. S. Majid and M. Golestani, “A finite-time adaptive robust control for a spacecraft attitude control considering actuator fault and saturation with reduced steady-state error,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, no. 4, pp. 1002–1009, 2019.
- [7] H. Razmjooei, S. M. Hossein, E. Abdi, and C. Yang, “A novel robust finite-time tracking control of uncertain robotic manipulators with disturbances,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 28, no. 5-6, pp. 719–731, 2022.
- [8] Q. Hu, X. Huo, B. Xiao, and Z. Zhang, “Robust finite-time control for spacecraft attitude stabilization under actuator fault,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 226, no. 3, pp. 416–428, 2012.
- [9] Z. Qu and J. Dorsey, “Robust control by two Lyapunov functions,” *International Journal of Control*, vol. 55, no. 6, pp. 1335–1350, 1992.

-
- [10] F. Lin, “An optimal control approach to robust control design,” *International Journal of Control*, vol. 73, no. 3, pp. 177–186, 2000.
- [11] Y. H. Chen, “Robust control system design: non-adaptive versus adaptive,” *International Journal of Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1457–1477, 1990.
- [12] L. Wen, G. Tao, H. Yang, and Y. Zhang, “An adaptive disturbance rejection control scheme for multivariable nonlinear systems,” *International Journal of Control*, vol. 89, no. 3, pp. 594–610, 2016.
- [13] M. S. Ranjan and B. Subudhi, “Disturbance rejection-based robust decentralized controller design for a multivariable system,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 45, no. 4, pp. 620–636, 2023.
- [14] M. Abdollah, A. Mohammadreza, and P. Gholamhassan, “Robust controller design for a three-shaft industrial gas turbine in the infinite grid power generation,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 42, no. 1, pp. 131–156, 2020.
- [15] N. Khaled and N. Chalhoub, “A dynamic model and a robust controller for a fully-actuated marine surface vessel,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 17, no. 6, pp. 801–812, 2011.
- [16] F. Mnif, “A mixed optimal/robust control for robot manipulators,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 218, no. 4, pp. 311–321, 2004.
- [17] X. Wang and C. S. Suh, “Precision concurrent speed and position tracking of brushed DC motors using nonlinear time-frequency control,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 19, pp. 3266–3291, 2017.
- [18] O. Çakar and A. K. Tanyıldızı, “Application of moving sliding mode control for a DC motor driven four-bar mechanism,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 3, 2018. DOI: 10.1177/1687814018762184.
- [19] M. Vesović, R. Jovanović, and N. Trišović, “Control of a DC motor using feedback linearization and gray wolf optimization algorithm,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 14, no. 3, 2022. DOI: 10.1177/16878132221085324.
- [20] Z. Sen, G. Wanli, H. Yunfeng, D. Juan, and C. Hong, “Angular speed control of brushed DC motor using nonlinear method: Design and experiment,” in *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 1045–1050, 2016.

-
- [21] S. Goyat and M. Tushir, “Analysis DC motor non linear behavior using modeling and simulation,” *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*, vol. 5, no. 1, pp. 263–268, 2016.
- [22] M. Nordin and P.-O. Gutman, “Controlling mechanical systems with backlash—a survey,” *Automatica*, vol. 38, no. 10, pp. 1633–1649, 2002.
- [23] G. Cross, “Computation of DC motor dynamic braking performance,” *International Journal of Electrical Engineering & Education*, vol. 25, no. 4, pp. 361–367, 1988.
- [24] L. Liu, X. Song, Z. Fu, and S. Song, “Disturbance observer-based input-output finite-time control of a class of nonlinear systems,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, 2017. DOI: 10.1155/2017/7202584.
- [25] Y.-P. Sun and J.-X. Li, “Adaptive iterative learning control via continuous sliding-mode technique with uncertainties,” in *2016 Chinese control and decision conference (CCDC)*, pp. 473–478, 2016.
- [26] M. Abbaszadeh and H. J. Marquez, “A generalized framework for robust nonlinear H_∞ filtering of Lipschitz descriptor systems with parametric and nonlinear uncertainties,” *Automatica*, vol. 48, no. 5, pp. 894–900, 2012.
- [27] A. Bayrak, H. Gürsoy, and M. O. Efe, “A novel robust fuzzy control of an uncertain system,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 39, no. 3, pp. 324–333, 2017.
- [28] D. L. Guo, H. Y. Hu, and J. Q. Yi, “Neural network control for a semi-active vehicle suspension with a magnetorheological damper,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 10, no. 3, pp. 461–471, 2004.
- [29] J. Fei and H. Ding, “System dynamics and adaptive control for MEMS gyroscope sensor,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 7, no. 4, 2010. DOI: 10.5772/10488.
- [30] E. Duraffourg, L. Burlion, and T. Ahmed-Ali, “Finite-time observer-based backstepping control of a flexible launch vehicle,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 8, pp. 1535–1550, 2018.
- [31] J. Gao and Y. Cai, “Robust adaptive finite time control for spacecraft global attitude tracking maneuvers,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 230, no. 6, pp. 1027–1043, 2016.

