

# ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS Y SEMI-NUMÉRICAS DE UN MODELO DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN PARA UN MEDIO POROSO HETEROGÉNEO

E.C. Herrera-Hernández<sup>1,\*</sup>, Roxana Cortés-Martínez<sup>1</sup>, Alejandro Valdés-López<sup>1</sup>,  
Alejandro Alonzo-García<sup>2</sup> & Carlos G. Aguilar-Madera<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centro de Investigación y Estudios de Posgrado, Facultad de Ciencias Químicas, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Av. Dr. Manuel Nava 6, Zona Universitaria, 78210, San Luis Potosí, México

<sup>2</sup> CONACyT-Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Nuevo León-Centro de Investigación e innovación Tecnológica. Av. De la Alianza No. 507, Parque de Investigación e Innovación Tecnológica, Autopista al Aeropuerto Internacional Mariano Escobedo Km. 10, Apodaca Nuevo León. C.P. 66629, México

<sup>3</sup> Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias de la Tierra, Ex-Hacienda de Guadalupe 67700, Linares, N.L. México

\* [erik.herrera@uaslp.mx](mailto:erik.herrera@uaslp.mx)

## Resumen

En este estudio se comparan las soluciones numéricas y semi-numéricas de un modelo matemático para el transporte de un trazador en un medio poroso, y cuya solución no es posible por métodos analíticos. El modelo consiste en una ecuación diferencial parcial en coordenadas radiales, el cual describe el transporte advectivo-difusivo de un trazador en un medio poroso heterogéneo. Se observó que el método de diferencias finitas explícito es inestable, mientras que el método híbrido (diferencias finitas-transformada de Laplace), y el método de diferencias finitas implícito son más robustos. Estos últimos métodos producen idénticas soluciones. Sin embargo, el método implícito está restringido por la discretización del paso temporal, mientras que el método híbrido depende del número de términos que se usen durante la inversión numérica. La solución híbrida presenta ventajas sobre la implícita debido a su estabilidad menos restringida relacionada con los parámetros de discretización.

## Palabras clave

Advección-difusión, ecuaciones diferenciales parciales, diferencias finitas, transformada de Laplace.

## Abstract

This study compares numerical and semi-numerical solutions of a tracer transport model in an analytically unsolvable porous medium. The model represents a parabolic partial differential equation in radial coordinates, describing the advective-diffusive transport of a tracer in a heterogeneous porous medium. It was observed that the explicit finite difference method is unstable when applied to the model, whereas the hybrid approach (Laplace transform-finite differences) and the implicit finite difference method are more robust. Both the implicit finite difference method and the semi-numerical approach yield identical solutions. However, the

---

Herrera-Hernández, E.C., Cortés-Martínez, R., Valdés-López, A., Alonzo-García, A. & Aguilar-Madera, C.G. (2023): Análisis comparativo de las soluciones numéricas y semi-numéricas de un modelo de advección-difusión para un medio poroso heterogéneo. – en: Montalvo Arrieta, J.C., Ramírez Fernández, J.A., Aguilar-Madera, C.G., Jenchen, U., Salinas Jasso, J.A., Velasco-Tapia, F. & Navarro-de León, I. (eds.): Número especial en conmemoración del 90° Aniversario de la Universidad Autónoma de Nuevo León y del 40° Aniversario de la Facultad de Ciencias de la Tierra. – Actas de la Facultad de Ciencias de la Tierra, UANL, Linares, **9** (2023): 73-81.

implicit method is constrained by the discretization of the temporal derivative, whereas the hybrid method depends on the number of terms in the numerical inversion. The hybrid solution is preferable over the implicit one due to its less restrictive stability concerning discretization parameters.

## Keywords

Advection-diffusion, numerical methods, partial differential equations, Laplace transform

## Introducción

El empleo de herramientas numéricas en ciencias e ingeniería surge de la necesidad de abordar problemas no lineales derivados de modelos matemáticos en fenómenos físicos. Esto se debe a que algunos problemas carecen de soluciones analíticas explícitas o requieren transformaciones especializadas. Por ejemplo, describir el flujo de fluidos en medios porosos o el transporte de calor en sólidos plantea desafíos donde las soluciones analíticas sólo son posibles bajo ciertas suposiciones que implican simplificaciones en la física del fenómeno. Cuando se buscan minimizar las suposiciones, la complejidad aumenta, lo que dificulta encontrar soluciones directas (Gilat & Subramaniam, 2017).

