

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELADO DE LA DINÁMICA DE LA
TEMPERATURA DE EVAPORACIÓN Y APLICACIÓN
DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO
RISK-SENSITIVE CON SEGUIMIENTO

POR

MIRNA MARICELA MARTÍNEZ FLORES

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTORADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL.

SEPTIEMBRE 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELADO DE LA DINÁMICA DE LA
TEMPERATURA DE EVAPORACIÓN Y APLICACIÓN
DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO
RISK-SENSITIVE CON SEGUIMIENTO

POR

MIRNA MARICELA MARTÍNEZ FLORES

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTORADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL.

SEPTIEMBRE 2022

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Modelado de la dinámica de la temperatura de evaporación y aplicación de control óptimo estocástico Risk-Sensitive con seguimiento», realizada por la alumna Mirna Maricela Martínez Flores, con número de matrícula 0839271, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ingeniería Física Industrial.

El Comité de Tesis



Dra. María Aracelia Alcorta García

Presidente



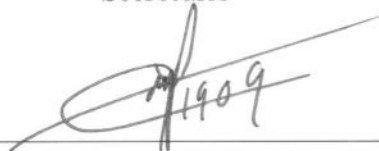
Dr. José Armando Sáenz Esqueda

Secretario



Dr. Gerardo Maximiliano Méndez

Primer Vocal



Dr. Pablo Cesar Rodríguez Ramírez

Segundo Vocal



Dra. Nora Elizondo Villareal

Tercer Vocal

Vo. Bo.


Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco

Subdirección de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, septiembre 2022

DEDICATORIA

*A mis hijos: Myriam Andrea y Luis Gerardo Valdez Martínez, quienes son mi
máximo orgullo y mi razón de ser.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis hijos y mis padres por su apoyo, paciencia y comprensión durante el trayecto de esta importante etapa.

Al CONACyT, por haberme otorgado la beca para poder realizar mis estudios de Doctorado en Ingeniería Física.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), especialmente a Dr. Alberto Arturo Castillo Guzmán y Dr. Edgar Martínez Guerra, por permitirme iniciar y culminar en este programa doctoral.

A mi asesora Dra. Ma. Aracelia Alcorta García, por haber compartido sus conocimientos conmigo, por su capacidad para guiar mis ideas, por su invaluable dedicación y apoyo.

A mi co-asesor Dr. José Armando Sáenz Esqueda, por sus horas de dedicación para cumplir este proyecto, además de su apoyo en este trayecto de mi vida.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME), especialmente a los doctores Jaime Arturo Castillo Elizondo y Arnulfo Treviño Cubero, por la oportunidad que me dieron y los apoyos recibidos que me hacen sentir parte de la gran familia FIME y gracias a todos ello, he logrado cumplir de esta meta.

Y por último, y más impotente agradecerle a Dios por haberme permitido vivir esta gran experiencia en la cual me quedan grandes aprendizajes en todos los aspectos de mi vida.

RESUMEN

En esta investigación doctoral se construyó un modelado matemático novedoso partiendo de las leyes fundamentales de la física y de la conservación de la energía, este modelo representa la dinámica de la temperatura de evaporación en un sistema de refrigeración. Por primera vez se aplicó en un sistema termodinámico el control óptimo lineal estocástico Risk-Sensitive (R-S) con seguimiento, una peculiaridad de este modelado es que el control multiplica al estado. También se deduce mediante los resultados de la simulación el comportamiento de un sistema de refrigeración con la estrategia de control óptimo lineal estocástico R-S con seguimiento vs. PID (Proporcional Integral Derivativo) esta última se consideró por ser la más utilizada en la industria, el PID se sintonizó utilizando tres metodologías diferentes las cuales son: Ziegler-Nichols (Z-N), Choen-Coon y Chein-Horners-Reswick (CHR). Se elaboró otro modelado matemático del sistema de calefacción, el cual tiene como único actuador una resistencia eléctrica partiendo de la ley fundamental de la conservación de la energía, de la formulación de este modelado se aplicó el control óptimo lineal estocástico R-S con seguimiento y el control proporcional integral derivativo PID, además de ser estimados los filtros R-S y Kalman Bucy extendido con control R-S. Por último, se interpretó el comportamiento de las estrategias de control evaluadas en los dos modelados matemáticos realizados en esta tesis.

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria	IV
Agradecimientos	v
Resumen	VI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Motivación	5
1.3. Justificación	5
1.4. Hipótesis	6
1.5. Objetivos	6
1.5.1. Objetivos específicos	7
1.6. Metodología	7
1.7. Organización de la tesis	9
2. MARCO TEÓRICO	10

2.1. Sistema de refrigeración	10
2.1.1. Proceso de expansión	21
2.1.2. Proceso de vaporización	22
2.1.3. Proceso de compresión	24
2.1.4. Proceso de condensación	25
2.2. Proceso estocástico	28
2.2.1. Estacionariedad	29
2.3. Ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman y obtención del control Lineal Cuadrático	38
2.4. Teoría de filtros	43
2.4.1. Filtros óptimos Risk-Sensitive	44
2.5. Diseño del control PID	45
3. MODELADO MATEMÁTICO	50
3.1. Sistema de refrigeración	50
3.1.1. Modelado del evaporador	51
3.1.2. Validación y análisis dimensional del modelado del evaporador	53
3.2. Modelado del sistema de calefacción de una resistencia eléctrica . . .	54
3.2.1. Transferencia de calor por Conducción	54
3.2.2. Concepto de resistencia térmica	55
3.2.3. Potencia eléctrica	55

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
4. PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA	58
4.1. Planteamiento y solución del problema de control óptimo estocástico Risk-Sensitive con seguimiento	58
4.2. Planteamiento y solución del problema de control PID	61
4.3. Planteamiento y solución al filtrado	64
4.3.1. Filtrado Risk-Sensitive	64
4.3.2. Filtrado Kalman Bucy	65
5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS	66
5.1. Aplicación al sistema de calefacción con una resistencia eléctrica . . .	66
5.1.1. Control óptimo estocástico R-S con seguimiento en el sistema de calefacción	66
5.1.2. Control PID en el sistema de calefacción	67
5.1.3. Aplicación de filtros y control óptimo con seguimiento y PID en el sistema de calefacción	69
5.2. Temperatura del evaporador de un sistema de refrigeración	73
5.2.1. Control óptimo estocástico Risk-Sensitive con seguimiento aplicado en un evaporador de un sistema de refrigeración	73
5.2.2. Control PID aplicado en un evaporador de un sistema de refrigeración	76
5.2.3. Comparación de control óptimo estocástico R-S con seguimiento vs Control PID aplicado en un evaporador de un sistema de refrigeración	79

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	x
6. CONTRIBUCIONES	81
6.1. Control de temperatura en un evaporador aplicando el control Risk-Sensitive	81
6.2. Efect of Risk-Sensitive Stochastic optimal control with tracking in an evaporator	81
6.3. Non-linear Optimal Filter and Control with Tracking vs PID Applied to an Electric Resistance System	82
6.4. Aplicación de los Filtros Óptimos Risk-Sensitive Y Kalman-Bucy Extendido a un Sistema De Calefacción	82
6.5. Implementation of control algorithms in a climatic chamber	83
7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	84
7.1. Conclusiones	84
7.2. Trabajo futuro	85
ANEXO	95

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Diagrama de la metodología.	8
2.1. Intercambio de calor de una máquina térmica [1].	11
2.2. Diagrama P-V de un ciclo de Carnot [1].	15
2.3. Diagrama P-V de un ciclo inverso de Carnot [1].	17
2.4. Ciclo de refrigeración simple (fuente propia).	19
2.5. Diagrama de presión, entalpía y un ciclo de refrigeración simple (fuente propia).	21
2.6. Diagrama presión-entalpía y la pérdida de calor [2].	23
2.7. Diagrama presión-entalpía y un ciclo real de refrigeración simple [2].	27
2.8. Curva de reacción de una planta ante una entrada escalón [3].	47
3.1. Sistema de refrigeración (fuente propia).	50
3.2. Validación de la ecuación dinámica (3.5).	53
4.1. Representación del diagrama del control óptimo estocástico R-S con seguimiento.	61
4.2. Diagrama del sistema del control PID.	62

5.1. Gráfica de ganancia $P(t)$, (5.14) con valor del parámetro $\epsilon = 1$ 74

5.2. Gráfica del estado $T_R(t)$ (5.15) con valor del parámetro $\epsilon = 1$ 75

5.3. Gráfica del control óptimo R-S, cuando $\epsilon = 1$ señal de control máxima
 1. 76

5.4. Temperatura del evaporador con tres métodos de sintonización PID. 76

5.5. Gráfico del estado con control óptimo R-S y los tres métodos de sintonización PID, cuando $\epsilon = 1$ señal de control máxima 1. 80

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Fórmulas de sintonización de Z-N respuesta escalón	46
2.2. Fórmulas de sintonización de CHR ajuste de regulación	48
2.3. Fórmulas de sintonización de CHR rechazo de perturbación	48
2.4. Fórmulas de sintonización de Cohen-Coon	49
3.1. Análisis dimensional del modelado del sistema de refrigeración.	54
3.2. Análisis dimensional del modelado del sistema de calefacción.	57
5.1. Valores de estados control óptimo estocástico R-S con seguimiento y PID para diferentes valores del parámetro ϵ	69
5.2. Errores R-S, errores PID, J (4.15), para diferentes valores del pará- metro ϵ con control óptimo estocástico, R-S con seguimiento y PID.	70
5.3. Valores de errores para los estimados de Kalman-Bucy (4.18) y R-S (4.16) y de la función criterio cuadrático a minimizar J (4.15), para diferentes valores del parámetro ϵ	72
5.4. Valores de los resultados de la simulación mediante el control óptimo estocástico R-S con seguimiento con diferentes valores del parámetro ϵ	75

5.5. Resultados de simulación de valores de la temperatura del evaporador para diferentes valores del parámetro ϵ 77

5.6. Resultados de simulación de los valores del error en la temperatura del evaporador para diferentes valores del parámetro ϵ 78

5.7. Resultados de la simulación del valor de la función costo cuadrática exponencial J (5.16) para diferentes valores del parámetro ϵ 78

5.8. Resultados de simulación del asentamiento del ancho de banda del 2% para diferentes valores del parámetro ϵ 79

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ESTADO DEL ARTE

Un sistema de refrigeración es una máquina diseñada primordialmente para disminuir la temperatura de un cuerpo o recinto. Esto es posible gracias a una serie de arreglos mecánicos que absorbe el calor, entre dos o más focos, conforme se requiera [4]. En esta tesis se estudia un modelo matemático que representa el cambio de temperatura de un evaporador de un sistema de refrigeración. Y se propone una ley de control por Risk Sensitive (R-S) para regular la temperatura considerando como entrada la cantidad de refrigerante que circula por el evaporador.

El sistema de refrigeración es utilizado desde hace más de 100 años y se utiliza en la conservación de alimentos, disminuir la temperatura de productos almacenados en cámaras de refrigeración. En [5], se analiza el control de flujo del refrigerante, el cual es esencial en cualquier sistema de refrigeración. Se pueden regular diferentes variables físicas, como la temperatura de sobre-calentamiento y la presión de condensación, utiliza un control funcional predictivo (PFC); el control PFC brinda una mayor precisión que el control convencional PID. En [6], se analiza que la apertura de la válvula electrónica de expansión (EEV) tiene grandes efectos en la presión de descarga del compresor, en la presión de salida del refrigerador de gas y en la

temperatura de descarga del compresor, por lo tanto, los enfoques tradicionales de optimización y control pueden no ser adecuados para controlar la energía del sistema de refrigeración por ciclo de compresión de vapor (VCC) de manera eficiente, como se puede ver en [7] y [8]. El sistema de calefacción había sido modelado en algunos trabajos de la siguiente manera: en [9] se establecen los elementos de convección, de los sistemas de calefacción solar pasiva de un edificio. La descripción matemática de los procesos de transferencia de calor y movimiento de aire en los elementos de convección se presentan como un conjunto de ecuaciones diferenciales. En [10] se presenta una solución aplicativa de modelado matemático y simulación para resistencias de calentamiento, este modelo permite la simulación del régimen de autocalentamiento transitorio. En [11] se presenta la simulación de un método de control predictivo para la reducción de la variación de potencia y la limitación de potencia máxima en sistemas de calefacción de edificios. El desarrollo de modelos matemáticos de calentamiento en tiempo continuo se ha presentado en [12], [13], [14]. En [15] se presenta un modelo matemático del sistema de A/C (aire acondicionado). Como se puede ver en [16] se presenta un modelado empírico y un control robusto en el sistema de refrigeración por compresión (mVCR-S). En [17] se presenta un nuevo modelo dinámico de parámetro agrupado que es capaz de simular la oscilación del sistema de refrigeración controlado por EEV. En [18] se presenta un modelo para el sistema de compresión de vapor de velocidad variable. En [19] se realiza un modelado para el VCC para sistemas utilizados en aire acondicionado y refrigeración. Presentan un modelo dinámico completo de VCC que es capaz de describir los comportamientos transitorios severos en los intercambiadores de calor (condensador /evaporador). En [20] se propone un modelo matemático dinámico con parámetros adimensionales, para analizar la respuesta de los sistemas de refrigeración de absorción de una etapa. Y en [21] se presenta un modelo matemático simplificado adimensional de una refrigeración por compresión de vapor (VCR), para optimizar la respuesta dinámica del sistema. En [22] se presenta una metodología novedosa para modelar un sistema simple de refrigeración por compresión. En [23] se diseña el control de retroalimentación para un sistema de aire acondicionado, se aborda a

través del modelado e identificación de sistemas. Se presenta en [24] una estrategia de optimización basada en modelos para el ciclo de refrigeración por compresión de vapor, a través del análisis de las características e interacciones de cada componente dentro del ciclo; un MGA (algoritmo genético modificado) junto con una estrategia de solución para un grupo de ecuaciones no lineales para obtener un punto de ajuste óptimo en diferentes condiciones de funcionamiento. En [25] se establece, que el control convencional on/off tiene varios inconvenientes como la baja precisión del control, el alto consumo de energía y la disminución de la vida útil del compresor debido a las frecuentes operaciones de encendido y apagado. En los sistemas de bomba de calor/refrigeración, un componente clave es la EEV, gracias al cual se controla el flujo del refrigerante, lo que permite la implementación de estrategias de control óptimas, logrando un funcionamiento fiable y económico en sistemas de refrigeración y bombas de calor, según [26]. En [27], se investigó el consumo general de energía de calefacción usando varias estrategias de control, emisores de calor secundarios y planta primaria para un edificio. La mayoría de los sistemas físicos en el mundo real a menudo son modelados por ecuaciones diferenciales no lineales, como se puede ver en [28].

La programación dinámica ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) y el Principio de Máxima de Pontryagin son metodologías utilizadas para obtener las ecuaciones de control desde los años sesentas. En [29] se consideran perturbaciones de energía finita. Cuando el proceso que se controla se rige por una ecuación diferencial estocástica, la fórmula de Whittle para la tasa óptima de grandes - derivaciones se obtuvo utilizando el método de solución viscosa de ecuaciones diferenciales parciales en [30], [31]. Whittle introdujo un parámetro R-S en la formulación del problema [32], dando lugar al nombre de control R-S. El término de difusión presente en la ecuación de estado y el criterio de coste cuadrático exponencial justifican las grandes variaciones del estado y del criterio de coste cuadrático exponencial. Runolfsson, en [33] utilizó ideas de grandes derivaciones de tipo Ponsker-Varadhan para obtener

un correspondiente juego diferencial. En [34], [35], Fleming aplicó una función de valor como solución de la ecuación de programación dinámica HJB resolviendo el problema de control óptimo estocástico LQR (Linear Quadratic Regulator) sensible al riesgo. El control estocástico sensible al riesgo ha sido un área de investigación desde los años 60, para sistemas no lineales con respecto a un Bolza cuadrático. Criterio de Meyer (ver por ejemplo [36], [29]). El problema de la linealidad estocástica El regulador cuadrático exponencial se introdujo en [37], donde se formula para sistemas discretos y continuos. Ese tipo de criterio se utiliza en algunos problemas de mecánica estocástica [38], [39]. El proceso que se controla se rige por una ecuación diferencial estocástica, puede verse en [40], [30].

A principios de la década de 1980, emergió una nueva técnica conocida como Teoría de Control H_∞ , la cual combina ambos enfoques, en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia, con el fin de proveer una solución unificada [41]. Wiener resuelve el problema estacionario lineal utilizando técnicas de dominio de frecuencia. Su modelo es probabilístico, pero los procesos estocásticos involucrados no están modelados por ecuaciones diferenciales estocásticas. El problema del filtrado continuo se reduce a la solución de una ecuación integral (la ecuación de Wiener-Hopf). Wiener proporciona un método práctico y general de solución en el caso estacionario lineal, pero los problemas no lineales y no estacionarios permanecen esencialmente sin resolver [42]. La teoría del filtrado óptimo es establecida por Kalman y Bucy en los años sesenta [43]. Mortensen [44] introdujo un modelo de filtro determinista, que ofrece una alternativa a la teoría de filtrado estocástico. Se dan condiciones especiales para la existencia, continuidad y acotación del término deriva en la ecuación de estado y una función lineal en la ecuación de observación. Un concepto del estimador estocástico R-S, introducido más recientemente por McEneaney [45], con respecto a un sistema dinámico que incluye deriva no lineal, observaciones lineales y parámetros de intensidad que multiplican los términos de difusión en ambos estados y observación, ecuaciones. Nuevamente, el criterio del cuadrado medio exponencial (EMS), introducido en [46], [47], [48] para sistemas deterministas y en [34] para sis-

temas estocásticos, se usa en lugar del criterio cuadrático medio convencional para proporcionar una estimación robusta, que es menos sensible a las variaciones de los parámetros en la intensidad del ruido. La importancia de la ingeniería de los procesos gaussianos se deriva del hecho de que muchos procesos físicos son aproximadamente gaussianos [42]. El problema general de filtrado y predicción lineal (no estacionario) se resuelve esencialmente por completo en el trabajo pionero de Kalman y posteriormente se han desarrollado numerosos algoritmos, para diferentes casos, como para sistemas no lineales, [45], para sistemas polinomiales, [49], para sistemas discretos [50], [51], para sistemas con retardos [52], [53], entre otros. Obtención de ecuaciones de filtrado polinómico estocástico R-S para ecuaciones de primer grado se puede ver en [54] para ecuaciones de segundo grado se puede ver en [55] y para tercer grado [56]. El control PID es utilizado ampliamente en la industria, como se puede ver en [57] más del 90 % de los controladores industriales aún se implementan con base en algoritmos PID, ya que ningún otro controlador iguala la simplicidad, la funcionalidad clara y la facilidad de implementación.

1.2 MOTIVACIÓN

Construir y desarrollar un modelado matemático novedoso, que represente la dinámica de la temperatura de evaporación en un sistema de refrigeración y aplicar control óptimo estocástico R-S con seguimiento por primera vez en un sistema termodinámico. A pesar de que el control PID permite tener dentro de los límites de estabilidad deseados, es necesaria una mayor precisión en el control de temperatura.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El sistema de refrigeración es muy utilizado a nivel mundial y es de vital importancia eficientizar los sistemas para mitigar los efectos del cambio climático.

El consumo de energía de los sistemas de refrigeración llega a representar cerca del 40% del consumo total de energía en instalaciones residenciales, de servicio, y en micro y pequeñas empresas, como lo indica la Comisión para el Uso Eficiente de la Energía (CONUEE), por lo que es importante buscar otras estrategias de control en el sistema de refrigeración para poder disminuir la huella de carbono que impacta estos sistemas tan utilizados por la humanidad desde hace más de 100 años. Esta tesis tiene como objetivo aplicar el control óptimo estocástico R-S con seguimiento por primera vez en un sistema de refrigeración, para mantener en un valor determinado la temperatura de evaporación. Construir un modelado matemático pionero a partir de las leyes fundamentales de la física que logre representar la dinámica de la temperatura del evaporador de un sistema de refrigeración y así poder comparar mediante simulación el comportamiento de un sistema de refrigeración, la estrategia de control óptimo estocástico R-S con seguimiento vs. PID.

El sistema de refrigeración es dinámico y tiene muchas perturbaciones, por lo que es conveniente utilizar estrategias de control más robustas como control óptimo estocástico R-S con seguimiento u otros.

1.4 HIPÓTESIS

Es posible lograr mejorar la eficiencia del control de temperatura de un evaporador en la operación del sistema de refrigeración empleando control óptimo estocástico R-S con seguimiento que cuando se emplea PID.

1.5 OBJETIVOS

Diseñar un modelo matemático que represente la dinámica de la temperatura de un evaporador y aplicar las ecuaciones de control óptimo estocástico R-S con seguimiento tal que mejore la eficiencia del control de temperatura del mismo.

1.5.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Aplicar la estrategia de control óptimo estocástico R-S con seguimiento y PID, el modelo de la temperatura del evaporador.
2. Aplicar la estrategia de control óptimo estocástico R-S con seguimiento y PID en el modelo del sistema de calefacción.
3. Aplicar los filtros R-S y Kalman-Bucy extendido en el modelo del sistema de calefacción con la estrategia de control óptimo estocástico R-S con seguimiento.
4. Establecer cuál estrategia de control minimiza la función costo cuadrática exponencial J .

1.6 METODOLOGÍA

Modelar la respuesta dinámica del sistema de refrigeración.

Se realiza un modelo matemático partiendo de las leyes fundamentales de la física, que representa la temperatura de un evaporador en un sistema de refrigeración.

Solución de control óptimo estocástico R-S con seguimiento.

La solución al problema de control óptimo estocástico R-S con seguimiento consiste en obtener el control óptimo $u(t)$ que minimice la función de costo cuadrático exponencial J y haga que el estado alcance los valores del set point (SP). Donde la función $P(t)$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial de Riccati.

Simulación de control óptimo estocástico R-S con seguimiento en la temperatura de evaporación de un sistema de refrigeración.

Se realizará una simulación en la plataforma LabVIEW para poder ver que se logra controlar el estado de temperatura interior mediante el control óptimo estocástico R-S con seguimiento para el sistema de refrigeración.

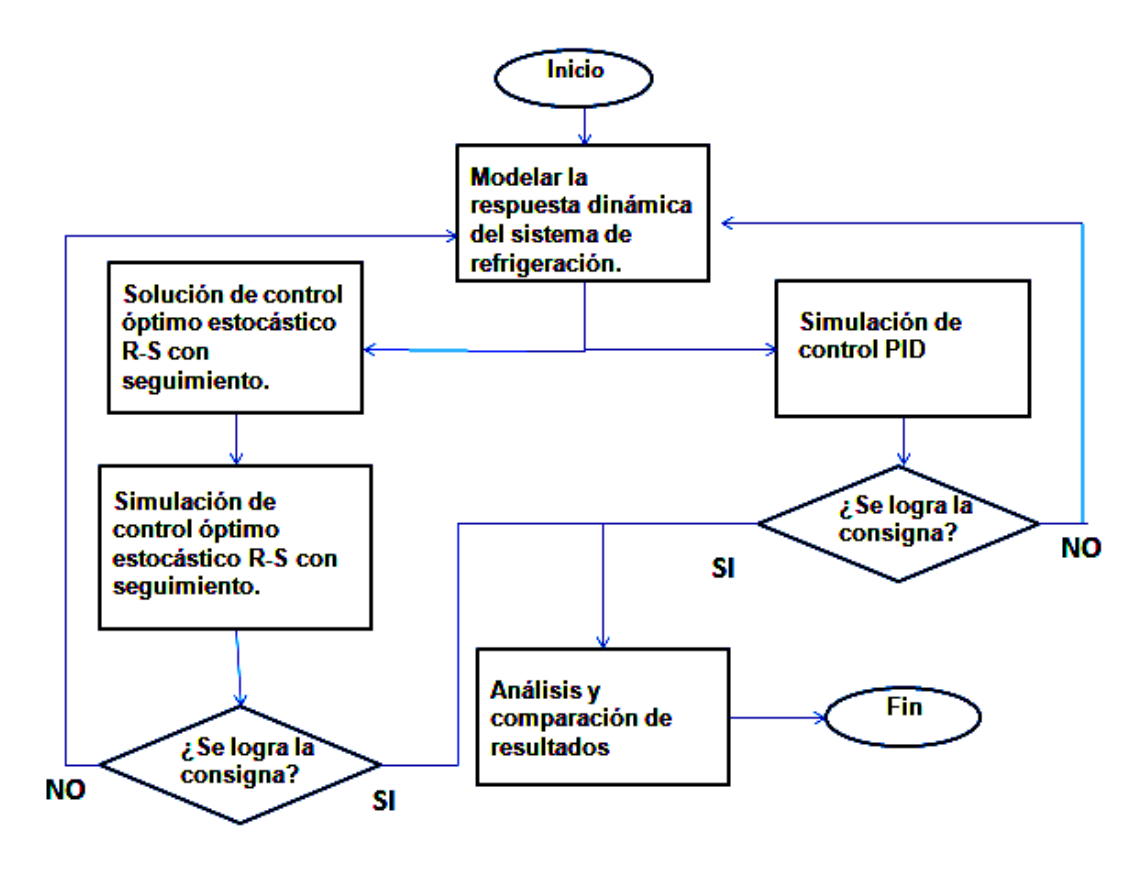


FIGURA 1.1: Diagrama de la metodología.

Simulación de control PID.

El tiempo de proceso y el tiempo muerto se calcularán según el método propuesto por Cecil L. Smith [58]. Se sintonizaron diferentes estrategias como Z-N, Choen-Coon y CHR [59]. Se realizará una simulación en la plataforma LabVIEW para poder ver que se logra controlar el estado de temperatura interior mediante el control PID para el sistema de refrigeración.

Análisis y comparación de resultados.

Se realizará un registro de la respuesta de la simulación del sistema de refrigeración y serán comparados en cada una de las estrategias de control la variación en la temperatura interior del recinto (temperatura objetivo o consigna) contra el valor deseado SP, además de evaluar la función costo cuadrática exponencial J , se analizará para diferentes valores del parámetro ϵ .

1.7 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

En el capítulo 2 se presenta y el marco teórico en el cual se fundamenta esta tesis doctoral. En el capítulo 3 se plantean dos modelos matemáticos, el primero representa la dinámica de la temperatura de un evaporador en un sistema de refrigeración y el segundo representa el cambio de la temperatura por una resistencia eléctrica. En el capítulo 4 se presenta el Planteamiento y solución del problema de control óptimo estocástico R-S con seguimiento y el planteamiento y solución del problema del control PID. Además, del planteamiento y solución al filtrado R-S y filtrado Kalman Bucy. En el capítulo 5 se obtiene los resultados de la simulación en LabVIEW del control óptimo estocástico R-S con seguimiento y el control PID así como los filtros R-S y Kalman Bucy con el control óptimo en el sistema de calefacción, además de presentar en este mismo capítulo el control óptimo estocástico R-S con seguimiento y el control PID aplicado a un evaporador de un sistema de refrigeración y la comparación de los controles en los sistemas presentados. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones y los trabajos futuros a desarrollar.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

El objetivo principal en el modelado matemático es representar el comportamiento dinámico de procesos, representando la relación funcional entre las variables que explican su comportamiento. Para ello, es común adoptar un estudio desde el punto de vista teórico, que busca plantear la relación a través de la aplicación sistemática de las leyes de la naturaleza a los fenómenos, a esto se le conoce como modelamiento teórico de procesos. Por otro lado, un estudio empírico busca esta desconocida relación para algunas funciones matemáticas, usando la información recogida experimentalmente del sistema, especialmente cuando el proceso es demasiado complicado, y se le conoce como modelamiento empírico de procesos o Identificación de Procesos [60]. El comportamiento de un proceso puede interpretarse de maneras diferentes. Un modelo de proceso es tan útil como las herramientas disponibles para obtener la solución de sus ecuaciones. El proceso de modelado matemático de sistemas hace uso de las leyes físicas para obtener las ecuaciones que gobiernan al sistema [61].

2.1 SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

Las máquinas térmicas son dispositivo que se encargan de convertir el calor en trabajo. Si estas máquinas aumentan el calor se llaman sistemas de calefacción y en

caso contrario se llaman sistemas de refrigeración. Las máquinas térmicas funcionan con el algoritmo mostrado en la Figura 2.1, ya que las máquinas térmicas difieren bastante entre sí, pero es posible caracterizarlas a todas en forma general, tal y como ve en la Figura 2.1

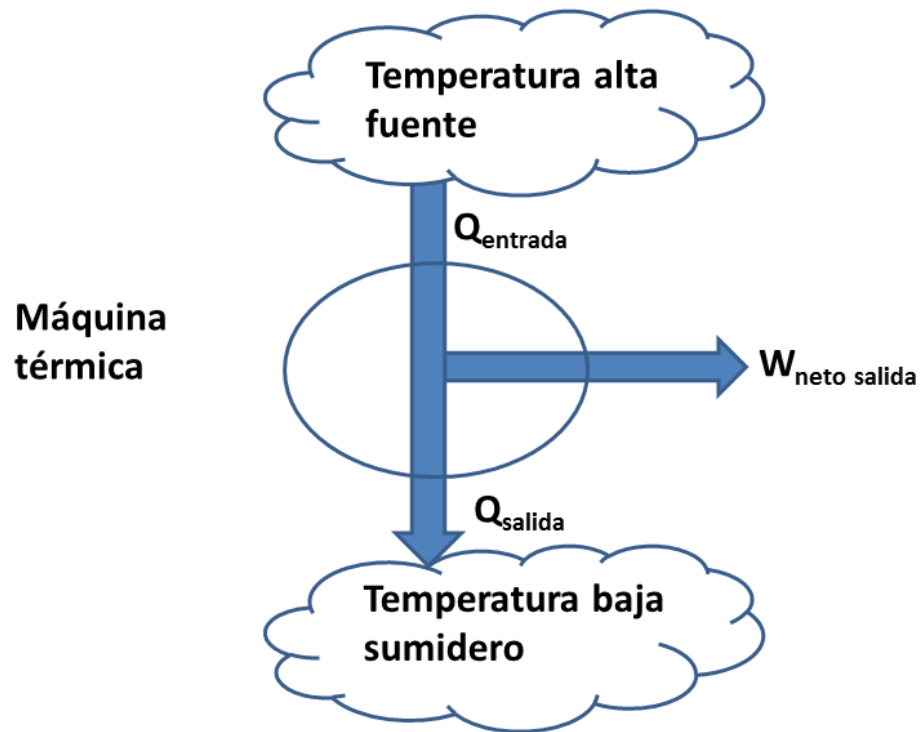


FIGURA 2.1: Intercambio de calor de una máquina térmica [1].

Los sistemas térmicos se pueden clasificar de la siguiente manera:

1. Reciben calor de una fuente a temperatura alta (energía solar, horno de petróleo, reactor nuclear, etcétera).
2. Convierten parte de este calor en trabajo (por lo general en la forma de una flecha rotatoria).

3. Rechazan el calor de desecho hacia un sumidero de calor de baja temperatura (la atmósfera, los ríos, etcétera).
4. Operan en un ciclo.

Las máquinas térmicas y otros dispositivos cíclicos por lo común requieren un fluido hacia y desde el cual se transfiere calor mientras experimenta un ciclo. Al fluido se le conoce como fluido de trabajo. El término máquina térmica se usa con frecuencia en un sentido más amplio que incluye dispositivos que producen trabajo que no operan en un ciclo termodinámico. Las máquinas relacionadas con la combustión interna, como las turbinas de gas y los motores de automóviles, entran en esta categoría. Estos dispositivos operan en un ciclo mecánico, pero no en un ciclo termodinámico, porque el fluido de trabajo (los gases de combustión) no experimenta un ciclo completo. En lugar de ser enfriados a la temperatura inicial, los gases de escape se purgan y se reemplazan por una mezcla fresca de aire y combustible al final de ciclo. El dispositivo productor de trabajo que mejor se ajusta a la definición de una máquina térmica es la central eléctrica de vapor, la cual es una máquina de combustión externa, es decir, la combustión se lleva a cabo fuera de la máquina y la energía térmica liberada durante este proceso se transfiere al vapor como calor.

La definición de refrigeración es la transferencia de calor de una región de temperatura inferior hacia una de mayor temperatura. Se sabe que esta transferencia de calor no ocurre de manera natural, por lo que es necesario utilizar un dispositivo cíclico (refrigerador) y un fluido de trabajo (refrigerante) además es indispensable delimitar el espacio que se va a refrigerar con aislantes térmicos [2].

Hay dos enunciados clásicos de la segunda ley, el de Kelvin-Planck que se relaciona con las máquinas térmicas, y el de Clausius, relacionado con refrigeradores o bombas de calor. El enunciado de Clausius se expresa como sigue:

Es imposible construir un dispositivo que opere en un ciclo sin que produzca ningún otro efecto que la transferencia de calor de un cuerpo de menor temperatura a otro de mayor temperatura [2].

Se sabe bien que el calor, por sí solo, no se transfiere de un medio frío a uno más caliente. El enunciado de Clausius no significa que sea imposible construir un dispositivo cíclico que transfiera calor de un medio frío a otro más caliente. De hecho, esto es precisamente lo que hace un refrigerador doméstico común. El enunciado establece simplemente que un refrigerador no puede operar a menos que su compresor sea propulsado mediante una fuente de energía externa, como un motor eléctrico. De este modo, el efecto neto sobre los alrededores tiene que ver con el consumo de cierta energía en la forma de trabajo, además de la transferencia de calor de un cuerpo más frío a otro más caliente; es decir, deja un rastro en los alrededores. Por lo tanto, un refrigerador doméstico concuerda por completo con el enunciado de Clausius de la segunda ley [1].

Las máquinas térmicas son dispositivos cíclicos y que el fluido de trabajo de una de estas máquinas vuelve a su estado inicial al final de cada ciclo. Durante una parte del ciclo el fluido realiza trabajo y durante otra se hace trabajo sobre el fluido. La diferencia entre estos dos trabajos es el trabajo neto que entrega la máquina térmica. La eficiencia del ciclo de una máquina térmica depende en gran medida de cómo se ejecute cada uno de los procesos que constituyen el ciclo. El trabajo neto y, por lo tanto, la eficiencia del ciclo, se pueden maximizar mediante procesos que requieren la mínima cantidad de trabajo y entregan lo más posible, es decir, mediante procesos reversibles.

