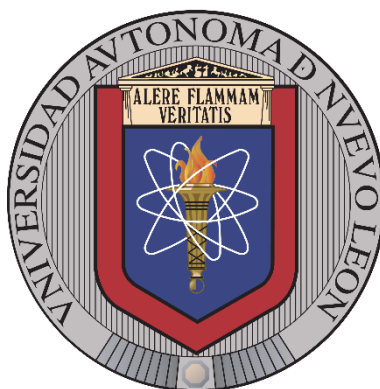


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**MODELO MATEMÁTICO CON BASE EN LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES  
DEL ANÁLISIS DE LAS PERTURBACIONES GENERADAS POR EFECTO  
FOTOACÚSTICO EN UN FLUIDO PARA APLICACIÓN EN LA MEDICIÓN DE  
PROPIEDADES MECANO-ELÁSTICAS DE PLACAS DELGADAS.**

**Por**

**NESTOR ANTONIO FLORES MARTÍNEZ**

**Como requisito parcial para obtener el Grado de  
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA**

**Diciembre, 2022**

**MODELO MATEMÁTICO CON BASE EN LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES  
DEL ANÁLISIS DE LAS PERTURBACIONES GENERADAS POR EFECTO  
FOTOACÚSTICO EN UN FLUIDO PARA APLICACIÓN EN LA MEDICIÓN DE  
PROPIEDADES MECANO-ELÁSTICAS DE PLACAS DELGADAS.**

Aprobación de la Tesis:

---

Asesor de la Tesis

---

---

---

---

---

---

Sub-Director de Estudios de Postgrado

## AGRADECIMIENTOS

Cada obra que escribo, en los últimos años, suelo mencionar a mis parejas que he perdido. Y a quien fue mi mejor amiga. En esta ocasión no será la excepción. Le debo demasiado a ellas por el simple hecho de confiar y creer en mí cuando prácticamente nadie lo hacía. Me enseñaron tanto en vida como en muerte. Descubrí mucho sobre mí mismo y mis capacidades al convivir con ellas: Elizabeth, Claudia Sughey y Carla Beltre. Estuvieron a mi lado cuando estaba mal, por rendirme ante las situaciones negativas de mi vida. Me guiaron inconscientemente por el camino que estaba recorriendo para ser mejor persona, mejor ser humano y mejor hombre. Gracias a ustedes, por ayudarme a llegar a donde estoy, para bien y para mal, he tenido tantas experiencias gracias al valor que me dieron.

Gracias a mis padres. Ya que, al estar viviendo con ellos, comprendo que ha sido difícil entender o tratar de entender lo que hago como modo de vida. Para ellos solo son numeritos en un montón de hojas que no entienden, y que, honestamente, a veces tampoco entiendo. Solo confían en que me gusta lo que hago.

Cuando dos profesionales se ponen a platicar y discutir sobre sus áreas de especialidad, pueden generarse largas charlas y casi peleas sobre cómo perciben el conocimiento. Ponerse de acuerdo es prácticamente imposible. Se espera que luego de esas charlas, ambos aprendan para seguir creciendo como profesionales. Y en un posgrado, básicamente eso ocurre entre alumnos y maestros, siempre tantos unos como otros, profesionales y en ocasiones, con años de experiencia. Así que... gracias también a mis maestros y en especial, a aquellos que me tuvieron toda la paciencia y calma.

Gracias a mis compañeros. Convivir con ellos durante las clases y fuera de, nos mostró como somos. Es difícil pasar tanto tiempo en un posgrado con pocas personas a quienes ver.

Finalmente, gracias al CONACYT, por la beca y las facilidades de comunicación, dado que sus representantes siempre estuvieron al pendiente. Comprendo que las siglas ahora son diferentes, pero, al momento de entrar al doctorado, así se le conocía.

## DEDICATORIA

A mis parejas, en específico las últimas dos: Claudia Sughey y Carla Beltre. La primer, fue mi prometida y nos conocimos a los 15 años. Sin ella, jamás habría seguido estudiando. Decidió sacrificarse convenciéndome de seguir estudiando la maestría en lugar de estar con ella siempre durante sus tratamientos del cáncer. Ella consideraba que debía seguir luchando por lo que deseaba. Y ahora, ya estudié mi doctorado. A la segunda, porque cuando ya había perdido la esperanza de amar y ser amado, llegó a mi vida, y siendo joven, ella tenía una energía que creía perdida y me la contagió. Ahora que ella tampoco está, después de desaparecer o haber sido secuestrada, su cariño, energía, amor y sentido de aventura, me siguen alimentando para salir adelante y volver a luchar por aquello que he anhelado y que, llegué a pensar que sería imposible.

Dedicado, en parte, a mi... no a mi yo actual. A mi viejo yo. Ese pequeño niño que veía a la ciencia y la tecnología como algo casi mágico e imposible de alcanzar. Ese pequeño niño que siempre anhelaba con ser un gran científico reconocido a nivel mundial por ayudar a la gente.

## TABLA DE CONTENIDO

Capítulo	Página
1. INTRODUCCIÓN	13
1.1. Objetivos generales	15
1.2. Objetivos específicos	15
1.3. Trabajo previo	16
2. Tensor de deformaciones	21
3. Acústica y Sonido	27
3.1. Reverberación	33
3.2. Resonancia	34
3.3. Rarificación: Far field y Near field	35
3.4. Ruido: definición simple	38
4. Tensores y pseudotensores	43
4.1. Dinámica de fluidos	43
4.2. Electromagnetismo	45
4.3. Tensores	46
4.4. Álgebra de tensores y diádicas	52
5. Acústica, teoría de perturbaciones y luz	55
5.1. Teoría de perturbaciones	55
5.2. Análisis de correlación y densidad espectral	59
5.3. Deformación	62
5.4. Luz y momento	63
5.5. Módulo de Young	67
6. Procesos estocásticos	71
6.1. Solución dinámica	71
6.2. Movimiento browniano	87
6.3. Tensores y procesos estocásticos	90
7. Metodología: Resolución y análisis de las ecuaciones	92
7.1. Densidad y viscosidad constantes	92
7.2. Densidad dependiente del tiempo, $\mu = \alpha\rho$	118
7.3. Una solución al tensor de estrés de Maxwell	130
7.4. Integral de Itô	142
7.5. Algoritmo de control	143
8. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	156

8.1. Solución dinámica	156
8.2. Simulación: NS y Maxwell parametrizados	163
8.3. Resolución: NS y Maxwell con parámetros dependientes del tiempo	166
8.4. Conclusiones	181
9. TRABAJOS FUTUROS	185
REFERENCIAS	186
APÉNDICES	
APÉNDICE A.- RUIDO	192
APÉNDICE B.- NAVIER-STOKES MATRICIAL	197
APÉNDICE C.- MÉTODO DE FRÖBENIUS PARA NAVIER-STOKES	201
APÉNDICE D.- TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS ECUACIONES	210
APÉNDICE E.- CÓDIGOS DE MATLAB	213

## LISTA DE FIGURAS

*Figura 1.1. Elementos del arreglo experimental del trabajo de maestría, usando dos fuentes de pulso (laser y ultrasonido) con un solo receptor de señal digital.*

*Figura 1.2. Diseño experimental para medir la morfología estructural de un compuesto sintético, por medio de una resonancia acústica en un canal cerrado, para un sistema aislado.*

*Figura 1.3. Cámara de resonancia acústica para medir la respuesta fotoacústica de un material en el que se incide luz, para un ambiente controlado. Donde dicha cámara nos permite estudiar la intensidad del sonido aumentada por interferencia constructiva.*

*Figura 3.1. Descripción básica de una onda y sus elementos más básicos, para el caso de una función temporal.*

*Figura 3.2. (A) Imagen instantánea del comportamiento de compresión y rarefacción de las partículas en el aire, durante el viaje de una onda de sonido. (B) Las zonas comprimidas se encuentran ligeramente por encima y las zonas rarefadas ligeramente por debajo del valor de la presión atmosférica. Por ende, las variaciones de presión para las ondas de sonido se encuentran superpuestas sobre las variaciones barométricas de presión (es decir, las generadas en la naturaleza).*

*Figura 3.3. Mapeo de la zona “audible” dentro del espectro de todas las vibraciones mecánicas posibles.*

*Figura 5.1. Registro de una función aleatoria en el tiempo.*

*Figura 5.2. Conjunto de funciones aleatorias en el tiempo.*

*Figura 5.3. Ejemplo gráfico del cálculo de la probabilidad acumulada.*

*Figura 5.4. Funciones de probabilidad para 3 diferentes tipos de registros*

*Figura 5.5. A la izquierda se muestran valores de ‘x’ y ‘y’ sin correlación, a la derecha, se muestran otros valores de ‘x’ y ‘y’ correlacionados*

*Figura 5.6. Correlación entre  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$*

*Figura 5.7. Celda fotoacústica. La luz incide en la muestra por la parte superior a través de una fibra óptica; el micrófono está situado lateralmente.*

*Figura 5.8. Ilustración de algunos efectos fototérmicos (y/o termoacústicos).*

*Figura 5.9. Representación del movimiento del oscilador armónico simple para el uso de un muelle/resorte y sus ecuaciones que describen el comportamiento.*

*Figura 5.10. Representación sencilla de la zona de validez para el uso de LH.*

*Figura 6.1. Ondas superpuestas. Funciones Bessel de diferente orden como elementos wavelets.*

*Figura 6.2. Producto de las wavelets mostrados en la Figura 6.1.*

*Figura 6.3. Muestreo de una señal acústica y cómo evoluciona en el tiempo.*

*Figura 6.4. Bosquejo de una onda acústica real. Resultado del análisis analítico.*

*Figura 7.1. Diagrama de flujo de Simulink del sistema de control.*

*Figura 8.1. Parte del sistema de control de dos etapas y el PSD de ruido de disparo.*

*Figura 8.2. Densidad espectral de potencia (PSD) correspondiente a 100 Hz. Dada la configuración de MatLab no es posible ver el nivel de intensidad en valores cercanos a esa frecuencia. La señal de entrada no tiene un perfil plano en la respuesta.*

*Figura 8.3. PSD correspondiente a 35 Hz. La intensidad correspondiente a los valores cercanos a 35 Hz, no es visible. No se debe confundir con el pico cercano a los 20 Hz. Los picos que se muestran en la imagen, son propios de la señal generada por el Simulink.*

*Figura 8.4. PSD correspondiente a 5 Hz. Se nota claramente un sesgo cercano a este valor, generado como una respuesta que toma tiempo en perder intensidad. La frecuencia de mayor peso, no se reconoce por la intensidad, sino por la forma en el registro.*



*Figura 8.5. PSD correspondiente a ruido blanco. La entrada de señal es una simulación del ruido blanco, aunque imperfecto, dado que en Simulink de la versión 2020, no cubre todas las frecuencias, sino un determinado rango y se da a todas estas, un aproximado de la misma intensidad.*

*Figura 8.6. Resultados numéricos por el método de Runge-Kutta para tres ecuaciones de Navier-Stokes. Muestran claramente como convergen a un determinado valor, aunque no comportan este límite. La onda no puede crecer siempre.*

*Figura 8.7. Representación gráfica del efecto fotoacústico contra una placa delgada. Nos muestra como la placa vibra en respuesta al pulso acústico y posteriormente, el fluido alrededor de este tiene una respuesta que guarda relación con los modos e intensidad del cuerpo, con cierto corrimiento y en todas las direcciones.*

*Figura 8.8. Pulso acústico para características predeterminadas (Navier-Stokes).*

*Figura 8.9. Pulso acústico para características predeterminadas (Navier-Stokes). Vista aérea.*

*Figura 8.10. Pulso acústico para características predeterminadas (Maxwell y Navier-Stokes).*

*Figura 8.11. Pulso acústico para características predeterminadas (Maxwell y Navier-Stokes). Vista aérea. Se presenta cierta simetría aparente, que puede no presentarse en las direcciones aquí mostradas.*

*Figura 8.12. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Navier-Stokes).*

*Figura 8.13. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Navier-Stokes). Vista aérea.*

*Figura 8.14. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Maxwell y NS).*

*Figura 8.15. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Maxwell y Navier-Stokes). Vista aérea.*

*Figura 8.16. Configuración esférica que esperaríamos en un pulso con fuente puntual (Navier-Stokes).*

*Figura 8.17. Configuración esférica que esperaríamos en un pulso con fuente puntual (Maxwell y Navier-Stokes).*

*Figura 8.18. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Navier-Stokes).*

*Figura 8.19. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Navier-Stokes). Vista aérea.*

*Figura 8.20. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Maxwell y Navier-Stokes).*

*Figura 8.21. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Maxwell y Navier-Stokes). Vista aérea.*

*Figura 8.22. Señal de entrada para el sistema de control, onda acústica con ruido.*

*Figura 8.23. Señal simulada de variación de presión con un factor de 0.1 de amplitud. Esto implica un sistema oscilante predecible, similar a condiciones controladas de laboratorio.*

*Figura 8.24. Comparativa de señal de entrada con la señal limpia del sistema. La señal de entrada efectivamente era de tipo exponencial, aunque la velocidad de decaimiento se ve afectado durante el filtrado, también la forma.*

*Figura 8.25. Comparativa de una señal de entrada con un factor de ruido reducido equivalente al 10% de la amplitud de la señal y su señal limpia.*

*Figura A.1. Representación del ruido blanco como una respuesta de frecuencias, en el eje x se tiene la frecuencia y en el eje y se tiene la intensidad.*

*Figura A.2. Representación de una señal de ruido de Brown como una función de tiempo, o una dependencia del tiempo.*

## LISTA DE TABLAS

*Tabla 1.1. Datos promedio obtenidos durante las pruebas del sistema prototipo del trabajo de tesis de maestría. Se muestra la correlación de fenómenos, pero con un mínimo de precisión debido al análisis de datos.*

*Tabla C.1. Primera tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.*

*Tabla C.2. Segunda tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.*

*Tabla C.3. Tercera tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.*

*Tabla C.4. Cuarta tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.*

## RESUMEN

**Nestor Antonio Flores Martínez**

**Fecha de Graduación: Agosto, 2023**

**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

**Título del estudio: MODELO MATEMÁTICO CON BASE EN LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DEL ANÁLISIS DE LAS PERTURBACIONES GENERADAS POR EFECTO FOTOACÚSTICO EN UN FLUIDO PARA APLICACIÓN EN LA MEDICIÓN DE PROPIEDADES MECANO-ELÁSTICAS DE PLACAS DELGADAS.**

**Número de páginas:**

**Candidato para el grado de Doctorado en Ingeniería Física**

**Área de estudio: Física de ondas y fotoacústica**

**Propósito y Método del estudio:** La acústica estudia la respuesta física de un objeto bajo una perturbación mecánica, conservando la información de todos los elementos involucrados. En este texto se muestra el análisis de las ecuaciones que describen los fenómenos de la dinámica de fluidos, usando sistemas lineales, no lineales y estocásticos para el estudio matemático. Además de profundizar en la aplicación, importancia y estructura de las predicciones de dichos efectos, tanto para medios controlados como ambientes industriales. En conjunto con algunos elementos previos de algoritmos de procesamiento de ruido por métodos no tan conocidos sin incluir filtrados. Se estudiaron los espectros de señal digital para grabaciones como para señales generadas en Simulink, buscando predecir cuáles son las frecuencias con mayor intensidad.

**Contribuciones y Conclusiones:** Las ecuaciones fueron analizadas con variaciones temporales en la densidad y la viscosidad. Se propuso un método de análisis de ruido en señales digitales por medio de algoritmos comparativos con señales de referencia. Se probó con éxito a través de un análisis matemático, que las ecuaciones para dinámica de fluidos contienen toda la información necesaria del sistema físico, discriminando los elementos que sean necesarios para el estudio de un objeto o del medio. Se crearon modelos tridimensionales como predicciones de las superficies generadas bajo diversas condiciones para el fenómeno fotoacústico.

**FIRMA DEL ASESOR:**

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

El texto comienza haciendo un análisis de conceptos, algunos de forma profunda como sonido y acústica, otros en sus elementos esenciales por su relación con la investigación. Se aprovecha la definición de estos conceptos para dejar de lado las confusiones generadas por las perspectivas en libros no especializados sobre la acústica. Se ha extendido el uso de la acústica y de los procesos ultrasónicos como subsónicos, para estudios de estructuras solidas sin necesidad de deformarlas o hacer exploración destructiva. También para estudiar tejidos y materia blanda, como análisis de cultivos de células sanas y cancerosas, para detección de propiedades elásticas y viscoelásticas exclusivas.

Considerando que una ecuación general de perturbaciones en sistemas físicos es la base de otros sistemas de ecuaciones conocidos, como Navier-Stokes y el tensor de estrés de Maxwell, se pueden establecer relaciones entre diferentes tipos de fenómenos físicos, en especial que estén relacionados con sistemas materiales, para establecer ecuaciones que describan varios tipos de fenómenos, como el efecto fotoacústico en materiales sólidos. La mayoría de los trabajos que hacen referencia a las ecuaciones de Navier-Stokes, es con ecuaciones diferenciales, que tienen un comportamiento en tiempo independiente con respecto a sí mismo.

Se decidió tomar un análisis de las ecuaciones desde varias perspectivas, considerando ecuaciones diferenciales parciales, diferenciales parciales no lineales y tensoriales con el fin de tener una solución y modelo que cubra varias perspectivas, buscando la mayor precisión y exactitud. A consideración que todas son en realidad parte de la solución general al sistema, dada las condiciones requeridas para algunos casos especiales. Los artículos suelen reportar la solución de las ecuaciones por métodos numéricos, en matrices o sistemas de coordenadas cartesianas, aunque hacen mención de otros sistemas de coordenadas, las soluciones suelen ser de sistemas sin dimensiones, donde no se justifica si aplican para cualquier medición o solo en algunas escalas.

Cada solución contiene información del sistema y de la perturbación, con parámetros codependientes, por la propuesta que todos los datos que se toman como ruido son las

múltiples funciones solución. La información que podemos conservar o perder, depende del tipo de ecuación o solución que se emplee para el análisis de los datos recopilados. Se establecieron parametrizaciones a partir de ecuaciones de N-S para generar una expresión que describa la superficie descrita por un pulso acústico bajo ciertas condiciones. Las soluciones se analizaron por principio de autocorrelación para conocer el tiempo de densidad espectral que corresponde a los ruidos propios de una señal de audio (ruido de fondo). Conociendo las posibilidades de entrada de un micrófono, se prevé un sistema de control con múltiples filtros.

El estado del arte, al escribir la primera versión de la tesis, se basa principalmente en aplicaciones parciales del uso de las ondas acústicas, efecto fotoacústico y mediciones de ruido. Analizan un tipo de señal para un cierto método: temperatura, corriente eléctrica, presión, intensidad sonora, ruido, nivel de humedad relativa y perturbaciones del volumen de un fluido. Al momento de eliminar el ruido por uso de filtros, se elimina información que se procura recuperar por interpolación de datos.

Los resultados hablan de los análisis de las ecuaciones diferenciales, las superficies finales esperadas por las perturbaciones para diferentes condiciones físicas del medio, además del nivel de fiabilidad en cuanto a los datos, los niveles de ruido en cada situación y un análisis espectral de todo tipo de señal medida. Incluso se simula un filtro de varias etapas que debe recuperar la forma de la señal original, sin perder información o con la mínima pérdida. Los sistemas mostrados en general carecen de unidades, al considerar ciertos parámetros como la norma.

Finalmente, en las conclusiones se hace un análisis general del desarrollo matemático como de la importancia de la aplicación de dicho modelo. Se consideraron algunos elementos de simulaciones, del control, además de las simulaciones de los superficies de los fenómenos físicos. Se ha dado un paso para utilizar un sistema más completo, y con posteriores pruebas, se pueden incluir información sobre diferentes ambientes para el experimento y la toma de datos. Los elementos usados siguen siendo parcialmente lineales, es una combinación de un sistema no lineal con uno línea, al considerar que la densidad es solo dependiente del tiempo como parámetro.

### **Motivación**

De parte de una empresa mexicana, se busca un sistema de control de calidad que no haga uso de una fuente radiactiva, en conjunto con el constante crecimiento de la búsqueda de aplicaciones de la acústica y optoacústica en la industria, medicina y

estudios bioquímicos. Las bases del estudio de la relación entre propiedades mecano-elásticas (módulo de Young, densidad y grosor) y el efecto fotoacústico por fuente de luz de baja potencia (50 mW). Para tener un prototipo de producción de bajo costo con un alto tiempo de vida media y refacciones baratas, que pueda ser reprogramado para otras condiciones de funcionamiento.

### **Hipótesis**

Usando las ecuaciones de Navier-Stokes y el tensor de deformaciones, podemos predecir el comportamiento de un pulso foto-termo-acústico en cuanto a los elementos de estrés en la zona superficial del volumen de gas perturbado como una respuesta de las propiedades físicas del fluido. A través de estimar también las funciones solución, densidad espectral e intensidad de señal registrada crear un algoritmo de control con sistema de filtro de múltiples etapas para determinar las propiedades del sistema físico generador del pulso. Un análisis profundo del ruido como elementos de información de dichos archivos digitales discriminan los datos que pertenecen al fluido y aquellos que corresponden al objeto en estudio.

#### **1.1. Objetivos generales**

- Establecer un modelo matemático para describir el comportamiento de las ondas acústicas en un fluido, generadas por efecto fotoacústico en un determinado cuerpo, para poder discriminar información registrada en un audio digital para estudiar las propiedades mecano-elásticas del fluido como del cuerpo que vibra. Con un estudio por diferentes tipos de ecuaciones y soluciones.
- Crear un algoritmo de procesamiento de ruido para recuperación de información por múltiples canales de funcionamiento en tiempo real con análisis híbrido y uso de sensores ambientales.
- Encontrar un sistema matemático para el mapeado de la superficie generada por un pulso acústico en un fluido.

#### **1.2. Objetivos del trabajo**

- Crear un algoritmo de procesamiento de ruido para recuperación de información por múltiples canales de funcionamiento en tiempo real con análisis híbrido (digital y

analógico) y uso de sensores ambientales, sin uso de filtrados y con un sistema de respuesta en tiempo real con elementos analógicos.

- Generar bases para el estudio de ondas electromagnéticas y su efecto en tejido biológico, a través de las mediciones del ruido como las respuestas celulares.
- Aprovechar la teoría del tensor de deformaciones para determinar una función de transferencia para el sistema de control, con uso de sensores externos para elementos no controlables del experimento.
- Estudiar analíticamente los valores límite de ecuaciones de Navier-Stokes con respecto a la temperatura, presión y distancia.
- Desarrollar un sistema teórico que mida propiedades mecánicas de cuerpos 2D y 3D: densidad, grosor, módulo de Young, módulo de compresibilidad.
- Diseñar un algoritmo de uso libre para análisis de ruido y filtrado bajo diferentes condiciones.
- Analizar las ecuaciones de Navier-Stokes para soluciones particulares por varios métodos de solución con modelo matemático específico, con casos especiales.
- Mostrar de manera gráfica el alcance de una perturbación fotoacústica en un fluido para cualquier dirección posible y diferentes condiciones físicas.

### 1.3. Trabajo previo

Como un trabajo de tesis de maestría se desarrolló un primer modelo matemático que establece el comportamiento de una onda acústica de tipo esférico con un elemento no homogéneo de la ecuación diferencial que conlleva información de las propiedades del medio y una parte del material en análisis. Por las ecuaciones simplificadas de Newton para la conservación de momento y energía, en un sistema aislado, se estableció una ecuación diferencial para el efecto fotoacústico partiendo de una modificación de ondas acústica esférica con uso de Ley de Hooke suponiendo una oscilación cuasi periódica en una cierta sección de la superficie:

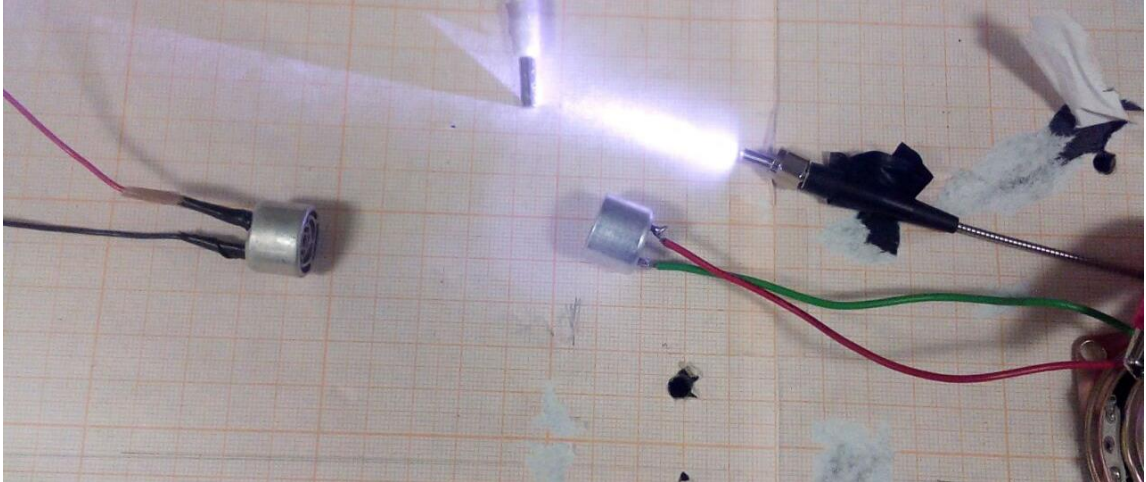
$$\frac{d^2 f}{dr^2} + 2\alpha\gamma \frac{df}{dr} + k^2 f = 2\alpha\gamma\beta; \quad \gamma = \left(\frac{C_p}{C_v}\right)$$

Se obtuvo una solución que tiende a un valor estable para distancias muy grandes y que tiene una cierta periodicidad. Para distancias cortas, se predice una buena conservación de la energía, aunque no fue calculado de forma porcentual, se sabe que



se conserva casi toda la potencia de onda. Para la solución obtenida no se obtuvo dependencia de elementos angulares al considerar que es un sistema de onda esférica, aunque incluye un determinado elemento como parte de fenómeno acústico que es tanto resonante como reverberante:

$$\eta(r, t) = \sum_{i=0}^n \frac{A_0 k}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{k} + e^{-\alpha r} \sin kr \right) \cos \omega_i t$$



*Figura 1.1. Elementos del arreglo experimental del trabajo de maestría, usando dos fuentes de pulso (laser y ultrasonido) con un solo receptor de señal digital.*

En ese momento, no se tenía conocimiento sobre los procesos estocásticos y aunque se tenía una idea sobre las correlaciones de estados del sistema, no había forma de establecer una ecuación que correlacionara ambos fenómenos, del estado 1 con el dos y así consecutivamente. Se buscó una alternativa para lidiar con la correlación de una onda con otra, además de generar señales repetitivas en el modelado matemático que coincidiera con los datos experimentales.

Los datos recabados eran pruebas experimentales para placas delgadas de aluminio y de una cierta aleación con acero. Fueron pruebas controladas en que se mantenían constantes la temperatura, humedad y se conocían previamente los datos geométricos y de elasticidad para las placas (grosor, módulo de Young y longitud). Aunque se desconocían las frecuencias de vibración natural del sistema. Pasado el tiempo, se pueden retomar dichos datos para configurar un sistema que mida dicha frecuencia única. Debido a su tamaño, no se pueden considerar “películas delgadas”, ni tampoco objetos macroscópicos donde el grosor interfiere con el comportamiento, son

parecidos a membranas. Lo que los coloca en un valor anterior a los objetos bidimensionales y mucho mas lejos de los microscópicos donde surge la dinámica de solitones y fonones.

<b>Placa de aluminio</b>			
<b>Grosor medido</b>	1.600 mm	Densidad reportada	2700
<b>MY reportado</b>	$7.1 \times 10^{10}$ Pa	Velocidad de sonido	6400 m/s
<b>Valores promedio de amplitud</b>			
<b>Previo 1</b>	Sonido	Previo 2	Láser
<b><math>1.09208 \times 10^{-1}</math></b>	$1.7830 \times 10^{-2}$	$1.37351 \times 10^{-1}$	$1.546 \times 10^{-3}$
<b>Y medido (Pa)</b>	% error relativo	Densidad medida (kg/m <sup>3</sup> )	% error relativo
<b><math>6.903906 \times 10^{10}</math></b>	2.76189	2867.929705	6.219619
<b>Grosor medido</b>	% error relativo		
<b>1.441277</b>	9.920162		

*Tabla 1.1. Datos promedio obtenidos durante las pruebas del sistema prototipo del trabajo de tesis de maestría. Se muestra la correlación de fenómenos, pero con un mínimo de precisión debido al análisis de datos.*

Modulando la potencia de la fuente EM o de una combinación de fuente EM con fuente ultrasónica de alta potencia, para diferentes aplicaciones: imagenología microscópica o estudiar el efecto de absorción de sustratos en películas delgadas. Se observaron algunas aplicaciones de este tipo en trabajos antiguos, algunos que vienen de la época de Helmholtz y que actualmente se sigue reproduciendo, buscando tener la misma precisión de datos, con sistemas controlados y aislados, como sistemas abiertos.

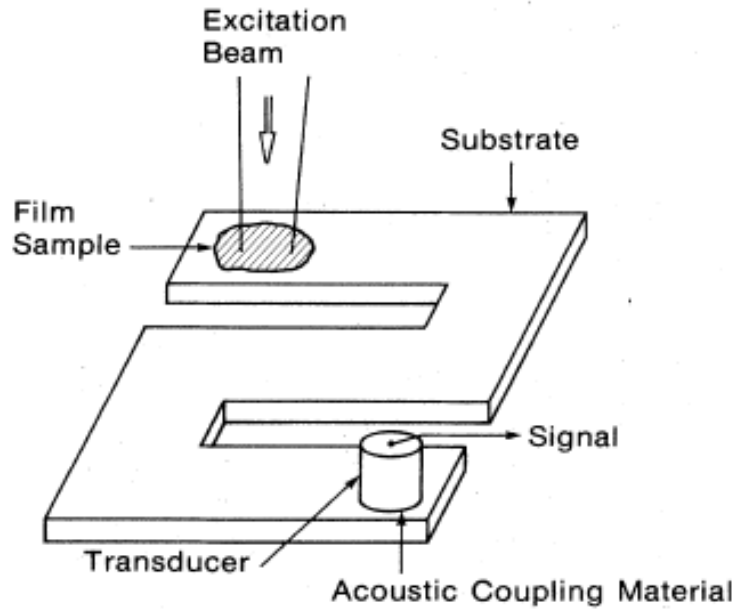


Figura 1.2. Diseño experimental para medir la morfología estructural de un compuesto sintético, por medio de una resonancia acústica en un canal cerrado, para un sistema aislado.

Con respecto a pulsos acústicos para medir propiedades mecánicas de un sistema, hay ejemplos de sistema cerrados o aislados con cámaras de resonancias de gases. Otros donde se usa al agua como sistema resonante y se aprovecha la transferencia de energía hacia un tubo resonante de aire, para conservar la energía. También se han hecho estudios relacionados con las propiedades de sólidos haciendo especial interés en la relación del intercambio de energía como un efecto térmico, utilizando un material como aislante térmico para controlar la respuesta en una porción de la superficie.

$$\delta x(t) = \frac{2\pi\mu_g\phi(t)}{T_0} = \frac{\theta\mu_g}{\sqrt{2}T_0} \exp \left[ j \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Cuando se trabaja con sistemas resonantes o de tipo cerrado, se generan conjuntos de datos que no pueden ser replicados en fábricas ni ambientes atmosféricos. Incluso dentro de una misma fábrica en ocasiones es posible no reproducirlos por completo. Generando inconsistencias entre el modelo y la aplicación.

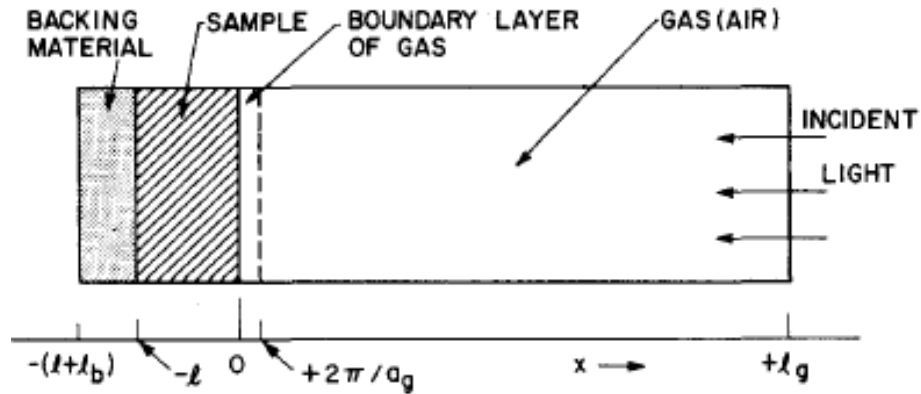


Figura 1.3. Cámara de resonancia acústica para medir la respuesta fotoacústica de un material en el que se incide luz, para un ambiente controlado. Donde dicha cámara nos permite estudiar la intensidad del sonido aumentada por interferencia constructiva.

En relación al proyecto de la empresa, se han encontrado experimentos que miden las propiedades mecánicas de compuestos basados en nitrocelulosa, que es el mismo compuesto del que están hechos algunos tipos de papeles. En específico, la pasta previa al papel. Para el análisis de las proteínas generadas en la estructura debido a diferentes tratamientos térmicos y químicos, con una resolución de imagen de hasta 200 micras. Incluso se midieron las capas de sustratos. Aunque nuestro método no tiene ese nivel de precisión, se medirán propiedades promedio del sistema, lo que nos genera información del sistema como un todo.

Se han medido propiedades mecánicas como grosor, densidad y morfología de estructuras delgadas (no películas delgadas) por efecto fotoacústico, por sonido o por una combinación de métodos como análisis de pulsos térmicos. En algunos casos se han estudiado por análisis de las ecuaciones diferenciales a través de transformadas de Fourier para tener un mapeo de las frecuencias de respuestas. Otras por análisis de espectro de densidad de forma directa, a través de amplificadores o filtros, tanto operaciones como digitales, o con cámaras de resonancia. Estos métodos han probado tener una desviación estándar menor a 1. Con una exactitud en ambientes controlados, cercana al 99%, con los cuales se establece la variación para corrimientos de fase, y generar un modelo esperado de experimento.

## CAPÍTULO 2

### TENSOR DE DEFORMACIONES

La física de ondas se basa en el comportamiento de la materia y de la energía, variaciones/perturbaciones (que presentan fase pequeña y/o fase grande según los valores armónicos) en la estructura del sistema donde estas pueden ser representadas por funciones armónicas, divergentes o funciones no lineales que guarden cierta relación armónica. Recordemos de matemáticas que una sola función tiene diversas formas de representarse por expansiones, propiedades trigonométricas o transformaciones lineales.

Esta área del conocimiento es aplicable en todas las demás ciencias. En la física de ondas solo hay pequeñas variaciones en la matemática analítica para entender las ecuaciones diferenciales características del problema en sí, por lo cual podemos entender que las ecuaciones se ajustan a las necesidades del planteamiento a resolver. Aunque las condiciones físicas que desarrollan la ecuación diferencial pueden ser totalmente distintas de un problema a otro, la mayoría de las veces las ecuaciones matemáticas encontradas en libros de texto y en artículos son de primer orden, o como mayor grado de complejidad: ecuaciones diferenciales de segundo orden que pueden ser resueltas con sustituciones.

La principal característica que tienen en común las diversas ecuaciones de onda, es la energía, aunque algunas de estas ecuaciones estén escritas en términos de fuerza o trabajo, todas conllevan una descripción energética del sistema/universo. Y todas las descripciones de la energía son las que permiten hacer la correlación de un tipo de onda con otro, un tipo de interacción con otro; temperatura con sonido, temperatura con luz, luz con sonido, sonido en el agua con luz, etc.

En un sentido estricto, todo sistema de la naturaleza requiere el análisis de todos los tipos de interacción para que la respuesta obtenida en el cálculo diferencial e integral se ajuste adecuadamente al comportamiento real. Cualquier aportación debería ser parte de ecuaciones sin despreciar términos por pequeñas aportaciones, sin embargo, hacer esto puede complicar las ecuaciones y requerir técnicas complicadas de solución.

Dentro de un cuerpo (sólido o fluido), puede haber cambios en su estructura de acuerdo (al menos) a tres tipos de deformación: estrés, torsión, compresión. En forma simplificada, la teoría de la elasticidad se refiere al estrés y la deformación de un cuerpo, y aunque se menciona que es propio para un cuerpo sólido, es aplicable para fluidos. Cálculos matemáticos establecen la torsión como un caso particular de los dos anteriores para cuerpos anisótropos, quiere decir que es el resultado de la evolución del estrés y la compresión, lo que refiere a un análisis tensorial las posiciones de sus partículas.

Se considera un medio continuo si está conformado de partículas que conservan sus identidades como características de movimiento (frecuencias naturales de vibración, energía, dirección), comúnmente llamamos al primer estado de dicho cuerpo, el estado sin deformación. incluso si se trata de una configuración amorfa del estado esperado del sistema físico. Se aproxima el movimiento de una fuerza interna como si se tratase de un cuerpo rígido, dado que las partículas de este se comportan de forma casi ordenada con características en común. Es propio del desplazamiento interno de un cuerpo rígido que la distancia promedio entre sus partículas permanezca inalterada.

Las fuerzas que actúan en un cuerpo pueden ser internas o externas (o ambas), siendo como ejemplos para las segundas, la gravedad que actúa en cada una de las partículas que conforman dicho objeto, o fuerzas superficiales debidas a la presión generada por el contacto de dos cuerpos.

En los trabajos de Newton y de Galileo, se establece que la atracción gravitacional se genera por el punto donde tiene mayor concentración de masa, que en cálculo es el centro de gravedad, el cual en ocasiones puede coincidir con el centro de masa. En un análisis matemático completo de los sistemas físicos, deberíamos considerar a la gravedad como una fuerza tanto externa como interna, dados los cúmulos de partículas en fluidos. Al dejar esto de lado, dada la complejidad por interacciones de partículas mutuamente ligadas, el nivel de exactitud de lo teórico con respecto a mediciones, jamás será del cien por ciento.

Para el análisis de las fuerzas internas, se toma una pequeña área al azar  $\Delta S$  y la dirección normal ( $n_j$ ) de la fuerza para esta sección del cuerpo, se describe por los cosenos directrices, una zona aproximadamente planar, se considera que en uno de los

lados de dicha sección es la dirección negativa y en el contrario, la positiva, sin darle preferencia a ninguno.

La acción del lado positivo sobre el lado negativo, y este sobre el lado positivo, es la fuerza interna superficial,  $T_j \Delta S$ , donde  $T_j$  es la fuerza por unidad de área del elemento  $\Delta S$ . Esto último es conocido como el tensor de estrés, que es claramente una función de las coordenadas del elemento  $\Delta S$  dentro del volumen del cuerpo, como de los cosenos directores del movimiento a su normal. Se consideran solo deformaciones pequeñas, es decir, con las derivadas  $u_{r,s}$  en valores pequeños.

Siendo la presión el resultado de las colisiones de las partículas que conforman un fluido contra la pared que lo contiene o también, la relación con la fuerza promedio que ejercen las partículas unas contra otras dentro de su estructura sólida para el caso de cuerpos sean rígidos o no. El estrés es una generalización de la idea de la presión.

Tanto en un fluido como en un sólido, podemos considerar que las paredes del cuerpo no son necesariamente elementos materiales de algún reservorio que contiene al sistema de partículas. Con el concepto de sistema material (o sistema de masa) de Galileo Galilei, el mismo tamaño o volumen de un conjunto de partículas se establece por el alcance máximo de sus partículas interactuando entre ellas y el desplazamiento que tienen con respecto al centro de masa que constantemente cambia con el tiempo. Con esto, podemos incluso analizar la deformación del cuerpo en base al centro de masa y considerar que incluso cuando el volumen permanece inalterado, al cambio de las partículas nos genera un desplazamiento de un fluido o sólido, estableciendo el nuevo centro de masa y la deformación.

Al estudiar la deformación, tensión o torsión de un sistema, se toma el origen del instante cero. Incluso si el volumen, densidad o dirección de desplazamiento parecen no cambiar, se pueden contrastar contra la configuración original. Las deformaciones no solo son internas, también externas con respecto al sistema circundante. La evolución del sistema físico, en especial en fluidos, se genera con un intercambio de otros sistemas cercanos. En un análisis próximo a la realidad no es un sistema cerrado ni aislado.

Al tomar una sección de cuerpo con un corte al azar y analizamos el desplazamiento de este debido a las deformaciones internas, y consideramos que hay tres planos que cortan la sección y con los cosenos directores correspondientes ( $P, P', P'', P'''$ ) y sus normales a cada plano ( $n_r, n'_r, n''_r, n'''_r$ ).

El tensor de estrés de forma general, como una función de las posiciones tiene como expresión matemática aquellos elementos que hablan de la dirección de deformación como las medidas de los cambios de arcos de posibles distancias de desplazamiento de las partículas:

$$T_r = E_{rs}n_s$$

Sin embargo, la expresión anterior aplica exclusivamente para el estrés generado en una determinada dirección, basándonos en la sección que empezamos estudiando inicialmente, en cambio, para una generalización debemos tomar todos los valores de estrés posibles en cualquier dirección y para cualquier seccionamiento posible:

$$\int T_r dS = \int E_{rs}n_s dS$$

Esto aplica para cualquier superficie de estudio de un cuerpo en cualquier estado de la materia. Con el uso del teorema de Green, podemos pasar de una expresión de integral de superficie a una forma volumétrica, correspondiente para las ecuaciones de movimiento de un medio continuo:

$$\rho f_r = \rho X_r + E_{rs,s}$$

Para poder conocer los valores del estrés a cada sección del cuerpo, hacemos uso de la ley de Hooke que establece el estrés como una función linealmente homogénea de la deformación, cuya expresión matemática corresponde a:

$$E_{rs} = c_{rsmn}e_{mn}$$

Donde el término  $c_{rsmn}$  se conoce como el tensor de elasticidad. Para un proceso isotérmico y/o adiabático, se puede comprobar que  $c_{rsmn} = c_{mnr s}$ , de forma que este tensor se puede limitar a un sistema de 21 elementos únicamente. Que se tiene como el máximo número de coeficientes independientes.



En nivel de complejidad, el más simple de todos son los cuerpos isotrópicos, es decir, presentan simetría en su sistema coordinado para las variaciones en diferentes tipos de deformaciones, y en cuestiones de física, se cumple la isotropía para un medio en el que la densidad es constante sin importar el cambio de temperatura. Es decir, tenemos dos tipos de isotropía.

Para el caso de un cuerpo matemáticamente isotrópico, con dos constantes elásticas, se tiene una expresión del tipo:

$$c_{rsmn} = \lambda \delta_{rs} \delta_{mn} + \mu (\delta_{rm} \delta_{sn} + \delta_{rn} \delta_{sm})$$

$$E_{rs} = \lambda \delta_{rs} \theta + 2\mu e_{rs}$$

Estas expresiones son casos especiales de un tensor general que describe cualquier tipo de perturbación mecánica, energética, campos y de perturbaciones para cualquier estado de agregación de la materia, con respecto a cualquier fuerza exterior. Se conoce como tensor de deformaciones (shear-stress-strain tensor) que expresado en forma de tensores a través de matrices es:

$$\sigma_{ijkl}^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \cdots & \sigma_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n0} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Cada elemento de la matriz representa una anomalía o deformación en el campo o cuerpo, para determinadas condiciones. Aunque este no es el tensor de deformación general, se aproxima, dado que la versión completa implica una variación en el tiempo en conjunto con las variables espaciales, no como un parámetro, sino como una variable activa. Sin ningún análisis de movimiento virtual.

El análisis de esta deformación de un cuerpo en el tensor mostrado, ocurre bajo el supuesto de dinámica virtual, donde no tenemos ningún elemento temporal explícito que altere las propiedades del sistema, y donde los intercambios de energía con el exterior no ocurren. Al incluir elementos de variación en el tiempo como esperaríamos, sabemos que las posiciones de cada una de las partículas que conforman el elemento de estudio, cambian con el tiempo y ya que tenemos un conjunto de partículas, probabilísticamente pueden colisionar y con ello reorientarse. Es decir, el centro de masa que tomamos como referencia para las posiciones relativas del sistema, depende de las posiciones de las partículas y estas a su vez de ellas mismas.

Con esto, entrando a un análisis explícito del tiempo, las deformaciones en el tiempo pueden representarse por parametrizaciones como cambios en las posiciones de las coordenadas generalizadas del mismo sistema en estudio:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_{rs} = \frac{\partial}{\partial x_i} (c_{rsmn} e_{mn}) = e_{mn} \frac{\partial}{\partial x_i} (c_{rsmn}) + c_{rsmn} \frac{\partial}{\partial x_i} (e_{mn}) + \sigma_{rmi}$$

Los elementos del sistema deformado con cada instante, para el análisis estadístico de sus posiciones promedio, genera una función que determina los estados posibles de configuración y sus energías correspondientes. Las deformaciones son nuevos estados del cuerpo con su evolución temporal, con lo que se puede estudiar la forma que tienen en su superficie, no son solo estructuras anómalas, sino que son elementos que cumplen con el principio de mínima energía para disipar la transferencia de energía, en sus elementos internos o en una interacción con elementos externos.

Los componentes estructurales de un sistema físico se pueden demostrar a través de esta variación tensorial de una estructura puntual. Si los conjuntos de posiciones de las partículas del cuerpo se representan como los posibles elementos de un espacio, entonces el tensor de deformaciones predice las posiciones de los puntos materiales en cada tiempo e incluso hacer una descripción predictiva para instantes futuros o pasados:

$$E_{rsij} = \sigma_{rsmni} + \sigma_{mnij} + \sigma_{rmi}$$

Cualquiera elemento ajeno al tensor de deformaciones se puede incluir a través de operaciones tensoriales para que forme parte del análisis general de la evolución del sistema. En esta tesis, solo ciertos elementos externos al fluido son tomados en cuenta.

## CAPÍTULO 3

### ACÚSTICA Y SONIDO

Acústica forma parte de las subramas de la física de ondas. Se encarga de estudiar los fenómenos relacionados con variaciones energéticas en cuerpos de diferentes estados de agregación, que generan cambios en sus configuraciones por diferencias de presión, gradientes de temperatura, deformaciones, transferencia de masa, entre otras. La acústica se sustenta en la capacidad de las partículas en movimiento (para cualquier estado de agregación) de desplazarse con respecto a sus posiciones originales y con respecto al centro de masa y gravedad. Es un constante cambio dinámico del estado termodinámico que se analiza por regiones, ya que cada partícula tiene una afinidad estadística a estar en condiciones similares a otras, podemos separar secciones del volumen de un cuerpo y analizarlo como una única partícula, de esta forma, por regiones podemos tener diferentes estados de equilibrio termodinámico que en conjunto están en equilibrio entre ellos.

En sus orígenes se definía a la acústica como el estudio del sonido, sin embargo, actualmente se define como el estudio de las ondas mecánicas en un medio físico (sólido y/o fluido) tanto a todos los fenómenos relacionados a esta transferencia de energía propia de los fenómenos mecánicos: resonancia, transmisión, reverberación, reflexión.

Aunque algunos fenómenos físicos pueden estar relacionados con un cambio de temperatura en el medio debido a las altas frecuencias en que pueden vibrar los materiales, la acústica trata de forma indirecta dichos principios, apegándose a las leyes de la termodinámica, pero siempre considerando estos cambios como fenómenos virtuales, dejándolos de lado en la dinámica en tiempo real de los fenómenos acústicos. Es entonces, que la acústica estudia de forma casi exclusiva, aquellos sucesos físicos que implican una interacción mecánica en la cual se llega a analizar los cambios de temperatura como un efecto indirecto.

La dinámica de un medio (en especial fluidos) para analizar sus regiones de presión y fuerza, se genera por la posibilidad de conocer las deformaciones del volumen y en su capacidad de mantener las posiciones de equilibrio a través del tensor de deformaciones:

$$\sigma_{ijkl}^{v\mu} = 0$$

Dentro de un cuerpo (sólido o fluido), se tiene que puede haber cambios de estructura de acuerdo a tres tipos de fuerzas de deformación: estrés, torsión, compresión. En forma ligeramente simplificada, la teoría de la elasticidad se refiere al estrés y la deformación de un cuerpo, y aunque se menciona que es propio para un cuerpo sólido, es aplicable para fluidos también. Posteriormente, los cálculos matemáticos establecen a la torsión como un caso particular de los dos anteriores para cuerpos anisótropos.

Se considera un medio continuo aquel que consiste de partículas que conservan sus identidades como características de movimiento (frecuencias naturales de vibración, energía, dirección de desplazamiento), llamamos al primer estado de dicho cuerpo, el estado sin deformación. Se aproxima el movimiento de una fuerza interna como si se tratase de un cuerpo rígido, debido a que las partículas de este se comportan de forma casi ordenada con características en común. Es propio del desplazamiento interno de un cuerpo rígido que la distancia entre sus partículas permanezca inalterada.

Cuando se toma la compresibilidad del gas, hay que tener presente que la ecuación de estado depende explícita y/o implícitamente de la temperatura y por tanto la respuesta a los esfuerzos de compresión depende de esta durante el proceso. Podemos considerar dos casos límite, según si la compresión ocurre muy lentamente o muy rápidamente.

La hipótesis de incompresibilidad fue una suposición razonable (y aceptable) para líquidos, pero no para los gases. La materia condensada es poco compresible porque los átomos y moléculas están dispuestos en arreglos compactos. Sin embargo, hay situaciones en las cuales se debe tomar en cuenta la compresibilidad (por ejemplo, al estudiar la propagación del sonido). Esto fue válido para la mayoría de los estudios en las últimas décadas, generando errores en las ediciones y experimentos que parecían salir de la nada. Cuestiones que no estaban consideradas dentro de los medios, ya que esas compresiones, se espera verlas en un sentido matemático como compresiones, un material disminuyendo en su volumen, forzando un cambio en su densidad, cuando en

realidad se generan deformaciones, ya que la compresión no se da de forma uniforme en todas las dimensiones del volumen.

Para el caso de un fluido que presenta baja o nula compresibilidad, en un sistema termodinámico de condiciones variables, con conservación de energía interna se tiene que el tensor de estrés para casos de fluidos se representa con las llamadas Ecuaciones de Navier-Stokes (Euler) cuya solución convergente fue demostrada por Emmy Noether:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j} \right)$$

Para cada término, según el análisis posterior a los trabajos de los científicos Navier y Stokes, dado que ellos no dieron un “significado” a dichas ecuaciones, se ha concluido que son elementos descriptivos de una acción y su reacción localizada:

- $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ , la aceleración local de las partículas del fluido en un punto determinado, y en el caso de un fluido en estado de equilibrio, dicho término es cero,
- $u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ , la aceleración de convección de las partículas del fluido, que predice como cambia el flujo de un punto en el espacio al siguiente, en términos de la variación temporal,
- $f_i$ , la fuerza debida a la aceleración de la gravedad,
- $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ , es el cambio de la presión en cada sección del volumen debido al movimiento de las partículas, que se tiene como el bombeo debido al flujo,
- $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j}$ , es la desaceleración debido a la viscosidad dada la resistencia de la fricción de acuerdo a los objetos internos moviéndose.

Estas ecuaciones determinan por estadística no lineal, el flujo de un determinado cuerpo y energías que componen sus partículas, también genera un sistema descriptivo de cómo evoluciona con respecto a los tres tiempos (pasado, presente y futuro) cada uno como un conjunto de matrices tensoriales métricas. Cada estado de equilibrio descrito por el tensor de deformaciones a través de las ecuaciones de Navier-Stokes se puede considerar como un cuerpo independiente.

Aunque algunos fenómenos físicos pueden estar relacionados con un cambio de temperatura en el medio debido a las altas frecuencias en que pueden vibrar los materiales, la acústica trata de forma indirecta dichos principios, apegándose a las leyes de la termodinámica, pero siempre considerando estos cambios como fenómenos virtuales, dejándolos de lado en la dinámica en tiempo real de los fenómenos acústicos. Es entonces, que la acústica estudia de forma casi exclusiva, aquellos sucesos físicos que implican una interacción mecánica en la cual se llega a analizar los cambios de temperatura como un efecto indirecto.

Hay un extenso conjunto de parámetros por analizar con respecto a las ondas acústicas dependiendo si es un estudio de percepción y psicología (pitch, volumen o *loudness*, tempo, ruido, timbre), propiedades mecánicas (intensidad, presión, temperatura, energía, potencia, frecuencia) o si se trata de entender las propiedades de un fluido (decibel, longitud de onda, presión atmosférica, presión de gas, temperatura, ruido, densidad el medio, frecuencia).

Cada parámetro que define lo que conocemos como la dinámica del sonido, y por encima de esto, de la acústica, esta correlacionado con los demás, con una dependencia directa. De forma que cada nuevo estado en un fluido está determinado por los estados previos. Todo esto, limitando el análisis hacia los fluidos, dejando fuera los sólidos que tienen ciertas características diferentes, con las demás en común.

La acústica establece el estudio de los cambios morfológicos de un determinado cuerpo por cualquier fuerza, presión o acción (a distancia o cuerpo con cuerpo) para cualquier medio material, incluyendo la trasmisión de dicha información a través de radiación. Considerando que incluso el sonido genera un cierto tipo de radiación medible y útil para la comprensión de los fenómenos de la física. Mientras haya un medio, la acústica nos da suficiente información sobre interferencias en los experimentos en ambientes controlados, ruido de medición, o cualquier intento de reproducir sucesos con la mayor cantidad de detalles, de fiabilidad.

Los límites del estudio están determinados por la matemática que se usa para el modelado, considerando la mayor cantidad de parámetros posible, de manera que la tecnología requerida no sea de alta gama o muy costosa. Se puede compensar uno con

otro. Donde las ecuaciones de Navier-Stokes nos indican una codependencia de los elementos, que genera ruido en cualquier registro de datos por medios electrónicos.

Se puede definir a una onda como la transferencia de energía a través de un medio como puede ser materia o algún campo, donde esta puede estar caracterizada por una función trigonométrica, exponencial, exponencial imaginaria o como la combinación lineal de estas. La energía transportada por las ondas requiere que su fuente de producción sea continua; de lo contrario, el movimiento se desvanece o desaparece súbitamente. Dicha onda está representada por su función que involucra:

- Vector de desplazamiento
- Frecuencia de referencia de vibración del sistema
- Fase promedio de los componentes del sistema
- Una amplitud de onda, que puede ser adimensional

En ocasiones se define a la una onda como el resultado del colapso de múltiples ondas viajeras que en conjunto tienen una amplitud, frecuencia, fase y vector de onda característico del conjunto, que bien puede ser también el referente a un frente de onda con una velocidad de grupo de onda en lugar de una frecuencia angular de un conjunto de ondas colapsadas.