Las técnicas numéricas son una alternativa para la solución de problemas para los cuales no es posible determinar las soluciones analíticas. Éstas pueden ser aplicadas a modelos algebraicos, lineales y no lineales, y a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Tienen la ventaja de reducir el orden del problema a resolver, sin embargo, el precio que se paga es que el número de ecuaciones a resolver se incrementa. Por ejemplo, si se tiene una ecuación diferencial parcial y se requiere obtener la solución numérica con diferencias finitas, la discretización del espacio y del tiempo con los esquemas numéricos apropiados genera un sistema de ecuaciones algebraicas lineales si la ecuación es lineal o no lineal en el otro caso (Burden et al., 2016).

El método de diferencias finitas ha sido ampliamente utilizado para resolver problemas complejos, y la razón de ello es su fácil implementación en un lenguaje de programación de alto nivel como Matlab, Fortran o Python. Éstas se clasifican como implícitas o explícitas. Las diferencias finitas explícitas emplean esquemas numéricos de los operadores diferenciales de manera que la evolución en el tiempo de la o las variables dependientes puede despejarse en función de estados anteriores de las mismas. La implementación de este tipo de aproximaciones es muy sencilla de obtener, pero tienen la desventaja de que su estabilidad está severamente comprometida por los parámetros relacionados con las discretizaciones de las variables independientes espacial y temporal. Por otra parte, los métodos implícitos son más robustos y la condición de

estabilidad no es tan severa como en el caso anterior, sin embargo, su implementación es mucho más complicada y demanda una mayor cantidad de tiempo de cómputo ya que es necesaria la inversión y manipulación de matrices derivadas del proceso de discretización (Zheng & Li, 2022).

En este contexto, se ha popularizado el empleo de métodos híbridos para resolver problemas dinámicos complejos. En particular, la combinación del método de transformada de Laplace con diferencias finitas ha destacado debido a sus ventajas, especialmente en la eliminación de problemas de estabilidad numérica asociados con la discretización temporal. Este enfoque implica transformar el modelo dinámico original al dominio de Laplace, donde el parámetro de Laplace reemplaza las derivadas temporales. En este dominio, el modelo se simplifica, convirtiendo ecuaciones diferenciales parciales en ordinarias y las ordinarias en algebraicas. Sin embargo, y si la solución analítica en el espacio de Laplace no es posible, se requiere discretizar el dominio espacial el modelo transformado para obtener la solución en cada punto del espacio. Una vez transformados tanto el dominio espacial como el temporal y se debe utilizar un algoritmo de inversión numérica [como el de Stehfest (1970) o el de De Hoog et al. (1982)] para determinar la solución en el dominio del tiempo. Esta alternativa es conocida como aproximación semi-numérica, pues es numérica en el espacio y semi-numérica en el tiempo (Herrera-Hernández et al., 2017, Abduxamidov, 2023).

Considerando lo anterior, en este trabajo, se lleva a cabo un análisis comparativo de la solución de un modelo matemático que describe el fenómeno de advección-difusión de un trazador en un medio poroso heterogéneo. El problema de advección-difusión se describe con una ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden con coeficientes variables y en coordenadas radiales. La solución numérica es aproximada con el método de Euler implícito y explícito, mientras que la aproximación semi-numérica se lleva a cabo con el método híbrido de transformada de Laplace con diferencias finitas.

## Materiales y métodos

El problema asociado al modelo aborda el transporte de un trazador en un medio poroso heterogéneo. La condición analizada consiste en la inyección continua un fluido, como

agua, en un medio poroso con flujo radialmente cilíndrico. Sobre el fluido se inyecta de manera continua un trazador, como una sal o agua tritiada, en pequeñas cantidades que no afectan el flujo total. El trazador es monitoreado en diferentes puntos del medio poroso para identificar y propiedades del medio. En ingeniería de yacimientos se conoce como prueba de trazadores. Las pruebas de trazadores se emplean en campo para caracterizar yacimientos petroleros o geotérmicos y acuíferos, proporcionando información crucial sobre propiedades del

yacimiento, como la conectividad entre pozos, volumen de reservas y porosidades. El modelo matemático que describe el transporte de trazador en un medio como el descrito previamente está dado por la Ecuación (1) donde  $r$  es la posición a partir del punto de inyección,  $c$  es la concentración de trazador y  $J_r$  es el flux total de trazador dado por la Ecuación (2), siendo la constante  $\eta_{12}$  descrita por la Ecuación (3). Los detalles de los parámetros y la deducción del modelo pueden consultarse en el trabajo de [Herrera-Hernández et al. \(2013\)](#).