En la práctica no es posible lograr ciclos completamente reversibles. Sin embargo, los ciclos reversibles proporcionan límites superiores al desempeño de los ciclos reales. Las máquinas térmicas y los refrigeradores que funcionan en ciclos reversibles sirven como modelos con los cuales se puede comparar las máquinas térmicas y los refrigeradores reales. Los ciclos reversibles también sirven como puntos de partida en el desarrollo de ciclos reales y se modifican según sea necesario para satisfacer ciertos requerimientos. Es probable que el ciclo reversible más conocido sea el ciclo de Carnot, propuesto en 1824 por el ingeniero francés Sadi Carnot [1]. La máquina térmica teórica que opera en el ciclo de Carnot se llama máquina térmica de Carnot,

cuyo ciclo se compone de cuatro procesos reversibles, dos isotérmicos y dos adiabáticos, y que es posible llevar a cabo en un sistema cerrado o de flujo estacionario. Los cuatro procesos reversibles que conforman el ciclo de Carnot son los siguientes:

Expansión isotérmica reversible (proceso 3-2, T_D constante). Inicialmente (estado 3), la temperatura del gas es T_D el gas se expanda lentamente y que realice trabajo sobre los alrededores. Cuando el gas se expande, su temperatura tiende a disminuir, pero tan pronto como disminuye la temperatura en una cantidad infinitesimal dT , cierta cantidad de calor se transfiere del depósito hacia el gas, de modo que la temperatura de este se eleva a T_D . Así, la temperatura del gas se mantiene constante en T_D . Como la diferencia de temperatura entre el gas y el depósito nunca excede una cantidad diferencial dT , este es un proceso reversible de transferencia de calor. El proceso continúa hasta que el émbolo alcanza la posición 2. La cantidad de calor total transferido al gas durante este proceso es Q_D .

Expansión adiabática reversible (proceso 2-1, la temperatura disminuye de T_D a T_R). En el estado 2 el gas continúa expandiéndose lentamente y realiza trabajo sobre los alrededores hasta que su temperatura disminuye de T_D a T_R (estado 1) el proceso es reversible así como adiabático.

Compresión isotérmica reversible (proceso 1-4, T_R constante). En el estado 1, a medida que el gas se comprime, su temperatura tiende a incrementarse, pero tan pronto como aumenta una cantidad infinitesimal dT , el calor se transfiere desde el gas hacia el sumidero, lo que causa que la temperatura del gas descienda a T_R . Así, la temperatura del gas permanece constante en T_R . Como la diferencia de temperatura entre el gas y el sumidero nunca excede una cantidad diferencial dT , éste es un proceso de transferencia de calor reversible, el cual continúa hasta que el émbolo alcanza el estado 4. La cantidad de calor rechazado del gas durante este proceso es Q_R .

Compresión adiabática reversible (proceso 4-3, la temperatura sube de T_R a T_D). El estado 4 se comprime el gas de manera reversible, entonces el gas vuelve a su estado inicial (estado 3). La temperatura sube de T_R a T_D durante este proceso

de compresión adiabático reversible, que completa el ciclo.

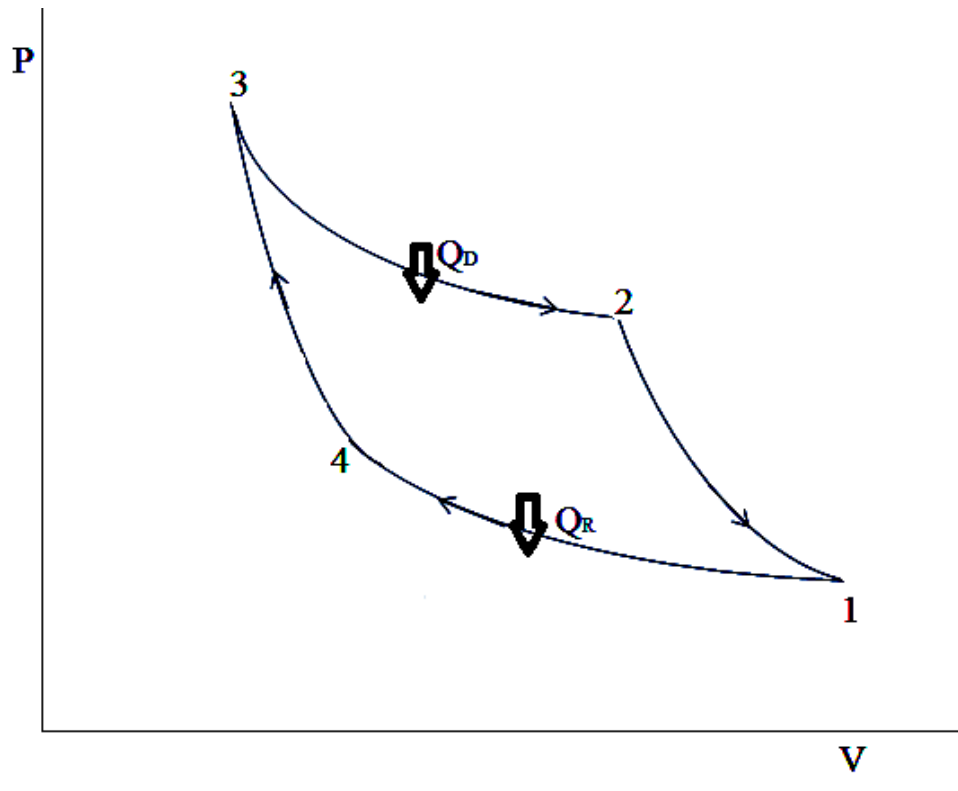


FIGURA 2.2: Diagrama P-V de un ciclo de Carnot [1].

El diagrama P-V de este ciclo se muestra en la Figura 2.2. Recuerde que en un diagrama de este tipo el área bajo la curva del proceso representa el trabajo de frontera para procesos en cuasiequilibrio (internamente reversible); se observa entonces que para este caso el área bajo la curva 3-2-1 es el trabajo que realiza el gas durante la parte de expansión del ciclo, y el área bajo la curva 1-4-3 es el trabajo realizado sobre el gas durante la parte de compresión del ciclo. El área que encierra la trayectoria del ciclo (área 3-2-1-4-3) es la diferencia entre estas dos y representa el trabajo neto hecho durante el ciclo. Observe que si se actuara de manera poco generosa y, en un esfuerzo por ahorrar Q_R , si se comprimiese el gas de forma adiabática en el estado 1 en lugar de hacerlo de modo isotérmico, se terminaría de nuevo en el estado 2, de manera que se volvería a trazar la trayectoria de proceso 3-2. De este modo se ahorraría Q_R pero no se podría obtener ninguna salida de trabajo neto de esta máquina. Esto ilustra una vez más la necesidad de que una máquina térmica

intercambie calor con al menos dos depósitos a diferentes temperaturas para operar en un ciclo y producir una cantidad neta de trabajo. El ciclo de Carnot también se puede aplicar en un sistema de flujo estacionario. Por ser un ciclo reversible, el de Carnot es el más eficiente que opera entre dos límites de temperatura especificados. Aun cuando el ciclo de Carnot no se puede lograr en la realidad, la eficiencia de los ciclos reales se mejora al intentar aproximarse lo más posible al de Carnot.

La segunda ley de la termodinámica restringe la operación de dispositivos cíclicos según se expresa mediante los enunciados de Kelvin-Planck y Clausius. Una máquina térmica no puede operar intercambiando calor con un solo depósito, y un refrigerador no puede funcionar sin una entrada neta de energía de una fuente externa. Se pueden obtener valiosas conclusiones a partir de estos enunciados; dos de estas son sobre la eficiencia térmica de máquinas reversibles e irreversibles (es decir, reales) y se conocen como principios de Carnot, los cuales se expresan como:

1. La eficiencia de una máquina térmica irreversible es siempre menor que la eficiencia de una máquina reversible que opera entre los mismos dos depósitos.
2. Las eficiencias de las máquinas térmicas reversibles que operan entre los mismos dos depósitos son las mismas.

El ciclo de la máquina térmica de Carnot recién descrito es totalmente reversible, por lo tanto, todos los procesos que abarca se pueden invertir, en cuyo caso se convierte en el ciclo de refrigeración de Carnot. Esta vez, el ciclo es exactamente el mismo, excepto que las direcciones de las interacciones de calor y trabajo están invertidas: el calor en la cantidad Q_R se absorbe de un depósito a baja temperatura, el calor en la cantidad Q_D se rechaza hacia un depósito a alta temperatura, y se requiere una cantidad de trabajo $W_{neto,entrada}$ para completar todo esto. El diagrama P-V del ciclo de Carnot invertido es el mismo que corresponde al ciclo de Carnot, excepto que se invierten las direcciones de los procesos, como se muestra en la Figura 2.3

Los diferentes tipos de ciclo son:

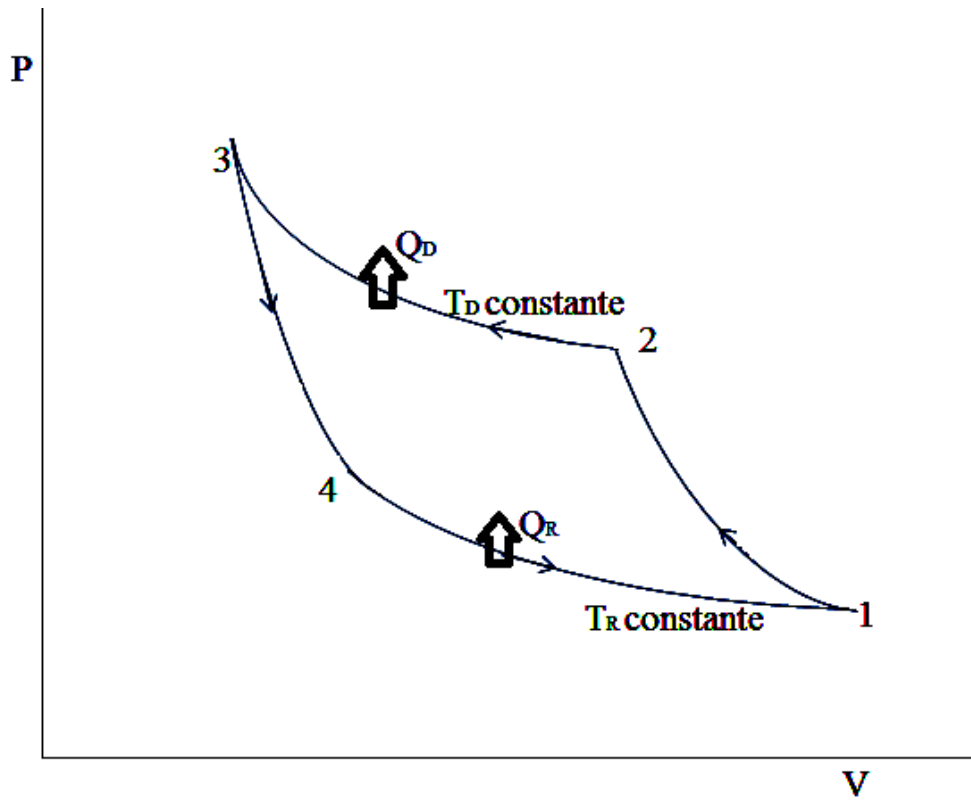


FIGURA 2.3: Diagrama P-V de un ciclo inverso de Carnot [1].

- a) Refrigeración por compresión de vapor: es cuando el refrigerante se condensa y evapora alternadamente para luego comprimirse en fase de vapor.
- b) Ciclo de refrigeración de gas: en este tipo de ciclo el refrigerante permanece todo el tiempo en fase gaseosa.
- c) Refrigeración en cascada: es el sistema que utiliza más de un ciclo de refrigeración.
- d) Refrigeración por absorción: es cuando el refrigerante se disuelve en un líquido antes de ser comprimido.
- e) Refrigeración termoeléctrica: este tipo de refrigeración es producida mediante el paso de corriente eléctrica a través de dos materiales distintos.

La refrigeración que tiene más de 100 años siendo utilizada y la más común

es la que se da por compresión de vapor y se espera que siga siendo utilizada. El sistema de refrigeración por compresión de gas está formado por un circuito cerrado de tubería y está formado principalmente por un compresor (es el corazón del sistema), evaporador, condensador y dispositivo de expansión, con estos componentes principales se cumple la finalidad de un sistema de refrigeración, la cual es extraer el calor de un espacio determinado y transmitirlo al exterior, realizando alternativamente los procesos de compresión, condensación, expansión y evaporización del líquido refrigerante [1].

El elemento del sistema de refrigeración que consume más energía es el compresor, el motivo es que al seleccionarlo normalmente es de acuerdo a la capacidad máxima esperada en el sistema. Dado que las capacidades varían a lo largo del día y del año, los compresores se consideran sobredimensionados durante períodos largos de tiempo (se estima que los sistemas están funcionando a carga parcial más de un 65 % del tiempo de funcionamiento). Para compensar este sobre-dimensionamiento se utilizan los controles *on/off*, válvulas de regulación, presión y bypass de gas caliente, estos son los sistemas de regulación convencionales que se utilizan con mayor frecuencia en los sistemas de refrigeración para compensar el exceso de capacidad del compresor. El calor absorbido en el evaporador (Q_R) es la capacidad de refrigeración de un equipo. En cambio, la carga de refrigeración corresponde a la energía térmica que contiene el medio que se desea refrigerar. Por lo tanto, el trabajo ejercido por el compresor sobre el fluido refrigerante (W) puede estimarse como la diferencia entre el calor disipado por el condensador (Q_D) y el calor absorbido por el evaporador (Q_R).

Se pueden calcular el calor absorbido en el evaporador (Q_R), el calor expulsado en el condensador (Q_D) y la potencia o trabajo ejercido sobre el fluido refrigerante (W), de acuerdo a las variaciones de la entalpía del refrigerante (entalpía es la cantidad de calor que un sistema termodinámico libera o absorbe del entorno que lo rodea cuando está a una presión constante) en las distintas etapas del ciclo. Las válvulas de expansión son consideradas isoentálpicas (entalpía constante).

El ciclo de refrigeración por compresión de vapor simple se puede considerar ideal, consta de cuatro procesos:

- a) Compresión isotrópica en un compresor (ciclo isotrópico).
- b) Rechazo de calor a presión constante en un condensador (ciclo isotérmico).
- c) Estrangulamiento en un dispositivo de expansión (ciclo isoentálpico).
- d) Absorción de calor a presión constante en un evaporador (ciclo isotérmico).

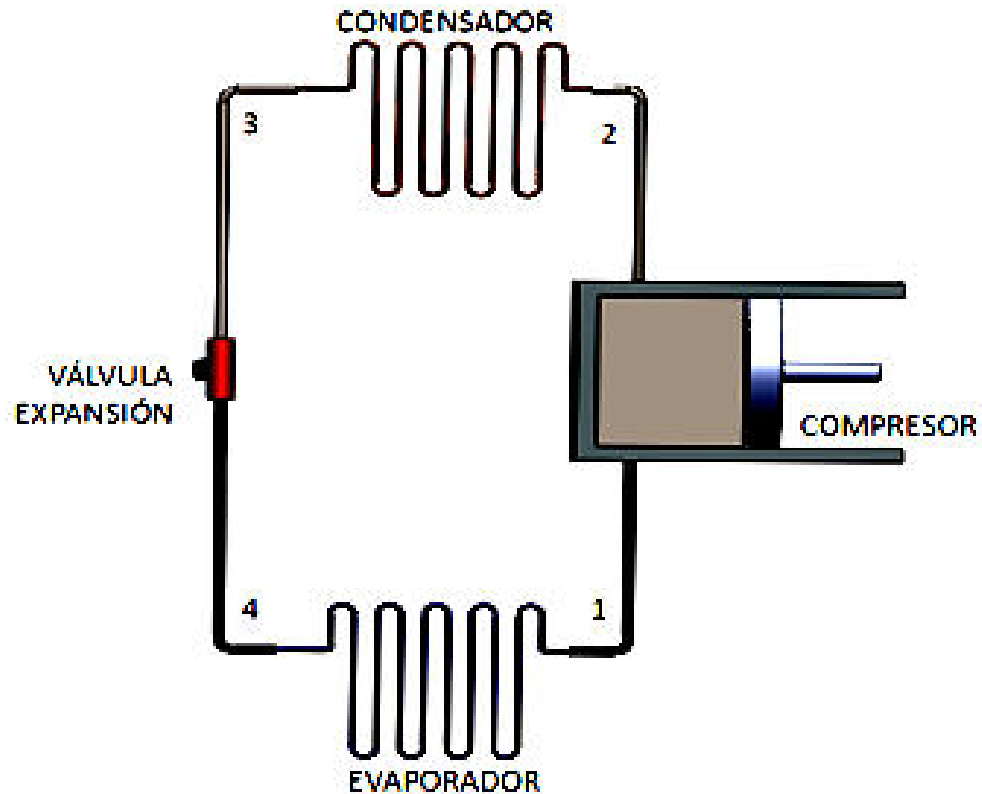


FIGURA 2.4: Ciclo de refrigeración simple (fuente propia).

Como se puede ver en la Figura 2.4 el ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor, el refrigerante entra al compresor (1) como vapor saturado y se comprime isotrópicamente hasta la presión del condensador (presión alta). La temperatura del refrigerante aumenta durante el proceso de compresión isotrópica, hasta

un valor muy superior al del espacio circundante. Después el refrigerante entra al condensador como vapor sobrecalentado (2) y sale como líquido saturado (3), como resultado de rechazo de calor hacia los alrededores, la temperatura del refrigerante continua siendo superior al espacio del entorno. Luego el refrigerante líquido saturado (3) se estrangula en una válvula de expansión o un tubo capilar hasta la presión del evaporador (Baja). La temperatura del refrigerante va a descender por debajo de la temperatura del entorno durante este proceso. Posteriormente, el refrigerante entra al evaporador (4) como vapor húmedo de baja calidad y se evapora por completo absorbiendo calor del espacio refrigerado. Y por último el refrigerante sale del evaporador como vapor saturado y vuelve a entrar al compresor, completando el ciclo [1]. Como se puede ver en la Figura 2.5 el diagrama presión- entalpía (P-h) representa el ciclo de refrigeración. Se observan las condiciones del refrigerante en cualquier estado termodinámico, puede quedar representado por un punto en el diagrama presión- entalpía (P-h), puede ser trazado si se conocen dos propiedades del estado del refrigerante. Los diagramas más utilizados son el de presión-entalpía (P-h) y temperatura - entropía (T-s), por ser estos los que permiten observar simultáneamente todas las condiciones deseadas en los diferentes cambios que ocurren en las condiciones del refrigerante durante el ciclo de refrigeración, esto sin la necesidad de conservar mentalmente todos los valores numéricos que representan estos cambios [2].

El ciclo está dividido de tres secciones, como se muestra en la Figura 2.5 el área de la parte superior izquierda de la línea de líquido saturado (A) es la región del líquido subenfriado o líquido saturado, en esta región el refrigerante está en fase líquida y su temperatura es menor a la temperatura de saturación correspondiente a la presión.

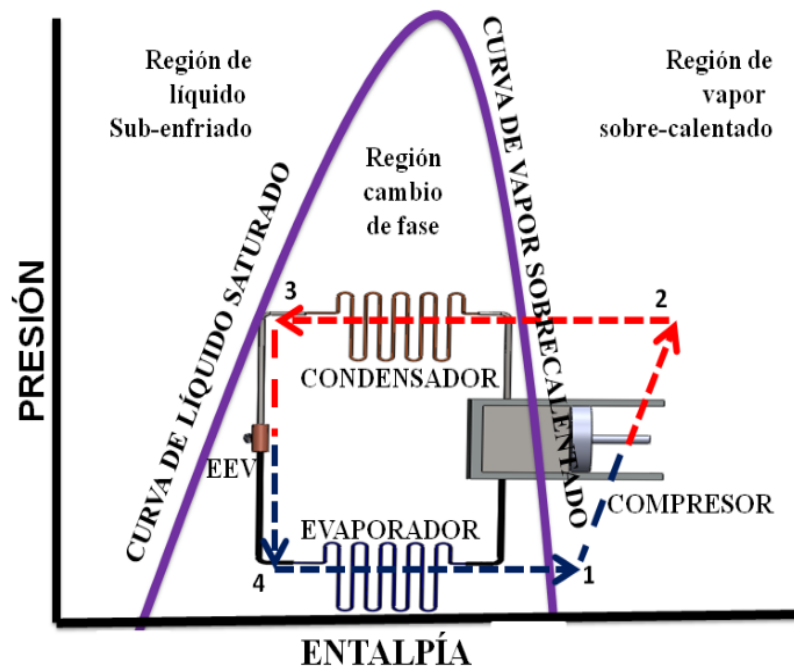


FIGURA 2.5: Diagrama de presión, entalpía y un ciclo de refrigeración simple (fuente propia).

2.1.1 PROCESO DE EXPANSIÓN

Como se sabe en el ciclo de refrigeración simple se ha supuesto que no hay cambio de las propiedades del refrigerante a medida que fluye a través de la tubería del líquido desde el condensador hasta la válvula de expansión, por lo que se considera que el líquido refrigerante tiene la misma condición a la salida del condensador hasta el inicio de la válvula de expansión. Al fluir por la tubería de líquido a alta presión, se descarta la caída de presión y sub-enfriamiento del refrigerante. Al pasar el refrigerante por la válvula de expansión, la presión del refrigerante es reducida desde la presión de alta hasta la presión de baja. Cuando el refrigerante en estado líquido es expandido, se disminuye la temperatura del líquido desde la temperatura de condensación hasta la temperatura de evaporación y de inmediato una fracción

del refrigerante cambia de fase de líquido a vapor [2]. El proceso de expansión ideal se considera adiabático (sin intercambio de calor con el entorno) e isoentrópico (la entropía es constante), a medida que el refrigerante pasa por la válvula de expansión no realiza ningún trabajo y el refrigerante queda como una mezcla de líquido-vapor. Para conocer las condiciones del refrigerante al salir de la válvula de expansión se debe de conocer la presión o la temperatura refrigerante evaporado para poder determinar las propiedades: entalpía (h), volumen específico (v) y entropía (s). La entropía cambia durante el proceso de expansión sin la realización de trabajo, por lo tanto, la transferencia de calor sucede en el mismo fluido refrigerante.

$$h = u + Pv. \quad (2.1)$$

Como consecuencia de la vaporización parcial del refrigerante líquido es ahora una mezcla de líquido vapor.

2.1.2 PROCESO DE VAPORIZACIÓN

Se sabe que el proceso de la vaporización de un líquido puede suceder de dos formas diferentes: por evaporación y por ebullición. La vaporización de un líquido por el proceso de evaporación sucede solo en la superficie libre del líquido y puede ocurrir a cualquier temperatura inferior a la temperatura de saturación. La evaporación ocurre sin ningún disturbio visible en del líquido [2]. En cambio, la ebullición únicamente sucede a la temperatura de saturación. Debido a que la temperatura de saturación es la temperatura a la cual la presión del vapor o la presión del líquido es igual a la presión ejercida sobre el líquido, este tipo de vaporización ocurre en todo el líquido y no solo en la superficie y se presenta una agitación considerable del líquido y se forman burbujas en todo el líquido [2]. El proceso de vaporización idealmente en el ciclo de refrigeración se considera isobárico e isotérmico, es decir, a presión y temperatura constantes. Al salir del evaporador el refrigerante es vapor saturado

y se pueden determinar los valores de presión (P), temperatura (T), entalpía (H), volumen específico (v) y entropía (s). A medida que el refrigerante pasa a través del evaporador, este absorbe calor del medio refrigerado, provocando un incremento en la entalpía del fluido [2]. Por lo que la cantidad de calor absorbido por el refrigerante en el evaporador (efecto refrigerante) es la diferencia de las entalpías del fluido en la entrada y salida del evaporador, por lo tanto:

$$(h_4 - h_1) = Q_R, \quad (2.2)$$

donde (Q_R) denota el calor removido por el evaporador [kJ], (h_4) es la entalpía en la entrada del evaporador [kJ/kg] y (h_1) es la entalpía en la salida del evaporador [kJ/hg].

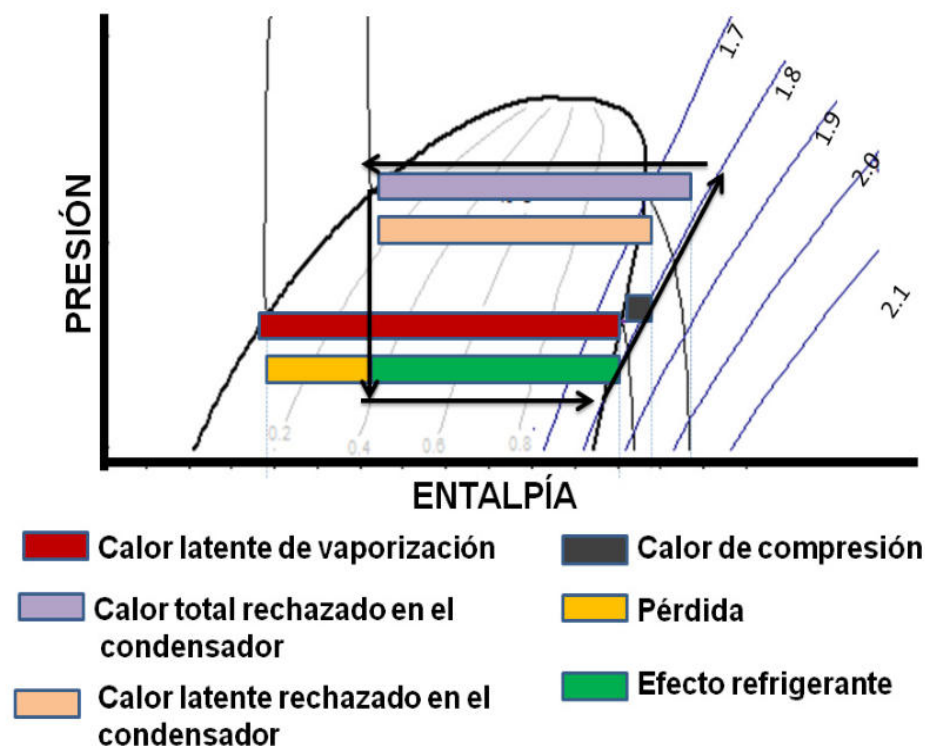


FIGURA 2.6: Diagrama presión-entalpía y la pérdida de calor [2].

En la Figura 2.6 se muestra la pérdida del efecto refrigerante, en el evaporador.

Además de poder observar el calor rechazado en el condensador y la cantidad de calor por compresión.

2.1.3 PROCESO DE COMPRESIÓN

Se considera que el refrigerante conserva sus condiciones mientras fluye a través de la tubería de succión desde el evaporador hasta el compresor en el ciclo de refrigeración ideal. Además, en el compresor el proceso es isoentrópico, sin fricción y adiabático. Debido a que no hay cambio de entropía en la compresión, se puede seguir la línea de entropía constante correspondiente al inicio de la compresión del fluido hasta llegar al punto de intersección de la línea de presión constante correspondiente a la presión de proceso de condensación. El refrigerante, al terminar el proceso de compresión, sale como vapor sobrecalentado y sus condiciones se obtiene de las tablas termodinámicas. Durante la compresión se efectúa un trabajo sobre el refrigerante y se incrementa la energía (entalpía) que es equivalente al trabajo mecánico efectuado sobre el refrigerante, y es igual a la diferencia de las entalpías en la entrada y salida del este proceso de compresión [2]. La compresión adiabática es muy semejante a la compresión real de un gas. Esto se debe a que normalmente el proceso de compresión es muy rápido y no tiene tiempo de que ocurra el intercambio de calor con el medio. Se llama relación de compresión a la relación entre la presión absoluta de la descarga y la presión absoluta de succión.

$$rp = \frac{P_{abdes}}{P_{absuc}}, \quad (2.3)$$

donde (P_{abdes}) representa la presión absoluta de descarga del compresor o presión alta (P_2) y (P_{absuc}) denota la presión absoluta de succión del compresor o presión baja (P_1) [2]. Para determinar el trabajo mecánico efectuado sobre el refrigerante durante la compresión solo debe de determinar la diferencias de entalpías. El refrigerante absorbe el trabajo del compresor en forma de calor y cambia a vapor sobrecalentado, por lo que es necesario eliminar el sobrecalentamiento para lograr la temperatura

de saturación y obtener un proceso de condensación más eficiente. Por lo tanto, la ecuación es:

$$W_c = h_1 - h_2, \quad (2.4)$$

donde (W_c) denota el trabajo del compresor por unidad de masa del refrigerante [kJ], (h_2) es la entalpía en la salida del compresor [kJ/kg] y (h_1) es la entalpía en la entrada del compresor [kJ/kg].

2.1.4 PROCESO DE CONDENSACIÓN

El cambio de fase de vapor a líquido es la condensación y este proceso se logra de tres formas: Al extraer calor del vapor, por un aumento en la presión del vapor, por la combinación de estos dos métodos [2]. En el ciclo de refrigeración la condensación se inicia con la eliminación de sobrecalentamiento del refrigerante. Esto es el enfriamiento del vapor del refrigerante desde la temperatura de descarga del compresor hasta la temperatura condensante a medida que el refrigerante deja el calor en el medio (condensador). Durante el proceso de condensación ideal sucede a presión y temperatura constantes y el calor transferido al medio es proporcional al diferencial de entalpías en el inicio y final de este ciclo.

$$(h_2 - h_3) = Q_D, \quad (2.5)$$

donde(Q_D) denota el calor desechado por el condensado, (h_3) es la entalpía en la salida del condensador y (h_2) es la entalpía en la entrada del condensador.

2.1.4.1 EFECTO DE LA TEMPERATURA DE SUCCIÓN EN LA EFICIENCIA

Las temperaturas de vaporización y condensación influyen en la eficiencia del ciclo de refrigeración por compresión - vapor, siendo la temperatura de vaporización la que produce mayor cambio en la eficiencia del ciclo [2]. Al aumentar la temperatura

de vaporización en el ciclo de refrigeración se logra aumentar el efecto refrigerante por unidad de masa.

Al lograr tener mayor entalpía de vaporización (h_{fg}) por unidad de masa de refrigerante se traduce en la disminución en el diferencial de temperaturas de vaporización y la temperatura del líquido que llega a la válvula de control del refrigerante. En consecuencia, a mayor temperatura de succión, se vaporiza una fracción menor del refrigerante en la válvula de control y una mayor parte se cambia de mezcla a gas en el evaporador para producir un enfriamiento útil. Así mismo, al tener un mayor efecto refrigerante por unidad de masa, la razón de flujo de masa de refrigerante necesaria para producir una tonelada de capacidad de refrigeración es menor cuando se tiene una temperatura mayor de vaporización. Además, por tener un diferencial menor entre las presiones de vaporización y condensación, el trabajo de compresión será menor desde la presión de evaporación a la presión condensante (presión de baja a presión de alta respectivamente) [2].

En realidad los ciclos reales se alejan en la práctica de los ciclos ideales o teóricos y esto es debido a que el refrigerante no se comporta como un gas ideal, la compresión no sigue exactamente un proceso adiabático (Proceso en el cual el refrigerante no intercambia calor con su entorno) como se puede ver en la Figura 2.7, la pérdida de calor del gas refrigerante se producen en el compresor, la condensación y evaporación no son isobáricos, ya que hay caídas de presión debido a la fricción, existe subenfriamiento del líquido al llegar a la válvula de expansión, sobrecalentamiento del vapor que llega al compresor, además existen caídas de presión en toda la tubería debido a la fricción ocasionada por el refrigerante que fluye por la tubería del sistema [2].

Las razones del porqué el ciclo real de refrigeración se aleja del ciclo ideal son las siguientes etapas del ciclo:

a) Caída de presión por la válvula de descarga del compresor.

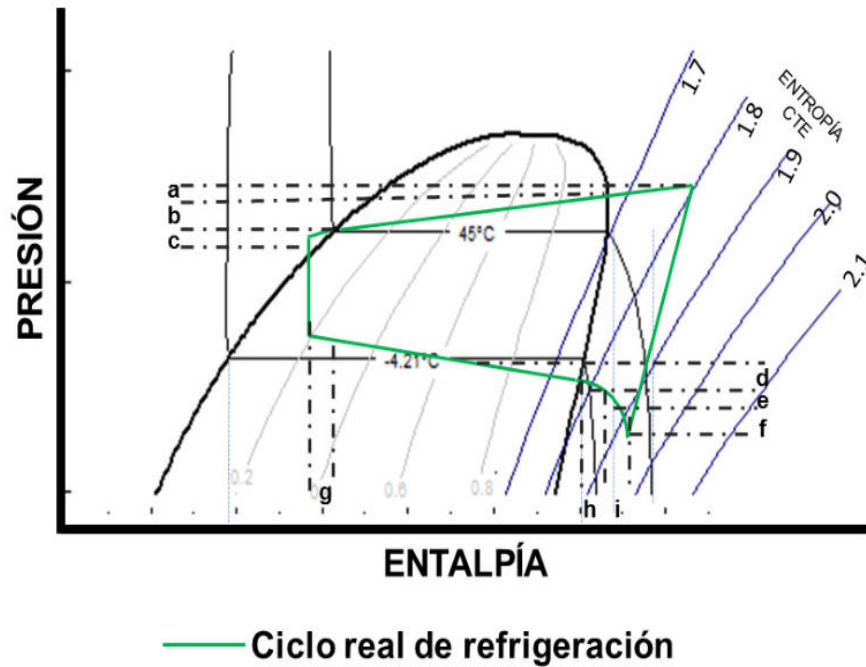


FIGURA 2.7: Diagrama presión-entalpía y un ciclo real de refrigeración simple [2].

- b) Caída de presión por tubería de descarga y condensador.
- c) Caída de presión por tubería de líquido.
- d) Caída de presión por el evaporador.
- e) Caída de presión por tubería de succión.
- f) Caída de presión por las válvulas de succión del compresor.
- g) Sub-enfriamiento en la tubería del líquido.
- h) Sobrecalentamiento en la tubería de succión.
- i) Calentamiento en el cilindro.

2.2 PROCESO ESTOCÁSTICO

Un proceso estocástico $x(t), t \in T$ es una familia de variables aleatorias indexadas por el conjunto de parámetros T . Si las variables aleatorias $x(t)$, son discretas, se dice que el proceso estocástico tiene un espacio de estado discreto. Si son continuos, se dice que el proceso tiene un espacio de estado continuo. El conjunto de parámetros T también puede ser discreto ($T = \{0, 1, 2, \dots, n\}, T = \{1, 2, \dots\}$) o continuo ($T = [0, 1], T = \{t : 0 \leq t \leq 1\}$) [42].

La función $X(t, s)$ es una variable aleatoria para cualquier valor particular [62].

MOMENTOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Al igual que la media, la varianza y la covarianza permite caracterizar, al menos parcialmente, variables aleatorias y vectores, también se puede caracterizar un proceso estocástico con la ayuda de sus momentos.