- [32] M. S. Seyed and G. Mehdi, “A finite-time adaptive robust control for a spacecraft attitude control considering actuator fault and saturation with reduced steady-state error,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, no. 4, pp. 1002–1009, 2019.
- [33] B. Cong, Z. Chen, and X. Liu, “Disturbance observer-based adaptive integral sliding mode control for rigid spacecraft attitude maneuvers,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 227, no. 10, pp. 1660–1671, 2013.
- [34] Q. Zou, “Adaptive sliding mode control for chain driving system with disturbance observer,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 234, no. 9, pp. 1050–1059, 2020.
- [35] S. K. Spurgeon, L. Yao, and X. Y. Lu, “Robust tracking via sliding mode control for elastic joint manipulators,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 215, no. 4, pp. 405–417, 2001.
- [36] H. Yu and S. Lloyd, “Adaptive control of robot manipulators including motor dynamics,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 209, no. 3, pp. 207–217, 1995.
- [37] J. J. Craig, P. Hsu, and S. S. Sastry, “Adaptive control of mechanical manipulators,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 2, pp. 16–28, 1987.
- [38] Z. Huang, J. Li, and B. Huang, “Adaptive formation control for autonomous surface vessels with prescribed-time convergence,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 19, no. 4, 2022. DOI: 10.1177/17298806221105722.
- [39] H. An, Z. Guo, X. Zhang, Y. Wang, and C. Wang, “Adaptive control of hypersonic vehicles using intelligent allocation,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2023. DOI: 10.1177/09544100231153261.
- [40] S. Thompson, “Robust control: An introduction,” *Measurement and Control*, vol. 26, no. 8, pp. 235–241, 1993.
- [41] J. L. Crassidis, S. R. Vadali, and F. L. Markley, “Optimal variable-structure control tracking of spacecraft maneuvers,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 3, pp. 564–566, 2000.

- [42] T. Floquet, W. Perruquetti, and J.-P. Barbot, “Angular velocity stabilization of a rigid body via VSS control,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 122, no. 4, pp. 669–673, 2000.
- [43] B. Wang, K. Gong, D. Yang, and J. Li, “Fine attitude control by reaction wheels using variable-structure controller,” *Acta Astronautica*, vol. 52, no. 8, pp. 613–618, 2003.
- [44] C. Wen, J. Zhou, and W. Wang, “Decentralized adaptive backstepping stabilization of interconnected systems with dynamic input and output interactions,” *Automatica*, vol. 45, no. 1, pp. 55–67, 2009.
- [45] M. Bahraini, M. J. Yazdanpanah, S. Vakili, and M. R. Jahed-Motlagh, “Sliding mode control revisited,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 42, no. 14, pp. 2698–2707, 2020.
- [46] J. P. Mishra, C. Li, X. Yu, and M. Jalili, “Fixed-time converging terminal surface with non-singular control design for second-order systems,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 5139–5143, 2017.
- [47] A. Polyakov, E. D, and W. Perruquetti, “Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 23, pp. 140–145, 2013.
- [48] G. Ren and H. Liu, “New conditions on finite-time stability of linear discrete-time system,” *Journal of the Franklin Institute*, 2023.
- [49] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Lyapunov analysis of finite-time differential equations,” in *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC’95*, vol. 3, pp. 1831–1832, 1995.
- [50] J. Geng and Y. Wang, “A finite-time sliding-mode controller design for convergence at a desired time and global robust control,” in *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 550–555, 2016.
- [51] X. Zhang, R. Pang, and K. Ma, “Input-output stabilization-based finite-time robust control of disturbed systems using linear matrix inequality approach,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 21, pp. 5152–5168, 2018.
- [52] W. Hsiu-Ming and K. Mansour, “Finite-time robust tracking control of an autonomous underwater vehicle in the presence of uncertainties and external current disturbances,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 10, 2021. DOI: 10.1177/16878140211053429.