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^\alpha J_r) = 0 \quad (1)$$

$$J_r = \frac{M_F \Gamma(\alpha)}{2\pi\phi_0\rho_0} r^{-\alpha} c - D_0 L^0 r^{-\theta} \frac{dc}{dr} \quad (2)$$

$$\eta_{12} = \frac{2^{(d-2)} \Gamma(d/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (3)$$

La condición inicial es que inicialmente no hay trazador en el medio poroso, esto es equivalente a (4) donde,  $r_w$  es el radio del pozo. El dominio es un cilindro de altura  $h$  con radio interior  $r_w$  y radio exterior  $L$ .

$$c(r > r_w, 0) = 0 \quad (4)$$

Las condiciones de frontera interior es que la concentración de trazador es constante en la cara del pozo (5), mientras que la condición de frontera en el radio exterior es que el flujo dispersivo es cero (6).

$$c(r_w, t) = C_0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

Definiendo las siguientes constantes en función de parámetros del modelo:

$$\hat{U} = \frac{M_F \Gamma(\alpha)}{2\pi\phi_0\rho_0} \quad (7)$$

$$\hat{D} = D_0 L^0 \quad (8)$$

y desarrollando el álgebra correspondiente se arriba a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \left[ \hat{U} - \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \hat{U} (\alpha - \theta) r^{\alpha-\theta-1} \right] \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \hat{D} r^{\alpha-\theta} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \quad (9)$$

Definiendo las siguientes funciones,

$$f_2(r) = \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \left[ \hat{U} - \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \hat{D} (\alpha - \theta) r^{\alpha-\theta-1} \right] \quad (10)$$

$$f_3(r) = \frac{\eta_{12}}{r^{d-1}} \hat{D} r^{\alpha-\theta} \quad (11)$$

la ecuación de transporte puede reescribirse como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -f_2(r) \frac{\partial c}{\partial r} + f_3(r) \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \quad (12)$$

En lo que sigue se aplica el método de diferencias finitas y el de transformadas de Laplace con diferencias finitas. Para ello se hace las siguientes simplificaciones en las funciones de la Ecuación (12):  $f_{2i} = f_2(r_i)$  y  $f_{3i} = f_3(r_i)$

## Método de Euler Explícito

Se usa la siguiente discretización para la derivada temporal

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \quad (13)$$

mientras que para las derivadas de primer y segundo orden se tiene

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta r} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = \frac{c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n}{\Delta r^2} \quad (15)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (14) y (15) en (12) se llega a la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = -f_{2i} \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta r} + f_{3i} \frac{c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n}{\Delta r^2} \quad (16)$$

de donde la solución para el  $i$ -ésimo nodo puede despejarse de la siguiente manera:

$$c_i^{n+1} - c_i^n = \frac{-f_{2i} \Delta t}{\Delta r} (c_i^n - c_{i-1}^n) + \frac{f_{3i} \Delta t}{\Delta r^2} (c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n) \quad (17)$$

Si definimos los coeficientes

$$a_i = \frac{-f_{2i} \Delta t}{\Delta r^2} \quad (18)$$

$$b_i = \frac{f_{3i} \Delta t}{\Delta r^2} \quad (19)$$

y reescribimos la Ecuación (17) con los coeficientes de las Ecuaciones (18) y (19) se llega a la siguiente ecuación explícita:

$$c_i^{n+1} - c_i^n = a_i (c_i^n - c_{i-1}^n) + b_i (c_{i-1}^n - 2c_i^n + c_{i+1}^n) \quad (20)$$

Reagrupando los términos se tiene

$$c_i^{n+1} = (-a_i + b_i)c_{i-1}^n + (a_i - 2b_i - 1)c_i^n + b_i c_{i+1}^n \quad (21)$$

La ecuación anterior es válida para los nodos  $2 \leq i \leq M - 1$ . Para cerrar la solución hace falta utilizar las condiciones de frontera que corresponden a los nodos  $i = 1$  para el radio del pozo y  $i = M$  para la frontera exterior del sistema.

Para la frontera interior, en  $i = 1$  se sabe que  $c(r_w, t) = C_0$ , la ecuación correspondiente al primer nodo está dada por:

$$c_1^n = C_0 \quad (22)$$

mientras que la frontera exterior,  $i = M$ , se sabe que se impuso flux difusivo cero,  $\frac{\partial c}{\partial r} = 0$ , que de forma discretizada con diferencias finitas centradas es

$$\frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta r} = 0 \quad (23)$$

$$c_{M+1}^n = c_{M-1}^n \quad (24)$$

De la sustitución de la Ecuación (24) en **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** se obtiene la ecuación para el nodo de la frontera dada por:

$$c_M^{n+1} = (-a_i + 2b_i)c_{M-1}^n + (a_i - 2b_i + 1)c_M^n \quad (25)$$

Las Ecuaciones (21), (22) y (25) constituyen el esquema de solución numérica por diferencias finitas explícitas.