La **media** $E[X(t)]$ de un proceso estocástico $X(t), t \in T$ en el tiempo t se denota por $m_x(t)$. Además, la **función de autocorrelación** y la **función de autocovarianza** del proceso en el punto (t_1, t_2) se definen, respectivamente, por

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)], \quad (2.6)$$

y

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \quad (2.7)$$

Finalmente, el **coeficiente de correlación** del proceso estocástico en el punto (t_1, t_2) es

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{[C_X(t_1, t_1)C_X(t_2, t_2)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.8)$$

En el caso de pares de variables aleatorias, la cantidad $E[XY]$ se llama la correlación del vector (X, Y) . Aquí, es usado el prefijo "auto" porque la función

se calcula para dos valores del mismo proceso estocástico $X(t)$, $t \in T$. La función $R_{X,Y}(t_1, t_2) := E[X(t_1)Y(t_2)]$, donde $\{Y(t), t \in T^*\}$ es otro proceso estocástico, se llama la función de correlación cruzada. De hecho, se podría simplemente usar el término función de correlación en el caso de la función $R_X(t_1, t_2)$.

2.2.0.1 INCREMENTOS INDEPENDIENTES

Si las variables aleatorias $X(t_4) - X(t_3)$ y $X(t_2) - X(t_1)$ son independientes $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, se dice que el proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es un proceso con incrementos independientes [62].

Si las variables aleatorias $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ y $X(t_2) - X(t_1)$ tiene la misma función de distribución para todas las s , $X(t), t \in T$ se dice que es un proceso con incrementos estacionarios [62].

2.2.1 ESTACIONARIEDAD

2.2.1.1 ESTACIONARIO DE SENTIDO ESTRICTO

El proceso estocástico $X(t), t \in T$ es estacionario, o estacionario de sentido estricto, si su función de distribución de la orden n es invariante bajo cualquier cambio de origen:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + s, \dots, t_n + s), \quad (2.9)$$

para todas n, s y t_1, \dots, t_n .

El valor de s debe elegirse de manera que $t_k + s \in T$ para $k = 1, \dots, n$. Entonces, si $T = [0, \infty)$, por ejemplo, entonces $t_k + s$ debe ser no negativo para todos los valores de k . En la práctica, es difícil mostrar que un proceso estocástico dado es estacionario de sentido estricto (excepto en el caso de los procesos Gaussianos).

Si $X(t), t \in T$ es un proceso (continuo) de estacionario de sentido estricto, entonces se puede escribir que

$$f(x; t) = f(x; t + s) \quad \forall s, t, \quad (2.10)$$

y

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + s, t_2 + s) \quad \forall s, t_1, t_2. \quad (2.11)$$

Se deduce la ecuación (2.10) que la función de densidad de primer orden del proceso debe ser realmente independiente de t :

$$f(x; t) = f(x) \quad \forall t. \quad (2.12)$$

Por otra parte, la ecuación (2.11) implica que no es necesario conocer explícitamente valores de t_1 y t_2 para poder evaluar $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Es suficiente saber la diferencia $t_2 - t_1$:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_2 - t_1) \quad \forall t_1, t_2. \quad (2.13)$$

En términos de los momentos del proceso, las ecuaciones (2.12) y (2.13) implican que $m_X(t)$ es una constante y que la función de autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$ es, de hecho, una función R_X^* de una sola variable: $R_X(t_1, t_2) = R_X^*(t_2 - t_1)$ [62]. Estacionario en sentido amplio

El proceso estocástico $X(t), t \in T$ es estacionario en sentido amplio (WSS) si $m_X(t) = m$ y

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T. \quad (2.14)$$

Dado que $m_X(t) \equiv m$ si $X(t), t \in T$ es WSS, también se puede escribir

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &\equiv R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = \\ &R_X(t_2 - t_1) - m^2 = C_X(t_2 - t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Del mismo modo, se obtiene

$$\rho_X(t_1, t_2) = \rho_X(t_2 - t_1) = \frac{C_X(t_2 - t_1)}{C_X(0)}. \quad (2.16)$$

Al elegir $t_1 = t_2 = t$, se obtiene que $E[X^2(t)] = R_X(t, t) = R_X(0)$, para todo $t \in T$. Por lo tanto, la potencia promedio de un proceso estocástico WSS no depende de t .

A menudo se toma $t_1 = t$ y $t_2 = t + s$ cuando se calcula la función R_X o (C_X) . Si el proceso considerado es WSS, entonces la función obtenida depende solo de s . Está claro que un proceso estocástico estacionario de sentido estricto también es WSS. En el caso de los procesos Gaussianos, lo contrario también es cierto [62].

2.2.1.2 DENSIDAD ESPECTRAL

La densidad espectral de un proceso estocástico estacionario de amplio sentido, $X(t), t \in T$, es la transformada de Fourier $S_X(\omega)$ de su función de autocorrelación:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega s} R_X(s) ds. \quad (2.17)$$

Invertir la transformada de Fourier, se obtiene

$$R_X(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega s} S_X(\omega) d\omega. \quad (2.18)$$

Dado que la función de autocorrelación de un proceso WSS es una función par (es decir, $R_X(-s) = R_X(s)$), la densidad espectral $S_X(\omega)$ es real e incluso función. Entonces se puede escribir

$$S_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(s) \cos \omega s ds \quad y \quad R_X(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega s d\omega. \quad (2.19)$$

Se puede demostrar (el teorema de Wiener-Khintchiv) que la densidad espectral $S_X(\omega)$ es una función no negativa. En realidad, una función $S_X(\omega)$ es un espectro de densidad si y solo si es no negativo. Se supone que la siguiente relación se mantiene entre los procesos [62].

Distribución Multinormal

El vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) tiene una distribución multinomial si cada variable aleatoria X_k se puede expresar como una combinación lineal de variables aleatorias independientes Z_1, \dots, Z_m donde $Z_j \sim N(0, 1)$, por $j = 1, \dots, m$. Esto es si

$$X_k = \mu_k + \sum_{j=1}^m c_{kj} Z_j \quad \text{para } k = 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

donde μ_k es una constante real para toda k .

Así como una distribución Gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ está completamente determinada por su media μ y su varianza σ^2 , y una distribución normal bivalente por sus parámetros $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ y ρ , la función de densidad conjunta de los factores aleatorios, el vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ está completamente determinado por el vector de las medias, $m := (\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})$ la matriz de covarianza K , donde:

$$K = \begin{bmatrix} V[X_1] & Cov[X_1, X_2] & \dots & Cov[X_1, X_n] \\ Cov[X_2, X_1] & V[X_2] & \dots & Cov[X_2, X_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov[X_n, X_1] & Cov[X_n, X_2] & \dots & V[X_n] \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Por analogía con el caso unidimensional, se escribe que $X \sim N(m, K)$.

La matriz \mathbf{K} es simétrica, porque $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$, y es no-negativa, definida

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i c_k Cov[X_i, X_k] \geq \quad \forall c_i, c_k \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Si, además, es no singular, entonces se puede escribir

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(\det \mathbf{K})^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - m) \mathbf{K}^{-1} (X^T - m^T) \right\}, \quad (2.23)$$

para $X := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde “det” denota el determinante y T denota la traspuesta del vector [62].

Sea $X \sim N(m, K)$, la función característica conjunta de una v. a. X

$$\phi_X(\omega_1, \dots, \omega_n) := E[\exp \{j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_n X_n)\}], \quad (2.24)$$

es dado por

$$\phi_X(\omega) = \exp \left\{ j \sum_{i=1}^n \mu X_i \omega_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \omega_i \omega_k \right\} = \exp \left\{ jm\omega^T - \frac{1}{2} \omega K \omega^T \right\}, \quad (2.25)$$

donde: $\sigma_{ik} := Cov[X_i, X_k]$ y $\omega := (\omega_i, \omega_n)$

Además:

$$Y := \omega_1 X_1 + \dots + \omega_n X_n \sim N(\mu\Upsilon, \sigma^2\Upsilon), \quad (2.26)$$

donde

$$\mu\Upsilon := \sum_{i=1}^n \omega_i \mu X_i \quad y \quad \sigma^2\Upsilon := \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_i \omega_k \sigma_{ik}. \quad (2.27)$$

PROPIEDADES:

- Si $Cov[X_i, X_k] = 0$, entonces las variables aleatorias X_i y X_k son independientes.
- Sí Y_i , para $i = 1, \dots, m$, es una combinación lineal de las variables aleatorias X_k de un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) que tiene una distribución multinormal, entonces la v. a. (Y_i, \dots, Y_m) también tiene una distribución multinormal [62].

Proceso Gaussiano se dice que un proceso estocástico $X(t), t \in T$ es un proceso Gaussiano si el vector aleatorio $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ tiene una distribución multinormal, para cualquier n y para toda t_1, \dots, t_n .

Sea X una variable aleatoria cuya distribución es $N(\mu_X, \sigma_X^2)$. La transformación afín de X también tiene una distribución Gaussiana:

$$Y := aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu_X + b, a^2\sigma_X^2). \quad (2.28)$$

Del mismo modo, cualquier transformación afín de un proceso gaussiano sigue siendo un proceso Gaussiano. Por ejemplo, si $X(t), t \in T$ es un proceso Gaussiano, entonces el proceso estocástico $Y(t), t \in T$ definido por

$$Y(t) = 2X(t) - 1 \quad o \quad Y(t) = X(t^2), \quad (2.29)$$

es Gaussiano también. También es posible mostrar que $Y(t), t \in T$ es un proceso Gaussiano si

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds, \quad (2.30)$$

porque una integral es el límite de una suma. Sin embargo, el proceso no es Gaussiano si

$$Y(t) = X^2 \quad \text{o} \quad Y(t) = e^{X(t)}. \quad (2.31)$$

Si un proceso Gaussiano $X(t)$ donde $t \in T$ es tal que su media $m_X(t)$ es una constante m_X y si su función de autocovarianza $C_X(t, t+s)$ depende solo en s , entonces es estacionario (en el sentido estricto).

Un proceso estocástico $\{B(t), t \geq 0\}$ se llama proceso ruido blanco si su media es igual a cero y si su función de autocovarianza es de la forma

$$C_B(t_1, t_2) = q(t_1) \delta(t_2 - t_1), \quad (2.32)$$

donde $q(t_1) \geq 0$ y $\delta(\cdot)$ es la función delta Dirac.

Un proceso gaussiano y estacionario, $X(t), t \in T$, es Markovian si y solo si su función de autocorrelación es de la forma:

$$R_X(s) = \sigma^2 e^{-\sigma|s|}. \quad (2.33)$$

El **valor esperado** de $g(X)$ está dada por

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_X(x_k) \quad \text{para el caso discreto.} \quad (2.34)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad \text{para el caso continuo.} \quad (2.35)$$

Se calcula el valor esperado de $g(X)$ mediante el siguiente acondicionamiento:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n E[g(X) | B_i] P[B_i], \quad (2.36)$$

donde B_1, \dots, B_n es una partición de un espacio de muestra [62].

Momento de orden k : el momento k_{th} (**o momento de orden k**) del v. a. X **sobre el origen** viene dado $E[X^k]$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ [62].

Varianza: la varianza de la v. a. (variable aleatoria) X es la cantidad no negativa

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]. \quad (2.37)$$

La desviación estándar de X se define mediante $\sigma[X] = (V[X])^{\frac{1}{2}}$. El v. a. X y $\sigma[X]$ tienen las mismas unidades de medida.

También se calcula la varianza de X por condicionamiento con respecto a una partición de un espacio de muestra S , junto con la fórmula (2.37):

$$V[X] = \sum_{i=1}^n E[(X - E[X])^2 | B_i] P[B_i]. \quad (2.38)$$

La varianza condicional de X , dado un evento A , se define por:

$$V[X | A] = E[(X - E[X | A])^2 | A], \quad (2.39)$$

$$V[aX + b] = a^2 V[X] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 [62].$$

2.2.1.3 VALOR ESPERADO CONDICIONAL:

el valor esperado condicional de X , dado que $Y = y$, es definido por:

$$E[X | Y = y] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_{X|Y}(x_j | y) \quad \text{caso discreto.} \quad (2.40)$$

$$E[X | Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx \quad \text{caso continuo.} \quad (2.41)$$

La media $E[g(X)]$ de una transformación de g de una variable aleatoria X es constante real, mientras que $E[g(X) | Y = y]$ es una función de y , donde y es un valor particular percibido por el v. a. Y , ahora se considera $E[g(X) | Y]$. Es una función del v. a. Y que toma el valor $E[g(X) | Y = y]$ cuando $Y = y$. Por consiguiente, $E[g(X) | Y]$ es una variable aleatoria, cuya media se puede calcular. Proposición:

a) Se tiene que:

$$E[g(X)] = E[E[g(X) | Y]]. \quad (2.42)$$

Se deduce de la proposición anterior que

$$E[X] = E[E[X | Y]] \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} E[X | Y = y_k] p_Y(y_k) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E[X | Y = y_k] f_Y(y) dy & \text{caso continuo} \end{cases} \quad (2.43)$$

b) Se calcula la varianza de X mediante el condicionamiento en otra v. a. Y como sigue:

$$V[X] = E[E[X^2 | Y]] - (E[E[X | Y]])^2. \quad (2.44)$$

c) Sea X_1, X_2, \dots variables aleatorias que posean la misma distribución que el v.a. X , de modo que $E[X_k] = E[X]$ y $V[X_k] = V[X]$, para $k = 1, 2, \dots$, y que N sea una v. a. independiente de $X_{k\text{ésima}}$ y tomando sus valores en el conjunto $1, 2, \dots$. Por lo que haciendo uso de la fórmula (2.42) Se tiene que:

$$E\left[\sum_{k=1}^N X_k\right] = E[N] E[X]. \quad (2.45)$$

Si las v. a. X_k son independientes entre sí, también se tiene

$$V\left[\sum_{k=1}^N X_k\right] = E[N] V[X] + V[N] (E[X])^2. \quad (2.46)$$

d) Se supone que se desea estimar una variable aleatoria X usando otra v. a. Y . Se puede demostrar que la función $g(Y)$ que minimiza el error cuadrático medio (MSE)

$$MSE := E[(X - g(Y))^2] \quad (2.47)$$

Es $g(Y) = E[X | Y]$. Si se busca una función de la forma $g(Y) = \alpha Y + \beta$, puede mostrar que las constantes α y β que minimizan MSE son:

$$\hat{\alpha} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{V[Y]} \quad y \quad \hat{\beta} = E[X] - \hat{\alpha}E[Y]. \quad (2.48)$$

Finalmente, si $g(Y) \equiv c$, se encuentra fácilmente que la constante c que produce el más pequeño MSE es $c = E[X]$.

La función $g(Y) = E[X | Y]$ es el mejor estimador de X , en términos de Y , mientras que $g(Y) = \hat{\alpha}Y + \hat{\beta}$ es el mejor estimador lineal de X , en términos de Y . Si X y Y ambos tienen una distribución Gaussiana, entonces los dos estimadores son iguales [62].

Se puede escribir

$$[X \in A] \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} P[X \in A | Y = y_k] p_Y(y_k) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P[X \in A | Y = y_k] f_Y(y) dy & \text{caso continuo.} \end{cases} \quad (2.49)$$

Correspondiente a la definición de la varianza condicional $V[X | A]$, ahora se tiene la definición de la varianza condicional de X [62].

Varianza condicional de X : la varianza condicional de X dado el v. a. Y , es definido por:

$$V[X | Y] = E[(X - E[X | Y])^2 | Y]. \quad (2.50)$$

Entonces:

$$V[X | Y] = E[X^2 | Y] - (E[X | Y])^2. \quad (2.51)$$

Se puede mostrar el siguiente resultado útil:

$$V[X] = E[V[X | Y]] + V[E[X | Y]]. \quad (2.52)$$

Covarianza:

la covarianza de X y Y está definida por

$$Cov[X, Y] \equiv E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (2.53)$$

Sea X_1, X_2, \dots una secuencia infinita, independiente e idénticamente distribuidos (i.i.d.) el v. a., y dejar que $S_n := X_1 + \dots + X_n$

- **Ley débil de grandes números** Sí $E[X_1] = \mu \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{S_n}{n} - \mu < c \right] = 1 \quad \forall c > 0 \quad (2.54)$$

- **Ley fuerte de grandes números** Si $E[X_1^2] < \infty$; entonces se escribe

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu \right] = 1 \quad (2.55)$$

- **Teorema del límite central** Si $E[X_1] = \mu \in \mathbb{R}$ y $V[X_1] = \sigma^2 \in (0, \infty)$, entonces [62]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq z \right] = P[N(0, 1) \leq z] \quad (2.56)$$

2.3 ECUACIÓN HAMILTON-JACOBI-BELLMAN Y OBTENCIÓN DEL CONTROL LINEAL CUADRÁTICO

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) es una ecuación diferencial parcial que es fundamental para la teoría de control óptimo. La solución de la ecuación HJB es la "función de valor" (o "función de costo óptimo"), la cual da el costo mínimo para un sistema dinámico dado, con una función de costo asociada [63]. Cuando se resuelve localmente, la HJB es una condición necesaria, pero cuando se resuelve sobre la totalidad del espacio de estados, la ecuación HJB es una condición necesaria y suficiente para un óptimo. La solución es de lazo abierto, pero también permite que la solución del problema sea de lazo cerrado. El método HJB puede ser generalizado a sistemas estocásticos. Los procesos son descritos por la ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t). \quad (2.57)$$

Se debe de controlar la minimización

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.58)$$

Donde h y g son funciones específicas, t_f y t_o son fijos y τ es la variable "dummy" de integración. De donde:

$$J \left(x(t), t, u(\tau) \right)_{t \leq \tau \leq t_f} = h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.59)$$

Donde t puede ser cualquier valor menor o igual a t_f y $x(t)$ puede ser cualquier valor del estado admisible. Nótese que el valor dependerá el valor numérico de $x(t)$ y de t y en el historial de control óptimo en el intervalo de $[t, t_f]$. Ahora para determinar el control y el mínimo costo de la función:

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} u(t) \left\{ \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(x(t_f), t_f) \right\}. \quad (2.60)$$

Por sustitución del intervalo se obtiene:

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} u(t) \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + \int_t^{t+\Delta t} g d\tau d\tau + h(x(t_f), t_f) \right\}. \quad (2.61)$$

El principio de optimización requiere

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} u(t) \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\}. \quad (2.62)$$

Donde $J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ es el costo mínimo del proceso para el intervalo de tiempo $t + \Delta t \leq \tau \leq t_f$ con el estado inicial $x(t + \Delta t)$.

Asumiendo la existencia de la segunda derivada parcial para J^* y son frontera, se puede expandir $J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ en series de Taylor por el punto $x(t + \Delta t)$ se obtiene.

$$\begin{aligned} J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} u(t) \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + J^*(x(t + \Delta t), t + \\ \Delta t) + \left[\frac{dJ^*}{dt}(x(t), t) \right] \Delta t + \left[\frac{dJ^*}{dt}(x(t), t) \right]^T [X(t + \Delta t) + \\ X(t)] + \text{términos de órdenes mayores}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Ahora para una pequeña Δt

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(t)} \{g(x(t), u(t), t)\Delta t + J^*(x(t), t) + J_t^*(x(t), t)\Delta t + J_t^{*T}(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)]\Delta t + o(\Delta t)\} \quad (2.64)$$

$$\dagger J_x^* \triangleq \frac{dJ^*}{dx} = \left[\frac{dJ^*}{dx_1} \frac{dJ^*}{dx_2} \dots \frac{dJ^*}{dx_n} \right]^T \text{ y } J_t^* \triangleq \frac{dJ^*}{dt}. \quad (2.65)$$

Donde $o(\Delta t)$ denota los términos que contengan $[\Delta t]^2$ y órdenes mayores, esto se empieza la aproximación de la integral y la truncación de la expansión de la serie de Taylor. Entonces se remueven los términos que involucran $J^*(x(t), t)$, $J_t^*(x(t), t)$ Para la minimización (donde no todo depende de $u(t)$), se obtiene:

$$0 = J_t^*(x(t), t)\Delta t + \min_{u(t)} \{g(x(t), u(t), t)\Delta t + J_t^{*T}(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)]\Delta t + o(\Delta t)\}. \quad (2.66)$$

Dividiendo por Δt y tomando el límite de $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene

$$0 = J_t^*(x(t), t) + \min_{u(t)} \{g(x(t), u(t), t) + J_t^{*T}(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)]\}. \quad (2.67)$$

Para encontrar el valor en la frontera de la ecuación diferencial donde $t = t_f$.

$$J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f). \quad (2.68)$$

Se conoce Hamilton como \mathbb{H} :

$$\mathbb{H}(x(t), \mathbf{u}^*(t), J_x^*, t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + J_x^{*T}(x(t), t)[a(x(t), \mathbf{u}(t), t)], \quad (2.69)$$

y

$$\mathbb{H}(x(t), \mathbf{u}^*(t), J_x^*, t), J_x^*, t = \min_{u(t)} \mathbb{H}(x(t), u(t), J_t^*, t). \quad (2.70)$$

Donde la minimización del control dependerá de x , J_x^* , y de t , usando esta definición se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi [63]

$$0 = J_t^*(x(t), t) + \mathbb{H}(x(t), \mathbf{u}^*(t), J_x^*, t). \quad (2.71)$$

Esta ecuación es continua en el tiempo análoga a la ecuación de Bellman es por ello que también se le conoce como **ecuación HJB**. La ecuación HJB como medio para resolver la forma general del problema del regulador lineal continuo.

El proceso a controlar se describe con una ecuación de estado.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)U(t), \quad (2.72)$$

la medida de rendimiento será minimizado por

$$J = \frac{1}{2}x^T H x(t_f) + \int_{t_o}^{t_f} \frac{1}{2}[X^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt, \quad (2.73)$$

H y Q son matrices reales simétricas positivas semi-definidas, R es una matriz real simétrica positiva definida. los tiempos inicial t_o y final t_f son especificados y $u(t)$ y $x(t)$ no son considerados por ninguna frontera. Se va a utilizar la ecuación de HJB, primero la ecuación de Hamilton

$$\mathbb{H}(x(t), \mathbf{u}^*(t), J_x^*, t) = \frac{1}{2}X^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) * [A(t)x(t) + B(t)u(t)]. \quad (2.74)$$

Una condición necesaria para que $u(t)$ minimice \mathbb{H} es: $\frac{d\mathbb{H}}{du} = 0$

$$\frac{d\mathbb{H}}{du}(x(t), u(t), J_x^*, t) = R(t)u(t) + B^T(t)J_x^*(x(t), t) = 0. \quad (2.75)$$

Donde la matriz

$$\frac{d^2\mathbb{H}}{du^2} = R(t). \quad (2.76)$$

Es positiva definida y \mathbb{H} es una forma cuadrática forma en u , el control satisface la (2.75) minimiza \mathbb{H} . Resolviendo la ecuación (2.75) para $u^*(t)$:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)J_x^*(x(t), t). \quad (2.77)$$

Substituyendo en la ecuación (2.74)

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(x(t), u^*(t), J_x^*, t) &= \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* + J_x^{*T} A x - \\ J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* &= \frac{1}{2}x^T Q x - \frac{1}{2}J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* + J_x^{*T} A x, \end{aligned} \quad (2.78)$$

la ecuación de **HJB** es:

$$0 = J_t^* + \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* + J_x^{*T} Ax. \quad (2.79)$$

De (2.73) la condición frontera está dada por:

$$J^*(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K(t)Hx(t_f). \quad (2.80)$$

Se debe de encontrar el mínimo costo para la discretización lineal de problema regulatorio es una función cuadrática de estado, por esa razón la solución es de la forma:

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2}x^T(t)K(t)x(t). \quad (2.81)$$

Donde K es una matriz simétrica definida positiva y debe de ser determinado. Substituyendo y asumiendo la solución nos queda:

$$0 = \frac{1}{2}x^T \dot{K}x + \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}x^T K B R^{-1} B^T Kx + x^T K Ax. \quad (2.82)$$

La matriz del producto KA aparenta ser los términos que se pueden escribir como la suma de una parte simétrica y una parte antisimétrica. Usando la propiedad de las matrices traspuestas que es igual a la propiedad de un escalar en las matrices simétricas, por lo que reescribiendo nos queda.

$$KA = \frac{1}{2}[KA + (KA)^T] + 1/2[KA - (KA)^T]. \quad (2.83)$$

Usando la propiedad de las matrices traspuestas $(CD)^T = D^T C^T$ que es igual a la propiedad de un escalar en las matrices simétricas, por lo que reescribiendo nos queda:

$$0 = \frac{1}{2}x^T \dot{K}x + \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}x^T K B R^{-1} B^T Kx + \frac{1}{2}x^T K Ax + \frac{1}{2}x^T A^T Kx. \quad (2.84)$$

Esta ecuación es para toda $x(t)$

$$0 = \dot{K}(t) + Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t). \quad (2.85)$$

Y las condiciones frontera de las ecuaciones (2.80) y (2.81).

$$K(t_f) = H. \quad (2.86)$$

Se debe considerar la implicación de este resultado primero la ecuación diferencial parcial HJB se reduce a ecuaciones diferenciales no lineales, en segundo lugar la matriz $K(t)$ puede ser determinada por integración numérica de la ecuación (2.75) de $t = t_f$ hasta $t = t_o$ utilizando las condiciones fronteras de $K(t_f) = H$ por ser una matriz $n \times n$ $K(t)$ y además es simétrica, se necesita integrar solo $n(n+1)/2$ ecuaciones diferenciales. Una vez que $K(t)$ es determinada, la ley del control óptimo está dado por:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t). \quad (2.87)$$

Asumiendo que la solución está de la forma (2.81). La ley del control óptimo es lineal, variante en el tiempo y con retroalimentación, es posible presentar la solución de la forma HJB [63].

2.4 TEORÍA DE FILTROS

El problema de estimar el estado de un sistema dinámico estocástico a partir de observaciones con ruido tomadas del estado es de importancia central en ingeniería. El interés por este problema se remonta casi dos siglos atrás a los trabajos de Gauss. Gauss estaba interesado en determinar los elementos orbitales de un cuerpo celeste a partir de (muchas) observaciones y desarrolló la técnica que hoy se conoce como mínimos cuadrados. Más recientemente, los nombres de Wiener y Kalman están asociados con avances en la teoría de la estimación. La teoría de la estimación tuvo sus inicios en problemas del espacio (astronomía, mecánica celeste), y sus avances más recientes están asociados con los problemas aeroespaciales modernos [42].

2.4.1 FILTROS ÓPTIMOS RISK-SENSITIVE

Tomando $F(X(t)) = A(t) + A_1(t)X(t)$, $h(X(t)) = E(t) + E_1(t)X(t)$ con $A(t) \in \mathbf{R}^n$, $A_1(t) \in M_{n \times n}$, $E(t) \in \mathbf{R}^p$, $E_1(t) \in M_{n \times p}$, donde M_{ixj} denota las dimensiones de las matrices ixj . Se obtienen las siguientes ecuaciones del sistema estocástico:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t) + A_1(t)X(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW(t) \quad (2.88)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = E(t) + E_1(t)X(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW(t)$$

$$\dot{C}(t) = A_0 + A_1^T(t)C(t) - Q^{-1}(t)E_1(t) \times (dy - E_1(t)C(t) - E(t)), \quad (2.89)$$

donde $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -A_1^T(t)Q(t) - Q(t)A_1(t) + Q^T(t)Q(t) - E_1^T(t)E(t), \quad (2.90)$$

con $C(t) \in \mathbf{R}^n$, $Q(t) \in M_{n \times n}$, como se puede ver en [54]. Se propone la función de valor: $Z(t, X) = \frac{1}{2}(X(t) - C)^T Q(X(t) - C) + \rho - Y(t) \cdot (E(t) + E_1(t)X(t))$, $Z(x)(0, X) = \phi(X)$, (C , Q , ρ son funciones de $t \in [0, T]$, $C \in \mathbf{R}^n$, Q es una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ y ρ es una función) como una solución viscosa de la ecuación no lineal (2.91):

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{\epsilon}{2} \text{tr}(Z_{xx}) + A \cdot Z_x + \frac{1}{2} Z_x \cdot Z_x + B, \quad (2.91)$$

donde Z_x , Z_{xx} son las derivadas parciales de Z respecto a x , y ∇Z es el gradiente de Z entonces la derivada de Z está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{2}(X(t) - C)^T \dot{Q}(X(t) - C) + \dot{\rho} - \frac{1}{2} \dot{C}^T Q(X(T) - C) - \\ &\quad \frac{1}{2}(X(t) - C)^T Q \dot{C} - dY \cdot (E(t) + E_1(t)X(t)) \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{1}{2} Q(X - C) + \frac{1}{2} (X - C)^T Q - Y(t)E_1(t), \\ &\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial x} = Q. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Substituyendo la ecuación (2.92) en la ecuación (2.91) y agrupando los términos de segundo grado, igualándolos a cero, y haciéndolo de nuevo para los términos de primer grado, se obtiene las ecuaciones de filtrado (2.89) y (2.90).

2.5 DISEÑO DEL CONTROL PID

Actualmente, las razones por lo cual se automatizan los procesos, es mantener la variable controlada en un valor de consigna o SP, a pesar de las perturbaciones, es limitada al máximo la intervención de un operador. Por lo cual se evitan lesiones al personal de la planta, mantener la calidad del producto y la tasa de producción en un costo mínimo [58]. Para lograr el control de un proceso primero se debe de obtener la medición de la variable que se desea controlar, como por ejemplo, la temperatura, que se mide con un termopar, el cual se conecta físicamente a un transmisor que capta la señal del sensor, la magnifica y la envía al controlador. El controlador recibe la señal del transmisor, la compara con el valor deseado y según la comparación se selecciona la acción que se tiene programada. Con base en la decisión, el controlador le envía una señal al elemento final de control, que puede ser una resistencia eléctrica o una válvula [58].

Los controladores que se usan hoy en día en la industria más de la mitad son PID. Los controladores PID analógicos son, principalmente, de tipo neumático, hidráulico, electrónico, eléctrico y sus combinaciones. En la actualidad muchos de estos se transforman en digitales mediante el uso de microprocesadores. El PID es ampliamente utilizado debido a que su aplicación en general es en la mayoría de los sistemas de control. En la industria, los sistemas para controlar el proceso, los esquemas de control PID básicos y modificados han demostrado tener un control satisfactorio, aunque tal vez no aporten un control óptimo en muchas situaciones específicas [3]. Se ha descubierto que es posible establecer parámetros de controlador satisfactorios teniendo poca información de la planta que un modelo matemático completo. Estas técnicas surgieron debido al deseo de ajustar los parámetros del controlador con un mínimo de esfuerzo, y también por la posible dificultad y escaso costo-beneficio de obtener modelos matemáticos. Las dos técnicas de PID más populares fueron: la respuesta experimental de la planta a una entrada escalón conocida como curva de reacción y el otro método es donde la salida esperada son oscilaciones

sostenidas y ciclos bajo control proporcional alrededor del punto de funcionamiento nominal [59].

Algoritmo de Ziegler-Nichols: Ziegler-Nichols propusieron una fórmula de ajuste empírica muy útil a principios de 1942. La respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental o a partir de una simulación dinámica de la planta. La respuesta escalonada del modelo de la planta se puede medir a través de un experimento, la señal de salida puede registrarse como se muestra en la Figura 2.8, a partir de la cual los parámetros de k , L y T (o a , donde $a = kL/T$) se puede extraer se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva de reacción y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la línea $c(t) = K$, tal como se muestra en la Figura 2.8. En este caso, la función de transferencia se aproxima mediante un sistema de primer orden con un retardo de transporte como se representa en la ecuación (2.93).

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sL}. \quad (2.93)$$

Z-N sugirieron establecer los valores de K_p , T_i y T_d de acuerdo con la fórmula que se muestra en la Tabla 2.1 [3].

TABLA 2.1: Fórmulas de sintonización de Z-N respuesta escalón

Tipo Control	K_p	T_i	T_d
P	1/a	∞	0
PI	0.9/a	3 L	0
PID	1.2/a	2 L	0.5 L

La aplicación de este procedimiento no siempre conduce a resultados adecuados, incluso puede llevar a la inestabilidad del sistema. En consecuencia, han ido apareciendo diferentes procedimientos alternativos para mejorar el comportamiento de los sistemas controlados con PID, como: algoritmo de ajuste PID de CHR y

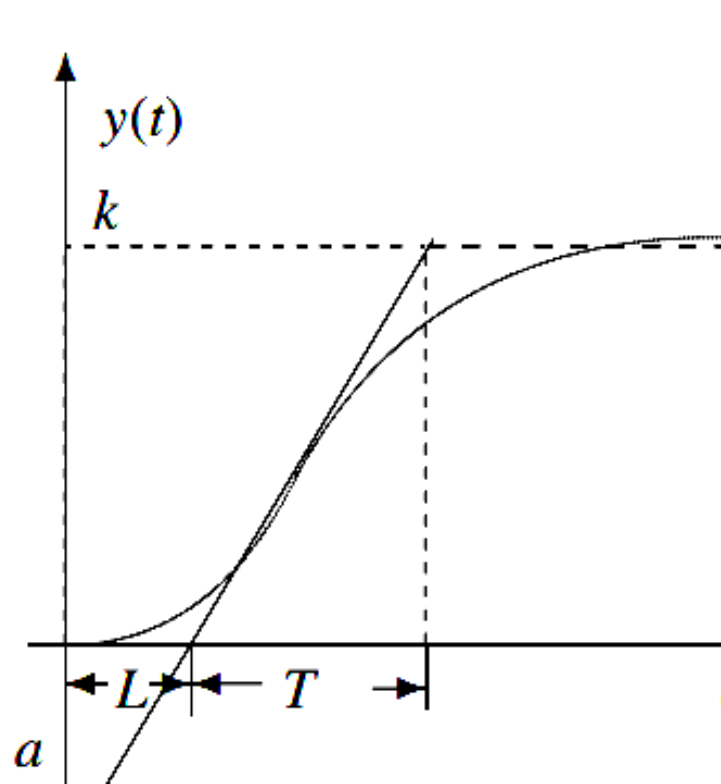


FIGURA 2.8: Curva de reacción de una planta ante una entrada escalón [3].

algoritmo de ajuste Cohen-Coon [59].

Algoritmo de ajuste PID de Chien – Hrones – Reswick

En 1952 proponen una estrategia diferente de ajuste de controladores PID. El método CHR enfatiza la regulación del punto de ajuste o rechazo a las perturbaciones. Además, con una especificación cualitativa sobre la velocidad de respuesta y se puede acomodar el sobre-impulso. En comparación con la afinación tradicional de Z-N, el método CHR utiliza la constante de tiempo T de la planta explícitamente. Las fórmulas de ajuste del controlador CHR PID se resumen en la Tabla 2.2 para el punto de ajuste regulación. La respuesta de circuito cerrado más amortiguada, que asegura, para el ideal modelo de planta, la respuesta más rápida sin sobre-impulso se etiqueta con 0 % de sobre-impulso, y la respuesta más rápida con un 20 % de sobre-impulso está etiquetada como con un 20 % de sobrepaso. De manera similar, la Tabla 2.3 se utiliza para diseñar controladores con fines de rechazo de perturbaciones [59].