- [53] Z. Wu, T. Zhang, X. Xia, and Y. Yi, “Finite-time adaptive neural command filtered control for pure-feedback time-varying constrained nonlinear systems with actuator faults,” *Neurocomputing*, vol. 490, pp. 193–205, 2022.
- [54] H. Xu, “Finite-time stability: A tutorial survey,” *Complexity*, vol. 2020, pp. 1–12, 2020.
- [55] L. Sun, M. Li, and R. Yangi, “Finite-time H_∞ control of affine nonlinear singular systems subject to actuator saturation,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2021, pp. 1–10, 2021.
- [56] Y. Liu, H. Li, R. Lu, Z. Zuo, and X. Li, “An overview of finite/fixed-time control and its application in engineering systems,” *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 9, no. 12, pp. 2106–2120, 2022.
- [57] M. Zhang, “Finite-time stability and stabilization of nonlinear quadratic systems with jumps,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–5, 2014.
- [58] S. Shao, S. Wang, Y. Zhao, and G. Huang, “Fixed-time robust trajectory tracking control for quadrotor UAV with disturbances,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 45, no. 7, pp. 1213–1228, 2023.
- [59] Z. Wang, X. Tian, Q. Mai, and H. Liu, “Fixed-time composite robust H_∞ tracking control of marine surface vessels based on the barrier Lyapunov function and an event-triggered strategy,” *Ocean Engineering*, vol. 261, 2022. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.112113.
- [60] S. Shi, J. Lu, Y. Hu, and Y. Sun, “Robust output-feedback SOSM control subject to unmatched disturbances and its application: A fixed-time observer-based method,” *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 45, 2022. DOI: 10.1016/j.nahs.2022.101210.
- [61] M. Van and D. Ceglarek, “Robust fault tolerant control of robot manipulators with global fixed-time convergence,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 358, no. 1, pp. 699–722, 2021.
- [62] T. Ménard, E. Moulay, and W. Perruquetti, “Fixed-time observer with simple gains for uncertain systems,” *Automatica*, vol. 81, pp. 438–446, 2017.
- [63] K. Zimenko, D. Efimov, A. Polyakov, and A. Kremlev, “On notions of output finite-time stability,” in *2019 18th European Control Conference (ECC)*, pp. 186–190, 2019.

-
- [64] M. Basin, “Finite-and fixed-time convergent algorithms: Design and convergence time estimation,” *Annual reviews in control*, vol. 48, pp. 209–221, 2019.
- [65] Q. Zhang and L. Zhang, “State estimation for stochastic time varying systems with disturbance rejection,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 15, pp. 55–59, 2018.
- [66] F. Ni, P. H. Nguyen, J. F. G. Cobben, H. E. Van den Brom, and D. Zhao, “Three-phase state estimation in the medium-voltage network with aggregated smart meter data,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 98, pp. 463–473, 2018.
- [67] J. Liu, Q. Su, M. Moreno, C. Laird, Z. Nagy, and G. Reklaitis, “Robust state estimation of feeding-blending systems in continuous pharmaceutical manufacturing,” *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 134, pp. 140–153, 2018.
- [68] Z. Liu, J. Liu, and L. Wang, “Disturbance observer based attitude control for flexible spacecraft with input magnitude and rate constraints,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 72, pp. 486–492, 2018.
- [69] Y. Yu, Z. Yang, C. Han, and H. Liu, “Disturbance-observer based control for magnetically suspended wheel with synchronous noise,” *Control Engineering Practice*, vol. 72, pp. 83–89, 2018.
- [70] X. Wang, X. Yin, Q. Wu, and F. Meng, “Disturbance observer based adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems with unmodeled dynamics,” *Neurocomputing*, vol. 313, pp. 247–258, 2018.
- [71] J. Sun, C. Wang, and R. Xin, “Anti-disturbance study of position servo system based on disturbance observer,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 4, pp. 202–207, 2018.
- [72] Q. Hu, G. Niu, and C. Wang, “Spacecraft attitude fault-tolerant control based on iterative learning observer and control allocation,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 75, pp. 245–253, 2018.
- [73] H. Xiong, Y. Liao, X. Chu, X. Nian, and H. Wang, “Observer based fault tolerant control for a class of two-PMSMs systems,” *ISA Transactions*, vol. 80, pp. 99–110, 2018.
- [74] N. Goldschmidt and H. Schulte, “Observer-based fault-tolerant control of DC-AC converters in wind turbines for ancillary service,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 24, pp. 1149–1156, 2018.