## Método de Euler Implícito

Las Ecuaciones (21), (22) y (25) constituyen el esquema de solución numérica por diferencias finitas explícitas.

## Método de Euler Implícito

Empleando el método implícito de Euler se utilizan las siguientes discretizaciones para las derivadas parciales temporales y espaciales

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \quad (26)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = \frac{c_{i-1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i+1}^{n+1}}{\Delta r^2} \quad (28)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la Ecuación (12) se obtiene la siguiente ecuación discretizada:

$$c_i^{n+1} - c_i^n = \frac{-f_2 \Delta t}{2\Delta r} (c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}) + \frac{f_3 \Delta t}{\Delta r^2} (c_{i-1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i+1}^{n+1}) \quad (29)$$

Utilizando las definiciones de los coeficientes dadas por (18) y (19) y reescribiendo (29)

$$c_i^{n+1} - c_i^n = a_i (c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}) + b_i (c_{i-1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i+1}^{n+1}) \quad (30)$$

Reagrupados términos y realizando el álgebra correspondiente, se llega a la siguiente ecuación implícita:

$$(a_i - b_i)c_{i-1}^{n+1} + (1 + 2b_i)c_i^{n+1} - (a_i + b_i)c_{i+1}^{n+1} = c_i^n \quad (31)$$

Para cerrar el sistema de ecuaciones lineales a resolver se utilizan las condiciones de frontera dadas por (22) para el primer nodo  $i = 1$ .

Para los nodos interiores  $2 \leq i \leq M - 1$  se utiliza la Ecuación (31), donde  $M$  es el número máximo de ecuaciones (nodos de discretización) en el sistema algebraico. Para el último nodo del dominio o frontera exterior se utiliza la condición de flux difusivo cero dada por (23) en ese punto, de donde se obtiene el nodo *fantasma* que aparece en la ecuación para el último nodo

$$c_{M+1}^{n+1} = c_{M-1}^{n+1} \quad (32)$$

$$-2b_i c_{M-1}^{n+1} + (1 + b_i)c_M^{n+1} = c_M^n \quad (33)$$

El esquema de solución numérica implícita está dado por las Ecuaciones (22), (31) y (33). Para su implementación es necesario resolver el sistema de ecuaciones lineales generado por las ecuaciones para los nodos.

Nótese que el conjunto de ecuaciones puede resumirse de la siguiente manera:

$c_1^{n+1} = c_0$  para el nodo 1,  $(1 + 2b_2)c_2^{n+1} - (a_2 + b_2)c_3^{n+1} = (-a_2 + b_2)c_1^{n+1}$  para el segundo nodo,  $(a_i - b_i)c_{i-1}^{n+1} + (1 + 2b_i)c_i^{n+1} - (a_i + b_i)c_{i+1}^{n+1} = c_i^n$  para los nodos intermedios  $2 \leq i \leq M - 1$  y  $b_i c_{M-1}^{n+1} + (1 + b_i)c_M^{n+1} = c_M^n$  para el nodo de la frontera exterior. Este conjunto de ecuaciones lineales algebraicas admite una representación en forma matricial dada por:

$$Ac^{n+1} = Bc^n + b \quad (33)$$

Donde  $A$  y  $B$  las son matrices de coeficientes que corresponden a la discretización, mientras que  $c^n$  y  $c^{n+1}$  son los vectores de concentración evaluados en  $n$  y  $n+1$ , respectivamente;  $b$  es un vector de constantes que surge por la condición de frontera interior, el cual es cero en todos lados excepto en los primeros dos elementos.