El decibel es una cantidad fundamental, medida en términos relativos de la intensidad, en una comparación de las ondas, principalmente usado en la electrónica y la industria musical. También suelen definirse como variaciones de la presión en el medio, o intensidad con respecto a un tono conocido como nivel cero, que en realidad es un punto por encima de la presión atmosférica. Para dos intensidades de sonido diferentes  $I_1$ ,  $I_2$ , se dice que una es de mayor intensidad que la otra por una cantidad de *decibeles* (db o dB), donde:

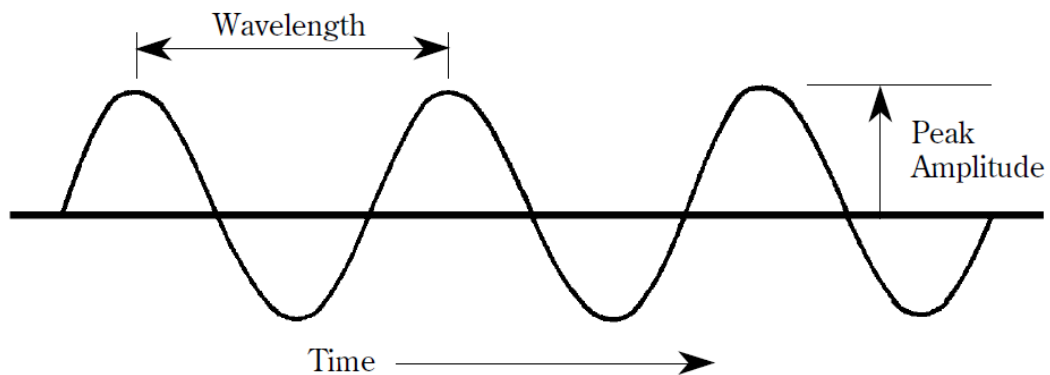
$$\text{Diferencia de intensidad en dB} = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_2}$$

El uso más común en la electrónica y la industria musical para el decibel es en una comparativa con el 'ruido blanco' o con una señal de fondo que bien puede ser controlada. Se utiliza por lo general para tener un control de las variaciones (o compensaciones) que tiene una señal de audio generada por computadora o por un

sistema electrónico, con respecto a una señal de fondo o señal de ruido, para ver la pureza de la señal que se está obteniendo. Aunque en ocasiones puede ser que la señal que se desea conocer sea la de ruido, para comprender la forma en que se comporta el sistema o para tener un control de los errores en el diseño del sistema electrónico (o de la música).

El grado en que se repite el movimiento periódico de una fuente vibrante de sonido se conoce como frecuencia, dentro de la física. Puede variar con respecto a todos los parámetros del sistema, e incluso con respecto a otras. Por lo general se relaciona a la frecuencia con la energía. La repetibilidad de una señal o sonido, difiere de un fenómeno físico a un registro digital, y para los segundos, puede ocurrir un cambio de acuerdo a la cantidad o diversidad de filtros, cuya funcionalidad radica en eliminar ciertas frecuencias, eliminando la intensidad que tienen en su diagrama espectral.

Para perturbaciones de naturaleza armónica, la longitud de onda es la distancia que hay entre crestas adyacentes. Siguiendo la correlación  $\lambda = \frac{v}{f} = vT$ , donde  $v$  es velocidad de la onda (puede o no ser la misma del sonido). Al inverso de la frecuencia, entre mayor la energía del sistema menor la longitud de onda.



*Figura 3.1. Descripción básica de una onda y sus elementos más básicos, para el caso de una función temporal.*

El volumen del sonido, en términos de acústica moderna, es una medida meramente subjetiva sobre la sensación de impacto de una onda respecto al oído. Como una característica debería ayudar a entender su fuente, su amplitud, su fase o incluso su nivel de energía. Esta medida subjetiva tiene que ver con alguna señal de referencia



propia de un sistema real (no en total quietud) por lo tanto se basa en un “ruido” de fondo, y al medirlo por lo general se supone como una superposición de señales.

La *intensidad* en la onda está definida como el flujo de energía por unidad de tiempo y por unidad de área (o de volumen, si hacemos nuestro análisis de ondas en 3D), moviéndose de forma normal con respecto a la dirección de la propagación de la onda. También se le conoce como densidad de energía de la onda. La energía a la cual hace referencia, es la onda individual generado por un fenómeno físico, no corresponde al frente de onda ni tampoco al sonido, con esto, cualquier medida de intensidad será solo una representación parcial del fenómeno.

$$I = \frac{1}{2} p_m \dot{\xi}_m = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 \xi_m^2$$

Podemos verlo como la cantidad de energía promedio que se desplaza por el cuerpo a cada unidad de volumen. De forma que la intensidad nos permite hacer nuestro análisis de las ecuaciones diferenciales a través de equivalencias de energía y no sólo de funciones adimensionales. Si tomamos expresiones para la función de onda que describe el sistema, dicha intensidad depende de las características del mismo.

En un caso ideal, para el estudio de las pruebas experimentales de *reflexión de sonido* buscaríamos un material cuya atenuación de las ondas mecánicas, fuera muy alto, haciendo que dichas vibraciones se desvanezcan rápidamente en el tiempo. En un material totalmente rígido con baja (o ninguna) homogeneidad en su estructura, las ondas se perderían casi tan pronto como estas entren en contacto. Ningún material del uso diario o de uso industrial es absolutamente rígido ni absolutamente flexible.

### 3.1. Reverberación

Cuando una onda de sonido viaja dentro de un cuarto cualquiera, podemos ver que en ocasiones se genera el efecto de “eco” cuando la onda de sonido que enviamos regresa en casi las mismas condiciones. En ciertas condiciones, este efecto de eco genera una onda con mayor intensidad. Si lo mentalizamos como una caja, el sonido puede viajar en ambas direcciones más de una vez, generando una nueva onda en

colapso con todas las demás que están viajando al mismo tiempo. Esta superposición, surgida de otras con características similares, es lo que se conoce como reverberación.

La reverberación es el tiempo en segundos que tarda un sonido en disminuir 60 decibeles. Debido a que el sonido es una propiedad de remanencia de los pulsos acústicos en un medio, cada nueva onda que percibimos es una distorsión de la original debido a la interferencia destructiva que se genera por la disminución de intensidad de la onda original. Podemos recuperar de cada nueva onda, el tipo de dispersión de partículas analizando la onda original con la que se recibe, esto para cada instante del tiempo. Entonces podemos decir que el sistema se retroalimenta y al final, dependiendo de la cantidad de tiempo que dejemos pasar, se predice cuáles son las condiciones de funcionamiento: densidad, viscosidad, humedad relativa.

Cuando tenemos un sistema reverberante, la información del pulso acústico original se pierde, aunque podemos reconstruir una imagen aproximada de lo ocurrido, estaríamos haciendo uso de interpolación de datos debido a los elementos perdidos. Ya que la mejor manera de conocer elementos importantes del pulso original como frecuencia, intensidad, tiempo de decaimiento y espectro de densidad, se logra solo por un experimento controlado, entonces procedemos a considerar que a partir de un instante  $t_0$  diferente de cero segundos, haremos el análisis.

Casi cualquier cuerpo presenta reverberación, y en su mayoría son ondas de tipo destructivas. Si se conoce el tiempo de cada tipo de reverberación, se puede crear una jerarquización de materiales para diferentes usos, es incluso guías para control de calidad. Los factores que describen este fenómeno están relacionados principalmente con la estructura, y en segundo lugar, con el medio circundante en que se propagan.

### **3.2. Resonancia**

El cuerpo está formado por partículas (átomos o moléculas) donde cada una está a una cierta distancia de las partículas vecinas, para el caso más sencillo podemos suponer que cada esfera (cada molécula) está equidistante con sus vecinos. Además, cada una de estas partículas tiene una cierta frecuencia de vibración angular propia, un *eigenvalor* de sus vibraciones que, bajo ciertas condiciones estas se pueden poner a

vibrar en la misma frecuencia del sonido incidente. Aunque no pierda la estructura, ya que la energía que conlleva la onda de sonido se pierde rápidamente con materiales suficientemente rígidos para que estos recuperen su estructura original y a la vez, que el sonido logre escapar del cuerpo.

En el caso de la reverberación, se consideraba que un fenómeno acústico se repetía en el medio de manera que cada onda era diferente (en fase) a la anterior, generando una interferencia destructiva, incluso si no logra que la onda acústica desaparezca.

Para la resonancia, un fenómeno acústico tiene una fuente que puede repetir la señal o bien, se propaga por un medio que, debido a la viscosidad, las partículas reaccionan imitando las frecuencias propias del sonido. Este tipo de interferencia es constructiva y genera un aumento en la amplitud del pulso. La resonancia puede crear un aumento en la amplitud conservando la energía original del pulso, lo que implica un corrimiento de fase, cambiando el tiempo de decaimiento para conservar la energía original del pulso.

La resonancia nos permite conocer si hay similitudes entre la estructura de un material o medio, en cuanto a las frecuencias de vibración de sus componentes y la frecuencia del fenómeno acústico. Cuando un pulso sónico actúa de forma resonante con un medio o con un objeto, podemos conocer a partir de la amplitud original de la onda, cuál es su ganancia, por ende, determinar si el sistema en estudio estaba sometido a algún pulso acústico interno. Puede haber perturbaciones mecánicas en su interior, debido a desgaste, temperatura, humedad o falta de homogeneidad en la estructura. Este tipo de fenómenos son detectados por la resonancia acústica.

### **3.3. Rarificación: Far field y Near field**

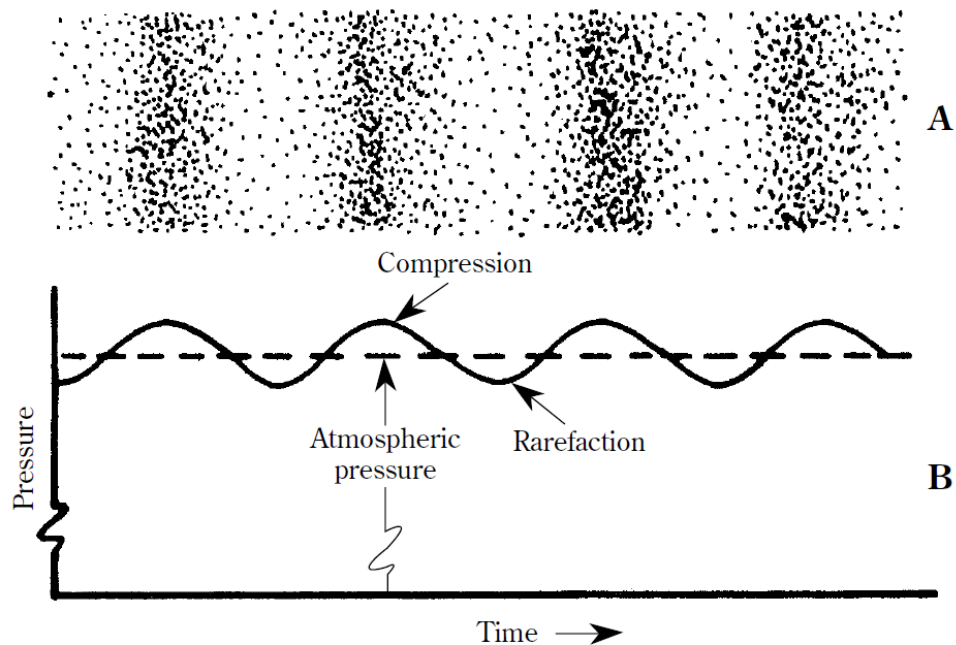
Por debajo de la temperatura crítica, la energía cinética de las moléculas de un líquido es pequeña frente a la energía potencial de las fuerzas intermoleculares, por lo tanto, el trabajo de compresión incrementa fundamentalmente a esta última. Un gas puede tratarse como incompresible si su movimiento es tal que las diferencias de presión que aparecen, no son demasiado grandes. El rozamiento interno en un fluido da lugar esfuerzos constantes cuando dos capas adyacentes se mueven la una sobre la otra (donde la perspectiva en términos de los ejes se ajusta la simetría necesaria) o cuando

el fluido se mueve por tubos (como el cuerno acústico) o se encuentra a un obstáculo. En algunos casos estos esfuerzos son despreciables si se comparan con fuerzas gravitatorias o con la originada por diferencias de presión (como en un sistema inducido).

En un pulso acústico que viaja por un fluido, hay siempre dos zonas en específico que demuestran la dinámica del sonido: la zona de compresión y la de rarificación. La primera es la zona del volumen en que las partículas interactúan entre sí, transmitiendo el pulso acústico, siguiendo la dirección de la propagación. Hay transferencia de energía y aunque se espera que no haya transferencia de masa, en fluidos reales ocurre que parte de las partículas en la zona de compresión no pueden retornar a su posición original y terminan viajando por el medio. Cuando se da este fenómeno, la reverberación es parte del mismo pulso acústico, generando interferencia destructiva al mismo tiempo que se propaga de la fuente original.

En la zona donde las partículas se alejan para que llegue el pulso a mayor distancia, la llamamos rarificación. Esta sección es característica del fluido de acuerdo a su elasticidad, compresibilidad, densidad y el tamaño medio del cuerpo. Ya que la energía que describe la onda es proporcional a una derivada temporal de la función de onda, se conoce que la energía es máxima cuando la compresión es mínima, es decir, la energía es máxima en la zona de rarificación. Y siempre es así para los fluidos ideales o pulsos conservativos. En un pulso acústico al aire libre, estos cambios de zona de compresión y rarificación tienen un límite. Ya que la cantidad de energía para hacer que un pulso viaje por toda la atmosfera es demasiado grande, la onda acústica tiene un límite de alcance. Por lo tanto, tenemos una zona de pulso acústico, una de transición (onda convergente) y una de ruido atmosférico.

La zona de pulso acústico es caracterizada por el cambio de compresión y rarificación, con el inconveniente que, al no estar contenido en un medio, se va disipando la energía debido a la viscosidad (para energías bajas) o a pérdidas por calor (para energías altas). Aunque la energía no se conserva del todo, podemos considerar un cierto tiempo máximo en que el sistema se comporta cuasi conservativo, y durante ese lapso, analizarlo como un fluido contenido. A esta zona en específico le llamaremos campo cercano (far field), donde consideraremos que toda la conservación de energía cumple y que, el sistema se rige por un pulso esférico.



*Figura 3.2. (A) Imagen instantánea del comportamiento de compresión y rarefacción de las partículas en el aire, durante el viaje de una onda de sonido. (B) Las zonas comprimidas se encuentran ligeramente por encima y las zonas rarefadas ligeramente por debajo del valor de la presión atmosférica. Por ende, las variaciones de presión para las ondas de sonido se encuentran superpuestas sobre las variaciones barométricas de presión (es decir, las generadas en la naturaleza).*

La zona alejada del pulso acústico, se considera como la región donde la función de onda va degenerando hasta que la velocidad de desplazamiento se vuelve la velocidad de movimiento de las partículas. La amplitud converge a la amplitud de movimiento de las partículas. Es difícil recuperar información del pulso acústico original, y básicamente todo se puede considerar como ruido en un análisis. Dicha zona en el espacio de un fluido, le conocemos como campo lejano (far field) y se puede estudiar, en el caso de fenómenos al aire libre, como si fuera la atmósfera.

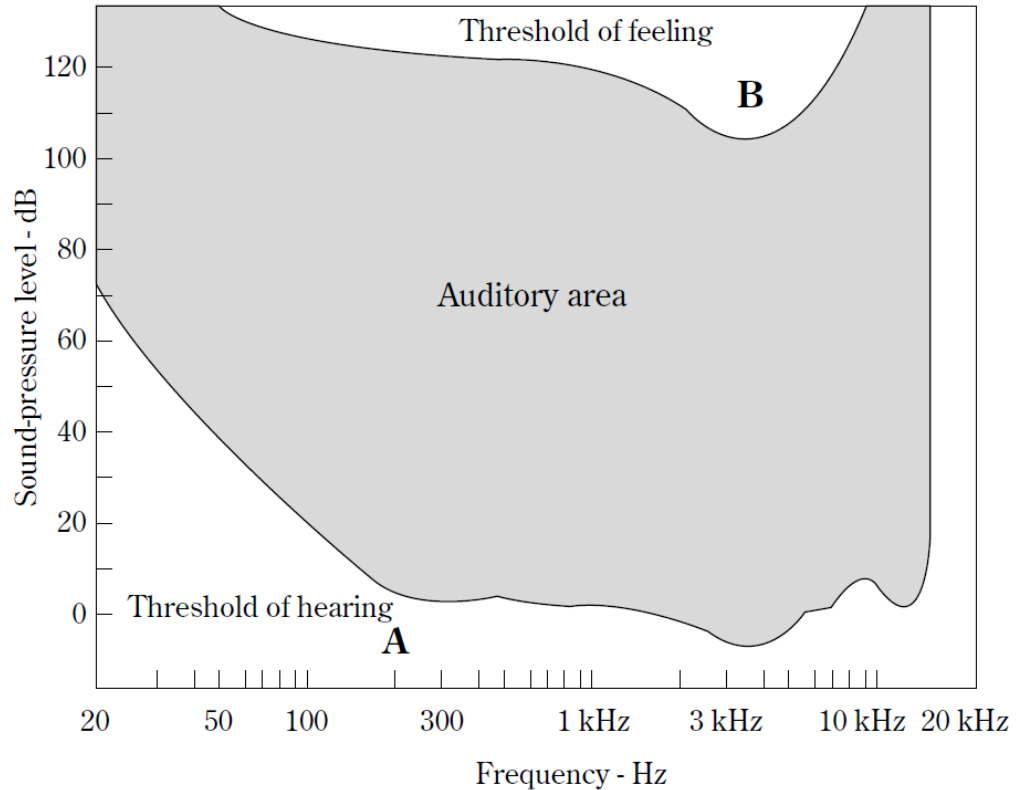
Finalmente, el punto intermedio, donde el pulso acústico comienza a desvanecerse y se tiene esa transición hacia las condiciones del fluido con respecto al resto del cuerpo. Esta zona en particular es problemática para el estudio de un pulso acústico porque tenemos interferencia de la convergencia de la onda, como del ruido del medio ambiente, como el problema de una baja amplitud de señal.

### 3.4. Ruido

La palabra *sonido* solo debería usarse en relación con los efectos directamente percibidos por el oído humano; estos efectos están normalmente relacionados con el movimiento de ondas en el aire. Se puede considerar al sonido como cualquier fenómeno de vibración que se da en el aire para determinado rango de frecuencias (15 Hz a 21 kHz, para un oído sano), lo cual ya sería una descripción con consideraciones muy básicas. Para hablar de sonido también se debe establecer que su definición es válida para un cierto rango de temperaturas en que la velocidad del sonido puede conocerse por una aproximación línea, siendo que esto va de 0 °C (273.15 K) hasta 50 °C (323.15 K). Al mismo tiempo, para complementar su definición, el sonido está limitado a ser percibido por el oído humano para una intensidad relativa de 20 dB como mínimo, y 140 dB como máximo, siendo el extremo mayor de algo riesgo para la audición humana.

La frecuencia presente en el límite superior para el rango audible de un oído promedio es no mayor a 21 000 ciclos/s (Hz). Frecuencias más altas que estas son llamadas ultrasónicas. A frecuencias altamente ultrasónicas, la velocidad de onda en los gases tiende a regirse más por un proceso isotérmico que por un proceso adiabático. Para perturbaciones de frecuencias altas y con energías también altas, tenemos el desarrollo de la matemática para las ondas de choque o incluso, dinámica de explosiones dado que se generan cambios repentinos en los estados de agregación.

Cabe aclarar que toda frecuencia mayor a 21 kHz y menor a 15 Hz (o 30Hz según qué fuente se consulte) no debería, en primera instancia, llamarse sonido. A pesar de que a todas estas frecuencias mayores se llaman ultrasonido y las menores al límite inferior se llaman infrasonido (ondas subsónicas) no lo son. Sin embargo, con el paso de los años se ha acostumbrado a utilizar este tipo de palabra para hablar de dichas perturbaciones.



*Figura 3.3. Mapeo de la zona “audible” dentro del espectro de todas las vibraciones mecánicas posibles.*

La gráfica marca una cierta área de audición, ésta es definida en términos médicos, por lo que de alguna forma incluye también las señales que el cerebro puede “escuchar”, pero los oídos no. Dicho de otra forma, al área de audición incluye aquellos tipos de ondas que son percibidas incluso por nuestro sistema nervioso periférico pero que de alguna manera no podemos interpretar a nivel consciente como un sonido o incluso como un “ruido”.

Por otro lado, estas señales que no podemos fácilmente interpretar como un sonido son niveles de presión que interfieren con la estructura celular, por lo que, aunque no podemos “escucharlas” dichas ondas pueden perjudicar el sistema nervioso y por ende el resto del cuerpo. Es por esto que debemos considerarlas parte importante del sonido. Luego, excluyendo estas ondas podemos obtener aquellas señales que son percibidas por el oído y que podemos interpretar como sonidos tal cual. Solo en este pequeño rango de valores, en una muy delimitada zona auditiva es donde se encuentra lo que realmente es el sonido.

Comúnmente se define al ruido como un sonido indeseado. En cuanto a la acústica, el sonido puede ser de naturaleza musical o indeseable ya que genera interferencias en las comunicaciones. El sonido consiste en ocasiones de componentes para frecuencias relativamente pequeñas, pero por lo general es una mezcla heterogénea (en análisis) de frecuencias y amplitud, que cambian rápidamente con el tiempo pero que convergen en una sola onda como un promedio. Dichos componentes de la onda resultante se pueden analizar por dinámica de *wavelets* (se les llamada ondoletas en español, pero se respetará el término original en inglés) que permiten descomponer una onda característica en sus múltiples posibles elementos.

Cuando generamos una perturbación en un medio material (puntual, con sección transversal, por convección, cambio de presión, etc.) se espera que dicha perturbación se propague de forma homogénea en el medio, con una función de onda directamente proporcional al impulso inicial y con una fase cero, de forma que se tienen frentes de onda equidistantes para cualquier tiempo de la dinámica de ondas.

En una situación real, diversos elementos interfieren con la homogeneidad de las ondas que se desplazan en el medio, así como también se generan fases diversas para distintos ángulos y los frentes de onda se propagan de forma irregular, sin una geometría simétrica generando un choque entre estos, con lo cual se tienen múltiples ondas resultantes diferentes de acuerdo a cada punto en que se analizar.

Estas variaciones con respecto a la aproximación lineal de un sistema homogéneo, con un medio isotrópico, son conocidas como ruido acústico. En términos generales ese término hace alusión a diversos elementos que pueden formar parte de la dinámica de ondas y que interfiere con adecuada propagación de las ondas; dichos efectos que interfieren son de diferente naturaleza como la no homogeneidad del medio (medio anisótropo, densidad no constante, daños estructurales), la temperatura incremental, fuerzas externas (gravedad, campos EM), el tener más de una fuente generadora de perturbación acústica, ondas de alta potencia que pueden generar zonas de rarificación o incluso ondas de choque.



En acústica suele definirse al ruido como frecuencias de sonido no deseadas o que alteran la calidad de una grabación o de la transferencia de información de la onda. Incluso suele definirse en términos de lo que el oído humano percibe, por lo tanto, solo en psicoacústica el ruido puede decirse que son frecuencias que se consideran molestas al oído humano, fuera de ahí, tiene una definición más precisa y generalizada con respecto a los sistemas físicos en general.

En electrónica y en sistemas de comunicación por las propiedades eléctricas como del tiempo de respuesta, se describe al ruido como pérdidas de información o de la integridad de una señal. Este tipo comúnmente se procesa, elimina o distorsiona a través de filtros, ecualizadores o canales de supresión acústica en el caso de las grabaciones en estudios profesionales de música.

Dentro de la física de ondas hay tipos de ruido, cuya definición puede o no coincidir con otras áreas técnicas como las matemáticas o ingeniería electrónica. El término ruido, se usa en general cuando estamos hablando de una señal acústica en el aire (pudiendo ser sonido más no exclusivamente) que está siendo grabada de alguna manera (micrófonos tradicionales o micrófonos láser) y se presentan elementos no deseados en la señal digital. A continuación, se mencionan el significado de algunos de estos:

- Blanco (o gaussiano), se puede tomar como una señal aleatoria, generada por un proceso estocástico de parámetros no correlacionados, este tipo de ruido es la mejor definición para cuando hablamos de condiciones que hemos ignorado en el análisis de un sistema,
- marrón (o ruido browniano), es una descripción estadística de variaciones en la trayectoria de una partícula (o conjunto de partículas), su primer uso fue en la descripción del movimiento browniano, de ahí el nombre
- rosa, son las frecuencias alteradas o eliminadas de una secuencia de armónicos en la producción musical, ya que la finalidad es hacer una melodía “agradable” al oído, se eliminan ciertas condiciones naturales de una canción,
- térmico (de Johnson) que altera voltajes y corrientes dentro de un circuito,
- ruido de disparo, dentro de un circuito electrónico debido al encendido y apagado de sus múltiples componentes, siendo que algunos de estos no se pueden eliminar, y,

- frentes de onda invasores generados por otras perturbaciones acústicas en un radio no mayor a 10 metros desde el punto donde se estudia la perturbación de interés.
- negro, - azul, - gris.

Cada tipo de ruido tiene su funcionalidad y su interés en la física, no son solo señales aleatorias que parecen no tener sentido o que interfieren con las señales que se deben manejar para entender el comportamiento del sistema. Entonces... ¿Qué es el ruido? De cierta forma, podemos clasificar al ruido en dos tipos: de “fondo” y controlado.

Cuando tenemos pérdidas de información en el estudio de un sistema, se debe al ruido controlado, al ser resultado de control de entrada de señal, de ampliaciones, de filtrados, hacemos que cambien las frecuencias, amplitudes o fases naturales obtenidas en la medición o experimentación. En cierta forma, el “ruido” que no perjudica es el que tenemos de “fondo”. Que en realidad son señales de ondas que provienen del sistema. De todos aquellos parámetros que no incluimos en nuestras ecuaciones o simulaciones.

Recordando, se define al *ruido* como sonido no deseado. Dicho ruido puede ser obtenido por diversas condiciones del medio. No todo el ruido que se tiene en un estudio de acústica proviene de un ruido de fondo sino también de las imperfecciones causadas en el sonido debido a una alteración en el medio donde se comunica el material: para gases, convección en los mismos debidos a cambios de temperatura, para metales puede ser la no homogeneidad del material.

Estos elementos del ruido de fondo no pueden ser eliminados, se considera que dicho ruido al formar parte de la toma de datos, se debe considerar para hacer el estudio de posibles alteraciones y convertirlo en múltiples canales considerándolos *wavelets* de una onda característica del fenómeno generado. Incluso se pueden hacer cálculos predictivos de ciertos tipos de ruido esperados, como el gaussiano, de Brown y el térmico, siendo este último para electrónica con componentes de baja potencia en particular.

## CAPÍTULO 4

### TENSORES Y PSEUDOTENSORES

#### 4.1. Dinámica de fluidos

Todos los materiales muestran deformaciones bajo la acción de fuerzas externas y/o internas; elasticidad cuando una cierta fuerza genera una deformación finita en el cuerpo y ésta se pierde cuando la fuerza deja de tener acción; plasticidad cuando una masa queda deformada incluso si la fuerza que actúa deja de interactuar con esta. También presentan un flujo cuando una deformación crece constantemente sin límite o con un intervalo de tiempo relativamente grande, bajo la acción de algunas fuerzas, con desplazamientos pequeños. Este tiempo, por ejemplo, en sistemas industriales o zonas residenciales, comienza a partir de los 60 segundos.

Se cataloga a todos los gases y líquidos como fluidos, siendo que los gases se expanden hasta llenar todo el espacio posible con el que pueden contar y con ello se le clasifica como fluidos compresibles e incluso, altamente compresibles para algunos casos. Esta tiene un límite que depende del calor latente de transformación para cada gas como del punto de ebullición del material que dio origen o puede dar origen a determinado gas. En términos simples, la definición física de un fluido es cualquier material que fluye, es decir, que no tiene una forma definida y que su fuerza de cohesión entre las moléculas es baja. Podemos hablar también del movimiento de los fluidos y como se presentan algunos de sus cambios, como la compresión, la vorticidad y los cambios de fase, siendo esto lo que se conoce como dinámica de fluidos.

*Definición.* - Sea  $\Omega_0$  un conjunto de puntos abiertos pero delimitado en  $R^3$  ocupados por fluidos en un tiempo  $t = 0$ . "Dinámica de fluido" es entonces una transformación  $H_t$  en el entorno  $\overline{\Omega_0}$  dentro de  $R^3$  de tal forma que el conjunto de puntos  $H_t \Omega_0$  son ocupados por el mismo fluido en un tiempo  $t \neq 0$ .

De acuerdo a la dinámica del movimiento de las partículas en un fluido, se sabe que estas no tienen una dirección preferencial individualmente (sí como un todo, como el cuerpo o sistema material), y, se generan colisiones internas durante el desplazamiento

del fluido, donde dichas colisiones generan cambios de velocidad en ciertos conjuntos de partículas, siendo una aceleración y/o desaceleración manteniendo la energía potencial total inalterada bajo la condición de no tener un aumento de temperatura. Con ello se tiene que la velocidad del fluido  $\vec{v}$ , tiene derivadas parciales con respecto a  $\vec{r}$  y  $t$ , en el dominio cerrado de los puntos del fluido.

Movimiento incompresible se refiere a al movimiento de un fluido de forma que  $\rho(\vec{r}, t) \equiv \text{const.}$  en la dinámica de fluidos esto implica que incompresibilidad no se refiere a una propiedad del fluido, sino a una propiedad de la representación de la aproximación del comportamiento real del fluido.

Dentro de un fluido, podemos observar una propiedad que surge de las colisiones ya mencionadas entre las partículas que lo conforman debido a que no todas tienen una misma dirección de movimiento cuando hay una perturbación o cuando se expande para llenar un contenedor. Dicha propiedad se conoce como viscosidad y hay de tres tipos:

- Viscosidad dinámica o absoluta  $\nu$ , siendo esta la relación existente entre el esfuerzo cortante y el gradiente de velocidad durante el movimiento,
- Viscosidad cinemática  $\mu$ , que es el cociente de la viscosidad dinámica entre la densidad del fluido, y habla de las propiedades de un fluido con respecto a su movimiento y su distribución de partículas, y,
- Viscosidad de bulo, que muestra la relación entre las dos viscosidades anteriores en las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\mu_r = \nu + \frac{2}{3}\mu$$

Cuando un fluido no presenta ningún tipo de viscosidad se dice que es un fluido ideal, y cuando tiene una viscosidad pequeña como en el caso de algunos gases, se dice que es cuasi-ideal, con lo cual se hacen algunas aproximaciones en los cálculos físicos. También, la definición matemática de lo que es la viscosidad se tomará en la sección donde se habla de las ecuaciones de Navier-Stokes y la solución analítica de esta. Los elementos de la dinámica de un fluido requieren un análisis en tiempo real de posiciones de sus partículas, tanto en el presente, como el pasado, para una interpolación y predicción de posiciones futuras.

## 4.2. Electromagnetismo

En el sentido macroscópico una “carga puntual” es aquella cuyas dimensiones espaciales son muy pequeñas en comparación con cualquier otra longitud pertinente al problema en consideración, y utilizaremos el término carga puntual en este sentido. La carga es una propiedad fundamental y característica de las partículas elementales que forman la materia. Desde el punto de vista macroscópico, las cargas pueden reagruparse y combinarse en distintas formas; sin embargo, podemos establecer que la carga neta se conserva en un sistema cerrado. La ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales:

$$\vec{F}_1 = C \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{r_{12}^2 r_{12}}$$

Las cargas en movimiento generan campos eléctricos como campos magnéticos, junto con fuerzas magnéticas y eléctricas. La radiación es una variación de la energía que tiene una partícula en movimiento cuando interactúa consigo misma a través de los campos que posee esta. En un sentido macroscópico es común tratar con los campos en lugar de las cargas.

Las ondas electromagnéticas pueden producir débiles fuerzas sobre los objetos que se encuentran en su camino. Una onda absorbida por una superficie la desplaza; la misma onda, si la superficie es perfectamente reflejante, no deposita energía alguna, pero induce el doble de movimiento sobre esta. Desde un punto de vista macroscópico, se observa que las ondas luminosas que inciden sobre un material pueden ser reflejadas, transmitidas o absorbidas por el mismo, convertidas en calor. En escala microscópica, la onda luminosa tropieza con un electrón de la materia, que comienza a vibrar a la frecuencia de la luz. Si la frecuencia natural o resonante es mayor que la frecuencia de la luz, el electrón vibra siguiendo la oscilación de ésta. Si es menor, el electrón se opone a la fuerza de vibración. En este caso, si la frecuencia de la luz está próxima a la resonancia, los electrones absorben la energía de la onda luminosa y la traspasan a los electrones próximos y al átomo.

Cualquier fuente de luz, incluyendo el láser (*light amplification by stimulated emission of radiation*), produce emisiones luminosas al descender de nivel los electrones en átomos excitados. Los estados de interés son metaestables: aquellos en los que el

átomo puede permanecer durante bastante tiempo si no sufre influencias externas como colisiones o luz de ciertas longitudes de onda.

En ocasiones, un electrón situado en un estado metaestable salta espontáneamente a otro inferior, que generalmente es el fundamental. Con ello emite radiación de una longitud de onda que tiene una enorme influencia sobre otras moléculas vecinas. La onda luminosa estimula a las demás moléculas haciéndolas emitir luz y pasando simultáneamente a sus estados fundamentales. Una característica especial de esta radiación estimulada es que, cada vez que se incorpora un fotón adicional de otra molécula al proceso, su fase, dirección y polarización es exactamente la misma. La intensidad de luz crece rápidamente a medida que participan más moléculas. Por lo que una salida del laser se mide como un promedio ponderado de la energía independiente de cada partícula, como un efecto conjunto considerando también las pérdidas por interferencia.

La cantidad de energía incorporada en cada paso es pequeña, por lo que se necesitan muchos millones de oscilaciones para recoger toda la energía disponible. Cuando el láser forma una cavidad resonante, la onda luminosa es estacionaria dentro de la misma, con su fase perfectamente definida a lo largo del tubo. La acumulación de energía que desencadena el proceso laser se denomina reacción en cadena o avalancha.

Es gracias a esta estimulación conjunta que el láser se mantiene con la misma longitud de onda en su funcionamiento. Se logra ver que, debido al tiempo de excitación de las moléculas, el funcionamiento del láser es suficientemente rápido para despreciar su efecto de intermitencia en cuerpos grandes.

### **4.3. Tensores**

Un tensor es una interpretación matemática de un concepto físico. Un tensor es un objeto matemático que pertenece a un espacio vectorial (tensorial) y que es invariante ante un cambio de base. Cuando cambia la base, sus componentes se pueden recalcular a través de una fórmula conocida. Es de capital importancia asumir que un tensor es invariante ante un cambio de base, pero sus componentes no. Precisamente su potencia radica en que sirve para representar magnitudes invariantes ante rotaciones (de un

aparato de medida), cambios de escala (unidades de medida), cambios de base (inclinación de ejes), etc. Si rotamos el espacio las componentes del tensor podrán ser diferentes, pero el tensor en si será el mismo.

Los tensores son objetos matemáticos que no tienen variaciones al realizar transformaciones, los cuales nos ayudan a representar matemáticamente diversos fenómenos físicos, estos por necesidad son representados en un sistema de referencias y de este modo surge el concepto de componentes del tensor, estos son la representación del tensor en un sistema de coordenadas. Un tensor es una matriz multidimensional. El orden del tensor es el número de la dimensión, también conocido como las direcciones o modos. El Cálculo Tensorial es importante en áreas de la física como relatividad general, electrodinámica o dinámica medios continuos/deformables. Los tensores constituyen una generalización de los vectores, así como estos son una generalización de los escalares:

- Un escalar es un ente matemático que permanece invariante bajo rotaciones del sistema de coordenadas y pueden representarse por un número real.

Consideremos que tenemos un cierto elemento físico como un gas, el cual va cambiando de forma debido a interacciones internas y externas. Quiere decir que si tomamos una línea sobre su superficie que nos genere la medida de la curvatura de su volumen, esta estará sobre un medio que no es rígido. Si quisiéramos determinar la distancia que hay desde el origen del cuerpo (centro de masa) hasta el inicio de dicha línea, y otra distancia desde el mismo origen hasta el final de la línea, podemos determinar los dos vectores radiales como:

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2}$$

Son las ecuaciones de distancia que se conocen ampliamente. Válidas para un sistema de tres dimensiones sólido, en el cual los puntos siempre permanecen en su lugar. Para nuestro caso, la superficie donde se está midiendo la distancia, es imaginaria en el sentido que esperamos que sea el límite de nuestro gas. Ya que las partículas están en constante movimiento, podemos prever que las coordenadas no serán únicas y conforme pase el tiempo, van a cambiar.

Si consideramos un análisis virtual, en el cual solo nos preocupamos por los estados posibles del sistema, tendremos una colección de todos los posibles valores de coordenadas, donde nuestro espacio se está curvando y como consideramos que al menos las coordenadas de la superficie cambian, debemos considerar que las coordenadas del estado 1, determinan las del estado 2:

$$x'_2 = x'_2(x_2, x_0)$$

$$y'_2 = y'_2(y_2, y_0)$$

$$z'_2 = z'_2(z_2, z_0)$$

$$x'_1 = x'_1(x_1, x_0)$$

$$y'_1 = y'_1(y_1, y_0)$$

$$z'_1 = z'_1(z_1, z_0)$$

Para facilitar el manejo de las ecuaciones, renombraremos todas las variables para poder reescribirlas en términos de dos de ellas:

$$x_1 \rightarrow x_1$$

$$y_1 \rightarrow x_3$$

$$z_1 \rightarrow x_5$$

$$x_2 \rightarrow x_2$$

$$y_2 \rightarrow x_4$$

$$z_2 \rightarrow x_6$$

Por lo cual, la distancia que estamos pidiendo se puede representar como:

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (x_4 - y_0)^2 + (x_6 - z_0)^2} - \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (x_3 - y_0)^2 + (x_5 - z_0)^2}$$

Considerando una expresión simple para esta dinámica, pensemos por un momento que la misma distancia que vamos a obtener de dicha resta, es el equivalente a la longitud de arco sobre la superficie, además, será diferente para cada sección de la superficie total lo que implica que el cambio de dicho arco debe converger al cero para un sistema conservativo:

$$\frac{dS}{dt} = \int_a^b \frac{d}{dt} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}x_2(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}x_3(t)\right)^2} dt \leq 0$$



$$\frac{dS}{dt} = \int_a^b \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)^2} dt \leq 0$$

Ya que las coordenadas son codependientes, cada uno de estos parámetros serán función de sí mismos, es decir, que cada nuevo elemento de la integral de arco, nos genera una multi dependencia, aquí se muestra solo una de ellas, aunque las demás son similares:

$$x_1 = x_1(x_2(x_1), x_3(x_1), t(x_1))$$

Es entonces que, al momento de derivar cada elemento, se aplica la regla de la cadena en un determinado número de veces, lo cual desde la perspectiva de la superficie implica que estamos midiendo las variaciones con respecto a cada instante del tiempo, y con respecto a las variaciones entre las posiciones de las partículas que conforman el gas. Como necesitamos de forma aproximada que el resultado de la integral sea un valor constante, ello implica que:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)^2} = \frac{d}{dx_i} \sqrt{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)^2} = \frac{2 \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)^2}} = 0$$

De elementos anteriores, podemos simplemente considerar que una determinada deformación en una superficie o en un volumen de un determinado cuerpo, sin importar el estado de agregación, de fine en términos de la distancia que se puede requerir para que una determinado esfuerzo o partícula recorre dentro del sistema:

$$\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)^2}} = \varepsilon_{ij}$$

Por lo tanto, el elemento que requerimos que se aproxime a cero es una variación multiparamétrica de todas las variables que conforman tanto el volumen del cuerpo como su superficie, que a su vez, son todos elementos de las mismas variables, debido a que la información de las posiciones de las partículas se determinan por una combinación de

interpolación de puntos futuros como pasados, es entonces que dentro de nuestro integrando tenemos un tensor de rango 3, que será la base de un sistema a evaluar:

$$\frac{2 \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}}{\sqrt{\left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right)^2}} = \varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \approx \varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_j \partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \partial_{ij} x_i$$

Por petición de una empresa, se estuvo trabajando sobre un programa que permitiría predecir cuales son los recursos necesarios para construir un cierto sistema magnético. Se estuvieron guiando por ecuaciones experimentales durante años y se esperaba generar un modelo matemático que diera con el funcionamiento deseado. Se menciona algunos elementos tomados en esa investigación que llevaron a la demostración matemática por medio de tensores que prueban la naturaleza de los campos electromagnéticos como fluidos.

La mayoría de los sistemas industriales consideran a las ecuaciones de campo magnético y de fuerza de arrastre como ecuaciones simples, las cuales han demostrado tener una validez limitada en cuanto a un panorama global. Es decir, son útiles para una compañía y tienen que rediseñarse para otras. El campo magnético (y cualquier campo) es algo sumamente complejo y se extiende en todo el espacio. En esta sección se hace el análisis bajo dos consideraciones; el campo como un fluido y, el campo como un resultado de una derivada fraccional.

Para el primer caso nos podemos apoyar en la ecuación de tensor de deformaciones, y el tensor de fluidos tomado de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{m}{S} \frac{Du}{Dt} + l \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \sigma_{ij} = \frac{2}{\mu} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \\ mg \begin{pmatrix} \pi r^2 \\ rz \\ C_1 \end{pmatrix} + lmg \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} \pi r^2 \\ rz \\ C_1 \end{pmatrix} &= \frac{2}{\mu} \begin{pmatrix} B_r^2/2 & B_r B_z & 0 \\ B_r B_z & B_z^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ mg \begin{pmatrix} \pi r^2 \\ rz \\ C_1 \end{pmatrix} + lmg \begin{pmatrix} \pi r \\ z \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{2}{\mu} \begin{pmatrix} -B_0^2/2 & B_0 B_0 & 0 \\ B_0 B_0 & -B_0^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se había considerado que, debido a la simetría, los componentes angulares son siempre los mismos, sin importar con que ecuación lo estamos analizando, por lo tanto, no hay variabilidad alguna, incluso si quisiéramos establecer sus derivadas. Cada sección se separa por vector fila:

$$mg\pi r(r + 2l) = \frac{2 B_0^2}{\mu} = \frac{B_0^2}{\mu}$$

$$mg\pi(z + l) = \frac{2 B_0^2}{\mu} = \frac{B_0^2}{\mu}$$

De esto, podemos decir que tenemos cada ecuación es válida para cada variable de simetría, por lo que tenemos que hay un cierto componente tensorial inicial para cada dirección posible. Este sistema mostrado es solo la forma básica de las ecuaciones, de ahí se van a despejar los campos iniciales:

$$B_0^2 = \mu mg\pi r(r + 2l)$$

$$B_{0,r} = \sqrt{\mu mg\pi r(r + 2l)}$$

$$B_0^2 = \mu mg\pi r(z + 2l)$$

$$B_{0,z} = \sqrt{\mu mg\pi r(z + l)}$$

Si consideramos que la longitud de análisis del campo magnético es proporcional a la mitad de la distancia axial que estamos desplazando el campo. En unos de los componentes se hace una comparación entre el eje axial y el radial, ya que, al menos en el programa, se cuida que haya cierta proporción entre ambos valores:

$$B_{0,r} = \sqrt{\mu mg\pi r(r + z)}$$

$$B_{0,z} \approx \sqrt{\frac{3\mu mg\pi r z}{2}}$$

Es con estas últimas ecuaciones que se demuestra que, al conocer el campo electromagnético generado por el sistema industrial, la expresión matemática es el resultado de determinantes de matrices y productos matriciales para la forma diádica de un tensor electromagnético.

#### 4.4. Álgebra de tensores y diádicas

Si un subíndice aparece dos veces en un producto de cantidades con subíndices, sean o no tensores, se implica de forma directa una notación de suma sobre los índices. Desde una perspectiva física. En un sentido matemático, la sumatoria de elementos de un tensor no implica lo mismo que los dobles índices. Un tensor conteniendo a otro tensor es la referencia para los índices, bajo ciertas condiciones de distancia y métrica matemática.

Consideremos a un tensor cartesiano de rango  $r$  es una función multilineal invariante de  $r$  direcciones:

$$T = \sum_i \sum_j \dots \sum_n T_{ij\dots n} \cdot \xi_i \eta_j \dots \lambda_n$$

Donde  $\xi_i, \eta_j, \dots, \lambda_n$  son los componentes varios de vectores unitarios arbitrarios, es decir, los cosenos directos de las direcciones  $\xi, \eta, \lambda$  y todas las sumas son desde 1 hasta  $N$ , donde  $N$  es la dimensión del espacio. Las cantidades  $T_{ij\dots n}$  son llamados componentes del tensor y forma una representación con respecto a la misma base que las cantidades  $\xi_i, \eta_j, \dots, \lambda_n$ . Este tensor, en la física es básicamente la definición formal, y se utiliza como base para cualquier transformación, tal que, aquellas transformaciones lineales que no se pueden resolver fácilmente con expresiones matriciales, se procesan con sumatorias generando una solución válida en física, que en matemáticas se considera una pseudo solución.

Un tensor cartesiano de rango  $r$  es un conjunto de  $N^r$  cantidades  $T_{ij\dots n}$  que se transforma bajo rotaciones de acuerdo a las ecuaciones:

$$T'_{ij\dots n} = \sum_p \sum_q \dots \sum_t T_{pq\dots t} \cdot a_{ip} a_{jq} \dots \lambda_{nt}$$

Teorema. – El producto externo de un tensor de rango  $r$  con un tensor de rango  $s$  es un tensor de rango  $r + s$ .

Teorema. – La contracción de un tensor de rango  $r$  sobre un par de sus índices es un tensor de rango  $r - 2$ .

Teorema. – Si el producto, interno o externo, de un conjunto de cantidades  $X_{ij\dots n}$  con un tensor arbitrario  $T_{ij\dots n}$  lleva a un tensor diferente de cero de un determinado rango, entonces  $X_{ij\dots n}$  deben ser componentes de un tensor.

Si tomamos un orden ascendente en cuanto al rango de un tensor, comenzamos por el rango cero que está representado por una cantidad escalar, un punto. Le sigue el rango 1, que está relacionado con un vector (sin importar la cantidad de elementos) y finalmente, el más usado en física es el tensor de rango 2, representado por una matriz. Estos últimos suelen ser llamados diádicas, pseudotensores o falsos tensores. Aunque en física, estos últimos son llamados de forma general tensores y suelen usarse para las demostraciones de propiedades físicas, leyes, teorías o modelos experimentales.

Las diádicas suelen ser representadas de forma matricial o con conjuntos de sumas. Con esto, al momento de realizar productos, sumas, restas, divisiones y similares, se realizan bajo las mismas reglas que el álgebra matricial. Con esto, también se tiene como limitante que se realizan algunos productos de forma exclusiva para matrices de dimensiones  $n \times n$ . Esto se aprovecha en la física para definir sistemas con matrices diagonal y generar sistemas simétricos físicos.

Los elementos de diádicas permiten una suma directa de sus elementos, con lo cual se generan sistemas simples como expresiones de múltiples ecuaciones, ya sea que se tomen las columnas o las filas del mismo sistema. Cada conjunto de operaciones matriciales genera ecuaciones físicas de un mayor nivel de generalización. Lo cual implica que incluso sin realizar todos los productos, sumas o demás operaciones, son versiones especiales de las leyes físicas.

Para un sistema material definido por Galileo y Newton, el estado estable y de equilibrio es el resultado de un conjunto de deformaciones morfológicas definidos por tensores correlacionados, estableciendo una irregularidad en la superficie, logrando un cambio en la distancia de desplazamiento media de las partículas del fluido o sólido.

Para la solución de las ecuaciones diferenciales, se tomaron tanto formalismos matemáticos como físicos. En ciertos desarrollos se consideran a los tensores como

entidades unitarias haciendo “despeje” por algebra, bajo la suposición de que eso nos genera un tensor con diferentes propiedades matemáticas. En ocasiones se resuelven las ecuaciones siguiendo reglas para sumatorias o generando inducciones desarrollando ciertas demostraciones o justificaciones útiles en la rama de la física.

Aunque no sean entes matemáticos idénticos, en algunos casos se realizan los productos de tensores en expresiones matriciales cambiándose por sumatorias y usando propiedades de productos de sumatoria como el producto de Euler. En otros elementos, se realizan los productos de forma matricial. Esto limita la generalidad de la solución, y simplifica el proceso de las ecuaciones como su tratamiento.

Los cambios de coordenadas o transformaciones son útiles para el trabajo actual. En lugar de tomar transformaciones realizadas por autores o provenientes de libros, se realizan paso a paso, y algunos de estos aparecen en los apéndices del texto. Por ejemplo, si se tuviese una expresión del siguiente tipo:  $dx dy$ , en lugar de sustituir por la expresión de diferencial para coordenadas cilíndricas, polares o esféricas, se prueban las posibles combinaciones, para tener generalidad, aunque luego se pierda. En el caso anterior, se tienen las siguientes opciones:  $r dr d\theta$ ,  $-r \sin \theta dr d\theta$ ,  $r \cos \theta dr d\theta$ , entre otras.

Se aprovecha la dinámica de diádicas como una primera aproximación, aunque al terminar este texto, ya se está trabajando en un caso con mayor generalidad, sin incluir tensores de mayor rango, simplemente cambiando su variabilidad al considerar de forma activa la variación de elementos internos que fueron considerados como parámetros: densidad, humedad relativa, viscosidad, etc.

## CAPÍTULO 5

### ACÚSTICA, TEORÍA DE PERTURBACIONES Y LUZ

#### 5.1. Teoría de perturbaciones

Algunos sistemas físicos no funcionan como un sistema continuo ni tampoco como un sistema discreto, sino una combinación de ambos. Como se ha visto a través de la dinámica de la física en trabajos de Newton y Galileo, un conjunto de partículas puede estudiarse como un medio continuo si se aplican las transformaciones apropiadas en las ecuaciones, o reglas nuevas. Por ejemplo, un gas puede ser analizado en sus elementos base viendo el momento de cada partícula, el movimiento de cada una y las direcciones correspondientes. También se pueden analizar como un conjunto de elementos promedio, con lo cual surge la ecuación de estado térmico, dependiente de definiciones promedio de sus partículas: temperatura, presión, volumen, densidad.



*Figura 5.1. Registro de una función aleatoria en el tiempo.*

Existe un conjunto de fenómenos físicos que resultan en datos no determinísticos en donde valores instantáneos futuros no pueden predecirse en un sentido determinístico, donde dicho tipo de datos se conocen como funciones aleatorias del tiempo. A pesar del carácter irregular de la función, muchos fenómenos aleatorios exhiben cierto grado de regularidad estadística.

Cualquier método estadístico, requiere una gran cantidad de datos para establecer valores de confianza. La aleatoriedad real de un suceso, universo de estados o toma de datos, depende de variables no controladas como temperatura, heterogeneidad del medio y posibles fuerzas externas. Ningún sistema es realmente aleatorio por completo,

considerando que el movimiento de las partículas está relacionado con ciertos valores propios de vibración (eigenvalores) que cambian cuando están en agrupaciones, lo que indica una cierta dependencia de sus direcciones a estos valores. Cuando un fenómeno es suficientemente aleatorio, un conjunto de múltiples registros de datos puede tener una descripción precisa de dicho fenómeno, es necesario hacer dicho registro para el estudio. El total de datos se estudia como una distribución probabilista multi paramétrica.

Cada registro (*record*) es llamado muestra y el total de las muestras es un conjunto. Si los promedios del conjunto se reemplazan por promedios en el tiempo y si los resultados calculados para cada muestra son iguales a los de cualquier otra muestra e iguales al promedio del conjunto, se dice que el proceso aleatorio es ergódico. Así para un fenómeno aleatorio ergódico estacionario, sus propiedades estadísticas pueden obtenerse de una función temporal singular de un periodo de tiempo suficiente largo.

Desde otra perspectiva, se dice que un proceso aleatorio es estacionario si la distribución de probabilidad obtenida para el ensamble o conjunto de posibles estados resultantes (sucesos) no depende del tiempo absoluto. Es decir, todos los valores promedio son independientes del tiempo absoluto y, a su vez, la media, media cuadrada, varianza y desviación estándar son también independientes del tiempo absoluto.

Se denomina proceso débil estacionario cuando se usa para describir exclusivamente distribuciones de probabilidades de primero y segundo orden que son invariantes en el tiempo, y un proceso estacionario puro es aquel en que todas las distribuciones de probabilidad de cualquier orden son independientes del tiempo.

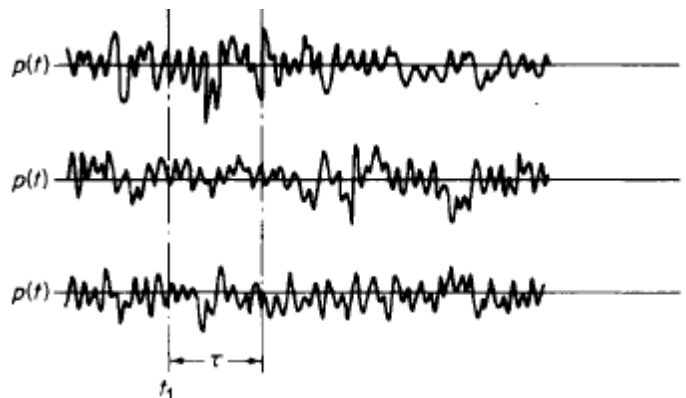


Figura 5.2. Conjunto de funciones aleatorias en el tiempo.



El promedio temporal de todos los valores muestreados de un fenómeno aleatorio es también el valor esperado de dicho espacio de muestro relacionado con una función temporal que describa dicho espacio, representado matemática como:

$$\overline{x(t)} = \langle x(t) \rangle = E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Para ciertas condiciones de un espacio de muestreo finito, donde los valores son suficientemente aleatorios y parecen no tener relación unos con otros, y están equitativamente distantes, se puede aproximar dicho promedio del espacio de muestras como una función discreta:

$$\langle x(t) \rangle = E[x(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Si se tiene un espacio muestral de tamaño finito, podemos conocer la factibilidad de que un determinado evento ocurre dado un fenómeno que se repite siempre con las mismas condiciones, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda perfecta y predecir cual será resultado en cada uno de los  $i$ -ésimos lanzamientos realizados. A la función matemática que nos permite predecir la factibilidad de que un evento determinado ocurra, se le conoce como función de probabilidad o simplemente, probabilidad. La cual es válida y tiene diversas expresiones para eventos discretos o continuos.

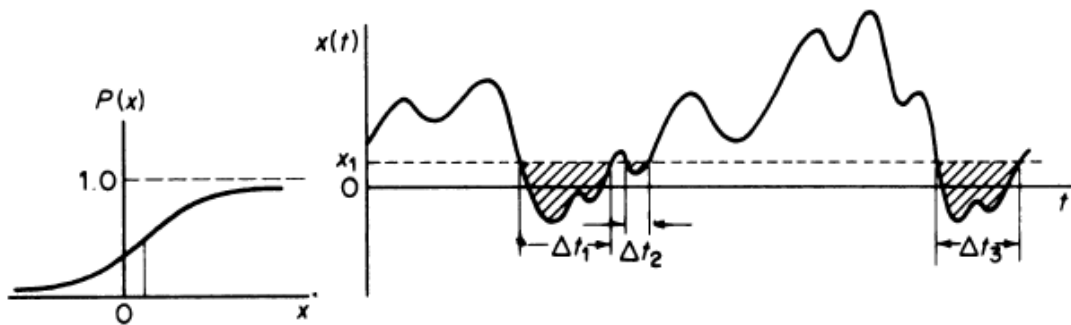


Figura 5.3. Ejemplo gráfico del cálculo de la probabilidad acumulada.