- [75] A. A. Bobtsov, A. Pyrkin Anton, R. S. Ortega, and A. A. Vedyakov, “A state observer for sensorless control of magnetic levitation systems,” *Automatica*, vol. 97, pp. 263–270, 2018.
- [76] E. Tranco, E. Ibarra, A. Arias, I. Kortabarria, P. Prieto, I. Martínez de Alegría, J. Andreu, and I. López, “Sensorless control strategy for light-duty EVs and efficiency loss evaluation of high frequency injection under standardized urban driving cycles,” *Applied Energy*, vol. 224, pp. 647–658, 2018.
- [77] M. L. Corradini, G. Ippoliti, and G. Orlando, “Fault-tolerant sensorless control of wind turbines achieving efficiency maximization in the presence of electrical faults,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 5, pp. 2266–2282, 2018.
- [78] R. Shi and X. Zhang, “Adaptive fractional-order non-singular fast terminal sliding mode control based on fixed time observer,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 236, no. 13, pp. 7006–7016, 2022.
- [79] H. Pan and G. Zhang, “Observer-based fixed-time control for nonlinear systems with enhanced nonsingular fast terminal sliding mode,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 29, no. 3-4, pp. 858–870, 2023.
- [80] H. Ju, F. Tao, N. Wang, Z. Fu, and H. Ma, “Observer-based fixed-time fuzzy tracking control for stochastic nonstrict nonlinear systems with hysteresis nonlinearity,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 0, no. 0, 2023. DOI: 10.1177/01423312221147950.
- [81] H. M. Becerra, C. R. Vázquez, G. Arechavaleta, and J. Delfin, “Predefined-time convergence control for high-order integrator systems using time base generators,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 5, pp. 1866–1873, 2018.
- [82] P. Morasso, V. Sanguineti, and G. Spada, “A computational theory of targeting movements based on force fields and topology representing networks,” *Neurocomputing*, vol. 15, no. 3, pp. 411–434, 1997. Recurrent Neural Networks.
- [83] V. Parra-Vega, “Chattering-free dynamical TBG adaptive sliding mode control of robot arms with dynamic friction for tracking in finite-time,” in *Proceedings 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, vol. 4, pp. 3471–3476 vol.4, 2001.