## Solución semi-numérica del modelo. Método de diferencias finitas con transformada de Laplace

Partiendo de la Ecuación (12), la aplicación de la transformada de Laplace sobre esta ecuación produce

$$s\bar{c} - c(0) = -f_2(r) \frac{d\bar{c}}{dr} + f_3(r) \frac{d^2\bar{c}}{dr^2} \quad (35)$$

donde  $\bar{c}$  es la transformada de Laplace de  $c$  dada por

$$\bar{c} = \mathcal{L}\{c(r, t)\} = \int_0^\infty c(r, t)e^{-st} ds \quad (36)$$

La discretización de las derivadas espaciales de primero y segundo orden se obtuvieron con esquemas de diferencias finitas centradas y están dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{d\bar{c}}{dr} = \frac{\bar{c}_{i+1} - \bar{c}_{i-1}}{2\Delta r} \quad (37)$$

$$\frac{d^2\bar{c}}{dr^2} = \frac{\bar{c}_{i-1} - 2\bar{c}_i + \bar{c}_{i+1}}{\Delta r^2} \quad (38)$$

Sustituyendo las discretizaciones y la transformada de Laplace para la derivada temporal en (12) se llega a

$$s\bar{c}_i - c(0) = \frac{-f_{2i}}{2\Delta r}(\bar{c}_{i+1} - \bar{c}_{i-1}) + \frac{f_{3i}}{\Delta r^2}(\bar{c}_{i-1} - 2\bar{c}_i + \bar{c}_{i+1}) \quad (39)$$

Si se utilizan los coeficientes definidos en las Ecuaciones (18) y (19) y se toma la condición inicial definida en (4) que establece  $c(0) = 0$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales en el espacio de Laplace:

$$(a_i - b_i)\bar{c}_{i-1} + (s + 2b_i)\bar{c}_i - (a_i + b_i)\bar{c}_{i+1} = 0 \quad (40)$$

Con la ecuación anterior se genera un sistema lineal algebraico tri-diagonal que depende del parámetro  $s$ . Para cerrar el sistema se utilizan las ecuaciones respectivas para los nodos de las fronteras, en el dominio de Laplace. La ecuación de la frontera interior  $c(r_w, t) = C_0$ , en el dominio de Laplace tiene la forma:

$$\bar{c}_i = C_0 / s \quad (41)$$

Mientras que la ecuación para la frontera exterior tiene la forma,

$$\frac{\bar{c}_{M+1} - \bar{c}_{M-1}}{2\Delta r} = 0 \quad (42)$$

de donde se tiene que,

$$\bar{c}_{M+1} = \bar{c}_{M-1} \quad (43)$$

Aplicando la transformada de Laplace en la Ecuación (12) con flujo advectivo cero e igualando a cero, se obtiene que

$$s\bar{c}_M = f_{3i} \frac{\bar{c}_{M-1} - 2\bar{c}_M + \bar{c}_{M+1}}{\Delta r^2} \quad (44)$$

$$-2\bar{c}_{M-1} + \left( s \frac{\Delta r^2}{f_{3i}} - 2 \right) \bar{c}_M = 0 \quad (45)$$

Las ecuaciones para los nodos de discretización y que dependen del parámetro de Laplace se presentan a continuación:

$$\bar{c}_1 = 1/s \quad (46)$$

$$(s + 2b_2)\bar{c}_2 - (a_2 + b_2)\bar{c}_3 = -(a_2 + b_2)\frac{1}{s} \quad (47)$$

$$(a_i - b_i)\bar{c}_{i-1} + (s + 2b_i)\bar{c}_i - (a_i + b_i)\bar{c}_{i+1} = 0 \quad (48)$$

$$-2\bar{c}_{M-1} + \left( s \frac{\Delta r^2}{f_3} - 2 \right) \bar{c}_M = 0 \quad (47)$$

$$(a_i - b_i)\bar{c}_{i-1} + (s + 2b_i)\bar{c}_i - (a_i + b_i)\bar{c}_{i+1} = 0 \quad (48)$$

$$-2\bar{c}_{M-1} + \left( s \frac{\Delta r^2}{f_3} - 2 \right) \bar{c}_M = 0 \quad (49)$$

Con este conjunto de ecuaciones y utilizando un algoritmo de inversión numérica se obtiene la solución semi-numérica la cual se compara con la numérica.

## Resultados

Para obtener la solución numérica o semi-numérica se fijaron algunos parámetros del modelo y se evaluó el efecto de otros. Los parámetros que se mantuvieron fijos se presentan en la Tabla 1. Mientras que los parámetros que se modificaron para verificar la solución se presentan en la Tabla 2.