TABLA 2.2: Fórmulas de sintonización de CHR ajuste de regulación

	0 % sobre-impulso			20 % sobre-impulso		
Tipo control	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.35/a$	$1.2T$		$0.6/a$	T	
PID	$0.6/a$	T	$0.5L$	$0.95/a$	$1.4T$	$0.47L$

TABLA 2.3: Fórmulas de sintonización de CHR rechazo de perturbación

	0 % sobre-impulso			20 % sobre-impulso		
Tipo control	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.6/a$	$4L$		$0.7/a$	$2.3L$	
PID	$0.95/a$	$2.4L$	$0.42L$	$1.2/a$	$2L$	$0.42L$

Algoritmo de ajuste Cohen-Coon Coon introducen algunos cambios en las expresiones de Z-N para obtener mejores resultados cuando el proceso tiene un tiempo muerto dominante. Denote $a = kL/T$ y $\tau = L/(L + T)$. Los diferentes controladores pueden diseñarse mediante el uso directo de la Tabla 2.4 [59].

TABLA 2.4: Fórmulas de sintonización de Cohen-Coon

Tipo Control	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{0.35\tau}{1-\tau}\right)$		
PI	$\frac{0.9}{a} \left(1 + \frac{0.92\tau}{1-\tau}\right)$	$\left(\frac{3.3-3\tau}{1-1.2\tau}\right)L$	
PD	$\frac{1.24}{a} \left(1 + \frac{0.13\tau}{1-\tau}\right)$		$\left(\frac{0.27-0.36\tau}{1-0.87\tau}\right)L$
PID	$\frac{1.35}{a} \left(1 + \frac{0.18\tau}{1-\tau}\right)$	$\left(\frac{0.25-2\tau}{1-0.39\tau}\right)L$	$\left(\frac{0.37-0.37\tau}{1-0.81\tau}\right)L$

En el Capítulo 5 se presentarán los resultados de las simulaciones de las tres metodologías de sintonización de PID, expuestas en este Capítulo, aplicadas a los sistemas de control de temperatura del evaporador y de la resistencia eléctrica.

MODELADO MATEMÁTICO

3.1 SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

En este trabajo de tesis se propone el modelo matemático para la temperatura de evaporación de un sistema de refrigeración.

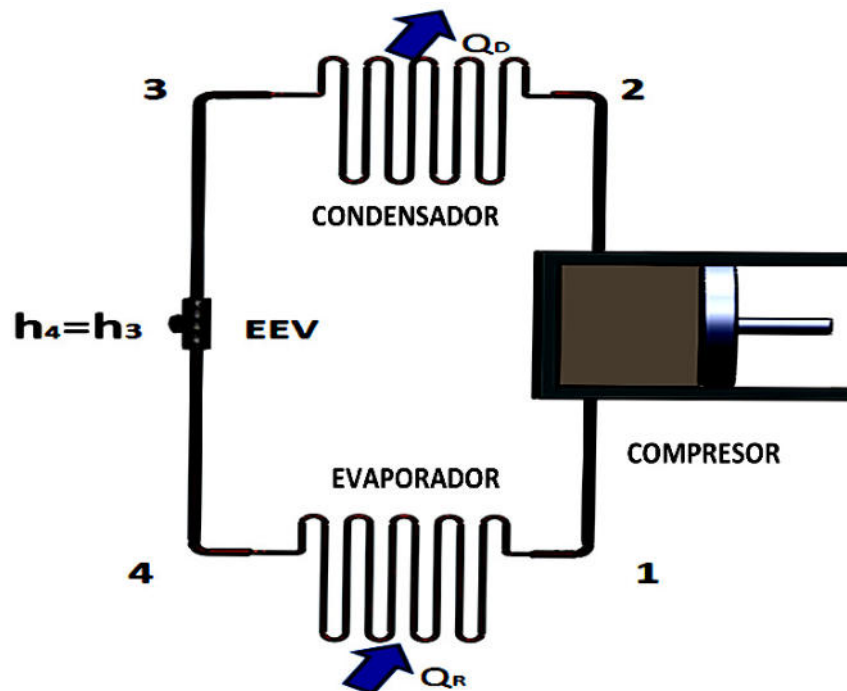


FIGURA 3.1: Sistema de refrigeración (fuente propia).

Como se puede ver en la Figura 3.1 el sistema de refrigeración se divide en cuatro pasos, donde el paso 1 es la entrada del compresor, el paso 2 es la entrada del condensador, el paso 3 es la entrada EEV y el paso 4 es la entrada del evaporador.

Donde: Q_D es el calor desechado por el condensador, W_c es el trabajo del compresor, Q_R es la capacidad de refrigeración (kW).

3.1.1 MODELADO DEL EVAPORADOR

Al iniciar el modelado matemático de un sistema se debe de iniciar con la más importante y fundamental ley de la naturaleza, el principio de la conservación de la energía. Este expresa que durante una iteración, la energía puede cambiar de una forma a otra, pero su cantidad permanece constante. Es decir, la energía no se crea, no se destruye, solo se transforma, este enunciado se conoce como la primera ley de la termodinámica y se expresa de la siguiente expresión matemática.

$$\mathbb{E}_{entrada} - \mathbb{E}_{salida} = \Delta\mathbb{E}. \quad (3.1)$$

Aplicando la ecuación de balance de energía [64], [65]:

$$\dot{m}h_4(T_R(t)) + Q_R(t) - \dot{m}h_1(T_R(t)) = mC_p \frac{dT_R}{dt}. \quad (3.2)$$

Donde \dot{m} es el flujo de refrigerante másico, $h_1(T_R(t))$, $h_4(T_R(t))$ son la entalpía de la salida y la entrada del evaporador respectivamente, C_p es el calor específico (es la cantidad de calor que hay que suministrar a la unidad de masa de una sustancia o sistema termodinámico para elevar su temperatura en una unidad), m es la cantidad de masa del aire en el espacio a refrigerar y $\frac{dT_R(t)}{dt}$ representa el cambio de temperatura del refrigerante con respecto al tiempo en el evaporador.

$$mC_p \frac{dT_R(t)}{dt} = \dot{m}[h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))] + Q_R(t). \quad (3.3)$$

$T_R(t)$ es la temperatura del refrigerante en la salida del evaporador con respecto al tiempo. Donde la capacidad de enfriamiento $Q_R(t)$ está dada por la siguiente

ecuación (como se puede ver en [66] para más detalles):

$$Q_R(t) = U_E A_E [T_{ER} - T_R(t)]. \quad (3.4)$$

Donde A_E es el área total del evaporador, U_E es el coeficiente de transferencia de calor global, $T_{ER} - T_R(t)$ es la diferencia de temperatura entre el espacio a refrigerar y la temperatura del refrigerante. Sustituyendo la ecuación (3.4), en la ecuación (3.3), se obtiene la siguiente ecuación, que representa el cambio en la temperatura del refrigerante con respecto al tiempo en un evaporador en un sistema de refrigeración.

$$\frac{dT_R(t)}{dt} = \frac{U_E A_E}{m C_p} [T_{ER} - T_R(t)] + \frac{\dot{m}}{m C_p} [h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))]. \quad (3.5)$$

Donde $h_1(T_R(t))$ es la entalpía del vapor de refrigerante sobrecalentado y se calcula utilizando el software Coolpack. Por otro lado, $h_4(T_R(t))$ es la entalpía del líquido saturado y se calcula de la misma manera que $h_1(T_R(t))$. La biblioteca de propiedades termo físicas analizada en este trabajo es CoolProp. Este software es ampliamente utilizado por la comunidad de sistemas térmicos, por su precisión, facilidad de uso y licencias de código abierto. La fiabilidad de los resultados se ha demostrado mediante la comparación con REFPROP (Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties Database) [67].

Sin embargo, las propiedades termodinámicas juegan un papel crucial en los procesos de intercambio de calor. En condiciones de ebullición y condensación, una mezcla azeotrópica presenta una presión y temperatura no constantes. Por esto, la presión de succión se considera en un estado cuasi estático, así como la temperatura durante el cambio de fase en el proceso de ebullición. En este modelo, la ecuación (3.5) representa el cambio de la temperatura, $T_R(t)$, es proporcional al flujo másico de refrigerante \dot{m} , por lo que \dot{m} asumirá el rol de control.

3.1.2 VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DIMENSIONAL DEL MODELADO DEL EVAPORADOR

Se realizó la simulación con diferentes valores de entrada de control constante, donde se observa que la ecuación dinámica que representa el cambio de la temperatura en el evaporador se comporta de manera similar a lo real, ya que al mantener la entrada de control constante simula un tubo capilar, y el comportamiento de la temperatura es tender al valor deseado como se puede ver en la Figura 3.2.

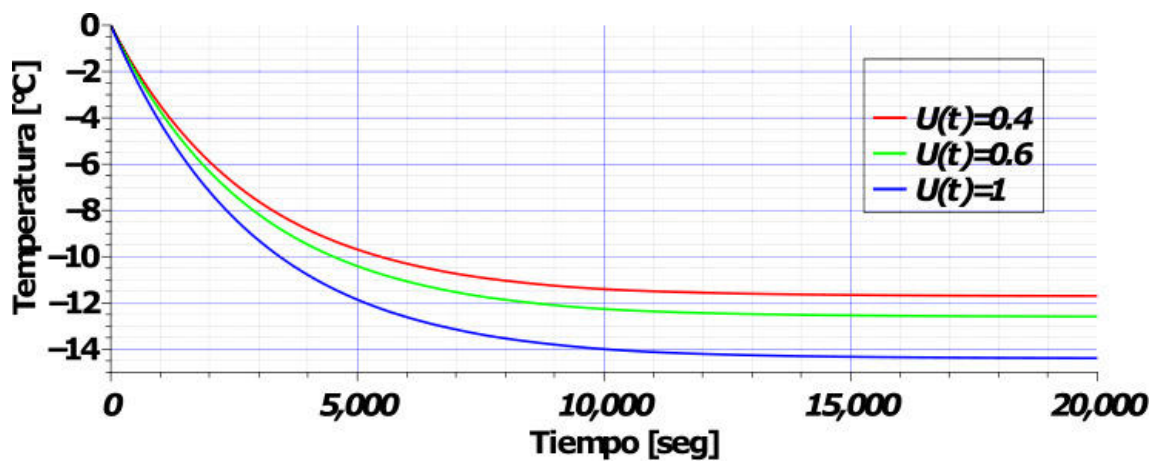


FIGURA 3.2: Validación de la ecuación dinámica (3.5).

Retomando la ecuación (3.5) se continúa con la Tabla 3.1 para el análisis dimensional

TABLA 3.1: Análisis dimensional del modelado del sistema de refrigeración.

Variable	unidades
Temperatura T	$^{\circ}C$
Capacidad calorífica C_P	$\frac{kJ}{kg^{\circ}C}$
Coefficiente global de calor U	$\frac{kJ}{seg m^2^{\circ}C}$
Entalpía h	$\frac{kJ}{kg^{\circ}C}$
Área A	m^2
Masa m	kg
Flujo másico \dot{m}	$\frac{kg}{seg}$

3.2 MODELADO DEL SISTEMA DE CALEFACCIÓN DE UNA RESISTENCIA ELÉCTRICA

De la misma manera que con el modelado anterior se inicia con de la primera ley de la termodinámica (3.1). Una consideración general de la dinámica del sistema es la transferencia de calor a velocidad constante.

$$\dot{Q} = \dot{m}C_p\Delta T, \quad (3.6)$$

donde \dot{Q} es el flujo de calor, \dot{m} es el flujo másico del aire, C_p es la capacidad térmica del aire a presión constante. La ecuación (3.6) se toma como el calor absorbido por el aire dentro del recinto.

3.2.1 TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN

Aplicando la ley de Fourier en la conducción del calor en el interior de una placa en un análisis unidimensional se obtiene:

$$\dot{Q}_{cond} = -KA\frac{T_{in} - T_{out}}{L}, \quad (3.7)$$

donde k es la conductividad térmica del material, L es el espesor de la placa, T_{in} es la temperatura superficial de la pared interior del recinto y T_{out} es la temperatura superficial de la pared exterior del recinto.

$$\dot{Q}_{conv} = hA[T_s - T_\alpha], \quad (3.8)$$

donde \dot{Q}_{conv} es el calor de convección, h coeficiente de transferencia de calor por convección $\frac{Wm^2}{\circ K}$, A áreas superficiales de la pared, T_s temperatura superficial y T_α temperatura del fluido.

3.2.2 CONCEPTO DE RESISTENCIA TÉRMICA

Se enfatiza un nuevo enfoque de la ley de Fourier desde un punto de vista conceptual diferente. El flujo de calor debe ser el mismo en cada sección. El proceso de transferencia de calor puede ser representado por el circuito de resistencias como se puede ver en [68] la transferencia de calor global se calcula como el cociente entre la diferencia total de temperatura y la suma de las resistencias térmicas.

$$q_{total,walls} = \frac{[T_s - T_\alpha]}{\frac{1}{hA} + \frac{L}{KA} + \frac{1}{hA}}, \quad (3.9)$$

si $U = \frac{kh_o h_i}{zh_o h_i + kh_a + kh_o}$, entonces la ecuación anterior (3.9) queda:

$$q_{totalwalls} = UA[T_{in}(t) - T_{out}]. \quad (3.10)$$

3.2.3 POTENCIA ELÉCTRICA

Cuando los electrones cruzan los límites de un sistema, realizan un trabajo eléctrico sobre él. En este campo eléctrico, los electrones de un alambre se mueven por efecto de las fuerzas electromotrices, por lo tanto, realizan trabajo. Cuando la carga eléctrica N Columbus se mueve a través de una diferencia de potencia V , el trabajo eléctrico realizado es:

$$\dot{W}_e = VI. \quad (3.11)$$

Donde \dot{W}_e es la potencia eléctrica I es la cantidad de carga eléctrica que circula por la unidad de tiempo, es decir, la corriente, como se puede ver en [1]. Al sumar las ecuaciones, calor del aire de la habitación (3.6), el calor total de la pared (3.10) y trabajo eléctrico (3.11), es el modelo matemático del sistema de calefacción.

$$\hat{m}C_p\Delta T - UA(T_{in}(t) - T_{out}) = \dot{W}_e(t). \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta que ΔT es el cambio de temperatura del aire en el interior del recinto, que varía en función del Set Point (SP), la ecuación (3.12) es:

$$\hat{m}C_p \frac{dT_{in}(t)}{dt} - UA(T_{in}(t) - T_{out}) = \dot{W}_e(t). \quad (3.13)$$

Trabajando solo en el lado izquierdo de la ecuación por considerar que el trabajo eléctrico $\dot{W}_e(t)$ es cero antes de alcanzar el valor SP del estado y despejando $\frac{dT_{in}(t)}{dt}$.

$$\frac{1}{\hat{m}C_p}UA(T_{in}(t) - T_{out}) = \frac{dT_{in}(t)}{dt}. \quad (3.14)$$

Esta ecuación (3.14) representa el cambio de la temperatura por la acción de control en una resistencia eléctrica que es utilizada ampliamente en la electrónica y en la calefacción de ambientes, con el objetivo de mantener cierto nivel de temperatura. Sin embargo, la presencia de perturbaciones puede hacer ineficientes su funcionamiento. Se plantea el modelo que representa el funcionamiento de una resistencia eléctrica como medio calefactor del interior de un recinto como un sistema dinámico de ecuaciones estocásticas.

Retomando el modelo del sistema de calefacción (3.14) se realiza un análisis dimensional como se puede ver en la Tabla 3.2.

TABLA 3.2: Análisis dimensional del modelado del sistema de calefacción.

Variable	unidades
Temperatura T	$^{\circ}C$
Capacidad calorífica C_P	$\frac{kJ}{kg^{\circ}C}$
Coefficiente global de calor U	$\frac{kJ}{seg\ m^2\ ^{\circ}C}$
Entalpía h	$\frac{kJ}{kg^{\circ}C}$
Área A	m^2
Flujo másico \hat{m}	$\frac{kg}{seg}$

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

4.1 PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO RISK-SENSITIVE CON SEGUIMIENTO

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia derecha-continua creciente de σ -álgebras $F(t)$, $t \geq 0$, y sea $(W(t), F(t), t \geq 0)$, $F(t)$ adaptado proceso de Wiener. Consideremos el proceso aleatorio no observable $F(t)$ medible $x(t)$ gobernado por la ecuación del estado polinomial de primer grado: el planteamiento del problema control estocástico R-S con seguimiento se da con la dinámica del estado [54]

$$dx(t) = (A_0(t) + A_1(t)X(t) + B(t)u(t))dt + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t). \quad (4.1)$$

El vector de estado $x(t) \in R^n$, la entrada de control $u(t) \in R^p$, $A_0(t) \in R^n$, $A_1(t)$, es una matriz de dimensión $n \times n$. $W(t) \in R^n$ es un proceso de Wiener independiente que presenta perturbaciones aleatorias en el estado, que son también independientes de un vector gaussiano inicial $x(0)$. $B(t)$ es una matriz de dimensión

$n \times p$. El parámetro ϵ escala el término de difusión y el parámetro γ es una medida del nivel de atenuación del término de difusión (véase [69] para más detalles). El vector $A_0(t)$ presenta las perturbaciones que afectan al proceso. La función de costo cuadrático exponencial J a minimizar es la siguiente:

$$J = \epsilon \log E \left[e^{\frac{1}{\epsilon} \int [L(X(t), u(t)) dt + \phi(T)]} \right] \quad (4.2)$$

$$L(X(t), u(t)) = [(X(t) - SP)^T Q(t) (X(t) - SP) + (u(t))^T R(t) u(t)]$$

$$\phi(T) = \frac{1}{2} ([X(T) - SP]^T H(T) [X(T) - SP]).$$

Donde $R(t)$ es una matriz simétrica definida positiva, $Q(t)$ y $H(t)$ son matrices simétricas definidas no negativas, SP en R^n es el vector de valores asintóticos del estado, $T > t_0$, $E(\zeta)$ significa el valor esperado de una variable aleatoria ζ , SP^T presenta la transposición de un vector o matriz SP . Los límites de la integral son de t_0 a T .

TEOREMA 4.1 *La solución al problema de control R-S con seguimiento está dada por la ley óptima de control R-S (para más detalles ver [70]).*

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} B^T(t) P(t) (X(t) - SP). \quad (4.3)$$

$P(t)$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial de Riccati:

$$\dot{P}(t) = P^T(t) \left(\frac{BB^T}{4} - \frac{I}{\gamma^2} \right) P(t) - A_1^T(t) P(t) - P(t) A_1(t) - 2I. \quad (4.4)$$

Donde I es la matriz identidad $n \times n$. Dada la ecuación de programación dinámica de HJB:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} = \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum v_{xi} v_{xj} + \min_{u \in u} \int f(tX(t), U(t), A(t)) V_x V + \\ L(t, X(t), U(t), A(t)) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde: $V_{x_i x_j}$ denota la segunda derivada parcial de V respecto a x_i, x_j . Proponer una función de valor como la solución viscosa de la ecuación (4.5), esta función de valor toma la forma:

$$V(t) = \frac{1}{2}(X(t) - SP)^T P(t)(X(t) - SP) + R(t). \quad (4.6)$$

Derivando $V(t)$ y sustituyendo en la ecuación (4.1) y en (4.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(X(t) - SP)^T \dot{P}(t)(X(t) - SP) + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} P(t) \\ &\quad + (A_0 + A_1 x(t)) P(t)(X(t) - SP) - \\ &\quad \frac{1}{4}(X(t) - SP)^T P(t) B(t) B^T(t) P(t)(X(t) - SP) + \\ &\quad X^2(t) + \frac{1}{2\gamma^2}(X(t) - SP)^T P^2(t)(X(t) - SP). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Minimizando sobre el espacio de controles admisibles U , sustituyendo el control óptimo mínimo en la ecuación (4.7). La ecuación de control toma la forma (4.3), y al recopilar los términos $X^T(t)X(t)$, la ecuación matricial para $\dot{P}(t)$, la formulación (4.4) es obtenida.

El problema del control óptimo estocástico R-S consiste en diseñar un control óptimo $u(t)$ (4.3) que minimice la función de costo cuadrático exponencial J (4.2) y hace que el estado alcance los valores del SP.

La Figura 4.1 representa el diagrama de control óptimo estocástico R-S con seguimiento de acuerdo con (4.1) y (4.4).

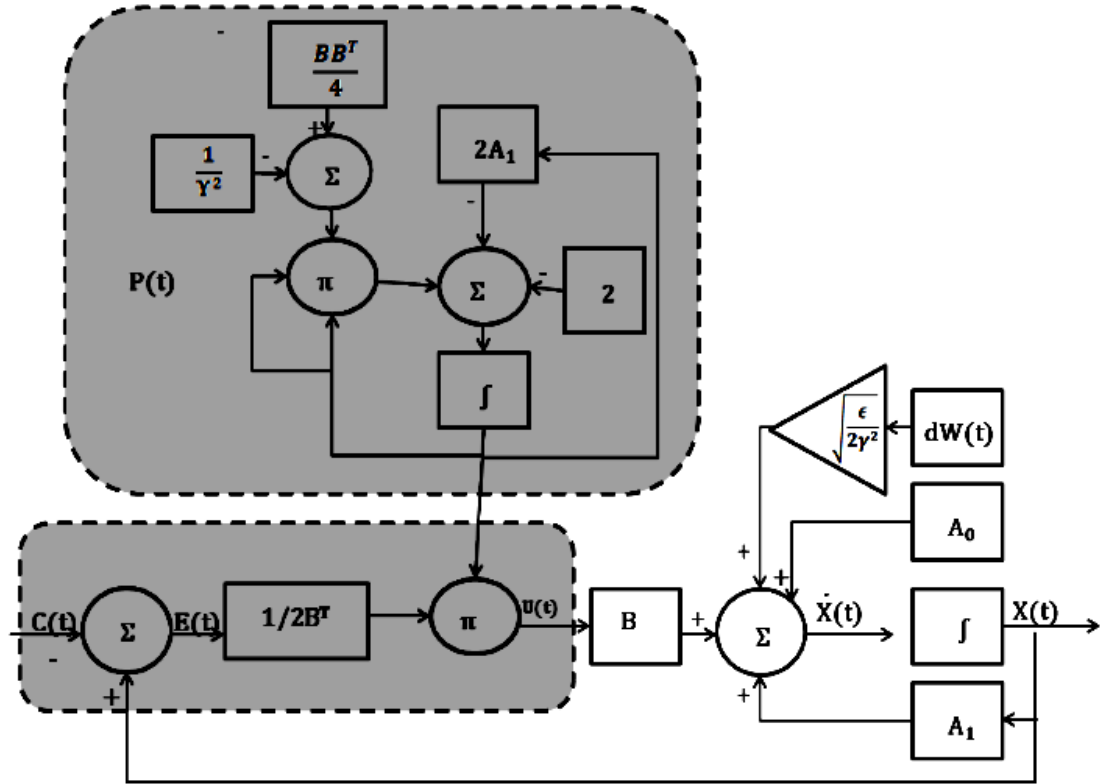


FIGURA 4.1: Representación del diagrama del control óptimo estocástico R-S con seguimiento.

4.2 PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL PID

Para poder comparar el control óptimo estocástico R-S con seguimiento con el control PID al cual se le sumó en la simulación el ruido blanco $\sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t)$ con diferentes valores del parámetro ϵ .

Los controladores convencionales son los de histéresis, proporcional (P), Proporcional Integrales (PI) y Proporcional Integral Derivados (PID). Antes de los últimos avances, el método de control más utilizado en los sistemas de refrigeración

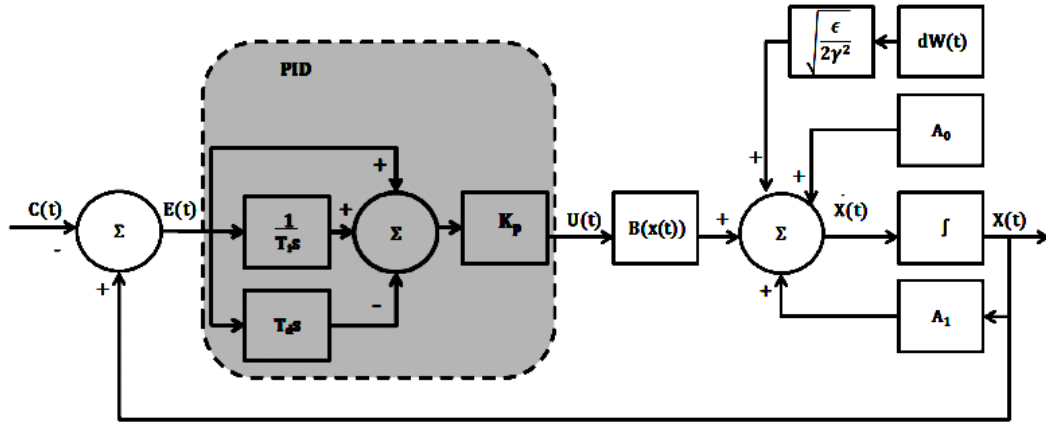


FIGURA 4.2: Diagrama del sistema del control PID.

era la técnica de histéresis. El controlador PID ha sido ampliamente utilizado en la industria. Por lo tanto, también se ha utilizado ampliamente en los sistemas de calefacción, aire acondicionado y refrigeración [71]. La Figura 4.2 muestra la representación del diagrama de control PID según (5.15). El tiempo final se calculó según el método propuesto por [3].

Para realizar la simulación se programaron en LabVIEW los valores del PID obtenidos en la sección 2.5.

El tiempo de procesamiento y el tiempo muerto se calcularon según el método propuesto por Cecil L. Smith [58], aplicando la sintonía de Z-N, los valores para la ganancia del controlador son $K_p = 0.25$, $T_i = 0.46$, $T_d = 0.11$. El control, se representa con la ecuación (4.8):

$$u(t) = 0.25 \left\{ e(t) + \frac{1}{0.46} \int_0^t e(t) dt - (0.11) \frac{de(t)}{dt} \right\}. \quad (4.8)$$

Considerando que el SP es $-10^\circ C$ y retomando la ecuación del estado $T_R(t)$ (4.1) ahora con el control PID sintonizado por la metodología de Z-N la ecuación de T_R cambia a la ecuación (4.9):

$$\frac{dT_R(t)}{dt} = \frac{U_E A_E T_{ER}}{m C_p} - \frac{U_E A_E}{m C_p} T_R(t) - \left[\frac{h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))}{[m C_p]} \right]$$

$$\begin{aligned} & \left[0.25e(t) + 0.53533 \int_0^t e(t)d(t) - 0.00275 \frac{de(t)}{dt} \right] \\ & + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

De la misma manera se realiza los cálculos de la sintonía de CHR, los valores para la ganancia del controlador son $K_p = 3.398$, $T_i = 0.011$, $T_d = 0.001$. El control se presenta en la ecuación (4.10):

$$u(t) = 3.398 \left\{ e(t) + \frac{1}{0.011} \int_0^t e(t)d(t) - (0.001) \frac{de(t)}{dt} \right\}. \quad (4.10)$$

Siguiendo con el mismo valor de SP de $-10^\circ C$ y retomando la expresión del estado $T_R(t)$ (4.1) el estado con el control PID cambia a la ecuación (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{dT_R(t)}{dt} &= \frac{U_E A_E T_{ER}}{mC_p} - \frac{U_E A_E}{mC_p} T_R(t) - \left[\frac{h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))}{[mC_p]} \right] \\ & \left[3.398e(t) + \frac{3.398}{0.011} \int_0^t e(t)d(t) - 0.00339 \frac{de(t)}{dt} \right] \\ & + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Continuando con la misma metodología de las sintonías anteriores se procede a la metodología de Cohen-Coon, los valores para la ganancia del controlador son $K_p = 4.845$, $T_i = 0.011$, $T_d = 0.001$. El control, se representa como:

$$u(t) = 4.845 \left\{ e(t) + \frac{1}{0.011} \int_0^t e(t)d(t) - (0.001) \frac{de(t)}{dt} \right\}. \quad (4.12)$$

Continuando con la consideración de darle valor al SP de $-10^\circ C$ y retomando la expresión del estado $T_R(t)$ (4.1) cambia a la ecuación (4.13):

$$\begin{aligned} \frac{dT_R(t)}{dt} &= \frac{U_E A_E T_{ER}}{mC_p} - \frac{U_E A_E}{mC_p} T_R(t) - \left[\frac{h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))}{[mC_p]} \right] \\ & \left[4.845e(t) + \frac{4.845}{0.011} \int_0^t e(t)d(t) - 0.00484 \frac{de(t)}{dt} \right] \\ & + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Los resultados de la simulación del sistema de refrigeración se presentan en el capítulo 5.

4.3 PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN AL FILTRADO

4.3.1 FILTRADO RISK-SENSITIVE

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia derecha continua, creciente de σ -álgebras $F(t), t \geq 0$, y sea $(W(t), F(t), T \geq 0)$ un proceso $F(t)$ adaptado de Wiener. Considerando los procesos aleatorios no observables $F(t)$ -medibles $x(t)$ gobernados por las ecuaciones de estado polinomial de primer grado (4.1) como se puede ver [72]. La ecuación de observación es lineal y está dada por:

$$y(t) = x(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_2(t). \quad (4.14)$$

Donde $x(t) \in R$, es la variable de estado, $dW_2(t) \in R^n$ son los términos de difusión, representados por el proceso browniano, independientes entre sí y de la condición inicial $X(0)$. La solución al problema de filtrado R-S para la ecuación de estado (4.1), con ecuación de observaciones (4.14) está dada por la ecuación diferencial para el valor estimado $C(t)$:

La función de costo cuadrática exponencial J a minimizar está dada por:

$$J = \epsilon \log E \exp\left[\frac{1}{\epsilon} \int_0^T [(X(t) - C(t))^T R(t)(X(t) - C(t))] dt / Y(t)\right]. \quad (4.15)$$

Donde $R(t) = 1$, E denota el valor condicional esperado, dadas las observaciones $Y(t)$. El problema de filtrado consiste en obtener la ecuación de un estimador de estado, que minimice el error, y los valores del criterio exponencial cuadrático J en el tiempo final. Aplicando las ecuaciones (2.89) y (2.90), a la ecuación de estado del sistema de calefacción (5.5) y (4.14), la ecuación del estado estimado $C(t)$ se da

como la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{C}(t) = \frac{-UAT_{out}}{\hat{m}C_p} + \frac{UA}{\hat{m}C_p}C(t) - Q^{-1}(t)E_1(t)(dy - C(t)), \quad (4.16)$$

donde: $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) \left[\frac{UA}{\hat{m}C_p} \right] + Q^T(t)Q(t), \quad (4.17)$$

con $Q(t) \in M_{n \times n}$, cuyos puntos de equilibrio son $Q_1 = -0.9844$ y $Q_2 = 1.0158$.

4.3.2 FILTRADO KALMAN BUCY

El problema de filtrado óptimo para sistemas lineales estocásticos con observaciones lineales fue resuelto en los años 60's y su solución es conocida como el filtro de Kalman Bucy. Esta solución es obtenida en forma cerrada; sin embargo, cuando el sistema dinámico es no lineal, la aplicación de las ecuaciones del filtro de Kalman Bucy recibe el nombre de filtro de Kalman Bucy extendido, el cual considera solo los términos lineales del estado [43].

Aplicando las ecuaciones de filtro Kalman-Bucy extendidas de [42] en la ecuación (4.14) y la ecuación (4.1). La ecuación del estimado del estado está dado por:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{63.5} \hat{x}(t) + P(t) [Y(t) - \hat{x}(t)]. \quad (4.18)$$

Donde $P(t)$ es la solución de la ecuación de covarianza del error:

$$\dot{P}(t) = \frac{2}{63.5} P(t) - P_2(t) + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \quad (4.19)$$

La función de costo cuadrática exponencial J a minimizar es (4.15).

Las ecuaciones (4.14), (4.1), (4.18), (4.19) y (4.15) son simuladas en Simulink los resultados se presentarán en el capítulo 5.

SIMULACIÓN Y RESULTADOS

5.1 APLICACIÓN AL SISTEMA DE CALEFACCIÓN CON UNA RESISTENCIA ELÉCTRICA

5.1.1 CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO R-S CON SEGUIMIENTO EN EL SISTEMA DE CALEFACCIÓN

Dado que en el sistema de calefacción es necesario mantener la temperatura del interior del recinto en el valor fijo del SP, este proceso se ve afectado por la existencia de factores ambientales que provocan perturbaciones en el comportamiento del estado del sistema, provocando que no se alcance el valor del SP. Luego se aprecia la necesidad de introducir el término estocástico, como un ruido blanco de Gauss, multiplicado por los parámetros del problema R-S y una entrada del control en el estado que hacen que el estado alcance los valores del SP. En cuanto a que en el sistema de calefacción participan factores sin control como las condiciones ambientales, se añade un término estocástico a la ecuación (3.14), y que los valores de estado no se aproximan al SP debido a estas condiciones adversas, surge la ne-

cesidad de introducir el control no lineal con seguimiento, el cual es inminente. Se obtiene el siguiente sistema dinámico. Haciendo una similitud con el planteamiento del problema de control no lineal R-S con seguimiento, correspondiente a la ecuación (3.14),

$$dT_{in}(t) = \left(\frac{-UAT_{out}}{\hat{m}C_p} + \frac{UA}{\hat{m}C_p}T_{in}(t) + B(t)U(t) \right) dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t). \quad (5.1)$$

Se aplica el Teorema 4.1 para obtener la ecuación del control óptimo estocástico R-S con seguimiento, la cual se da por la ley del control óptimo (4.3) y:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}P(t)(T_{in}(t) - 10), \quad (5.2)$$

La ecuación (4.4) $P(t)$ toma la forma:

$$\dot{P}(t) = -2P(t)A_1 - 2. \quad (5.3)$$

Obtención del punto de equilibrio de $P(t)$,

$$\frac{1}{-A_1} = P(t), \quad (5.4)$$

donde $A_1 = \frac{UA}{\hat{m}C_p}$, $P(0) = 0$, y el valor del punto de equilibrio es -45.48 . El estado óptimamente controlado toma la forma:

$$dT_{in}(t) = \left[\frac{-UAT_{out}}{\hat{m}C_p} + \frac{UA}{\hat{m}C_p}T_{in}(t) \right] dt + \left[-\frac{1}{2}P(t)(T_{in}(t) - 10) \right] dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t). \quad (5.5)$$

Las ecuaciones del control óptimo estocástico R-S con seguimiento (5.2), matriz de ganancia $P(t)$ (5.3), función de costo cuadrático exponencial J (4.15), y el estado (5.5) se simulan en Simulink, por $T = 100$ segundos.