Para un arreglo de datos pertenecientes a un fenómeno aleatorio como se ha estado describiendo hasta el momento, ¿cuál es la probabilidad de que un determinado valor  $x_j$

sea menor que otro valor  $x_i$ ? En el caso de que se trate de un arreglo de datos finitos (espacio de muestreo discreto) esto se va a expresar como:

$$P(x_i) = \text{Prob}[x(t) < x_i] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum \Delta t_i$$

Se define ahora la función de densidad de probabilidad  $p(x)$  como:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = \frac{dP(x)}{dx}$$

Siendo esta expresión matemática, la relación entre la ocurrencia de un cierto fenómeno con respecto a otro del mismo espacio de muestras. Nos da información sobre la probabilidad relativa de un fenómeno con respecto a todas las posibilidades de ocurrencias. En el momento del análisis espectral de densidad, esta expresión de densidad de probabilidad determina la importancia o peso de ciertos valores de frecuencia e intensidad de

Dentro de las distribuciones de probabilidad existentes, nos centramos en la distribución de Gauss (campana gaussiana, distribución de campana, distribución Normal). Tiene como características notables y más reconocibles, que su media, mediana y moda coinciden exactamente en el mismo valor, y en el caso de la distribución gaussiana de varias variables, el valor promedio coincide también con los anteriores. La mayoría de los datos (aprox. 95%) se encuentran dentro de 3 valores de la varianza, hacia la derecha e izquierda del valor medio:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

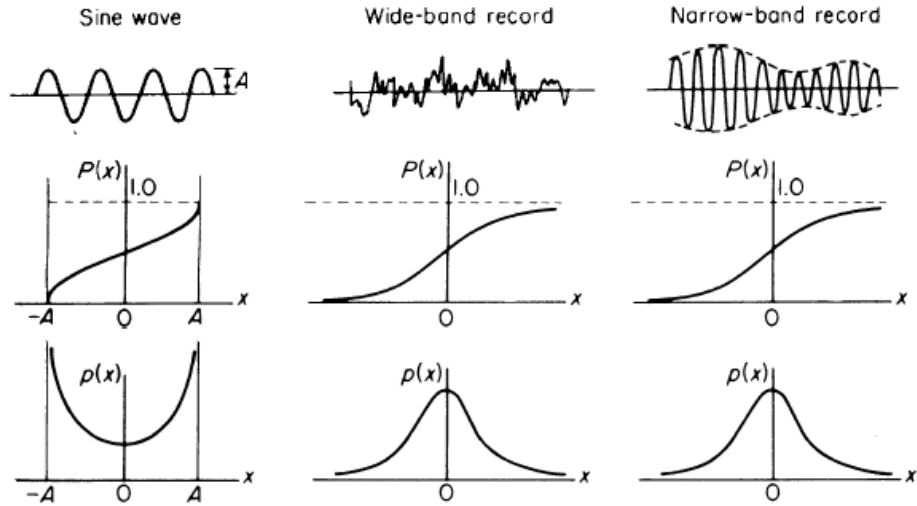


Figura 5.4. Funciones de probabilidad para 3 diferentes tipos de registros

Para ciertos experimentos controlados, la distribución normal es suficiente para estudiar el comportamiento en el tiempo, ya sea por sus estados independientes o por el conjunto de todos los demás estados como un fenómeno macroscópico. Incluso se esperaría que, en un sistema suficientemente controlado, la distribución normal tenga un comportamiento más parecido a la delta de Dirac, es decir, el conjunto de datos estadísticos del sistema estará contenidos en un rango pequeño, donde la frecuencia de algunos elementos será próxima entre ellos.

## 5.2. Análisis de correlación y densidad espectral

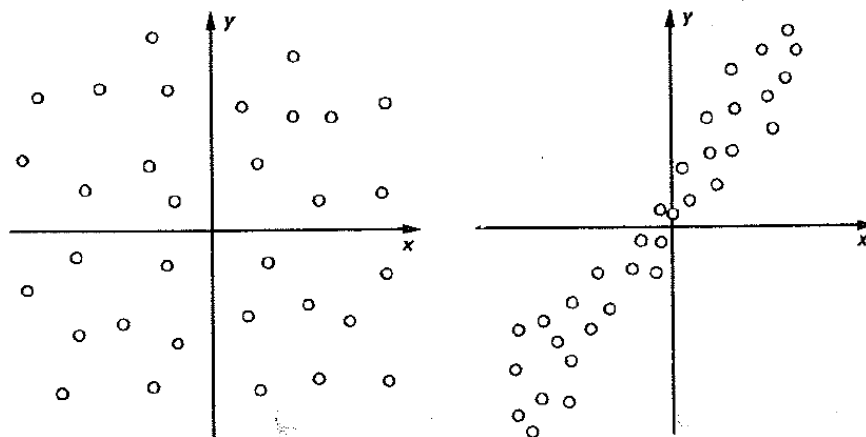


Figura 5.5. A la izquierda se muestran valores de 'x' y 'y' sin correlación, a la derecha, se muestran otros valores de 'x' y 'y' correlacionados

Correlación es una medida de la similitud entre dos cantidades, en específico para este caso, entre dos posibles valores del espacio de muestro infinito o suficientemente grande. Un análisis en el dominio del tiempo útil para detectar señales periódicas ocultas, enterradas en ruido de medida y tiempo de propagación a través de la estructura, y para determinar otra información relacionada a sus características espectrales que se discuten mejor utilizando transformadas de Fourier.

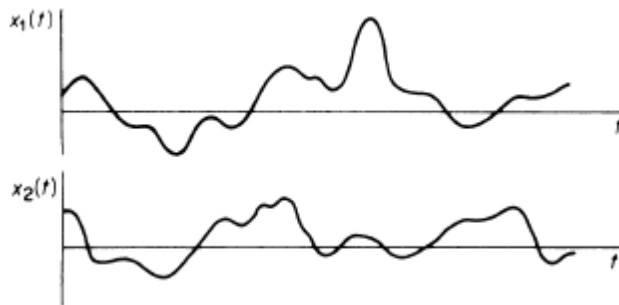


Figura 5.6. Correlación entre  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$

Se define a la función de autocorrelación de un proceso aleatorio  $x(t)$  como el valor promedio del producto  $x(t)x(t + \tau)$ , es decir, la relación de variabilidad de los valores de un mismo proceso aleatorio para diferentes tiempos con respecto al valor de referencia que va cambiando conforme se evalúa la autocorrelación. Para un proceso estacionario, su autocorrelación  $R_x(\tau)$  depende únicamente del tiempo de separación  $\tau$  para la señal de referencia y no del tiempo absoluto  $t$ , de manera que  $R_x(\tau)$  es una función par con respecto a  $\tau$ :

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = E[x(t)x(t - \tau)] = R_x(-\tau)$$

Se puede determinar la función de autocorrelación de cualquier proceso aleatorio, sea continuo o no en su dominio de tiempo, con lo cual se puede conocer la tendencia de los valores a tener un cierto orden o una cierta periodicidad para ser estudiados con alguna distribución estadística determinística como una aproximación a dicho comportamiento. Y dado que está definido en términos del valor esperado, muestra una directa relación con valores estadísticos como la media, la varianza y la desviación estándar.

Para un fenómeno real del cual se puede tener un espacio de muestro de sus estados posibles en un cierto periodo, su el registro temporal  $x(t)$  de la función de muestreo no presenta periodicidad por lo tanto no se puede representar con una serie de Fourier per se, sin embargo, se pueden tomar ciertas aproximaciones para su representación bajo la idea de que cualquier proceso estacionario cumple con la condición de convergencia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Si partimos de la función de autocorrelación  $R_x(\tau)$  podemos hacer un análisis de los posibles estados de un fenómeno en términos de sus frecuencias en lugar del tiempo, además de normalizar dichos valores del proceso para que su media sea cero, o bien, hacer un corrimiento de todos los valores posibles dado un determinado registro. Siendo este proceso con una media cero  $m = E[x]$ , para un proceso  $x(t)$  sin componentes periódicos:

$$R_x(\tau \rightarrow \infty) = 0$$

Con la condición de convergencia a un valor cualquiera que no tiene que ser entero que se cumple para cualquier tipo de correlación que estemos analizando. Considerando que la correlación de datos igual a 1, se presenta para una correlación absoluta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty$$

El espectro de densidad de potencia observado en los filtros en capítulos posteriores, muestra una relación parcial entre los elementos del espectro. Entonces, considerando la definición de una trasformada de Fourier y con la condición de que la autocorrelación tiene un conjunto de datos de frecuencia que se pueden aproximar para un determinado intervalo de fases que son cuasi distantes en valor, podemos tener una densidad espectral del proceso aleatorio;

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

y la autocorrelación como transformada inversa del último:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$$

La correlación de la señal digital o percibida, genera una respuesta espectral que determina los valores que tienen mayor presencia en el registro. Los análisis espectrales también implican una pequeña pérdida de información, aunque guardan gran fidelidad con los datos reales. Las frecuencias correspondientes a las transformadas, sirven para determinar cuáles son los tipos de ruido en el registro base que pueden estar presentes por el procesamiento de la grabación digital. La densidad espectral de potencia tiene una huella única para diferentes tipos de fenómenos conocidos y repetitivos, como las voces, ruidos de maquinaria, de autos y otros.

La correlación parcial se busca como una aplicación a futuro, considerando que las variables y parámetros que describen matemáticamente los fenómenos físicos de acústica, sonido o frecuencias no perceptibles por el oído, se consideran como parcialmente relacionados al tomar que no actúan de forma uniforme en todo tiempo. Es decir, como si fueran luces intermitentes que se encienden y apagan, de un instante a otro, un parámetro puede permanecer constante mientras los demás cambian. Esta correlación parcial, genera un nuevo espectro, de diferentes tipos, dependiendo de los niveles de intensidad o los rangos de frecuencias.

### 5.3. Deformación

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell se tiene el comportamiento de las ondas eléctricas y magnéticas, los multipolos, radiación, momento magnético, corrientes y cualquier fenómeno físico que está relacionado con las cargas eléctricas, dominios magnéticos y sus cambios con las interacciones mutuas, incluso para los campos que se generan y se propagan por el espacio de forma infinita:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Por un despeje y relacionando las ecuaciones previamente mostradas, tenemos un par de ecuaciones diferenciales que establecen la variación del campo eléctrico y el campo magnético. Dichas ecuaciones se pueden solucionar para múltiples sistemas coordenadas: cartesianas, polares, cilíndricas, esféricas, elípticas, generalizadas. Donde la solución general sería conseguible únicamente haciendo la superposición de cada función y con combinaciones lineales y no lineales de estas:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Ya que la luz (es decir, cualquier onda electromagnética) posee una cierta cantidad de energía, entonces se tienen expresiones matemáticas que establecen un cierto momento lineal o angular que está relacionado a la luz. Con esto, la luz puede generar deformaciones físicas en un medio como si fueran dos cuerpos en colisión. Un cierto equivalente a la masa para el haz de luz proviene de la cantidad de energía que posee, con lo que siempre habrá un cierto momento lineal y este aumenta de forma exponencial para el aumento de energía. Cualquier objeto en contacto con ondas electromagnéticas tendrán ciertos fenómenos similares a compresiones de ley de Hooke, aunque en ocasiones se pueden generar ionizaciones y con ello, carga del sistema. Para el caso de deformaciones mecánicas, se tienen varias opciones de estudio para el fenómeno físico: ley de Hooke, ecuaciones de Navier-Stokes, tensor de estrés de Maxwell, tensor de deformaciones, o combinaciones de los anteriores.

#### 5.4. Luz y momento

El sonido ha sido estudiado estableciendo ciertas consideraciones para simplificar las ecuaciones que lo describen, tomando casos especiales como aquellos en que la viscosidad no tiene efecto, si la ecuación es diferencial parcial, si es una ecuación tensorial, si es una ecuación en sistema coordenado cartesiano. Posteriormente se han ido generando estudios con respecto a la interacción de la luz con el sonido y como uno puede generar la otra, para hacer un estudio de todos los tipos de fenómenos que generan radiaciones y las correlaciones entre estas, para hablar de la radiación como un único fenómeno.

La tecnología fotoacústica (y su experimentación) (...) el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922), tenía problemas auditivos, y en su afán por descubrir nuevas formas de transmitir el sonido, hace más de 100 años se dió cuenta que al iluminar una muestra con radiación modulada en una cámara cerrada (cámara fotoacústica), figura 2.9, era posible captar sonidos con intensidad directamente proporcional a la longitud de onda absorbida por la muestra.



*Figura 5.7. Celda fotoacústica. La luz incide en la muestra por la parte superior a través de una fibra óptica; el micrófono está situado lateralmente.*

Cuando tenemos un cuerpo sólido o fluidos, podemos hacer incidir una fuente de luz, sea o no láser, generando un cambio en la temperatura del sistema o una ionización de sus partículas (en el caso de los gases) que cambian las frecuencias de vibración propias del cuerpo, generando un efecto de emisión de ondas sonoras debido al exceso de energía y el sistema volviendo a su estado estacionario. La absorción se debe a que las moléculas en un fluido están sujetas a posiciones que varían por su vibración intrínseca, que a su vez están sujetas a las perturbaciones en la estructura debido a sus vecinas.

Un efecto similar se presenta en sólidos cristalinos. En estos cuerpos los átomos están ubicados a distancias equitativas y constantes en el equilibrio, de aquí surge otras características medibles del cuerpo, por ejemplo, dentro del arreglo cristalino se general ciertos grupos que se rigen por condiciones similares y tiene cierta respuesta de absorción de radiación. Para todos los grupos, se genera una característica medible del cuerpo. Las aplicaciones más interesantes de este tipo de absorción ocurren principalmente en la región espectral del infrarrojo.



El efecto fotoacústico se puede entender a partir de fenómenos térmicos y mecánicos. La radiación que incide sobre el material y que es absorbida en el seno de éste se transforma en calor, el cual se transmite a través del material, generando un perfil periódico de temperaturas que, al alcanzar el gas que ocupa la celda fotoacústica (generalmente aire), provoca ciclos alternos de calentamiento-enfriamiento en una capa muy delgada del gas en contacto con la superficie del material. Estas fluctuaciones dan lugar a cambios de presión en el interior de la celda fotoacústica, que es el sonido que se detecta por medio de un micrófono en el interior de la celda.

Un haz láser tiene un momento lineal y un momento angular como cualquier onda que se manifiesta. De este momento podemos despejar una expresión para una fuerza y para presión. Por lo cual quiere decir que todo tipo de luz genera una presión en cualquier cuerpo con el que impacta. La presión debida a la radiación puede medirse solamente cuando se desprecia un efecto térmico conocido como *efecto radiométrico (radiometer effect)*.

Si la radiación impacta con una superficie, las moléculas del medio vibran en conjunto dispersando la perturbación hacia el resto del cuerpo que no esté cercano a la zona de impacto. La cantidad de fotones (o quantum) que impactan con una zona, genera para un cuerpo en un medio atmosférico normal, una perturbación comunicada con el aire. Es decir, que toda alteración térmica en el cuerpo sólido se transmite al aire por medio de conducción de calor, entonces la presión que ejerce la luz viene denotada por

$$P = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Estas vibraciones forzadas generadas por el haz, se convierten en un cambio térmico. Dicho calor, si se genera en un cuerpo muy grande comparado con la zona de impacto, entonces la temperatura fluye primero hacia un medio de menor densidad (en este caso el aire) y después pasa a distribuirse por dentro de la placa. Esto último es poco notable y su efecto se puede despreciar en la mayoría de los casos. Pero dicha comunicación de calor hacia el aire es importante para poder hacer proposición de comportamiento tipo LH.

La temperatura de la muestra varía entonces con la misma periodicidad que lo hace la radiación incidente, induciendo cambios en los parámetros del material (y/o del medio en el que se encuentra inmerso) dependientes de ella. La detección de estas variaciones es la base de diferentes esquemas experimentales. En algunos sistemas con control de condiciones ambiente, la variación de la temperatura se puede ignorar, considerando el análisis de dinámica virtual como en mecánica teórica, se pueden hacer análisis ultrarrápidos para que los elementos de cambio de temperatura no aparezcan en los datos colectados.

El funcionamiento del láser se basa en los estados energéticos de los elementos que se van a excitar para su funcionamiento. Por tanto, el láser es una onda de luz basada totalmente en energía y que tiene una cierta potencia de funcionamiento, también una de salida la cual puede ser calculada en su fabricación.

Cualquier fuente de luz, incluyendo el láser, produce emisiones luminosas al descender de nivel los átomos excitados. Los estados de interés son metaestables: aquellos en los que el átomo puede permanecer durante bastante tiempo si no sufre influencias externas como colisiones o luz de ciertas longitudes de onda.



Figura 5.8. Ilustración de algunos efectos fototérmicos (y/o termoacústicos).

En ocasiones, un electrón situado en un estado metaestable salta espontáneamente a otro inferior, que generalmente es el fundamental. Con ello emite radiación de una longitud de onda que tiene una enorme influencia sobre otras moléculas vecinas. La onda luminosa estimula a las demás moléculas haciéndolas emitir la misma luz y pasando simultáneamente a sus estados fundamentales. Una característica especial de esta radiación estimulada es que, cada vez que se incorpora un fotón adicional de otra molécula al proceso, su fase, dirección y polarización es exactamente la misma. La intensidad de luz crece rápidamente a medida que participan más moléculas.

En general, la cantidad de energía incorporada en cada paso es pequeña, por lo que se necesitan muchos millones de oscilaciones para recoger toda la energía disponible. Cuando el láser forma una cavidad resonante, la onda luminosa es estacionaria dentro de la misma, con su fase definida a lo largo del tubo. La acumulación de energía que desencadena el proceso láser se denomina también *reacción en cadena o avalancha*. Tal como establece su nombre, el láser amplifica la luz por emisión estimulada.

Esta estimulación conjunta con el láser se mantiene con la misma longitud de onda. Debido al tiempo de excitación de las moléculas, el pulso del láser es suficientemente rápido para despreciar su efecto de intermitencia en cuerpos grandes pero útil en aplicaciones como plasmónica, donde el material retomar su estado de equilibrio.

## 5.5. Módulo de Young

Se considera homogéneo a un medio elástico cuando sus propiedades físicas no dependen de la posición en que se midan. Y también puede ser *isotrópico* cuando sus propiedades se conservan independientemente de la dirección.

Se dice que el medio donde se desplaza la onda se rige por la ley de Hooke, cuando la distorsión o deformación en el medio es linealmente dependiente de la magnitud de la fuerza aplicada, o el estrés/tensión que genera la distorsión. Por lo general se relaciona este comportamiento vibratorio con la dinámica de un resorte, con el movimiento de oscilación simple. La LH es aplicable para otro tipo de fenómenos en materiales que no tienen que ser sólidos, como el movimiento de las moléculas que conforman un fluido o como se da la resistencia de materiales elásticos.

Cuando estiramos (o comprimimos) un muelle, la fuerza recuperadora es directamente proporcional a la deformación  $x$  (al cambio de longitud  $x$  respecto de la posición de equilibrio) y de signo contraria a ésta;

$$F = -kx [=] - \left[ \frac{N}{L} \right] [L]$$

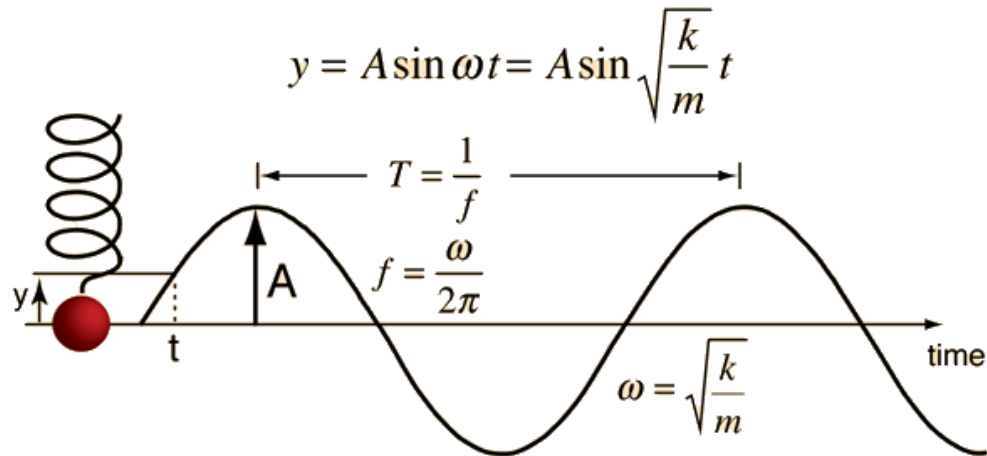


Figura 5.9. Representación del movimiento del oscilador armónico simple para el uso de un muelle/resorte y sus ecuaciones que describen el comportamiento.

Siendo  $k$  una constante de proporcionalidad, denominada constante elástica del muelle y cuyas unidades de medida son de Newton/distancia. La ley de Hooke en esta versión lineal es solo aplicable a deformaciones unitarias pequeñas, hasta que alcanza proporcionalidad límite. Esta ley fue establecida como una descripción para fenómeno físico en cuerpos tridimensionales con alteraciones tanto del orden de las partículas en su estructura interna como la variación del volumen y su superficie, midiendo las deformaciones por vectores de distancia, y aunque no fue definido en los trabajos originales con tensores, sí incluyen sumatorias de los efectos conjuntos.

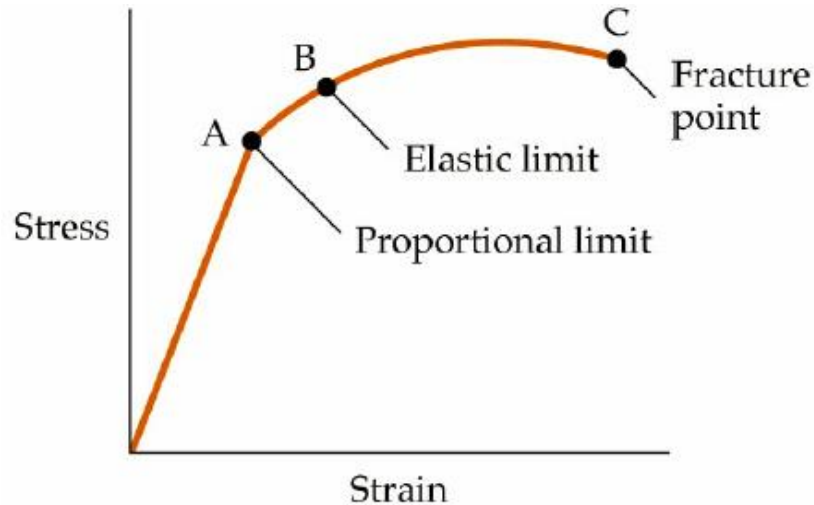


Figura 5.10. Representación sencilla de la zona de validez para el uso de LH.

Otra forma de describirlo se basa en el comportamiento general que se da en los cuerpos sin entrar en detalle para que casos se utiliza. LH relaciona la deformación  $\theta$  de una barra sometida a esfuerzo axial, con la tensión normal generada por dicho esfuerzo  $p$ , mediante la constante  $Y$  que se denomina módulo de elasticidad lineal o módulo de Young:

$$p = -Y\theta$$

La LH en forma general para un material sólido sea o no isotrópico depende de los factores de distorsión, compresión y deformación, aplicados en todas las direcciones del sistema. En relación a las fuerzas aplicadas en los múltiples vectores, vemos que hay un conjunto de tensores que describen las bases del funcionamiento de LH, por lo que esta ley tiene como descripción matemática (al menos para el sistema cartesiano);

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Donde  $c_{ijkl}$  representa los componentes del tensor de cuarto rango. De aquí podemos hacer uso de la simetría para encontrar los coeficientes como una matriz simétrica con la diagonal como identidad entre los valores posibles. Pero en un aspecto un poco más general, podemos descomponer la fuerza de deformación en sus ejes 'x', 'y', 'z';

$$f_{xx} = a\epsilon_{xx} + b\epsilon_{yy} + b\epsilon_{zz}$$

$$f_{yy} = b\epsilon_{xx} + a\epsilon_{yy} + b\epsilon_{zz}$$

$$f_{zz} = b\epsilon_{xx} + b\epsilon_{yy} + a\epsilon_{zz}$$

Siendo  $a$ ,  $b$  los módulos elásticos. Para que coincidan estos con los módulos generalmente usados en los textos, se toma como base los *coeficientes de Lamé*

$$f_{xx} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{xx}$$

$$f_{yy} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{yy}$$

$$f_{zz} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{zz}$$

En base a estas ecuaciones que sabemos que, si generamos una perturbación en un cuerpo sólido, podemos medir la evolución de las vibraciones en cualquier punto del mismo y en base a los coeficientes mostrados antes, ya que están entrelazados, podemos predecir el comportamiento del cuerpo en cualquier punto y tiempo.

## CAPÍTULO 6

### PROCESOS ESTOCÁSTICOS

#### 6.1. Solución dinámica

El frente de onda acústico es un resultante de los posibles estados de la onda base, para cada tiempo y su cambio temporal. De aquí que sea posible analizar el ruido como un resultado de la perturbación acústica en el fluido.

Para un fluido sin un volumen definido (libre), la perturbación acústica viaja en múltiples direcciones, con choques entre las múltiples ondas generando uno o varios efectos: difracción, reflexión, refracción, transmisión, absorción. No se analizan a profundidad todos estos efectos. Sin embargo, se toman dichas colisiones de ondas con las velocidades y sus derivadas en el  $i$ -ésimo tiempo para determinar el valor de la onda acústica real:

$$\eta(t) = \begin{vmatrix} u(\omega_1) & \dot{u}(\omega_1) & \ddot{u}(\omega_1) \\ u(\omega_2) & \dot{u}(\omega_2) & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{vmatrix}$$

Para cada valor de tiempo discreto,  $t_i$  se obtiene el resultado de la onda acústica como el determinante. También el sonido es el resultado de las ondas individuales después de la refracción y absorción. Para la perturbación acústica en su expresión sencilla se obtiene del determinante 3x3: velocidad, primera y segunda derivada:

$$\eta(t) = u(\omega_1)\dot{u}(\omega_2)\ddot{u}(\omega_3) + \dots - \dots - u(\omega_3)\dot{u}(\omega_2)\ddot{u}(\omega_1)$$

$$\eta(t) = U_1(\omega) + U_2(\omega) + U_3(\omega)$$

Donde los elementos resultantes en la ecuación son:

$$U_1(\omega) = \ddot{u}(\omega_1)[u(\omega_2)\dot{u}(\omega_3) - \dot{u}(\omega_2)u(\omega_3)]$$

$$U_2(\omega) = \ddot{u}(\omega_2)[u(\omega_3)\dot{u}(\omega_1) - \dot{u}(\omega_3)u(\omega_1)]$$

$$U_3(\omega) = \ddot{u}(\omega_3)[u(\omega_1)\dot{u}(\omega_2) - \dot{u}(\omega_1)u(\omega_2)]$$

La función temporal se puede expandir por serie de Taylor y bajo ciertas condiciones de argumento, se puede aproximar como alguna función de Bessel de primer orden. En

la próxima sección se demuestra la relación entre el determinante con expansión a función Bessel y las funciones de espectro de densidad de ruidos.

Para cuestiones físicas, el determinante en es válido para distancias cortas, es decir, cuando no hay rarificación o en espacios cerrados. Para el tiempo inicial  $t_0$ , existe una frecuencia de vibración en equilibrio para el fluido. Suponiendo que no haya fase, es decir, una energía promedio para cada partícula. Y para cualquier tiempo  $t_0 + \Delta t_0$  existen fases efectivas. Con el resultado de se puede aproximar a una nueva función polinómica, con producto de Cauchy y simplificar a un solo índice de la sumatoria:

$$u_r(r, t) \cong c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)} \left(\frac{\rho\omega_m r}{2}\right)^{2n+\alpha} \exp(-\omega_m t - \varphi t)$$

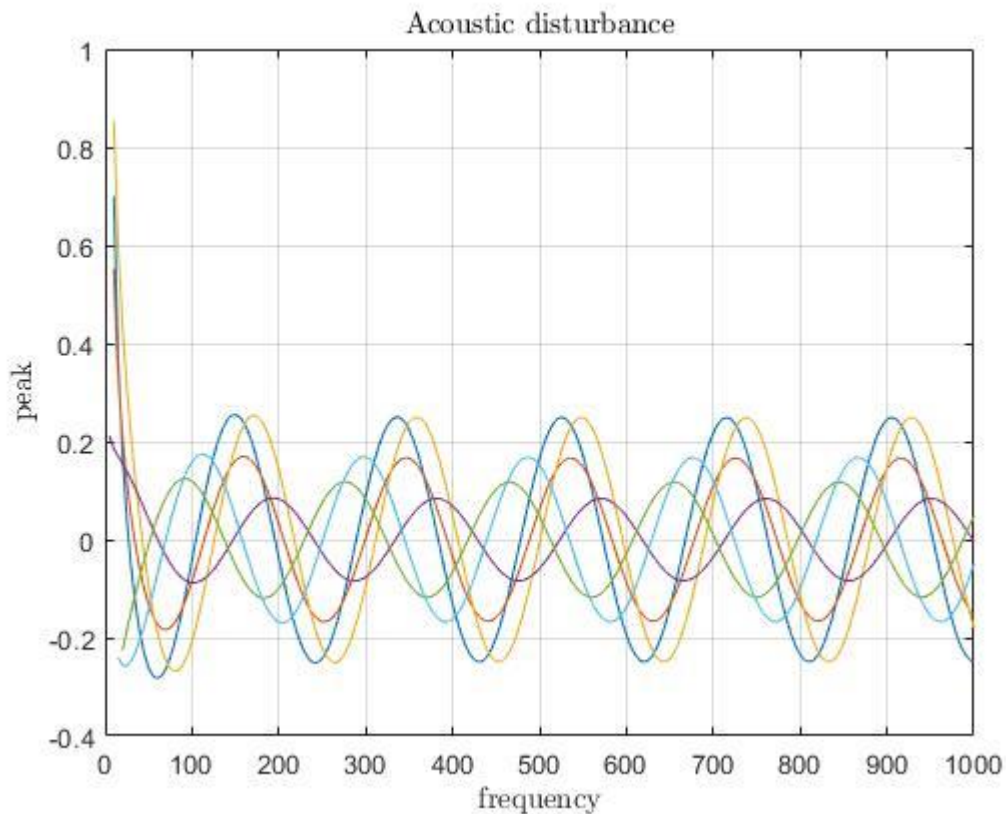


Figura 6.1. Ondas superpuestas. Funciones Bessel de diferente orden como elementos wavelets.

Todas las wavelets colapsan en una única onda medida, que está caracterizada por su frecuencia, fase central y amplitud. Esto tiene como finalidad futura, estudiar los tipos



de ruido presentes en una señal, sin filtrar frecuencias, sino separándolos en canales. No se puede hablar de supresión de frecuencias en el ruido de un registro de datos. Como menciona el autor Randall: “*noise is (...) defined as undesired sound. Sometimes the sound may be musical in nature but undesirable because interfere with conversation or some useful occupation*”.

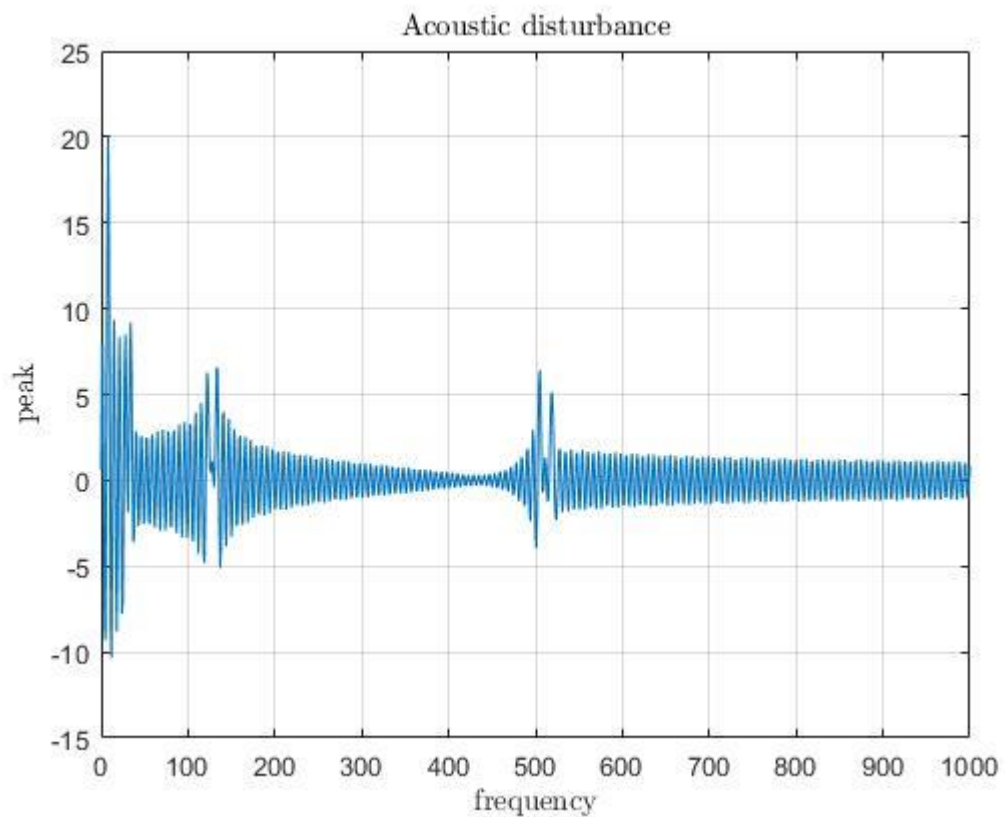


Figura 6.2. Producto de las wavelets mostrados en la Figura 6.1.

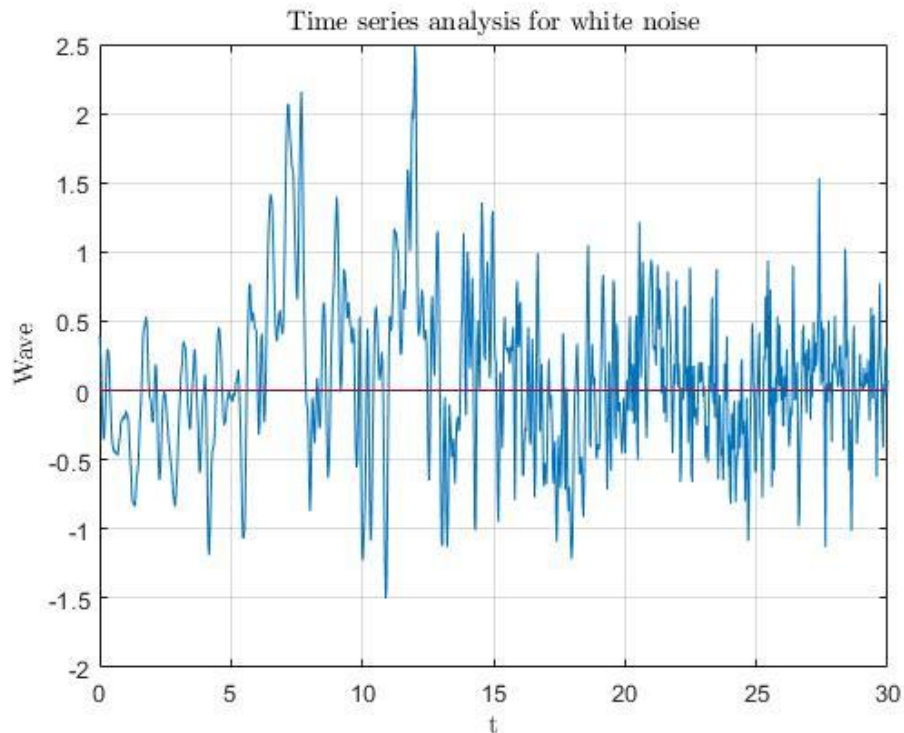
Las aproximaciones lineales para casos matemáticos simples y datos experimentales tienen poca relevancia con el modelo matemático general. Es apropiado referirse a los elementos del determinante como wavelets de la perturbación. Como también para aclarar que una perturbación acústica no es una onda, sino el resultante de cada pulso y su cambio en el tiempo.

La amplitud de las ondas acústicas son medidas en diferentes unidades (voltaje, corriente, deflexión, etc.) y para este trabajo, se denomina simplemente como valor punta de la medición. En general se estudian las ondas acústicas como una variación en el

tiempo manteniendo fijo el valor de frecuencia central. Por otro lado, se estudia como un tiempo virtual con varias frecuencias.

Para los cálculos en esta sección, se toma a la función de onda resultante del determinante en. Con respecto a las frecuencias, se considera que hay un valor central y las demás son corrimientos (positivos o negativos) de esta:  $\varphi_a = \varphi - \Delta\varphi$ ,  $\varphi_b = \varphi$ ,  $\varphi_c = \varphi + \Delta\varphi$ . Con una posibilidad infinita de fases posibles, se considera que dichas fases son pequeñas con respecto al valor central, es decir, que  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ . Con esto, podemos definir el resultado de como sigue:

$$\eta(r, t) \approx -\eta_0 \sum_{m=0}^{\infty} f(r)(\omega_m + \varphi)^4 e^{-3(\omega_m + \varphi)t}$$



*Figura 6.3. Muestreo de una señal acústica y cómo evoluciona en el tiempo.*

Considerando el trabajo futuro, se tienen múltiples tipos de ruidos en una grabación de audio, los cuales deben ser analizados y recuperar la información. Los tipos de ruido frecuentes en una grabación son el rosa (de disparo), el blanco (en análisis de audio) y de Johnson (o térmico). No se puede eliminar por completo el ruido de disparo debido al funcionamiento del encendido y apagado (on-off) de sus componentes. El ruido de

Johnson se debe a la energía cinética molecular por la temperatura del medio. Esto último incluso si no se hace el análisis a nivel partículas.

Se comprueba a continuación que hay una función de correlación y una función de densidad espectral de potencia. Es posible establecer una aproximación a ciertos tipos de ruido partiendo de la función de onda obtenida en. Esto tiene como aplicación el estudio de diferentes tipos de medición por ondas (acústicas, EM, ruido electrónico, análisis de propiedades térmicas).

El nivel tolerable de ruido generado en un sistema electrónico depende del nivel de ruido generado en el punto de reproducción, es decir, el ruido que podamos detectar en un sistema integral ya sea digital o analógico, depende de la señal acústica original que estamos captando. Por ejemplo, el nivel de ruido en una fábrica promedio, es de 78 decibeles.

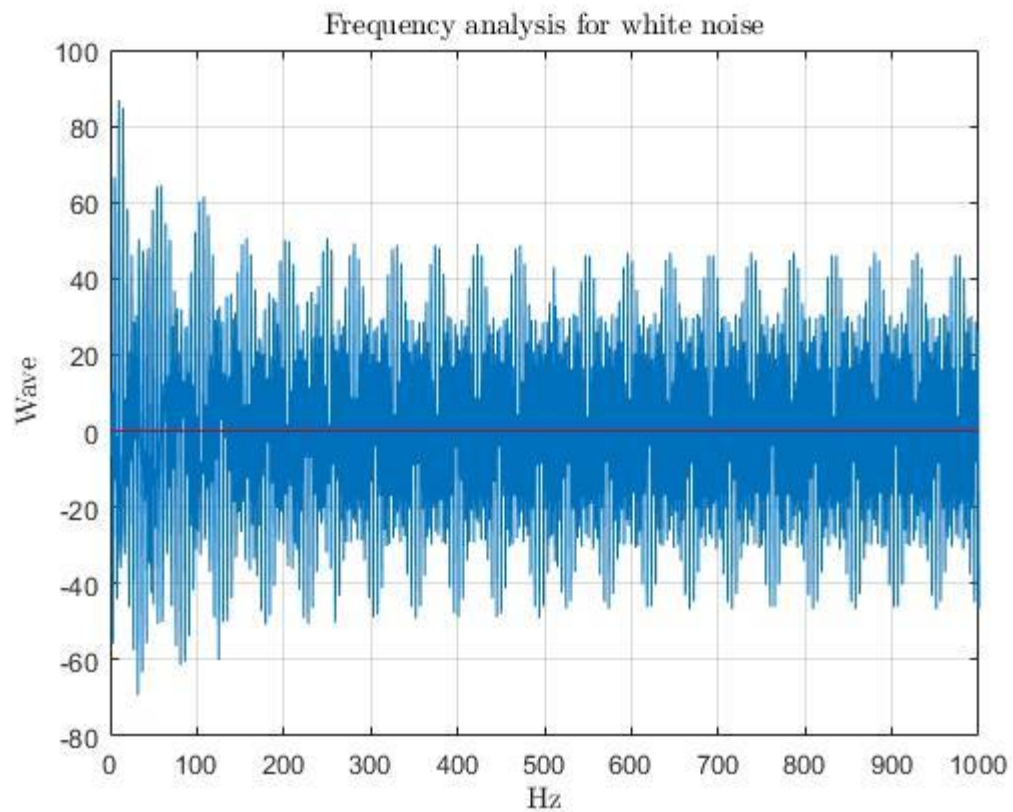


Figura 6.4. Bosquejo de una onda acústica real. Resultado del análisis analítico.

En cuanto se refiere a la función de distribución espectral para un cierto proceso aleatorio, considerando todas las posibilidades para los elementos que forman parte de un fenómeno física, se puede decir que tiene la función:

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega) + \dots$$

Para el caso del ruido blanco, podemos representarlo por el ancho de banda de frecuencias y una constante que representa la ganancia o amplitud del proceso:

$$F_{WN} = k_1 \omega$$

Que puede representarse por la función de estados para un proceso estocástico que de forma simple puede presentarse como el producto de dos procesos determinísticos, es decir, como la correlación o interacción entre estos procesos, que a su vez pueden ser el resultado de otros procesos simples:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i b_i(t)$$

Para cualquier proceso podemos definir una función de covarianza que nos permite conocer las propiedades de un proceso en términos de su variabilidad y de su ancho de banda, por ejemplo, para el caso del ruido blanco, su covarianza se calcula como:

$$r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} k_1 d\omega = \frac{2c}{n} \sin n\pi = \begin{cases} 2\pi c & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Por otro lado, para conocer la forma geométrica que tiene el volumen en el cual se transmite la perturbación acústica podemos tomar la ecuación diferencial original, para expresarla en términos de operadores diferenciales y determinar posteriormente un determinante de sus coeficientes y con ello, encontrar si tiene una forma particular la ED de manera que se pueda parametrizar:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

Con

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Donde las opciones para el resultado de dicho determinante son:

- Elíptica

$$\det(Z) > 0$$

- Parabólica

$$\det(Z) = 0$$

- Hiperbólica

$$\det(Z) < 0$$

De las ecuaciones mencionadas, se tiene la parametrización de la elipse:

$$x = h + a \cos \alpha$$

$$y = k + b \sin \alpha$$

Donde

$$\alpha = 2 \operatorname{atan} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right)$$

Y las expresiones matemáticas generales para la elipse son

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Se tienen las mismas expresiones para la circunferencia:

$$x = h + r \cos t$$

$$y = k + r \sin t$$

Donde

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$h = -\frac{D}{2}$$

$$k = -\frac{E}{2}$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con una ecuación general de todas las cónicas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma matricial, se tiene para el primer renglón la primera ecuación para parametrizar:

$$\rho \partial_0 u_1 + \rho u_1 \partial_1 u_1 + \rho u_1 \partial_2 u_2 + \rho u_1 \partial_3 u_3 = \rho g - \partial_1 P + \mu \partial_{11} u_1 + \left(\frac{\mu}{3}\right) \partial_{11} u_1 + \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{22} u_2$$

$$\rho \partial_0 u_1 + \rho u_1 \partial_1 u_1 + \rho u_1 \partial_2 u_2 + \rho u_1 \partial_3 u_3 = \rho g - \partial_1 P + \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{11} u_1 + \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{22} u_2$$

En el caso de la determinante estamos tomando solo las variables correspondientes al radio y al cambio de ángulo polar, con lo que esta se expresa como:

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} \frac{4\mu}{3} u_1 & 0 \\ 0 & \frac{4\mu}{3} u_1 \end{vmatrix} = (0)(0) + \left(\frac{4\mu u_1}{3}\right) \left(\frac{4\mu u_1}{3}\right) = \left(\frac{4\mu u_1}{3}\right)^2 > 0$$

Con este valor obtenido se concluye que la ecuación diferencial correspondiente al radio y en ángulo polar es de tipo elíptica, donde los coeficientes se toman como:

$$A = C = \frac{4\mu}{3} u_1$$

$$B = 0$$

$$D = E = \rho$$

$$F = \rho \omega u_1 - \rho g + \partial_1 P$$

De las ecuaciones paramétricas, sabemos que una elíptica puede ser expresada por las funciones trigonométricas

$$x = h + a \cos \alpha$$

$$y = k + b \sin \alpha$$

Correspondientes a su ecuación centrada en el origen de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando para establecer una expresión que nos represente un parámetro de variación para el movimiento de la superficie, tanto en estas ecuaciones como en las siguientes:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Entonces los parámetros para amplitud de variación de las ecuaciones:

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{4\mu u_1}{3}}$$

$$a = \sqrt{B} = \sqrt{\frac{\mu u_1}{3}}$$

Para la ED en curso, se puede terminar una ecuación general de la forma:

$$Au_{rr} - Cu_{\theta\theta} + Du_r + Eu_\theta + F = 0$$

Finalmente, sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = \sqrt{\frac{\mu u_1}{3}} \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{\frac{4\mu u_1}{3}} \sin \alpha$$

Una de las posibles soluciones a las ecuaciones de N-S es de tipo polinomial, y a su vez se demostró que puede ser expandido como las funciones de Bessel con un buen grado de exactitud. Tomando esta consideración, las ecuaciones paramétricas finales son:

$$x = \sqrt{\frac{\mu J_n(r)}{3}} \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{\frac{4\mu J_n(r)}{3}} \sin \alpha$$

Continuando con la ecuación de la segunda hilera de la expresión matricial, tenemos una expresión en términos de operadores derivada de la forma:

$$\rho u_2 \partial_1 u_1 = -\partial_2 P + u_1 \partial_{22} u_2 + \left(\frac{4\mu}{3} u_1\right) \partial_{22} u_2 + \left(\frac{\mu}{3} u_1\right) \partial_{23} u_2$$

Donde los coeficientes se la matriz Z son:

$$A = -\frac{4\mu}{3} u_1$$

$$B = -\frac{\mu}{3}u_1$$

$$C = 0$$

Con el determinante correspondiente:

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} -\frac{4\mu}{3}u_1 & -\frac{\mu}{3}u_1 \\ -\frac{\mu}{3}u_1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{4\mu}{3}u_1\right)(0) - \left(-\frac{\mu}{3}u_1\right)\left(-\frac{\mu}{3}u_1\right) = -\left(\frac{\mu}{3}u_1\right)^2 < 0$$

Lo que corresponde a una ecuación diferencial del tipo hiperbólica, y en términos de ecuaciones paramétricas, le corresponden las siguientes:

$$y = a \sec(t)$$

$$z = b \tan(t)$$

Cuya expresión general de la cónica se expresa como:

$$Au_{\theta\theta} - Cu_{\phi\phi} + Du_{\theta} + Eu_{\phi} + F = 0$$

Que se representa en términos de operadores diferenciales:

$$\left(\frac{4\mu}{3}u_1\right)\partial_{22}u_2 + \left(\frac{\mu}{3}u_1\right)\partial_{23}u_2 - \partial_2 P - \rho u_2 \partial_1 u_1 = 0$$

Con una expresión general:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Despejando para una ecuación centrada en el origen:

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

Entonces los índices son:

$$a^2 = -\frac{\mu}{3}u_1$$

$$b^2 = \frac{4\mu}{3}u_1$$

Con las ecuaciones paramétricas finales:



$$x_1 = \sqrt{\frac{\mu}{3}} u_1 \sec(t) = \sqrt{\frac{\mu}{3}} J_n(r) \sec(t)$$

$$y_1 = 2 \sqrt{\frac{\mu}{3}} u_1 \tan(t) = 2 \sqrt{\frac{\mu}{3}} J_n(r) \tan(t)$$

La curva general para graficar en tres dimensiones la perturbación acústica se da con la ecuación hiperbólica por elección de su excentricidad y considerando la utilidad de sus asíntotas:

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Retomando las ecuaciones paramétricas podemos determinar que:

$$x = \sqrt{\frac{\mu J_n(r)}{3}} \cos \alpha \cdot 2 \sqrt{\frac{\mu}{3}} u_1 \tan(t)$$

$$y = \sqrt{\frac{4\mu J_n(r)}{3}} \sin \alpha \cdot 2 \sqrt{\frac{\mu}{3}} u_1 \tan(t)$$

$$z = \sqrt{\frac{\mu}{3}} u_1 \sec(t) = r$$

Con la expresión general:

$$r = \sqrt{1 + \frac{4\mu}{3} J_n(r) (\tan(t))^2 \left[ \frac{\mu J_n(r)}{3} (\cos \alpha)^2 + \frac{4\mu J_n(r)}{3} (\sin \alpha)^2 \right]}$$

Otra de las consideraciones para la dinámica del sonido como una perturbación en un fluido, es la posibilidad de que dicha onda de sonido tiene un cierto amortiguamiento dependiente de sus propiedades mecánico-elásticas y su temperatura, expresado como un conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\rho_0 C_v \left( \frac{\partial(\delta T)}{\partial t} + (\gamma - 1) T_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2(\delta T)}{\partial x^2}$$

Donde ciertos parámetros útiles de las ecuaciones son:

$$t_{amort} = \frac{1}{\chi_t k^2} \sim \frac{Re}{a_s k} \sim \frac{Pe}{a_s k}$$

$$a_s^2 = \frac{\tilde{R}}{\tilde{\mu}} \gamma T_0$$

$$Re = \frac{\rho_0 a_s}{k \eta}$$

$$Pe = \frac{\gamma \rho_0 a_s C_v}{k \kappa}$$

Con ciertos parámetros conocidos, siendo

- $Re$ , numero de Reynolds
- $k$ , conductividad térmica
- $C_v$ , capacidad calorífica a volumen constante
- $\rho_0$ , densidad del fluido a 20 °C
- $\gamma$ , coeficiente adiabático

Siendo la temperatura una variable importante, podemos definirla como una variable incremental con ciertas ecuaciones expresado como una ecuación diferencial simple o como una matricial:

$$\Delta T = \frac{T_0}{P_0} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) P$$

$$\begin{pmatrix} P_r \\ P_\theta \\ P_\phi \end{pmatrix} = \frac{P_0}{T_0} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \begin{pmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_\phi \end{pmatrix}$$

Estos elementos correspondientes a las variaciones de temperatura y presión, están relacionados con mediciones de presión local, para el caso de variaciones en la humedad. Ya que la humedad relativa implica un cambio en la pureza del aire, tenemos que la dispersión de estas gotas de agua provoca caídas en la propagación del pulso acústico. Estos desfases alteran el nivel de precisión y exactitud de los datos obtenidos de un audio digital. De manera formal, se tienen que incluir estos elementos de variación de presión por humedad en la ecuación diferencial, lo cual lo complica. Mas adelante se muestra una solución a esto, tomando sensores externos para tener una retroalimentación y corrección de parámetros en tiempo real para el sistema de control.

La ecuación general para curvas cónicas usadas en el caso de ecuaciones de Navier-Stokes, es totalmente válido para la variación de este, generado a través del tensor de deformaciones:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes y el tensor de estrés de Maxwell son casos particulares del tensor de deformaciones, por lo tanto, podemos correlacionar los primeros dos tensores mencionados para hablar de un fenómeno físico de un pulso electromagnético que genera sonido en un sistema, ya sea abierto o cerrado. La parametrización incluyendo el pulso electromagnético, para cada pareja de ejes:

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3}{4} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{3\rho u}{4r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{3}{4\rho} \frac{\partial}{\partial t} (rE_\theta B_z)$$

Simplificando para tomar ciertas expresiones como variaciones con respecto a una variable muda, lo que permite cambiar ciertos elementos o intercambiar variables para funciones que son de variables independientes entre ellas:

$$u_1 \partial_1 u_1 + u_1 \partial_2 u_2 - u_1 \partial_3 u_3 = \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{11} u_1 + \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{22} u_2 + \frac{3}{4\rho} \partial_0 (rE_\theta B_z)$$

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} \frac{4\mu}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4\mu}{3} \end{vmatrix} = (0)(0) + \left(\frac{4\mu}{3}\right)\left(\frac{4\mu}{3}\right) = \left(\frac{4\mu}{3}\right)^2 > 0$$

Con este valor obtenido se concluye que la ecuación diferencial correspondiente al radio y en ángulo polar es de tipo elíptica, donde los coeficientes se toman como:

$$A = C = \frac{4\mu}{3}$$

$$B = 0$$

$$D = E = u_1$$

$$F = \frac{3}{4\rho} \partial_0 (rE_\theta B_z)$$

De las ecuaciones paramétricas, sabemos que una elíptica puede ser expresada por las funciones trigonométricas

$$x = h + a \cos \alpha$$

$$y = k + b \sin \alpha$$

Entonces, los valores de ampliación o reducción de la trayectoria paramétrica son dependientes de la viscosidad, en algunos casos también tiene dependencia explícita o implícita del tiempo, de forma que estos parámetros son más bien funciones de un segundo parámetro más general e independiente:

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{4\mu}{3}}$$

$$a = \sqrt{B} = \sqrt{\frac{\mu}{3}}$$

Finalmente, para esta ecuación diferencial, sus ecuaciones paramétricas son las siguientes, considerando que estamos hablando de dos parámetros desconectados, donde uno se puede establecer como fijo en ciertas condiciones:

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{3}} \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{\frac{4\mu}{3}} \sin \alpha$$

Una de las posibles soluciones a las ecuaciones de N-S es de tipo polinomial, y a su vez se demostró que puede ser expandido como las funciones de Bessel con un buen grado de exactitud. Tomando esta consideración, las ecuaciones paramétricas finales son:

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{3}} \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{\frac{4\mu}{3}} \sin \alpha$$

Se toma ahora el caso de las variaciones angulares que, en un pulso esférico no tienen variación y por ende las ecuaciones diferenciales se toman con solución trivial. Para un tensor combinado de electromagnetismo con sonido, solo podremos comprobar que son elementos triviales con la variación del parámetro en una simulación:

$$u_2 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_2}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_2}{r \sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \phi} - \frac{1}{rg} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{4u_2}{3r} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{4u_2}{3r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \frac{4u_2}{3r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial \phi}$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (r E_r B_z)$$

Simplificando para tomar elementos base:

$$\rho \partial_0 u_1 + \rho u_1 \partial_1 u_1 + \rho u_1 \partial_2 u_2 + \rho u_1 \partial_3 u_3 = \partial_2 P + \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{11} u_1 + \left(\frac{4\mu}{3}\right) \partial_{22} u_2 + \frac{\partial_0}{\rho} (r E_r B_z)$$

Calculando el determinante del sistema con los elementos de la formula general:

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} -\frac{4\mu}{3} u_1 & \frac{4u_2}{3r} \\ \frac{4u_2}{3r} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{4\mu}{3} u_1\right) (0) - \left(\frac{4u_2}{3r}\right) \left(\frac{4u_2}{3r}\right) = -\left(\frac{4u_2}{3r}\right)^2$$

$$\det(Z) < 0$$

Con este valor obtenido se concluye que la ecuación diferencial correspondiente al radio y en ángulo polar es de tipo hiperbólica, donde los coeficientes se toman como:

$$A = -\frac{4u_2}{3r}$$

$$C = 0$$

$$B = \frac{4u_2}{3r}$$

$$D = \frac{u_2}{r}$$

$$E = \frac{u_2}{r \sin \theta}$$

$$F = \frac{\partial_0}{\rho} (r E_r B_z)$$

Lo que corresponde a una ecuación diferencial del tipo hiperbólica, y en términos de ecuaciones paramétricas, le corresponden las siguientes:

$$y = a \sec(t)$$

$$z = b \tan(t)$$

Cuya expresión general de la cónica se expresa como:

$$A u_{\theta\theta} - C u_{\phi\phi} + D u_{\theta} + E u_{\phi} + F = 0$$

Que se representa en términos de operadores diferenciales:

$$-\left(\frac{4\mu}{3}u_1\right)\partial_{22}u_2 + \left(\frac{\mu}{3}u_1\right)\partial_{23}u_2 + \frac{u_2}{r}\partial_2u_2 + \frac{u_2}{r\sin\theta}\partial_3u_3 + \frac{\partial_0}{\rho}(rE_rB_z) = 0$$

Entonces los índices son los siguientes, donde uno de ellos es realmente un valor constante, el otro es un producto de una función con un parámetro en dependencia implícita del tiempo:

$$a^2 = -\frac{4\mu}{3}u_1$$

$$b^2 = 0$$

Con las ecuaciones paramétricas finales dependiendo de una función de parámetros, no hay linealidad directa y con esto, la superficie descrita por el fenómeno acústico no será uniforme conforme avanza el tiempo y tampoco para diferentes distancias al origen:

$$x_1 = \sqrt{\frac{4\mu}{3}u_1} \sec(t) = \sqrt{\frac{4\mu}{3}J_n(r)} \sec(t)$$

$$y_1 = 1$$

La curva genera para graficar en tres dimensiones la perturbación acústica se da con la ecuación hiperbólica por elección de su excentricidad y considerando la utilidad de sus asíntotas:

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Retomando las ecuaciones paramétricas podemos determinar que se tienen para cada uno de las coordenadas cartesianas, donde la dependencia implícita del tiempo se conserva. No hay una única configuración para el mismo fenómeno y su reproducibilidad surge de que la viscosidad y la densidad sean idénticas de un experimento a otro:

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{3}} \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{\frac{4\mu}{3}} \sin \alpha$$

$$z = \sqrt{\frac{4\mu}{3} J_n(r) \sec(t)}$$

Con la expresión general para el vector de desplazamiento radial:

$$r = \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 J_n(r) (\tan(t))^2 [(\cos \alpha)^2 + 4(\sin \alpha)^2]}$$

Esta expresión determina el recorrido de los puntos de la superficie donde tiene alcance la perturbación acústica. Siempre que la energía sea correspondiente al efecto, y mientras la energía propia del fenómeno se va desvaneciendo, el vector radial tiene menos importancia. No describe el volumen de un determinado fluido, sino la zona forma de los frentes de onda para diferentes conjuntos de partículas, comportándose como superficies para un determinado fenómeno fotoacústico, con cambios según las propiedades mecánicas y elásticas.