**Tabla 1: Parámetros fijos utilizados para obtener las soluciones numéricas y semi-numéricas.**

Parámetro	Valor	Unidad de medición
$D_0$	5.0	$m^{d+1-\alpha}/día$
$L$	250	$m$
$M_f$	$1 \times 10^5$	$kg/día$
$\phi$	0.02	adimensional
$\rho_0$	1000	$kg/m^d$
$h$	250	$m$
$M$	800	adimensional
$N$	200	adimensional

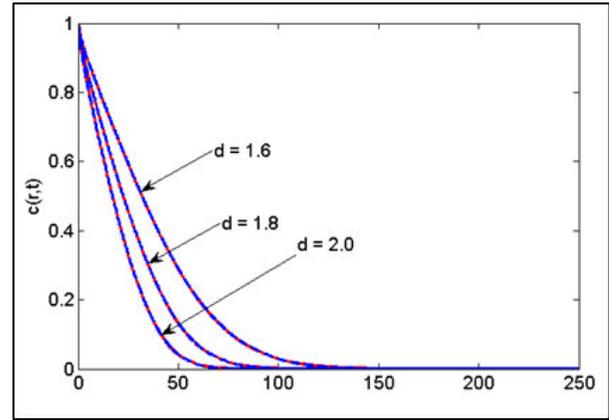
La comparación entre las soluciones numéricas y semi-numéricas se realiza a través del perfil de concentraciones y de la curva de arribo de trazador a un punto de observación. El perfil de concentraciones describe la distribución espacial del trazador en el medio poroso para un tiempo de observación. Por otra parte, la curva de arribo describe la llegada del trazador en función del tiempo para un punto de observación en el dominio. Se presenta el efecto de algunos de los parámetros en el perfil radial como en la curva de arribo. En las figuras, la solución numérica está graficada con línea continua en color rojo, mientras que la solución semi-numérica con línea punteada de color azul.

**Tabla 2: Parámetros variables utilizados para obtener las soluciones.**

Parámetros	Valores		
$d$	1.6	1.8	2.0
$\alpha$	0.6	0.8	1.0
$\theta$	0.1	0.3	0.5

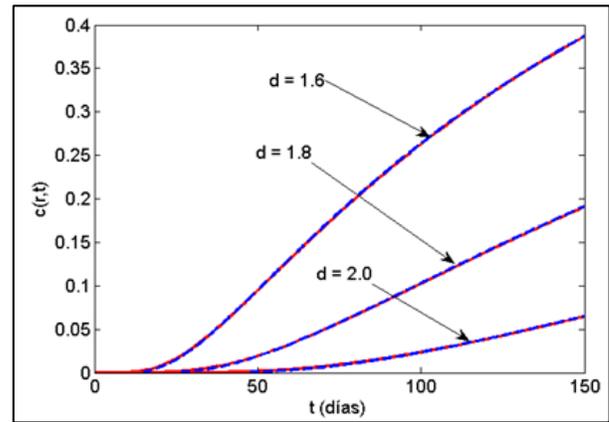
En las Figuras 1 y 2 se presentan la comparación de la solución numérica con la solución semi-numérica para distintos valores del parámetro  $d$ . Se observa que ambas soluciones dan la misma solución pues se encuentran superpuestas. El efecto del parámetro  $d$  sobre el perfil radial, Figura 1, para  $t = 75$  días, es tal que a medida que éste se incrementa el trazador cubre o barre un área menor, pues para  $d = 1.6$  el trazador llega hasta  $150 m$  del punto de inyección, mientras que para  $d = 2.0$  llega a penas hasta  $75 m$  aproximadamente. Respecto a la curva de arribo del trazador, Figura 2, para  $r = 6.5 m$ , se observa que el trazador

aparece en el punto de observación a tiempos más cortos para  $d = 1.6$  que para  $d = 2$ , pues, aproximadamente, para el primer caso aparece a  $t = 20$  días, mientras que para el segundo caso a  $t = 50$  días.



**Figura 1: Perfil radial de concentración para  $t = 75$  días.**

En la Figura 1 se muestra la gráfica del perfil radial de la concentración para un tiempo fijo de muestreo en  $t = 75$  días en función del parámetro  $d = \{1.6, 1.8, 2.0\}$ , para valores fijos para  $\alpha = 0.8$  y  $\theta = 0.25$ . En la Figura 2 se muestra la curva de arribo del trazador en un punto del dominio que corresponde a  $r = 62.5 m$  con los mismos parámetros.



**Figura 2: Curva de arribo para  $r = 62.5 m$ .**

En las Figuras 3 y 4 se presenta la comparación de las soluciones numéricas y semi-numéricas para distintos valores de  $\alpha$ . Nuevamente se observa que ambos métodos de solución arrojan resultados similares y que la solución puede obtenerse de manera indistinta por una u otra metodología. Cabe mencionar que el método híbrido de transformada de Laplace/diferencias finitas consume menos tiempo que el puramente numérico, y esto podría ser un criterio determinante para la decisión de cuál

método utilizar, principalmente en problemas de más dimensiones.