5.1.2 CONTROL PID EN EL SISTEMA DE CALEFACCIÓN

La ecuación (3.14) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{UA}{\hat{m}C_p}(T_{in}(t) - T_{out}) = \frac{dT_{in}(t)}{dt}. \quad (5.6)$$

Asignando $\frac{1}{\tau} = \frac{UA}{\hat{m}C_p}$, la ecuación (5.6) toma la forma:

$$\frac{1}{\tau}(T_{in}(t) - T_{out}) = \frac{dT_{in}(t)}{dt}. \quad (5.7)$$

Como esta es una ecuación diferencial lineal, se obtiene la transformada de Laplace aplicada, donde $T_{in}(0) = 0$, por lo tanto, este modelo (5.8) representa la respuesta dinámica de la temperatura dentro del recinto

$$\frac{T_{in}(s)}{T_{out}(s)} = \frac{1}{[\tau s - 1]}. \quad (5.8)$$

Aplicando la sintonía para control regulatorio, los valores para la ganancia del controlador son los siguientes:

$$K_p = 0.1 \quad K_c = 35.41 \quad t_i = 10.9 \quad t_d = 3.16.$$

El control se representa como:

$$u(t) = 0.1e(t) + \frac{0.1}{10.9} \int_0^t e(t)d(t) + (0.1)(3.16) \frac{de(t)}{dt}. \quad (5.9)$$

La ecuación del estado (5.5) con control PID toma la forma

$$\begin{aligned} dT_{in}(t) &= \left[\frac{-UA T_{out}}{\hat{m}C_p} + \frac{UA}{\hat{m}C_p} T_{in}(t) \right] dt + \\ &\left[0.1e(t) + \frac{0.1}{10.9} \int_0^t e(t)d(t) + [(0.1)(3.16) \frac{de(t)}{dt}] \right] + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

La fórmula integral aplica criterios de beneficios para construir el modelo PID, como se puede ver en [73].

$$G(s) = 35.41 \left[1 + \frac{1}{10.9} + 3.16 \right] * \frac{0.1}{(20s + 1)}. \quad (5.11)$$

$G(s)$ es la forma completa de la función de transferencia que representa la dinámica del proceso. Las ecuaciones del estimado R-S se obtienen para el sistema con control óptimo estocástico R-S con seguimiento y para el sistema con PID,

observando errores menores, así mismo los valores del criterio exponencial cuadrático a minimizar son menores, cuando el sistema es controlado por medio del control óptimo estocástico R-S con seguimiento.

5.1.3 APLICACIÓN DE FILTROS Y CONTROL ÓPTIMO CON SEGUIMIENTO Y PID EN EL SISTEMA DE CALEFACCIÓN

Se realizó una simulación en la plataforma de LabVIEW para poder ver que se logra controlar el estado que es la temperatura interior mediante el control óptimo estocástico R-S con seguimiento y también se logra controlar el estado mediante PID cabe mencionar que en las simulaciones se busca un valor SP -10°C , las simulaciones de cada estrategia de control se realizaron para el sistema de refrigeración.

Los resultados se ilustran en la Tabla 5.1 para algunos valores del parámetro ϵ . Estos resultados se comparan con los valores de PID.

TABLA 5.1: Valores de estados control óptimo estocástico R-S con seguimiento y PID para diferentes valores del parámetro ϵ .

ϵ	R-S Control		PID	
	Valor de estado (5.5)	Error	Valor de estado(5.10)	Error
0.01	9.84	-0.15	10.66	0.06
0.1	9.83	-0.16	10.56	0.18
1	9.80	-0.19	10.56	0.56
10	9.69	-0.31	11.77	1.77
100	9.34	-0.65	15.6123	5.6
1000	8.23	-1.76	27.71	17.71

El error es la diferencia entre SP y el estado controlado óptimamente. Como puede ver en la Tabla 5.1, ambos controles hacen que el estado llegue al SP. Sin

embargo, el valor del error es menor para la columna de control óptimo estocástico R-S con seguimiento respecto al error de PID para todos los valores del parámetro, ϵ como se puede ver en la Tabla 5.1.

El intervalo de variación para el estado óptimamente controlado es menor respecto al estado con PID. Como se muestra en la Tabla 5.1, los valores del error oscilan entre los valores $\pm 0.5^\circ\text{C}$ con el control óptimo estocástico R-S con seguimiento. Por otro lado, el error oscila entre los valores $\pm 1^\circ\text{C}$ con PID de la temperatura del SP y la temperatura real del recinto.

El problema de filtrado consiste en obtener la ecuación de un estimador de estado, que minimice el error, y los valores del criterio exponencial cuadrático J en el tiempo final. Las ecuaciones (5.5), (4.14), (4.16), (4.17) y (4.15) se simulan usando Simulink en $T = 100$ segundo. Los resultados obtenidos de la simulación se presentan en la Tabla 5.2, donde se aprecian los valores del error y J , el criterio cuadrático exponencial para diferentes valores del parámetro ϵ , cuando se utiliza el control R-S con ecuaciones de seguimiento y cuándo se utiliza la ecuación PID.

TABLA 5.2: Errores R-S, errores PID, J (4.15), para diferentes valores del parámetro

ϵ con control óptimo estocástico, R-S con seguimiento y PID.

ϵ	Error R-S	Error PID	J R-S (4.15)	J PID (4.15)
0.01	0.2263	0.2938	inf	inf
0.1	0.2203	0.4319	63	17
1	0.2817	0.8738	13	17.45
10	0.1467	2.263	15.3	24.2
100	-0.031	6.663	33	99
1000	-0.593	20.58	202	869

Como se puede ver en la Tabla 5.2 que los valores de error para el estimado R-S

son menores cuando se aplicaron las ecuaciones de control óptimo estocástico R-S con seguimiento para todos los valores del parámetro ϵ . De manera similar, el control R-S óptimo con seguimiento produce valores más bajos en el error y en el criterio cuadrático exponencial J para todos los valores del parámetro ϵ con respecto al PID. Se calculó la desviación estándar del error de cada uno de los filtros, siendo estas $\sigma = 0.905$ para el estimado R-S y $\sigma = 18.4165$ para el estimado de Kalman-Bucy extendido, lo cual confirma lo mencionado anteriormente.

5.1.3.1 FILTROS KALMAN BUCY

Se aplican las ecuaciones de filtrado óptimo polinomial estocástico R-S y Kalman-Bucy extendido, con la finalidad de comparar ambos estimados con las mismas condiciones del sistema de calefacción que se representa con la ecuación (5.1). Las ecuaciones (4.14), (4.1), (4.18), (4.19) y (4.15) son simuladas en Simulink el tiempo de simulación para cada sistema de ecuaciones es $0 \leq t \leq 100$. Los valores del error (diferencia entre el estado y el estimado obtenido por cada filtro) para cada estimado: Kalman-Bucy extendido y R-S se muestra en la Tabla 5.3, se puede observar que los errores para ambos estimados son más pequeños para el estimado R-S, similarmente, los valores de la función costo exponencial cuadrática J son menores para las ecuaciones de filtrado R-S.

5.1.3.2 COMPARACIÓN DE FILTROS R-S VS KALMAN BUCY EN EL SISTEMA DE CALEFACCIÓN

El Sistema de Resistencia Eléctrica se modela como un sistema dinámico sistema de ecuaciones en control óptimo estocástico R-S. Las ecuaciones de control con seguimiento están diseñadas para este sistema dinámico, también se obtiene el PID. Los resultados de ambos controles se comparan en la Tabla 5.1, estableciendo ventaja del control óptimo estocástico R-S con seguimiento, mediante la evaluación

TABLA 5.3: Valores de errores para los estimados de Kalman-Bucy (4.18) y R-S (4.16) y de la función criterio cuadrático a minimizar J (4.15), para diferentes valores del parámetro ϵ .

ϵ	Error Kalman-Bucy	Error R-S	J Kalman-Bucy	J R-S
0.001	-14.58	$-1.097 \cdot 10^{-5}$	0.0125	$4.19 \cdot 10^{-6}$
0.01	-9.329	$-3.44 \cdot 10^{-5}$	0.0865	$4.19 \cdot 10^{-5}$
0.1	-3.3038	-0.000108	0.288	$4.19 \cdot 10^{-4}$
1	-1.049	-0.000344	0.544	$4.19 \cdot 10^{-3}$
10	-0.3268	-0.001088	0.124	0.04188
100	0.9282	-0.00344	96.15	0.4188
1000	10.53	-0.01088	3939.75	4.1885
10000	49.98	-0.0345	$8.6 \cdot 10^4$	41.885

del error. Así mismo, evaluando los valores de la función exponencial cuadrática a minimizar J son menores para el control óptimo estocástico R-S con seguimiento que cuando se aplica el control PID, para todos los valores del parámetro ϵ como se puede ver en la Tabla 5.2.

Al comparar la aplicación de las ecuaciones de filtrado óptimo R-S y de Kalman-Bucy extendido a un modelo de calefacción, representado mediante una resistencia eléctrica. Se puede observar que el estimado R-S es mejor que el Kalman-Bucy extendido, como se puede ver en la Tabla 5.3, ya que los valores de la función exponencial cuadrática a minimizar J (4.15) son menores para el estimado R-S como se puede ver en la Tabla 5.3, así mismo, el error es más pequeño, bajo las mismas condiciones y todos los valores del parámetro ϵ .

5.2 TEMPERATURA DEL EVAPORADOR DE UN SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

5.2.1 CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO RISK-SENSITIVE CON SEGUIMIENTO APLICADO EN UN EVAPORADOR DE UN SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

Dado que es necesario mantener la temperatura dentro del recinto en el valor del SP y este proceso se ve afectado por la existencia de factores ambientales y voltaje, entre otros, creando perturbaciones en el comportamiento del estado del sistema que provocan que no se haya alcanzado el valor del SP. La temperatura se mide con un termopar que tiene una precisión de $0.5^\circ C$, que es como una pequeña antena que recogen mucho ruido. Luego se introduce el término estocástico, como ruido blanco de Gauss, asumiendo que las condiciones para su existencia y la ortogonalidad con $x(t_0)$ son verdaderas [74]. Respecto a la ecuación (3.5) es no lineal, aplicando el planteamiento del problema control estocástico R-S con seguimiento (4.1), sustituyendo $A_0(t) = \frac{U_E A_E T_{ER}}{m C_p}$, $A_1(t) = \frac{U_E A_E}{m C_p}$ queda la dinámica del estado:

$$\begin{aligned} \frac{dT_R(t)}{dt} &= \frac{U_E A_E}{m C_p} [T_{ER} - T_R(t)] + \frac{\dot{m}}{m C_p} [h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))] \\ &+ \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

La solución al problema R-S con seguimiento de control está dada por la ley de control óptimo R-S de acuerdo con el Teorema 4.1 por lo que la ecuación (4.3) toma la forma:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} \frac{[h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))]}{m C_p} P(t) (T_R(t) - SP). \quad (5.13)$$

Para calcular $U_E A_E$, se instalaron sensores de presión y temperatura en la entrada del compresor y en la salida del condensador se aisló la tubería y no se

consideraron caídas de presión en el sistema. $A_0(t) = \frac{U_E A_E T_{ER}}{m C_p} = 350$, $A_1(t) = \frac{U_E A_E}{m C_p} = 35$. Sustituyendo A_1 y B en la ecuación (4.4) la ganancia $P(t)$ es la solución de

$$\dot{P}(t) = \left[\frac{[h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))]^2}{4[m C_p]^2} - \frac{I}{\gamma^2} \right] P^2(t) - 2 \left[\frac{U_E A_E}{m C_p} p(t) \right] - 2. \quad (5.14)$$

El punto de equilibrio es -0.0135 . En la Figura 5.1, se presenta el valor de la ganancia $P(t)$. La condición inicial para el estado es $X(0) = 0$, $P(0) = 0$ y las condiciones de $SP = -10$.

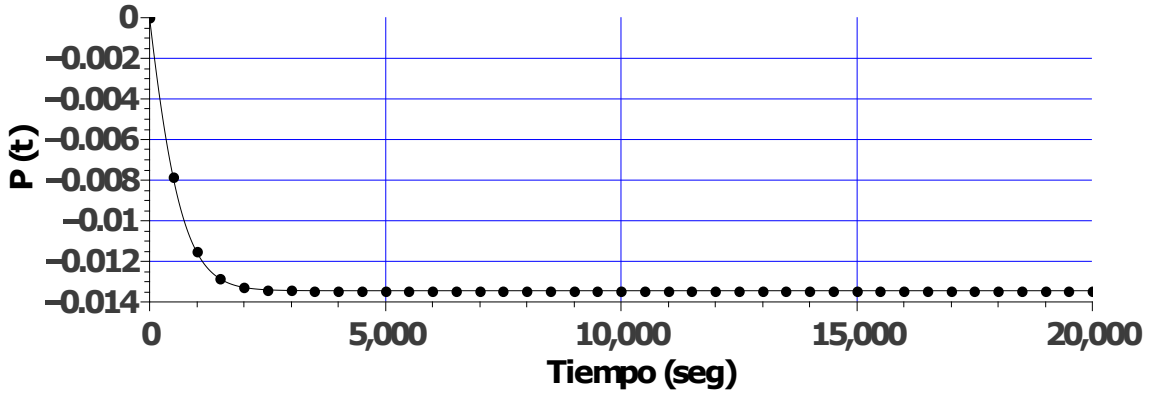


FIGURA 5.1: Gráfica de ganancia $P(t)$, (5.14) con valor del parámetro $\epsilon = 1$.

Al asumir \dot{m} el rol de control y sustituyendo \dot{m} (5.12), el estado óptimo controlado viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{dT_R(t)}{dt} &= \frac{U_E A_E T_{ER}}{m C_p} - \frac{U_E A_E}{m C_p} T_R(t) - \left[\frac{h_4(T_R(t)) - h_1(T_R(t))}{2m C_p} \right]^2 P(t) (T_R(t) - SP) \\ &+ \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

En la Figura 5.2 se presenta el comportamiento del estado con $\epsilon = 1$. Como puede ver, el estado alcanza el valor del -10°C en, 4,877 segundos sin presentar ningún sobre-impulso u oscilación.

La función costo cuadrática exponencial J (4.2) toma la forma:

$$J = \epsilon \log E \left[e^{\left[\frac{1}{\epsilon} \int [(T_R(t) - SP)^2 + 0.0001 U(t)^2] dt + \frac{1}{2} 0.001 (T_R(T) - SP)^2 \right]} \right]. \quad (5.16)$$

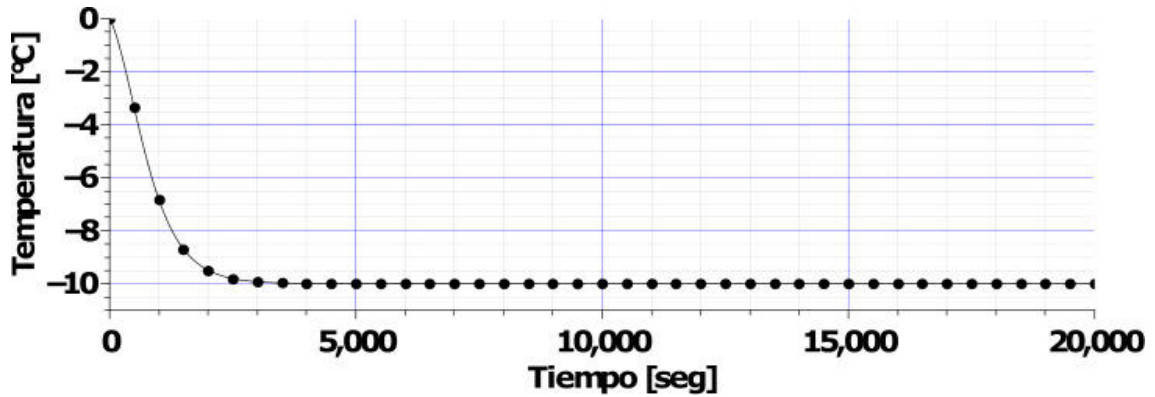


FIGURA 5.2: Gráfica del estado $T_R(t)$ (5.15) con valor del parámetro $\epsilon = 1$.

Donde $H(t) = 0.0001$, $Q(t) = 1$, $R(t) = 0.001$. El sistema de ecuaciones de control óptimo (5.13), la ganancia (5.14), la función criterio costo cuadrática J (5.16) y $T_R(t)$ (5.15) para el control óptimo estocástico R-S con seguimiento.

Los valores del estado $T_R(t)$ (5.15) con control óptimo estocástico R-S con seguimiento, el valor del error $[T_R(t) - SP]$, la ganancia $P(t)$ ecuación (5.14), la función costo cuadrática exponencial J (5.16) son simulados con la plataforma de LabVIEW 2014, por $T = 20000$ segundos. Los resultados son ilustrados en la Tabla 5.4 para diferentes valores del parámetro ϵ .

TABLA 5.4: Valores de los resultados de la simulación mediante el control óptimo estocástico R-S con seguimiento con diferentes valores del parámetro ϵ .

ϵ	$T_R(t)$ (5.15)	Error	$P(t)$ (5.14)	J (5.16)	Ancho de banda del 2%
0.1	-9.999	$4.7 \cdot 10^{-13}$	-0.0135	11.5827	4877
1	-9.999	$4.72 \cdot 10^{-13}$	-0.0135	11.5828	4877
10	-9.999	$4.74 \cdot 10^{-13}$	-0.0135	11.5826	4877
100	-9.999	$4.71 \cdot 10^{-13}$	-0.0135	11.5819	4879
1000	-9.999	$4.7 \cdot 10^{-13}$	-0.0135	11.5856	4885

Como se puede ver en la Tabla 5.4, el tiempo de ancho de banda con un 2% del valor final varía entre, 4877 - 4885 segundos (aproximadamente 82 minutos) para

todos los valores del parámetro ϵ

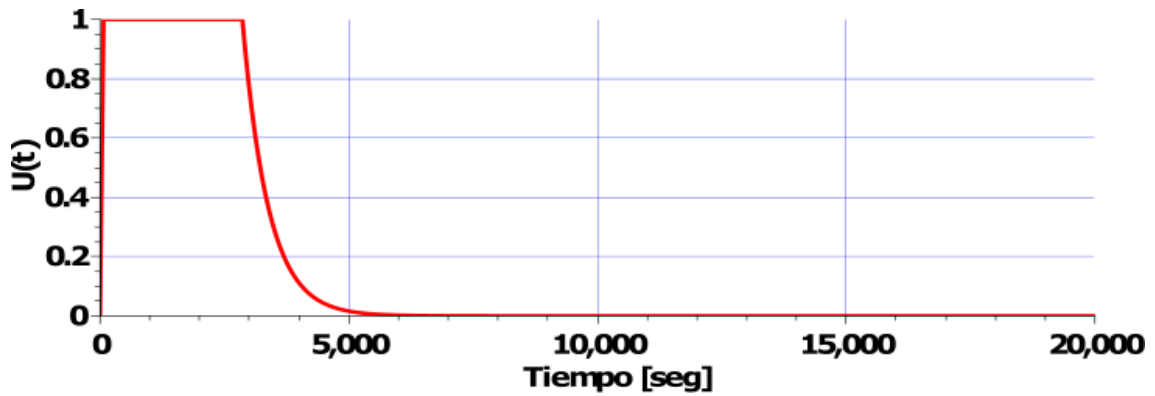


FIGURA 5.3: Gráfica del control óptimo R-S, cuando $\epsilon = 1$ señal de control máxima 1.

La Figura 5.3 muestra el control óptimo R-S, que la salida es limitada a máximo uno para que se aproxime a los límites operacionales del equipo.

5.2.2 CONTROL PID APLICADO EN UN EVAPORADOR DE UN SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

La temperatura del evaporador $T_R(t)$ (5.15) se presenta con los diferentes metodologías de sintonización de PID.

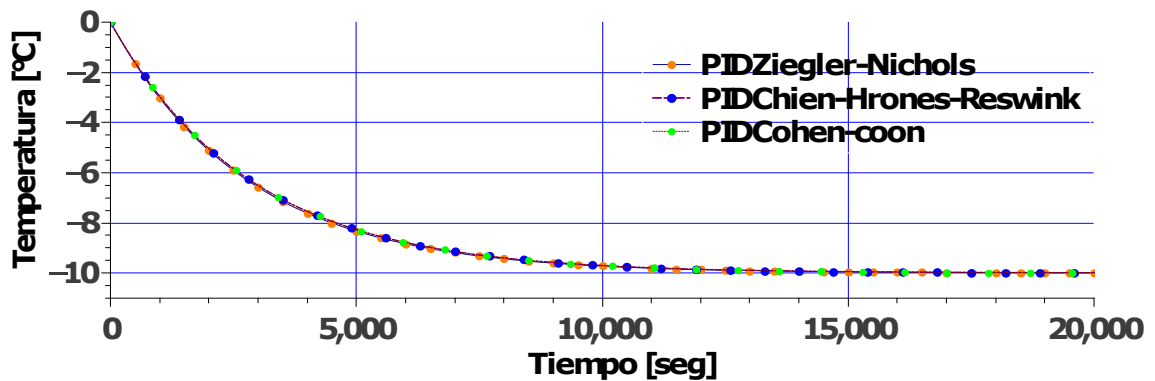


FIGURA 5.4: Temperatura del evaporador con tres métodos de sintonización PID.

Como se puede ver en la Figura 5.4 el cambio de la temperatura con las diferentes metodologías de sintonización PID, la línea de color negro es por el método de Z-N que es la representación de la ecuación (4.9), en cambio, la línea roja es por la sintonización CHR que es el resultado de la simulación de la ecuación (4.11), por último la línea verde es por la metodología de Cohen-Coon que es la imagen de la simulación de ecuación (4.13) además se puede apreciar que las tres metodologías PID tienen un comportamiento muy similar, ya que la dinámica del sistema tiene un tiempo de asentamiento muy próximo a los 15,000 segundos, además el sobre-impulso, no está presente en ninguna representación de las sintonizaciones del PID.

TABLA 5.5: Resultados de simulación de valores de la temperatura del evaporador para diferentes valores del parámetro ϵ .

ϵ	Temperatura		
	Z-N (4.9)	CHR (4.11)	Cohen-Coon (4.13)
0.1	-9.992	-9.991	-9.990
1	-9.992	-9.991	-9.991
10	-9.996	-9.992	-9.991
100	-9.994	-9.992	-9.991
1000	-9.991	-9.991	-9.992

En la Tabla 5.5 la diferencia en el compartimento de la temperatura del evaporador es mínima con cualquier de las tres metodologías de sintonización de PID con diferentes valores del parámetro ϵ . Como se puede ver en la Tabla 5.6 el error $SP - (5.15)$ en estado estacionario es casi nulo por cualquier método de sintonización de PID que se implemente con diferentes valores del parámetro ϵ . Como se puede ver en la Tabla 5.7 los valores de la función costo cuadrática exponencial J (5.16) oscilan entre los valores de 56.879 - 61.835 usando las tres metodologías de sintonización de PID con diferentes valores de difusión ϵ . Como se muestra en la Tabla 5.8,

TABLA 5.6: Resultados de simulación de los valores del error en la temperatura del evaporador para diferentes valores del parámetro ϵ .

	Valores del error		
ϵ	Z-N	CHR	Cohen-Coon
0.1	0.007	0.008	0.008
1	0.007	0.009	0.008
10	0.003	0.007	0.008
100	0.005	0.007	0.008
1000	0.008	0.008	0.007

TABLA 5.7: Resultados de la simulación del valor de la función costo cuadrática exponencial J (5.16) para diferentes valores del parámetro ϵ .

	Valores J		
ϵ	Z-N	CHR	Cohen-Coon
0.1	∞	∞	∞
1	60.539	61.835	61.835
10	59.057	61.058	61.060
100	56.879	59.587	59.273
1000	58.530	59.225	57.200

el ancho de banda en él 2% es 2.9554 horas variando entre 10,639 – 11,171 para todos los valores del parámetro, ϵ aplicando el control PID con las tres metodologías de sintonización.

TABLA 5.8: Resultados de simulación del asentamiento del ancho de banda del 2 % para diferentes valores del parámetro ϵ .

	Ancho de banda del 2 %		
ϵ	Z-N	CHR	Cohen-Coon
0.1	10817	11171	11163
1	10906	11171	11170
10	10767	11144	11170
100	10639	11105	10968
1000	11016	11170	10873

5.2.3 COMPARACIÓN DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO R-S CON SEGUIMIENTO VS CONTROL PID APLICADO EN UN EVAPORADOR DE UN SISTEMA DE REFRIGERACIÓN

Se comparó el control óptimo estocástico R-S con seguimiento vs la metodología de control PID clásico, por tres diferentes metodologías de sintonización: Z-N, CHR y Cohen-Coon como se muestra en la Figura 5.5 la curva de temperatura está en respuesta transitoria ligeramente hacia abajo para valores mayores de -10°C . Así mismo, se puede observar el estado $T_R(t)$ (5.15) con el control óptimo estocástico R-S con seguimiento se aplica para alcanzar el valor SP en menos tiempo que el del control PID con todas las metodologías de sintonización. También se observa la ausencia de sobre-impulsos y oscilaciones en los controles aplicados.

La Figura 5.5 muestra que las estrategias de control aplicadas tiene un comportamiento similar, es decir, no presenta oscilaciones ni sobre-impulsos.

Al comparar los resultados se puede ver en la Tabla 5.4 cuando el estado está bajo control óptimo estocástico R-S con seguimiento, el valor de la función de costo cuadrática exponencial J_{R-S} presenta menos variaciones al variar la intensidad del

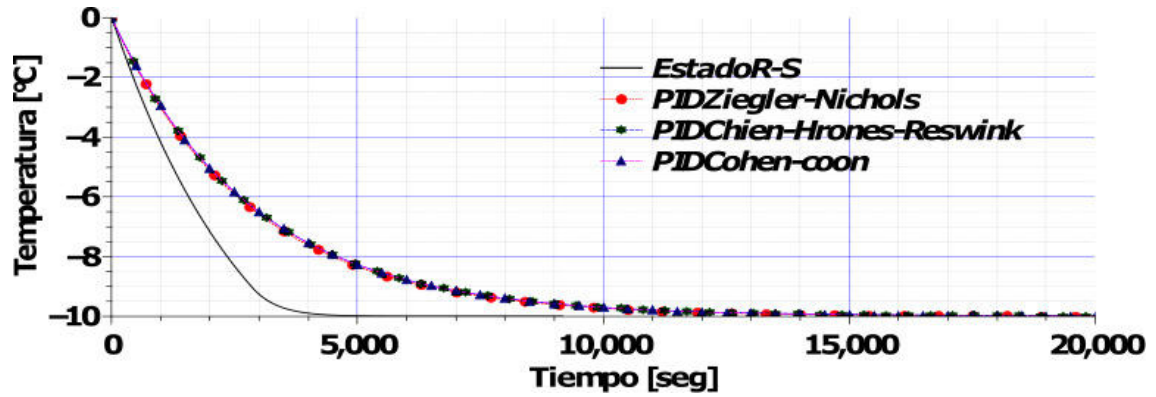


FIGURA 5.5: Gráfico del estado con control óptimo R-S y los tres métodos de sintonización PID, cuando $\epsilon = 1$ señal de control máxima 1.

ruido, las variaciones de oscilan entre $11.5826 - 11.5856$. Mientras que para el PID con las tres metodologías de sintonización los valores de la función costo cuadrática exponencial con el control PID J_{PID} oscilan entre $56.8794 - \infty$ y cuando el parámetro $\epsilon = 0.1$ como se ve en la Tabla 5.7, para otros valores del parámetro como $\epsilon = 1$ el valor mayor es de 61.835.

Al analizar los resultados del error en estado estacionario para todos los valores del parámetro ϵ es igual a $4.7 * 10^{-13} \text{°C}$ cuando se aplica el control óptimo estocástico R-S con seguimiento, como puede ver en la Tabla 5.4, además se observa que el error en estado estacionario para todos los valores del parámetro ϵ oscila entre $0.0031 \text{°C} - 0.009 \text{°C}$ para todas las metodologías de sintonización cuando se utiliza el control PID, como se puede observar en la Tabla 5.6.

CAPÍTULO 6

CONTRIBUCIONES

6.1 CONTROL DE TEMPERATURA EN UN EVAPORADOR APLICANDO EL CONTROL RISK-SENSITIVE

En este trabajo se publicó en la revista DYNA ingeniería e industria, en julio de 2022, donde se presenta un modelo estocástico de la dinámica de la temperatura de un evaporador, aplicando las ecuaciones de control óptimo estocástico R-S con seguimiento, para controlar su temperatura, siendo el único elemento final de control la EEV [75].

6.2 EFECT OF RISK-SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR

Este artículo se publicó en la revista DYNA Energía y Sustentabilidad, en enero del 2022, donde se presenta un modelado matemático que parte de las leyes fundamentales de la física, este modelado generó un sistema no lineal aplicando el

control R-S con seguimiento y es comparado con el control clásico PID, usando diferentes metodologías de sintonización [76].

6.3 NON-LINEAR OPTIMAL FILTER AND CONTROL WITH TRACKING VS PID APPLIED TO AN ELECTRIC RESISTANCE SYSTEM

Este trabajo se presentó en ICMEAE (International Conference on Mechatronics, Electronic and Automotive Engineering) Cuernavaca, Morelos, 2018 y sé público en las memorias de este mismo congreso, en el cual este artículo se aplicaron las ecuaciones de control óptimo R-S con seguimiento para sistemas estocásticos polinomiales de primer grado, se presentan las ecuaciones óptimas de filtrado R-S aplicadas al sistema de calefacción [70].

6.4 APLICACIÓN DE LOS FILTROS ÓPTIMOS RISK-SENSITIVE Y KALMAN-BUCY EXTENDIDO A UN SISTEMA DE CALEFACCIÓN

En este trabajo se presentó en el congreso Nacional de Control Automático en Monterrey N.L. 2017 y sé público en las memorias de este mismo congreso se presenta una comparación de las ecuaciones de filtrado estocástico R-S para sistemas polinomiales de primer grado, y las ecuaciones de filtrado de Kalman- Bucy extendido [77].

6.5 IMPLEMENTATION OF CONTROL ALGORITHMS IN A CLIMATIC CHAMBER

En este trabajo se presnetó en ICMEAE (International Conference on Mechatronics, Electronic and Automotive Engineering) Cuernavaca, Morelos 2016, y sé público en las memorias de este mismo congreso, en este trabajo se desarrollaron e implementaron los algoritmos de control, con los cuales se logró mejorar el rendimiento del sistema de enfriamiento de la cámara climática sin comprometer su rendimiento en términos de precisión y estabilidad. También se evaluó el rendimiento energético a través de la relación de presión debido al uso de estrategias de control en el sistema de enfriamiento de la cámara climática con sistema de refrigeración COP y la relación de presión como un comparador [78].

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

7.1 CONCLUSIONES

Se presentó la propuesta de un nuevo modelado de la temperatura de un evaporador de un sistema de refrigeración y se aplicaron las estrategias de control óptimo estocástico R-S con seguimiento vs. el control Proporcional Integral Derivativo PID en un sistema de refrigeración.

Se minimizó la función costo cuadrática exponencial, J donde al aplicar control óptimo estocástico R-S con seguimiento se observan valores menores de la función costo cuadrática exponencial J . El tiempo de estabilización dentro del ancho de banda del 2% es significativamente menor con el control óptimo estocástico R-S con seguimiento.

Se observó en la simulación una mejora en la eficiencia del control de temperatura deseada en la operación del sistema de refrigeración, empleando control óptimo estocástico R-S con seguimiento.

Al comparar la aplicación de los filtros R-S en el sistema de calefacción se

ve que minimizan la función costo cuadrática exponencial J y la señal del error es menor.

7.2 TRABAJO FUTURO

Como trabajo futuro pretendo:

1. Implementar la estrategia de control R-S en un sistema de refrigeración, haciendo el sistema más eficiente.
2. Mejorar el modelo matemático, el cual considere las restricciones físicas del sistema y las condiciones climáticas del medio donde se trabaje el sistema de refrigeración.
3. Utilizar otros algoritmos de control con convergencia en tiempo finito o predefinido para mejorar el modo de operación del sistema de refrigeración.
4. Hacer el modelo matemático del sistema de refrigeración adimensional.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Y. A. Cengel and M. A. Boles, *Termodinámica*. Mexico, DF: McGraw-Hill, 6 ed., 2009.
- [2] R. J. Dossat, *Principio de refrigeración*. Mexico, DF: Continental S.A. de C.V, 1 ed., 1999.
- [3] K. Ogata, *System Dynamics*. Mexico, DF: Pearson Education, 4 ed., 2004.
- [4] J. A. Conesa, “Sistema de refrigeración por compresión,” *Experimentación en Ingeniería Química III*, 2011.
- [5] H. Fallahsohi, C. Changenet, S. Placé, C. Ligeret, and X. Lin-Shi, “Predictive functional control of an expansion valve for minimizing the superheat of an evaporator,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 33, no. 2, pp. 409–418, 2010.
- [6] C.-L. J.-C. X.-L. Yu-Hou, Juanli-Ma, “Experimental investigation on the influence of eev opening on the performance of transcritical (co_2) refrigeration system.,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 65, pp. 51 – 56, 2014.
- [7] X. Wang, W. Cai, J. Lu, and Y. Sun, “Optimization of liquid desiccant regenerator with multiobject particle swarm optimization algorithm,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 53, no. 49, pp. 19293–19303, 2014.
- [8] X. Wang, W. Cai, J. Lu, Y. Sun, and L. Zhao, “Model-based optimization strategy of chiller driven liquid desiccant dehumidifier with a genetic algorithm,” *Energy*, vol. 82, pp. 939–948, 2015.

- [9] M. Olenets, J. Piotrowski, and A. Stroj, “Mathematical description of heat transfer and air movement processes in convectional elements of a building’s passive solar heating systems,” *Energy Procedia*, vol. 57, pp. 2070–2079, 2014.
- [10] M. I. Neaca and A. M. Neaca, “The modeling of the heating resistors in transient regime,” *Journal of Materials Science and Engineering B*, vol. 1, no. 2, pp. 170–177, 2011.
- [11] A. Starčić, V. Lešić, and M. Vašak, “Predictive control for heating power variance and peak reduction in buildings,” in *IECON 2016-42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 7089–7094, IEEE, 2016.
- [12] D. W. U. Perera, C. F. Pfeiffer, and N.-O. Skeie, “Modeling the heat dynamics of a residential building unit: Application to norwegian buildings,” 2014.
- [13] A. Behravan, R. Obermaisser, and A. Nasari, “Thermal dynamic modeling and simulation of a heating system for a multi-zone office building equipped with demand-controlled ventilation using matlab/simulink,” in *2017 International Conference on Circuits, System and Simulation (ICCSS)*, pp. 103–108, IEEE, 2017.
- [14] L. Saarinen, “Modeling and control of a district heating system,” 2008.
- [15] D. Di Battista and R. Cipollone, “High-efficiency air conditioning model based analysis for the automotive sector,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 64, pp. 108–122, 2016.
- [16] T. Sung, Y. J. Kim, H. S. Kim, and J. Kim, “Empirical modeling and robust control of a novel mesoscale vapor compression refrigeration system (mvers),” *International Journal of Refrigeration*, vol. 77, pp. 99–115, 2017.
- [17] Y. Shang, A. Wu, X. Fang, and Y. You, “Dynamic simulation of electronic expansion valve controlled refrigeration system under different heat transfer conditions,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 72, pp. 41–52, 2016.