## 6.2. Movimiento browniano

Teorema de extensión de Kolmogorov – Para todo  $t_1, \dots, t_k \in T$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sean  $\nu_{t_1, \dots, t_k}$  las medidas de probabilidad en  $\mathbf{R}^{nk}$ , de manera que:

$$\nu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}) \quad K1$$

Para todas las permutaciones  $\sigma$  en  $\{1, 2, \dots, k\}$  y

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times R^n \times \dots \times R^n) \quad K2$$

Para toda  $m \in \mathbb{N}$ , donde (desde luego) el conjunto en la derecha tiene una cantidad  $k + m$  total de factores. Entonces existe un espacio de probabilidades  $\{\Omega, F, P\}$  y un proceso estocástico  $\{X_t\}$  en  $\Omega$ ,  $X_t: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ , de manera tal que:

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k]$$

Para todo  $t_i \in T$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y todos los conjuntos de Borel  $F_i$ .

En 1828 el botánico escocés Robert Brown observó que los granos de polen suspendidos en un líquido tenían un movimiento irregular. Posteriormente se logró explicar el movimiento como el resultado de las condiciones aleatorias con las moléculas

del líquido. Para describir el movimiento en términos matemáticos, es natural usar el concepto de proceso estocástico  $B_t(\omega)$ , interpretado como la posición en el tiempo  $t$  de cada grano de polen  $\omega$ .

Para construir  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es suficiente, por el teorema de extensión de Kolmogorov, especificar una familia  $\{v_{t_1, \dots, t_k}\}$  de medidas de probabilidad que satisfacen K1 y K2. Estas medidas serán elegidas de manera tal que coinciden con las observaciones del movimiento de granos de polen.

Sean los valores  $x \in \mathbf{R}^n$  y definamos, para toda  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $t > 0$ :

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right)$$

Si  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  definen una medida  $v_{t_1, \dots, t_k}$  en  $\mathbf{R}^{nk}$  a través de:

$$\begin{aligned} v_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) \\ = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k \end{aligned}$$

Se puede extender la definición anterior para todas las secuencias finitas de  $t_i$  a través de K1. Considerando que  $\int p(t, x, y) dy = 1$  para todos  $t \geq 0$ . Según K2, esto aplica para  $\mathbf{R}^n$ . Existe un espacio de probabilidades  $\{\Omega, F, P^x\}$  y un proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  en  $\Omega$  tal que las distribuciones de dimensiones finitas de  $B_t$  están dadas por:

$$\begin{aligned} P^x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) \\ = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k \end{aligned}$$

**Definición.** – El proceso descrito a través de la probabilidad de las posiciones para un conjunto de sistemas con varias partículas, como un conjunto de posiciones aleatorias, se llamado movimiento browniano (o similar al) empezando en  $x$  tal que  $P^x(B_0 = x) = 1$ .

Propiedades del movimiento browniano:

- 1)  $B_t$  es un proceso gaussiano, esto es, para todos los valores  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$  la variable aleatoria  $Z = (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbf{R}^{nk}$  tiene una distribución multinormal. Esto



quiere decir que existe un vector  $M \in R^{nk}$  y una matriz definida como no negativa  $C = [c_{jm}] \in R^{nk \times nk}$  tal que:

$$E^x \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^{nk} u_j Z_j \right) \right] = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j,m} u_j c_{jm} u_m + i \sum_j u_j M_j \right)$$

Para todo  $u = (u_1, \dots, u_{nk}) \in R^{nk}$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria, y  $E^x$  denota el valor esperado con respecto a las probabilidades  $P^x$ . Mientras se cumpla dicho valor esperado, se puede conocer el valor medio

$$M = E^x[Z]$$

Y la matriz de covarianza de  $Z$ :

$$c_{jm} = E^x[(Z_j - M_j)(Z_m - M_m)]$$

2)  $B_t$  tiene incrementos independientes, esto es, que los movimientos brownianos para cada cuerpo son independientes:

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

Para cualquiera  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$

Definición. – Supóngase que  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$  son procesos estocásticos definidos en  $\{\Omega, F, P\}$ . Entonces decimos que  $\{X_t\}$  es una versión (o una modificación) de  $\{Y_t\}$  si

$$P(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1 \quad \text{para toda } t$$

Teorema de continuidad de Kolmogorov. – Supóngase que el proceso  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  satisface la siguiente condición: Para todo periodo  $T > 0$  existen ciertas constantes positivas  $\alpha, \beta, D$  tales que:

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D \cdot |t - s|^{1+\beta}$$

Entonces existen versiones continuas de  $X$ .

Vamos a extender la idea de movimiento browniano para cualquier tipo de ente físico, por lo tanto, cuando se refiere a un pulso acústico consideramos que la onda generada dentro del sistema, es en realidad una perturbación moviéndose dentro de otras perturbaciones, análogo al fenómeno del polen. Lo interesante con este comportamiento ocurre al momento de aplicar la transformada de Laplace aparecen ciertos términos que asemejan al movimiento browniano.

Con experimentación se ha encontrado que incluso cuando se esperaría por lógica que una onda acústica pierde energía hasta desaparecer (converger a cero o a un valor propio del medio donde se propaga), existen ocasiones en que las ondas se fortalecen hasta volverse de mayor amplitud y energía que la original. No se rompe ningún principio de la física. No se rompe la conservación de energía. Ocurre que fenómenos como la rarificación, reverberación, resonancia y el ruido, son no lineales, por ellos los modelos de predicciones lineales que tenemos fallan al tratar de comprobar los fenómenos físicos relacionados con el sonido y/o la acústica.

### 6.3. Tensores y procesos estocásticos

Sea  $X$  una variable aleatoria que toma valores de un conjunto  $E$ , y sea  $f$  una función evaluada en valores reales definida también en  $E$ . entonces, para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega)$  es un punto en  $E$  y  $f$  le asigna el valor  $f(X(\omega))$  a ese punto. Un proceso estocástico con un espacio de estados  $E$  es una colección  $[X_t; t \in T]$  de variables aleatorias  $X_t$  definidas en el mismo espacio de probabilidad y que toman valores en  $E$ . El conjunto de valores  $T$  es llamado, conjunto de parámetros. Si el conjunto  $T$  es medible, en específico si  $T = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , se dice que es un proceso de parámetros discretos. De otra manera, si  $T$  no es medible, se dice que es un proceso de parámetro continuo.

Consideraremos que un proceso estocástico es una función que correlación un determinado estado a una determinada probabilidad, de manera que cada estado es independiente de otro con respecto a cada tiempo  $t$ , es decir, que la función determinada distintas probabilidades para cada sistema o cada conjunto de elementos del sistema en cada nuevo instante. Es una serie de datos (o función continua) que principalmente depende del tiempo. Al ser un sistema de una dimensión, cada función determina los estados posibles en una única dimensión.

Ahora, consideremos que nuestro sistema existe en varias dimensiones, donde cada una tiene una correlación 1:1 para sus posibles valores. Es decir, que nuestra función de onda en realidad está conformada por la combinación lineal de varias funciones que se pueden regir por un parámetro único que consideramos el tiempo, y por ello cada función es independiente de las demás.

Incluso si ahora pasamos a un sistema de varias dimensiones, donde cada una esta correlacionada con las otras, de forma que al variar una, las demás van a variar sin tener forma de evitarlo. Es decir, consideramos ahora que cada una de las dimensiones es el resultado del colapso de un tensor, por lo que cada nueva variable será un tensor de un determinado rango  $r$  que, al mismo tiempo, se rige por un parámetro independiente que consideramos  $t$ , por lo que estaríamos hablando de ecuaciones diferenciales tensoriales estocásticas.

Es decir, que todos los elementos de la versión modificada de las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden resolver como si fueran un conjunto de ecuaciones estocásticas. Lo cual implica que sin importar en cual dirección se mueva el pulso acústico, todos y cada uno presenta ruido, lo cual encaja con datos experimentales:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i}{x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\rho}{x_i} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho f_i - \mu \left( \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \\ & - \left( \frac{Y}{1 - v^2} \right) \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) T^0 \alpha \beta \\ & + \left( \frac{Y}{1 - v^2} \right) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj})}{\beta^2} \frac{h^2 T}{12} \alpha \beta + \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi} E_i E_j \\ & - \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi} E_i^2 \delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Para algunos comportamientos del pulso acústico, al no estar reducido a un sistema de trabajo virtual o desplazamiento virtual, hay ciertos momentos en que el tiempo pareciera estar relacionado con los desplazamientos, es decir, está sujeto a los cambios en las dimensiones por lo cual necesitamos un nuevo parámetro temporal. De cierta manera, habrá dos tiempos diferentes, uno para el pulso acústico y otro que rige los parámetros de las propiedades del gas.

## CAPÍTULO 7

### METODOLOGÍA: RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES

#### 7.1. Densidad y viscosidad constantes

Para el caso de un fluido que presenta baja o nula compresibilidad, se tiene que el tensor de estrés en forma general se representa como:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j} \right)$$

Para cada término, según el análisis posterior a los trabajos de los científicos Navier y Stokes, dado que ellos no dieron un “significado” a dichas ecuaciones, se ha concluido que son elementos descriptivos de una acción y su reacción localizada:

- $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ , la aceleración local de las partículas del fluido en un punto determinado, y en el caso de un fluido en estado de equilibrio, dicho término es cero,
- $u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ , la aceleración de convección de las partículas del fluido, que predice como cambia el flujo de un punto en el espacio al siguiente, en términos de la variación temporal,
- $f_i$ , la fuerza debida a la aceleración de la gravedad,
- $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ , es el cambio de la presión en cada sección del volumen debido al movimiento de las partículas, que se tiene como el bombeo debido al flujo,
- $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j}$ , es la desaceleración debido a la viscosidad dada la resistencia de la fricción de acuerdo a los objetos internos moviéndose.

Existen múltiples estudios donde suprimen el ruido en la grabación para analizar la información residual. Algunos centrándose en los armónicos esféricos para la ecuación N-S, otros para una función dependiente del tiempo, por último, con un cambio en la coordenada espacial. Muchos de estos estudiando las ondas esféricas y el sonido en un fluido laminar. Este trabajo se centra en la resolución de la ecuación de N-S bajo la suposición de que la función solución al caso real se obtiene como la superposición de ondas correspondientes al caso isotrópico como al caso anisótropo.

También se genera una solución bajo el supuesto de que la función angular polar está relacionada con la función angular azimutal, de manera que la resolución de una nos proporciona la solución de la otra. En analogía con las ecuaciones de Maxwell y su versión en tensores, se resuelve la ecuación de N-S como si fuesen tres ecuaciones diferenciales relacionadas en matrices vectores.

Para cada  $x_i \in R^n$  con la consideración de una solución en tiempo discreto de forma que para cada  $t_n$ , sea  $t_n = \frac{t}{n}$ , es decir, que cada tiempo tiene un peso diferente en la solución analítica. Se obtiene una función en variable real que describe la perturbación acústica, donde en general  $\{\forall(\vec{x}_i, t_i) \in R^n | \exists! \eta(\vec{x}_i, t_i) \in R^n\}$  y  $u_i(\vec{x}_i, t_i) \in R^n$ . Analizando primero la ecuación de Navier-Stokes en su expresión tensorial con viscosidad dinámica para posteriormente definirlo en forma matricial:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j} \right)$$

Considerando las siguientes matrices para la ecuación anterior:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}$$

$$\rho f_i = \begin{pmatrix} \rho g_r \\ \rho g_\theta \\ \rho g_\phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} = \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_r)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\theta)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\phi)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right]^T$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right]^T$$

Para tener facilidad de resolución de ecuaciones, se tomará que la función angular es propia para ángulo polar y azimutal, por tanto  $u_\theta = u_\phi = g(\theta, \phi)$ . La solución final se propone como producto de funciones  $u(r, \theta, \phi, t) = u_r(r)g(\theta, \phi)f(t)$ .

Se resuelve la ecuación tensorial como el producto matricial, paso a paso, realizando primero los productos matriciales internos y posteriormente reescribiendo las sumas de dichos productos para continuar con la ecuación original. En ningún momento se desea perder la generalidad de la ecuación y aunque no es matemáticamente correcto, se realiza de esta manera por cuestiones de espacio y por la disposición del formato de la hoja en el documento de la tesis.

Establecidas los elementos en su forma de matriz vector simplificado, podemos tomar de dicha expresión varias ecuaciones diferenciales que ahora son las ecuaciones de N-S para las coordenadas esféricas, en el caso de un medio isotrópico ( $\rho = const.$ ,  $\mu = const.$ ) sin viscosidad de bulto:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \rho u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} &= \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + 3\mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\ &+ \frac{\mu}{3\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\
&= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mu}{3r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \\
&+ \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]
\end{aligned}$$

Dando prioridad a la solución de las dos primeras ecuaciones, podemos considerar que se reorganizan los términos, bajo el supuesto de que el cambio en la presión y el cambio de la velocidad radial son independientes para el tiempo  $t$ , es decir, que el gradiente de la presión en el término radial ocurre siempre para un tiempo  $t + \Delta t$ , donde nos permite establecer una ecuación del tipo:

$$-3\mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right] + \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \rho u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} - \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Donde cada elemento a la izquierda y a la derecha, se pueden igual a cero, creando tres ecuaciones diferenciales. Esto con la observación de que las derivadas angulares van acompañadas de un término radial que se puede factorizar y establecer una ecuación bajo la idea de que las funciones angulares no son del todo independientes, que muestran una leve independencia:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g - \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$-\frac{2\mu}{r^2} u_r + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{\rho}{3} \frac{\partial u_r}{\partial t} = 0$$

En relación con la solución para una onda esférica acústica con dependencia angular, se recurre a proponer una solución convergente para usar del método de Fröbenius para solución de la parte radial. Este método se emplea con una pequeña variación, pues de la experiencia experimental se sabe que una onda acústica en el aire converge a cero en un cierto radio que puede ir desde unos centímetros hasta unos metros. Al mismo

tiempo, se propone una expresión temporal que considera la fase de las partículas en cada estado posible:

$$u_r(r, t) = r^s \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t)$$

De la función propuesta y su sustitución en la ecuación radial-temporal, se obtienen diferentes polinomios como solución. De todas estas posibilidades se toman en consideración dos: un polinomio para largas distancias con un valor inicial y otro para convergencia en un radio límite. Haciendo uso de las expresiones espaciales y temporales, se toma como función solución la siguiente:

$$u_r = \begin{cases} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} & r \leq R_1 \\ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} + b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} & R_1 < r \leq R_2 \\ b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} & r > R_2 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t)$$

De esta función obtenida, se procede a evaluar los valores de inicio y de frontera, siendo estos últimos, los correspondientes a la zona de perturbación, de rarificación y de convergencia de la onda acústica. Con las condiciones de inicio:

$$- u_r(r = r_0, t) = u_0$$

Para la zona de perturbación acústica:

$$u_r(r = 0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} (0)^{2n+1} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) = 0$$

$$u_r(r = 0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_1 (0) \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) = 0$$

Para la zona de rarificación:



$$u_r(r = R_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} + b_0 \right. \\ \left. + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) = u_0$$

$$c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} + b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} = u_0$$

$$c_1 \left( \frac{R_1}{6} - \dots \right) + b_0 + b_0 (\alpha_m R_1^2 + \dots) = u_0$$

$$c_1 \left( \frac{R_1}{6} \right) \approx -b_0 (\alpha_m R_1^2)$$

Lo anterior es válido si y solo si  $b_0 = -u_0$ . Siguiendo con la ecuación:

$$c_1 \left( \frac{R_1}{6} \right) \approx u_0 (\alpha_m R_1^2)$$

$$c_1 \approx 6 \alpha_m R_1 u_0$$

Para la zona de convergencia de la onda:

$$u_r(r = R_2, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) = -u_0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} \right] = -u_0$$

$$-u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} = -u_0 - u_0 (\alpha_m R_2^2 - 2\alpha_m^2 R_2^4 + \alpha_m^3 R_2^6 - \dots) = -u_0$$

$$\alpha_m R_2^2 - 2\alpha_m^2 R_2^4 + \alpha_m^3 R_2^6 \approx 0$$

$$1 - 2\alpha_m R_2^2 \approx 0$$

$$R_{2,m} \approx \frac{1}{2\alpha_m} = \frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)}$$

$$- u_r(r, t = 0) = f(r)$$

Para la zona de perturbación acústica:

$$u_r(r, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} \exp(-\omega_m(0) - \varphi_m(0))$$

$$u_r(r, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1}$$

Para la zona de rarificación:

$$u_r(r, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} + b_0 \right. \\ \left. + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \exp(-\omega_m(0) - \varphi_m(0))$$

$$u_r(r, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} + b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} \right]$$

Para la zona de convergencia de la onda:

$$u_r(r, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \exp(-\omega_m(0) - \varphi_m(0))$$

$$u_r(r, t = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} \right]$$

Condición en el límite, para la convergencia total de la onda en una determinada distancia radial proporcional al tamaño de la habitación que contiene el medio gaseoso como las frecuencias de vibración basales de las partículas de este:

$$\lim_{r \rightarrow L} u_r(r, 0) = \lim_{r \rightarrow L} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \exp(-\omega_m(0) - \varphi_m(0)) \right) = u_0$$

$$\lim_{r \rightarrow L} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n L^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \right) = u_0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n L^{2n}}{(2n-3)!!} \right] = -u_0 - u_0 (\alpha_m L^2 - 2\alpha_m^2 L^4 + \dots) = u_0$$

$$\alpha_m L^2 - 2\alpha_m^2 L^4 \approx 0$$

$$L_m = R_{2,m} \approx \frac{1}{2\alpha_m} = \frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)}$$

La distancia radial máxima de la perturbación depende de las frecuencias de vibración de cada partícula. Hay una distancia correspondiente a cada una o cada conjunto de

partículas que comparten una velocidad angular, con ello, se puede conocer la distancia promedio del fenómeno acústico por un promedio de todas estas cantidades:

$$\overline{L_m} = \left| \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)} d\varphi_m \right|$$

Condiciones a la frontera:

Para la interface de la zona de rarificación con la perturbación acústica ( $r = R_1$ ):

$$u_{r,1}(r = R_1, t) = -u_{r,2}(r = R_1, t)$$

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} \\ = -c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} - u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} \\ 2c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} = -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} \\ 2c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_1^{2n+1} + u_0 + u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_1^{2n}}{(2n-3)!!} = 0 \\ 12\alpha_m R_1 u_0 \left( \frac{R_1}{6} - \frac{2\alpha_m R_1^3}{24} + \dots \right) + u_0 + u_0 (\alpha_m R_1^2 - \dots) = 0 \\ 12\alpha_m R_1 u_0 \left( \frac{R_1}{6} \right) + u_0 + u_0 (\alpha_m R_1^2) \approx 0 \\ 3\alpha_m R_1^2 + 1 \approx 0 \\ R_1^2 \approx -\frac{1}{3\alpha_m} \\ R_{1,m} \approx i \sqrt{\frac{\mu}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} \end{aligned}$$

Por aproximación, se calcula el valor del radio como la norma de todos los valores posibles del radio para la rarificación en base a todas las frecuencias de vibración de partículas que conforman la masa del gas y sus posibles corrimientos de fase con respecto a la velocidad angular central:

$$R_1 = R_{PA} = \left| \frac{1}{m} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\mu}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} d\varphi_m \right|$$

Para la interface de la zona de rarificación con el inicio de la convergencia de la onda debido a la perdida de energía ( $r = R_2$ ):

$$12\alpha_m R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_2^{2n+1} - u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!}$$

$$= -u_0 - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!}$$

Como aproximación, se corre el índice de la sumatoria para encontrar el valor relativo para el cual se termina la rarificación y comienza la convergencia de la onda acústica:

$$12\alpha_m R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} R_2^{2n+1} - 2u_0 - 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} = 0$$

$$12\alpha_m R_1 u_0 \left( \frac{R_2}{6} - \frac{2\alpha_m R_2^3}{24} + \dots \right) - 2u_0 - 2u_0 (\alpha_m R_2^2 - \dots) = 0$$

Debido a que ya se había establecido una definición para el radio de convergencia de la onda acústica, se toma dicho valor, junto con el valor del radio para la rarificación con la finalidad de encontrar una relación entre los parámetros de viscosidad del medio y la frecuencia de vibración de sus componentes con una de las distancias:

$$2 \frac{\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu} \left( \frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)} \right)^2 - 2 \frac{\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu} R_1 \left( \frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)} \right) + 2 \approx 0$$

$$\frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)} - R_1 + 2 \approx 0$$

$$R_1 \approx \frac{3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)} + 2$$

$$R_1 \approx \frac{4\rho(\omega_m + \varphi_m) + 3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)}$$

Conociendo dos expresiones para dicho radio, se igual el cuadrado de estas para generar una relación entre las frecuencias y los parámetros de visco-elasticidad:

$$-\frac{1}{3\alpha_m} = -\frac{\mu}{\rho(\omega_m + \varphi_m)} \approx \left( \frac{4\rho(\omega_m + \varphi_m) + 3\mu}{2\rho(\omega_m + \varphi_m)} \right)^2$$

$$-\mu \approx \frac{(4\rho(\omega_m + \varphi_m) + 3\mu)^2}{4\rho(\omega_m + \varphi_m)}$$

$$\begin{aligned}
-4\mu\rho(\omega_m + \varphi_m) &\approx (4\rho(\omega_m + \varphi_m) + 3\mu)^2 \\
-4\mu\rho(\omega_m + \varphi_m) &\approx 16[\rho(\omega_m + \varphi_m)]^2 + 12\mu\rho(\omega_m + \varphi_m) + 9\mu^2 \\
16[\rho(\omega_m + \varphi_m)]^2 + 16\mu\rho(\omega_m + \varphi_m) + 9\mu^2 &= 16z^2 + 16\mu z + 9\mu^2 \approx 0 \\
z &= \frac{8\mu \pm \sqrt{256\mu^2 - 4(16)(9\mu^2)}}{18} \approx \frac{8\mu \pm \sqrt{-320\mu^2}}{18} \approx \frac{8\mu \pm i8\sqrt{5}\mu}{18} \\
z &\approx \frac{4\mu \pm i4\sqrt{5}\mu}{9}
\end{aligned}$$

Evaluando la norma de dicho valor, los corrimientos de fase pueden ser negativos:

$$\begin{aligned}
|z| = |\rho(\omega_m + \varphi_m)| &\approx \left| \frac{4\mu \pm i4\sqrt{5}\mu}{9} \right| = \sqrt{\left(\frac{4\mu}{9}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}\mu}{9}\right)^2} \\
\sqrt{(\rho(\omega_m + \varphi_m))^2} &\approx \frac{\mu}{9}\sqrt{16 + 80} = \frac{4\sqrt{6}\mu}{9} \\
\varphi_m &\approx \frac{4\sqrt{6}\mu}{9\rho} - \omega_m
\end{aligned}$$

Con esta ecuación se ha establecido directamente, que los valores de fase son muy cercanos al valor de vibración, por lo cual los parámetros de velocidad angular están determinados directa y exclusivamente por la viscosidad y la densidad.

Se han establecido todas las condiciones de frontera, convergencia, valor inicial y radios de cada zona de la perturbación. Ahora se retoma de la ecuación diferencial la expresión correspondiente para la presión vista anteriormente:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g - \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Se genera una expresión válida en la zona de la perturbación acústica. Como consideración se toma la variación angular en pequeños valores. Con eso, se tiene un comportamiento acústico suave que, bajo ciertas condiciones, la solución converge a la correspondiente a una onda esférica de un fluido sin viscosidad.

Para la ecuación diferencial, se resuelve bajo la idea de tener a la derivada de la presión como el cociente de dos diferenciales separables, con lo cual la ecuación se vuelve inmediatamente integrable. Sin embargo, primero se debe resolver el producto

de la función de velocidad acústica con el producto de la derivada de la misma. Esto se realiza con el producto de Cauchy para sumatorias infinitas que establece:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Siendo la función y su derivada:

$$u_n(r) = 6\alpha_m R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = 6R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} (2n+1) r^{2n}$$

Siguiendo lo establecido en el producto de Cauchy para la función con su derivada:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = \left[ 6\alpha_m R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} \right] \left[ 6R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} (2n+1) r^{2n} \right]$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = 36R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k)!!}{3(2k+2)!! 3(2n-2k+2)!!} (-1)^k (-1)^{n-k} (2n-2k+1) \alpha_m^k \alpha_m^{n-k} r^{2k+1} r^{2n-2k}$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = 36R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n r^{2n+1}$$

Sustituyendo esta expresión y procediendo a hacer la separación de variables, se puede resolver la ecuación diferencial de la presión para la zona de perturbación acústica por integración:

$$\int_0^r \partial P(r') = \int_0^r \rho g \partial r' - \int_0^r \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \partial r'$$

$$\int_0^r \partial P(r') = \int_0^r \rho g \partial r' - \int_0^r \rho 36R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n r'^{2n+1} \partial r'$$

$$P(r) - P(0) = \rho g [(r' = r) - (r' = 0)]$$

$$- \rho \left[ 36R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n r'^{2n+1} - 0 \right]$$

$$P_n(r) = \rho g r - \rho 36 R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n r^{2n+1} + P_0$$

Para la ecuación radial de la presión, se evalúa el valor de la frontera en que la perturbación acústica se encuentra con la presión de la zona con el medio en equilibrio:

$$P_n(r = R_1) = P_0$$

$$\rho g r - \rho 36 R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n R_1^{2n+1} + P_0 = P_0$$

$$\rho g R_1 - \rho 36 R_{1,PA}^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n R_1^{2n+1} = 0$$

$$\rho g R_1 - \rho 36 R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ \left( \frac{0!! 1!!}{9(2!!)(2!!)} \right) R_1 - \left( \frac{0!! (1)!!}{9(2!!)(4!!)} + \frac{1!! 1!!}{9(4!!)(2!!)} \right) \alpha_m R_1^3 + \dots \right] = 0$$

$$\rho g R_1 - \rho 36 R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ \frac{R_1}{36} - \left( \frac{1}{72} + \frac{1}{72} \right) \alpha_m R_1^3 + \dots \right] = 0$$

$$\rho g R_1 - \rho 36 R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ \frac{R_1}{36} - \frac{1}{36} \alpha_m R_1^3 \right] \approx 0$$

$$\rho g R_1 - \rho R_{1,A}^2 u_0^2 (R_1 - \alpha_m R_1^3) \approx 0$$

$$g - R_{1,PA}^2 u_0^2 (1 - \alpha_m R_1^2) \approx 0$$

$$1 - \alpha_m R_1^2 \approx \frac{g}{R_{1,PA}^2 u_0^2}$$

$$R_1^2 \approx \frac{1}{\alpha_m} \left( 1 - \frac{g}{R_{1,PA}^2 u_0^2} \right) = \frac{1}{\alpha_m} \left( \frac{R_{1,PA}^2 u_0^2 - g}{R_{1,PA}^2 u_0^2} \right) = \frac{1}{\alpha_m} \left( \frac{-\frac{u_0^2}{3\alpha_m} - g}{-\frac{u_0^2}{3\alpha_m}} \right)$$

$$R_1^2 \approx \frac{1}{\alpha_m} \left( \frac{\frac{u_0^2 + 3g\alpha_m}{3\alpha_m}}{\frac{u_0^2}{3\alpha_m}} \right) = \frac{1}{\alpha_m} \left( \frac{u_0^2 + 3g\alpha_m}{u_0^2} \right)$$

$$R_{1,P} \approx \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2 + 3g\alpha_m}{\alpha_m}}$$

Caso 1.-  $\alpha_m \approx u_0$ , cualquier coeficiente de la sumatoria, será aproximadamente igual a la velocidad del sonido, por lo que implica que esta tiene mayor peso que la velocidad de frente de onda y/o de perturbación

$$R_{1,P} \approx \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2 + 3gu_0}{u_0}} = \frac{1}{u_0} \sqrt{u_0 + 3g}$$

$$\mathbf{R}_{1,P} \approx \frac{\mathbf{1}}{u_0} \sqrt{u_0 + 3g}$$

Caso 2.-  $\alpha_m \gg u_0$ , la velocidad del sonido es muy pequeña

$$R_{1,P} \approx \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{g\alpha_m}{\alpha_m}} = \frac{1}{u_0} \sqrt{g}$$

$$\mathbf{R}_{1,P} \approx \frac{\mathbf{1}}{u_0} \sqrt{g}$$

Siguiendo la misma idea de la presión hasta la zona de rarificación, se toma la función de velocidad acústica para la zona de convergencia:

$$u_r = u_0 + u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!}$$

$$\frac{\partial u_{re}}{\partial r} = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!}$$

De forma que se pueda calcular de nuevo el producto de la función con su derivada, para posteriormente sustituir estas expresiones en la ecuación diferencial de la presión y encontrar la correspondiente para la convergencia de la perturbación acústica. Primero analizando el nuevo producto de Cauchy:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = \left[ u_0 + u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \left[ u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!} \right]$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = u_0 \left[ u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!} \right]$$

$$+ \left[ u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} \right] \left[ u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!} \right]$$



$$\begin{aligned}
& u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
&= u_0 \left[ u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!} \right] \\
&+ u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k!! (n-k)!!}{(2k-3)!! (2n-2k-3)!!} (-1)^{k+1} (-1)^{n-k+1} \alpha_m^k r^{2k} \alpha_m^{n-k} r^{2n-2k-1} \\
& u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!} \\
&+ u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k!! (n-k)!!}{(2k-3)!! (2n-2k-3)!!} (-1)^{n+1} \alpha_m^n r^{2n-1}
\end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se nota que la sumatoria doble no es consistente pues genera doble factorial de elementos negativos mayores a uno, para los cuales no ha definición ni propiedades especiales que logren determinar dicho valor, por ello se desprecia ese término y se toma solo la primer sumatoria para la evaluación de la ecuación diferencial:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n-1}}{(2n-3)!!}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de la presión:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \int_r^x \partial P(r') = \int_0^r \rho g \partial r' - \int_0^r \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \partial r' \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \int_r^x \partial P(r') = \int_{R_2}^r \rho g \partial r' - \int_{R_2}^r \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r'^{2n-1}}{(2n-3)!!} \partial r' \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \int_r^x \partial P(r') = \rho g r - \rho g R_2 - \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} \\
&+ \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} \\
& P_0 - P(r) = \rho g r - \rho g R_2 - \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} + \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!}
\end{aligned}$$

$$P_f(r) = \rho g(R_2 - r) + \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} - \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} + P_0$$

Ahora, hay que analizar el límite de la perturbación acústica, la zona de rarificación donde se encuentran la onda debida a la onda acústica con la zona que sigue a temperatura ambiente y en estado basal. Esto ocurre en el punto en que la presión  $P_0$  se aproxima a la presión ambiental, es decir, la presión atmosférica, por esto, factores como la gravedad y la densidad tienden a ser despreciables con respecto a la presión.

Evaluando las condiciones de frontera, llegamos a una expresión que permita conocer el valor del radio en el cual se da dicha interface entre la rarificación y la convergencia:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R_2} P_n(r) &= \lim_{r \rightarrow R_2} P_f(r) \\ \lim_{r \rightarrow R_2} \left[ \rho g r - \rho 36 R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n r^{2n+1} + P_0 \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow R_2} \left[ \rho g(R_2 - r) + \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} \right. \\ &\quad \left. - \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} + P_0 \right] \\ \rho g R_2 - \rho 36 R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n R_2^{2n+1} + P_0 \\ &= \rho g(R_2 - R_2) + \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} \\ &\quad - \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n-3)!!} + P_0 \\ \rho g R_2 - \rho 36 R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n-2k+1)!!}{9(2k+2)!! (2n-2k+2)!!} (-1)^n \alpha_m^n R_2^{2n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Para evitar lidiar con valores demasiado grandes de las expresiones en serie, se corren los índices únicamente para  $n$  corriendo desde el cero hasta 2, de forma que se puedan organizar los términos igualando a cero ciertos factores:

$$\begin{aligned} & \rho g R_2 - \rho 36 R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ \left( \frac{0!! 1!!}{9(2!!)(2!!)} \right) R_2 - \left( \frac{0!! (1)!!}{9(2!!)(4!!)} + \frac{1!! 1!!}{9(4!!)(2!!)} \right) \alpha_m R_2^3 \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{0!! 5!!}{9(2!!)(6!!)} + \frac{2!! 3!!}{9(4!!)(4!!)} + \frac{4!! 1!!}{9(6!!)(2!!)} \right) \alpha_m^2 R_2^5 - \dots \right] = 0 \\ & \rho g R_2 - \rho 36 R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ \frac{1}{36} R_2 - \frac{1}{36} \alpha_m R_2^3 + \left( \frac{15}{9(96)} + \frac{6}{9(64)} + \frac{8}{9(96)} \right) \alpha_m^2 R_2^5 \right] \approx 0 \\ & g R_2 - R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ R_2 - \alpha_m R_2^3 + 36 \left( \frac{5}{3(96)} + \frac{1}{3(32)} + \frac{1}{9(12)} \right) \alpha_m^2 R_2^5 \right] \approx 0 \\ & g R_2 - R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ R_2 - \alpha_m R_2^3 + \left( \frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \right) \alpha_m^2 R_2^5 \right] \approx 0 \\ & g - R_{1,A}^2 u_0^2 \left[ 1 - \alpha_m R_2^2 + \frac{4}{3} \alpha_m^2 R_2^4 \right] \approx 0 \\ & 1 - \alpha_m R_2^2 + \frac{4}{3} \alpha_m^2 R_2^4 \approx \frac{g}{R_{1,A}^2 u_0^2} \end{aligned}$$

Se hace una nueva aproximación en este punto, considerando que el valor del número 1 es mucho menor que cualquier termino en el polinomio:

$$\begin{aligned} \alpha_m R_2^2 + \alpha_m^2 R_2^4 - \frac{3}{4} \alpha_m R_2^2 & \approx \frac{g}{R_{1,A}^2 u_0^2} = \frac{g}{R_{1,A}^2 u_0^2} \\ \alpha_m^2 R_2^4 - \frac{3}{4} \alpha_m R_2^2 - \frac{3}{4} \frac{g}{R_{1,A}^2 u_0^2} & \approx 0 \end{aligned}$$

Aplicando la formula general para el valor radial:

$$\begin{aligned} \alpha_m R_2^2 = x & = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - (4)(1) \left( -\frac{3}{4} \frac{g}{R_{1,A}^2 u_0^2} \right)}}{2} \\ \alpha_m R_2^2 = x & = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 3 \frac{g}{R_{1,A}^2 u_0^2}}}{2} \\ x & = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9 R_{1,A}^2 u_0^2 + 3g}{16 R_{1,A}^2 u_0^2}}}{2} \end{aligned}$$

Caso 1.-  $u_0 \gg g$ , proporcionalmente, la velocidad de sonido es mayor que el valor de la gravedad en cualquier sistema

$$x \approx \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9R_{1,A}^2 u_0^2}{16R_{1,A}^2 u_0^2}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}}{2}$$

$$x \approx \frac{3}{4}, 0$$

$$R_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9\mu}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}}$$

Caso 2.-  $g \approx R_{1,A}^2 u_0^2$ , la gravedad es mayor que el cuadrado de la velocidad de desplazamiento, corresponde a una velocidad baja para el sonido

$$x \approx \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9R_{1,A}^2 u_0^2 + 3R_{1,A}^2 u_0^2}{16R_{1,A}^2 u_0^2}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{12}{16}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{2}{4}\sqrt{3}}{2}$$

$$x \approx \frac{3}{8} \pm \frac{2}{8}\sqrt{3}$$

La expresión del caso 1, nos dice que la energía de un cierto pulso acústico converge en un radio que depende de la frecuencia de resonancia de cada una de las partículas, es decir, que hay una distancia de convergencia de la energía para cada componente. Entonces, se puede tomar una radio de convergencia promedio válido para todos los elementos que conforman la masa de aire, con una expresión simplificada de la forma:

$$\bar{R}_{CP} = \pm \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{9\mu}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} d\varphi_m$$

En el caso en que la frecuencia central de vibración sea próxima al equilibrio como el promedio de todas las velocidades angulares y no como un análisis de la temperatura, podemos aproximar la ecuación del radio de convergencia a una expresión que depende únicamente de los corrimientos de fase. Siempre que todas las frecuencias de vibración sean cercanas al valor central:

$$\bar{R}_{CP} \approx \left| \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{9\mu}{\rho(\omega'_m + \varphi_m)}} d\varphi_m \right|$$

En términos generales, la presión debida a la perturbación acústica presión tiene dos términos, uno correspondiente a la zona de la perturbación (*near field*) y otro para la zona de rarificación-convergencia (*far field*):

$$P(r, \theta, \phi, t) = P_a g(\theta, \phi) + P_r g(\theta, \phi)$$

$$P_a(r) = \rho g r - \rho 36 R_1^2 u_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!! (2n - 2k + 1)!!}{9(2k + 2)!! (2n - 2k + 2)!!} (-1)^n \alpha_m^n r^{2n+1} + P_0$$

$$P_r(r) = \rho g (R_2 - r) + \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n - 3)!!} - \rho u_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! 2n \alpha_m^n R_2^{2n}}{(2n - 3)!!} + P_0$$

Donde consideraremos que el producto de las funciones angulares (azimutal y polar) se van a regir por una misma función, y aunque los productos implican reglas de la cadena, vamos a tomar que son una sola expresión inseparable:

$$g(\theta, \phi) = u_\theta u_\phi$$

Para cuestiones del efecto fotoacústico, es necesario considerar las expresiones para el fenómeno en la zona cercana a la fuente de la perturbación:

$$u_r(r, t) = R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n (2n)!!}{3(2n + 2)!!} r^{2n+1}$$

La ecuación radial obtenida en el arreglo de matrices vectores de las ecuaciones de N-S se dividió en tres ecuaciones diferenciales, con lo cual se procede ahora a resolver la ecuación angular que había sido dejada para después:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Se ha establecido la solución para la función radial y la presión en términos de la misma. Quedan por resolver dos ecuaciones que provienen de la forma matricial de las ecuaciones de N-S. En el caso de la segunda ecuación, correspondiente al ángulo polar, se retoma la ecuación diferencial considerando todas las aproximaciones hechas previamente y las soluciones que hayan sido evaluadas. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\
&+ \frac{1}{3\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \\
& u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\
&+ \frac{1}{3\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]
\end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea de la ecuación radial tomada de las matrices vector, podemos suponer que la parcial de la presión y el producto de la parcial con respecto a la distancia para la velocidad angular, forman por sí solas una ecuación diferencial, con lo cual estamos dando en certeza que la variación angular de la presión depende indirectamente de su cambio en la dirección de la velocidad, lo cual coincide con la experiencia.

$$\begin{aligned}
u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\
&+ \frac{1}{3\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] = 0
\end{aligned}$$

Lo cual nos da las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] &= 0
\end{aligned}$$

Para la primera de las nuevas ecuaciones, tomamos en primera instancia, solo la función radial de la onda acústica para la perturbación pues las demás funciones se van a someter al mismo análisis y ya que esto es con respecto al ángulo polar, no hay cambios en la expresión radial. No se expresan explícitamente en el desarrollo.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} = -u_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{n+1} (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -u_\theta r \left( R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} (2n+1) r^{2n} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -u_\theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \ln|\cot \theta + \csc \theta| u_\theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \partial P(\theta') &= -\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} u_\theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \ln|\cot \theta' + \csc \theta'| \partial \theta' \end{aligned}$$

Se recurre a la ecuación resultante que se dejó pendiente, en caso de que hubiera una relación no prevista entre los dos ángulos presentes en la geometría esférica:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] &= 0 \\ 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left( 2 \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} [\cos \theta u_\phi] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left( 2 \cos \theta u_\theta + 2 \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} [\cos \theta u_\phi] &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 2 \cot \theta u_\theta + 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \cos \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{1}{r} \left( -\csc^2 \theta u_\theta + 2 \cot \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \cos \theta \left( \frac{2 \csc \theta}{r} - \sin \theta \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\csc^2 \theta u_\theta}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Desde el comienzo se ha estado trabajando bajo la idea de que es un medio isotrópico, por lo cual el cambio angular en cualquier dirección es pequeño debido a su densidad uniforme en todas las direcciones con esto podemos suponer que cada aporte angular tiene una variación sumamente fluctuante como en un polinomio de la forma:

$$u_\theta = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sin \theta)^l}{l!}$$

Con sus derivadas correspondientes:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l \cos \theta (\sin \theta)^{l-1}}{l!} = \cot \theta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(\sin \theta)^l}{l!}$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(\sin \theta)^l}{l!} + \cot^2 \theta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l-1)(\sin \theta)^l}{l!}$$

Sustituyendo estas en la ecuación diferencial:

$$\frac{2}{r} \cot^2 \theta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l-1)(\sin \theta)^l}{l!} - \frac{2}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(\sin \theta)^l}{l!} + \frac{2}{r} \cot^2 \theta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(\sin \theta)^l}{l!} - \cos^2 \theta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(\sin \theta)^l}{l!}$$

$$- \frac{\csc^2 \theta}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sin \theta)^l}{l!} = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{2l(l-1) \cot^2 \theta}{r} - \frac{2l}{r} + \frac{2l \cot^2 \theta}{r} - l \cos^2 \theta - \frac{\csc^2 \theta}{r} \right\} \frac{(\sin \theta)^l}{l!} = 0$$

$$\frac{2l(l-1) \cot^2 \theta}{r} - \frac{2l}{r} + \frac{2l \cot^2 \theta}{r} - l \cos^2 \theta - \frac{\csc^2 \theta}{r} = 0$$

$$2l(l-1) \cot^2 \theta - 2l + 2l \cot^2 \theta - \csc^2 \theta = rl \cos^2 \theta$$

$$2l^2 \cot^2 \theta - 2l - \csc^2 \theta = rl \cos^2 \theta$$

$$r = \frac{2l^2 \cot^2 \theta - 2l - \csc^2 \theta}{l \cos^2 \theta}$$

Por último, queda una ecuación diferencial angular que tratar, la correspondiente al ángulo azimutal, siendo este el ángulo que indica la inclinación de las partículas que viajan en el aire y con la dirección de movimiento de cada una, si hay una cierta aportación de la gravedad, con ello, se busca definir los valores de las constantes en ambas funciones:

$$u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

$$= - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mu}{3r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$+ \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

Como en las ecuaciones anteriores, separamos la ecuación que se va a resolver en tres ecuaciones que deben analizarse, una de ellas por la condición que se ha



establecido paginas antes donde la relación de ambas derivadas da cero en esa forma en particular.

$$u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mu}{3r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \\ + \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

Con las nuevas ecuaciones:

$$u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \\ u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mu}{3r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] = 0$$

Para la primera de las tres ecuaciones, de nuevo se toma la función de velocidad acústica radial para la zona de perturbación acústica y se evalúa la función por integración directa:

$$u_\phi \frac{\partial}{\partial r} \left( R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \\ u_\phi R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} (2n+1) r^{2n} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} = -u_\phi R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} (2n+1) r^{2n} \\ \frac{\partial P}{\partial \phi} = -u_\phi \sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \\ \int_0^\phi \partial P = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \int_0^\phi u_\phi \partial \phi' \\ P(\phi) - P_{\phi,0} = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \int_0^\phi u_\phi \partial \phi' \\ P(\phi) = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \int_0^\phi u_\phi \partial \phi' + P_{\phi,0}$$

Se analiza la ecuación diferencial restante para la función angular azimutal:

$$\sin \theta \cot \theta \csc \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \csc \theta \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} = 0$$

$$-\cos \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Reescribiendo la ecuación en términos de diferenciales se puede integrar directamente:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \theta' u_\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\alpha_1 \cos \theta' u_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

$$\alpha_1 \cos \theta' \partial \phi = \frac{\partial u_\phi}{u_\phi}$$

$$\alpha_1 \cos \theta' \phi + k_5 = \ln u_\phi$$

$$u_\phi = \exp \alpha_1 \cos \theta' \phi + k_5 = \exp \alpha_1 \cos \theta' \phi \exp k_5$$

$$u_\phi = C_1 \exp \alpha_1 \cos \theta' \phi$$

Por datos experimentales, se sabe que la velocidad a la que viajan las partículas en una caída va decayendo, sufren una desaceleración conforme la altura aumenta, por ello, se espera que incluso en un medio isotrópico dicha velocidad angular azimutal tienda a ser menor que al nivel del suelo, con ello podemos establecer la inecuación:

$$u_\phi \left( \frac{\pi}{2} \right) < u_\phi(0)$$

$$C_1 \exp \left( \alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2} \right) < C_1 \exp(0)$$

$$\exp \left( \alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2} \right) < 1$$

$$\ln \left| \exp \left( \alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2} \right) \right| < \ln(1) = 0$$

$$\alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2} < 0$$

$$\alpha_1 \cos \theta' < 0$$

Evaluando la condición de inicial para la función azimutal para evaluar en condiciones que simplifican la expresión total:

$$u_\phi(0) = C_1 \exp(\alpha_1 \cos \theta' [0]) = 1$$

$$C_1 = 0$$

La condición de frontera esperada dado que la onda acústica tiene frentes de onda que dependen de las partículas, de manera que para el mayor ángulo se espera que las partículas empiecen a caer con una velocidad proporcional al negativo de la gravedad:

$$u_\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(\alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{g}{\omega_m}$$

$$\ln\left|\exp\left(\alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2}\right)\right| = \ln\left|-\frac{g}{\omega_m}\right| = \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right|$$

$$\alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2} = \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right|$$

$$\cos \theta' = \frac{2}{\alpha_1 \pi} \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right|$$

$$\theta'_m = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\alpha_1 \pi} \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right|\right)$$

Ya conociendo la expresión de la velocidad angular azimutal, se puede determinar la presión correspondiente para dicha variable sustituyendo la expresión establecida en la integral que quedó pendiente:

$$P(\phi) = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \int_0^\phi \exp\left(\alpha_1 \cos \theta' \frac{\pi}{2}\right) \partial \phi' + P_{\phi,0}$$

$$P(\phi) = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \int_0^\phi \exp\left(\frac{2}{\pi} \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right| \phi'\right) \partial \phi' + P_{\phi,0}$$

$$P(\phi) = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \left[ \exp\left(\frac{2}{\pi} \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right| \phi'\right) - 1 \right] + P_{\phi,0}$$

$$P(\phi, r) = -\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} r^{2n+1} \left[ \exp\left(\frac{2}{\pi} \ln\left|\frac{g}{\omega_m}\right| \phi'\right) - 1 \right] + P_{\phi,0}$$

Se tienen dos condiciones a la frontera para evaluar dependiendo de la variable que estamos analizando. Aunque se toman como independientes, en las ecuaciones se puede ver que tienen cierta codependencia, y se está analizando solo esta versión. La codependencia de múltiples parámetros, variables y derivadas dentro del tensor de

deformaciones, generan la necesidad de resolverlo en coordenadas generalizadas y tensores con formalismo matemático puro.

Caso radial:

$$P(\phi, r = 0) = 0$$

$$-\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} (0)^{2n+1} \left[ \exp\left(\frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{g}{\omega_m} \right| \phi'\right) - 1 \right] + P_{\phi,0} = 0$$

$$P_{\phi,0} = 0$$

Caso azimutal:

$$P\left(\phi = -\frac{\pi}{2}, r = R_2\right) = P_0$$

$$-\sin \theta R_1 u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^{n+1} (-1)^n}{3(2n+2)} R_2^{2n+1} \left[ \exp\left(\frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{g}{\omega_m} \right| \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 \right] = P_0$$

Aproximando para el primer valor de la serie infinita, se pueden sustituir cada uno de los radios de perturbación acústica (perturbación-rarificación, rarificación-convergencia):

$$\sin \theta R_1 u_0 \left(\frac{R_2}{6}\right) \left[1 - \exp\left(\ln \left| \frac{g}{\omega_m} \right|\right)\right] = P_0$$

$$\frac{\sin \theta u_0}{6} \left| \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2 + 3g\alpha_m}{\alpha_m}} \right| \left| \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{9\mu}{\rho(\omega'_m + \varphi_m)}} d\varphi_m \right| \left(1 - \exp\left(\ln \left| \frac{g}{\omega_m} \right|\right)\right) = P_0$$

La ecuación anterior nos da la expresión para encontrar la presión inicial que se percibe para una perturbación acústica en la zona de convergencia de la onda, es decir, la pequeña variación de la presión debida al frente de onda con respecto a la presión ambiental o la atmosférica. Pese a que esta es la expresión completa, se puede simplificar para ver sustituir algunos cuantos valores en el experimento y poder determinar dicha presión con datos reales.

En este caso, digamos que la energía de la perturbación acústica es pequeña, de manera que las condiciones del medio isotrópico se conservan, es decir,  $\varphi_m \approx 0$ . Sustituyendo esta consideración en la ecuación de la presión, nos lleva a:

$$\frac{\sin \theta u_0}{6} \left| \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2 + 3g \left( \frac{\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu} \right)}{\left( \frac{\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu} \right)}} \right| \left| \frac{1}{2m} \int_0^\infty \sqrt{\frac{9\mu}{\rho\omega'_m}} d\varphi_m \right| \left( 1 - \exp \left( \ln \left| \frac{g}{\omega_m} \right| \right) \right) = P_0$$

$$\frac{\sin \theta u_0}{6} \left| \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2 \mu + g\rho(\omega_m + \varphi_m)}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} \right| \left| \frac{\varphi_m}{2m} \sqrt{\frac{9\mu}{\omega_m}} \right| \left( 1 - \frac{g}{\omega_m} \right) = P_0$$

Elevando la expresión al cuadrado para quitar los signos de norma:

$$P_0^2 = \frac{\sin^2 \theta u_0^2}{36} \left( \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0^2 \mu + g\rho(\omega_m + \varphi_m)}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} \right) \left( \frac{\varphi_m}{2m} \sqrt{\frac{9\mu}{\omega_m}} \right) \left( \frac{\omega_m - g}{\omega_m} \right)^2$$

$$P_0^2 = \frac{\varphi_m \sin^2 \theta u_0}{72m} \left( \frac{\omega_m - g}{\omega_m} \right)^2 \sqrt{\frac{9\mu}{\omega_m}} \left( \sqrt{\frac{u_0^2 \mu + g\rho(\omega_m + \varphi_m)}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} \right)$$

En este punto es claro ver que la presión debida a la perturbación acústica depende directamente de todas las velocidades angulares posibles, lo cual coincide con la definición de presión como el efecto promedio de todas las partículas en un medio y/o contra un cuerpo. Sin embargo, esto se puede simplificar aún, estableciendo que los valores de frecuencia angular son mucho mayores que la gravedad y la velocidad de onda inicial,  $\omega_m \gg u_0$ ,  $\omega_m \gg g$ :

$$P_0^2 = \frac{\varphi_m \sin^2 \theta u_0}{72m} \left( \frac{\omega_m}{\omega_m} \right)^2 \sqrt{\frac{9\mu}{\omega_m}} \left( \sqrt{\frac{g\rho(\omega_m + \varphi_m)}{\rho(\omega_m + \varphi_m)}} \right)$$

$$P_0^2 = \frac{\varphi_m \sin^2 \theta u_0}{72m} \sqrt{\frac{9g\mu}{\omega_m}}$$

Esta aproximación será útil a futuro para determinar la presión inicial y el cambio de la presión por la perturbación acústica, así se puede discriminar el ruido térmico en las mediciones sin necesidad de aplicar filtros tradicionales que eliminen frecuencias por anchos de banda. Se desea eliminar frecuencias como valores específicos, para conservar la mayor cantidad de información de los datos experimentales.