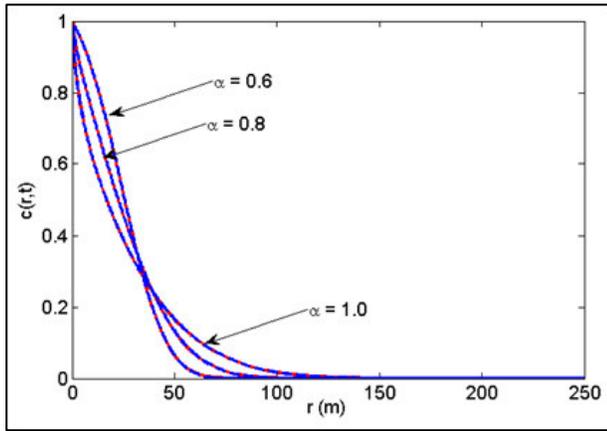


Figura 3: Perfil radial de concentración para  $t = 75$  días.

En la Figura 3 se observa el perfil radial de la concentración para un tiempo fijo de muestreo en  $t = 75$  días en función del parámetro  $\alpha = \{0.6, 0.8, 1.0\}$ , con valores fijos para  $d = 1.8$  y  $\theta = 0.25$ . En la Figura 4 se observa la curva de arribo del trazador en un punto del dominio que corresponde a  $r = 62.5$  m para los mismos parámetros.

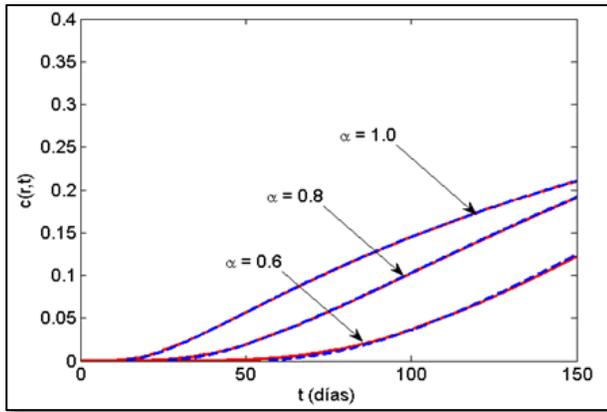


Figura 4: Curva de arribo para  $r = 62.5$  m.

Respecto al efecto del parámetro  $\alpha$ , se observa que es contrario al producido por  $d$ . En el caso del perfil de concentraciones, Figura 3, a medida que el parámetro se incrementa de  $0.6$  a  $1$  se observa que el trazador barre una zona mayor del dominio. Por otro lado, en la curva de arribo, Figura 4, se observa que el trazador aparece en menor tiempo en el punto de monitoreo a medida que el parámetro crece.

En las Figuras 5 y 6 se presentan la comparación entre las soluciones numérica y semi-numérica para distintos valores del parámetro  $\theta$ . Se observa coincidencia en ambas soluciones al igual que los otros casos. El efecto del parámetro en el perfil radial para un tiempo fijo de monitoreo, Figura 5, se asocia con un incremento en la zona barrida por el trazador a medida que

dicho parámetro se incrementa. Por otra parte, en la curva de arribo, Figura 6, se aprecia que el trazador llega más rápido al punto de observación para valores mayores del parámetro.

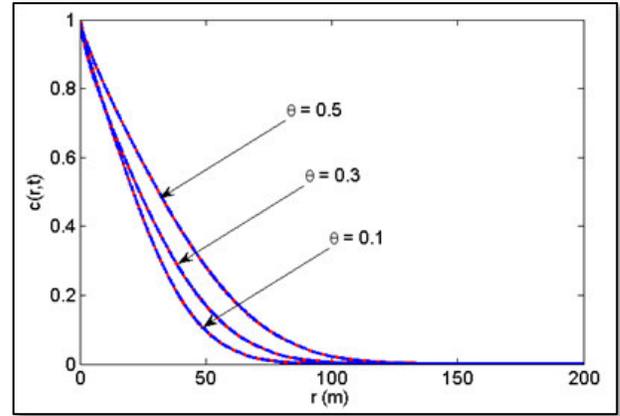


Figura 5: Perfil radial de la concentración para  $t = 75$  días.