- [18] Y. Shang, A. Wu, and X. Fang, “A study on the modeling of the minimal stable superheat for a variable speed refrigeration system,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 59, pp. 182–189, 2015.
- [19] B. Li and A. G. Alleyne, “A dynamic model of a vapor compression cycle with shut-down and start-up operations,” *International Journal of refrigeration*, vol. 33, no. 3, pp. 538–552, 2010.
- [20] L. Martinho, J. Vargas, W. Balmant, and J. Ordóñez, “A single stage absorption refrigeration system dynamic mathematical modeling, adjustment and experimental validation,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 68, pp. 130–144, 2016.
- [21] T. Nunes, J. Vargas, J. Ordóñez, D. Shah, and L. Martinho, “Modeling, simulation and optimization of a vapor compression refrigeration system dynamic and steady-state response,” *Applied Energy*, vol. 158, pp. 540–555, 2015.
- [22] G. Zsembinszki, A. de Gracia, P. Moreno, R. Rovira, M. Á. González, and L. F. Cabeza, “A novel numerical methodology for modeling simple vapor compression refrigeration system,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 115, pp. 188–200, 2017.
- [23] J.-L. Lin and T.-J. Yeh, “Modeling, identification and control of air-conditioning systems,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 30, no. 2, pp. 209–220, 2007.
- [24] L. Zhao, W. Cai, X. Ding, and W. Chang, “Model-based optimization for vapor compression refrigeration cycle,” *Energy*, vol. 55, pp. 392–402, 2013.
- [25] S.-K. Jeong, D.-B. Lee, and K.-H. Hong, “Comparison of system performance on hot-gas bypass and variable speed compressor in an oil cooler for machine tools,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 28, no. 2, pp. 721–727, 2014.

- [26] O. H. Xue Zhifang, Shi Lin, “Refrigerant flow characteristics of electronic expansion valve based on thermodynamic analysis and experiment.,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, pp. 238–242, 2008.
- [27] J. Fong, J. Edge, C. Underwood, A. Tindale, S. Potter, and H. Du, “Application of a new dynamic heating system model using a range of common control strategies,” *Buildings*, vol. 6, no. 2, p. 23, 2016.
- [28] W.-J. Chang, L.-Z. Liu, and C.-C. Ku, “Passive fuzzy controller design via observer feedback for stochastic takagi-sugeno fuzzy models with multiplicative noises,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 9, no. 3, p. 550, 2011.
- [29] C. S. Jeong, E. Yaz, A. Bahakeem, and Y. Yaz, “Nonlinear observer design with general criteria,” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 2, no. 4, pp. 693–704, 2006.
- [30] W. H. Fleming and M. James, “The risk-sensitive index and the h_2 and h_∞ , norms for nonlinear systems,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 199–221, 1995.
- [31] M. R. James, “Asymptotic analysis of nonlinear stochastic risk-sensitive control and differential games,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 5, no. 4, pp. 401–417, 1992.
- [32] P. Whittle, “Risk-sensitive linear quadratic gaussian control,” *Advances in Applied Probability*, vol. 13, no. 4, pp. 764–777, 1981.
- [33] T. Runolfsson, “Stationary risk-sensitive lqg control and its relation to lqg and h-infinity control,” in *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1018–1023, IEEE, 1990.
- [34] W. H. Fleming and W. M. McEneaney, “Risk sensitive optimal control and differential games,” in *Stochastic theory and adaptive control*, pp. 185–197, Springer, 1992.

- [35] W. H. Fleming and W. M. McEneaney, “Robust limits of risk sensitive nonlinear filters,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 14, no. 2, pp. 109–142, 2001.
- [36] E. Al’Brekht, “On the optimal stabilization of nonlinear systems,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 25, no. 5, pp. 1254–1266, 1961.
- [37] D. Jacobson, “Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, no. 2, pp. 124–131, 1973.
- [38] P. Dai Pra, “A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes,” *Applied mathematics and Optimization*, vol. 23, no. 1, pp. 313–329, 1991.
- [39] F. Guerra and L. M. Morato, “Quantization of dynamical systems and stochastic control theory,” *Physical review D*, vol. 27, no. 8, p. 1774, 1983.
- [40] P. Whittle, “Risk-sensitive optimal control,” 1990.
- [41] C. A. Á. Ramos and F. A. S. Cardenas, “Diseño de controladores basados en técnicas de control óptimo lqr+ y h_2 para un prototipo del péndulo invertido sobre ruedas,” *Revista Politécnica*, vol. 8, no. 15, pp. 45–51, 2012.
- [42] A. H. Jazwinski, *Stochastic processes and filtering theory*. Courier Corporation, 2007.
- [43] R. E. Kalman and R. S. Bucy, “New results in linear filtering and prediction theory,” 1961.
- [44] R. E. Mortensen, “Maximum-likelihood recursive nonlinear filtering,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 2, no. 6, pp. 386–394, 1968.
- [45] W. M. McEneaney, “Robust/h filtering for nonlinear systems,” *Systems & control letters*, vol. 33, no. 5, pp. 315–325, 1998.

- [46] M. D. Donsker and S. S. Varadhan, “Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time. iv,” *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 36, no. 2, pp. 183–212, 1983.
- [47] M. Donsker and S. Varadhan, “Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time, ii,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 28, no. 2, pp. 279–301, 1975.
- [48] M. D. Donsker and S. S. Varadhan, “Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time—iii,” *Communications on pure and applied Mathematics*, vol. 29, no. 4, pp. 389–461, 1976.
- [49] M. V. Basin and M. A. Garcia, “Optimal filtering and control for third degree polynomial system,” *DYNAMICS OF CONTINUOUS DISCRETE AND IMPULSIVE SYSTEMS SERIES B*, vol. 10, pp. 663–680, 2003.
- [50] L. El Ghaoui and G. Calafiore, “Robust filtering for discrete-time systems with bounded noise and parametric uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 7, pp. 1084–1089, 2001.
- [51] M. S. Mahmoud, P. Shi, and A. Ismail, “Robust kalman filtering for discrete-time markovian jump systems with parameter uncertainty,” *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 169, no. 1, pp. 53–69, 2004.
- [52] X. Yin, “Initial-state detectability of stochastic discrete-event systems with probabilistic sensor failures,” *Automatica*, vol. 80, pp. 127–134, 2017.
- [53] D. Chen and L. Xu, “Optimal kalman filtering for a class of state delay systems with randomly multiple sensor delays,” in *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, Hindawi, 2014.
- [54] M. A. Alcorta-Garcia, M. Basin, and Y. G. A. Sanchez, “Optimal risk-sensitive filtering and control for linear stochastic systems,” in *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 43–48, IEEE, 2008.


- [55] M. A. Alcorta-García, S. G. Anguiano-Rostro, M. Torres-Torres, *et al.*, “Optimal risk-sensitive filtering for system stochastic of second and third degree,” *Intelligent Control and Automation*, vol. 2, no. 01, p. 47, 2011.
- [56] M. A. Alcorta-García, S. G. Anguiano-Rostro, Y. Nava-Alemán, N. Elizondo-Villarreal, and H. R. Flores-Cantú, “Application of nonlinear risk-sensitive optimal control equations to excitable noise system,” in *2014 19th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, pp. 862–867, IEEE, 2014.
- [57] S.-Z. Zhao, M. W. Iruthayarajan, S. Baskar, and P. N. Suganthan, “Multi-objective robust pid controller tuning using two lbests multi-objective particle swarm optimization,” *Information Sciences*, vol. 181, no. 16, pp. 3323–3335, 2011.
- [58] C. A. Smith, C. A., *Control Automtico de Procesos*. Mexico, DF: Limusa., 2 ed., 1999.
- [59] D. Xue, Y.-Q. Chen, and D. P. Atherton, *Linear feedback control: analysis and design with MATLAB*. SIAM, 2007.
- [60] L. L. Hurtado, “Modelamiento teórico y modelamiento empírico de procesos, una síntesis,” *Scientia et technica*, vol. 2, no. 31, 2006.
- [61] M. Perez, A. Pérez, and E. Pérez, “Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo,” *Universidad Nacional de San Juan*, 2008.
- [62] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [63] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2012.
- [64] Y. Zhu, X. Jin, Z. Du, and X. Fang, “Online optimal control of variable refrigerant flow and variable air volume combined air conditioning system for energy saving,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 80, pp. 87–96, 2015.

- [65] Y. Zhu, X. Jin, Z. Du, X. Fang, and B. Fan, “Control and energy simulation of variable refrigerant flow air conditioning system combined with outdoor air processing unit,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 64, p. 385–395, 2014.
- [66] F. P. Incropera and D. P. DeWitt, *Fundamentos de transferencia de calor*. Pearson Education, 1999.
- [67] E. W. Lemmon, M. L. Huber, and M. O. McLinden, “Nist reference fluid thermodynamic and transport properties–refprop,” *Applied Thermal Engineering*, 2002.
- [68] Holman, *Transferencia de calor*. Mc Graw Hill, 2010.
- [69] W. M. McEneaney, “Robust/game-theoretic methods in filtering and estimation,” in *Proc. Symposium on Advances in Enterprise Control*, pp. 3–10, 1999.
- [70] M. Alcorta-García, María Aracelia Martínez-Flores, S. Mendez-Díaz, E. Alcorta-García, and L. A. Valdez-Hinojosa, “Non-linear optimal filter and control with tracking vs pid applied to an electric resistance system,” in *Ingeniería Mecatrónica, Electrónica y Automotriz (ICMEAE), Conferencia Internacional de 2018 en Cuernavaca Morelos México*.
- [71] O. Ekren, S. Sahin, and Y. Isler, “Comparison of different controllers for variable speed compressor and electronic expansion valve,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 33, no. 6, pp. 1161–1168, 2010.
- [72] M. A. Alcorta-García, “Optimal filtering for linear systems: Kalman-bucy versus risk-sensitive,” in *Second International Conference on Innovative Computing, Informatio and Control (ICICIC 2007)*, pp. 353–353, IEEE, 2007.
- [73] C. A. Smith, A. B. Corripio, and S. D. M. Basurto, *Control automático de procesos: teoría y práctica*. No. 968-18-3791-6. 01-A3 LU. AL-PCS. 1., Limusa, 1991.
- [74] V. S. Pugachev and I. Sinitsyn, *Stochastic systems: theory and applications*. World Scientific Publishing Company, 2002.

- [75] M. M. Martínez-Flores, M. A. Alcorta-García, S. Mendez-Díaz, J. A. Sáenz-Esqueda, G. M. Méndez, and N. Elizondo-Villarreal, “Control de temperatura en un evaporador aplicando el control risk-sensitive,” *DYNA*, vol. 97, no. 4, 2022.
- [76] M. M. Martínez-Flores, M. A. Alcorta-García, S. Mendez-Díaz, J. A. Saenz-Esqueda, G. M. Mendez, and N. Elizondo-Villareal, “Effect of risk-sensitive stochastic optimal control with tracking in an evaporator,” *DYNA Energía y Sostenibilidad*, vol. 11, no. 1, pp. 1–12, 2022.
- [77] M. Martínez-Flores, A. Alcorta-García, S. Mendez-Díaz, S. Martínez-Martínez, A. Morale-Fuentes, N. Elizondo-Villarreal, F. Cortés-Martínez, and A.-M. Alfredo, “Aplicación del filtros óptimos risk-sensitive y kalman-bucy extendido a un sistema de calefacción,” in *Congreso Nacional de Control Automático 2017 en Monterrey, Nuevo León, México*.
- [78] M. Martínez-Flores, S. Mendez-Díaz, M. A. Alcorta-García, N. Elizondo-Villarreal, F. Cortés-Martínez, S. Martínez-Martínez, A. Morale-Fuentes, and L. G. Garza-Garza, “Implementación de algoritmos de control en una cámara climática,” in *Ingeniería Mecatrónica, Electrónica y Automotriz (ICMEAE), Conferencia Internacional de 2016 en Cuernavaca Morelos Méxco*.

ANEXO

EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	RESEARCH ARTICLE	Mima-Maricela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Sáenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villareal

EFFECT OF RISK-SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR

EFFECTO DEL CONTROL OPTIMO ESTOCASTICO RISK SENSITIVE CON TRACKING EN UN EVAPORADOR

Mima-Maricela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Sáenz-Esqueda and Gerardo Maximiliano-Méndez

Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Ciudad Universitaria, s/n - Monterrey, Nuevo León (México).

Universidad Juárez del Estado de Durango. Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura. Avenida Universidad, s/n - 35000 Gomez Palacio (México)

Tecnológico Nacional de México. Dpto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Campus Instituto Tecnológico de Nuevo León. Arcos de Belén, 79 - 06010 Ciudad de México (México).

Received: 22/jul/21 - Reviewed: 28/jul/21 - Accepted: 14/dec/21 - DOI: <https://doi.org/10.6036/ES10293>

TO CITE THIS ARTICLE:

MARTÍNEZ-FLORES, Mima-Maricela; ALCORTA-GARCÍA, María-Aracelia; MÉNDEZ-DÍAZ, Santos; SÁENZ-ESQUEDA, José-Armando; MAXIMILIANO-MÉNDEZ, Gerardo. EFFECT OF RISK-SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR. *DYNA Energía y Sostenibilidad*, January-December 2022, vol.11, [12 p.]. DOI: <https://doi.org/10.6036/ES10293>

ABSTRACT:

This work presents an application of the Risk-Sensitive (R-S) control with tracking applied to a stochastic nonlinear system which models the operation of an electronic expansion valve (EEV) in a conventional evaporator. A novel dynamical stochastic equation represents the mathematical model of the evaporator system. The R-S stochastic optimal problem consists of the design of an optimal control $u(t)$ such that the state reaches setpoint values (SP) and minimizes the exponential quadratic cost function. The presence of disturbances and errors in the sensor measurements is represented by Gauss white noise in the state equation, with the coefficient $\sqrt{\epsilon/2\gamma^2}$. One novel characteristic in this proposal is that the coefficient of the control into the state equation contains the state term. The error and exponential quadratic cost function show that the R-S control has a better performance versus the classical PID (Proportional, Integral Derivative) control, applying different tuning methodologies.


Key Words: Optimal Risk-Sensitive control with tracking, modelling of the evaporator.

RESUMEN:

Este trabajo presenta una aplicación del control Risk-Sensitive (R-S) con tracking aplicado a un sistema no lineal estocástico el cual modela el funcionamiento de una válvula de expansión electrónica (EEV) en un evaporador convencional. Se diseña un control óptimo R-S $u(t)$, el cual logra que el estado alcance los valores del set point (SP) y a la vez minimiza un criterio exponencial cuadrático J . La presencia de disturbios y errores de medición son representados por ruido blanco de Gauss con coeficiente $\sqrt{\epsilon/2\gamma^2}$ en la dinámica del estado. Una característica especial del modelado es que el estado multiplica al termino de control en la ecuación dinámica. El error y los valores finales de la función costo representada mediante un criterio exponencial cuadrático en el tiempo final, muestran mejor eficacia del control R-S cuando es comparado versus el control clásico PID (Proporcional Integral Derivativo), usando diferentes metodologías de sintonización.

Palabras Clave: Control óptimo con tracking R-S, modelo del evaporador.


Publicaciones DYNA SL - c) Mazarredo nº69 - 2º - 48009-BILBAO (SPAIN) Tel +34 944 237 566 - www.revistadyna.com - email dyna@revistadyna.com	Pag 1/12
eISSN: 2254-2833/ DYNA Energía y Sostenibilidad January-December 2022, vol.11: https://doi.org/10.6036/ES10293	

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
RESEARCH ARTICLE	Mima-Manceña Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

1. INTRODUCTION

Vapor compression cooling systems are the most used to cover the basic comfort needs, freezing, and conditioning of spaces. They are widely used in industry as well as at home. Due to the high demand for energy that currently exists on the whole planet and the depletion of sources and resources for its generation, its efficient use has become increasingly important, which has led to the search and development of systems with better energy performance. The vapor compression refrigeration cycle (VCC) system is one of the most energy-consuming in addition to the heating, ventilation, and air conditioning (HVAC) system. The purpose of a cooling system is to extract heat from a given space and transmit it to the outside free air environment, alternatively performing compression, condensation, expansion, and evaporation of the liquid refrigerant. Air conditioning and refrigeration systems are used to control the temperature of the space for human comfort, food storage and transportation. It has great energy demand. For example, statistical data shows that air conditioning and refrigeration account for 28% of domestic energy consumption in the US, while in Singapore, which is a hot and humid country, this proportion can exceed 50%. Compression cooling system is the one with the greatest presence in the current market and is the one that consumes the most energy in any cooling system, it is of vital importance due to energy shortages and global warming, reduce energy consumption through system control and optimization of vapor compression cooling [1]. In [2], the authors discussed the traditional control approaches, for example, the PID control method does not meet the cooling demands with satisfactory energy efficiency as well. In [3] the conventional on/off control has many disadvantages as high energy consumption, low precision, in addition to reducing the useful life of the compressor, due to the continuous starts and stops of operations. In heat pump/refrigeration systems, a key component is the expansion device, thanks to this the flow of the refrigerants is controlled, thereby achieving that the refrigerant maintains the two-phase flow regime before entering the evaporator. The electronic expansion valve (EEV) has a stepping motor that precisely modifies the vertical position of the valve needle, to achieve the opening of the EEV value, set by the dynamics of the function of heat pump/cooling system status, based on specific control strategies under the limitations of the mathematical model of the system and reliability. Regulating the refrigerant flow in real-time allows the implementation of optimal control strategies, achieving reliable and economical operation in refrigeration systems and heat pumps, according to [4]. In [5], the authors argued that the control of refrigerant flow is essential in any refrigerating system. Several physical parameters may be regulated, such as temperature, pressure, or liquid flow rate. A Predictive Functional Control (PFC) in the EEV is used to control the evaporator superheat. It can be shown that the PFC control achieves greater precision than controlling with the conventional Proportional-Integral-Derivative Control (PID). In [6], the authors discussed that the EEV opening has great effects on the discharge pressure of the compressor, gas-cooler outlet pressure, and the discharge temperature of the compressor. The cooling capacity and the coefficient of performance (COP) of the system peak at the EEV opening of 40% and 60%, respectively. As the key component of an HVAC system, the VCC is a complex dynamic system with multi-inputs multi-outputs, highly non-linear, and thermodynamic coupling properties. Therefore, the traditional optimization and control approaches may not be suitable to control the VCC system energy efficiently, as you can see in [7] and [8]. The problem of control into a refrigeration system, modelled as a non-linear system, is presented in this paper. Some special conditions are considered in the modelling procedure. Some methods have been used to solve this problem as adaptive and optimal control [9]. Many studies are engaged in the model development and controller design methods of the VCC systems, which could be approximately classified into PID control, according to [10], artificial intelligence control [11], [12], robust control [13], [14]. The linear-quadratic-Gaussian (LQG) control is applied in a model-driven multivariable controller for vapor compression refrigeration systems [15]. In [16] the authors presented robust model-based predictive control. In [17] authors argued optimal control for refrigeration systems has been discussed by many researchers; however, in many instances, it has been limited to thermodynamic design optimization of the system. In [18] authors argued that current analysis shows that the uncertainty of enthalpy can be very high, even if the uncertainty of the measured quantities is very small. Enthalpy evaluation, for example, requires the prediction of specific heat. Thermophysical properties, in turn, depend on the state of the fluid. The current state of the fluid can be obtained by measuring two state properties such as pressure and temperature. It is common to use thermocouples and pressure sensors to measure these state properties. Precision is affected by these measurement uncertainties and by the thermophysical library used.

The Dynamic programming Hamilton-Jacobi-Bellman equation (HJB) and the Maximum Principle of Pontryagin [19] are methodologies used to obtain the control equations since the '60s. On the other hand, in [20] the authors consider finite energy disturbances. In [21] the authors solve an optimal stochastic control problem using the approach that was developed by Fleming. Problems on a finite-time, using "small-noise" asymptotic were developed in [22]. When the process being controlled is governed by a stochastic differential equation, Whittle's formula for the optimal large-deviations rate was obtained using the partial differential equation viscosity solution method in [23]. Whittle introduced an R-S parameter into the problem formulation [24], leading to the name of R-S control. Diffusion

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	RESEARCH ARTICLE	Mirra-Maricela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal

term ε present into the state equation and the exponential quadratic cost criterion justify state and exponential quadratic cost criterion large variations. Runolfsson, in [25] used Ponsker - Varadhan - type large - derivations ideas obtaining a stochastic differential game. In [26], [27], Fleming applied a value function as a solution of the HJB dynamic programming equation solving the risk-averse LQR (Linear Quadratic Regulator) stochastic optimal control problem. The robust R-S solution is a consequence of the presence of the intensity parameters in the exponential quadratic criteria, which react to the variations of the parameters, and the results are close criteria values for different parameter values. The novel methodology proposed in this work is based on the application of the R-S nonlinear stochastic control with tracking equations into the dynamical system of the evaporator of a refrigeration system. The stochastic term represents the disturbances and is modelled as white noise, with the coefficient of diffusion $\sqrt{\varepsilon/2\gamma^2}$ into the state equations. In [28], authors described a method for automatically adjusting the gain and integral time of proportional-integral controllers based upon patterns that characterize the closed-loop response. The method was developed for self-regulating systems that can be modelled as first-order plus dead-time systems. In a dynamic system, a mathematical model must be made to represent the fundamental aspects of the system's behavior. Through the fundamental observations and laws, it is about establishing the relationships between some variables, inputs, and outputs. With the mathematical model, the theory of dynamic and control systems, the investigation of the system and its answers are carried out. In stochastic control, both in discrete time and in continuous time, the fundamental methodology is that of Bellman, although there are different stochastic versions of the principle of maximum Pontryagin. The importance of the study of stochastic control problems lies in its application in economics, financial mathematics, and engineering, as proposed in this work. In this work an exponential quadratic cost function to be minimized J is used as the cost function which contains the energy used by the state and for the control. Values of J are obtained for different values of the parameter which are presented in a table and graph. The novelty of this work is to propose a model of an evaporating system and compare the efficiency of the RS optimal control versus PID control through comparing error values and J values in the final time. At the knowledge from authors, the Risk Sensitive Model has not been used to model thermal systems. This strategy pays great value due to the lack of knowledge of the phase change dynamics in the heat transfer processes of evaporation and condensation when zeotropic mixtures are used as refrigerants. This is the first effort to apply this strategy to phase dynamics in zeotropic mixtures used as the refrigerant in VCS. In zeotropic mixtures, temperature and pressure have a slip due to distinct components having different saturation conditions, as R-404A.

This work is organized as follows: Section 2 shows the evaporate system model, section 3 presents the R-S control equations with the tracking problem statement, section 4 shows the application to an evaporator system, and in section 5 the conclusions are presented.

2. MODELLING OF AN EVAPORATE SYSTEM

Refrigeration is defined as a process of heat removal. This process has four main components: compressor inlet (Step 1), condenser inlet (Step 2), EEV inlet (Step 3), and evaporator inlet (Step 4), as are shown in Figure 1:

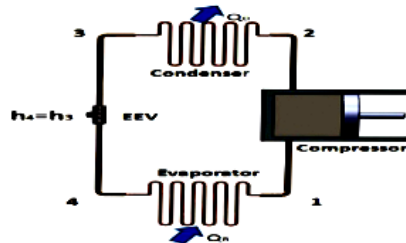



Figure 1. Refrigeration system diagram.

Regarding the main principles of the refrigeration process involves the following two processes in which the absorption of the amount of heat is needed for 1. Go the state from liquid to vapor (evaporation) and 2. Go the state from vapor to liquid (condensation).

 Energía y Sostenibilidad	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	RESEARCH ARTICLE	Mirra-Mariela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Mendez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Mendez, Nora Elizondo-Villarreal

In this work, the mass flow of refrigerant into the evaporator system (step 1) is modelled by applying the balanced energy equation [29], [30].

$$mC_p \frac{dT_R(t)}{dt} = \dot{m}[h_4T_R(t) - h_1T_R(t)] + Q_R(t). \quad (1)$$

Where \dot{m} is the mass refrigerant flow, $h_1T_R(t)$, $h_4T_R(t)$ are the enthalpy of the outlet and inlet of the evaporator respectively, C_p is specific heat, and $dT_R(t)/dt$ represents the change of the temperature of the refrigerant concerning time. $T_R(t)$ is the temperature of the refrigerant at the outlet of the evaporator concerning time. In this work, it is assumed that the refrigerant temperature $T_R(t)$ is a zeotropic mixture. Additional to this, it is assumed quasi-static equilibrium conditions concerning the refrigerant mass in the evaporator, as well as the magnitude of physical properties. The last was assumed due to complete requirements to have an R-S problem statement, then apply the R-S optimal control strategy. The physical properties were obtained from Cool Prop libraries. The cooling capacity $Q_R(t)$ is given by the following equation [31].

$$Q_R(t) = U_E A_E [T_{ER} - T_R(t)]. \quad (2)$$

Where A_E is the total area of the evaporator, U_E is the global heat transfer coefficient, T_{ER} is the space to be cooled. Substituting (2), into (1), the following is obtained.

$$\frac{dT_R(t)}{dt} = \frac{U_E A_E}{mC_p} [T_{ER} - T_R(t)] + \frac{\dot{m}}{mC_p} [h_4T_R(t) - h_1T_R(t)]. \quad (3)$$

Where $h_1T_R(t)$ is the enthalpy of superheat refrigerant vapor and is calculated using CoolProp. On the other hand, $h_4T_R(t)$ is the enthalpy of saturated liquid and is calculated in the same way of $h_1T_R(t)$. The Thermophysical Properties Library used in this work is CoolProp. This software is analyzed in [32]. In this work, it is considered an azeotropic refrigerant R-404A where the pressure is considered constant in the evaporation process. Dynamic equation (3) represents the change in the temperature of refrigerant for the time in an evaporator into a refrigerant system. However, the thermodynamics properties play a crucial role in heat exchange processes. Under boiling and condensation conditions, an azeotropic mixture presents a non-constant pressure and temperature. R-404A, used in this work as refrigerant, have as components the refrigerants R-125, R-134a y R-143a at 44,52 and 4% of the mass. The distinct saturation conditions of the components cause a non-constant temperature under phase change conditions. By this, the suction pressure is considered in a quasi-static state, as well as temperature during phase change in the boiling process. In this model (3), the change of the temperature $T_R(t)$ is proportional to the refrigerant mass flow \dot{m} , which will take the role of control input.

3. R-S CONTROL EQUATIONS WITH TRACKING PROBLEM STATEMENT

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with a family right continuous, increasing of σ -algebras $F(t)$, $t > 0$, and let $(W(t), F(t), T > 0)$ a process $F(t)$ adapted from Wiener. Considering the non-observable random processes $F(t)$ -measurable $x(t)$ governed by the equations of first degree polynomial state:


$$\frac{dx}{dt} = A_0(t) + A_1(t) + B(t)u(t) + \sqrt{\varepsilon/2\gamma^2} dW(t). \quad (4)$$

Where $f(x(t), u(t), t) = A_0(t) + A_1(t) + B(t)u(t)$. The parameter ε scales the diffusion term $dW(t)$, and γ is a parameter from the Lagrange and Fourier series [27]. The R-S optimal control problem consists in design an optimal control $u^*(t)$ that made the state reach the SP values and minimize an exponential quadratic cost function J given by:

$$J = \varepsilon \log E \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^T L(x(t), u(t)) dt + \varphi(T)} \right). \quad (5)$$

Where $L(x(t), u(t), t) = x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)Ru(t)$, $\varphi(T) = x^T(T)Hx(T)$. $H(t)$ is a non-negative definite symmetric matrix, $Q(t)$ is a positive semi-defined symmetric matrix, $R(t)$ is a positive defined symmetric matrix. $f(x(t), u(t), t)$, $L(x(t), u(t), t)$ satisfies conditions in [33].

Publicaciones DYNA SL - c/ Mazarredo nº69 - 2º - 48009-BILBAO (SPAIN) Tel +34 944 237 566 - www.revistadyna.com - email dyna@revistadyna.com	Pag 4/12
eISSN 2254-2633/ DYNA Energía y Sostenibilidad January-December 2022, vol.11 https://doi.org/10.6036/ES10293	

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	Mirra-Mancoela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

3.1. SOLUTION TO THE OPTIMAL CONTROL R-S WITH TRACKING

The solution to the R-S optimal control problem is given for the following theorem which is demonstrated in [34].

Theorem 1

The solution to the non-linear R-S with tracking problem of control is given by the optimal R-S control law

$$u^*(t) = \frac{1}{2} B^T P(t) (x(t) - SP), \tag{6}$$

Where the gain matrix $P(t)$ is the solution of the following differential Riccati equation:

$$\dot{P}(t) = P^T(t) \left(BB^T / 4 - I / \gamma^2 \right) P(t) - A_1^T(t) P(t) - P(t) A_1 - 2I, \tag{7}$$

Where I is the identity matrix $n \times n$. Figure 2 represents the R-S Control Diagram according to (4), (6) and (7).

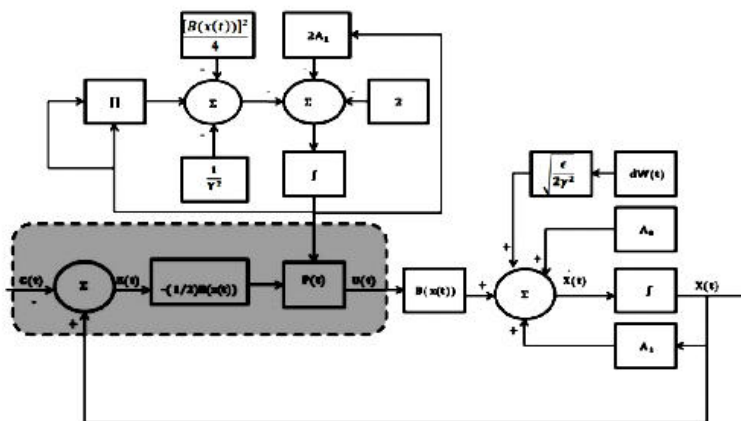



Figure 2. R-S Control Diagram representation.

4. APPLICATION TO AN EVAPORATOR SYSTEM

4.1. R-S OPTIMAL CONTROL.

The process of maintaining the temperature into the enclosure at the fixed value of the SP is affected by the existence of environmental factors and voltage, among others, creating disturbances in the behavior of the state of the system causing the value of the SP had been not reached. The temperature is measured with a thermocouple that has a precision of 0.5°C, which is like a small antenna that picks up a lot of noise. Then it is introduced the stochastic term, as the white noise of Gauss, supposing that conditions for their existence and the orthogonality with $x(t_0)$ are true [35]. Regarding that dynamic equation (3) is stochastic, nonlinear, the optimal R-S control with tracking will be designed according to theorem 1. Then (3) take the form

$$\frac{dT_R(t)}{dt} = \frac{U_E A_E}{m C_p} [T_{ER} - T_R(t)] + \frac{\dot{m}}{m C_p} [h_4 T_R(t) - h_1 T_R(t)] + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW(t). \tag{8}$$

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
RESEARCH ARTICLE	Mima-Marcela Martínez-Flores, María-Araolca Alcorita-García, Santos Méndez-Díaz, José-Amirando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

The solution to the nonlinear R-S with tracking problem of control is given by the R-S optimal control law (6), which takes the form:

$$u^*(t) = \frac{h_4 T_R(t) - h_1 T_R(t)}{2mC_p} P(t)(T_R(t) - SP) \tag{9}$$

To calculate U_{EA} , pressure and temperature sensors were installed at the compressor inlet. At the condenser, the pipe was isolated, and no pressure drops in the system were considered [36]. Making a correspondence between (4)-(8) and computing, $A_0 = U_{EA} A_E T_{ER} / mC_p = 350$, $A_1 = U_{EA} A_E / mC_p = 35$. Replacing A_1 and B in (7), the gain matrix $P(t)$ takes the form

$$\dot{P}(t) = \left[\left[\frac{h_4 T_R(t) - h_1 T_R(t)}{2mC_p} \right]^2 - \frac{1}{y^2} \right] P^2(t) - 2 \left[\frac{U_{EA} A_E}{mC_p} P(t) \right] - 2. \tag{10}$$

The exponential quadratic cost function J (5) takes the form:


$$J = \epsilon \log E \left(e^{\frac{1}{\epsilon} \int_0^T (T_R(t) - SP)^2 + 0.0001 u^2(t) dt + 0.001 (T_R(T) - SP)^2} \right) \tag{11}$$

Where $H(t) = 0.001$, $Q(t) = 1$, $R(t) = 0.001$. Exponential quadratic cost function J (11) the gain $P(t)$ (10), the RS optimal control input $u^*(t)$ (9), the optimally controlled state $T_R(t)$ (12) from the R-S stochastic with tracking control are simulated in LabVIEW 2014, for $T = 20,000$ sec. The results are illustrated in Table 1 for some values of the parameter ϵ .

ϵ values	$T_R(T)$	Error values	Criterion J_{RS} values	Bandwidth Time (2%)
0.1	-9.99999	4.7E-13	27.8789	2493
1	-9.99999	4.8E-13	27.8645	2493
10	-9.99999	4.7E-13	27.8293	2493
100	-9.99999	4.6E-13	27.8154	2493
1000	-9.99999	4.7E-13	27.8138	3694

Table 1. Values of the state $T_R(T)$ (12), with optimal control R-S with tracking, error $(T_R(T) - SP)$, exponential quadratic cost function J (11) at final time $T = 20,000$ sec, for different values of diffusion parameter ϵ .

As it can be seen in Table 1, the bandwidth time with 2% from the final value varies between 2,493 – 3,694 secs. (45 – 61 min) for all values of diffusion parameter ϵ . In Figure 3, it is presented the evolution of gain matrix $P(t)$. The $SP = -10^\circ C$, initial conditions are $X(0) = 0$, $P(0) = 0$.

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	Mirna-Marcela Martínez Flores, María-Aracelia Alcoria-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Sáenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

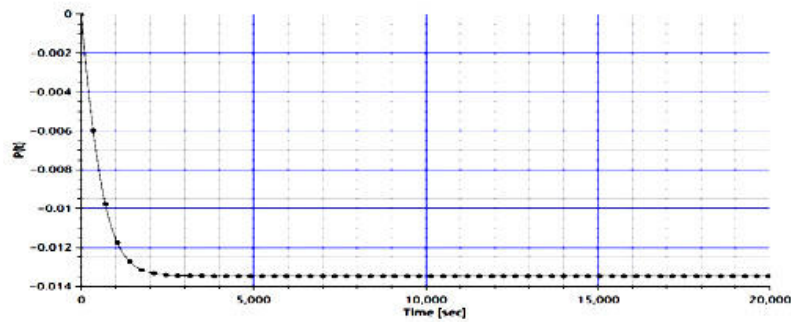


Figure 3. Graphic of gain $P(t)$, corresponding to R-S optimal control when diffusion parameter $\varepsilon = 1$.