## 7.2. Densidad dependiente del tiempo, $\mu = \alpha\rho$

En física, se tiene por un medio isotrópico como aquel en que la densidad permanece igual en cualquier dirección incluso cuando se tiene una perturbación en este, lo cual es posible para una fuente con baja energía (o potencia). Dicha densidad tiene una variación en el tiempo, sin embargo, su valor final es cercano a la inicial  $\rho(t) \approx \rho(t + \tau)$ , también puede ser que el valor promedio en el tiempo sea el valor inicial de densidad:

$$\rho_0 = \langle \rho(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau} \rho(t + \Delta t)$$

Cuando una perturbación acústica es generada por una alta energía o no tiene una fuente de pulsos constantes, entonces hablamos de una masa de aire cuya densidad no se mantiene constante en la zona de la perturbación, y dado que la cantidad de partículas en dicha región no se mantiene constante, tampoco la viscosidad. Con estas aproximaciones a un caso real, las ecuaciones de N-S toma la forma:

$$\rho(t) \frac{Du_i}{Dt} = \rho(t) f_i - \frac{\partial P(r, t)}{\partial x_i} + \mu(t) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i x_j} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j} \right)$$

Tomando los trabajos reportados en la literatura, la densidad y la viscosidad se analizan bajo una expresión simple como funciones del tiempo:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 + \rho_0 \exp(-\alpha t) \\ \mu(t) &= \mu_0 + \varepsilon \rho_0^\gamma \exp(-\gamma \alpha t) \end{aligned}$$

Donde  $\gamma$  es la constante adiabática del medio, también  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La viscosidad está relacionada con la densidad por dicho factor, para el experimento, la densidad se puede tomar como norma para el aire y usarse de referencia en otro medio gaseoso.

Se retoman las matrices usadas previamente en las ecuaciones de N-S con el añadido de la densidad en función del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho(t) u_r \\ \rho(t) u_\theta \\ \rho(t) u_\phi \end{pmatrix} + \rho(t) \left[ \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \\ \rho(t) f_i &= \rho(t) \begin{pmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_r)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\theta)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\phi)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right]^T$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right]^T$$

Con la densidad dependiente del tiempo, las matrices dividen las ecuaciones de N-S en dos grupos de ecuaciones, una correspondiente a los valores constantes y las otras para los valores con variación temporal. Entonces tenemos el grupo de ecuaciones de N-S en un caso isotrópico de tipo onda esfera:

$$\rho_0 \frac{Du_i}{Dt} = \rho_0 f_i + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Y el caso con movimientos aleatorios en el medio, donde cada elemento de la ecuación tiene variaciones temporales, ya sea de forma explícita o implícita, siendo de vital importancia las ecuaciones relacionadas con la distancia radial:

$$\rho_0 e^{-at} \frac{Du_i}{Dt} = \rho_0 e^{-at} f_i - \frac{\partial P(r, t)}{\partial x_i} + \varepsilon \rho_0^\gamma e^{-\gamma at} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

El problema se resuelve por separado, considerando algunas relaciones en el caso isotrópico, en especial para la aproximación de referencia del caso de ondas esféricas acústicas, con lo cual, nuestras primeras ecuaciones a resolver son las siguientes.

Caso radial-temporal:

$$\rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho_0 u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \rho_0 u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right]$$

Caso angular polar:

$$\begin{aligned} u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ = \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial (\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\ + \frac{\mu}{3\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

Caso angular azimutal:

$$\begin{aligned} u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ = \frac{\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mu}{3r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{2\mu}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

Para el caso radial-temporal, se comienza por la primera identidad que fue definida previamente en el análisis de la onda para el medio isotrópico pero que no presenta frentes de onda de tipo esférico equidistantes:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \equiv 0$$

Por consiguiente, queda como ecuación solo los términos correspondientes a la velocidad acústica para la variable radial, a la cual se aplica la transformada de Laplace con respecto al radio. Las condiciones de inicio para la transformada, se obtienen de la idea de un medio gaseoso que antes de la perturbación se mantiene en equilibrio con una densidad promedio constante para cualquier periodo de tiempo:

$$u_r(0, t) = 0$$

$$\dot{u}_r(0, t) = 0$$

Solo para posibles aplicaciones futuras o para sustituciones en otras fórmulas, se aproxima la función solución para las frecuencias de estudio muy grandes ( $\omega' \rightarrow \infty$ ), del orden de GHz, que es aproximadamente la frecuencia de vibración mínima de las partículas del aire:



$$u_r(r, t) = -\frac{\mu_0 r}{3\rho_0} \delta(t) \left( \frac{r e^{-2kr}}{2} + 1 \right) + \frac{r \omega'}{2\pi t}$$

Dado que las ecuaciones angulares son idénticas a las ecuaciones estudiadas en el caso isotrópico para una perturbación acústica no esférica, se usan las mismas funciones soluciones obtenidas en ese punto, aunque pueden estudiarse por otro método, no se hará esto pues en el análisis de los datos son de vital importancia el tiempo, la distancia y las frecuencias. Esto último dado que los sensores estarán ajustados para un mismo ángulo en cada medición, con un movimiento de estos por servomotores que conservaran el ángulo y solo van a cambiar el punto de observación.

En el análisis final de los datos guardados, se tienen que considerar todos los posibles valores obtenidos del caso isotrópico y del caso anisótropo (en su versión para onda esférica y el correspondiente a una onda real), primero como la suma de todos los posibles estados generados por estos. Posteriormente con análisis de datos espectrales, colapso de funciones y determinantes que se verán en capítulos posteriores.

Continuando con el análisis matemático, se retoma la ecuación diferencial radial-temporal correspondiente para el caso puro anisótropo con una viscosidad dependiente de la densidad y esta como una función del tiempo. En esta ED si se considera a la gravedad como parte de una fuerza dentro del análisis bajo la idea de que su energía potencial debido a su posición con respecto al punto de observación es del mismo orden que la energía generada por la perturbación acústica.

La ecuación radio-temporal a analizar es:

$$\begin{aligned} & \rho_0 e^{-\alpha t} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 e^{-\alpha t} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho_0 e^{-\alpha t} u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \rho_0 e^{-\alpha t} u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ & = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho_0 e^{-\alpha t} g + \frac{\varepsilon \rho_0^\gamma e^{-\gamma \alpha t}}{3} \left( -\frac{2u_r}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

Paso 1. – Considerando que el caso anisótropo es en realidad una variante para el caso sin variación de la presión de una onda sin simetría, entonces se toma la solución obtenida para dicho caso y se considera una ligera variante de la forma:

$$u_r(r, t) \approx -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{r^2 e^{-2kr}}{2} \delta(t)$$

Paso 2. – Se divide la ecuación diferencial por el término  $\rho_0 e^{-\alpha t}$  para simplificar su escritura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ = -\frac{e^{\alpha t}}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} - g + \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} \left( -\frac{2u_r}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

No se puede derivar directamente una función del tipo Delta de Dirac, entonces se usa la aproximación de esta para un movimiento browniano, de acuerdo a la naturaleza del fenómeno físico de la masa de aire conformada con partículas que tienen su propia dirección y velocidad media:

$$\delta(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$$

En términos generales, dicha función se va a representar directamente como el movimiento browniano y se expresaran sus derivadas en forma general para la futura aplicación de la transformada de Laplace para la variable radial que se convertirá en los estados posibles del volumen de gas:

$$\delta(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) = B_t(r, t)$$

Lo cual nos da una función propuesta como sigue:

$$u_r(r, t) = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{r^2 e^{-2kr}}{2} B_t(r, t)$$

Paso 3. – Se evalúan las derivadas radiales y temporales de la función propuesta, con  $A = \frac{\mu_0}{3\rho_0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( -A \frac{r^2 e^{-2kr}}{2} B_t(r, t) \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= -A \left( \frac{2r e^{-2kr}}{2} - \frac{2kr^2 e^{-2kr}}{2} \right) B_t(r, t) - A \frac{r^2 e^{-2kr}}{2} \frac{dB_t}{dr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= -A(e^{-2kr} - 2kre^{-2kr} - 2kre^{-2kr} + 4k^2r^2e^{-2kr})B_t(r, t) \\ &\quad - A(re^{-2kr} - kr^2e^{-2kr})\frac{dB_t}{dr} - A\left(\frac{2re^{-2kr}}{2} - \frac{2kr^2e^{-2kr}}{2}\right)\frac{dB_t}{dr} \\ &\quad - A\frac{r^2e^{-2kr}}{2}\frac{d^2B_t}{dr^2} \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= -A(e^{-2kr} - 4kre^{-2kr} + 4k^2r^2e^{-2kr})B_t(r, t) - 2A(re^{-2kr} - kr^2e^{-2kr})\frac{dB_t}{dr} \\ &\quad - A\frac{r^2e^{-2kr}}{2}\frac{d^2B_t}{dr^2} \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-A\frac{r^2e^{-2kr}}{2}B_t(r, t)\right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= -A\frac{r^2e^{-2kr}}{2}\frac{dB_t}{dt} \end{aligned}$$

Paso 4. – Por simplicidad en el manejo de las ecuaciones, se toma una nueva definición de la función solución propuesta, como se muestra a continuación:

$$u_r(r, t) = v(r)B_t(r, t)$$

Donde la expresión del inicio se toma como:

$$v(r) = -A\frac{r^2e^{-2kr}}{2}$$

Paso 5. – Con lo anterior dicho, se redefinen las derivadas obtenidas previamente, siendo en su versión simplificada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= 2\frac{v(r)}{r}B_t + 2kv(r)B_t + v(r)\frac{dB_t}{dr} \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= 2\frac{v(r)}{r^2}B_t + \frac{8kv(r)}{r}B_t + 8k^2v(r)B_t + 2\frac{v(r)}{r}\frac{dB_t}{dr} - 2kv(r)\frac{dB_t}{dr} + v(r)\frac{d^2B_t}{dr^2} \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= v(r)\frac{dB_t}{dt} \end{aligned}$$

Paso 6. – Estas nuevas expresiones de las derivadas se sustituyen en las ED en caso de anisotropía:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\
& = -\frac{e^{\alpha t}}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} - g + \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} \left( -\frac{2u_r}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \\
v(r) \frac{dB_t}{dt} + v(r) B_t \left( 2 \frac{v(r)}{r} B_t + 2kv(r) B_t + v(r) \frac{dB_t}{dr} \right) + v(r) B_t \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\
& = -\frac{e^{\alpha t}}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} - g - 2 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r^2} v(r) B_t \\
& + 2 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r} \left( 2 \frac{v(r)}{r} B_t + 2kv(r) B_t + v(r) \frac{dB_t}{dr} \right) \\
& + \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} \left( 2 \frac{v(r)}{r^2} B_t + \frac{8kv(r)}{r} B_t + 8k^2 v(r) B_t + 2 \frac{v(r)}{r} \frac{dB_t}{dr} \right. \\
& \left. - 2kv(r) \frac{dB_t}{dr} + v(r) \frac{d^2 B_t}{dr^2} \right)
\end{aligned}$$

Paso 7. – Se divide la ecuación por el término  $v(r)$  y después se simplifican los términos agrupando y realizando los productos necesarios:

$$\begin{aligned}
& \frac{dB_t}{dt} + B_t \left( 2 \frac{v(r)}{r} B_t + 2kv(r) B_t + v(r) \frac{dB_t}{dr} \right) + B_t \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\
& = -\frac{e^{\alpha t}}{\rho_0 v(r)} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{g}{v(r)} - 2 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r^2} B_t \\
& + 2 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r} \left( \frac{2}{r} B_t + 2kB_t + \frac{dB_t}{dr} \right) \\
& + \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} \left( \frac{2}{r^2} B_t + \frac{8k}{r} B_t + 8k^2 B_t + \frac{2}{r} \frac{dB_t}{dr} - 2k \frac{dB_t}{dr} + v(r) \frac{d^2 B_t}{dr^2} \right) \\
\frac{dB_t}{dt} & = \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} \frac{d^2 B_t}{dr^2} + \frac{dB_t}{dr} \left( \frac{4\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r} - \frac{2k\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} - v(r) B_t \right) \\
& + B_t \left( \frac{4\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r^2} + \frac{12k\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3r} + \frac{8k^2 \varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} \right. \\
& \left. - 2kv(r) B_t \right) - \frac{B_t}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{e^{\alpha t}}{\rho_0 v(r)} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{g}{v(r)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_t}{dt} = & \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{d^2B_t}{dr^2} + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{dB_t}{dr} \left( \frac{4}{r} - \frac{2k}{3} \right) - v(r)B_t \left( \frac{dB_t}{dr} + 2kB_t \right) \\ & + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} B_t \left( \frac{4}{r^2} + \frac{12k}{r} + 8k^2 \right) - \frac{B_t}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{e^{\alpha t}}{\rho_0 v(r)} \frac{\partial P}{\partial r} \\ & - \frac{g}{v(r)} \end{aligned}$$

Paso 8. – Se multiplica la ecuación en ambos lados por  $r^2$ :

$$\begin{aligned} r^2 \frac{dB_t}{dt} = & r^2 \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{d^2B_t}{dr^2} + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{dB_t}{dr} \left( 4r - \frac{2k}{3}r^2 \right) \\ & - v(r)r^2B_t \left( \frac{dB_t}{dr} + 2kB_t \right) + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} B_t (4 + 12kr + 8k^2r^2) \\ & - B_t r \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{e^{\alpha t}r^2}{\rho_0 v(r)} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{gr^2}{v(r)} \end{aligned}$$

Paso 9. – Se aplica la transformada de Laplace para la variable radial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ r^2 \frac{dB_t}{dt} \right\} = & \mathcal{L} \left\{ r^2 \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{d^2B_t}{dr^2} + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{dB_t}{dr} \left( 4r - \frac{2k}{3}r^2 \right) \right. \\ & \left. - v(r)r^2B_t \left( \frac{dB_t}{dr} + 2kB_t \right) + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} B_t (4 + 12kr + 8k^2r^2) \right. \\ & \left. - B_t r \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{e^{\alpha t}r^2}{\rho_0 v(r)} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{gr^2}{v(r)} \right\} \\ \mathcal{L} \left\{ r^2 \frac{dB_t}{dt} \right\} = & \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \mathcal{L} \left\{ r^2 \frac{d^2B_t}{dr^2} \right\} + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \mathcal{L} \left\{ \frac{dB_t}{dr} \left( 4r - \frac{2k}{3}r^2 \right) \right\} \\ & - \mathcal{L} \left\{ v(r)r^2B_t \left( \frac{dB_t}{dr} + 2kB_t \right) \right\} + \frac{\varepsilon\rho_0^{\gamma-1}e^{-(\gamma-1)at}}{3} \mathcal{L} \{ B_t (4 + 12kr + 8k^2r^2) \} \\ & - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \mathcal{L} \{ B_t r \} - \frac{e^{\alpha t}}{\rho_0} \mathcal{L} \left\{ \frac{r^2}{v(r)} \frac{\partial P}{\partial r} \right\} - g \mathcal{L} \left\{ \frac{r^2}{v(r)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{s^3} \frac{dB_t(s, t)}{dt} &= \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{2}{s^3} \left( s^2 B_t(s, t) - s B_t(0, t) - \frac{dB_t}{dr}(0, t) \right) \\
&+ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{4}{s^2} - \frac{4k}{3s^3} \right) (s B_t(s, t) - B_t(0, t)) \\
&- \frac{2V(s)}{s^3} B_t(s, t) (s B_t(s, t) - B_t(0, t) + 2k B_t(s, t)) \\
&+ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{4}{s} + \frac{12k}{s^2} + \frac{16k^2}{s^3} \right) B_t(s, t) - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{B_t(s, t)}{s^2} \\
&- \frac{e^{at}}{\rho_0} \frac{2}{s^3 V(s)} (sp - P(0, t)) - \frac{2g}{s^3 V(s)}
\end{aligned}$$

Para poder evaluar las condiciones de inicio necesarias en la transformada de Laplace, se deben considerar las definiciones de varias de estas funciones. Primero, para la presión, definiéndola como el efecto promedio de las colisiones de las partículas que conforman una masa de aire entre ellas y con el límite del contenedor de esta. Con esto, cuando el radio de inicio vale cero, no hay partículas y con ello no hay colisiones entre ellas, entonces  $P(0, t) = 0$ . Ahora, para evaluar las condiciones de inicio para la ecuación de movimiento Browniano, se toma la función con la cual fue definida:

$$B_t(r = 0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(r=0)^2}{4Dt}\right) = \frac{e^0}{\sqrt{4\pi Dt}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

Por otro lado, se necesita también las derivadas radiales de esta expresión y evaluar en el radio de inicio:

$$\begin{aligned}
\frac{dB_t}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left( \frac{2r}{4Dt} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \\
\frac{dB_t}{dr}(0, t) &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left( \frac{2(r=0)}{4Dt} \right) \exp\left(-\frac{(r=0)^2}{4Dt}\right) \\
\frac{dB_t}{dr}(0, t) &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}(0) \exp(0) = 0
\end{aligned}$$

Paso 10. – Se sustituyen las condiciones de inicio ya evaluadas previamente, en la ecuación transformada:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{s^3} \frac{dB_t(s, t)}{dt} &= \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \frac{2}{s^3} \left( s^2 B_t(s, t) - \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \\
&+ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{4}{s^2} - \frac{4k}{3s^3} \right) \left( s B_t(s, t) - \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \\
&- \frac{2V(s)}{s^3} B_t(s, t) \left( s B_t(s, t) - \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} + 2k B_t(s, t) \right) \\
&+ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{4}{s} + \frac{12k}{s^2} + \frac{16k^2}{s^3} \right) B_t(s, t) - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{B_t(s, t)}{s^2} \\
&- \frac{e^{at}}{\rho_0} \frac{2}{s^3 V(s)} (sp) - \frac{2g}{s^3 V(s)}
\end{aligned}$$

Paso 11. – Se multiplica ambos lados de la ecuación por  $s^3/2$  y se reorganizan términos por factores en común para darle una forma compacta a la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{dB_t(s, t)}{dt} &= \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( s^2 B_t(s, t) - \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \\
&+ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( 2s - \frac{2k}{3} \right) \left( s B_t(s, t) - \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \\
&- V(s) B_t(s, t) \left( s B_t(s, t) - \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} + 2k B_t(s, t) \right) \\
&+ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} (2s^2 + 6ks + 8k^2) B_t(s, t) - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{s B_t(s, t)}{2} \\
&- \frac{e^{at} sp(s)}{\rho_0 V(s)} - \frac{g}{V(s)} \\
\frac{dB_t(s, t)}{dt} &= B_t \left[ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( 5s^2 - \frac{2ks}{3} + 6ks + 8k^2 \right) + \frac{V(s)}{\sqrt{4\pi Dt}} \right] \\
&- \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \left( 2s - \frac{2k}{3} + 1 \right) - B_t V(s) B_t(s + 2k) \\
&- \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{s B_t(s, t)}{2} - \frac{e^{at} sp(s)}{\rho_0 V(s)} - \frac{g}{V(s)}
\end{aligned}$$

Se redefine la ecuación anterior con ciertas simplificaciones para escribir la ecuación diferencial con respecto al tiempo como una ecuación diferencial estocástica sin considerar de forma implícita la forma de las ecuaciones en la variable  $s$  que define los estados posibles del sistema en cada punto de la vecindad.

$$\frac{dB_t}{dt} = Q(s, t)B_t - P(s, t) - B_t A(s)B_t - C(s, \tau)B_t(s, t) - W(s, t) - D(s)$$

Donde las definiciones para algunas expresiones son:

$$Q(s, t) = \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( 5s^2 - \frac{2ks}{3} + 6ks + 8k^2 \right) + \frac{V(s)}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

$$P(s, t) = \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \left( 2s - \frac{2k}{3} + 1 \right)$$

$$A(s) = V(s)(s + 2k)$$

$$C(s, \tau) = \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{s}{2}$$

$$W(s, t) = \frac{e^{\alpha t} sp(s, t)}{\rho_0 V(s)}$$

$$D(s) = \frac{g}{V(s)}$$

Para dejar la ecuación diferencial expresada, se usa separación de los diferenciales y se divide por  $B_t$ . Esta última expresión no se va a solucionar en esta sección, sino hasta definir claramente lo que se considera como ruido y el efecto fotoacústico por se.

$$H(s) = \frac{dB_t}{B_t} = Q(s, t)dt - \frac{P(s, t)}{B_t} - B_t A(s)dt - C(s, \tau)dt - \frac{W(s, t)}{B_t} - \frac{D(s)}{B_t}$$

Aunque la ecuación anterior es válida y útil para establecer un sistema de control para un fenómeno fotoacústico puro, es demasiado complicado para analizarse como una función. Se requiere la última para tener una proyección o predicción de datos que nos puedan dar a entender cuáles son los aspectos que podemos esperar del fenómeno y que valores de amplitud puede tener para distintas distancias con respecto al punto de estudio.

$$\begin{aligned} \frac{dB_t(s, t)}{dt} = B_t & \left[ \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( 5s^2 - \frac{2ks}{3} + 6ks + 8k^2 \right) + \frac{V(s)}{\sqrt{4\pi Dt}} \right] \\ & - \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} \left( \frac{s}{\sqrt{4\pi Dt}} \right) \left( 2s - \frac{2k}{3} + 1 \right) - B_t V(s) B_t (s + 2k) \\ & - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \frac{s B_t(s, t)}{2} - \frac{e^{\alpha t} sp(s)}{\rho_0 V(s)} - \frac{g}{V(s)} \end{aligned}$$



De la ecuación anterior se despeja a  $V(s)$  con respecto a los demás términos. Considerando ciertas expresiones que se definieron antes para la ecuación, se puede simplificar como:

$$\begin{aligned} W_{noise}(s, t) - B_t Q'(s, t) + P(s, t) + C(s, \tau) B_t(s, t) \\ = B_t \frac{V(s)}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t V(s) B_t(s + 2k) - W(s, t) - D(s) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que todos los posibles valores de estado para la versión transformada y también bajo el supuesto que su variabilidad está limitada por la viscosidad del fluido:

$$D(s) \sim 0$$

$$W(s, t) \sim 0$$

$$C(s, \tau) \sim 0$$

Entonces, nos genera una ecuación de la forma:

$$W_{noise}(s, t) - B_t Q'(s, t) + P(s, t) = B_t \frac{V(s)}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t V(s) B_t(s + 2k)$$

$$W_{noise}(s, t) - B_t Q'(s, t) + P(s, t) = V(s) B_t \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]$$

$$V(s) = \frac{W_{noise}(s, t)}{B_t \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]} - \frac{B_t Q'(s, t)}{B_t \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]} + \frac{P(s, t)}{B_t \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]}$$

$$V(s) = \frac{W_{noise}(s, t)}{B_t \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]} - \frac{Q'(s, t)}{\left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]} + \frac{P(s, t)}{B_t \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} - B_t(s + 2k) \right]}$$

En este punto ya se puede aplicar transformada inversa de Laplace para recuperar la expresión de velocidad del sonido como una expresión del radio y el tiempo:

$$\begin{aligned} u(r, t) = \frac{\partial_t B_t(r, t)}{B_t(r, t) [\delta(r, t) - B_t(r + 2r', t)]} - \frac{k_1 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3}}{[\delta(r, t) - B_t(r + 2r', t)]} \\ + \frac{P(r, t)}{B_t [\delta(r, t) - B_t(r + 2r', t)]} \end{aligned}$$

Despejando de nuevo, para establecer una ecuación simplificada:

$$u(r, t) [\delta(r, t) - B_t(r + 2r', t)] = \frac{\partial_t B_t(r, t)}{B_t(r, t)} - k_1 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)\alpha t}}{3} + \frac{P(r, t)}{B_t}$$

$$\begin{aligned}
u(r, t)[\delta(r, t) - B_t(r + 2r', t)] &\approx -u(r, t)B_t(r + 2r', t) \\
&= \frac{\partial_t B_t(r, t)}{B_t(r, t)} - k_1 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} + \frac{P(r, t)}{B_t}
\end{aligned}$$

De las definiciones hechas al inicio del sistema, se puede tomar que el ruido de Brown tiene una expresión relacionada con la velocidad del sonido despejando:

$$u_r(r, t) = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{r^2 e^{-2kr}}{2} B_t(r, t)$$

$$B_t(r, t) = -\frac{6\rho_0 u_r(r, t)}{\mu_0 r^2 e^{-2kr}}$$

Considerando que el ruido se presenta para valores de tiempo determinados punto a punto, además de que los elementos radiales de un momento están desfasados con respecto a los demás, es necesario que tanto la velocidad del sonido como el ruido, dependen de los eventos pasados, presentes y futuros:

$$B_t(r + 2r', t) = -\frac{6\rho_0 u_r(r + 2r', t)}{\mu_0 (r + 2r')^2 e^{-2k(r+2r')}}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
u(r, t) &\left[ -\frac{6\rho_0 u_r(r + 2r', t)}{\mu_0 (r + 2r')^2 e^{-2k(r+2r')}} \right] \\
&= -\frac{\partial_t \left( -\frac{6\rho_0 u_r(r, t)}{\mu_0 r^2 e^{-2kr}} \right)}{-\frac{6\rho_0 u_r(r, t)}{\mu_0 r^2 e^{-2kr}}} + k_1 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} - \frac{P(r, t)}{-\frac{6\rho_0 u_r(r, t)}{\mu_0 r^2 e^{-2kr}}}
\end{aligned}$$

Despejando una vez más, para dejarlo en términos de la velocidad lineal, con una aproximación despreciando la distancia primada siendo que tiene más importancia el tiempo:

$$-\frac{6\rho_0 u^2}{\mu_0 r^2 e^{-2kr}} = -\frac{\partial_t(u_r(r, t))}{u_r(r, t)} + k_1 \frac{\varepsilon \rho_0^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)at}}{3} + \frac{\mu_0 r^2 e^{-2kr} P(r, t)}{6\rho_0 u_r(r, t)}$$

Esta ecuación se dejó pendiente debido a que se busca una solución más precisa. Se intentaron simulaciones y soluciones simplificadas del sistema, dado que elementos

externos como la densidad y la presión requieren de un cierto dato externo, por sensores en tiempo real.

### 7.3. Una solución al tensor de estrés de Maxwell

Una de las múltiples formas de expresar el tensor de deformaciones (shear, stress, strain tensor) es a través de las presiones que se pueden generar debido a la luz interactuando con la materia, relacionado con los momentos lineales y angulares propios de los componentes de campo eléctrico y campo magnético de una onda electromagnética. Existen tres casos para este tensor: a) gases y plasmas, b), fluidos y, c) sólidos. Para efectos del experimento fotoacústico y por su tipo de aplicación, se usará la ecuación para cuerpos sólidos (macroscópicos):

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_i) = \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \frac{(2\epsilon + a_1)E_i E_j}{8\pi} - \frac{(\epsilon + a_2)E^2 \delta_{ij}}{8\pi}$$

Donde, para simplicidad del sistema, podemos decir que:

- $\epsilon$ , permitividad eléctrica absoluta para el material en estudio
- $b_1 = \frac{(2\epsilon + a_1)}{8\pi}$
- $b_2 = \frac{(\epsilon + a_2)}{8\pi}$

Y de forma aproximada, con el renombrado de las constantes se puede escribir el tensor de estrés como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_i) = \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + b_1 E_i E_j - b_2 E^2 \delta_{ij}$$

Ahora, se expresan todos los elementos del tensor en su forma matricial, de forma explícita para un sistema de coordenadas de 3x3:

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_i) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(0)} & \sigma_{12}^{(0)} & \sigma_{13}^{(0)} \\ \sigma_{21}^{(0)} & \sigma_{22}^{(0)} & \sigma_{23}^{(0)} \\ \sigma_{31}^{(0)} & \sigma_{32}^{(0)} & \sigma_{33}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$b_1 E_i E_j = b_1 \begin{pmatrix} E_1 E_1 & E_1 E_2 & E_1 E_3 \\ E_2 E_1 & E_2 E_2 & E_2 E_3 \\ E_3 E_1 & E_3 E_2 & E_3 E_3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 E^2 \delta_{ij} = b_2 \begin{pmatrix} E_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3^2 \end{pmatrix}$$

Expresando el tensor en relación con las presiones medidas como resultado del fenómeno físico, con apoyo de las expresiones matriciales, se puede aproximar con ciertas consideraciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} mu_1 \\ mu_2 \\ mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(0)} & \sigma_{12}^{(0)} & \sigma_{13}^{(0)} \\ \sigma_{21}^{(0)} & \sigma_{22}^{(0)} & \sigma_{23}^{(0)} \\ \sigma_{31}^{(0)} & \sigma_{32}^{(0)} & \sigma_{33}^{(0)} \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} E_1^2 & E_1 E_2 & E_1 E_3 \\ E_2 E_1 & E_2^2 & E_2 E_3 \\ E_3 E_1 & E_3 E_2 & E_3^2 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} E_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3^2 \end{pmatrix}$$

Considerando la naturaleza de las ondas electromagnética generadas por un haz laser, siendo este un haz colimado, además de ser monocromático, lo cual permite decir que ciertos elementos de la ecuación electromagnética no existen debido a la simetría del sistema, tampoco tendrán presencia en el arreglo matricial ( $E_r = E_1 \neq 0, E_\theta = E_2 \neq 0, E_\phi = E_3 = 0$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} mu_1 \\ mu_2 \\ mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} E_1^2 & E_1 E_2 & 0 \\ E_2 E_1 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} E_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Imaginemos por un momento el siguiente escenario: Un haz de luz, sea pulsado o sea continuo, interactúa con la materia y transmite parte de su energía, generando pequeñas vibraciones térmicas en el cuerpo. Este objeto al estar sumido en un fluido, está sometido a que su temperatura se rige por el cuerpo con mayor presencia, es decir, la transferencia de calor ocurre desde el cuerpo hacia el fluido. Dicha transferencia genera un desplazamiento de energía en el medio y por ende una perturbación, que después es registrada por un instrumento.

En el punto en que los datos son medidos y analizados, el pulso tiene información de la perturbación en el medio, del haz electromagnético impactando, del cuerpo en estudio, y de la interacción de las tres fuerzas. Ahora, supongamos que esa interacción se puede estudiar con un error despreciable si centramos la atención en el cambio de la presión

en el fluido en relación con la tensión electromagnética generada por el cuerpo. Posteriormente se pueden añadir los términos de las características mecano-elásticas del objeto de estudio.

Una forma de expresar dicha interacción es correlacionando el cambio de presión en el medio como una manifestación de las ecuaciones de N-S como una respuesta del tensor de estrés de Maxwell, expresado en forma matricial, siendo una expresión de los tensores:

$$\rho \partial_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \sigma_{ij}^{(0)} + b_1 E_i E_j - b_2 E^2 \delta_{ij}$$

$$-\rho \begin{pmatrix} u_1 \partial_1 u_1 + u_1 \partial_2 u_2 + u_1 \partial_3 u_3 \\ u_2 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_2 + u_2 \partial_3 u_3 \\ u_3 \partial_1 u_1 + u_3 \partial_2 u_2 + u_3 \partial_3 u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho g \\ \rho g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_1 P \\ \partial_2 P \\ \partial_3 P \end{pmatrix} + \frac{4\rho}{3} \begin{pmatrix} u_1 \partial_{11} u_1 \\ u_2 \partial_{22} u_2 + u_2 \partial_{23} u_2 \\ u_3 \partial_{32} u_2 + u_3 \partial_{33} u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} E_1^2 & E_1 E_2 & 0 \\ E_2 E_1 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} E_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, usando como apoyo el vector de Poynting para determinar la intensidad promedio en el tiempo de una interacción

$$I = \langle \vec{S} \rangle_t$$

El momento magnético definido por el mismo:

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k} \\ E_r & rE_\theta & E_z \\ B_r & rB_\theta & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{g} = (rE_\theta B_z - rB_\theta E_z)\hat{r} + (B_r E_z - E_r B_z)r\hat{\theta} + (rB_\theta E_r - rE_\theta B_r)\hat{k}$$

Bajo la suposición de que es válido el rotacional calculado y que

$$\sigma_{i,j}^{(0)} = 0$$

$$i = 1, 2, 3 = r, \theta, z$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\rho \begin{pmatrix} u_1 \partial_1 u_1 + u_1 \partial_2 u_2 + u_1 \partial_3 u_3 \\ u_2 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_2 + u_2 \partial_3 u_3 \\ u_3 \partial_1 u_1 + u_3 \partial_2 u_2 + u_3 \partial_3 u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho g \\ \rho g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_1 P \\ \partial_2 P \\ \partial_3 P \end{pmatrix} + \frac{4\rho}{3} \begin{pmatrix} u_1 \partial_{11} u_1 + u_1 \partial_{12} u_1 + u_1 \partial_{13} u_1 \\ u_2 \partial_{21} u_2 + u_2 \partial_{22} u_2 + u_2 \partial_{23} u_2 \\ u_3 \partial_{31} u_2 + u_3 \partial_{32} u_2 + u_3 \partial_{33} u_3 \end{pmatrix} \\
& = \partial_0 \begin{pmatrix} r E_\theta B_z \\ -r E_r B_z \\ r B_\theta E_r - r E_\theta B_r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De este arreglo matricial, como en el caso de la perturbación sin una fuente electromagnética tomamos a consideración dos ecuaciones diferenciales con las cuales se van a trabajar, cada una para las dos primeras hileras del sistema matricial:

$$\partial_0 r E_\theta B_z = -\rho u_1 \partial_1 u_1 - \rho u_1 \partial_2 u_2 - \rho u_1 \partial_3 u_3 + \rho g + \frac{4\rho}{3} u_1 \partial_{11} u_1 + \frac{4\rho}{3} u_1 \partial_{12} u_1 + \frac{4\rho}{3} u_1 \partial_{13} u_1$$

Considerando despreciable por su baja variabilidad el término:

$$\rho u_1 \partial_3 u_3 + \rho g + \frac{4\rho}{3} u_1 \partial_{13} u_1$$

Para el otro conjunto de variables será una ecuación como la siguiente:

$$\begin{aligned}
-\partial_0 r E_r B_z &= -\rho u_1 \partial_1 u_1 - \rho u_1 \partial_2 u_2 - \rho u_1 \partial_3 u_3 + \rho g + \rho \partial_{02} u_1 + \frac{4\rho}{3} u_2 \partial_{21} u_2 + \frac{4\rho}{3} u_2 \partial_{22} u_2 \\
&+ \frac{4\rho}{3} u_2 \partial_{23} u_2
\end{aligned}$$

Considerando despreciable por su baja variabilidad el término:

$$-\rho u_1 \partial_1 u_1 + \rho g + \rho \partial_{02} u_1 + \frac{4\rho}{3} u_2 \partial_{21} u_2$$

Expresando la primera ecuación en términos de sus variables cilíndricas, tenemos la versión completa:

$$\frac{4\rho}{3} u_1 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{4\rho}{3r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{\rho u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \rho u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} (r E_\theta B_z) = 0$$

Y después en términos de operadores para posteriormente definirla como una ecuación general de las EDs y poder conseguir una parametrización:

$$u u_{rr} + u_r \left( \frac{2u_\theta}{r} - \frac{3u_\theta}{4} \right) + \frac{u_{r\theta}}{r} - \frac{3}{4} u u_\theta = \partial_t (r E_\theta B_z)$$

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} u & -\frac{1}{2r} \\ -\frac{1}{2r} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4r^2} < 0$$

Entonces le corresponde una ecuación general de la forma:

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Debido a las cantidades que se pueden expresar en la función solución y sus valores, se puede expresar la ecuación en términos de operadores a través de la siguiente aproximación:

$$uu_{rr} - u_{\theta\theta} - \frac{3}{4r}uu_{\theta} - \frac{5}{4}uu_r = \partial_t(rE_{\theta}B_z) + \frac{u_{r\theta}}{r}$$

Del determinante podemos saber que la ecuación corresponde a una hipérbola, que podemos expresar, paso a paso, desde su expresión general a una particular que nos permita conocer los índices y valores para la excentricidad:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - C\left(y - \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 - AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$x_1 = a \sec(t)$$

$$y_1 = b \tan(t)$$

$$t \in [0, 2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Siendo los parámetros de amplitud de cada función paramétrica:

$$a = \frac{4C}{CD^2 - AE^2 - 4ACF}$$

$$b = \frac{4A}{CD^2 - AE^2 - 4ACF}$$

Donde los datos correspondientes a los coeficientes en el denominador, son dependientes de las variables, parámetros, tiempo, derivadas, siendo funciones de sistemas dinámicos que cambian con cada instante:

$$A = C = u$$

$$B = -\frac{1}{2r}$$

$$D = -\frac{5u}{4}$$

$$E = -\frac{3u}{4r}$$

$$F \approx \partial_t(rE_\theta B_z)$$

Para términos de la investigación y de las simulaciones, se tomará el caso con unidades dimensionadas a la unidad ( $r = 1, u = 1, \frac{\partial}{\partial t}(rE_\theta B_z) = 1$ ):

$$a = \frac{4u}{\frac{26}{16}u^2 - \frac{9}{16}\frac{u^3}{r^2} - 4u^2\frac{\partial}{\partial t}(rE_\theta B_z)} = \frac{4}{\frac{26}{16} - \frac{9}{16} + 4} = \frac{4(16)}{26 - 9 - 64} = \frac{64}{47}$$

$$b = \frac{4u}{\frac{25}{16}u^2 - \frac{9}{16}\frac{u^3}{r} - 4u^2\frac{\partial}{\partial t}(rE_\theta B_z)} = \frac{4}{\frac{26}{16} - \frac{9}{16} + 4} = \frac{4(16)}{26 - 9 - 64} = \frac{64}{47}$$

La ecuación diferencial formada por la segunda hilera de las matrices, nos genera otra ecuación en su forma general que nos permite crear una nueva parametrización con respecto a un par de variables donde la principal es otra:

$$u_\theta u_{\theta\theta} + u_\theta u_{\phi\phi} - \frac{3}{4}u_\theta u_\theta - \frac{3}{4}u_\theta u_\phi = -\frac{3}{4\rho}\partial_0(rE_r B_z)$$

Con su determinante correspondiente:

$$\det(z) = \begin{vmatrix} u_\theta & 0 \\ 0 & u_\theta \end{vmatrix} = (u_\theta)^2 > 0$$

Este determinante corresponde a una ecuación elíptica, donde su expresión en términos de operador diferencial es:

$$\left(u_{\theta\theta} - \frac{3}{4}u_\theta + \frac{9}{64}\right) + \left(u_{\phi\phi} - \frac{3}{4}u_\phi + \frac{9}{64}\right) = -\frac{3}{4\rho u_\theta}\partial_0(rE_r B_z) + \frac{18}{64}$$

$$\left(u_\theta - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(u_\phi - \frac{3}{8}\right)^2 = -\frac{3}{4\rho u_\theta}\partial_0(rE_r B_z) + \frac{9}{32}$$

Como una aproximación a los valores dimensionados a uno para la ecuación, se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas:



$$x_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3t}{8}\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3t}{8}\right)$$

Con estas cuatro ecuaciones paramétricas podemos establecer una ecuación de la forma del volumen que puede tener el gas sometido a una perturbación mecánica y electromagnética, considerando que la expresión predominante es la parte hiperbólica (debido a que la variación radial tiene mayor impacto que la angular para ciertas distancias de medición):

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

Se debe considerar que en realidad existen dos parámetros que manejan las curvas y su variación:

$$\left(\frac{64}{47} \tan(t)\right)^2 - \left(\frac{64}{47} \sec(t)\right)^2 \left(\frac{3}{32} \sin(\tau)\right)^2 - \left(\frac{3}{32} \cos(\tau)\right)^2 = 1$$

$$r = 1 - (\tan(t))^2 + \frac{2^{12}}{47^2} \frac{9}{2^{10}} (\sec(t))^2 (\sin(\tau))^2 - \frac{9}{1024} (\cos(\tau))^2$$

$$r = 1 - (\tan(t))^2 + \frac{36}{2209} (\sec(t))^2 (\sin(\tau))^2 - \frac{9}{1024} (\cos(\tau))^2$$

La solución a la versión de interacción luz-onda mecánica-onda acústica se encuentra evaluando las dos primeras ecuaciones de las filas del arreglo matricial, una de ellas dando prioridad a la variable temporal para que se tenga una ecuación útil para generar un sistema de control más adelante:

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3}{4} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{3\rho u}{4r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{3}{4\rho} \frac{\partial}{\partial t} (r E_\theta B_z)$$

Aplicando transformada de Laplace con respecto a la variable radial:

$$\frac{\Psi}{k^2} (k^2 \Psi - ku(0, t) - \dot{u}(0, t)) + 2\Psi (k\Psi - u(0, t)) - \frac{3\Psi}{4k^2} (k\Psi - u(0, t)) + k \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}_{r=0}$$

$$- \frac{3\Psi}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_\theta B_z)$$

Sin necesidad de resolver de forma explícita la ecuación electromagnética, se sabe que su solución para un haz colimado monocromático tiene una cierta ecuación de onda válida para distancias grandes ( $kr \gg 1$ ) que se describe como:

$$\vec{E} \rightarrow \hat{\theta} \frac{k^2}{r} A \sin \theta e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\vec{B} \rightarrow \hat{\phi} \frac{k^2}{cr} A \sin \theta e^{j(\omega t - kr)}$$

Si la fuente no tuviera suficiente estabilidad (pulsos de baja frecuencia) se puede tener el campo con una variación radial:

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \hat{\theta} \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Considerando estas expresiones del campo eléctrico, podemos tener una solución explícita de las ecuaciones obtenidas del arreglo matricial. Sin olvidar que las expresiones obtenidas tienen una dependencia única del campo eléctrico dadas las ecuaciones de Maxwell que permiten establecer el campo magnético como una dependencia del campo eléctrico, además que en el texto de Landau se aclara que los procesos electro acústicos y magneto acústico pueden ser descritos con similitud:

$$\frac{\Psi}{k^2} (k^2 \Psi - ku(0, t) - \dot{u}(0, t)) + 2\Psi(k\Psi - u(0, t)) - \frac{3\Psi}{4k^2} (k\Psi - u(0, t)) + k \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}_{r=0}$$

$$- \frac{3\Psi}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}\{k'^2 A \sin \theta e^{j(\omega t - k'r)} \cdot cte\})$$

$$\frac{\Psi}{k^2} (k^2 \Psi - ku(0, t) - \dot{u}(0, t)) + 2\Psi(k\Psi - u(0, t)) - \frac{3\Psi}{4k^2} (k\Psi - u(0, t)) + k \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}_{r=0}$$

$$- \frac{3\Psi}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{2}{k + jk'r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (k'^2 A \sin \theta e^{j(\omega t)} \cdot cte)$$

$$= \frac{2}{k + jk'r} \frac{j\omega k'^2 A \sin \theta e^{j(\omega t)} \cdot cte}{\rho}$$

Usando las condiciones de inicio mixtas:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

Evaluando dichas condiciones:

$$\psi^2 + 2k\psi^2 - \frac{3\psi^2}{4k} + k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{3\psi}{4} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{2}{k + jmr} \omega m^2 A_{max} \sin \theta e^{j(\omega t)}$$

Agrupando términos:

$$\psi^2 \left( 1 + 2k - \frac{3}{4k} \right) + \left( k\psi - \frac{3}{4} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{2}{k + jmr} j\omega m^2 A_{max} \sin \theta e^{j(\omega t)}$$

$$\psi^2 \left( \frac{4k + 8k^2 - 3}{4k} \right) + \left( \frac{k\psi - 3}{4} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{2}{k + jmr} \omega m^2 A_{max} \sin \theta e^{j(\omega t)}$$

Aplicando separación de variable para el ángulo, se obtiene la ecuación integral:

$$\psi^2 \left( \frac{4k + 8k^2 - 3}{4k} \right) \int_0^{2\pi} \partial \theta + \left( \frac{k\psi - 3}{4} \right) \int_0^{2\pi} \partial \psi = \frac{2}{k + jmr} \omega m^2 A_{max} e^{j(\omega t)} \int_0^{\pi} \sin \theta \partial \theta$$

$$\psi^2 \left( \frac{4k + 8k^2 - 3}{4k} \right) 2\pi + \left( \frac{k\psi - 3}{4} \right) (a - a) = \frac{2}{k + jmr} \omega m^2 A_{max} e^{j(\omega t)} (-(-1 - 1))$$

$$\psi^2 \left( \frac{4k + 8k^2 - 3}{4k} \right) 2\pi = \frac{2}{k + jmr} \omega m^2 A_{max} e^{j(\omega t)}$$

Ahora, para la solución de la ecuación generada por la segunda fila de cada una de las matrices del tensor, se tiene una expresión de la forma:

$$\begin{aligned} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_2}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_2}{r \sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \phi} - \frac{1}{rg} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{4u_2}{3r} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{4u_2}{3r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \frac{4u_2}{3r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial \phi} \\ = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (rE_r B_z) \end{aligned}$$

Para esta ecuación se pretende buscar una ecuación que tiene una variación en decaída para el ángulo azimutal, debido a su relación con el efecto de la gravedad en un fluido real. Con esto, se puede llegar a la idea de una función solución como un producto de dos expresiones:

$$u_2 = u_3 = f(\theta) e^{-\alpha \phi}$$

Con esto, se pueden evaluar las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (f(\theta) e^{-\alpha \phi}) = e^{-\alpha \phi} \frac{df}{d\theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} (f(\theta)e^{-a\phi}) = -af(\theta)e^{-a\phi} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( e^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} \right) = e^{-a\phi} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left( e^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} \right) = -ae^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} + 0\end{aligned}$$

El resultado de estas expresiones se sustituye en la ecuación diferencial para generar otra que sea solo dependiente del ángulo polar:

$$\begin{aligned}u_2 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_2}{r} e^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} + \frac{u_2}{r \sin \theta} (-af(\theta)e^{-a\phi}) - \frac{4u_2}{3r} (0) - \frac{4u_2}{3r^2} e^{-a\phi} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \\ - \frac{4u_2}{3r^2 \sin \theta} \left( -ae^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left( rct e \cdot \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right) = 0 \\ (f(\theta)e^{-a\phi})(e^{-a\phi}) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} (f(\theta)e^{-a\phi}) \left( e^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} (f(\theta)e^{-a\phi}) (-af(\theta)e^{-a\phi}) \\ - \frac{4}{3r^2} (f(\theta)e^{-a\phi}) \left( e^{-a\phi} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right) - \frac{4}{3r^2 \sin \theta} (f(\theta)e^{-a\phi}) \left( -ae^{-a\phi} \frac{df}{d\theta} \right) = 0\end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $e^{-2a\phi}$ :

$$f \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{f}{r} \frac{df}{d\theta} - \frac{a}{r \sin \theta} f^2 - \frac{4}{3r^2} f \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{4a}{3r^2 \sin \theta} f \frac{df}{d\theta} = 0$$

Resolviendo la ecuación para ángulos pequeños:

$$f \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{f}{r} \frac{df}{d\theta} - \frac{a}{r\theta} f^2 - \frac{4}{3r^2} f \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{4a}{3r^2 \theta} f \frac{df}{d\theta} = 0$$

Aplicando transformada de Laplace para la variable angular polar:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left\{ f\theta \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{f}{r} \theta \frac{df}{d\theta} - \frac{a}{r} f^2 - \frac{4\theta}{3r^2} f \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{4a}{3r^2} f \frac{df}{d\theta} \right\} = \mathcal{L}\{0\} \\ \frac{F}{s^2} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{F}{s^2} (sF(s) - f(0)) - \frac{a}{r} F^2 - \frac{4}{3r^2} \frac{F}{s^2} (s^2 F - sf(0) - f'(0)) \\ + \frac{4a}{3r^2} F (sF(s) - f(0)) = 0\end{aligned}$$

Con las condiciones de inicio siguientes:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

Y evaluando en la ecuación:

$$\frac{F}{s^2} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{F^2}{s} - \frac{1}{rs^2} - \frac{a}{r} F^2 - \frac{4}{3r^2} F^2 + \frac{4}{3r^2} \frac{1}{s} + \frac{4a}{3r^2} s F^2 - \frac{4a}{3r^2} F = 0$$

Dividiendo la ecuación por  $F$ , además de hacer la aproximación de que cada estado posible  $s$  es mucho mayor que 1:

$$\frac{1}{s^2} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{F}{s} - \frac{a}{r} F - \frac{4}{3r^2} F + \frac{4a}{3r^2} s F - \frac{4a}{3r^2} = 0$$

Reorganizando términos:

$$F \left( \frac{1}{rs} - \frac{a}{r} - \frac{4}{3r^2} + \frac{4a}{3r^2} s \right) + \frac{u_r}{s^2} - \frac{4a}{3r^2} = 0$$

$$\frac{F}{r} \left( a_1 s - \frac{1}{s} - a_2 \right) + \frac{u_r}{s^2} - \frac{4a}{3r^2} = 0$$

Donde las constantes renombradas son:

$$a_1 = \frac{4a}{3r}$$

$$a_2 = -a - \frac{4}{3r}$$

Entonces se puede igualar a  $F$  y finalmente despejar:

$$\frac{F}{r} \left( a_1 s - \frac{1}{s} - a_2 \right) = -\frac{u_r}{s^2} + \frac{4a}{3r^2}$$

$$F \left( \frac{a_1 s^2 - a_2 s - 1}{s} \right) = -r \left( \frac{u_r}{s^2} + \frac{4a}{3r^2} \right)$$

$$F = -r \left( \frac{s}{a_1 s^2 - a_2 s - 1} \right) \left( \frac{3r^2 u_r + 4a s^2}{3r^2 s^2} \right) = -\frac{r}{3r^2 s} \left( \frac{3r^2 u_r + 4a s^2}{a_1 s^2 - a_2 s - 1} \right)$$

#### 7.4. Integral de Itô

Consideremos que, en un fenómeno físico, los elementos no controlados o no esperados, son el ruido del sistema, existe de diferentes tipos, aunque más adelante se aclaran cuáles son, como se generan y como se caracterizan. Dentro de los tipos de ruido más común en un pulso acústico (no en audio digital) tenemos al ruido blanco y el ruido de Brown. Por ello hay un punto en que la ecuación diferencial toma elementos que son parecidos al ruido, por lo que se requieren elementos específicos para resolverla considerándolo como un proceso estocástico. En general consideremos un elemento simple en el cual hay un solo factor de ruido:

$$\frac{dN}{dt} = (r(t) + \text{"ruido"})N(t)$$

O de manera más general, una expresión de la forma:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{"ruido"}$$

Sin olvidar que  $X_t$  es una variación de  $X$  para un diferente instante en el tiempo, con lo cual ambos están correlacionados en parámetro temporal, y los elementos  $b(t, X_t)$ ,  $\sigma(t, X_t)$  son funciones cualesquiera. Concentrémonos en el caso en que el ruido es unidimensional. Es lógico pensar en un proceso estocástico  $W_t$  que represente el término de ruido, de manera tal que:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

Considerando las posibilidades, tiene sentido considerar los siguientes casos:

- i)  $t_1 \neq t_2$ , por lo cual los elementos  $W_{t_1}$  y  $W_{t_2}$  son independientes.
- ii)  $\{W_t\}$  es un proceso estacionario, es decir, la distribución conjunta de  $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$  no depende de  $t$ .
- iii)  $E[W_t] = 0$  para cualquier valor de  $t$ .

Es posible representar a  $W_t$  como un proceso estocástico generalizado llamado proceso de ruido blanco. Que sea generalizado implica que puede ser construido como una medida de probabilidad del espacio  $S'$  en las distribuciones templadas en  $[0, \infty)$ , y

no como una medida de probabilidad del espacio mucho menor  $\mathbf{R}^{(0,\infty)}$ , como puede ser un proceso ordinario.

Sean  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$  y consideremos una versión en valor discreto de la ecuación diferencial para un proceso con ruido:

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k) \cdot W_k \Delta t_k$$

Donde consideramos ciertos procesos en el tiempo como una correlación de instantes de tiempo, con una línea temporal simple:

$$X_j = X(t_j)$$

$$W_k = W_{t_k}$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

Cambiamos la notación de  $W_k$ , de manera que  $W_k \Delta t_k$  cambia por  $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$ . Los casos supuestos como propiedades del proceso estocástico, lo cual implica que  $V_t$  debe tener incrementos independientes estacionarios y con una media de cero. Entonces, si ponemos  $V_t = B_t$  en la ecuación discreta:

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

Consideremos que tenemos una cantidad muy grande de posibles estados del sistema, lo cual implica que tenemos una cantidad grande de variaciones en el ruido, nos aproxima a una expresión integral de un proceso estocástico:

$$X_t = X_0 + \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + " \int_0^t \sigma(s, X_s) ds "$$

## 7.5. Algoritmo de control

En cuanto a las deformaciones que puede sufrir un sistema físico, se tiene la expresión generalizada conocida como Tensor de Deformaciones (en inglés se conoce como shear-strain-stress tensor) que mide cualquier tipo de deformación en un sistema ya sea fluido o sólido, con lo cual incluye compresiones, elongaciones, torsión, fractura

y vibraciones dentro del cuerpo. En ciertos cuerpos puede también considerar los cambios de presión. Este tensor se expresa de forma general como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{61} & \cdots & C_{66} \end{pmatrix}$$

Y en su expresión relativa con respecto a un determinado campo eléctrico (dado que el campo magnético queda expresado en términos de este):

$$\sigma_{ij} = \tilde{F}\delta_{ik} + \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} \right)_{TE} + \frac{E_i D_k}{4\pi}$$

En un cuerpo anisótropo se representa como ya se había aclarado con anterioridad:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \frac{(2\epsilon + a_1)E_i E_j}{8\pi} - \frac{(\epsilon + a_2)E^2 \delta_{ij}}{8\pi}$$

Para esta ecuación, el tensor de formaciones iniciales se expresa con ceros para el caso de estudio, pero eso implica que cada  $C_{\alpha\beta}$  es inexistente, dicho de otra forma, la forma que tiene el cuerpo en un inicio se considera su estado natural y sin deformación alguna:

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}$$

Al mismo tiempo, considerando que la ley de Hooke mide compresiones y elongaciones en sistemas físicos, este es una versión simplificada del tensor de deformaciones, que puede expresarse en términos de derivadas tensoriales como:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \epsilon_{xx} \partial \epsilon_{yy}} = C_{12} = C_{21}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \epsilon_{xx} \partial \epsilon_{zz}} = C_{13} = C_{31} = \cdots = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{xy}} = C_{46} = C_{64}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{xz}} = C_{56} = C_{65}$$

Donde la función  $u_0$  representa la función de densidad de energía de compresión. También hay ciertas expresiones de interés para el desarrollo del tensor con todos los



elementos importantes para su uso:  $N$ , fuerza de tensión,  $Q$ , fuerza de shear,  $M$ , momento de bending,  $K$ , coeficiente de expansión térmica. En un sistema real, hay múltiples expresiones que nos determinan cual es la velocidad del sonido en una perturbación acústica: deformación mecánica, variación debido a la temperatura y la deformación debido a sus propiedades elásticas:

$$u = u_m + u_t + u_b$$

Cada término se expresa como se indica a continuación:

$$u_m = \iint \frac{Gh}{1-\nu} [(\epsilon_{xx}^0)^2 + (\epsilon_{yy}^0)^2 + 2\nu\epsilon_{xx}^0\epsilon_{yy}^0 + 2(1-\nu)(\epsilon_{yy}^0)^2] \alpha\beta dx dy$$

$$u_t = - \iint \frac{Yh}{1-\nu^2} \left[ (\epsilon_{xx}^0 + \epsilon_{yy}^0)T^0 - \left( \frac{k_{xx}}{\alpha^2} + \frac{k_{yy}}{\beta^2} \right) \frac{h^2 T^1}{12} \right] \alpha\beta dx dy$$

$$u_b = \iint \frac{Gh^3}{12(1-\nu)} \left[ \left( \frac{k_{xx}}{\alpha^2} \right)^2 + \left( \frac{k_{yy}}{\beta^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{k_{xx}}{\alpha^2} \right) \left( \frac{k_{yy}}{\beta^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{k_{xy}}{\alpha\beta} \right)^2 \right] \alpha\beta dx dy$$

Dentro de estas expresiones aparecen los términos del coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) y los coeficientes de rigidez y de compresibilidad, que de forma correspondiente son:

$$G = \frac{Y}{2(1-\nu)}$$

$$k = \frac{Y}{3(1-2\nu)} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

Para la expresión de la velocidad de perturbación debido a la temperatura, se puede expresar en términos matriciales y además como una expresión diferencial:

$$\sigma_{ij} = - \frac{\partial_{ij} u_t}{\Delta x \Delta y \Delta z} = - \frac{Yh}{1-\nu^2} \left[ (\epsilon_{xx}^0 + \epsilon_{yy}^0)T^0 - \left( \frac{k_{xx}}{\alpha^2} + \frac{k_{yy}}{\beta^2} \right) \frac{h^2 T^1}{12} \right] \alpha\beta$$

$$\sigma_{ij} = - \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{13} \\ \partial_{21} & \partial_{22} & \partial_{23} \\ \partial_{31} & \partial_{32} & \partial_{33} \end{pmatrix} \frac{Yh}{1-\nu^2} \left[ \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} + (\epsilon_{33} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{11})^T \right] T^0 \alpha\beta$$

$$+ \frac{Yh}{\alpha^2(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{13} \\ \partial_{21} & \partial_{22} & \partial_{23} \\ \partial_{31} & \partial_{32} & \partial_{33} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta^2} (k_{33} \quad k_{22} \quad k_{11})^T \right] \frac{h^2 T^1}{12} \alpha\beta$$

Como se ha expresado anteriormente, la parte electromagnética también tiene una expresión en términos matriciales que ya se ha especificado. Con todo lo descrito se puede construir una ecuación de deformación válida para todo tipo de perturbación dentro de un fenómeno fotoacústico, que involucra todos los términos matriciales correspondientes al tensor original en una versión simplificada con una densidad variable en el tiempo, relacionada con la viscosidad,  $\mu = \rho(t)v$ :

$$\begin{aligned} \rho D_t u_i + \rho \partial_i P + \rho f_i - \mu \left( \partial_{ij} u_i + \frac{1}{3} \partial_{ji} u_j \right) - \left( \frac{Y}{1 - v^2} \right) \partial_{ij} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) T^0 \alpha \beta \\ + \left( \frac{Y}{1 - v^2} \right) \frac{\partial_{ij} (k_{ii} + k_{jj}) h^2 T}{\alpha^2 \beta^2} \frac{1}{12} \alpha \beta + \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi} E_i E_j - \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi} E_i^2 \delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones en sus versiones previas se han estado resolviendo para sus dos variables, ya sea radio y tiempo, o cada variable angular. En este caso, se da prioridad a la variable temporal para tener un modelo estocástico puro y que a su vez nos pueda dar una ecuación de transferencia para el sistema de control. Partiendo de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_i} &= \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx_i} \\ \frac{d^2 f}{dx_i^2} &= \frac{d^2 f}{dg^2} \left( \frac{dg}{dx_i} \right)^2 + \frac{df}{dg} \frac{d^2 g}{dx_i^2} \end{aligned}$$

De forma general, se puede tener una expresión válida para el sistema tensorial con cada elemento como una función del tiempo, para poder generar un sistema que pueda ser expresado como una expresión para un sistema de control a través de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i}{x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\rho}{x_i} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho f_i - \mu \left( \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \\ - \left( \frac{Y}{1 - v^2} \right) \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) T^0 \alpha \beta \\ + \left( \frac{Y}{1 - v^2} \right) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj}) h^2 T}{\beta^2} \frac{1}{12} \alpha \beta + \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi} E_i E_j \\ - \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi} E_i^2 \delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

La mayoría de los controladores de audio de alta calidad para procesado de ruido en sistemas digitales para audífonos, estudios de grabación y micrófonos son costosos (están protegidos por leyes de derechos de autor), además que se basan en un sistema de filtrado de varias etapas, con controladores múltiples que analizan a prueba y error cual es la calidad del audio. Y aunque funcionan con un margen de unas pocas décimas de milisegundos imperceptibles para la mayoría de los usuarios, generan un corrimiento en las señales de audio.