En la Figura 5 se observa el perfil radial de la concentración para un tiempo fijo de muestreo en  $t = 75$  días en función del parámetro  $\theta = \{0.1, 0.3, 0.5\}$  con valores fijos para  $d = 1.8$  y  $\alpha = 0.8$ . En la Figura 6 se observa la curva de arribo del trazador en un punto del dominio que corresponde a  $r = 62.5$  m a para los mismos parámetros.

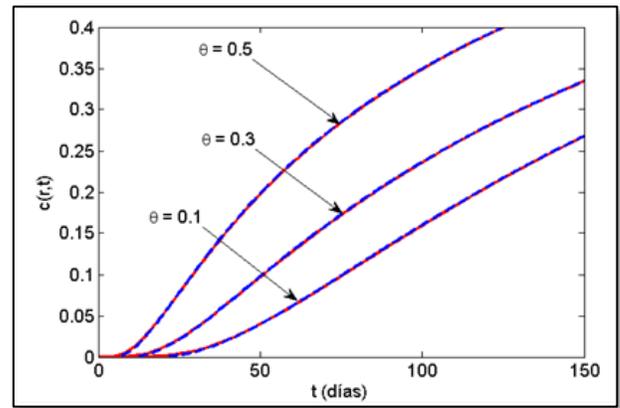


Figura 6: Curva de arribo para  $r = 62.5$  m.

Se observa de manera consistente que la solución numérica y la semi-numérica dan el mismo resultado para diferentes valores de los parámetros del modelo. Desde el punto de vista de la implementación computacional, la solución numérica es más fácil de implementar y requiere de menos recursos que la solución numérica implícita. Sin embargo, la solución semi-numérica tiene problemas para obtener la solución numérica a tiempos cortos como se ilustra en las Figuras 2, 4 y 6 para tiempos menores a 25 días. Esto puede representar una desventaja en su uso para el monitoreo de yacimiento en sus inicios de explotación. En contraste, la solución numérica implícita da resultados consistentes en todo el horizonte de tiempo de la

simulación con la limitante de que requiere de esquemas mucho más complejos para su implementación.

## Conclusiones

Los resultados demuestran que tanto la solución numérica como la semi-numérica ofrecen resultados consistentes para diversas configuraciones de parámetros del modelo. Aunque la solución semi-numérica es más fácil de implementar y requiere menos recursos computacionales en comparación con la implícita, la semi-numérica presenta limitaciones para intervalos temporales cortos, lo que la hace menos adecuada para el monitoreo inicial de yacimientos. Por otro lado, la solución numérica implícita garantiza estabilidad a lo largo de todo el horizonte temporal de la simulación, aunque con una mayor complejidad en su implementación. Además, el enfoque híbrido combina la estabilidad y precisión de la solución numérica con un menor tiempo de cálculo, lo que lo convierte en una opción atractiva para problemas multidimensionales. Estos resultados respaldan la viabilidad de utilizar enfoques combinados, como las diferencias finitas con transformada de Laplace, en situaciones donde las soluciones analíticas no son posibles, ofreciendo una alternativa eficaz y eficiente para la modelación y simulación de procesos complejos en medios porosos.

## Referencias

Abduxamidov, S. (2023): Solving hydrodynamic equations using finite volume methods. – Eurasian Journal of Academic Research, **3**: 98–105.

Burden, R.L., Faires, J.D. & Burden, A.M. (2016): Análisis Numérico, 10a ed. – (Ed Cengage, USA).

De Hoog, F.R., Knight, J.H. & Stokes, A.N. (1982): An Improved Method for Numerical Inversion of Laplace Transforms. – SIAM J. Sci. Stat. Comput, **3**: 357-366. <https://doi.org/10.1137/0903022>

Gilat, A. & Subramaniam, V. (2017): Numerical methods for Engineers and scientists, 2a ed. – (Ed. John Wiley & Sons, s.l.).

Herrera-Hernández, E.C., Aguilar-Madera, C.G., Hernández, D., Luis, D.P. & Camacho-Velázquez, R.G. (2017): Semi-numerical solution to a fractal telegraphic dual-porosity fluid flow model. – Comp. Appl. Math. <https://doi.org/10.1007/s40314-018-0577-7>

Herrera-Hernández, E.C., Coronado, M., & Hernández-Coronado H. (2013): Fractal continuum model for tracer transport in a porous medium, - Phys. Rev., **E(88)**: 063004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.063004>

Stehfest, H. (1970): Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]. – Commun. ACM, **13**: 47-49. <https://doi.org/10.1145/361953.361969>

Zheng, Z. & Li, X. (2022): Theoretical analysis of the generalized finite difference method. – Comput. Math. Appl., **120**: 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.06.017>