- [84] G. Jarquín, G. Arechavaleta, and V. Parra-Vega, “Time parametrization of prioritized inverse kinematics based on terminal attractors,” in *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1612–1617, 2011.
- [85] J. D. Sánchez-Torres, E. N. Sánchez, and A. G. Loukianov, “A discontinuous recurrent neural network with predefined time convergence for solution of linear programming,” in *2014 IEEE Symposium on Swarm Intelligence*, pp. 1–5, 2014.
- [86] J. D. Sánchez-Torres, E. N. Sánchez, and A. G. Loukianov, “Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes,” in *2015 American control conference (ACC)*, pp. 5842–5846, 2015.
- [87] E. Jiménez-Rodríguez, J. D. Sánchez-Torres, and A. G. Loukianov, “Predefined-time backstepping control for tracking a class of mechanical systems,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 1680–1685, 2017.
- [88] J. D. Sánchez-Torres, D. Gómez-Gutiérrez, E. López, and A. G. Loukianov, “A class of predefined-time stable dynamical systems,” *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 35, no. 1, pp. i1–i29, 2018.
- [89] E. Jiménez-Rodríguez, A. J. Muñoz-Vázquez, J. D. Sánchez-Torres, and A. G. Loukianov, “A note on predefined-time stability,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 13, pp. 520–525, 2018.
- [90] G. Arechavaleta, J. Obregón, H. M. Becerra, and A. Morales-Díaz, “Predefined-time convergence in task-based inverse dynamics using time base generators,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 13, pp. 443–449, 2018.
- [91] A. K. Pal, S. Kamal, S. K. Nagar, B. Bandyopadhyay, and L. Fridman, “Design of controllers with arbitrary convergence time,” *Automatica*, vol. 112, 2020.
- [92] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 13, pp. 3044–3054, 2021.
- [93] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez, “Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor system using linear time-varying control input,” *2021 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 1412–1417, 2021.
- [94] N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of full-scale 4D model of permanent-magnet synchronous motor with deterministic disturbances and stochastic noises,” *Actuators*, vol. 10, no. 11, 2021. DOI: 10.3390/act10110306.

- [95] N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of full-scale 4D permanent-magnet synchronous motor,” in *2021 IEEE 9th Conference on Systems, Process and Control (ICSPC 2021)*, pp. 81–85, 2021.
- [96] N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time control of 4D PMSM system using linear time-varying control input,” in *2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 147–152, 2022.
- [97] N. De La Cruz and M. Basin, “Predefined-time stabilization of 4D permanent-magnet synchronous motor system with deterministic and stochastic disturbances using linear time-varying control input,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2022.
- [98] E. Kayacan, “Sliding mode learning control of uncertain nonlinear systems with Lyapunov stability analysis,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, no. 6, pp. 1750–1760, 2019.
- [99] M. F. Emzir, M. J. Woolley, and P. I. R., “Stability analysis of quantum systems: A Lyapunov criterion and an invariance principle,” *Automatica*, vol. 146, 2022. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110660.
- [100] X.-Y. Zhang and J.-Q. Sun, “A note on the stability of linear dynamical systems with time delay,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 20, no. 10, pp. 1520–1527, 2014.
- [101] S. K. Y. Nikraves, *Nonlinear systems stability analysis: Lyapunov-based approach*. CRC Press, 2018.
- [102] S. Vaidyanathan and A. T. Azar, “Chapter 1: An introduction to backstepping control,” in *Backstepping Control of Nonlinear Dynamical Systems* (S. Vaidyanathan and A. T. Azar, eds.), *Advances in Nonlinear Dynamics and Chaos (ANDC)*, pp. 1–32, Academic Press, 2021.
- [103] J. Li, Y. Liu, and J. Yu, “A new result on semi-synchronous event-triggered backstepping robust control for a class of non-Lipschitzian networked systems,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 424, 2022. DOI: 10.1016/j.amc.2022.127027.
- [104] T. Jiang, D. Lin, and T. Song, “Finite-time backstepping control for quadrotors with disturbances and input constraints,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 62037–62049, 2018.
- [105] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.