Estos corrimientos muchas veces son corregidos a base de experiencia por parte de editores de música y especialistas en programación, ya que cada etapa del proceso completo tiene este problema.

Con el constante aprovechamiento del efecto fotoacústico en otras áreas, como la medicina, la biología y ciencias de los materiales, se vuelve importante evitar el corrimiento de tiempo de un proceso en sistemas donde milésimas de segundo corresponden a márgenes de tiempo equivalentes al fenómeno en sí.

Teniendo conocimiento del orden de magnitud de deformaciones, compresiones y torsiones debido a un pulso electromagnético en un sistema, conociendo las propiedades del pulso, podemos generar sistemas de mayor precisión en manipulación de nano estructuras en ciencias de materiales para el diseño de experimentos con compuestos semi metálicos o con microorganismos.

La densidad del aire para cada instante  $t_i$  depende de la dispersión de las moléculas en ese instante, y de igual manera la viscosidad, por ello son funciones dependientes del tiempo, partiendo de su temperatura base que se toma como 20 °C. la mayoría de los elementos de esta ecuación varían con el tiempo, algunos de forma no lineal y otros de manera cíclica como el campo magnético del láser pulsado.

Al considerarse un sistema estocástico, todas las variables espaciales son interdependientes por lo que una solución analítica precisa requiere que se resuelvan varias ecuaciones de forma simultánea y por eso se recurre a considerarla un sistema general de variables desconocidas.

Como una forma de adelantar la ecuación para el sistema de control, se redefinen las funciones:

$$\begin{aligned}u_i &= x_1 \\ \dot{u}_i &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{u}_i &= \dot{x}_2\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\rho \left( x_2 + \frac{x_1}{\dot{x}_i} x_2 \right) + \frac{\rho}{\dot{x}_i} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho f_i - \mu \left( \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \dot{x}_2 + \frac{1}{3} \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \dot{x}_2 \right) - \left( \frac{Y}{1-v^2} \right) \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) T^0 \alpha \beta \\ + \left( \frac{Y}{1-v^2} \right) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj}) h^2 T}{\beta^2} \alpha \beta + \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi} E_i E_j \\ - \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi} E_i^2 \delta_{ij} = 0\end{aligned}$$

Renombrando también las derivadas de índice variable para evitar lidiar con varias derivadas al momento de calcular la transformada:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \theta_1 \\ \dot{x}_j &= \theta_2\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\rho \left( x_2 + \frac{x_1}{\theta_1} x_2 \right) + \frac{\rho}{\theta_1} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho f_i - \mu \left( \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \dot{x}_2 + \frac{1}{3} \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \dot{x}_2 \right) - \left( \frac{Y}{1-v^2} \right) \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) T^0 \alpha \beta \\ + \left( \frac{Y}{1-v^2} \right) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj}) h^2 T}{\beta^2} \alpha \beta + \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi} E_i E_j \\ - \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi} E_i^2 \delta_{ij} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho \left( x_2 + \frac{x_1}{\theta_1} x_2 \right) + \frac{\rho}{\theta_1} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho f_i - \frac{4\mu}{3} \frac{\dot{x}_2}{\theta_1 \theta_2} - \left( \frac{Y}{1-v^2} \right) \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) T^0 \alpha \beta \\ + \left( \frac{Y}{1-v^2} \right) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj}) h^2 T}{\beta^2} \alpha \beta + \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi} E_i E_j \\ - \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi} E_i^2 \delta_{ij} = 0\end{aligned}$$

Para simplificar la ecuación diferencial se renombran las constantes que aparecen:

$$A = \left( \frac{Y}{1 - \nu^2} \right) T^0$$

$$B = \left( \frac{Y}{1 - \nu^2} \right) \frac{h^2 T}{12}$$

$$C = \frac{(2\epsilon_0 - a_1)}{8\pi}$$

$$D = \frac{(\epsilon_0 - a_2)}{8\pi}$$

Y se sustituyen los valores en las expresiones previas a las transformadas:

$$\rho \left( x_2 + \frac{x_1}{\theta_1} x_2 \right) + \frac{\rho}{\theta_1} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho f_i - \frac{4\mu}{3} \frac{\dot{x}_2}{\theta_1 \theta_2} - \frac{A}{\theta_1 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) \alpha \beta$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2} \frac{B}{\theta_1 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj})}{\beta^2} \alpha \beta + C E_i E_j - D E_i^2 \delta_{ij} = 0$$

Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial para establecer una función de transferencia y también para resolver el sistema. Con condiciones de inicio:

$$P(0) = P_0$$

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = a_1 c_1; a_1 \ll 1$$

La transformada de Laplace nos devuelve una ecuación de la siguiente forma:

$$R \left( X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1} \right) + \frac{R}{\phi_1} (sQ - P(0)) + Rg - \frac{4M}{3} \frac{(sX_2 - x_2(0))}{\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}) \alpha \beta \right\}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2} \frac{B}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj})}{\beta^2} \alpha \beta \right\} + C \mathcal{L} \{ E_i E_j \} - D \mathcal{L} \{ E_i^2 \delta_{ij} \} = 0$$

Ciertos elementos de la ecuación diferencial se simplifican renombrándolos. Son valores que se mantienen constante o con variaciones despreciables, también otros que se pueden aproximar por su valor máximo o mínimo (elongaciones y compresiones de la placa,  $k_{ii,max} = k_{jj,max} = -\epsilon_{ii,max} = -\epsilon_{jj,max}$ ). Existen las aproximaciones para campo eléctrico de un láser. Se sustituyen los elementos en la transformada de Laplace que está expresada de forma implícita:

$$\vec{E} \rightarrow \hat{\theta} \frac{k^2}{r} A \sin \theta e^{j(\omega t - kr)}$$

Y sustituyendo:

$$\begin{aligned}
R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P(0)) + Rg - \frac{4M}{3} \frac{(sX_2 - x_2(0))}{\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj})\alpha\beta\right\} \\
+ \frac{1}{\alpha^2} \frac{B}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj})}{\beta^2} \alpha\beta\right\} + C\mathcal{L}\left\{\left(\frac{k^2}{r} A \sin \theta e^{j(\omega t - kr)}\right)^2\right\} \\
- D\mathcal{L}\left\{\left(\frac{k^2}{r} A \sin \theta e^{j(\omega t - kr)}\right)^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P(0)) + Rg - \frac{4M}{3} \frac{(sX_2 - x_2(0))}{\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj})\alpha\beta\right\} \\
+ \frac{1}{\alpha^2} \frac{B}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(k_{ii} + k_{jj})}{\beta^2} \alpha\beta\right\} + (C - D)\mathcal{L}\left\{\frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{2j(\omega t - kr)}\right\} = 0
\end{aligned}$$

Se evalúa la transformada de Laplace para el termino correspondiente al campo eléctrico y se aplican las condiciones de inicio que se dejaron pendiente:

$$\begin{aligned}
R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg - \frac{4M}{3} \frac{(sX_2 - a_1 c_1)}{\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj})\right\} \\
+ \frac{B}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(k_{ii} + k_{jj})\right\} + (C - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega} = 0
\end{aligned}$$

Como una aproximación a la resolución del sistema, se debe considerar que las compresiones debidas al haz laser ( $\epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}$ ) como las elongaciones ( $k_{ii} + k_{jj}$ ) ocurren a una alta velocidad, por lo tal se toman como medida los valores promedios en un cierto lapso de unos cuantos segundos, entonces son constantes en el tiempo. Podemos considerar al menos para efectos prácticos del experimento, que la máxima contracción será igual a la máxima elongación ( $k_{ii,max} = k_{jj,max} = -\epsilon_{ii,max} = -\epsilon_{jj,max}$ ), por consiguiente, el valor promedio está relacionado:

$$\langle \epsilon_{ii} \rangle_t = \frac{\epsilon_{ii}^{(T)} - \epsilon_{ii}^{(0)}}{T - t_0} = \frac{\epsilon_{ii}^{(T)} - 0}{t - 0}$$

Esto se puede sustituir en la ecuación que había quedado pendiente, para posteriormente evaluar la transformada de esa sección, aproximando dicho valor como una delta de Dirac:

$$R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg - \frac{4M(sX_2 - a_1 c_1)}{3\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\epsilon_{ii}^{(T)}}{t}\right)\right\} \\ + \frac{B}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\epsilon_{ii}^{(T)}}{t}\right)\right\} + (C - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega} = 0$$

$$R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg - \frac{4M(sX_2 - a_1 c_1)}{3\phi_1 \phi_2} - \frac{A\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{-\frac{2}{t^3}\right\} - \frac{B\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L}\left\{-\frac{2}{t^3}\right\} \\ + (C - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega} = 0$$

$$R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg - \frac{4M(sX_2 - a_1 c_1)}{3\phi_1 \phi_2} + 2\left(\frac{A\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2} + \frac{B\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2}\right) \mathcal{L}\{\delta(t)\} + (C \\ - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-2jkr}}{s - 2j\omega} = 0$$

$$R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg - \frac{4M(sX_2 - a_1 c_1)}{3\phi_1 \phi_2} + 2\left(\frac{A\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2} + \frac{B\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2}\right) + (C \\ - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-2jkr}}{s - 2j\omega} \frac{s + 2j\omega}{s + 2j\omega} = 0$$

$$R\left(X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1}\right) + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg - \frac{4M(sX_2 - a_1 c_1)}{3\phi_1 \phi_2} + 2\left(\frac{A\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2} + \frac{B\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2}\right) + (C \\ - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-2jkr}(s + 2j\omega)}{s^2 - 4\omega^2} = 0$$

Reorganizando términos con factorizaciones de elementos en común:

$$X_1 R \frac{X_2}{\phi_1} + X_2 \left(R - \frac{4M}{3} \frac{s}{\phi_1 \phi_2}\right) + 2\left(\frac{A\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2} + \frac{B\epsilon_{ii}^{(T)}}{\phi_1 \phi_2}\right) + D_2 \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-2jkr}(s + 2j\omega)}{s^2 - 4\omega^2} \\ + \frac{R}{\phi_1}(sQ - P_0) + Rg + \frac{4M}{3} \frac{a_1 c_1}{\phi_1 \phi_2} = 0$$

$$X_1 R \frac{X_2(s)}{\phi_1} + X_2 \left( R - \frac{4M}{3} \frac{s}{\phi_1 \phi_2} \right) + \frac{2\epsilon_{ii}^{(T)} D_3}{\phi_1 \phi_2} + D_2 \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-2jkr}(s+2j\omega)}{s^2 - 4\omega^2} + \frac{R}{\phi_1} (sQ - P_0) + Rg + \frac{4M}{3} \frac{a_1 c_1}{\phi_1 \phi_2} = 0$$

$$\begin{aligned} X_1 R \frac{X_2}{\phi_1} + X_2 \left( R - \frac{4M}{3} \frac{s}{\phi_1 \phi_2} \right) \\ = - \frac{2\epsilon_{ii}^{(T)} D_3}{\phi_1 \phi_2} - D_2 \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta \frac{e^{-2jkr}(s+2j\omega)}{s^2 - 4\omega^2} + \frac{R}{\phi_1} (P_0 - sQ) - Rg \\ - \frac{4M}{3} \frac{a_1 c_1}{\phi_1 \phi_2} \end{aligned}$$

Con las siguientes condiciones de inicio:

$$P(0) = 0 = x_1(0) = x_2(0) \\ a_1 \ll 1$$

Siendo  $a_1 c_1$  la velocidad del sonido en cada tiempo  $t$ , multiplicado por un factor de dimensión debido al aporte de esta con respecto a la velocidad de la perturbación. Para las deformaciones podemos aproximar que están dadas todas en términos de la variación de cada tiempo y el periodo total del análisis de datos:

$$\langle \epsilon_{ii} \rangle_t = \frac{\epsilon_{ii}^{(T)} - \epsilon_{ii}^{(0)}}{T - t_0} = \frac{\epsilon_{ii}^{(T)} - 0}{t - 0}$$

Con lo cual la ecuación toma esta expresión

$$\begin{aligned} R \left( X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1} \right) + \frac{R}{\phi_1} sQ + Rg - \frac{4M}{3} \frac{sX_2}{\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\epsilon_{ii}^{(T)}}{t} \right) \right\} + \frac{B}{\phi_1 \phi_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -\frac{\epsilon_{ii}^{(T)}}{t} \right) \right\} \\ + (C - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega} = 0 \end{aligned}$$

Y el factor  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\epsilon_{ii}^{(T)}}{t} \right)$  se aproxima como una delta de Dirac.

$$\begin{aligned} R \left( X_2 + \frac{X_1 X_2}{\phi_1} \right) + \frac{R}{\phi_1} sQ + Rg - \frac{4M}{3} \frac{sX_2}{\phi_1 \phi_2} - \frac{A}{\phi_1 \phi_2} + \frac{B}{\phi_1 \phi_2} + (C \\ - D) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega} = 0 \end{aligned}$$



Considerando esto y realizando el algebra para el despeje de las ecuaciones, además de los valores redimensionados  $\phi_1 = \phi_2 = 1$ ,  $A = B$ , se llega a la función de transferencia:

$$RX_2(X_1 + 1) + sRQ + Rg - \frac{4M}{3}sX_2 = (D - C) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega}$$

$$X_2 \left\{ R(X_1 + 1) - \frac{4M}{3}s \right\} + R(sQ + g) = (D - C) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr} \frac{1}{s - 2j\omega} = \frac{e(s)}{s - 2j\omega}$$

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{R(sQ + g)}{\frac{4M}{3}s - R(X_1 + 1)} + \frac{1}{(s - 2j\omega) \left( R(X_1 + 1) - \frac{4M}{3}s \right)}$$

Para los parámetros aun no definidos, se tiene que estos son:

- $e(s) = (D - C) \frac{k^4}{r^2} A^2 \sin^2 \theta e^{-2jkr}$
- $Q$ , la transformada de la presión para cada tiempo
- $k = \frac{\omega'^2}{c^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , número de onda expresado en términos de la longitud de onda del laser
- $M = \mathcal{L}\{\varepsilon \rho_0^\gamma \exp(-\gamma \alpha t)\} = \frac{\varepsilon \rho_0^\gamma}{s + \gamma \alpha}$
- $R = \rho_0 \exp(-\alpha t) = \frac{\rho_0^\gamma}{s + \gamma \alpha}$
- $\rho_0$ , densidad del aire a 20 °C
- $\gamma \approx 1.43$ , coeficiente adiabático para el aire
- $\phi_1$ , amplitud máxima de la señal eléctrica para cada tiempo
- $\phi_2$ , amplitud mínima de la señal eléctrica para cada tiempo

Las velocidades de sonido para los componentes angulares se pueden considerar como constantes bajo ciertas características experimentales, estos valores se pueden aproximar por caracterización de un conjunto de señales digitales de ruido de fondo grabadas en diferentes condiciones:

$$\phi_1, \phi_2 = \text{constante}$$

Para un primer sistema de análisis de ruido, algunos parámetros se pueden considerar como adimensionales:

$$\epsilon_0 - a_1 + a_2 = 1$$

El factor de condiciones iniciales se puede eliminar de la función de transferencia considerando que, en lugar de tener una retroalimentación, se tiene una señal de referencia con la cual se contrastan los datos registrados. También se deben recuperar los términos que implican transformadas de Laplace de términos no correspondientes al ruido, sino a los parámetros físicos del aire:

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{\frac{\rho_0^\gamma}{s + \gamma\alpha}(sQ + g)}{\frac{4}{3} \frac{\epsilon\rho_0^\gamma}{s + \gamma\alpha} s - \frac{\rho_0^\gamma}{s + \gamma\alpha}(X_1 + 1)} + \frac{1}{(s - 2j\omega) \left( \frac{\rho_0^\gamma}{s + \gamma\alpha}(X_1 + 1) - \frac{4}{3} \frac{\epsilon\rho_0^\gamma}{s + \gamma\alpha} s \right)}$$

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{\frac{\rho_0^\gamma(sQ + g)}{s + \gamma\alpha}}{\frac{4\epsilon\rho_0^\gamma s - \rho_0^\gamma(X_1 + 1)}{3(s + \gamma\alpha)}} + \frac{1}{(s - 2j\omega) \frac{\rho_0^\gamma s \rho_0^\gamma(X_1 + 1) - 4\epsilon\rho_0^\gamma s}{3(s + \gamma\alpha)}}$$

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{\frac{\rho_0^\gamma(sQ + g)}{s + \gamma\alpha} + 1}{\frac{(s - 2j\omega) (4\epsilon\rho_0^\gamma s - \rho_0^\gamma(X_1 + 1))}{3(s + \gamma\alpha)}} = \frac{\frac{\rho_0^\gamma(sQ + g) + (s + \gamma\alpha)}{s + \gamma\alpha}}{\frac{(s - 2j\omega) (4\epsilon\rho_0^\gamma s - \rho_0^\gamma(X_1 + 1))}{3(s + \gamma\alpha)}}$$

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = 3 \frac{\rho_0^\gamma(sQ + g) + (s + \gamma\alpha)}{(s - 2j\omega) (4\epsilon\rho_0^\gamma s - \rho_0^\gamma(X_1 + 1))} = 3 \frac{s(\rho_0^\gamma Q + 1) + (\rho_0^\gamma + g + \gamma\alpha)}{\rho_0^\gamma(s - 2j\omega)(4\epsilon s - (X_1 + 1))}$$

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{3}{\rho_0^\gamma} \frac{sk_1 + k_2}{(s - 2j\omega)(4\epsilon s - (X_1 + 1))}$$

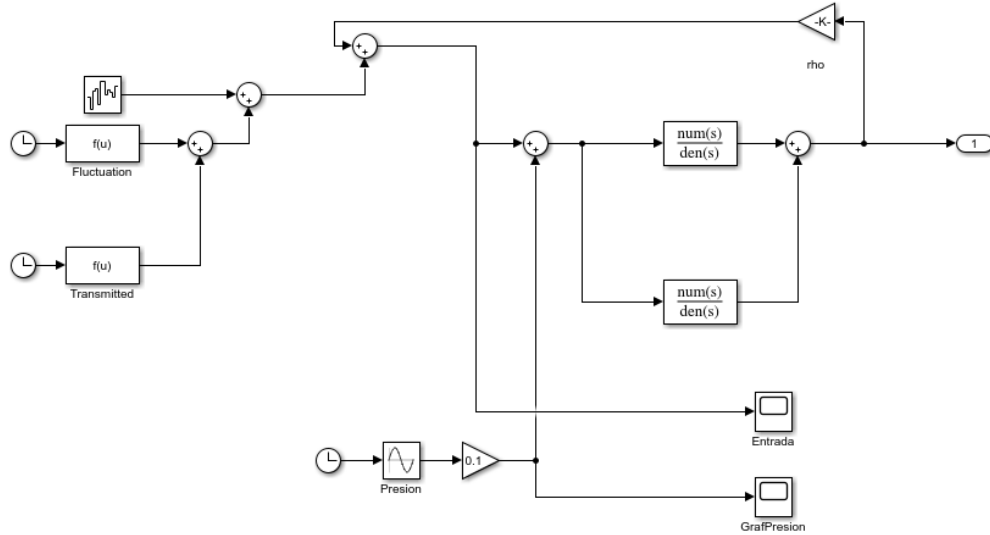


Figura 7.1. Diagrama de flujo de Simulink del sistema de control.

La función de transferencia se dividió en dos, ya que una de estas tiene un elemento de multiplicación de la presión que varía como un dato de entrada (representado como una función senoidal). También se toma en cuenta el valor que aparece al principio de la función de transferencia se toma como una ganancia del sistema. Este retroalimentado, pero se van a graficar varios elementos dentro del sistema de control. Se quieren conocer la diferencia entre señales de entrada y de salida del proceso.

El diagrama mostrado es solo una primera aproximación del sistema final, ya que se pretende tener en el prototipo un sistema inteligente con retroalimentación de elementos externos, además de un procesamiento del ruido por varias etapas. Es decir, una entrada con varias salidas.

## CAPÍTULO 8

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

#### 8.1. Solución dinámica

La solución final para el pulso acústico bajo diferentes condiciones con varios modelos, está dada por la superposición lineal de todas las respuestas obtenidas considerando incluso un margen de error para otros métodos de solución no usados. Estas posibles soluciones solo representan el desplazamiento del frente de onda del conjunto de ondas por cada segundo. La presión, temperatura, velocidad y energía se calculan a través de estos elementos. Los parámetros en las soluciones se muestran de forma explícita para algunos pocos casos y como constantes mudas en otros:

- Método de Fröbenius aplicado para parámetros constantes del fluido:

$$u_r = \begin{cases} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} & r \leq R_1 \\ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1} + b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} & R_1 < r \leq R_2 \\ b_0 + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!} & r > R_2 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t)$$

- Para un pulso acústico que tiene una mínima o nula variación de parámetros mecánicos del sistema (densidad, presión, viscosidad) no genera una expresión que determina cual es el alcance esperado del pulso en base a la distribución angular de los elementos originales:

$$r = \frac{2l^2 \cot^2 \theta - 2l - \csc^2 \theta}{l \cos^2 \theta}$$

- Se estima que la presión máxima debida al pulso acústico se rige por una ecuación dependiente de elementos físicos del fluido como la viscosidad y de elementos externos como la gravedad:

$$P_0^2 = \frac{\varphi_m \sin^2 \theta u_0}{72m} \sqrt{\frac{9g\mu}{\omega_m}}$$

- Solución para una expresión diferencial que incluye una variación temporal de la densidad, considerando que el pulso acústico cambia la dirección y disposición de partículas por secciones:

$$u_r(r, t) = -\frac{\mu_0 r}{3\rho_0} \delta(t) \left( \frac{r e^{-2kr}}{2} + 1 \right) + \frac{r}{2\pi} \frac{\omega'}{t} - \frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{r^2 e^{-2kr}}{2} B_t(r, t)$$

- También, de la ecuación estocástica tensorial se genera una expresión radial que describe la forma de la superficie del pulso acústico considerando que el origen siempre es el mismo (en lugar de tomar un centro de masa) con el cual se definen las propiedades del fluido:

$$r = \sqrt{1 + 4 \left( \frac{\mu}{3} \right)^2 J_n(r) (\tan(t))^2 [(\cos \alpha)^2 + 4(\sin \alpha)^2]}$$

Se han usado filtros de libre acceso como los filtros Kalman (para señal discreta, señal continua y el híbrido, también conocido como Kalman modificado) los cuales se encargan de eliminar ciertas frecuencias y rangos de frecuencias seleccionados para una señal medida, sin ser demasiado selectivos. Son algoritmos considerados inteligentes porque realizan el filtrado de señal en 'tiempo real' con un mínimo de desfase de unos cuantos milisegundos. En cambio, se busca generar un nuevo algoritmo que no solo genere el filtrado el tiempo real, sino que pueden elegirse en tiempo real las frecuencias a eliminar y si algunas de estar deben ser consideradas en la base de datos con una amplitud mayor.

Tomando como base, un algoritmo que simule la generación de ruido de un fenómeno acústico para posteriormente diseñar un control en Simulink con la función signo para generar el filtrado con una dinámica que sea convergente a un cierto valor establecido de amplitud y ciertas frecuencias.

El sistema que se tiene es imperfecto, pues se busca uno que tenga un mejor control del PSD, es decir, del perfil de ruido para cada uno de los tipos de ruido. Con dos sistemas diseñados, uno de una sola etapa y otro de dos etapas, se hicieron pruebas sobre el control del PSD. Pero en días próximos se deben probar sistemas de control de tres etapas para posteriormente ver el nivel de eficiencia que tienen con respecto al filtro Kalman híbrido.

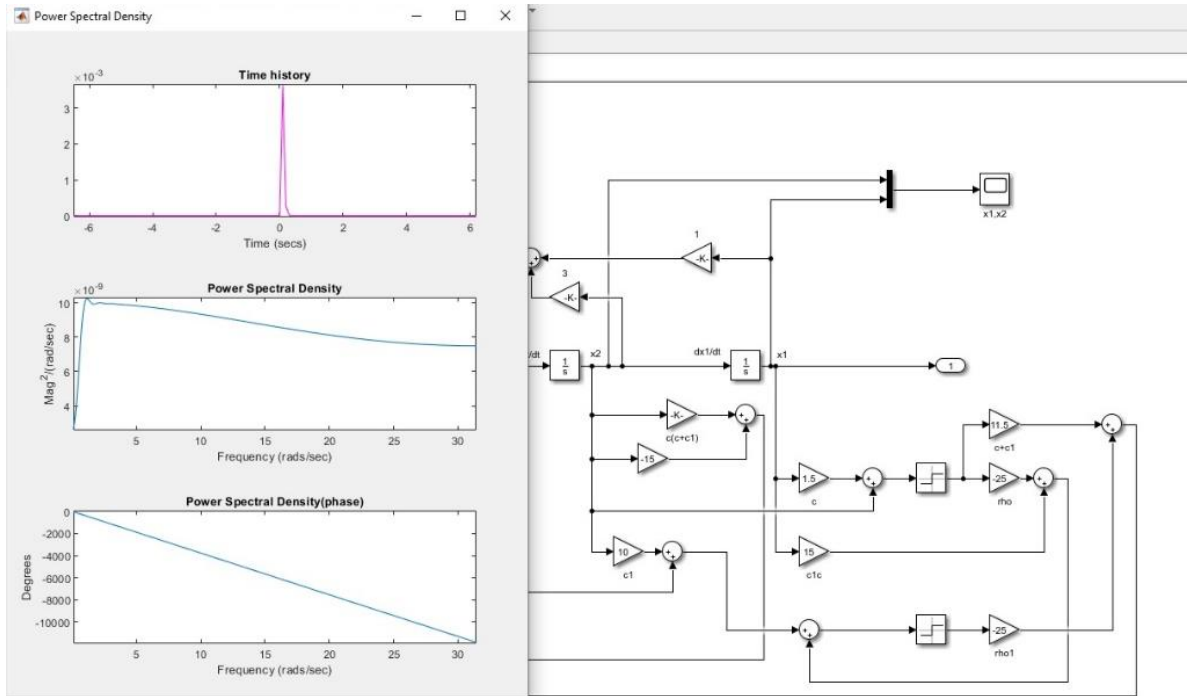
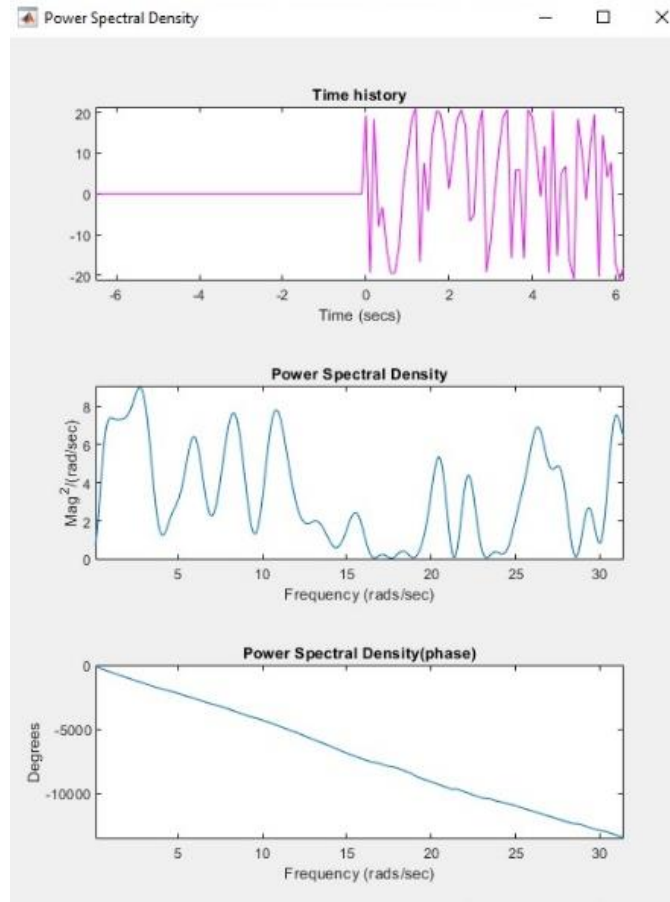


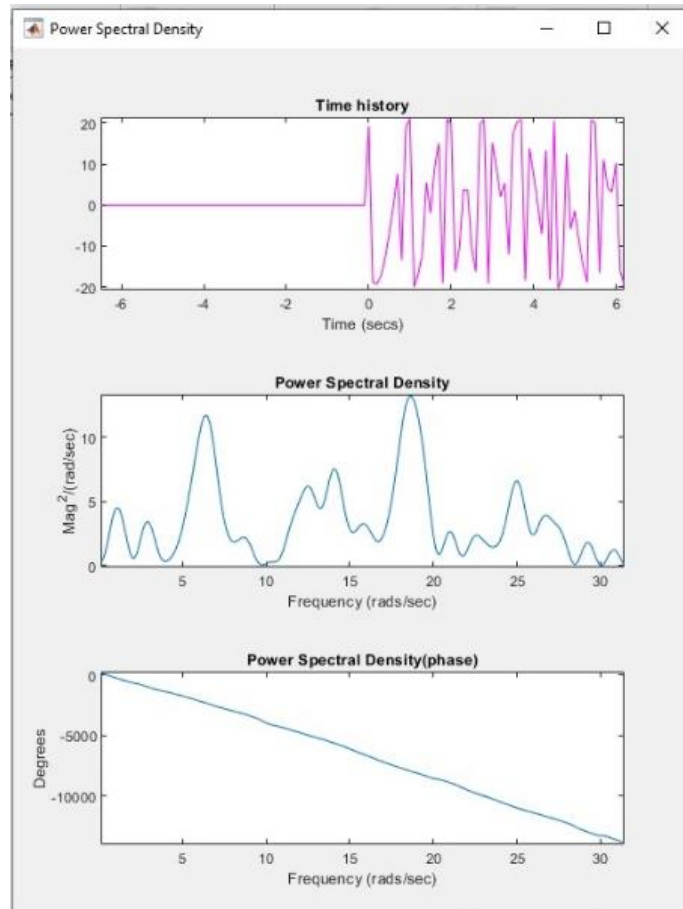
Figura 8.1. Parte del sistema de control de dos etapas y el PSD de ruido de disparo.

La finalidad de probar varios sistemas de filtrado ya conocidos, era buscar una opción gratuita que nos diera una alta eficiencia, conociendo que debemos eliminar ciertos aspectos del ruido sin perder la información original. Se construyeron los elementos controlando cuales eran las señales de entrada, y con varias etapas para que la salida fuera una única señal de entrada, pero al mismo tiempo controlando cuales son los elementos de la densidad espectral que se pueden recuperar. Los elementos iniciales se controlaron al detalle.



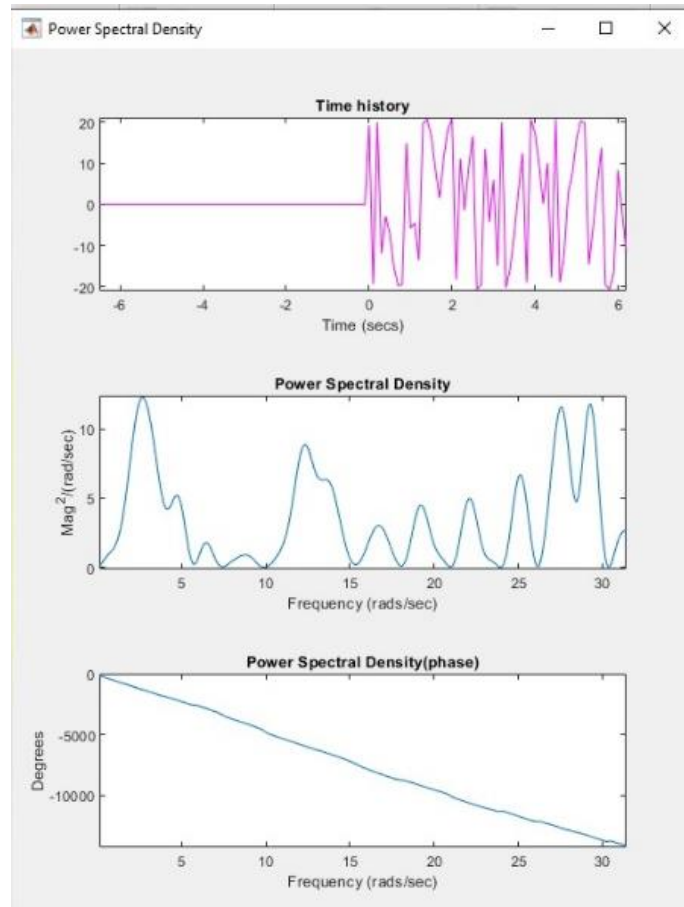
*Figura 8.2. Densidad espectral de potencia (PSD) correspondiente a 100 Hz. Dada la configuración de MatLab no es posible ver el nivel de intensidad en valores cercanos a esa frecuencia. La señal de entrada no tiene un perfil plano en la respuesta.*

La respuesta espectral de la señal generada, tiene un corrimiento. Incluso siendo una señal simulada y una respuesta con sensor simulado, el procesamiento de datos genera un retardo interno, debido a la cantidad de ciclos para hacer la limpieza de los datos, además del tiempo de respuesta para transformada de Fourier. Un espectro de cualquier registro digital, no se puede tomar como valores directos, hay que “traducir” la información con un modelo matemático que permita obtener aproximaciones o valores justos de las señales originales. Se espera que a un mayor nivel de complejidad de señal termine en un mayor tiempo de procesado y un mayor corrimiento en las frecuencias percibidas por el sistema.



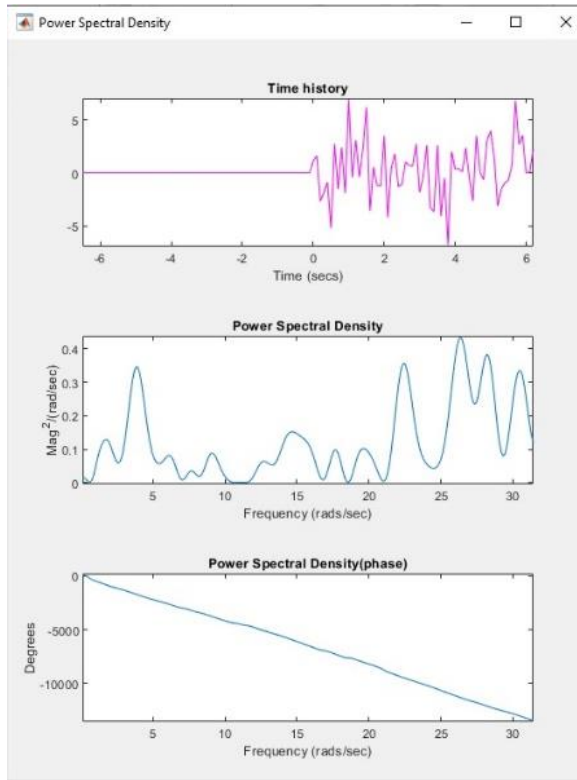
*Figura 8.3. PSD correspondiente a 35 Hz. La intensidad correspondiente a los valores cercanos a 35 Hz, no es visible. No se debe confundir con el pico cercano a los 20 Hz. Los picos que se muestran en la imagen, son propios de la señal generada por el Simulink.*





*Figura 8.4. PSD correspondiente a 5 Hz. Se nota claramente un sesgo cercano a este valor, generado como una respuesta que toma tiempo en perder intensidad. La frecuencia de mayor peso, no se reconoce por la intensidad, sino por la forma en el registro.*

Las frecuencias determinan solo parte del espectro de densidad. Los valores basura generados en la transformada, además del ruido interno por no tener una memoria totalmente limpia, en conjunto con el tiempo de respuesta, determinan los PSD. No hay forma alguna, de momento, de discriminar todos estos valores. Por ello, el PSD mostrado en el trabajo, tiene la única finalidad de hacer un análisis comparativo cualitativo.



*Figura 8.5. PSD correspondiente a ruido blanco. La entrada de señal es una simulación del ruido blanco, aunque imperfecto, dado que en Simulink de la versión 2020, no cubre todas las frecuencias, sino un determinado rango y se da a todas estas, un aproximado de la misma intensidad.*

Efectivamente ciertos tipos de ruidos presentes en una perturbación acústica tienen un PSD que surge de una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes en forma tensorial. Se establecieron aproximaciones analíticas para analizar el registro de ruido de fondo en una señal de audio para los experimentos de efecto fotoacústico. Dicho análisis del ruido de fondo se podrá hacer dividiendo la señal en múltiples canales conociendo el PSD de cada ruido y su relación con la solución, caracterizando cada canal por su ancho de banda, fase, amplitud y tiempo.

Se han establecido las bases para conocer la posibilidad de un PSD propio de un fenómeno acústico que puede generar interferencia constructiva capaz de aumentar la amplitud de las señales de ruido en un audio digital. Dada la variabilidad del movimiento de las partículas, se puede estudiar de forma numérica los valores límite en que dichas PSD pueden aparecer en una señal registrada, corriendo los datos de frecuencia.

Por medio de este estudio, se puede establecer si un registro de sonido es efectivamente ruido o que porcentaje de estos datos lo son, separando los componentes del registro en cada tipo de ruido y discriminando la señal residual como la información de interés. En trabajos futuros se podrá hacer un estudio detallado de los tipos de ruido presentes en una perturbación acústica y estudiarlos por múltiples canales. El ruido rosa, de Johnson y de fondo, son parte de una perturbación acústica en conjunto con la grabación de esta.

El efecto fotoacústico es estudiado a partir de las variaciones de presión que se generan debido a la fuente de luz, pero también se analiza la variabilidad de los datos de la velocidad del flujo. Esto último se realiza a través de la correlación de datos y la intensidad de la onda acústica. El análisis de los datos para el prototipo industrial se requiere en tiempo real, por lo cual se probaron sistema de control de varias etapas para determinar si se podía conocer el PSD de una señal a partir de una determinada frecuencia preferencial.

## 8.2. Simulación: NS y Maxwell parametrizados

Para establecer un algoritmo predictivo de ruido se tuvo que probar diferentes condiciones del modelo basándose en las ecuaciones de N-S a través de simulación por Runge-Kutta con validez para caso isotrópico con ciertos valores específicos de numero de Reynolds a través de las variaciones de densidad y viscosidad cinemática para el sistema de ecuaciones simplificadas.

Para la simulación de las ecuaciones de N-S por el método de Runge-Kutta, se tomó únicamente el caso simplificado de las EDS (no el caso estocástico), siendo las ecuaciones de la siguiente forma:

Radial (hiperbólica):

$$Au_{\theta\theta} - Cu_{rr} + Du_{\theta} + Eu_r + F = 0$$

Polar (elíptica):

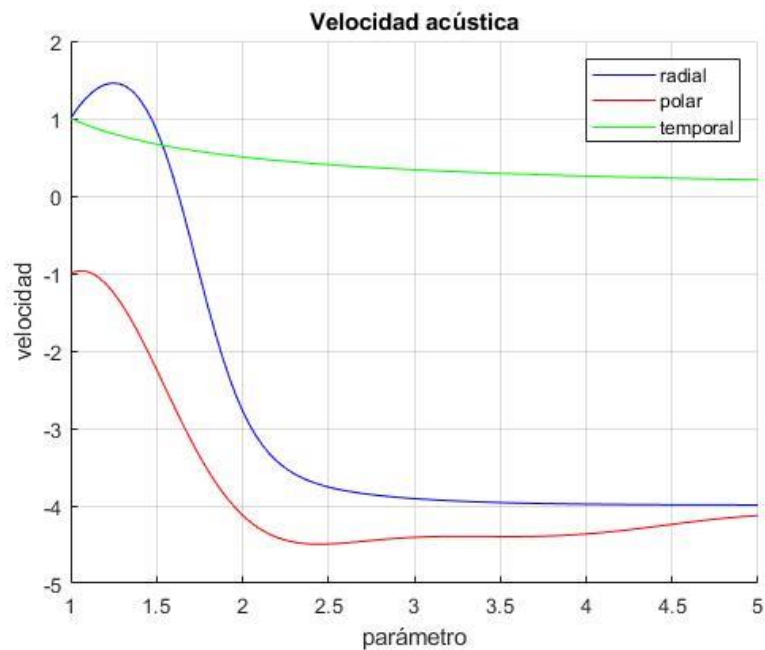
$$Au_{\theta\theta} + Bu_{\phi\phi} + Du_{\phi} + E = 0$$

Temporal:

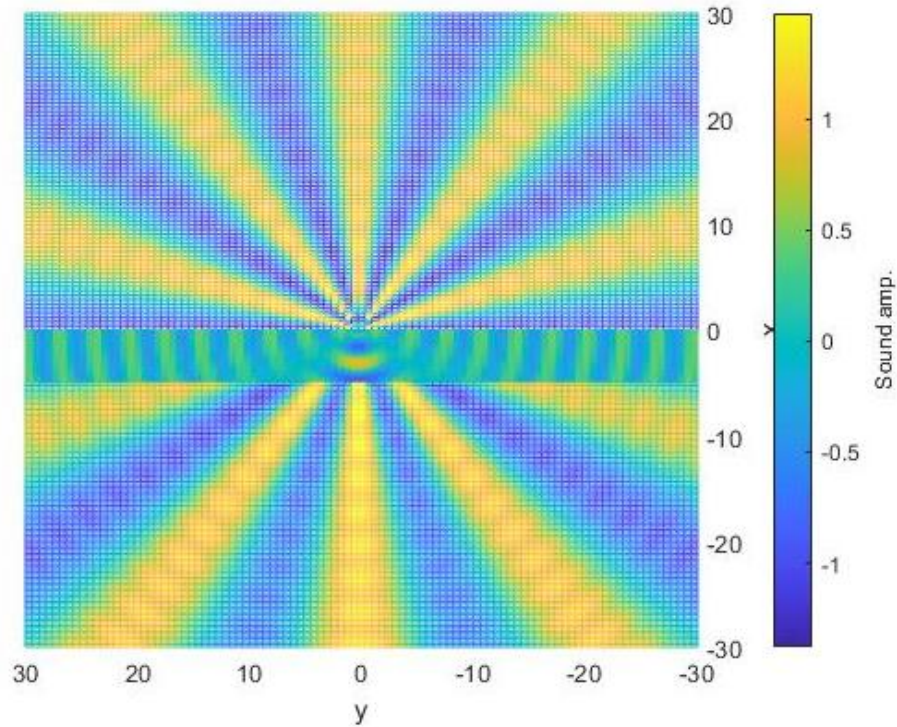
$$u_t + u_r u - cte. = 0$$

Para los dos primeros casos se tomaron las ecuaciones en sus formas generales para poder clasificarlas de acuerdo a su ecuación y posteriormente tomar las derivadas como nuevas variables para establecer la parametrización adecuada en cada caso, con estas ecuaciones paramétricas se genera un gráfico 3D que simule el comportamiento de un pulso acústico en un fluido bajo ciertas condiciones de viscosidad y densidad. Se probaron variaciones condiciones para esto, pero solo se grafican dos de estas en el reporte, debido a su importancia para tener referencias para el experimento.

Las soluciones obtenidas por simulación son de tipo polinómica, igual que las obtenidas por resolución analítica. Estas se aproximaron a funciones de Bessel esféricas y se graficaron, junto con la solución de una placa vibrante, tomando la onda acústica como fuente. La amplitud está dimensionada a 1, para menores amplitudes, hay una mayor dispersión.



*Figura 8.6. Resultados numéricos por el método de Runge-Kutta para tres ecuaciones de Navier-Stokes. Muestran claramente como convergen a un determinado valor, aunque no comportan este límite. La onda no puede crecer siempre.*



*Figura 8.7. Representación gráfica del efecto fotoacústico contra una placa delgada. Nos muestra como la placa vibra en respuesta al pulso acústico y posteriormente, el fluido alrededor de este tiene una respuesta que guarda relación con los modos e intensidad del cuerpo, con cierto corrimiento y en todas las direcciones.*

Se graficaron en un solo sistema las soluciones para las ecuaciones de N-S junto con la vibración de una membrana (cuerpo 2D) para tener una imagen general de cómo se comporta el fenómeno y poder encontrar las posiciones ideales para la fuente laser como los sensores que se planeen usar, sean foto detectores o micrófonos. Esto último tiene que realizarse considerando las pérdidas de intensidad o de potencia para determinados ángulos y programar el algoritmo para que distinga una señal máxima con otra con pérdidas.

Para analizar la posibilidad del ruido de fondo como parte de la señal digital, se tomaron las soluciones posibles del caso isotrópico evaluando el determinante de todas las posibles soluciones y sus derivadas temporales en analogía con las variaciones de las ondas acústicas debido a constantes colisiones entre las partículas del fluido.

Del método de Runge-Kutta podemos comprobar la convergencia de las soluciones de las ecuaciones de NS. Son totalmente independientes por la forma de solución, no podemos conocer la codependencia y cómo cambian una con respecto a la otra. Las parametrizaciones generadas tanto de forma analítica como numérica establecen la variación del pulso acústico, para ambos casos (NS, Maxwell).

Las gráficas de la figura 8.6 nos muestra el sistema que esperaríamos de cualquier pulso acústico, donde el frente de onda describe un comportamiento convergente a un valor determinado que puede ser cero o no. Después de un terminado tiempo, un pulso acústico tiende a un comportamiento convergente para cualquier distancia determinada. No nos permite conocer las superficies que describe el vector radial para cada posibilidad del sistema acústico.

### **8.3. Resolución: NS y Maxwell con parámetros dependientes del tiempo**

A través del análisis de las ecuaciones paramétricas como un punto radial que va trazando una superficie podemos generar diferentes casos que son representados gráficamente. Para el primer sistema tenemos un caso es el simplificado sin manipulación de los parámetros. En esta simulación se consideran la densidad y viscosidad propias del aire, con valores redimensionados a la unidad. El tiempo (como parámetro) corre igual para todas las ecuaciones. Es un sistema simple en que tenemos un pulso acústico de baja intensidad, sería parecido a cuando una persona habla, el sonido de su voz viajaría siguiendo las morfologías mostradas en las figuras.

En la primera gráfica, vemos que existen dos deformaciones. Como se ha comentado antes, no se puede esperar que un pulso acústico tenga una forma esférica perfecta. Estas deformaciones no implican que hasta ahí llega el alcance del medio. En realidad, todo el fluido existe, pero, la gráfica solo muestra la forma que tiene la superficie que se estudia para el pulso acústico. Esa superficie, puede analizarse desde que se origina hasta que se pierde.

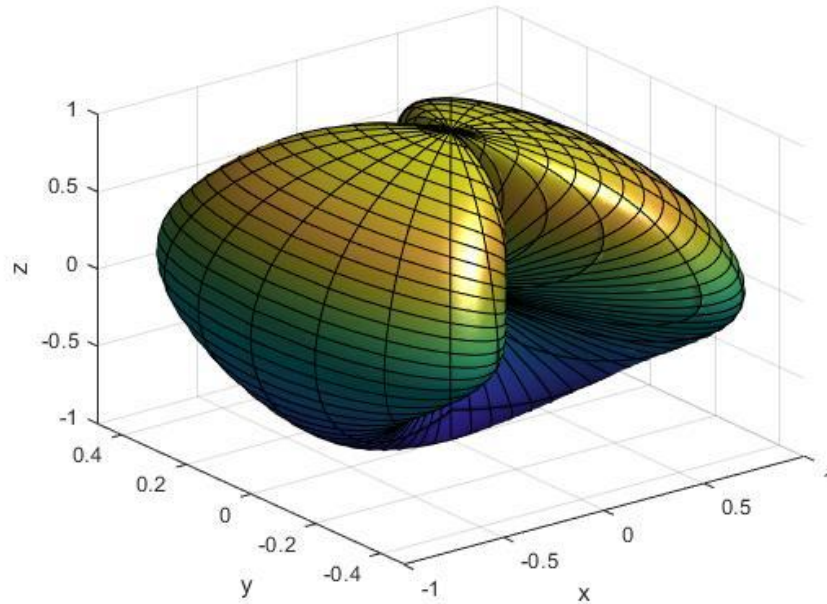


Figura 8.8. Pulso acústico para características predeterminadas (Navier-Stokes).

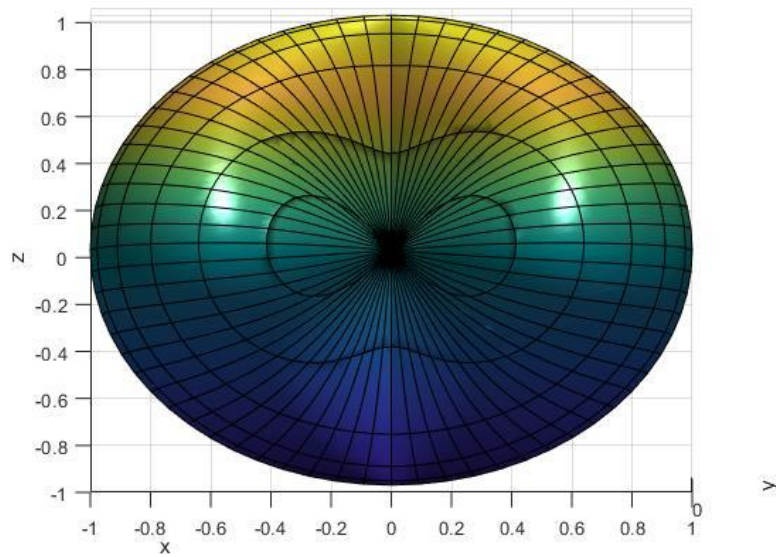
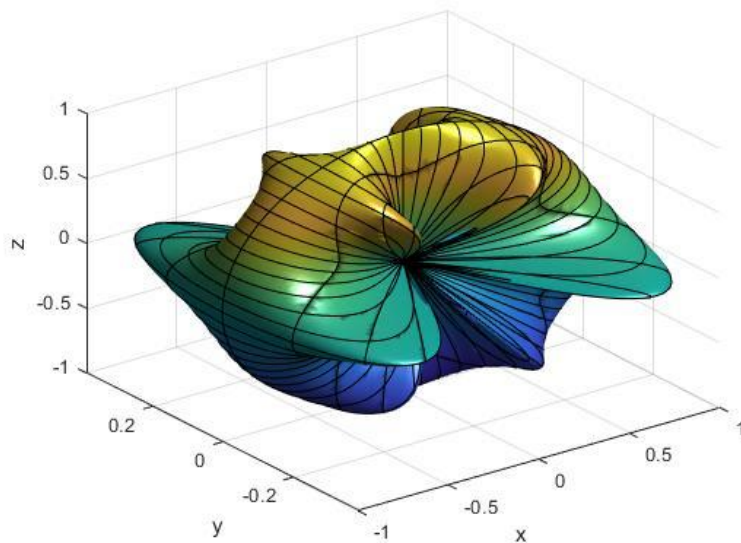


Figura 8.9. Pulso acústico para características predeterminadas (Navier-Stokes). Vista aérea.

Aunque el pulso electromagnético que se toma en cuenta es del orden de un láser de bolsillo (no mayor a 50 mW) se puede ver una diferencia estructural en la morfología del medio correspondiente al pulso acústico. El gas tiene la forma de un pulso acústico

partiendo de un determinado origen que estamos considerando el punto central donde impacta el haz electromagnético.