The state optimally controlled is obtained by substituting A_D , A_1 , $X(t) = T_R(t)$ and $u_{R,S}(t)$ (6) in (4), getting:

$$\frac{dT_R(t)}{dt} = \frac{U_E A_E}{m C_p} [T_{ER} - T_R(t)] + \left[\frac{h_4 T_R(t) - h_1 T_R(t)}{2m C_p} \right]^2 P(t) (T_R(t) - SP) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}} dW(t) \quad (12)$$

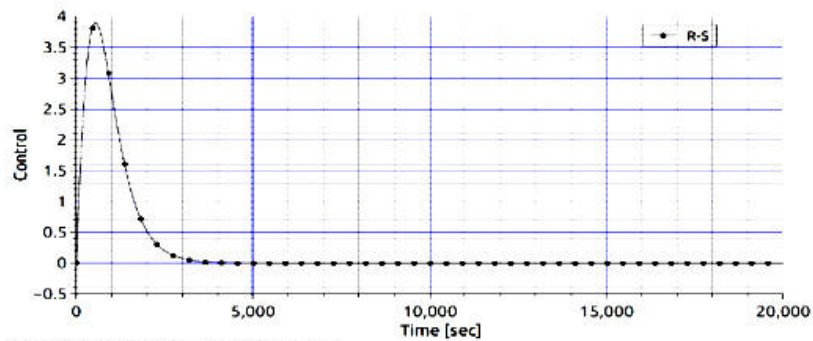



Figure 4. Graphic of R-S optimal control, when $\varepsilon = 1$.

Figure 4 shows the peak of R-S optimal control, which performance demands more flow of refrigerant (it increases until 4 kg/sec), it could be concluded that requires robust equipment of refrigeration with a large capacity as an industrial or commercial refrigerator.

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	Mima-Maricela Martínez-Flores, María-Araolka Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Sáenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

4.2 PID CONTROL

In [37] authors argued, although the refrigeration systems are designed at maximum refrigeration load, it is the reason that these systems work the longest time in the form of partial refrigeration load with conventional compressor controllers that are hysteresis, cycles are controlled by a classic thermostat. Analysis has shown that continuous control of the compressor speed means less energy consumption compared to the thermostat.

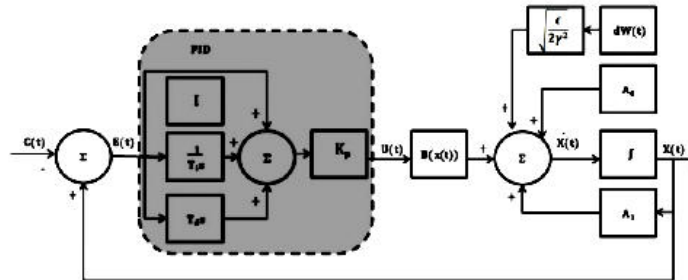


Figure 5. PID control system diagram.


Conventional controllers are hysteresis, proportional (P), proportional-integral (PI), and proportional-integral-derivative (PID). Before recent developments, the most widely used control method in refrigeration systems was the hysteresis technique. PID controller has been widely used in the industry. Therefore, it has also been widely used in heating, air conditioning and refrigeration systems [38]. Figure 5 demonstrates PID Control Diagram representation according to (8). Final time T was calculated according to the method proposed by [39], applying Ziegler-Nichols tuning, the values for the controller gain are $K_p = 0.25$, $T_i = 0.467$, $T_d = 0.011$.

$$u_{PID}(t) = 0.25e(t) + 0.53533 \int_0^T e(t)dt + 0.00275 \frac{de(t)}{dt} \tag{13}$$

The state dynamic equation with PID control takes the form

$$\frac{dT_R(t)}{dt} = \frac{U_E A_E}{m C_p} [T_{ER} - T_R(t)] + \frac{(0.25e(t) + 0.53533 \int_0^T e(t)dt + 0.00275 \frac{de(t)}{dt})}{m C_p} [h_4 T_R(t) - h_1 T_R(t)] + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW(t). \tag{14}$$

Other methodologies applied for tuning in PID control were Chien-Hrones-Reswink and Cohen-Coon [40]. The values obtained for tuning in each methodology are for Chien-Hrones-Reswink, $K_p = 3.398$, $T_i = 0.011$, $T_d = 0.001$, for Cohen-Coon are $K_p = 4.845$, $T_i = 0.011$ and $T_d = 0.001$. The exponential quadratic cost function J_{PID} (12), $u_{PID}(t)$ (13), and state $T_R(t)$ from the PID control are simulated in LabVIEW 2014, for $T = 20,000$ sec. The results are illustrated in Table 2 for some values of the parameter ϵ . It is mentioned that $J_{PID} = J_{RS}$ left is using PID control and right is using R-S optimal control.

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	Mirna-Maricela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

ϵ	$T_R(T)$ obtained in each tuning method with PID control			Error in each methodology			Value of cost criterion function J For each methodology			Bandwidth time 2%		
	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswink	Cohen-Coon	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswink	Cohen-Coon	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswink	Cohen-Coon	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswink	Cohen-Coon
0.1	-9.992	-9.991	-9.990	0.007	0.008	0.008	∞	∞	∞	10817	11171	11163
1	-9.992	-9.991	-9.991	0.007	0.009	0.008	80.539	81.835	61.835	10908	11171	11160
10	-9.996	-9.992	-9.991	0.003	0.007	0.008	59.057	61.058	61.060	10767	11144	11170
100	-9.994	-9.992	-9.991	0.005	0.007	0.008	56.879	59.587	59.273	10639	11105	10968
1000	-9.991	-9.991	-9.992	0.008	0.008	0.007	58.530	59.225	57.200	11016	11170	10673

Table 2. Values of the state $T_R(T)$ with PID control (14) with different tuning methodologies, error $(T_R(T) - SP)$, exponential quadratic cost function J (11) in final time T , and bandwidth time 2%, for different values of diffusion parameter ϵ .

According to Table 2, the bandwidth in 2% is 2.9552 hours, varying between 10,639 – 11,171 sec for all values of diffusion parameter ϵ applying PID control with all tuning methodologies. About PID three methodologies, the dynamics of the system has a settlement time of 15,000 sec, the overshoot, is not present. Finally, the steady-state error in our system is almost zero as can be seen in Table 2 and Figure 6.

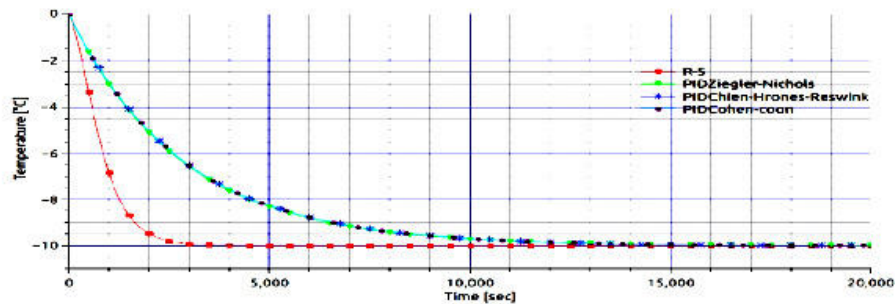



Figure 6. Graphic of state $T_R(t)$, with R-S and PID controls with three tuning methodologies, when $\epsilon = 1$.

Figure 6 compares the temperature curve when the R-S versus the PID control with three tuning methodologies, the temperature curve is in transitory response slightly down for values greater than -10°C . As can be seen in Figure 6, the state with R-S optimal control is applied to achieve the S-P value in less time than that with PID control with all tuning methodologies, with 80% of efficiency.

The R-S control does not have any overstep since the cost function J_{RS} has been minimized in the final time T , respect J_{PID} as can be seen in Tables 1 and 2. Also, the state with PID has a significantly large error value, concerning the state with R-S optimal control. Figure 6 shows that the PID control with all tuning methodologies does not present oscillations and overshoots, the same when R-S optimal control is applied. The error in steady-state for all values of the diffusion parameter ϵ , is equal to $4.7 \times 10^{-13}^\circ\text{C}$ when the R-S optimal control is applied, as can be seen in Table 1, and the error in steady-state for all values of the diffusion parameter ϵ , oscillates between 0.0031°C – 0.009°C for all tuning methodologies when using PID control, as can be seen in Table 2.

On the other hand, the state under R-S optimal control, the value of exponential quadratic cost function J presents fewer variations under the intensity of the noise, the variations oscillate between 27.8138 – 27.8789. While for PID with all three tuning

 Energía y Sostenibilidad	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
	RESEARCH ARTICLE	Mirna-Maricela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal

methodologies the values of exponential quadratic cost criterion function J , oscillate between 56.8794 and ∞ , when diffusion parameter $\varepsilon = 0.01$. For other values of diffusion parameter ε , the largest value of J is 61.835.

The heat loss is represented by the equation of Fourier's law of heat conduction, which is given by $\dot{Q} = -kA\Delta T/L$, (in Watts) where k is the coefficient of thermal conductivity of urethane (rigid foam insulation of the walls) has a value of $0.02\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$, A is the area of the wall has a value of 11.56 m^2 , ΔT is the difference in the temperature of the exterior and interior of the enclosure, it has a value of 30°C and L is the thickness of the insulation has a value of 0.05 m . The heat loss is obtained $\dot{Q} = 0.13872\text{ kW}$. This heat loss is offset by $\dot{m} = 0.0011\text{ kg}/\text{sec}$, which corresponds to the integral part of the PID control. However changing units of PID control to energy (W), the refrigerant flow is given by $\dot{m}C_p\Delta T = (0.0011)(1.64)(30) = 0.054\text{ kW}$, where the mass flow is $\dot{m} = 0.0011\text{ kg}/\text{sec}$, $C_p = 1.64\text{ kJ}/(\text{kg }^{\circ}\text{C})$, C_p is the heating capacity at constant pressure considering refrigerant type $R - 404A$, and $\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$. Then the heat conduction $\dot{Q} = 0.13872\text{ kW}$ is offset with 0.054 kW from an integral part of PID control.

5. CONCLUSIONS

A dynamical system of the evaporator equation was modelled applying theoretical physical laws. The equations of R-S optimal control with tracking for first-degree polynomial stochastic systems were applied. The performance of these control equations was illustrated, achieving the optimal values of the temperature of an evaporator, for different values of the diffusion parameter ε . R-S optimal control with tracking strategy was compared versus the classic PID control methodologies of construction: Ziegler-Nichols, Chien-Hrones-Reswick and Cohen-Coon. The R-S optimal control advantages are shown through values of exponential quadratic cost criterion J and response of the state. Response of the state with R-S optimal control does not have overshoot and oscillations. R-S errors are smaller than PID errors with three tuning methodologies. The cost function J_{RS} values are significantly smaller than J_{PID} , also for $\varepsilon = 0.01$, J_{PID} takes an infinite value. The response time of the state for R-S optimal control is 80% more efficient than the PID control. According to the experimental results, the R-S optimal control requires robust equipment because it demands a higher flow of refrigerant.


As future work will implement the R-S control strategy in a refrigeration system, measuring energy consumption to verify that using different control strategies, it is possible to have an energy impact by making the system more efficient.

Acknowledgement. This work was supported by Grant PAICYT-UANL- IT1066-19 and Grant PFCE 2019.


REFERENCES

- [1] Zhao, Lei and Cai, Wenjan and Ding, Xudong and Chang, Weichung. Model-based optimization for vapor compression refrigeration cycle. Energy, 55 (2013), pp. 214-224. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2013.02.071>
- [2] Yin, Xiaohong and Wang, Xinhai and Li, Shaoyuan and Cai, Wenjan. Energy-efficiency-oriented cascade control for vapor compression refrigeration cycle systems. Energy, 116 (2016), pp. 1006-1019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.10.059>
- [3] Jeong, Jeong, Seok-Kwon and Lee, Dan-Bi and Hong, Ki-Hak. Comparison of system performance on hot gas bypass and variable speed compressor in an oil cooler for machine tools. Journal of Mechanical Science and Technology, 28 (2014), pp. 721-727. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-013-1136-1>
- [4] Zhifang, Xue and Lin, Shi and Honglei, Ou. Refrigerant flow characteristics of electronic expansion valve based on thermodynamic analysis and experiment. Applied Thermal Engineering 28 (2008), pp. 238-243. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2007.03.023>
- [5] Fallahsohi, H and Changeret, Christophe and Place, S and Ligeret, Christophe and Lin-Shi, Xuefang. Predictive functional control of an expansion valve for minimizing the superheat of an evaporator. International Journal of Refrigeration, 33 (2010), pp. 409-418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrefra.2009.10.008>
- [6] Hou, Yu and Ma, Juan Li and Liu, Changhai and Cao, Jing and Liu, Xuefang. Experimental investigation on the influence of EEV opening on the performance of transcritical CO2 refrigeration system. Applied Thermal Engineering 85 (2014), pp. 51-56. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.12.054>
- [7] Wang, Xinhai and Cai, Wenjan and Lu, Jiangang and Sun, Youxian. Optimization of liquid desiccants regenerator with multi-object particle swarm optimization algorithm. Industrial Engineering Chemistry Research 53 (2014), pp. 19293-19303. DOI: <https://doi.org/10.1021/ie5037885>

Publicaciones DYNA SL - c/ Mazarredo nº69 - 2º - 48009-BILBAO (SPAIN) Tel +34 944 237 566 - www.revistadyna.com - email: dyna@revistadyna.com	Pag. 10/12
eISSN: 2254-2833/ DYNA Energía y Sostenibilidad January-December 2022, vol.11: https://doi.org/10.6036/ES10293	

	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
RESEARCH ARTICLE	Mirna-Maricela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Saenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

- [8] Wang, Xinli and Cai, Wenjian and Lu, Jiangang and Sun, Youxian and Zhao, Lei. Model-based optimization strategy of chiller driven liquid desiccant dehumidifier with genetic algorithm. *Energy* 82 (2015), pp. 939-948. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2015.01.103>
- [9] Saleh, B and Aly, Ayman A. Flow control methods in refrigeration systems. *A. International Journal of Control, Automation and Systems* 4 (2015), pp. 14-25
- [10] Yabanova, Ismail, and Keleş, Ali A. Development of a model for geothermal district heating system and a novel PID-based control strategy. *Applied Thermal Engineering* 51 (2013), pp. 908-916
- [11] Calvino, Francesco and La Gennusa, Maria and Morale, Massimo and Rizzo, Gianfranco and Scaccianoce, Gianluca. Comparing different control strategies for indoor thermal comfort aimed at the evaluation of the energy cost of quality of a building. *Applied Thermal Engineering* 30 (2010), pp. 2386-2395. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2010.06.008>
- [12] Ardabili, Sina Fazelzadeh and Mahmoudi, Asghar and Gundoshmian, Tarahom Mesri. Modelling and simulation controlling system of HVAC using fuzzy and predictive (radial basis function, RBF) controllers. *Journal of Building Engineering* 6 (2016), pp. 301-308. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2016.04.010>
- [13] Bejarano, Guillermo and Alfaya, José A and Ortega, Manuel G and Rubio, Francisco R. Multivariable analysis and H_∞ control of a one-stage refrigeration cycle. *Applied Thermal Engineering* 91 (2015), pp. 1156-1167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.09.003>
- [14] Xu, Xinhua and Wang, Shengwei and Huang, Gongsheng. Robust MPC for temperature control of air conditioning systems concerning on constraints and multiple uncertainties. *Building Services Engineering Research and Technology* 31 (2010), pp. 39-55. DOI: <https://doi.org/10.1177/0143624409352420>
- [15] Schurt, Leonardo C and Hermes, Christian JL and Neto, Alexandre Tro. A model-driven multivariable controller for vapor compression refrigeration systems. *International Journal of Refrigeration* 32 (2009), pp. 1672-1682. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2009.04.004>
- [16] Elliot, Matthew S and Rasmussen, Bryan P. On reducing evaporator superheat non-linearity with control architecture. *International Journal of Refrigeration* 33 (2010), pp. 607-614. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2009.12.013>
- [17] Goyal, A., Staedter, M. A., Garimella, S. A review of control methodologies for vapor compression and absorption heat pumps. *International Journal of Refrigeration* 97 (2019), pp. 1-20. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2018.08.026>
- [18] Casari, Nicola y Pinelli, Michele y Suman, Alessio. Analysis of CoolProp library for the assessment of uncertainty propagation for refrigerant fluids in state diagrams and thermodynamic properties. *International Journal of Refrigeration*, 107 (2019), pp. 214-224. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2019.08.015>
- [19] Bellman, Richard. Dynamic programming. Courier Corporation. (2013).
- [20] Jeong, Chung Seop and Yaz, E and Bahakeem, Adil and Yaz, Y. Nonlinear observer design with general criteria. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* 2 (2006), pp. 693-704.
- [21] Dai Pra, Paolo. A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes. *Applied Mathematics Optimization* 23 (1991), pp. 313-329. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01442404>
- [22] Whittle, P. A risk-sensitive maximum principle. *Systems Control Letters* 15 (1990), pp. 183-192. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(90\)90110-G](https://doi.org/10.1016/0167-6911(90)90110-G)
- [23] Fleming, Wendell H y McEneaney, William M. Risk-sensitive control on an infinite time horizon. *SIAM Journal on Control and Optimization* 33, (1995), pp. 1881-1915. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0363012993258720>
- [24] Whittle P., Risk-sensitive linear quadratic gaussian control. *Adv. Appl. Probab.* 13 (1981) 764-777. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0001867800036508>
- [25] Runolfsson, T. Stationary risk-sensitive LQG control and its relation to LQG and H-infinity control. *Decision and Control, 1990. Proceedings of the 29th IEEE Conference on* (1990), pp. 1018-1023. DOI: <https://doi.org/10.1109/CDC.1990.203751>
- [26] Fleming, W. H., McEneaney, W. M. Risk sensitive optimal control and differential games. In *Stochastic theory and adaptive control* (1992), pp. 185-197. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0113240>
- [27] Fleming, Wendell H and McEneaney, William M. Robust limits of risk-sensitive nonlinear filters. *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 14, (2001), pp. 109-142. DOI: <https://doi.org/10.1007/PL00009679>
- [28] Seem, John E. A new pattern recognition adaptive controller with application to HVAC systems. *Automatica* 34 (1998), pp. 969-982. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(98\)00033-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(98)00033-8)
- [29] Zhu, Yonghua and Jin, Xinqiao and Du, Zhimin and Fang, Xing. Online optimal control of variable refrigerant flow and variable air volume combined air conditioning system for energy saving. *Applied Thermal Engineering* 80 (2015), pp. 87-96. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.01.030>

 <p>Energía y Sostenibilidad</p>	EFFECT OF RISK SENSITIVE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH TRACKING IN AN EVAPORATOR	MODELLING AND CONTROL
RESEARCH ARTICLE	Mirra-Mancela Martínez-Flores, María-Aracelia Alcorta-García, Santos Méndez-Díaz, José-Armando Sáenz-Esqueda, Gerardo-Maximiliano Méndez, Nora Elizondo-Villarreal	Optimization and Control

[30] Zhu, Yonghua and Jin, Xingqiao and Du, Zhimin and Fang, Xing and Fan, Bo. Control and energy simulation of variable refrigerant ow air conditioning system combined with 350 outdoor air processing unit. *Applied Thermal Engineering* 64 (2014), pp. 385-395. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.12.076>

[31] Incropera, Frank P and DeWitt, David P. *Fundamentos de transferencia de calor*. Pearson Educación (1999)

[32] Lemmon, Eric W and Huber, Marcia L and McLinden, Mark O. NIST reference fluid thermodynamic and transport properties-REFPROP (2000). Version.

[33] Ma, Aracelia Alcorta-García, Michael Basin and Yazmin Gpe. Acosta Sanchez, Risk-sensitive approach to optimal filtering and control for linear stochastic systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 5, (6), (June 2009), pp. 1-8

[34] Alcorta-García M. A., Martínez-Flores M. M., Méndez Díaz S., Alcorta-García, Vadez H. Luis. Non-linear optimal filter and control with tracking vs PID applied to an electric resistance system. *IEEE-International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)* (Nov. 2018), pp. 165-170. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICMEAE.2018.00038>

[35] Pugachev, Vladimir Semenovich and Sinityn, Igor Nikolaevich. *Stochastic systems: theory and applications*. World Scientific Publishing Company. (2002). DOI: <https://doi.org/10.1142/4805>

[36] Martínez-Flores, Mirra Mancela, Méndez Díaz Santos, Alcorta-García María Aracelia, Elizondo V. Nora, Cortes Martínez Facundo, Martínez Simón, Morales-Fuentes Arturo, Garza Garza Luis Gerardo. Implementation of control algorithms into a climate chamber. *IEEE- Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, (nov. 2016), pp. 107-112. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICMEAE.2016.028>

[37] Aprea, C y Renno, C. Experimental model of a variable-capacity compressor *International Journal of Energy Research* 33 (2009), pp 29-37. DOI: <https://doi.org/10.1002/er.1468>

[38] Ekren, Orhan and Sahin, Savas and Isler, Yalci. Comparison of different controllers for variable speed compressor and electronic expansion valve. *International Journal of Refrigeration* 33 (2010), pp. 1161-1168 DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jrefrig.2010.05.005>

[39] Ogata, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Ed. Prentice Hall, Inc, 5TH Edition. (2010).

[40] Karl J. Åström and Tore Hägglund. *Advanced PID Control*. ISA - Instrumentation, Systems, and Automation Society. (2006).

NON-LINEAR OPTIMAL FILTER AND
CONTROL WITH TRACKING VS PID
APPLIED TO AN ELECTRIC
RESISTANCE SYSTEM

2018 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)

NON-LINEAR OPTIMAL FILTER AND CONTROL WITH TRACKING VS PID APPLIED TO AN ELECTRIC RESISTANCE SYSTEM

María Aracelia Alcorta García
Mirna Maricela Martínez Flores
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, N. L., México
maaracelia@gmail.com
mirna.mtz@gmail.com

Santos Méndez Dfáz
Efraín Alcorta García
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, N. L., México
santos.mendezdz@uanl.edu.mx,
ealcortag@gmail.com

Luis Arturo Valdez Hinojosa
Consorcio Educativo Internacional Warden
Monterrey, N. L., México
luis.arturo.valdez.h@gmail.com

Abstract—Optimal Risk-Sensitive control equations with tracking for first degree polynomial stochastic systems have been obtained and applied to heater system where the actuator is the electrical resistance, achieving the optimal values of the state, for different values of the parameter ϵ which multiplies the white noise in the state equation, which is non linear. Exponential quadratic criterion function to be minimized values are obtained in final time, for some values of the parameter ϵ . PID simulation was realized for this heater system. Values of the errors for both (Risk-Sensitive with tracking and PID) are presented in tables showing advantages the Risk-Sensitive control. In addition, in this paper is present the optimal Risk-Sensitive filtering equations applied to the heater system, with both controls and exponential quadratic criterion to be minimized, which contain the quadratic error, for some values of the parameter ϵ . Advantage for the system conformed by optimal non linear Risk-Sensitive stochastic control with tracking and non linear stochastic Risk-Sensitive filtering equations is observed through tables.

Index Terms—Heating element, control, Risk-Sensitive control, PID, Risk-Sensitive filter.

I. INTRODUCTION

The heating system had been modelled in some works as follows. In [1] the authors establish convectional elements of a building's passive solar heating systems. Mathematical description of heat transfer and air movement processes in the convection elements is presented as an equation set in differential form. In [2] it is presented an applicative solution of mathematical modeling and simulation for heating resistor elements. This model allows the simulation of the transient self-heating regime, as well as of the continuous heating regime. This paper presents only an analysis for of every type of heating resistor. Simulation of a predictive control method for power variation reduction and maximum power limitation in building heating systems is presented in [3].

Simulation environment is developed to simulate floor thermal dynamics with fan coils as heating elements. Development of a continuous time mathematical heating models have been presented in [4], [5], [6], [7]. In [8], the performances of control strategies with feedback for a microcontroller based temperature control in a ventilation system have been investigated. A comparative study of performance of PID based controllers is studied. In [9] the authors investigated the overall heating energy consumptions using various control strategies, secondary heat emitters, and primary plant for a building. In [10] heat load for one sample building was calculated. Based on it, both geothermal heating and a fuel fired system using steady-state model and dynamic model were simulated. Now, in this paper it is presented a modeling of heater system, which is obtained applying general thermodynamics law and Newton's law of cooling [11], [12]. Then Risk-Sensitive optimal control non linear with tracking equations was getting and applied for this system, and the results obtained were compared with PID equations. Some antecedents of Risk-Sensitive control are as follow. Dynamic programming [13], and maximum of Pontryagin [14], are methodologies obtaining control equations since the 60's. The Risk-Sensitive stochastic control has been an area of research during the last years, for non-linear systems with respect to a quadratic Bolza. Meyer's criterion (see for example [15], [16]). The problem of the stochastic linear exponential quadratic regulator (LEQR) was introduced in [17], where it is formulated for discrete and continuous systems. That type of criteria is used in some problems of stochastic mechanics [18], [19], and quantum physics [20]. Whittle [19], [21] considered problems on a finite-time horizon, using "small - noise" asymptotic. Process being controlled is governed by a stochastic differential equation,

may be seen in [22], [23]. The Whittle formula for the optimal rate of large derivations was obtained using the partial differential equation viscosity solution method. The Risk-Sensitive exponential quadratic criterion was introduced in the formulation of the problem [22], [24]. Advantages of method Risk-sensitive are based in the presence of the parameter ϵ in the state equation, as a multiplier of Gaussian noise, in the exponential quadratic criterion to give better account of the large variations of state from the values of the criteria. The objective in this work is based in getting the Risk-Sensitive nonlinear stochastic control with tracking equations and does an application to the dynamic system of a heating system. The stochastic term, where disturbances are considered, is represented as white noise, with a diffusion coefficient $\sqrt{\frac{\epsilon}{(2\gamma^2)}}$ in the state and observation equations. In the other hand, PID has remained, by far, as the most commonly used controller in practically all industrial control applications [25], some applications are for example in heating, air conditioning systems and refrigeration systems as you can see in [26]. Optimal filtering theory is established by Kalman and Bucy in the 60's [27], subsequently numerous algorithms have been developed, for different cases, as for non-linear systems [28], for polynomial systems [29], for systems discrete [30], [31], for systems with delays [32], [33], among others. Obtaining equations of polynomial filtering Risk-Sensitive Stochastic for equations of first degree can be seen in [34] for equations of the second degree can see in [35] and for third grade [36]. More than thirty years ago, Mortensen [37] introduced a deterministic filter model, which provides an alternative to stochastic filtering theory. In this model, errors in the state dynamics and the observations are modeled as deterministic disturbance functions, and a mean-square disturbance error criterion is to be minimized. Special conditions are given for the existence, continuity and boundedness of the term drift $f(x)$ into the state equation and a linear function $h(x)$ into the observation equation. A concept of the stochastic risk-sensitive estimator, introduced more recently by McEneaney [28], in regard to a dynamic system including nonlinear drift $f(x)$, linear observations, and intensity parameters multiplying diffusion terms in both, state and observation, equations. Again, the exponential mean-square (EMS) criterion, introduced in [38], [39], [40] for deterministic systems and in [41] for stochastic ones, is used instead of the conventional mean-square criterion to provide a robust estimate, which is less sensitive parameter variations in noise intensity. Regarding that more than 90% of industrial controllers are still implemented based on PID algorithms as no other controller matches the simplicity, clear functionality and ease of implementation [42]. Considering that among minor errors, the energy consumption will be lower, the implementation of the risk-sensitive equations is a future work. In addition, a comparison is made when, starting from these control equations (Risk-sensitive and PID), the Risk-sensitive filtering equations are applied, verifying the best estimate according for each control. Advantages of stochastic Risk-Sensitive control with tracking, respect to the

difference between the set point (SP) value and the state values obtained, are observed y presented in some tables. This paper is organized as follows: Section II is a mathematical modeling of a heating system, in Section III is the obtention of PID, in Section IV, Optimal Risk-Sensitive with tracking control equations are obtained. In Section V, Application to a heating is presented. In Section VI, Risk-Sensitive optimal filter with tracking equations and applied to heating system with Risk-sensitive control and PID are presented. The Conclusions are presented in Section VII.

II. MATHEMATICAL MODELING OF A HEATING SYSTEM

The heater element is used to maintain the interior temperature of a confined space. The temperature inside the enclosure is controlled by turning off the resistance, when the temperature is higher than the SP. On the other hand, when the temperature is lower, the electrical power will be fed proportionally to the difference of the SP temperature and the interior temperature of the enclosure. The mathematical modelling of this system, start from the principle of conservation of energy. The heat absorbed by the air inside of the enclosure is given by

$$\dot{q} = \dot{m}C_p\Delta T, \quad (1)$$

where \dot{m} is the mass flow, C_p is the thermal capacity of the air at constant pressure, ΔT is the change in the in air temperature between initial time and final time, inside of the enclosure. Concepts as conduction, convection, thermal resistance [12] and electrical work, will be analyzed forward.

A. Conduction

Fourier's law of heat conduction equation is given by

$$q_{con} = -kA\frac{dT}{dx}. \quad (2)$$

Where q_{con} is the heat-transfer for conduction (W) in a dimension and $\frac{dT}{dx}$ is the variation of the temperature with respect to the direction of the heat flow ($^{\circ}C$). k is called the thermal conductivity of the material ($\frac{W}{m^{\circ}C}$), thermal conductivity equation is given by (2) (see in [12]), A is the super face area (m^2). Integration of (2) yields

$$q_{con} = -kA\frac{T_{in}(t) - T_{out}}{Z}. \quad (3)$$

The wall thickness is Z , $T_{in}(t)$ and T_{out} are the wall-face temperatures interior and exterior respectively [12].

B. Convection

The effect of convection, is represented applying the Newton's law of cooling as you may see in [12], which is given by :

$$\dot{q}_{conv} = hA(T_s - T_a). \quad (4)$$

Here, \dot{q}_{conv} is the rate of heat transfer by convection (W) is proportional to the difference between the the surface temperature T_s and temperature characteristic of the fluid T_a ($^{\circ}C$). h is called coefficient of heat transfer by convection ($\frac{W}{m^2C}$) and A is as in equation (2).

C. Concept of thermal resistance

The heat-transfer rate $q_{total\ walls}$ (W) may be considered as a flow, and the combination of thermal conductivity, thickness of material, surface area, as a resistance to this flow [12]. If q_{in} is the flow through the wall composed of some different materials, it will be denoted as overall heat transfer $q_{total\ walls}$, and then (3) will be rewritten as (5), where Z is the sum of the thermal resistances, inside of enclosure air ($\frac{1}{h_i A}$), walls of enclosure ($\frac{1}{kA}$), and outside air ($\frac{1}{h_o A}$):

$$q_{total\ walls} = \frac{[T_{in}(t) - T_{out}]}{\frac{1}{h_i A} + \frac{1}{kA} + \frac{1}{h_o A}} \quad (5)$$

$$\text{If } U = \frac{k h_i h_o}{z h_i h_o + k h_i + k h_o},$$

$$q_{total\ walls} = UA[T_{in}(t) - T_{out}]. \quad (6)$$

D. Electrical work

Electrical power equation is given by

$$\dot{W}_e(t) = VI(t) \quad (7)$$

Where $\dot{W}_e(t)$ is the electric power (W), $I(t)$ is electric current (amperes), V is the voltage (V) as can be seen in [11]. Regarding that the electrical power $\dot{W}_e(t)$ is given by the difference between the heat absorber by the air inside the enclosure \dot{q} (1) and the overall heat transfer $q_{total\ walls}$ (6), the following equation is obtained

$$\dot{m}C_p \Delta T - UA(T_{in}(t) - T_{out}) = \dot{W}_e(t). \quad (8)$$

From (1) assuming ΔT as the variation of temperature respect to time into the enclosure, ΔT will be substitute by $\frac{dT_{in}(t)}{dt}$ in (8) obtaining:

$$\dot{m}C_p \frac{dT_{in}(t)}{dt} - UA(T_{in}(t) - T_{out}) = \dot{W}_e(t). \quad (9)$$

Considering that the electrical work $\dot{W}_e(t)$ is zero before the SP value of the state is reached,

$$\frac{1}{\dot{m}C_p} UA(T_{in}(t) - T_{out}) = \frac{dT_{in}(t)}{dt}. \quad (10)$$

This equation (10) represents the mathematic model of the electric resistance system as a dynamic system of equations.

III. OBTENTION OF PID

The equation (10) can be rewrite as follows:

$$\frac{UA}{\dot{m}C_p} (T_{in}(t) - T_{out}) = \frac{dT_{in}(t)}{dt}. \quad (11)$$

Assigning $\frac{1}{\tau} = \frac{UA}{\dot{m}C_p}$, (11) takes the form:

$$\frac{1}{\tau} (T_{in}(t) - T_{out}) = \frac{dT_{in}(t)}{dt}, \quad (12)$$

since this is a linear differential equation, applied transformed of Laplace is obtained, where $T_{in}(0) = 0$, therefore, this

model (13) represents the dynamic response of the temperature inside of the enclosure

$$\frac{T_{in}(s)}{T_{out}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (13)$$

Applying the tuning for regulatory control, the values for the gain of the controller are the following:

$$K_p = 0.1 \quad K_i = 35.41 \quad t_i = 10.9 \quad t_d = 3.16.$$

Integral formula applies criteria for profits to build the model PID, as you may be seen in [43].

$$G(s) = 35.41 \left[1 + \frac{1}{10.9} + 3.16 \right] * \frac{0.1}{(20)s + 1}. \quad (14)$$

$G(s)$ is the complete form of transfer function that represent the dynamic of the process. Simulation is made in Simulink. Considered that the SP is 10°C, in the simulation a ramp and corresponding stochastic term as in Risk-Sensitive were added. Results can be seen in table 1.

IV. OPTIMAL RISK-SENSITIVE CONTROL

A. Problem statement

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with a family right continuous, increasing of σ -algebras $F(t)$, $t \geq 0$, and let $(W(t), F(t), T \geq 0)$ a process $F(t)$ adapted from Wiener. Considering the non-observable random processes $F(t)$ -measurable $x(t)$ governed by the equations of first-degree polynomial state:

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)X(t) + B(t)U(t) + \sqrt{\frac{c}{2\tau^2}} dW_1(t). \quad (15)$$

Where $X(t) \in R^n$, the control input $u(t) \in R^p$, $A_0(t) \in R^n$, $A_1(t)$ is a matrix of dimension $n \times n$, $dW_1(t) \in F^m$ is the stochastic term represented as white noise. The Risk-Sensitive stochastic with tracking problem of control consists in found a optimal control input $u^*(t)$ which make the state reach the optimal values and minimize the exponential quadratic cost function J in final time, given by

$$J = \text{E} \log \text{Exp} \left[\frac{1}{\tau} \int_0^T [(X(t) - C)^T Q(t) (X(t) - C) + (U(t)^T R(t) U(t))] dt + \frac{1}{2} (X(T) - C)^T H(T) (X(T) - C) \right]. \quad (16)$$

Where C is the value of the SP to be reached by the state. $R(t)$ is a positive definite symmetric matrix, $Q(t)$ is nonnegative definite symmetric matrix.