- [106] P. Parsa, M. R. Akbarzadeh-T, and F. Baghbani, “Command-filtered backstepping robust adaptive emotional control of strict-feedback nonlinear systems with mismatched uncertainties,” *Information Sciences*, vol. 579, pp. 434–453, 2021.
- [107] J. Huang, Z. Lv, and J.-Q. Sun, “Optimal full-state feedback observer integrated backstepping control of chemical processes with unknown internal dynamics,” *ISA Transactions*, vol. 122, pp. 371–379, 2022.
- [108] P. M. S. Reddy, S. R. Shimjith, A. P. Tiwari, and S. Kar, “Backstepping based model reference adaptive control for nuclear reactor with matched and unmatched uncertainties,” *Progress in Nuclear Energy*, vol. 158, 2023. DOI: 10.1016/j.pnucene.2023.104585.
- [109] M. R. Junaid, L. M. Beebi, and C. Ashima, “Backstepping and adaptive backstepping control on robotic arm,” in *2015 International Conference on Control Communication & Computing India (ICCC)*, pp. 1–6, 2015.
- [110] K. Zheng, Q. Zhang, Y. Hu, and B. Wu, “Design of fuzzy system-fuzzy neural network-backstepping control for complex robot system,” *Information Sciences*, vol. 546, pp. 1230–1255, 2021.
- [111] Z. He, L. Zhao, and L. Zhao, “Robust chattering free backstepping/backstepping sliding mode control for quadrotor hovering,” in *2016 IEEE Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference*, pp. 616–620, 2016.
- [112] I.-H. Choi and H.-C. Bang, “Adaptive command filtered backstepping tracking controller design for quadrotor unmanned aerial vehicle,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 226, no. 5, pp. 483–497, 2012.
- [113] S. Luo, G. Yang, J. Li, and H. M. Ouakad, “Dynamic analysis, circuit realization and accelerated adaptive backstepping control of the FO MEMS gyroscope,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 155, 2022. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111735.
- [114] F. Li, S. Luo, G. Yang, and H. M. Ouakad, “Dynamical analysis and accelerated adaptive backstepping funnel control for dual-mass MEMS gyroscope under event trigger,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 168, 2023. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113116.
- [115] T. Aounallah, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui, “Fractional-order adaptive fuzzy backstepping algorithm for automated control of blood glucose in diabetes mellitus type 1 patients,” in *4th IFAC Conference on Embedded Systems, Computational Intelligence and Telematics in Control (CESCIT) 2021*, pp. 183–188, 2021.

- [116] M. M. Zirkohi and T. Kumbasar, “Adaptive backstepping controller design for MIMO cancer immunotherapy using Laguerre polynomials,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 8, pp. 4664–4679, 2020.
- [117] M. Junjie and M. Shujing, “Adaptive backstepping control of chaotic systems with unknown parameters,” in *2010 International Conference on Electrical and Control Engineering*, pp. 339–342, 2010.
- [118] S. Yan, J. Wang, E. Wang, Q. Wang, X. Sun, and L. Li, “A four-dimensional chaotic system with coexisting attractors and its backstepping control and synchronization,” *Integration*, vol. 91, pp. 67–78, 2023.
- [119] J. Wang, C. Wang, S. Jia, S. Xiang, and X. Shan, “Photovoltaic power MPPT controller based on fuzzy-backstepping method,” in *2019 8th International Symposium on Next Generation Electronics (ISNE)*, pp. 1–3, 2019.
- [120] A. Charaabi, A. Zaidi, O. Barambones, and N. Zanzouri, “Implementation of adjustable variable step based backstepping control for the PV power plant,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 136, 2022. DOI: 10.1016/j.ijepes.2021.107682.
- [121] Y. Huang, R. Qi, B. Jiang, and G. Tao, “Adaptive failure compensation design for hypersonic vehicle based on dynamic surface backstepping control,” in *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, pp. 5305–5310, 2012.
- [122] S. Q. Liu and J. F. Whidborne, “Observer-based incremental backstepping sliding-mode fault-tolerant control for blended-wing-body aircrafts,” *Neurocomputing*, vol. 464, pp. 546–561, 2021.
- [123] L. Wang, Y. Sheng, and X. Liu, “Continuous time-varying sliding mode based attitude control for reentry vehicle,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 229, no. 2, pp. 197–220, 2015.
- [124] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding mode control and observation*, vol. 10. Springer, 2014.
- [125] E. L. Stewart, “Noise reduction on interconnect lines,” *Simulation*, vol. 5, no. 3, pp. 149–155, 1965.
- [126] J. M. Ernst, D. Lamba, J. V. Krogmeier, and D. M. Bullock, “Crosstalk detection in signalized-intersection loop detectors,” *Transportation Research Record*, vol. 2192, no. 1, pp. 50–63, 2010.