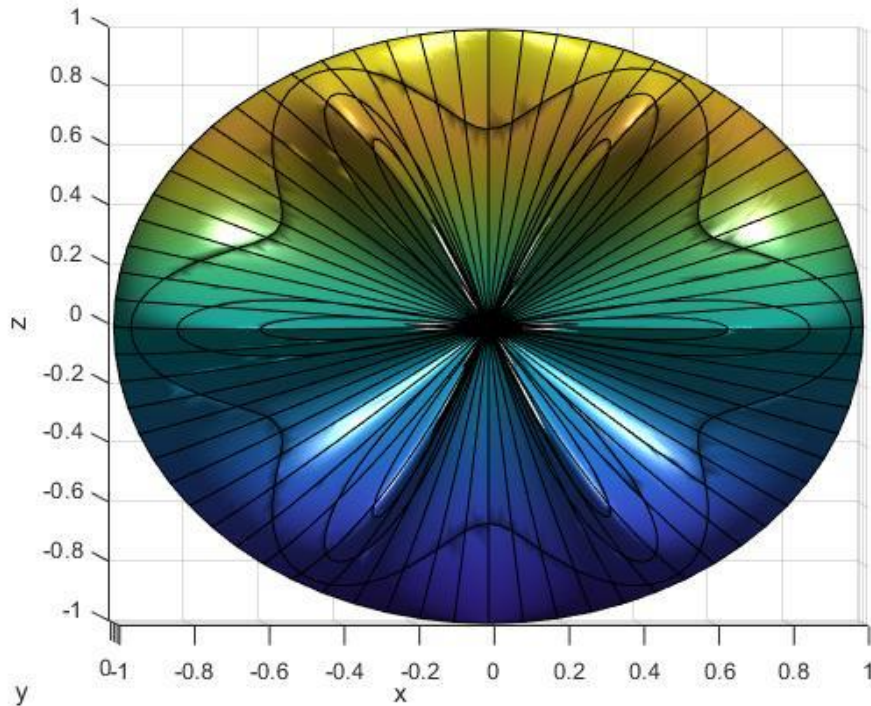
Por este método, no conocemos las direcciones de movimiento de las partículas para determinar los ruidos correspondientes del pulso. Sin embargo, podemos predecir cuales son las zonas de alcance del pulso, considerando que en la gráfica el máximo de uno, corresponde a 10 metros. De ahí, se consiguen las proporcionalidades para ubicar los sensores en las mejores posiciones, asegurando captar la información necesaria.



*Figura 8.10. Pulso acústico para características predeterminadas (Maxwell y Navier-Stokes).*

La diferencia de este segundo pulso, implica que la transferencia de energía para un pulso acústico generado por factores externos como un láser, se da de forma irregular. Parte de la energía es absorbida por el cuerpo y otra por el medio en forma de calor. La irregularidad parcial, implica que, de poner sensores, no se puede en cualquier posición si se desea tener el mejor registro. Además, que no en todas las direcciones puede ser percibido el fenómeno, serian “puntos ciegos” donde parece que no ocurre nada, similar al ojo de los tornados y huracanes.

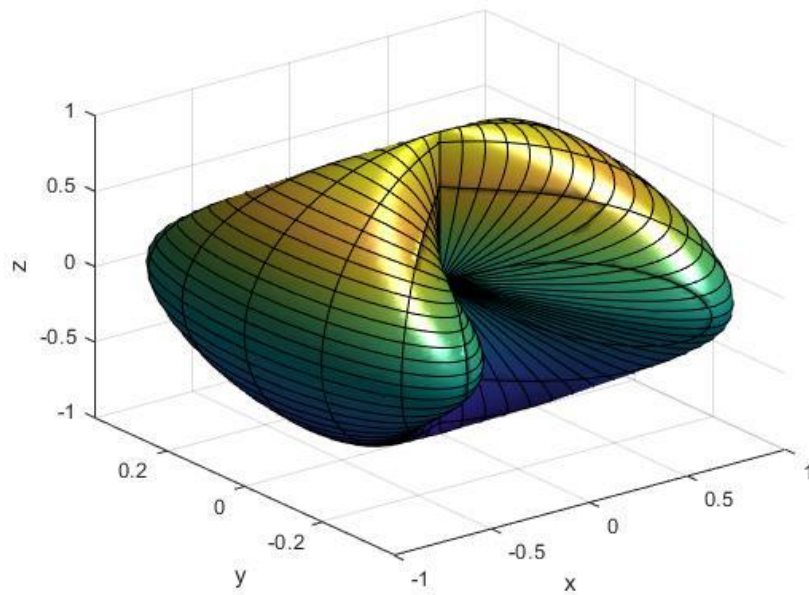




*Figura 8.11. Pulso acústico para características predeterminadas (Maxwell y Navier-Stokes). Vista aérea. Se presenta cierta simetría aparente, que puede no presentarse en las direcciones aquí mostradas.*

Resulta importante conocer cuál será el comportamiento del pulso para valores que están por encima de los propios del aire, en el siguiente caso, el único parámetro que fue cambiado es la densidad, que se consideró el doble de la densidad del aire. Con una viscosidad idéntica al aire, y una variación temporal punto a punto. Recordando que la mayoría de los parámetros fueron reducidos a la unidad.

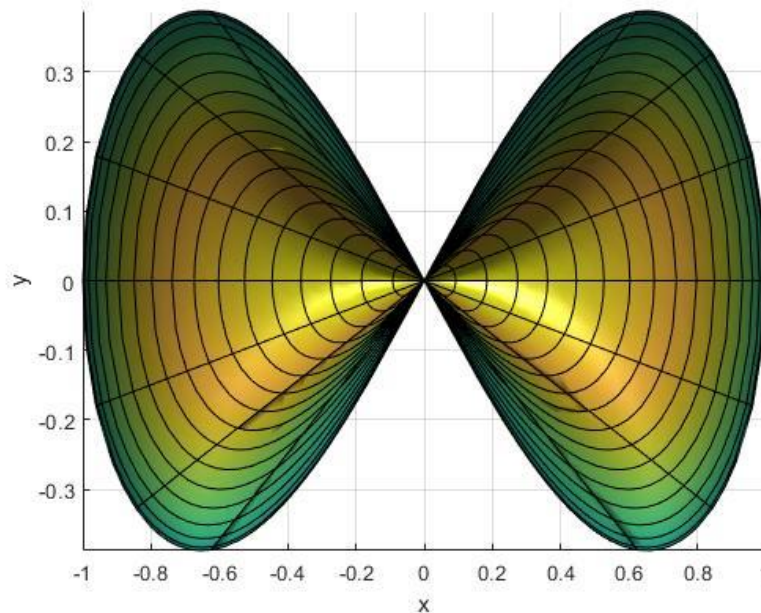
En los sistemas estudiados podemos ver como se conservan los factores de simetría en cuanto a la morfología (ya se probó antes que una simetría en el pulso es demasiado difícil de conseguir en condiciones ambiente) y nos deja saber que, en su mayoría de situaciones, guardan esta simetría gracias al principio de mínima acción que función a través de los principios termodinámicos para el fluido. No solo se desplaza el gas siguiendo el pulso, sino que minimiza la interferencia interna (colisiones de moléculas) para mantener la temperatura con un reducido cambio.



*Figura 8.12. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Navier-Stokes).*

Que la densidad sea mayor que el aire, puede darse en dos casos principales: 1) Es un medio con mayor densidad, 2) que la temperatura es baja. Se puede pensar en que las partículas cuando la densidad es mayor están organizadas de manera compacta relativamente, con respecto a un sistema de baja densidad, de forma que el pulso esférico tendría una mayor probabilidad de ocurrencia. En la figura 8.13 podemos ver que esto no ocurre. La formación esférica de un pulso acústico se genera cuando las partículas ya presentan una determinada dispersión que se puede considerar aleatoria. Cuando la densidad es alta, tienen una dinámica similar a conjuntos, a aglomerados de partículas, por lo cual, en grupo tienen direcciones preferenciales las cuales podemos ver en las figuras.

En realidad, esas direcciones preferenciales están presentes en todos los casos para fluidos, excepto en un gas ideal. Solo en casos ideales podríamos hablar de una dispersión esférica, ya sea por la densidad o por el nivel de energía de la fuente.



*Figura 8.13. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Navier-Stokes). Vista aérea.*

En cada uno de los sistemas se muestran las vistas laterales y aéreas. Resulta de importancia al conocer cuántos ejes de simetría se tienen, de forma que podemos elegir los puntos adecuados para el análisis de datos. Aunque lo ideal es conseguir un sistema donde haya simetría para tres ejes o más (las diagonales).

Los casos ideales no se presentan en la naturaleza ni mucho menos en un sistema cerrado con alta actividad térmica como una fábrica, en especial, una con sistemas de purificación, tratamiento y procesado de materia prima. Cuando estos pulsos se generan en un sistema cerrado, si se tiene el espacio suficiente, se comportarán como en las figuras, ya sea para un proceso acústico o uno fotoacústico.

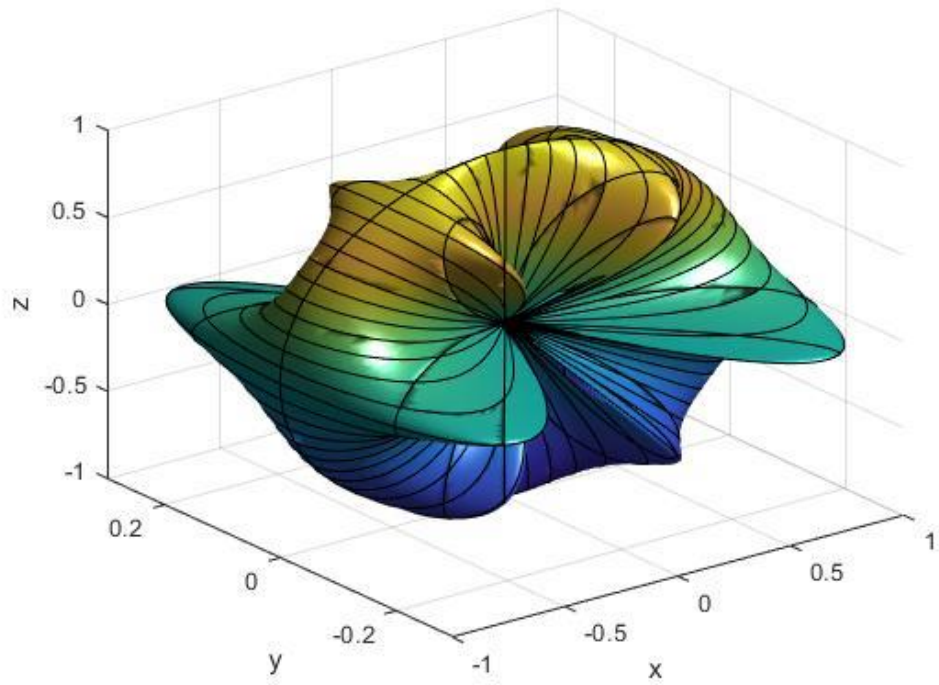


Figura 8.14. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Maxwell y NS).

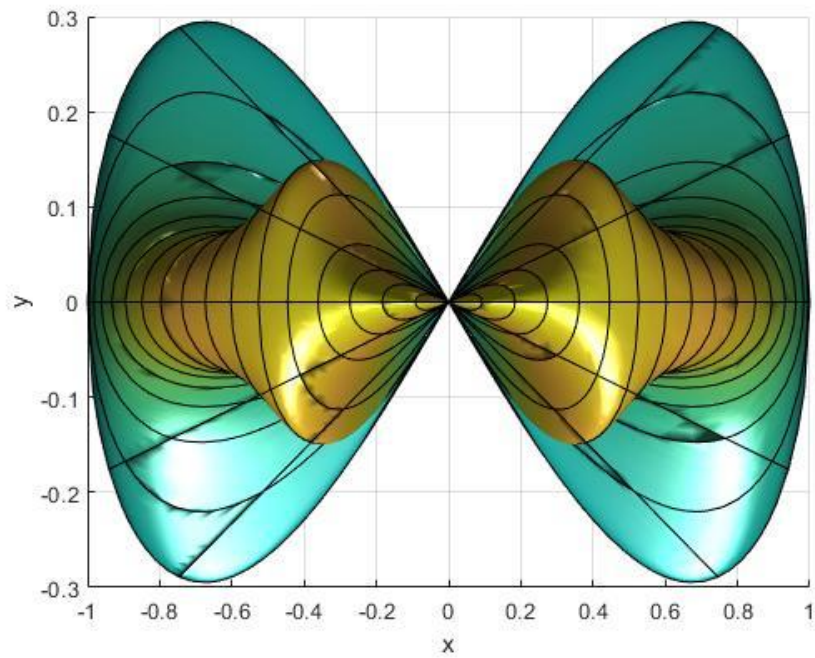
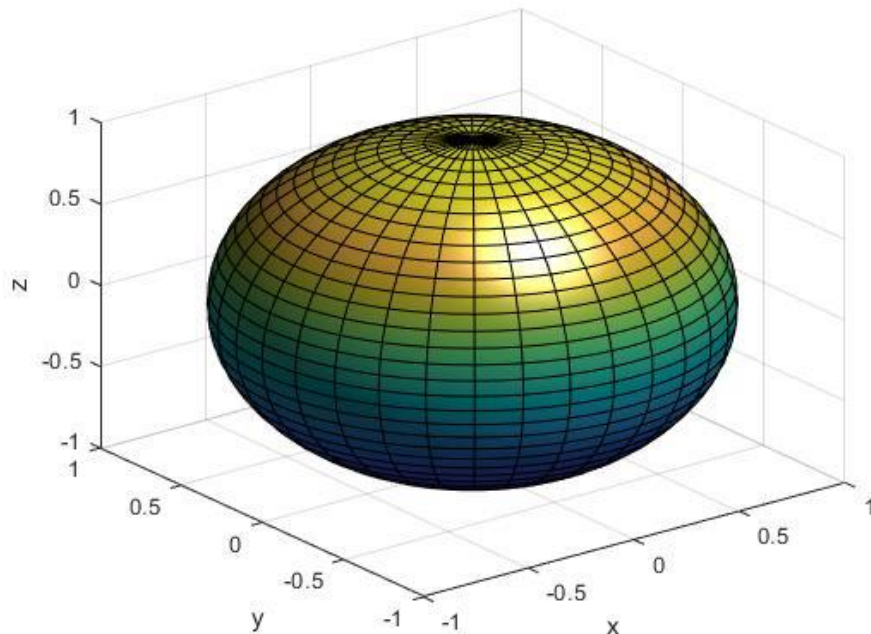


Figura 8.15. Pulso acústico para una densidad mayor que el aire (Maxwell y Navier-Stokes). Vista aérea.

En este caso, consideramos la densidad y viscosidad del aire, además de suponer que el parámetro principal de la variable radial tiene una variación 30 000 veces más lenta que la variación del parámetro principal angular. Sin embargo, ninguno de los dos parámetros cambia como en el sistema base.

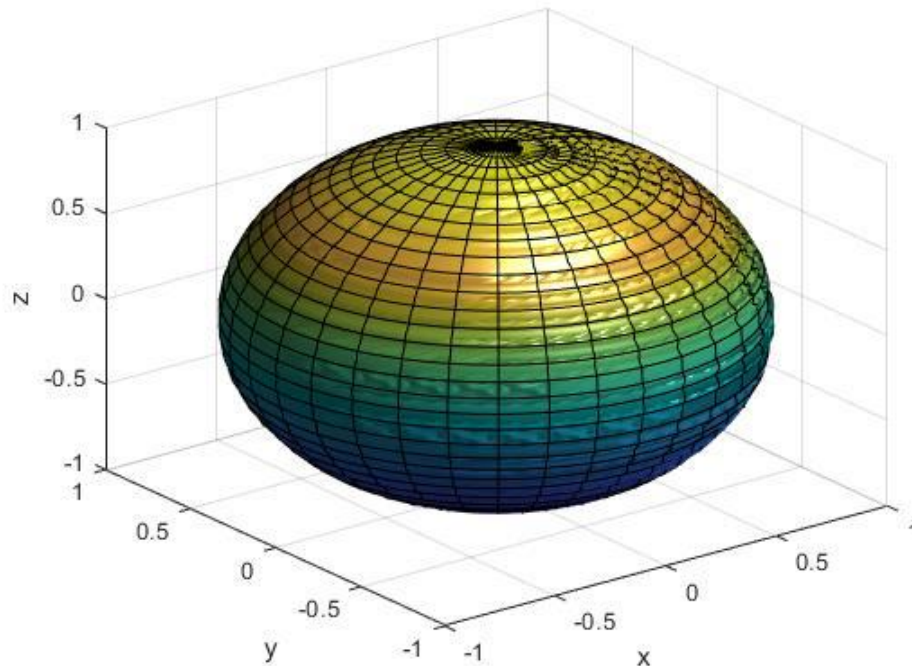
Básicamente, en las próximas gráficas se muestra el frente de onda esférico que esperaríamos de un sistema acústico bien comportado y este se genera cuando la distribución de partículas tiene direcciones predefinidas al momento de generar un pulso. También, vemos que la velocidad de onda es muy pequeña cercana a la velocidad del sonido, lo que nos da un comportamiento con una variabilidad mínima en su energía relativa en base a las zonas de rarificación de la presión del medio.



*Figura 8.16. Configuración esférica que esperaríamos en un pulso con fuente puntual (Navier-Stokes).*

Aunque el pulso con morfología esférica fuese lo esperado por los libros de texto, es poco realista que esto ocurra, ya que se ha dado para una velocidad de onda menor a la velocidad del sonido con cero grados Celsius. También para un sistema donde los parámetros de tiempo para los elementos físicos del gas son diferentes para el pulso

acústico, pero se mantienen relacionados por las ecuaciones matemáticas. Es decir, que evolucionan por su cuenta conservando la relación con el tensor de deformaciones. En condiciones controladas donde los elementos evolucionan por su cuenta, podríamos esperar un máximo de simetría, para todos los ejes, aunque se tendría un sistema forzado con posiciones bien definidas de las partículas con un mínimo margen de error.

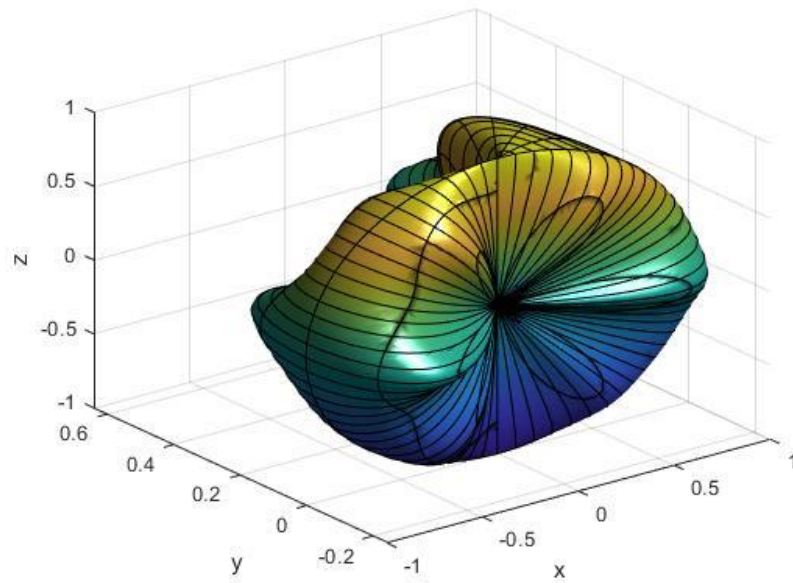


*Figura 8.17. Configuración esférica que esperaríamos en un pulso con fuente puntual (Maxwell y Navier-Stokes).*

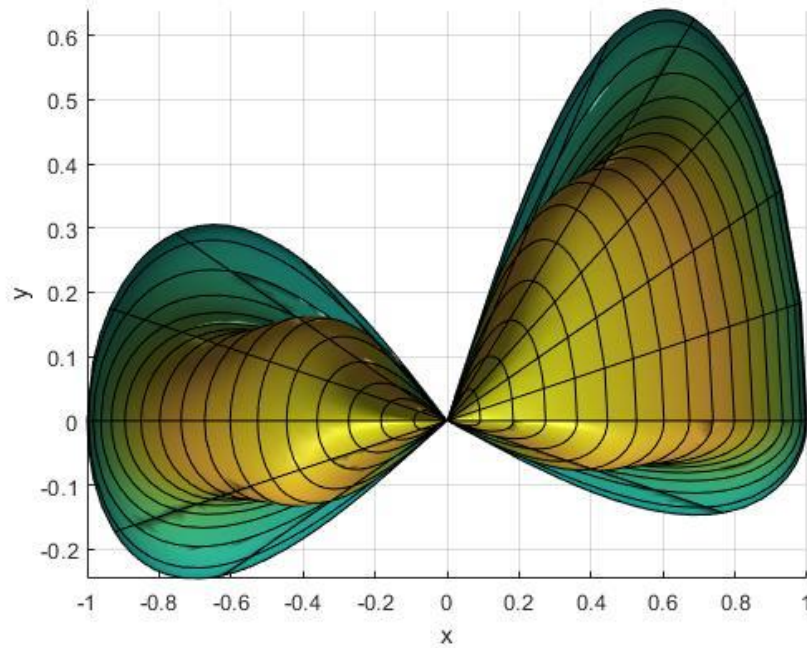
Dentro de nuestro sistema nos interesa conocer cuáles son los límites en que cualquier rasgo de simetría geométrica desaparece. Esto sin importar el eje para el cual analizamos el sistema. Y eso se cumplió considerando que el parámetro que determina la variación radial es también el que determina la evolución de la densidad del aire, además de que hay una variación angular discreta con valores prohibidos.

¿Qué se hizo aquí? Un sistema semi forzado en el cual la densidad del aire rige el desplazamiento radial. Lo cual implica que la densidad del aire establece cada una de las dimensiones en el sistema, que es una función del tiempo. Este sistema existe para los parámetros temporales colapsados en uno solo. Las dimensiones independientes

entre ellas, pero ligadas a un sistema temporal único. Con densidad y viscosidad del medio controladas.



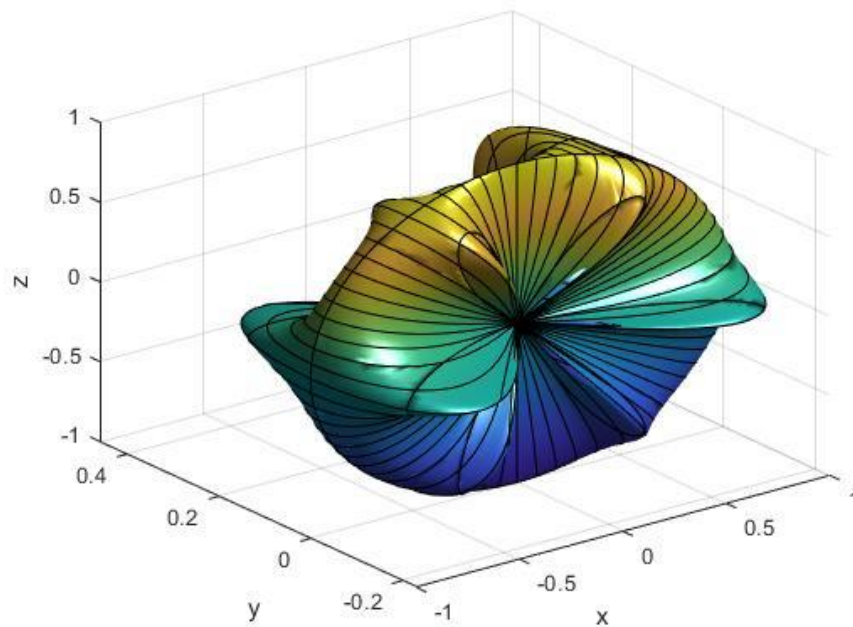
*Figura 8.18. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Navier-Stokes).*



*Figura 8.19. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Navier-Stokes). Vista aérea.*

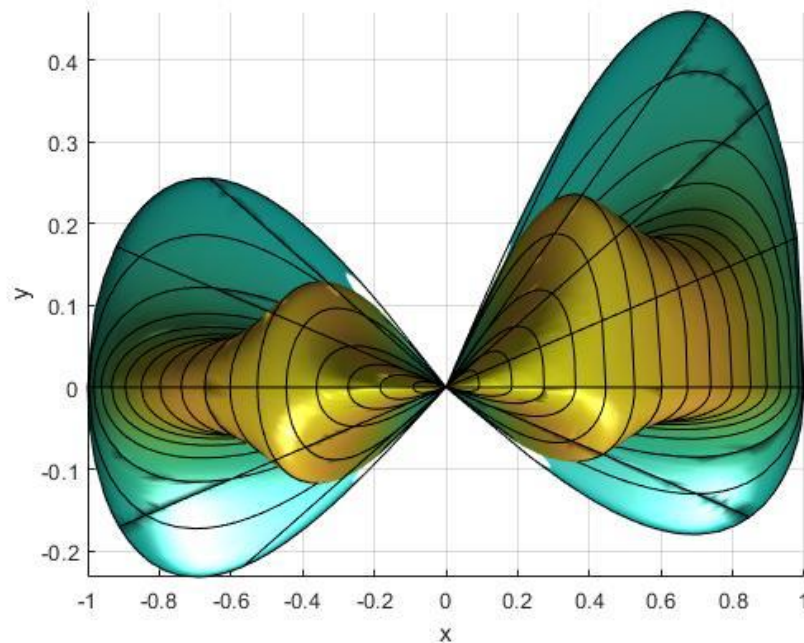
Se comentó que las figuras 8.18 a 8.21 son sistemas forzados, esto se refiere a las ecuaciones matemáticas. Al no tener un sistema dinámico en el tiempo, donde estén en dependencia explícita la viscosidad y densidad, en la simulación se incluyeron factores numéricos que mantenían una relación lineal entre ambos parámetros. En una perspectiva física, mencionando de nuevo la correlación que hay en el movimiento de las partículas, por las atracciones mutuas y por las colisiones internas en un fluido, tiene sentido pensar que hay baja simetría o ninguna.

Con el paso de los meses, y considerando experiencias en la industria, esto último queda sustentado por datos experimentales. En una industria metal mecánica, se hicieron mediciones de temperatura, ruido y humedad relativa, a diferentes horas dentro del mismo turno, con unos datos que muestran que no hay un valor único dentro de los establecimientos. Esto se comenta con datos en una sección posterior.



*Figura 8.20. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Maxwell y Navier-Stokes).*





*Figura 8.21. Sistema sin simetría geométrica para los ejes que se analizan, para el aire (Maxwell y Navier-Stokes). Vista aérea.*

A través de controlar ciertos parámetros en las ecuaciones de Navier-Stokes tensoriales se probaron los límites de la simetría geométrica para diferentes casos, conociendo que propiedades cumplen los sistemas analizados. Un pulso acústico generado a través de una fuente electromagnética guarda una relación en su comportamiento con un pulso acústico simple, a través del tensor de deformaciones. Conociendo las configuraciones geométricas para cada caso y todos los que se pueden evaluar, podemos conocer cuáles son los puntos apropiados para capturar datos del fenómeno, para control de ruido acústico. Un análisis redimensionado para considerar ciertas propiedades unitarias con respecto al aire, es suficientemente óptimo para notar su variabilidad con respecto a los parámetros evaluados.

Dentro de los elementos estudiados, existen varios sistemas de control, algunos básicos y otros conocidos y recurridos como el filtro de Kalman. Conociendo los pros y contras de estos, se trabajó en un sistema de filtrado correspondiente a la función de transferencia obtenida para el tensor de deformaciones con elementos del sistema acústico y electromagnético.

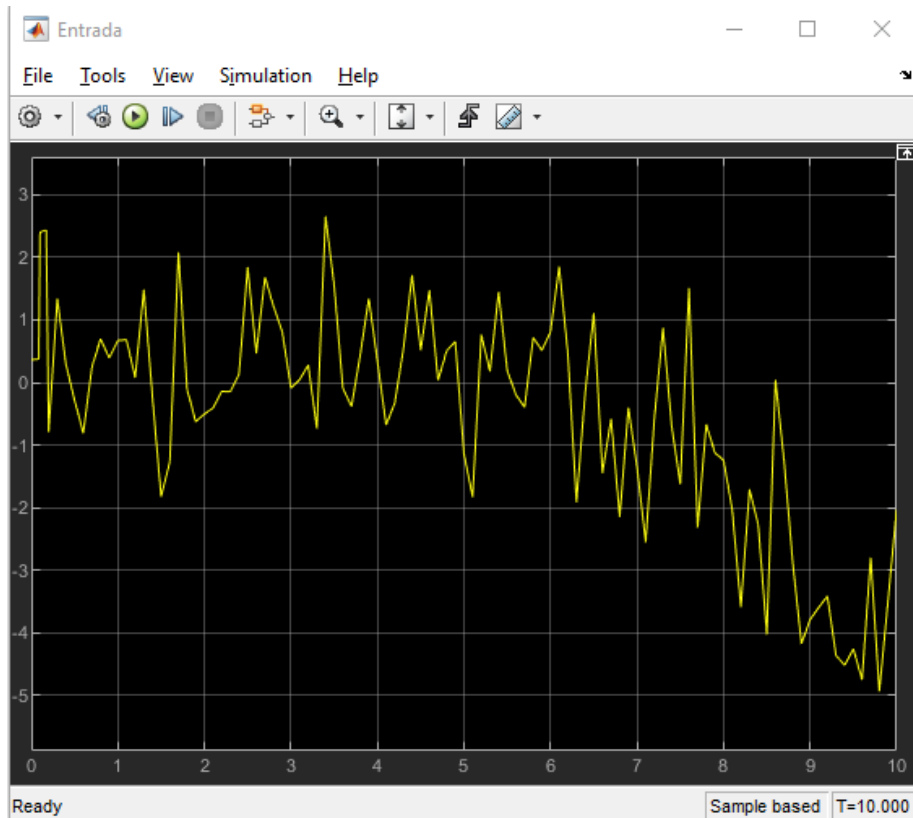
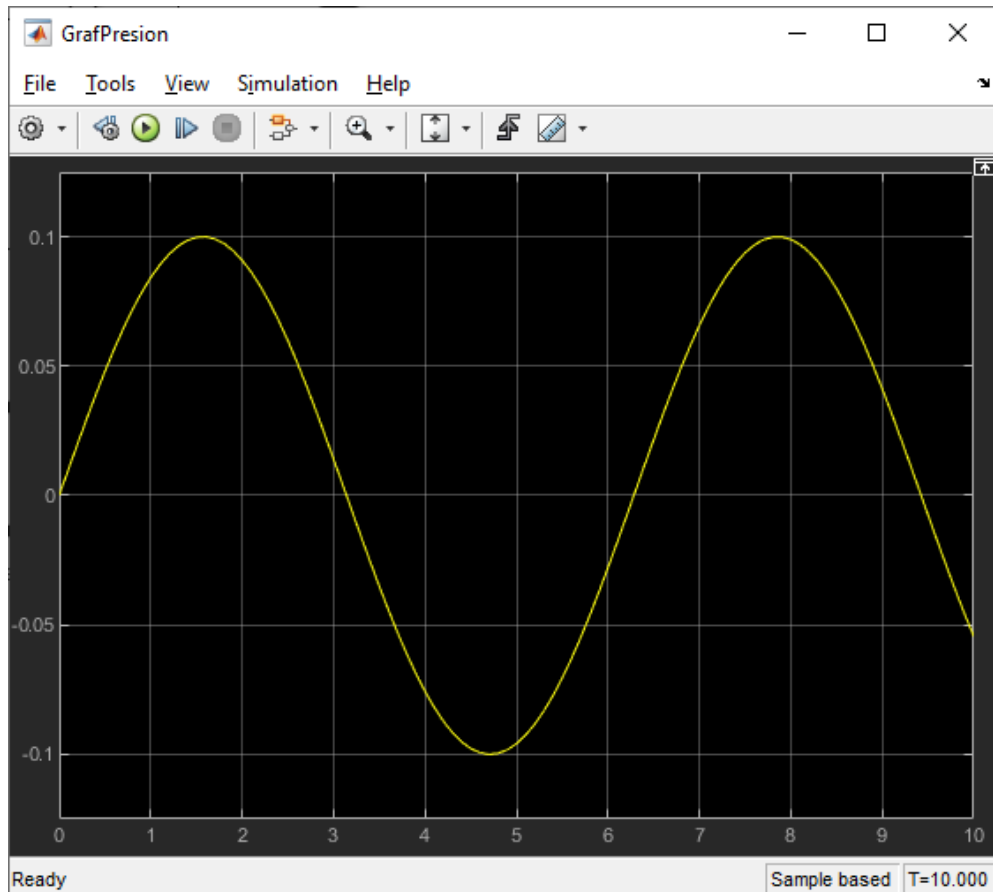


Figura 8.22. Señal de entrada para el sistema de control, onda acústica con ruido.

Como elementos de entrada se tenía un pulso acústico acompañado de una señal de onda de referencia de tipo exponencial convergente (como un pulso que se desvanece), una variación de presión senoidal, con una amplitud mínima que implique un ambiente con variación predecible. También el sistema como una función de transferencia de dos partes y la retroalimentación por el elemento de error:

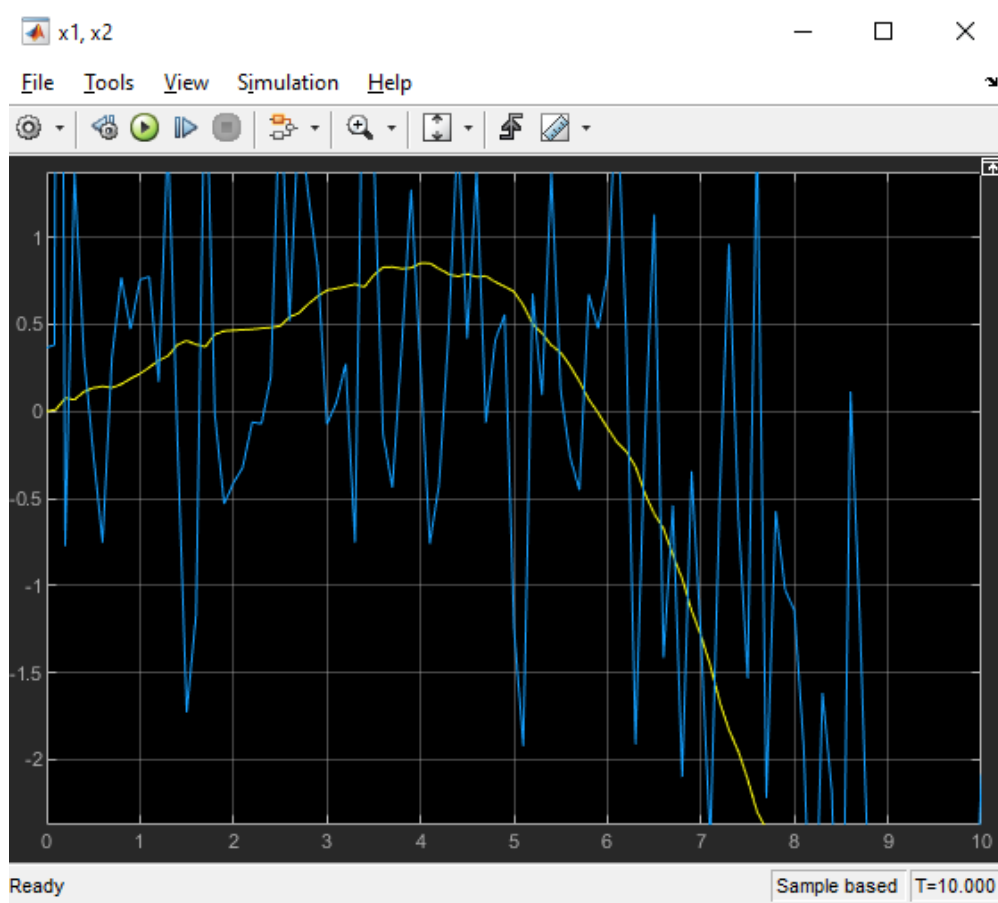
$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{3}{\rho_0^\gamma} \frac{sk_1 + k_2}{(s - 2j\omega)(4\epsilon s - (X_1 + 1))}$$

$$H(s) = \frac{X_2}{e(s)} = \frac{3}{\rho_0^\gamma} \left( \frac{sk_1}{(s - 2j\omega)(4\epsilon s - (X_1 + 1))} + \frac{k_2}{(s - 2j\omega)(4\epsilon s - (X_1 + 1))} \right)$$



*Figura 8.23. Señal simulada de variación de presión con un factor de 0.1 de amplitud. Esto implica un sistema oscilante predecible, similar a condiciones controladas de laboratorio.*

Las figuras 8.22 a 8.25 muestran el resultado del primer filtro utilizado. Antes de poder implementar los cálculos tensoriales mostrados en la tesis, se fueron usando elementos de versiones simples de las ecuaciones de Navier-Stokes, en donde no hubiera variación de la densidad, ni de la viscosidad. Sistemas similares a movimiento virtual. Casos donde el ruido está controlado. Aunque con una mínima variación de la presión en una entrada de los datos. Siendo un sistema súper controlado, se nota el desfase en la señal limpia con respecto a la original.



*Figura 8.24. Comparativa de señal de entrada con la señal limpia del sistema. La señal de entrada efectivamente era de tipo exponencial, aunque la velocidad de decaimiento se ve afectado durante el filtrado, también la forma.*

La señal original tiene su intersección con el eje x para el valor 10. Entonces, ninguno de los filtrados aquí devuelve la señal original, como se esperaba del estudio de los filtros. Los corrimientos hacia una frecuencia u otra, son imposibles de eliminar. Solo se puede controlar el índice de error, haciendo una combinación de filtros analógicos con digitales.

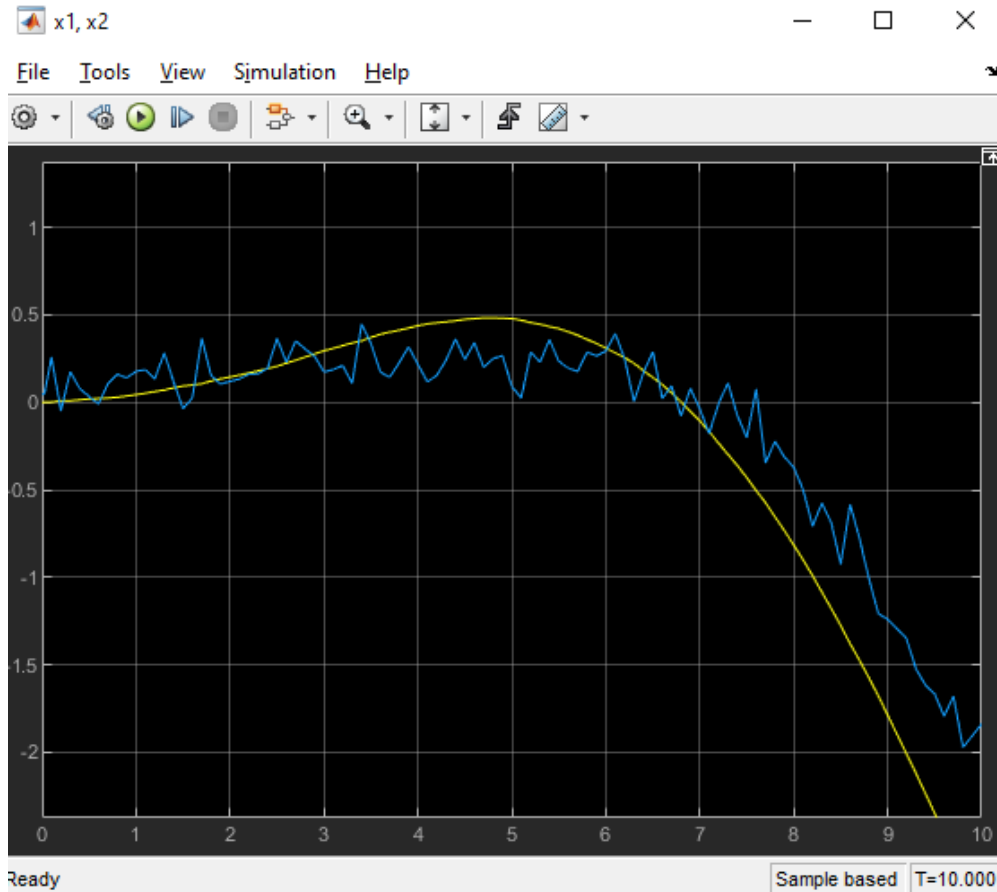


Figura 8.25. Comparativa de una señal de entrada con un factor de ruido reducido equivalente al 10% de la amplitud de la señal y su señal limpia.

#### 8.4. Conclusiones

Comenzando por el final. Los filtros usados durante el trabajo, fueron desarrollados antes de tener la solución estocástica, pero, posterior a las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas. En ese momento no se tenía la certeza de la validez de usar transformadas de Laplace para un sistema estocástico o tensorial o una combinación de ambos. Y resultaron ser de poca fiabilidad. Sin incluir la dependencia temporal de la densidad, ni viscosidad y considerando una variación de la presión que oscila alrededor de la presión atmosférica, generan un corrimiento en la curva. Para sistemas realistas, este corrimiento será mayor.

Los sistemas de filtros de varias secciones, filtros Kalman e híbridos eliminan elementos que pueden formar parte de la información del sistema original. Este nuevo

modelo permite no solo controlar los elementos del algoritmo, señales externas para retroalimentación, también por ingeniería inversa, nos deja conocer cuáles son las señales que generan el ruido en el registro digital. Determinando un conjunto de parámetros de entrada, los canales deben ser auto responsivos estableciendo prioridades por descarte de propiedades.

Solo cuando la intensidad del ruido es baja, se tiene una exactitud alta del filtrado. En un sistema industrial esto no es suficientemente bueno. En datos porcentuales, el corrimiento con respecto al valor real es de un 5%, demasiado alto para una calidad de línea de producción.

Dado que siempre se perderá información, lo mejor es predecir el tipo de información que se puede dañar, en cuanto a frecuencias, intensidad, cantidad de bits y valores angulares. Esto último se puede hacer si combinamos filtros analógicos que usan amplificaciones, almacenamiento de cargas y distribución por canales. También, uso de filtros de digitales, conociendo el tipo de ruido que puede estar presente para discriminarlo, en conjunto con una señal de audio que sea medida fuera de la zona de la perturbación o antes del fenómeno de fotoacústica, con un margen de un par de segundos. Cualquier valor menor a 10 segundos es óptimo.

En cuanto al desarrollo matemático, se resolvieron varios casos simplificados de las ecuaciones de Navier-Stokes, desde las versiones simples con parámetros constantes en ecuaciones diferenciales, hasta una versión de ecuaciones tensoriales estocásticas. Cada versión tiene sus límites en cuanto a formalismo matemático que se refleja en la exactitud de los valores físicos.

Con cada una de las soluciones, se obtuvieron datos de importancia como la forma de la onda, los valores de frecuencia naturales, las zonas de perturbación física, el efecto de la resonancia y la reverberación, la correlación de densidad-viscosidad con la velocidad del sonido y de la onda. Con todas estas, se construyó un modelado matemático que permitiera establecer los valores de convergencia espacial, convergencia temporal, nivel de correlación, dependencia de las frecuencias con la intensidad, y en el caso estocástico, los tipos de superficies que podemos obtener para el desplazamiento de una perturbación.

Durante los estudios se maestría, la primicia establecía que los pulsos de luz o la interacción de fuentes constantes, como las monocromáticas, generan vibraciones por variaciones mecánica debido a la energía del haz. Y que estos valores dependen de las condiciones del medio, del fluido y de propiedades elásticas del objeto con el cual colisiona la luz. Esto fue totalmente comprobado, e incluso se demostró que se generan fenómenos de resonancia y de reverberación. Los cuales no estaban contemplados en la teoría original. La acústica depende tanto de las propiedades mecánicas del sistema como de condiciones de campo, lo cual fue uno de los principios básicos para este trabajo de doctorado.

Estaba pendiente por demostrar que estas condiciones de las perturbaciones pueden predecir los alcances de las ondas acústicas, ecuaciones para la velocidad del sonido e incluso un modelo para medir los cambios térmicos en el medio. Lo último no fue demostrado de forma explícita, aunque se denota en la manera en que fue estudiado el hecho. Al tener variaciones de presión, temperatura y humedad hay cambios acústicos, por lo cual, se puede aplicar ingeniería inversa en los cálculos y el modelo de filtros para calcular variaciones en el estado térmico de un fluido u objeto solido a través de sus ecuaciones de estado térmico.

Quedó demostrado que la simetría en tres ejes para una onda acústica se presente bajo ciertas características específicas como energías bajas o determinada aleatoriedad de las posiciones de las partículas. En conjunto con esto, aunque faltan datos numéricos en la tesis, se establecieron registros visuales que determinan la manera en que se conectan los conceptos.

A través de las ecuaciones del tensor de deformaciones, se demuestra también matemáticamente, que hay correlación entre las ondas electromagnéticas y el momento mecánico. Con equivalencias gracias a las ecuaciones y definiciones de Newton, Maxwell, Riemann y Noether, los tipos de fuerzas existen pueden tener una transferencia total o parcial, por energía con interacciones a distancia, o con soluciones en partículas. Mostrando cómo un campo magnético y eléctrico, localizados de forma puntual, tienen efectos a la distancia en medios materiales.

No hay una sola forma de percibir diferentes cambios en el medio, y ya que las ondas acústicas no son visibles, podemos ahora predecir cuales son las ubicaciones óptimas para medición de fenómenos sónicos o saber cuáles son los niveles de atenuación guiándose por el registro digital obtenido en comparación con lo esperado matemáticamente, usando la corrección mencionada en el análisis de PSD.



## TRABAJOS FUTUROS

La hipótesis original del trabajo establecía también el diseño de un dispositivo industrial para mediciones experimentales, además de un primer prototipo. Debido a la pandemia, no se pudo tener acceso a los laboratorios, ni al equipo necesario para construir el aparato, tampoco la oportunidad de trabajar en conjunto con las personas de la industria interesada en el aparato. El diseño y el prototipo quedan como trabajos pendientes hasta que se encuentre a otra empresa que esté interesada o que la primera, renueve su interés.

Estaba planeado hacer mediciones reales de presión, humedad relativa, temperatura y ruido un ambiente real. Esto fue realizado durante el periodo de revisión de la tesis, en una empresa metalmecánica donde pudo registrar una temperatura que llega a ser 5 grados superior que la temperatura en el exterior, además de que, en los días más calientes, la temperatura exterior era del 30% aproximadamente, y en el interior de un 11%. En cuanto al ruido, en todo momento se supera el límite seguro de 45 dBA, es decir, intensidad de ruido para percepción humana.

Aunque las variaciones de presión atmosférica en el exterior alteran las características del aire dentro de la industria, no tienen una relación directa debido a que el interior se comporta como su propio sistema atmosférico.

Se seguirán probando con arreglos de procesamiento de señal digital para que el corrimiento sea menor al 5%, incluso cuando se incluyen elementos del exterior, usando combinación de elementos analógicos como digitales.

Las ecuaciones serán estudiadas una vez más, incluyendo un mayor formalismo matemático para que estén cumplan tanto en esquemas físicos como matemáticos y que sea una referencia para ambas áreas del conocimiento.

## REFERENCIAS

### Referencias 1. Libros y artículos

1. Alexander, C. K., Sadiku, M. N. O., Fundamentos de circuitos eléctricos. 5ta edición. 2013. McGraw Hill Education.
2. Alton Everest, F, The Master Handbook of Acoustics. McGraw Hill, 4ta edición, Nueva York, Estados Unidos, pp. 50-64, 110-115. (2000)
3. Aris, R., *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, Chap. 6. ISBN: 0-486-66110-5. (1989)
4. ASTM D1004-13, Standard Test Method for Tear Resistance (Graves Tear) of Plastic Film and Sheeting, ASTM International, West Conshohocken, PA. (2013)
5. ASTM E1530-11(2016), Standard Test Method for Evaluating the Resistance to Thermal Transmission of Materials by the Guarded Heat Flow Meter Technique, ASTM International, West Conshohocken, PA (2016)
6. Brown, A., Garg, S., Montgomery, J. Automatic Rain and Cicada Chorus Filtering of Bird Acoustic Data. *Applied Soft Computing*, 81: pp. 105501-105519. (2019)
7. Burkay, M., Olgun, O., Hacıhaboglu, H., Multiple Sound Source Localisation with Steered Response Power Density and Hierarchical Grid Refinement. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, 26(11): pp. 2215-2229. (2018)
8. Butkov, E., *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, St. John's University, Nueva York, Estados Unidos. Páginas 154-156, 291-294, 503-543. (1973)
9. Daniel, A., Makarovskiy, O., *Pink Noise in Physics and Music*, The University of Nottingham: School of Physics and Astronomy, Nottingham, England. (2015)

10. Ditchburn, R. W., *Light*. Dover Publications, INC., 1era edición, Nueva York, Estados Unidos. pp. 463, 464, 555-559. (Abril, 1991)
11. Egerev, S. V., Lyamshev, L. M., Puchenkov, O. V., *Laser dynamic optoacoustic diagnostics of condensed media*, 160: 111-154. (1990)
12. Elmore, W. C., Heal, M. A., *Physics of Waves*. Dover Publications, INC., Nueva York, Estados Unidos. pp. 2, 70-92, 94-96, 104-106, 129-147, 152. (1985)
13. Flores Martínez, N. A., *Estudio multidisciplinario para control de señales neuronales por medio de física acústica, aplicado a los estudiantes de nivel superior en Ciudad Universitaria de la UANL*. (Junio, 2014)
14. Freeman, W. J., *Searching for signal a noise in the chaos of brain waves*. San Francisco Meeting of the American Association for the Advancement of Science. (1989)
15. Gratton, J., *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. Buenos Aires, Argentina / Páginas 51, 52, 57-59. (Octubre, 2002).
16. Hanna, J. R., Rowland, J. H., *Fourier Series, Transforms, and Boundary Value Problems*. 2nd edition. Dover Publications.
17. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*. 3rd edition. Wiley. (2004)
18. Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Course of Theoretical Physics, Volume 8: Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press. (1963)
19. Lornelí Mejía, P. A., Castellanos Abrego, N. P., Méndez González, M. M., Cruz Orea, A., Jiménez Pérez, J. L., *Aplicaciones biofísicas de la acústica. Investigación en discapacidad*, 1, 90-94. (Septiembre-Diciembre 2012)
20. Marín, E., *Escuchando la luz: breve historia y aplicaciones del efecto fotoacústico*. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2: 209-215. (2008)
21. Mauldin, J. H., *Luz, laser y óptica*. McGraw Hill, 1era edición, España. pp. 12, 245, 246. (1992)
22. Mile-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*. 5ta edición. Dover Publications, INC., Nueva York, Estados Unidos: pp. 72-76. (2011)

23. Morfey, C. L., Sorokin, S. V., Gabard, G., The effects of viscosity on sound radiation near solid surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 690: 441-460. (2012)
24. Newland, D. E., *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed., Dover Publications, New York, Chap. 1, Chap. 2, Chap. 3, Chap. 5. ISBN: 0-48-644274-8. (2005)
25. Oliveros Mesa, N. F., Solarte Blandón, P. A., ¿Cómo hacer un electroimán? Universidad Nacional de Colombia. (2012).
26. Perepelitsa, D. V., *Johnson Noise and Shot Noise*, MIT Department of Physics, Cambridge, Massachusetts. (2006)
27. Randall, R. H., *An Introduction to Acoustics*. Dover Publications, INC., Mineola, New York, Estados Unidos. pp. 240-246, 252-254. (2005)
28. Reitz, J. R., Milford, F. J., Christy, R. W., *Fundamentos de teoría electromagnética*. 3era edición. Addison-Wesley Interamericana.
29. Rosencwaig, A., Gersho, A., Theory of the photoacoustic effect with solids. *Journal of Applied Physics*, 47: 64. (1976)
30. Rosenhouse, G., The essence of noise in nature with reference to acoustics. *WIT Transactions on Ecology and The Environment*, 160. (2012)
31. Tam, A. C., Applications of photoacoustic sensing techniques. *Review of Modern Physics*, 58 (2): 381-431. (1986)
32. Wheeler, H. A., Simple Inductance Formulas for Radio Coils. Pages, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 16(10), pp. 1398-1400. (1928)

## **Referencias 2. Fuentes de internet**

1. Datos térmicos de fluidos. Recuperado de: Appendix C. Physical properties of water. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781118131473.app3/pdf>
2. Propiedades térmicas de ciertos gases. Recuperado de: eFunda. Gas Acoustic Properties.

[http://www.efunda.com/materials/common\\_matl/Common\\_Matl.cfm?MatlPhase=Gas&MatlProp=Acoustic#Acoustic&search\\_string=air](http://www.efunda.com/materials/common_matl/Common_Matl.cfm?MatlPhase=Gas&MatlProp=Acoustic#Acoustic&search_string=air)

3. Propiedades mecánicas de ciertos gases. Recuperado de: eFunda. Gas Physical Properties.  
[http://www.efunda.com/materials/common\\_matl/Common\\_Matl.cfm?MatlPhase=Gas&MatlProp=Physical#Physical&search\\_string=air](http://www.efunda.com/materials/common_matl/Common_Matl.cfm?MatlPhase=Gas&MatlProp=Physical#Physical&search_string=air)
4. Datos de análisis de movimiento armónico. Recuperado de: Hyperphysics: Simple Harmonic Motion (imagen). <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/imgmec/shm.gif>
5. Ficha técnica del osciloscopio. Recuperado de: Keysight Technologies. DSOX2002A Oscilloscope: 70 MHz, 2 analog channels. Especificaciones y ficha técnica. <http://www.keysight.com/en/pdx-x201827-pn-DSOX2002A/oscilloscope-70-mhz-2-analog-channels?pm=spc&nid=-32542.1150180&cc=US&lc=eng>
6. Ficha técnica del multímetro. Recuperado de: Keysight Technologies. U1232A True RMS 6000 Count Handheld Digital Multimeter. Ficha técnica y especificaciones. <http://www.keysight.com/en/pd-2000224-pn-U1232A/true-rms-6000-count-handheld-digital-multimeter?cc=MX&lc=eng>
7. Ficha técnica del diodo laser. Recuperado de: Laser Diode Technologies. High-Power (65A) Laser Diode Controller: Manual. <https://www.thorlabs.com/catalogpages/425.pdf>
8. Información sobre la dinámica de fluidos en condiciones ambiente: Lección 7. Dinámica de Fluidos. Universidad de Granada, España. <http://www.ugr.es/~jtorres/t7.pdf>
9. Imagen del micrófono de cristal. Recuperado de: <http://www.mediacollege.com/audio/images/mic-condenser.gif>
10. Imagen del micrófono de diafragma. Recuperado de: [http://electriciantraining.tpub.com/14184/img/14184\\_51\\_1.jpg](http://electriciantraining.tpub.com/14184/img/14184_51_1.jpg)
11. Información sobre la velocidad del sonido: National Aeronautics and Space Administration. Speed of Sound. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/sound.html>

12. Información científica sobre la elasticidad: Tema 6. Elasticidad. Universidad de Almería.  
<http://www.ual.es/personal/mnavarro/Tema%206%20Elasticidad.pdf>
13. Datos mecánicos del aire. Recuperado de: The Engineering Toolbox. Air Density and Specific Weight. [http://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d\\_600.html](http://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d_600.html)
14. Datos mecánicos de metales. Recuperado de: The Engineering Toolbox. Metals and Alloys – Densities. [http://www.engineeringtoolbox.com/metal-alloys-densities-d\\_50.html](http://www.engineeringtoolbox.com/metal-alloys-densities-d_50.html)
15. Datos elásticos de metales. Recuperado de: The Engineering Toolbox. Metals and Alloys – Bulk Modulus. [http://www.engineeringtoolbox.com/bulk-modulus-metals-d\\_1351.html](http://www.engineeringtoolbox.com/bulk-modulus-metals-d_1351.html)
16. Datos elásticos de varios materiales. Recuperado de: The Engineering Toolbox. Modulus of Elasticity of Young's modulus – and Tensile Modulus for common Materials. [http://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d\\_417.html](http://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html)
17. Datos acústicos de líquidos. Recuperado de: The Engineering Toolbox. Speed of Sound in common Liquids. [http://www.engineeringtoolbox.com/sound-speed-liquids-d\\_715.html](http://www.engineeringtoolbox.com/sound-speed-liquids-d_715.html)
18. Datos acústicos del aire. Recuperado de: The Engineering Toolbox. The Speed of Sound in Air. [http://www.engineeringtoolbox.com/air-speed-sound-d\\_603.html](http://www.engineeringtoolbox.com/air-speed-sound-d_603.html)
19. Ficha técnica del diodo láser de alta potencia. Recuperado de: ThorLabs. LDC3065-488 – High Power Laser Diode Driver: Especificaciones. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=LDC3065-488>
20. Datos de constantes elásticas. Recuperado de: Wikipedia: Constante elástica, Anexo: Constantes elastoplásticas de diferentes materiales. [https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Constante\\_elastoplásticas\\_de\\_diferentes\\_materiales](https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Constante_elastoplásticas_de_diferentes_materiales)
21. Imagen de flujo magnético. Recuperado de: [https://es.wikipedia.org/wiki/Flujo\\_magnético](https://es.wikipedia.org/wiki/Flujo_magnético)

22. Propiedades del producto NOMEX 410. Recuperado de:  
<http://www.dupont.mx/productos-y-servicios/electronic-electrical-materials/electrical-insulation/brands/nomex-electrical-insulation/articles/nomex-410.html>
  
23. Propiedades de electroimanes. Recuperado de:  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnet>
  
25. Análisis de un circuito eléctrico de tipo RL, incluyendo un programa de simulación. Recuperado de: <https://electricalacademia.com/circuits-with-matlab/current-through-inductor-in-rl-circuit-using-matlab/>
  
26. Datos de funcionamiento de alambre magneto. Recuperado de:  
<https://www.cerrowire.com/products/resources/tables-calculators/ampacity-charts/>

## APÉNDICE A. RUIDO

Las definiciones de ruido cambian de un área a otra del conocimiento. En acústica ya fue definido en unos de los capítulos, para ingeniería electrónica se define al ruido como cualquier perturbación no deseada que oscurece o interfiere con una señal deseada. Podemos mencionar que el ruido térmico está presente en cualquier sistema electrónico que se encuentre a cualquier temperatura y que únicamente no está presente en el cero absoluto. El límite es importante dado que establece el límite de la resolución del sensor.

En electrónica se suele definir al ruido como una señal totalmente aleatoria, aunque se ha clasificado por diversos tipos de ruido, por las frecuencias presentes y los niveles de intensidad. Están determinados por propiedades eléctricas, mecánicas y térmicas, no son totalmente aleatorios, son estocásticos.

En el límite cuando la banda de frecuencias va desde  $\omega_1 = 0$  hasta  $\omega_2 = \infty$ , se dice que es un espectro llamado blanco, correspondiente al ruido blanco, con el término de ruido originalmente haciendo referencia a los circuitos electrónicos. Sin embargo, dada las condiciones de existencia de dicho espectro, el ruido blanco es una construcción teórica exclusivamente, no obstante, podemos considerar que el ancho de banda se puede llamar blanco si este se extiende más allá de los valores de frecuencia de interés. Otra consideración válida para llamarle ruido blanco a un conjunto de señales medidas, es si el valor promedio obtenido en el proceso es cero, de forma que su función de distribución espectral sea una línea recta creciente:

$$F(\omega) = \text{constante} \cdot \omega$$

Cuando la frecuencia límite es  $\omega_1 = 0$ , la función de autocorrelación correspondiente al ruido blanco, se puede presentar por

$$R_x(\tau) = \frac{4S_0}{\tau} \cos\left(\frac{\omega_2\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_2\tau}{2}\right) = 2S_0 \frac{\sin(\omega_2\tau)}{\tau}$$

Se evalúan las funciones de densidad de probabilidad, autocorrelación y de densidad espectral de potencia (PSD). En este caso, para un proceso cuasi-estacionario, siendo la función de densidad de probabilidad como el cambio en el tiempo de los posibles estados de una función de onda:

$$P(\eta \leq \eta(t_0) \leq \eta + d\eta) = \frac{2(dt)}{T} = \frac{\omega' d\eta}{\pi\eta_0(\omega_m + \varphi)\eta}$$



Y a su vez, la función de autocorrelación en base a la densidad obtenida:

$$R_{\eta}(\tau) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta_0(\omega_m + \varphi)^7 e^{-3(\omega_m + \varphi)\tau} \sinh[3(\omega_m + \varphi)T]}{\pi e^{3(\omega_m + \varphi)T}}$$

Función de densidad espectral de la potencia para el mismo proceso:

$$S_{\eta}(\omega') = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta_0(\omega_m + \varphi)^5 e^{-3(\omega_m + \varphi)\tau} \sinh[3(\omega_m + \varphi)T]}{6\pi^2 e^{3(\omega_m + \varphi)T}} \frac{[3(\omega_m + \varphi)]^2}{\omega'^2 + [3(\omega_m + \varphi)]^2}$$

Como una prueba débil, se establecen relaciones matemáticas para los elementos de la densidad espectral de potencia para generar las densidades correspondientes a cada ruido. Ya sea que tengan expresión matemática similar o que su gráfica sea similar. Esto para ciertas condiciones del espectro de frecuencias de muestreo y de vibración acústica:

- Para un valor de tiempo final muy grande, el término  $e^{-3(\omega_m + \varphi)T} \sinh[3(\omega_m + \varphi)T]$  converge aproximadamente a 0.5. Para dicho caso, las frecuencias de vibración del fluido resonante son próximas a un valor promedio. Las diferentes fases se pueden considerar cercanas a cero y el término  $[3(\omega_m + \varphi)]^5 = \alpha^5$  se aproxima a una constante para cualquier índice  $m$ . Entonces, su PSD tiende a:

$$S_{\eta}(\omega') \cong \frac{\eta_0 A}{6\pi^2} \frac{\alpha^2}{\omega'^2 + \alpha^2}$$

En comparación con la PSD del ruido blanco:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

En el caso del PSD para el ruido rosa, se tienen ciertas constantes de relajación para el ancho de banda del fenómeno, tales que  $0 < \omega < \lambda_1 < \lambda_2$  y un espectro total  $N_0^2$ . Como se menciona en y por definición:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{N_0^2 n}{\omega(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[ \arctan\left(\frac{\lambda_2}{\omega}\right) - \arctan\left(\frac{\lambda_1}{\omega}\right) \right]$$

Con esta función, se prevé que tiene un valor máximo para una frecuencia y de acuerdo a las constantes de relajación, la función tiende a cero. Así mismo, para la

función, si hay una frecuencia central que es predominante, las fases son tan pequeñas de manera que  $\omega'^2 \ll \alpha^2$ . Y con esto, la PSD tiende a:

$$S_{\eta}(\omega') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta_0 \alpha^5 e^{-3\alpha(\tau+T)}}{6\pi^2}$$

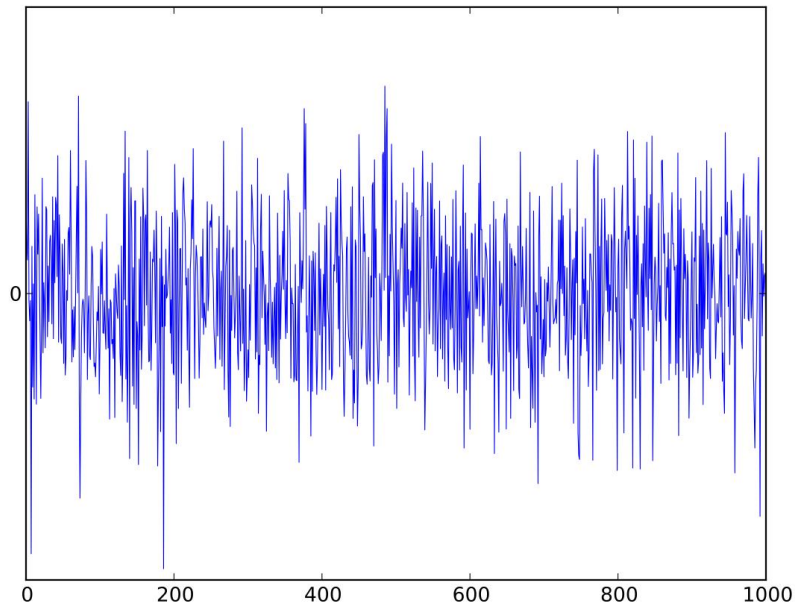
Siendo que la expresión no tiene la misma forma que, pero al graficarse tienen el mismo comportamiento con un valor máximo y después decrecer.

El término ruido, se usa en general cuando estamos hablando de una señal acústica en el aire (pudiendo ser sonido más no exclusivamente) que está siendo grabada de alguna manera (micrófonos tradicionales o micrófonos láser) y se presentan elementos no deseados en la señal digital. A continuación, se mencionan el significado de algunos de estos:

Blanco (o gaussiano) – Se puede tomar como una señal aleatoria, generada por un proceso estocástico de parámetros no correlacionados, este tipo de ruido es la mejor definición para cuando hablamos de condiciones que hemos ignorado en el análisis de un sistema, se genera su PSD a través de un conjunto de transformadas de la curva de Gauss, para una frecuencia central que se va corriendo:

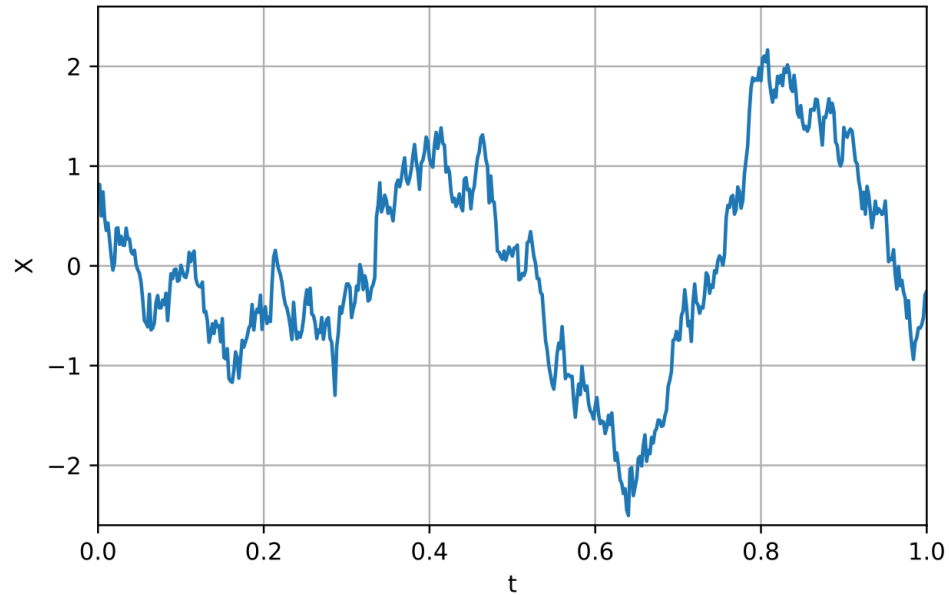
$$f_i(\omega_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left[\frac{(\omega_{ij} - \bar{\omega}_i)^2}{2\sigma^2}\right]\right)$$

El ruido blanco existe únicamente como algo teórico, dado que se define como una señal donde todas las frecuencias están presentes a la misma intensidad. Esto es solo posible en modelos matemáticos, aunque en ingeniería y física, se usa un ruido similar al blanco, considerando un rango de frecuencias que dependen de la aplicación. Al calcular el PSD del ruido blanco, debe generar una línea plana.



*Figura A.1. Representación del ruido blanco como una respuesta de frecuencias, en el eje x se tiene la frecuencia y en el eje y se tiene la intensidad.*

Marrón (o ruido browniano, ruido rojo) – Es una descripción estadística de variaciones en la trayectoria de una partícula (o conjunto), su primer uso fue en la descripción del movimiento browniano, en conjunto con el ruido blanco, se define siguiendo la curva de Gauss. Para este, la ecuación determina las frecuencias con mayor probabilidad. Existe como algo teórico, se estima que sea un ruido de tipo aleatorio, considerando que las partículas o las señales, tienen relación con una frecuencia base, la aleatoriedad es imposible. Se hacen aproximaciones cuando responde a un proceso estocástico.



*Figura A.2. Representación de una señal de ruido de Brown como una función de tiempo, o una dependencia del tiempo.*

Rosa – Son las frecuencias alteradas o eliminadas de una secuencia de armónicos en la producción musical, ya que la finalidad es hacer una melodía “agradable” al oído, se eliminan ciertas condiciones naturales de una canción. Esto puede generar confusión, ya que en acústica la definición fue la anterior, y en ingeniería, se define al ruido rosa como el ruido de Brown que se encuentra en un nivel de una octava por debajo en intensidad.

Existen otras definiciones de ruido que, al menos hasta el material consultado, no se definen a detalle o se dan ejemplos concretos:

- térmico (de Johnson) que altera voltajes y corrientes dentro de un circuito,
- ruido de disparo, dentro de un circuito electrónico debido al encendido y apagado de sus múltiples componentes, siendo que algunos de estos no se pueden eliminar, y,
- frentes de onda invasores generados por otras perturbaciones acústicas en un radio no mayor a 10 metros desde el punto donde se estudia la perturbación de interés.
- negro, - azul, - gris.

## APÉNDICE B. Navier-Stokes Matricial

Este apéndice muestra los pasos que se siguieron para definir las matrices y algunos de los productos para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes como diádicas, utilizando productos matriciales considerando a las derivadas como elementos en algunos momentos y como operadores en otros. Aunque se muestra la mayor parte del desarrollo, no se tienen todos los elementos del paso a paso. Solo los principales.

Analizando primero la ecuación de Navier-Stokes en su expresión tensorial con viscosidad dinámica para posteriormente definirlo en forma matricial:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Considerando las siguientes matrices para la ecuación anterior:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}$$

$$\rho f_i = \begin{pmatrix} \rho g_r \\ \rho g_\theta \\ \rho g_\phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_r)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\theta)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\phi)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}^T$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}^T$$

Paso 1. – Se evalúan las derivadas parciales en las matrices correspondientes a la desaceleración por viscosidad:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_r)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\theta)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_\phi)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Paso 2. - Se realizan los productos matriciales que están en los corchetes, como algunas derivadas parciales. Al mismo tiempo se encuentran las transpuestas de las matrices correspondientes a la desaceleración por la viscosidad:

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u_r \frac{\partial}{\partial r} & u_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ u_\theta \frac{\partial}{\partial r} & u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ u_\phi \frac{\partial}{\partial r} & u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right]^T \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] + 0 + 0 \\ 0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\ 0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right]^T \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 3. – Se realiza el producto de matrices faltante, correspondiente a la aceleración de la convección de partículas:

$$\begin{pmatrix} u_r \frac{\partial}{\partial r} & u_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ u_\theta \frac{\partial}{\partial r} & u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ u_\phi \frac{\partial}{\partial r} & u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r \frac{\partial}{\partial r} u_r + u_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi \\ u_\theta \frac{\partial}{\partial r} u_r + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi \\ u_\phi \frac{\partial}{\partial r} u_r + u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi \end{pmatrix}$$

Paso 4. – Calcular las derivadas faltantes en las matrices vector resultantes:

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 5. – Se reescribe la ecuación de N-S con cada elemento como una matriz vector o suma de estas:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\rho f_i = \begin{pmatrix} \rho g_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial (\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix}$$



## APÉNDICE C. MÉTODO DE FRÖBENIUS PARA NAVIER-STOKES

Este apéndice tiene como finalidad cubrir el desarrollo matemático para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para el sistema acústico puro, considerando que los parámetros como densidad y viscosidad puede tomarse como constantes, suponiendo matemáticamente una función que es convergente en el espacio. De tipo polinómica infinita para incluir una expresión general que no dependa de un determinado rango de valores que puede tener la función o expresión matemática.

Para proceder a seguir los pasos del método de Fröbenius, se calculan las derivadas de la función propuesta considerando que los índices de sumatorias son independientes uno de otro, por lo cual se podría factorizar el termino temporal en la ecuación diferencial radial-temporal simplificada. Se está proponiendo una función solución para sustituirla en la ecuación radial. Dicha solución es convergente en el radio, basándose en la evidencia experimental.

Paso 1. – Se deriva la función propuesta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)r^{n+s-1}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)(n+s-1)r^{n+s-2}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= - \sum_{m=0}^{\infty} (\omega_m + \varphi_m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n r^{n+s}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t)\end{aligned}$$

Paso 2. – Sustitución de las derivadas en la ecuación radial-temporal:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)(n+s-1)r^{n+s-2}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) \\
& + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)r^{n+s-2}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) \\
& - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^{n+s-2}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) \\
& + \frac{\rho}{3\mu} \sum_{m=0}^{\infty} (\omega_m + \varphi_m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^{n+s}}{n!} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) = 0
\end{aligned}$$

Paso 3. – Se factorizan las sumatorias con respecto a la variable temporal:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)(n+s-1)r^{n+s-2}}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)r^{n+s-2}}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^{n+s-2}}{n!} \right. \\
& \left. + \frac{\rho}{3\mu} (\omega_m + \varphi_m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^{n+s}}{n!} \right\} \exp(-\omega_m t - \varphi_m t) = 0
\end{aligned}$$

Paso 4. – Dado que la función exponencial negativa se aproxima a cero en el infinito sin tomar ese valor, se considera que los términos dentro de los corchetes valen cero:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)(n+s-1)r^{n+s-2}}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+s)r^{n+s-2}}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^{n+s-2}}{n!} \\
& + \frac{\rho}{3\mu} (\omega_m + \varphi_m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^{n+s}}{n!} = 0
\end{aligned}$$

Paso 5. – Para poder factorizar con respecto a una única suma, el exponente de la variable debe ser igual en todas las sumas, por ello, en la última sumatoria se cambia el índice  $n$  por  $n-2$  y las demás sumatorias se corren para  $n=0$  y  $n=1$ :

$$\begin{aligned}
& [s(s-1) + 2s - 2]a_0 r^{s-2} + [(s+1)s + 2(s+1) - 2]a_1 r^{s-1} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a_{n-2} \rho (\omega_m + \varphi_m)}{3\mu (n-2)!} + \frac{a_n [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s) - 2]}{n!} \right\} r^{n+s-2} \\
& = 0
\end{aligned}$$

Paso 6. – Dado que la variable misma ni los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  pueden ser cero para todos los casos, se considera que cada uno de los paréntesis vale cero por igual, de manera que se obtienen tres ecuaciones a analizar:

$$\begin{aligned} [s(s-1) + 2s - 2] &= 0 \\ [(s+1)s + 2(s+1) - 2] &= 0 \\ \frac{a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n-2)!} + \frac{a_n[(n+s)(n+s-1) + 2(n+s) - 2]}{n!} &= 0 \end{aligned}$$

Paso 7. – Se factorizan los elementos que involucran el parámetro  $s$  para simplificar las expresiones:

$$\begin{aligned} s^2 - s + 2s - 2 &= s^2 + s - 2 = 0 \\ s^2 + s + 2s + 2 - 2 &= s^2 + 3s = 0 \\ \frac{a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n-2)!} + \frac{a_n[(n+s)(n+s-1+2) - 2]}{n!} &= 0 \end{aligned}$$

Paso 8.- Para los elementos que no están relacionados con los coeficientes, se factorizan los términos buscando el valor del parámetro  $s$ :

$$\begin{aligned} (s-1)(s+2) &= 0 \\ s(s+3) &= 0 \\ s &= -3, -2, 0, 1 \end{aligned}$$

Paso 9. – Se toman los valores del parámetro  $s$  y se sustituyen en la ecuación de recurrencia y se despeja para calcular los valores de los coeficientes de cada elemento del polinomio. Se comienza con el parámetro  $s = 0$  con el índice  $n$  corriendo desde 2 hasta 7, por elección personal. También definiendo  $\alpha_m = \frac{\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu}$ :

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{n! a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n-2)! [(n+s)(n+s+1) - 2]} \quad \forall n \geq 2 \\ a_n &= -\frac{n(n-1)(n-2)! a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n-2)! [(n+s)(n+s+1) - 2]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu[(n+s)(n+s+1) - 2]} \\ a_n &= -\frac{n(n-1)a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu[n(n+1) - 2]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu[n^2 + n - 2]} \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)n(n-1)}{3\mu[(n-1)(n+2)]} = -\frac{a_{n-2}\rho n(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n+2)} \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}\alpha_m n}{(n+2)} \end{aligned}$$

Coeficiente	$n$
$a_2 = -\frac{a_0\alpha_m(2)}{(4)}$	2
$a_3 = -\frac{a_1\alpha_m(3)}{(5)}$	3
$a_4 = -\frac{a_2\alpha_m(4)}{(6)} = \frac{\alpha_m^2 a_0(2)(4)}{(4)(6)}$	4
$a_5 = -\frac{a_3\alpha_m(5)}{(7)} = \frac{\alpha_m^2 a_1(3)(5)}{(5)(7)}$	5
$a_6 = -\frac{a_4\alpha_m(6)}{(8)} = -\frac{\alpha_m^3 a_0(2)(4)(6)}{(4)(6)(8)}$	6
$a_7 = -\frac{a_5\alpha_m(7)}{(9)} = -\frac{\alpha_m^3 a_1(3)(5)(7)}{(5)(7)(9)}$	7

Tabla C.1. Primera tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.

Paso 10. – Conociendo los primeros índices para la función en el método de Fröbenius, se sustituyen dichos valores para crear la función exponencial:

$$f_1(r) = a_0 - \frac{a_0\alpha_m(2)}{(4)}r^2 + \frac{\alpha_m^2 a_0(2)(4)}{(4)(6)}r^4 - \frac{\alpha_m^3 a_0(2)(4)(6)}{(4)(6)(8)}r^6 + \dots$$

$$f_1(r) = 2a_0 \left( -\frac{0!!}{2!!} + \frac{\alpha_m 2!!}{(4!!)}r^2 - \frac{\alpha_m^2 4!!}{6!!}r^4 + \frac{\alpha_m^3 6!!}{8!!}r^6 - \dots \right)$$

$$f_2(r) = a_1 r - \frac{a_1\alpha_m(3)}{(5)}r^3 + \frac{\alpha_m^2 a_1(3)(5)}{(5)(7)}r^5 - \frac{\alpha_m^3 a_1(3)(5)(7)}{(5)(7)(9)}r^7 + \dots$$

$$f_2(r) = 3a_1 \left( \frac{1!!}{3!!}r - \frac{a_1\alpha_m 3!!}{(5!!)}r^3 + \frac{\alpha_m^2 5!!}{7!!}r^5 - \frac{\alpha_m^3 a_1 7!!}{9!!}r^7 + \dots \right)$$

Paso 11. - Por inferencia se establece una forma recurrente que sea válida para cualquier índice  $n$ :

$$f_1(r) = 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{(2n+2)!!} r^{2n}$$

$$f_2(r) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1}$$

Paso 12. – Se evalúa ahora la ecuación de recurrencia con el parámetro  $s = -2$  evaluando de nuevo desde 2 hasta 7, a menos que surja una inconsistencia:

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu[(n+s)(n+s+1)-2]} \quad \forall n \geq 2$$

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu[(n-2)(n-2+1)-2]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[(n-2)(n-1)-2]}$$

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n^2 - n - 2n + 2 - 2)} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n^2 - 3n)} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{n(n-3)}$$

$$a_n = -\frac{(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n-3)}$$

Coeficiente	$n$
$a_2 = -\frac{a_0\alpha_m}{-1}$	2
$a_3 = -\frac{2a_1\alpha_m}{1}$	3
$a_4 = -\frac{3a_2\alpha_m}{1} = -\frac{3a_0\alpha_m^2}{1}$	4
$a_5 = -\frac{4a_3\alpha_m}{2} = \frac{2(4)a_1\alpha_m^2}{1(2)}$	5
$a_6 = -\frac{5a_4\alpha_m}{3} = \frac{3(5)a_0\alpha_m^3}{1(2)(3)}$	6
$a_7 = -\frac{6a_5\alpha_m}{4} = -\frac{2(4)(6)a_1\alpha_m^3}{1(2)(4)}$	7

Tabla C.2. Segunda tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.

Paso 13. – Se procede a sustituir todos los coeficientes para determinar la función solución bajo el parámetro  $s = -2$ , junto con la sumatoria correspondiente a cada serie:

$$g_1(r) = a_0 + a_0\alpha_m r^2 - \frac{3a_0\alpha_m^2}{1} r^4 + \frac{3(5)a_0\alpha_m^3}{(2)(3)} r^6 - \dots$$

$$g_1(r) = a_0 + a_0 \left( \frac{1!! \alpha_m r^2}{(-1)!!} - \frac{3!! \alpha_m^2 r^4}{1!!} + \frac{5!! \alpha_m^3}{3!!} r^6 - \dots \right)$$

$$g_1(r) = a_0 + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!}$$

$$g_2(r) = a_1 r - \frac{2a_1 \alpha_m}{1} r^3 + \frac{2(4)a_1 \alpha_m^2}{1(2)} r^5 - \frac{2(4)(6)a_1 \alpha_m^3}{1(2)(4)} r^7 + \dots$$

$$g_2(r) = a_1 r - a_1 \left( \frac{2!!}{1!!} \alpha_m r^3 - \frac{4!!}{2!!} \alpha_m^2 r^5 + \frac{6!!}{4!!} \alpha_m^3 r^7 - \dots \right)$$

$$g_2(r) = a_1 r - a_1 r^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)!! \alpha_m^n r^{2n+1}}{n!!}$$

Paso 14. – Se sustituye el parámetro  $s = -3$  en la ecuación de recurrencia evaluando de nuevo desde 2 hasta 9, a menos que surja una inconsistencia:

$$a_n = -\frac{n! a_{n-2} \rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n-2)! [(n+s)(n+s+1) - 2]} \quad \forall n \geq 2$$

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[(n-3)(n-3+1) - 2]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[(n-3)(n-2) - 2]}$$

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n^2 - 2n - 3n + 6 - 2)} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n^2 - 5n + 4)} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n-4)(n-1)}$$

$$a_n = -\frac{na_{n-2}\alpha_m}{(n-4)}$$

Coeficiente	$n$
$a_2 = \frac{2a_0\alpha_m}{2}$	2
$a_3 = \frac{3a_1\alpha_m}{1}$	3
$[(4) - 4]a_4 = -4a_3\alpha_m$	4
$a_5 = -\frac{5a_5\alpha_m}{(1)} = -\frac{5(3)a_1\alpha_m^2}{1(1)}$	5
$a_7 = -\frac{7a_7\alpha_m}{3} = \frac{7(5)(3)a_1\alpha_m^3}{(3)(1)(1)}$	7
$a_9 = -\frac{9a_9\alpha_m}{5} = -\frac{(9)(7)(5)(3)a_1\alpha_m^5}{(5)(3)(1)(1)}$	9

Tabla C.3. Tercera tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.

Paso 15. – Para evitar inconsistencias en los coeficientes se supone que  $a_4 = 0$ , y con ello, todos los coeficientes con subíndice par por encima de 4 se consideran cero.

Ahora se sustituyen los coeficientes para generar las funciones correspondientes al último parámetro:

$$h_1(r) = a_0 + a_0\alpha_m r^2$$

$$h_2(r) = a_1 r + \frac{3a_1\alpha_m}{1} r^3 - \frac{5(3)a_1\alpha_m^2}{1(1)} r^5 + \frac{7(5)(3)a_1\alpha_m^3}{(3)(1)(1)} r^7 - \frac{(9)(7)(5)(3)a_1\alpha_m^4}{(5)(3)(1)(1)} r^9 - \dots$$

$$h_2(r) = a_1 r + \frac{3!! a_1\alpha_m}{(-1)!!} r^3 - \frac{5!! a_1\alpha_m^2}{1!!} r^5 + \frac{7!! a_1\alpha_m^3}{3!!} r^7 - \frac{9!! a_1\alpha_m^4}{5!!} r^9 - \dots$$

$$h_2(r) = a_1 r + a_1\alpha_m r^3 \left( \frac{3!!}{(-1)!!} - \frac{5!! a_1\alpha_m}{1!!} r^2 + \frac{7!! a_1\alpha_m^2}{3!!} r^4 - \frac{9!! a_1\alpha_m^3}{5!!} r^6 - \dots \right)$$

$$h_2(r) = a_1 r + a_1\alpha_m r^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-1)!!}$$

Paso 16. – Se sustituye el parámetro  $s = 1$  en la ecuación de recurrencia evaluando de nuevo desde 2 hasta 7, a menos que surja una inconsistencia:

$$a_n = -\frac{n! a_{n-2} \rho(\omega_m + \varphi_m)}{3\mu(n-2)! [(n+s)(n+s+1) - 2]} \quad \forall n \geq 2$$

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[(n+1)(n+1+1) - 2]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[(n+1)(n+2) - 2]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[n^2 + 2n + n + 2 - 2]}$$

$$a_n = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{[n^2 + 3n]} = -\frac{n(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{n(n+3)}$$

$$a_n = -\frac{(n-1)a_{n-2}\alpha_m}{(n+3)}$$

Coeficiente	$n$
$a_2 = -\frac{a_0\alpha_m}{5}$	2
$a_3 = -\frac{2a_1\alpha_m}{6}$	3
$a_4 = -\frac{3a_3\alpha_m}{7} = \frac{3a_0\alpha_m^2}{5(7)}$	4
$a_5 = -\frac{4a_5\alpha_m}{8} = \frac{2(4)a_1\alpha_m^2}{6(8)}$	5
$a_6 = -\frac{5a_4\alpha_m}{9} = -\frac{3(5)a_0\alpha_m^3}{5(7)(9)}$	6

$a_7 = -\frac{6a_9\alpha_m}{10} = -\frac{2(4)(6)a_1\alpha_m^3}{6(8)(10)}$	7
---	---

Tabla C.4. Cuarta tabla de valores auxiliares para la solución por medio de método de Fröbenius.

Paso 17. – Se procede a sustituir todos los coeficientes para determinar la función solución bajo el parámetro  $s = 1$ , junto con la sumatoria correspondiente a cada serie:

$$y_1(r) = a_0 - \frac{a_0\alpha_m}{5}r^2 + \frac{3a_0\alpha_m^2}{5(7)}r^4 - \frac{3(5)a_0\alpha_m^3}{5(7)(9)}r^6 + \dots$$

$$y_1(r) = a_0 - 3a_0r^2 \left( \frac{1}{3(5)} - \frac{3a_0\alpha_m}{3(5)(7)}r^2 + \frac{3(5)a_0\alpha_m^2}{3(5)(7)(9)}r^4 - \dots \right)$$

$$y_1(r) = a_0 - 3a_0\alpha_m r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n+5)!!}$$

$$y_2(r) = a_1 r - \frac{2a_1\alpha_m}{6}r^3 + \frac{2(4)a_1\alpha_m^2}{6(8)}r^5 - \frac{2(4)(6)a_1\alpha_m^3}{6(8)(10)}r^7 + \dots$$

$$y_2(r) = a_1 \left( r - \frac{\alpha_m}{3}r^3 + \frac{2\alpha_m^2}{3(4)}r^5 - \frac{2(3)\alpha_m^3}{3(4)(5)}r^7 + \dots \right)$$

$$y_2(r) = 2a_1 \left( \frac{0!}{2!}r - \frac{1!\alpha_m}{3!}r^3 + \frac{2!\alpha_m^2}{4!}r^5 - \frac{3!\alpha_m^3}{5!}r^7 + \dots \right)$$

$$y_2(r) = 2a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \alpha_m^n r^{2n+1}}{(n+2)!}$$

Todas las funciones generadas por la ecuación de recurrencia y por el método de Fröbenius se enlistan a continuación:

$$f_1(r) = 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{(2n+2)!!} r^{2n}$$

$$f_2(r) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^n (-1)^n (2n)!!}{3(2n+2)!!} r^{2n+1}$$

$$g_1(r) = a_0 + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-3)!!}$$

$$g_2(r) = a_1 r - a_1 r^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)!! \alpha_m^n r^{2n+1}}{n!!}$$



$$h_1(r) = a_0 + a_0 \alpha_m r^2$$

$$h_2(r) = a_1 r + a_1 \alpha_m r^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_m^n r^{2n}}{(2n-1)!!}$$

$$y_1(r) = a_0 - 3a_0 \alpha_m r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!! \alpha_m^n r^{2n}}{(2n+5)!!}$$

$$y_2(r) = 2a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \alpha_m^n r^{2n+1}}{(n+2)!}$$

## APÉNDICE D. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones mencionadas en el texto, son de tipo estocásticos y se ha demostrado de forma conceptual y parcialmente matemática, que se pueden aplicar transformadas de Laplace en estos sistemas, dichas transformadas son resueltas en este apartado, aunque se mencionan algunos pasos generales que se aplican, no son todos los pasos, ya que ciertos procesos algebraicos se dejan como algo obvio.

Paso 1. – Se expresan todas las derivadas de forma explícita:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\mu_0}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right] \\ \rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\mu_0}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \left( 2r u_r + r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right] \\ \rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\mu_0}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{2u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \\ \rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\mu_0}{3} \left( -\frac{2u_r}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right)\end{aligned}$$

Paso 2. – Multiplicar la ecuación en ambos lados por  $r^2$  y después se aplica la transformada de Laplace (TL) con las condiciones establecidas previamente:

$$\begin{aligned}\rho_0 r^2 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 r^2 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\mu_0}{3} \left( -2u_r + 2r \frac{\partial u_r}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \\ \mathcal{L} \left\{ \rho_0 r^2 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_0 r^2 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{\mu_0}{3} \left( -2u_r + 2r \frac{\partial u_r}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \right\} \\ \rho_0 \mathcal{L} \left\{ r^2 \frac{\partial u_r}{\partial t} \right\} + \rho_0 \mathcal{L} \left\{ r^2 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\} &= \frac{\mu_0}{3} \mathcal{L} \left\{ r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right\} + 2 \frac{\mu_0}{3} \mathcal{L} \left\{ r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\} - 2 \frac{\mu_0}{3} \mathcal{L} \{ u_r \} \\ \frac{2\rho_0}{s^3} \frac{\partial T}{\partial t} X(s) + \frac{2\rho_0}{s^3} XT(sX(s)T - u_r(0, t)) & \\ &= \frac{2\mu_0}{3s^3} (s^2 X(s)T - s u_r(0, t) - \dot{u}_r(0, t)) + \frac{2\mu_0}{3s^2} (sX(s)T - u_r(0, t)) \\ &\quad - 2 \frac{\mu_0}{3} X(s)\end{aligned}$$

Paso 3. – Se evalúan las condiciones:

$$\frac{2\rho_0}{s^3} \frac{\partial T}{\partial t} X(s) + \frac{2\rho_0}{s^3} XT(sX(s)T) = \frac{2\mu_0}{3s^3} s^2 X(s)T + \frac{2\mu_0}{3s^2} sX(s)T - 2 \frac{\mu_0}{3} X(s)T$$

Paso 4. – Dividiendo por  $sX(s)$ , y multiplicando ambos lados por  $s^3$ :

$$2\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} + 2\rho_0 sX(s)T^2 = 2\frac{\mu_0}{3}sT + 2\frac{\mu_0}{3}s^2T - 2\frac{\mu_0}{3}s^3T$$

Paso 5. – Se aplica la transformada de Fourier para la variable tiempo:

$$\mathcal{F}\left\{2\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} + 2\rho_0 sX(s)T^2\right\} = \mathcal{F}\left\{2\frac{\mu_0}{3}sT + 2\frac{\mu_0}{3}s^2T - 2\frac{\mu_0}{3}s^3T\right\}$$

$$2\rho_0 \mathcal{F}\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} + 2\rho_0 sX(s)\mathcal{F}\{T^2\} = 2\frac{\mu_0}{3}s\mathcal{F}\{T\} + 2\frac{\mu_0}{3}s^2\mathcal{F}\{T\} - 2\frac{\mu_0}{3}s^3\mathcal{F}\{T\}$$

$$2\rho_0(i\omega'Q(\omega')) + 2\rho_0 sX(s)Q(\omega')Q(\omega') = 2\frac{\mu_0}{3}sQ(\omega') + 2\frac{\mu_0}{3}s^2Q(\omega') - 2\frac{\mu_0}{3}s^3Q(\omega')$$

Paso 6. – Se divide la ecuación por  $Q(\omega')$  y posteriormente se reorganiza para el parámetro  $s$  de la TL:

$$2i\omega'\rho_0 + 2\rho_0 sX(s)Q(\omega') = 2\frac{\mu_0}{3}s + 2\frac{\mu_0}{3}s^2 - 2\frac{\mu_0}{3}s^3$$

$$2\rho_0 sX(s)Q(\omega') = 2\frac{\mu_0}{3}s + 2\frac{\mu_0}{3}s^2 - 2\frac{\mu_0}{3}s^3 - 2i\omega'\rho_0$$

$$X(s)Q(\omega') = \frac{\mu_0}{3\rho_0} + \frac{\mu_0}{3\rho_0}s - \frac{\mu_0}{3\rho_0}s^2 - \frac{i\omega'}{s}$$

$$X(s)Q(\omega') = \frac{\mu_0}{3\rho_0 s^3} + \frac{\mu_0}{3\rho_0 s^2} - \frac{\mu_0}{3\rho_0 s} - \frac{i\omega'}{s^2}$$

$$X(s)Q(\omega') = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \left( \frac{s^2 - s - 1}{s^3} \right) - \frac{i\omega'}{s^2}$$

$$X(s)Q(\omega') = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \left( \frac{s^2 - s - 1 + s - s}{s^3} \right) - \frac{i\omega'}{s^2}$$

$$X(s)Q(\omega') = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \left( \frac{s^2 - 2s - 1}{s^3} \right) - \frac{\mu_0}{3\rho_0} \left( \frac{1}{s^2} \right) - \frac{i\omega'}{s^2}$$

$$X(s)Q(\omega') = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{(s-1)^2}{s^3} - \frac{\mu_0}{3\rho_0} \left( \frac{1}{s^2} \right) - \frac{i\omega'}{s^2}$$

$$\frac{X(s)Q(\omega')}{(s-1)^2} = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{1}{s^3} - \frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{1}{s^2(s-1)^2} - \frac{i\omega'}{s^2(s-1)^2}$$

Paso 7. – Se aplica la transformada inversa de Laplace para obtener una expresión de la velocidad en términos del cambio de radio:

$$\frac{X(s)Q(\omega')}{(s-1)^2} = -\frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{1}{s^3} - \frac{\mu_0}{3\rho_0} \frac{1}{s^2(s-1)^2} - \frac{i\omega'}{s^2(s-1)^2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)Q(\omega')}{(s-1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{\mu_0}{3\rho_0}\frac{1}{s^3}-\frac{\mu_0}{3\rho_0}\frac{1}{s^2(s-1)^2}-\frac{i\omega'}{s^2(s-1)^2}\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)Q(\omega')}{(s-1)^2}\right\} &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0}{3\rho_0}\frac{1}{s^3}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0}{3\rho_0}\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{i\omega'}{s^2(s-1)^2}\right\} \\ f(r)Q(\omega')e^{2kr} &= -\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2-\frac{\mu_0}{3\rho_0}re^{2kr}-i\omega're^{2kr}\end{aligned}$$

Paso 8. – Se divide por  $e^{2kr}$  para dejar la expresión de la función radial sola:

$$\begin{aligned}f(r)Q(\omega') &= -\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2e^{-2kr}-\frac{\mu_0}{3\rho_0}r-i\omega'r \\ f(r)Q(\omega') &= -\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2e^{-2kr}-r\left(\frac{\mu_0}{3\rho_0}+i\omega'\right)\end{aligned}$$

Paso 9. – Aplicando la transformada inversa de Fourier para tener la solución en las variables originales:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{f(r)Q(\omega')\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2e^{-2kr}-r\left(\frac{\mu_0}{3\rho_0}+i\omega'\right)\right\} \\ f(r)\mathcal{F}^{-1}\{Q(\omega')\} &= -\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2e^{-2kr}\mathcal{F}^{-1}\{1\}-r\frac{\mu_0}{3\rho_0}\mathcal{F}^{-1}\{1\}-ir\mathcal{F}^{-1}\{\omega'\} \\ f(r)t(t) &= -\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2e^{-2kr}\delta(t)-r\frac{\mu_0}{3\rho_0}\delta(t)-ir\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\tau}\omega'e^{i\omega't}d\omega'\right)\end{aligned}$$

Paso 10. – La última integral se calcula por partes, siendo  $u = \omega'$  y  $dv = e^{i\omega't}d\omega'$ , dando como resultado:

$$\begin{aligned}f(r)t(t) &= u_r(r, t) \\ &= -\frac{\mu_0}{6\rho_0}r^2e^{-2kr}\delta(t)-r\frac{\mu_0}{3\rho_0}\delta(t)-\frac{ir}{2\pi}\left[-\frac{i\omega'}{t}(e^{i\omega't}-1)+\frac{1}{\omega'^2}(e^{i\omega't}-1)\right] \\ u_r(r, t) &= -\frac{\mu_0 r}{3\rho_0}\delta(t)\left(\frac{re^{-2kr}}{2}+1\right)+\frac{ir}{2\pi}\frac{i\omega'}{t}(e^{i\omega't}-1)-\frac{ir}{2\pi}\frac{1}{\omega'^2}(e^{i\omega't}-1) \\ u_r(r, t) &= -\frac{\mu_0 r}{3\rho_0}\delta(t)\left(\frac{re^{-2kr}}{2}+1\right)-\frac{ir}{2\pi}(e^{i\omega't}-1)\left(\frac{1}{\omega'^2}-\frac{i\omega'}{t}\right)\end{aligned}$$

## APÉNDICE E. CÓDIGOS DE MATLAB

Código para las gráficas de solución a la ecuación diferencial parcial radial, para varias funciones y la superposición de ellas. Evalúa las frecuencias que forman determinados tipos de ruido, en específico para la gráfica mostrada con respecto a ruido blanco.

```
w=linspace(10,1010,201);
w2=linspace(10,1010,301);
w3=linspace(10,1010,201);
w4=linspace(0,1000,201);
w5=linspace(20,1020,201);
w6=linspace(15,1015,201);
%subplot(2,2,1)
w0=33.14; suma1=(w0*exp(-w0*0.033)*cos(w*0.033))./(200*w);
suma2=(exp(-w0*0.033)*sin(w*0.033))/200;
suma3=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w2*0.033)-0.3425))./(300*w2);
suma4=(exp(-w0*0.033)*sin((w2*0.033)-0.3425))/300;
suma5=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w3*0.033)-0.75))./(200*w3);
suma6=(exp(-w0*0.033)*sin((w3*0.033)-0.75))/200;
suma7=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w4*0.033)-1.5))./(200*w4);
suma8=(exp(-w0*0.033)*sin((w4*0.033)-1.5))/200;
suma9=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w5*0.033)+2))./(200*w5);
suma10=(exp(-w0*0.033)*sin((w5*0.033)+2))/200;
suma11=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w6*0.033)-5))./(200*w6);
suma12=(exp(-w0*0.033)*sin((w6*0.033)-5))/200;
Y=148.5943017*(suma1-suma2);
Y2=148.5943017*(suma3-suma4);
Y3=148.5943017*(suma5-suma6);
Y4=50*(suma7-suma8);
Y5=70*(suma9-suma10);
Y6=100*(suma11-suma12);
figure
plot(w,Y,w2,Y2,w3,Y3,w4,Y4,w5,Y5,w6,Y6)
title('Acoustic disturbance')
xlabel('Frequency (Hz)')
```

```

ylabel('Amplitude (no units)')
legend('phi = 0','phi = 0.3425','phi = 0.75','phi = 1.5','phi = -2','phi = -5')
grid on
xlim([0 1000])
hold on
w7=linspace(0,1000,1001);
%subplot(2,2,2)
suma13=besselj(0,w7-8)-besselj(1,w7+16)+besselj(2,w7-32)-besselj(3,w7+64);
suma14=besselj(4,w7-128)-besselj(5,w7+256)+besselj(6,w7-512);
Y7=148.5943017*(suma13+suma14);
figure
plot(w7,Y7)
title('Acoustic disturbance')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Amplitude (no units)')
grid on
hold off
hold on
t=linspace(0,30,1001);
J=zeros(30,1001);
for i=0:29
    c=((-1)^(i+1))*15;
    J(i+1,:)=c.*sin(i*(t-i)).*besselj(0,i*(t-i)).*(-besselj(10,i*(t-i)));
end
%subplot(2,2,3)
Y8=zeros(1001);
for i=0:29
    for k=0:1000
        Y8(k+1)=((-1).^(i.^2))*J(i+1,k+1)+Y8(k+1);
    end
end
figure
plot(t,Y8)
grid on

```

```

title('Time series analysis for white noise')
xlabel('Time','interpreter','latex')
ylabel('Wave','interpreter','latex')
hold off
hold on
w9=linspace(1,1001,1001);
G=zeros(10,1001);
for i=0:9
    b2=w9+((-1^(i+1))*(2^(i+3)));
    c2=(((1)^(i+1))*15);
    b3=w9+((-1^(i+1))*(2^(i+2)));
    D=besselj(0,5*b2);%.*besselj(0,b2);
    G(i+1,:)=(c2*cos(10*b2).*besselj(0,10*b2))./D;%besselj(0,(b2));
end
%subplot(2,2,4)
Y9=zeros(1001);
for i=0:9
    for k=0:1000
        Y9(k+1)=((-1).^(i.^2))*G(i+1,k+1)+Y9(k+1);
    end
end
figure
plot(w9,Y9)
grid on
title('Frequency response for white noise')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Amplitud (no units)')
xlim([0 1000])
hold off

```

Este código, genera la respuesta de un pulso acústico en una membrana o cuerpo delgado, se puede controlar desde el código cual es el grosor de la placa.

```

w=linspace(10,1010,201);
w2=linspace(10,1010,301);

```

```

w3=linspace(10,1010,201);
w4=linspace(0,1000,201);
w5=linspace(20,1020,201);
w6=linspace(15,1015,201);
%subplot(2,2,1)
w0=33.14; suma1=(w0*exp(-w0*0.033)*cos(w*0.033))./(200*w);
suma2=(exp(-w0*0.033)*sin(w*0.033))/200;
suma3=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w2*0.033)-0.3425))./(300*w2);
suma4=(exp(-w0*0.033)*sin((w2*0.033)-0.3425))/300;
suma5=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w3*0.033)-0.75))./(200*w3);
suma6=(exp(-w0*0.033)*sin((w3*0.033)-0.75))/200;
suma7=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w4*0.033)-1.5))./(200*w4);
suma8=(exp(-w0*0.033)*sin((w4*0.033)-1.5))/200;
suma9=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w5*0.033)+2))./(200*w5);
suma10=(exp(-w0*0.033)*sin((w5*0.033)+2))/200;
suma11=(w0*exp(-w0*0.033)*cos((w6*0.033)-5))./(200*w6);
suma12=(exp(-w0*0.033)*sin((w6*0.033)-5))/200;
Y=148.5943017*(suma1-suma2);
Y2=148.5943017*(suma3-suma4);
Y3=148.5943017*(suma5-suma6);
Y4=50*(suma7-suma8);
Y5=70*(suma9-suma10);
Y6=100*(suma11-suma12);
figure
plot(w,Y,w2,Y2,w3,Y3,w4,Y4,w5,Y5,w6,Y6)
title('Acoustic disturbance')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Amplitude (no units)')
legend('phi = 0','phi = 0.3425','phi = 0.75','phi = 1.5','phi = -2','phi = -5')
grid on
xlim([0 1000])
hold on
w7=linspace(0,1000,1001);
%subplot(2,2,2)

```



```

suma13=besselj(0,w7-8)-besselj(1,w7+16)+besselj(2,w7-32)-besselj(3,w7+64);
suma14=besselj(4,w7-128)-besselj(5,w7+256)+besselj(6,w7-512);
Y7=148.5943017*(suma13+suma14);
figure
plot(w7,Y7)
title('Acoustic disturbance')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Amplitude (no units)')
grid on
hold off
hold on
t=linspace(0,30,1001);
J=zeros(30,1001);
for i=0:29
    c=((-1)^(i+1))*15;
    J(i+1,:)=c.*sin(i*(t-i)).*besselj(0,i*(t-i)).*(-besselj(10,i*(t-i)));
end
%subplot(2,2,3)
Y8=zeros(1001);
for i=0:29
    for k=0:1000
        Y8(k+1)=((-1).^(i.^2))*J(i+1,k+1)+Y8(k+1);
    end
end
figure
plot(t,Y8)
grid on
title('Time series analysis for white noise')
xlabel('Time','interpreter','latex')
ylabel('Wave','interpreter','latex')
hold off
hold on
w9=linspace(1,1001,1001);
G=zeros(10,1001);

```

```

for i=0:9
    b2=w9+((-1^(i+1))*(2^(i+3)));
    c2=((-1)^(i+1))*15;
    b3=w9+((-1^(i+1))*(2^(i+2)));
    D=besselj(0,5*b2);%.*besselj(0,b2);
    G(i+1,:)=(c2*cos(10*b2).*besselj(0,10*b2))./D;%besselj(0,(b2));
end
%subplot(2,2,4)
Y9=zeros(1001);
for i=0:9
    for k=0:1000
        Y9(k+1)=((-1)^(i.^2))*G(i+1,k+1)+Y9(k+1);
    end
end
figure
plot(w9,Y9)
grid on
title('Frequency response for white noise')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Amplitud (no units)')
xlim([0 1000])
hold off

```

Este Código es uno de los más importantes, establece la descripción de la superficie generada por la perturbación acústica, además de generar las soluciones por Runge-Kutta para los casos no estocásticos:

```

u0=input('velocidad inicial, u0: ');
v0=input('aceleración inicial, v0: ');
tf=input('tiempo final, tf: ');
n=input('numero de pasos, n: ');
u01=input('velocidad angular inicial, u01: ');
x02=input('presion inicial, x02: ');
f=@(t,u,v) 1.935*u*v - 19.3 + (u/(t*t)) - (v/t) + u*u;
t0=1;

```

```

v01=-1;
tau=tf*3;
u02=u0;
g=@(t,u1,v1) 0.3225*u1*cos(2*t) + 0.645*u1*v1 - v1 - 19.3 + u1*u1;%*u1*v1 - 6.321
+ 0.5*u1 + u1;
h=@(tau,p) -p*tau + 12.6594;
j=@(t,u2) -u2*u2 + 0.005;
hold on
% Solución numérica
[t,u,v]=rk_2(f,t0,tf,u0,v0,n);
plot(t,u,'b')
[t,u1,v1]=rk_2(g,t0,tf,u01,v01,n);
plot(t,u1,'r')
[t,u2]=rk_1(j,t0,tf,u02,n);
plot(t,u2,'g')
legend('radial','polar','time')
grid on
xlabel('parameter')
ylabel('speed')
title('Acoustic speed')
figure
[t,p]=rk_1(h,t0,tau,x02,n);
plot(t,p,'m')
grid on
xlabel('r')
ylabel('P(r)')
title('Disturbance pressure')
figure
r = @(x,y) (1 - ((0.6*tan(x)).^2).*((0.3*sin(3*y)).^2 + (1.33*cos(3*y))).^2).^0.5;
funx = @(x,y) r(x,y).*cos(x).*sin(y);
funy = @(x,y) r(x,y).*sin(x).*sin(y);
funz = @(x,y) r(x,y).*cos(y);
fsurf(funx,funy,funz,[0 2*pi 0 pi])
xlabel('x')

```

```

ylabel('y')
xlabel('z')
title('Acoustic disturbance')
camlight
box on
hold off

```

Este código establece curvas de las funciones de solución de diferentes casos de ecuaciones diferenciales para pulso fotoacústico:

```

h = linspace(0,30);
k = linspace(-30,30);
[H,K] = meshgrid(h,k);
[th,rho]=cart2pol(H,K);
h1 = linspace(-5,0);
k1 = linspace(-30,30);
[H1,K1] = meshgrid(h1,k1);
[th1,rho1]=cart2pol(H1,K1);
h2 = linspace(-30,-5);
k2 = linspace(-30,30);
[H2,K2] = meshgrid(h2,k2);
[th2,rho2]=cart2pol(H2,K2);
Z = real((besselj(0,cos(rho))+0.4*((rho.*exp(-0.35*rho)).^0.5)).*cos(10*th));
Z1=1.025*besselj(1,cos(2*rho1)).*(3*((cos(th1)).^2)-1);
A=1.025*besselj(1,cos(-5)).*(3*((cos(th2)).^2)-1);
Z2=A+real((besselj(0,cos(rho2))+0.4*((rho2.*exp(-0.35*rho2)).^0.5)).*cos(10*th2));
figure
mesh(H,K,Z)
colormap default
hold on
mesh(H1,K1,Z1)
hold off
hold on
mesh(H2,K2,Z2)
hold off

```

```

xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Sound amp.';
%contourf(H,K,Z)

r = @(x,y) (1-(4*((tan(100*x)).^2).*(0.3*((sin(3*y)).^2)+4*((cos(3*y)).^2))))).^0.5;
% Para pulso acústico
%(1-(((tan(x)).^2).*(0.3*((sin(3*y)).^2)+((cos(3*y)).^2))))).^0.5;
%(1 - (((tan(5*x)).^2).*(sin(5*y)).^2) + (cos(3*y)).^2).^0.5;
%r = @(x,y) (((tan(0.625*x)).^2+(0.28125*sec(0.625*x).*sin(0.375*y)).^2 ...
%      + (0.28125*cos(0.375*y)).^2).^0.5);
funx = @(x,y) r(x,y).*cos(x).*sin(y);
funy = @(x,y) r(x,y).*sin(x).*sin(y);
funz = @(x,y) r(x,y).*cos(y);
figure
fsurf(funx,funy,funz,[0 2*pi 0 pi])
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
camlight

f=@(t,u,v) -(8*v)/t + 0.75*v - (v/(u*t)) + 2*u - 12;
%0.75*u - 0.75*v - 0.75*v*u - ((1.1628*v)/t) - (0.7958*u*v)/(t);
t0=0.001; u0=1.358; tf=5; v0=-1.5; n=400;
v01=0; u01=1;
g=@(t,u1,v1) 0.25*u1*cos(t) + 0.75*v1*cot(t) - 0.58139;
%0.75*v1/u1 - 0.75*u1 - 7.3575 + 0.75*v1*u1 - 1.1628*u1;
hold on
figure
% Solución numérica
[t,u,v]=rk_2(f,t0,tf,u0,v0,n);
plot(t,u,'b')

```

```
grid on
xlabel('t')
ylabel('u(r)')
title('Velocidad acústica')
figure
[t,u1,v1]=rk_2(g,t0,tf,u01,v01,n);
plot(t,u1,'r')
grid on
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
title('Velocidad acústica')
hold off
```