- [127] Z. Zhong, H. Zuo, and H. Jiang, “A nonlinear total variation based denoising method for electrostatic signal of low signal-to-noise ratio,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 14, no. 11, 2022. DOI: 10.1177/16878132221136942.
- [128] I. Bashkirtseva, “Stochastic sensitivity of systems driven by colored noise,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 505, pp. 729–736, 2018.
- [129] M. Pachter and M. M. Briggs, “Simulation of white noise in dynamical systems,” *Simulation*, vol. 56, no. 1, pp. 19–25, 1991.
- [130] Y. Zhang, X. Ning, Z. Wang, and D. Yu, “High-order disturbance observer-based neural adaptive control for space unmanned systems with stochastic and high-dynamic uncertainties,” *IEEE Access*, vol. 9, pp. 77028–77043, 2021.
- [131] L. Xu, Y. Yu, and Y. Cui, “Active vibration control for seismic excited building structures under actuator saturation, measurement stochastic noise and quantisation,” *Engineering Structures*, vol. 156, pp. 1–11, 2018.
- [132] W. Liu and R. Chi, “Iterative learning control for nonlinear nonaffine networked systems with stochastic noise in communication channels,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 14, pp. 3158–3168, 2021.
- [133] A. Javadi, M. R. Jahed-Motlagh, and A. A. Jalali, “Robust H_∞ control of stochastic linear systems with input delay by predictor feedback,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 40, no. 7, pp. 2396–2407, 2018.
- [134] R. Stocker, “Non-mains noise filtration and data-logging accuracy,” *Measurement and Control*, vol. 17, no. 10, pp. 388–389, 1984.
- [135] G. Wang, G. Zhang, and D. Xu, *Position Sensorless Control Techniques for Permanent Magnet Synchronous Machine Drives*. Springer Singapore, 2019.
- [136] M. Basin and F. G. Avellaneda, “Continuous fixed-time controller design for dynamic systems with unmeasurable states subject to unbounded disturbances,” *Asian Journal of Control*, vol. 21, pp. 194–207, 2019.
- [137] S. M. Research, “Electric motor market.” <https://www.strategicmarketresearch.com/market-report/electric-motor-market>, 2022. Accessed March, 2023.
- [138] P. Waide and C. U. Brunner, “Energy-efficiency policy opportunities for electric motor-driven systems.” <https://www.iea.org/reports/energy-efficiency-policy-opportunities-for-electric-motor-driven-systems>, 2011. Accessed March, 2023.
- [139] R. Krishnan, *Electric motor drives: modeling, analysis, and control*. Pearson, 2001.

-
- [140] D. Ertl and L. Weber, “A method for real-time sensorless speed control of brushed DC motors in cost constrained systems,” in *2020 2nd Global Power, Energy and Communication Conference (GPECOM)*, pp. 152–157, 2020.
- [141] Y. Kambara, S. Uozumi, and K. Ohnishi, “Disturbance suppression method for position-sensorless motion control of DC brushed motor,” in *2015 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*, pp. 194–199, 2015.
- [142] I. Boldea and L. N. Tutelea, *Electric Machines: Transients, Control Principles, Finite Element Analysis, and Optimal Design with MATLAB*. CRC Press, 2021.
- [143] P. C. Krause, O. Wasynczuk, and S. D. Pekarek, *Electromechanical motion devices*, vol. 90. John Wiley & Sons, 2012.
- [144] M. Torrent, J. I. Perat, and J. A. Jiménez, “Permanent magnet synchronous motor with different rotor structures for traction motor in high-speed trains,” *Energies*, vol. 11, no. 6, 2018. DOI: 10.3390/en11061549.
- [145] T. Rudnicki, R. Czerwiński, and A. Frkechowicz, “Permanent magnet synchronous motor control driver,” in *Proceedings of the 18th International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems (MIXDES)*, pp. 545–548, 2011.
- [146] X. Wu and B. Zhang, “Sensorless model reference adaptive control of permanent magnet synchronous motor for industrial robots,” in *2019 8th International Symposium on Next Generation Electronics (ISNE)*, pp. 1–3, 2019.
- [147] S. Eriksson, “Design of permanent-magnet linear generators with constant-torque-angle control for wave power,” *Energies*, vol. 12, no. 7, 2019. DOI: 10.3390/en12071312.