B. Solution to the optimal control risk sensitive with tracking
Theorem 1. The solution to the non linear Risk-Sensitive with tracking problem of control is given by the optimal risk-sensitive control law

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} B^T(t) P(t) (X(t) - C). \quad (17)$$

Where C is SP of the state, $\dot{P}(t)$ is the solution of the following differential Riccati equation:

$$\dot{P}(t) = P^T(t)\left(\frac{BB^T}{4} - \frac{I}{\gamma^2}\right)P(t) - A_1^T(t)P(t) - P(t)A_1(t) - 2I \quad (18)$$

Where I is the identity matrix $n \times n$

Proof: Given the HJB dynamic programming equation:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum v_{xi}v_{xj} + \min_{u \in U} [f(t)X(t), U(t), A(t)]V_x V + \\ &L(t, X(t), U(t), A(t)) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V \\ &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Where: $V_{xi}x_j$ denotes the second partial derivative of V respect x_i, x_j . Proposing a value function as viscosity solution of 19, this value function takes the form

$$V(t) = \frac{1}{2}(X(t) - C)^T P(t)(X(t) - C) + R(t). \quad (20)$$

Getting the derivatives of $V(t)$ and substituting these and (15) in (19)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(x(t) - c)^T \dot{P}(t)(x(t) - C) \\ &+ \frac{\epsilon}{2\gamma^2} P(t) + (A_0 + A_1 x(t))P(t)(x(t) - C) - \\ &\frac{1}{4}(x(t) - C)^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)(x(t) - C) + \\ &X^2(t) + \frac{1}{2\gamma^2}(x(t) - C)^T P^2(t)(x(t) - C) \end{aligned} \quad (21)$$

Minimizing over the space of admissible controls U , substituting the minimum in (21) the optimal control equation takes the form (17), and collecting the $X^T(t)X(t)$ terms, the matrix equation for $\dot{P}(t)$ (18) is obtained. ■

V. APPLICATION OF RISK-SENSITIVE CONTROL WITH TRACKING TO A HEATING SYSTEM

Since it is necessary in the heating system to maintain the temperature into the enclosure at the fixed value of the SP, this process is affected by to the existence of environmental factors that cause disturbances in the behavior of the state of the system causing the value of the SP is not reached. Then the need to introduce the stochastic term is appreciated, as a white noise of Gauss, multiplied by the parameters of the Risk-Sensitive problem and a control input in the state that make the state reach the SP values. Regarding that in heating system participates factors without control as environmental conditions, tacking equation (10) stochastic term is added, and that the values of the state do not approach the SP due to these adverse conditions, the need to introduce a non-linear control

with tracking is imminent. The following dynamical system is obtained:

$$\begin{aligned} dT_{in}(t) &= \left(\frac{-UAT_{out}}{mC_p} + \frac{UA}{mC_p}T_{in}(t) + B(t)U(t) \right) dt \\ &+ \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Making a similarity with the approach of the Risk-Sensitive non-linear control problem with tracking, corresponding to equation (15). Theorem 1 is applied to obtain the equations of the Risk-Sensitive control with tracking, which are given by optimal control:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}P(t)(T_{in}(t) - 10), \quad (23)$$

where $C = 10$, $P(t)$ is the solution of

$$\dot{P}(t) = -2P(t)A_1 - 2. \quad (24)$$

Obtaining the equilibrium point of $P(t)$,

$$\frac{1}{-A_1} = P(t). \quad (25)$$

where $A_1 = \frac{UA}{mC_p}$, $P(0) = 0$, and the value of the equilibrium point is -45.48. The state optimally controlled takes the form:

$$\begin{aligned} dT_{in}(t) &= \left[\frac{-UAT_{out}}{mC_p} + \frac{UA}{mC_p}T_{in}(t) \right] dt + \\ &\left[-\frac{1}{2}P(t)(T_{in}(t) - 10) \right] dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Equations of the R-S optimal control with tracking (23), gain matrix $P(t)$ (24), exponential quadratic cost function J (16), and the state (26) are simulated in Simulink, for $T = 100$ sec. The results are illustrated in Table I for some values of the parameter ϵ . These results are compared with the values of PID.

TABLE I
VALUES OF STATES WITH OPT. CONT. R-S WITH TRACKING AND PID

ϵ	RS Control		PID	
	State value	Error	State value	Error
0.01	9.84	-0.15	10.66	0.06
0.1	9.83	-0.16	10.56	0.18
1	9.80	-0.19	10.56	0.56
10	9.69	-0.31	11.77	1.77
100	9.34	-0.65	15.6123	5.6
1000	8.23	-1.76	27.71	17.71

The error is the difference between SP and the optimally controlled state. As you may see in Figure 1, both controls do the state reach the SP. However, the value of the error is less for column of optimal control Risk-Sensitive with tracking respect to to the error of PID for all values of the parameter ϵ as you can see in Table I.

The interval of variation for the optimally controlled state is less respect to the state with PID. As it is showed in Figure 2, values of the error oscillate between the values $\pm 0.5^\circ\text{C}$ with the Risk-Sensitive optimal control with tracking. In other hand, the error oscillates between the values $\pm 1^\circ\text{C}$ with PID of the SP temperature and the actual temperature of the enclosure.

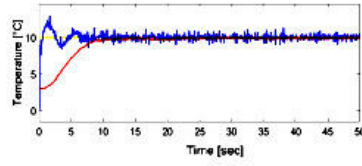


Fig. 1. Graph of state values (14) with PID (blue) Risk-Sensitive control (26) (red) for $\epsilon=1$.

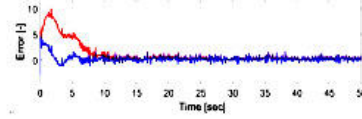


Fig. 2. Graph of error for both states, Risk-Sensitive control (red) and PID (blue), with $\epsilon=1$.

VI. RISK-SENSITIVE OPTIMAL FILTERING PROBLEM STATEMENT

Let (Ω, F, P) be a complete probability space with a family right continuous, increasing of σ -algebras $F(t), t \geq 0$, and let $(W(t), F(t), T \geq 0)$ a process $F(t)$ adapted from Wiener. Considering the non-observable random processes $F(t)$ -measurable $x(t)$ governed by the equations of first-degree polynomial state (15). The observation equation is linear and it is given by:

$$y(t) = x(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_2(t). \quad (27)$$

Where $x(t) \in R$, is the state variable, $dW_2(t) \in R^n$ are the diffusion terms, represented by the Brownian process, independent of each other and of the initial condition $X(0)$. The solution to the Risk-Sensitive filtering problem for the state equation (15), with observations equation (27) is given by the differential equation for the estimate $C(t)$:

$$\dot{C}(t) = A_0 + A_1^T(t)C(t) - Q^{-1}(t)E_1(t) \times (dy - E_1(t)C(t) - E(t)), \quad (28)$$

where $Q(t)$ is the solution to the following Riccati equation

$$\dot{Q}(t) = -A_1^T(t)Q(t) - Q(t)A_1(t) + Q^T(t)Q(t) - E_1^T(t)E(t), \quad (29)$$

with $C(t) \in R^n$, $Q(t) \in M_{n \times n}$, as you can see in [44].

A. Application of Optimal Risk-Sensitive Filtering Equations
Applying (28) and (29), to the state equation of heating system (26) and (27), the equation of the state estimate $C(t)$ is given as the solution of the following differential equation:

$$\dot{C}(t) = \frac{-UAT_{out}}{\dot{m}C_p} + \frac{UA}{\dot{m}C_p} C(t) - Q^{-1}(t)E_1(t)(dy - C(t)), \quad (30)$$

where $Q(t)$ is the solution to the following Riccati equation:

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) \left[\frac{UA}{\dot{m}C_p} \right] + Q^T(t)Q(t), \quad (31)$$

with $Q(t) \in M_{n \times n}$, whose balance points are $Q_1 = -0.9844$ and $Q_2 = 1.0158$. The quadratic exponential cost function J to be minimized is given by:

$$J = \epsilon \log \text{Exp} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_0^T [(X(t) - C(t))^T R(t)(X(t) - C(t))] dt / Y(t) \right]. \quad (32)$$

Where $R(t) = 1$, E denotes the expected conditional value, given the observations $Y(t)$. The filtering problem consists of obtaining the equation of a state estimate, which minimizes the error, and the values of the quadratic exponential criterion J in the final time. Equations (26), (27), (30), (31) and (32) are simulated using Simulink in $T = 100$ sec. The results obtained from the simulation are presented in Table II, where the values of the error and J , the exponential quadratic criterion can be appreciated for different values of the parameter ϵ , when is used the risk-sensitive control with tracking equations and when is used PID equation.

TABLE II
ERRORS R-S, ERRORS PID, J (32), FOR DIFFERENT VALUES OF THE PARAMETER ϵ WITH OPTIMAL CONTROL RISK-SENSITIVE WITH TRACKING AND PID RESPECTIVELY.

ϵ	Error R-S	Error PID	J R-S (32)	J PID (32)
0.01	0.2263	0.2938	inf	inf
0.1	0.2203	0.4319	63	17
1	0.2117	0.8738	13	17.45
10	0.1467	2.2653	153	24.2
100	-0.031	6.663	33	99
1000	-0.593	20.58	202	869

You may see the values of error for the estimate Risk-sensitive are less when the Risk-sensitive with tracking control equations were applied for all values of parameter ϵ . Similarly Optimal Risk-Sensitive control with tracking, produces lower values into the error and in the exponential quadratic criterion J for all values of the parameter ϵ with respect to the PID.

VII. CONCLUSION

The Electric Resistance System is modeled as a dynamic system of equations in R. Optimal Risk-Sensitive stochastic control Equations with tracking are designed for this dynamic system. The PID is obtained. The results of both controls are compared, establishing advantage of the optimal Risk-Sensitive control, by means of the evaluation of the errors, and the values of the quadratic exponential criterion function to be minimized, for different values of the parameter ϵ .

The equations of the risk-sensitive estimate are obtained for the system with Risk-Sensitive control with tracking and for the system with PID, observing smaller errors and smaller values of the quadratic exponential criterion to be minimized, when the system is controlled by means of the control Risk-Sensitive. As future work it is the implementation of this

equation of control in a electrical resistance, with the objective to verify save of energy, according each control strategy, and tacking in account the result obtained in this work.

REFERENCES

- [1] M. Olenets, J. Piotrowski, and A. Stroj, "Mathematical description of a heat transfer and air movement processes in convectonal elements of a building's passive solar heating systems," *Energy Procedia*, vol. 57, pp. 2070–2079, 2014.
- [2] M. I. Neaca and A. M. Neaca, "The modeling of the heating resistors in transient regime," *Journal of Materials Science and Engineering. B*, vol. 1, no. 2B, p. 170, 2011.
- [3] A. Stučić, V. Lešić, and M. Višćak, "Predictive control for heating power variance and peak reduction in buildings," in *Industrial Electronics Society. IECON 2016-42nd Annual Conference of the IEEE*. IEEE, 2016, pp. 7089–7094.
- [4] D. W. U. Perera, C. F. Pfeiffer, and N.-O. Skeie, "Modelling the heat dynamics of a residential building unit: Application to norwegian buildings," *Modeling, Identification and Control*, vol. 35, no. 1, p. 43, 2014.
- [5] A. Behravan, R. Obermaier, and A. Nasari, "Thermal dynamic modeling and simulation of a heating system for a multi-zone office building equipped with demand controlled ventilation using matlab/simulink," in *Circuit, System and Simulation (ICSSS), 2017 International Conference on*. IEEE, 2017, pp. 103–108.
- [6] D. W. U. Perera, C. F. Pfeiffer, and N.-O. Skeie, "Modelling the heat dynamics of a residential building unit: Application to norwegian buildings," *Modeling, Identification and Control*, vol. 35, no. 1, p. 43, 2014.
- [7] L. Saarinen, "Modelling and control of a district heating system," 2008.
- [8] K. Akpodo, C. Ezeogwu, A. Ejiolor, and A. Nwokede, "Design, modeling and simulation of a microcontroller based temperature control in a ventilation system," *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*, vol. 2, no. 7, pp. 3470–3479, 2013.
- [9] J. Fong, J. Edge, C. Underwood, A. Tisdale, S. Potter, and H. Du, "Application of a new dynamic heating system model using a range of common control strategies," *Buildings*, vol. 6, no. 2, p. 23, 2016.
- [10] L. Haiyan and P. Valdimarsson, "District heating modelling and simulation," in *34th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, 2009.
- [11] Y. A. Çengel and M. A. Boles, *Termodinámica (8a)*. McGraw Hill Mexico, 2015.
- [12] Holman, *Transferencia de calor*. Mc Graw Hill, 2010.
- [13] T. Basar and P. Bernhard, "H-optimal control and related minimax design problem: a game theoretic approach," 1991.
- [14] R. Bellman, *Dynamic programming*. Courier Corporation, 2013.
- [15] E. Al'brekht, "On the optimal stabilization of nonlinear systems," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 25, no. 5, pp. 1254 – 1266, 1961. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892861900053>
- [16] C. S. Jeong, E. Yaz, A. Bahakeem, and Y. Yaz, "Nonlinear observer design with general criteria," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 2, no. 4, pp. 693–7042, 2006.
- [17] D. Jacobson, "Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 18, no. 2, pp. 124–131, 1973.
- [18] P. Dai Pra, "A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes," *Applied Mathematics & Optimization*, vol. 23, no. 1, pp. 313–329, 1991.
- [19] F. Guerra and L. M. Morato, "Quantization of dynamical systems and stochastic control theory," *Physical review D*, vol. 27, no. 8, p. 1774, 1983.
- [20] E. Nelson and E. Nelson, *Quantum fluctuations*. Princeton University Press Princeton, 1985.
- [21] B. A. Francis, "Lecture notes in control and information sciences," 1987.
- [22] P. Whittle, "A risk-sensitive maximum principle," *Systems & Control Letters*, vol. 15, no. 3, pp. 183–192, 1990.
- [23] W. H. Fleming and W. M. McEneaney, "Risk-sensitive control on an infinite time horizon," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 33, no. 6, pp. 1881–1915, 1995.
- [24] W. M. McEneaney, "Robust/game-theoretic methods in filtering and estimation," in *Proc. Symposium on Advances in Enterprise Control*, 1999, pp. 3–10.
- [25] K. Tan, T. Lee, and X. Jiang, "On-line relay identification, assessment and tuning of pid controller," *Journal of Process control*, vol. 11, no. 5, pp. 483–496, 2001.
- [26] O. Ekren, S. Sahin, and Y. Isler, "Comparison of different controllers for variable speed compressor and electronic expansion valve," *International Journal of Refrigeration*, vol. 33, no. 6, pp. 1161–1168, 2010.
- [27] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Journal of basic engineering*, vol. 83, no. 1, pp. 95–108, 1961.
- [28] W. M. McEneaney, "Robust/h filtering for nonlinear systems," *Systems & control letters*, vol. 33, no. 5, pp. 315–325, 1998.
- [29] M. V. Basin and M. A. Garcia, "Optimal filtering and control for third degree polynomial system," *DYNAMICS OF CONTINUOUS DISCRETE AND IMPULSIVE SYSTEMS SERIES B*, vol. 10, pp. 663–680, 2003.
- [30] L. El Ghaoui and G. Calafiore, "Robust filtering for discrete-time systems with bounded noise and parametric uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 7, pp. 1084–1089, 2001.
- [31] M. S. Mahmoud, P. Shi, and A. Ismail, "Robust kalman filtering for discrete-time markovian jump systems with parameter uncertainty," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 169, no. 1, pp. 53–69, 2004.
- [32] X. Yin, "Initial-state detectability of stochastic discrete-event systems with probabilistic sensor failures," *Automatica*, vol. 80, pp. 127–134, 2017.
- [33] D. Chen and L. Xu, "Optimal kalman filtering for a class of state delay systems with randomly multiple sensor delays," in *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014. Hindawi, 2014.
- [34] M. A. Alcorta-García, M. Basin, and Y. G. A. Sanchez, "Optimal risk-sensitive filtering and control for linear stochastic systems," in *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*. IEEE, 2008, pp. 43–48.
- [35] M. A. Alcorta-García, S. G. A. Rostro, and M. T. Torres, "Optimal risk-sensitive filtering for system stochastic of second and third degree," *Intelligent Control and Automation*, vol. 2, no. 01, p. 47, 2011.
- [36] M. A. A. García, S. G. A. Rostro, Y. N. Alemán, N. E. Villarreal, and H. R. F. Curiel, "Application of nonlinear risk-sensitive optimal control equations to excitable noise system," in *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2014 19th International Conference On*. IEEE, 2014, pp. 862–867.
- [37] "Filtrado no lineal recursivo de máxima verosimilitud," *Journal of Optimization Theory and Applications*.
- [38] M. Donsker and S. Varadhan, "Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large timeii," *Communications on pure and applied Mathematics*, vol. 29, no. 4, pp. 389–461, 1976.
- [39] M. D. Donsker and S. S. Varadhan, "Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time. i," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 28, no. 1, pp. 1–47, 1975.
- [40] M. Donsker and S. Varadhan, "Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time. ii," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 28, no. 2, pp. 279–301, 1975.
- [41] W. H. Fleming and W. M. McEneaney, "Risk sensitive optimal control and differential games," in *Stochastic theory and adaptive control*. Springer, 1992, pp. 185–197.
- [42] S.-Z. Zhao, M. W. Irudayarajan, S. Bakur, and P. N. Suganthan, "Multi-objective robust pid controller tuning using two libras multi-objective particle swarm optimization," *Information Sciences*, vol. 181, no. 16, pp. 3323–3335, 2011.
- [43] C. A. Smith, A. B. Corripio, and S. D. M. Basurto, *Control automático de procesos: teoría y práctica*. Limusa, 1991, no. 968-18-3791-6. 01-A3 IJU. AL-PCS. 1.
- [44] M. A. Alcorta-García *et al.*, "Optimal filtering for linear systems: Kalman-bucy versus risk-sensitive," in *Innovative Computing, Information and Control, 2007. ICIC'07. Second International Conference on*. IEEE, 2007, pp. 353–353.

APLICACIÓN DEL FILTROS ÓPTIMOS
RISK-SENSITIVE Y KALMANBUCY
EXTENDIDO A UN SISTEMA DE
CALEFACCIÓN

APLICACIÓN DEL FILTROS ÓPTIMOS RISK-SENSITIVE Y KALMAN- BUCY EXTENDIDO A UN SISTEMA DE CALEFACCIÓN

Mirna Maricela Martínez Flores,* María Aracelia Alcorta García,* Santos Méndez Díaz,** Simón Martínez Martínez,** Arturo Morales Fuentes,** Nora Elizondo Villarreal,* Facundo Cortés Martínez,** Alfredo Alanís Duran,*

**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León
Pedro de Alba S/N, C.P. 66455, San Nicolás de los Garza, N. L., México
mirna_mt@gmail.com, maaracelia@gmail.com, nelizond@yahoo.com,*

***Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León
Pedro de Alba S/N, C.P. 66455, San Nicolás de los Garza, N. L. México
santos.mendez@uanl.edu.mx, simon.martinez@uanl.edu.mx, arturo.moralesfn@uanl.edu.mx*

****Facultad de Ingeniería Ciencias y Arquitectura, Universidad Juárez del Estado de Durango
Av. Universidad S/N, Fracc. Filadelfia, 35070 Gómez Palacio, Dgo., México facundo_cm@yahoo.com.mx*

Resumen: En este trabajo se presenta una comparación de las ecuaciones de filtrado estocástico Risk-Sensitive para sistemas polinomiales de primer grado, y las ecuaciones de filtrado de Kalman-Bucy extendidas. Estas ecuaciones son aplicadas a un sistema dinámico que representa a un proceso de calefacción, el cual consistente en una resistencia eléctrica como único componente. Los disturbios, son representados por medio de ruido blanco de Gauss en la ecuación de estado y de observaciones, el parámetro ϵ , el cual es el coeficiente del término de difusión en la ecuación del estado y de observaciones es asignado con diferentes valores afectando la intensidad del ruido. Se hace una comparación del estimado Risk-Sensitive con el estimado del filtro de Kalman-Bucy extendido para cada valor del parámetro ϵ . Los resultados obtenidos se presentan en una tabla mostrándose la eficiencia de las ecuaciones Risk-Sensitive sobre las de Kalman-Bucy extendido, respecto al error y a los valores de la función criterio a minimizar en tiempo final.

Palabras clave: Resistencia eléctrica, control, filtro Risk-Sensitive, filtro Kalman-Bucy extendido.

1. INTRODUCCION

Las resistencias eléctricas como medio calefactor son ampliamente utilizadas en la electrónica y en la calefacción de ambientes, con el objetivo de mantener cierto nivel de temperatura. Sin embargo la presencia de perturbaciones puede hacer ineficientes su funcionamiento. En este trabajo se plantea el modelo que representa el funcionamiento de una resistencia eléctrica como medio calefactor del interior de un recinto como un sistema dinámico de ecuaciones estocásticas. Algunos trabajos han aplicado diseños de control predictivo a sistemas de control de temperatura y humedad, como se puede ver en (Dost'ál & Ferkl, 2014), además se ha implementado un modelo no lineal de control predictivo para los espacios y sistemas HVAC como se puede ver en (Bing Dong, 2014). En los procesos industriales, el control más utilizado es el PID (Proporcional Integral y Derivativo) como se puede ver en (K.K. Tan, 2001), (Alessandro Beghi, 2011),

también es utilizado la lógica difusa (Schimitz, 2012), (Khayyam, 2013) y además de otros sistemas de control como se puede ver en (Soyguder, 2011). El problema de filtrado óptimo para sistemas lineales estocásticos con observaciones lineales fue resuelto en los años 60s y su solución es conocida como el filtro de Kalman Bucy. Esta solución es obtenida en forma cerrada, sin embargo cuando el sistema dinámico es no lineal la aplicación de las ecuaciones del filtro de Kalman Bucy recibe el nombre de filtro de Kalman Bucy extendido, el cual considera solo los términos lineales del estado (Kalman & Bucy, 1961). Se espera que al aplicar las estrategias de filtrado óptimo Risk-Sensitive para sistemas polinomiales estocásticos, el error, calcula la diferencia entre la temperatura y la temperatura objetivo sea menor que mediante el filtro Kalman-Bucy extendido como se puede ver en (Alcorta-García M., 2007). En este trabajo se aplican las ecuaciones de filtrado óptimo polinomial estocástico Risk-Sensitive y de filtrado

Kalman-Bucy extendido, con la finalidad de comparar ambos estimados con las mismas condiciones del sistema. Entre algunos antecedentes de la teoría de filtrado, el fundamento de la teoría de filtrado óptimo es establecido por Kalman y Bucy en los años 60's (Bucy, 1960), posteriormente se han desarrollado numerosos algoritmos, para diferentes casos, como para sistemas no lineales (W. M. McEneaney, 1998), para sistemas polinomiales (Alcorta-García Ma. Aracelia, 2003), para sistemas discretos (Calafiore, 2001), (Magdi S Mahmouda, 2004) para sistemas con retardos (Yin, 2017), (Xu, 2014) entre otros.

La obtención de las ecuaciones de filtrado polinomial Risk-Sensitive estocástico para ecuaciones de primer grado se puede ver en (Alcorta-García, Basin, & Acosta Sanchez, 2008) para ecuaciones de segundo grado se pueden ver en (Alcorta-García, Anguiano Rostro, & Torres, 2011) y para tercer grado (Alcorta-García, y otros, 2014). En los trabajos mencionados anteriormente se puede ver que el estimado óptimo Risk-Sensitive ofrece mayor eficiencia que el estimado de Kalman-Bucy y el estimado polinomial para sistemas polinomiales de primero, segundo y tercer grados. Al comparar las diferencias entre los estimados de cada filtro y el estado, las diferencias el estimado Risk-Sensitive son más pequeños, para valores del parámetro ϵ grandes (lo cual intensifica el ruido blanco presente en los procesos). Las ecuaciones de filtrado Risk-Sensitive para sistemas polinomiales de primer grado, se aplican de forma explícita en este trabajo y fueron obtenidas en forma cerrada en (Alcorta-García, Anguiano Rostro, & Torres, 2011). El objetivo de este trabajo es verificar la eficacia del filtrado óptimo Risk-Sensitive para sistemas polinomiales de primer grado y filtro Kalman-Bucy extendido para diferentes valores del coeficiente de difusión del término de difusión ϵ , aplicados a un sistema de calefactor donde el actuador es la resistencia eléctrica. Como trabajo a futuro, se pretende considerar el sistema de refrigeración completo, verificando ahorro en el consumo de energía.

La organización de este trabajo se menciona a continuación, en la sección 2 planteamiento del problema en el calefactor, en la sección 3 se presenta la aplicación de las ecuaciones del filtro Risk-Sensitive, en la sección 4 se aplican las ecuaciones del filtro de Kalman-Bucy extendido, los resultados obtenidos en la sección 5. Las conclusiones se presentan en la sección 6.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL CALEFACTOR

En el sistema de calefacción de un recinto, el actuador es la resistencia eléctrica ya que es utilizada para mantener la temperatura interior en un valor determinado. Para lograrlo este actuador se controla apagando la

resistencia cuando la temperatura es mayor a la consigna; en cambio cuando la temperatura sea menor, la potencia eléctrica se alimentará de forma proporcional a la diferencia de la temperatura de consigna y la temperatura interior del recinto.

Aplicando la primera ley de la termodinámica:

$$\dot{E}_{entrada} - \dot{E}_{salida} = \Delta E_{sistema}$$

Consideraciones generales de la dinámica del sistema, el calor transmitido con una velocidad constante (Yunus A. Cengel, 2011)

$$\dot{q} = \dot{m}c_p\Delta T. \quad (1)$$

Donde \dot{m} es el flujo másico, c_p es la capacidad térmica del aire a presión constante.

La ecuación (1) se toma como el calor absorbido por el aire en el interior del recinto.

2.1 Conducción

Aplicando la ley de Fourier en la conducción de calor dentro de una pared, en análisis unidimensional, se obtiene (Yunus A. Cengel, 2011) la ecuación:

$$\dot{q}_{cond} = -kA \frac{T_{int}(t) - T_{ext}}{L}$$

Donde k es la conductividad térmica del material, A es el área superficial de la pared, L es el espesor de la pared, T_{int} es la temperatura de la superficie de la pared interior del recinto, T_{ext} es la temperatura de la superficie de la pared exterior del recinto.

2.2 Convección

Para expresar el efecto global de convección se utiliza la ley de Newton de enfriamiento la cual está dada por:

$$\dot{q}_{conv} = hA(T_s - T_\alpha)$$

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor convectivo, con unidades W/M^2K , A denota el área superficial de la pared, T_s denota la temperatura de la superficie, T_α denota la temperatura del fluido.

2.3 Concepto de resistencia térmica:

Se plantea la ley de Fourier desde un punto de vista conceptual.

El flujo de calor debe de ser el mismo en cada sección. El proceso de transferencia de calor se puede representar por el circuito de resistencias como se puede ver en (Holman, 1999) donde la transferencia de calor global se calcula como:

$$\dot{q}_{total,paredes} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{AR_{eq}}. \quad (2)$$

Donde:

$$AR_{eq} = \frac{1}{hA} + \frac{L}{KA} + \frac{1}{hA}$$

2.4 Trabajo eléctrico

Cuando los electrones cruzan las fronteras de un sistema realizan un trabajo eléctrico sobre este. En este campo eléctrico, los electrones de un alambre se mueven por el efecto de las fuerzas electromotrices, por lo tanto realizan un trabajo. Cuando N Coulombs de carga eléctrica se mueven a través de una diferencia de potencia V , el trabajo eléctrico realizado está dado por

$$W_e = VN$$

El cual también se puede expresar en forma de tasa como:

$$\dot{W}_e = VI \quad (3)$$

Donde \dot{W}_e es la potencia eléctrica e I es el número de carga eléctrica que fluye por la unidad de tiempo, es decir, la corriente, como se puede observar en (Cengel, 2012).

Al sumar el calor del aire del recinto (1), el calor total de la pared (2) y el trabajo eléctrico (3) se obtiene la ecuación que describe el comportamiento del sistema de calefacción, la cual es dada por:

$$\dot{m}c_p \Delta T - \frac{(T_{int}(t) - T_{ext})}{AR_{eq}} = W_e. \quad (4)$$

Tomando en cuenta que ΔT es el cambio de la temperatura del aire en el interior del recinto, por lo que varía en función del tiempo, (4) toma la forma:

$$\dot{m}c_p \frac{dT_{int}(t)}{dt} - \frac{(T_{int}(t) - T_{ext})}{AR_{eq}} = W_e.$$

Tomando solo el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{(T_{int}(t) - T_{ext})}{AR_{eq}} = \dot{m}c_p \frac{dT_{int}(t)}{dt}$$

Despejando $\frac{dT_{int}}{dt}$

$$\frac{1}{\dot{m}c_p} \left(\frac{T_{int}(t) - T_{ext}}{AR_{eq}} \right) = \frac{dT_{int}(t)}{dt} \quad (5)$$

Agregando el componente de las perturbaciones como ruido blanco Gaussiano con coeficiente de difusión $\sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}$, donde $\gamma = 2$ es una medida de nivel de atenuación del

término de difusión (véase (McEneaney, 1999) para más detalles) y ϵ es el parámetro de intensidad del proceso de difusión, (5) toma la forma:

$$\frac{dT_{int}(t)}{dt} = \left[\frac{-T_{ext}}{(\dot{m}c_p)AR_{eq}} \right] + \left[\frac{1}{(\dot{m}c_p)AR_{eq}} \right] T_{int}(t) \quad (6)$$

$$+ \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW1(t)$$

La ecuación de observaciones es lineal y está dada por:

$$\dot{Y}(t) = T_{int}(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW2(t). \quad (7)$$

Donde $T_{int}(t) \in \mathbb{R}$, es la variable de estado, $dW1(t)$ y $dW2(t) \in \mathbb{R}$ son los términos de difusión, representados por proceso Browniano, independientes entre si y de la condición inicial $T_{int}(0)$.

3. APLICACION DEL FILTRO RISK-SENSITIVE

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia continua por la derecha, creciente de σ -álgebras $F(t)$, $t \geq 0$, y sea $(W(t), F(t), t \geq 0)$ un proceso $F(t)$ adaptado de Wiener. Considerando los procesos aleatorios no observables $F(t)$ -medibles $x(t)$ gobernado por las ecuaciones de estado polinomial de primer grado:

$$dx(t) = f(t, X(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW(t). \quad (8)$$

Tomando en cuenta que:

$$f(t, X(t)) = A_0(t) + A_1(t)X(t). \quad (9)$$

Donde $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_0(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_1(t) \in M_{n \times n}$ con elementos en los reales. Sustituyendo (9) en (8) y el estado $X(t)$ por $T_{int}(t)$, se obtiene la ecuación dinámica estocástica, no lineal para el sistema de calefacción:

$$\frac{dT_{int}(t)}{dt} = A_0(t) + A_1(t)T_{int}(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW(t). \quad (10)$$

$$\text{Donde } A_0(t) = \left[\frac{-T_{ext}}{(\dot{m}c_p)AR_{eq}} \right], A_1(t) = \left[\frac{1}{(\dot{m}c_p)AR_{eq}} \right].$$

La solución al problema de filtrado del sistema (10) está dada por la ecuación del estimado $\hat{C}(t)$, la cual es la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{C}(t) = & A_0 + A_1^T(t)C(t) \\ & - Q^{-1}(t)E_1(t)(dy - E_1(t)C(t) \\ & - E(t)), \end{aligned}$$

donde $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -A(t)^T Q(t) - Q(t)A_1(t) + Q(t)^T Q(t) \\ & - E_1(t)^T E_1(t), \end{aligned}$$

con $C(t) \in \mathbb{R}^n$, $Q(t) \in M_{n \times n}$, como se puede ver en (Alcorta-Garcia M., 2007).

Aplicando a (7) y (10), la ecuación del estimado del estado $C(t)$ está dada por la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{C}(t) = & \frac{1}{mc_p} \left(\frac{-T_{ext}}{AR_{eq}} \right) + \frac{1}{mc_p} \left(\frac{1}{AR_{eq}} \right) C(t) - \\ & Q^{-1}(t)[1(dy - C(t) - 1)](t). \end{aligned} \quad (11)$$

Donde $Q(t)$ es la solución de la siguiente ecuación de Riccati.

$$\dot{Q}(t) = -2Q(t) \frac{1}{mc_p} \left(\frac{1}{AR_{eq}} \right) + Q^T(t)Q(t) - 1. \quad (12)$$

Con $Q(t) \in M_{n \times n}$, en este caso $n = 1$.

Cuyos puntos de equilibrio son $Q_1 = -0.9844$ y $Q_2 = 1.0158$.

La función costo exponencial cuadrática J a minimizar está dada por:

$$J = \epsilon \log E \exp \left[\frac{1}{\epsilon} \int_0^T \left((X(t) - C(t))^T R(t) (X(t) - C(t)) \right) dt \right] / Y(t). \quad (13)$$

Donde $R(s) = 1$, E denota el valor esperado condicional, dadas las observaciones $Y(t)$. El problema del filtro consiste en obtener la ecuación de un estimado del estado el cual minimiza el error y los valores del criterio exponencial cuadrático J en tiempo final. Las ecuaciones (7), (10), (11), (12) y (13) son simuladas mediante Simulink. Los resultados obtenidos de la simulación son presentados en la tabla 2 donde se puede apreciar los valores del error y el criterio J para diferentes valores de ϵ .

4. APLICACIÓN DEL FILTRO KALMAN-BUCY EXTENDIDO

Aplicando las ecuaciones de filtro Kalman-Bucy extendidas de (Jazwinski, 1998) en (7) y (10).

La ecuación del estimado del estado esta dado por:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{63.5} \hat{x}(t) + P(t)[Y(t) - \hat{x}(t)]. \quad (14)$$

Donde $P(t)$ es la solución de la ecuación de covarianza del error :

$$\dot{P}(t) = \frac{2}{63.5} P(t) - P^2(t) + \frac{\epsilon}{2y^2}. \quad (15)$$

En la tabla 1 se muestran los puntos de equilibrio para cada valor de ϵ . P1 y P2 son las soluciones de (15).

Tabla 1: Puntos de equilibrio del filtro Kalman-Bucy según los valores de ϵ

ϵ	P1	P2
0.001	0.03506	-0.0035
0.01	0.05445	-0.0229
0.1	0.1286	-0.0971
1	0.3696	-0.3381
10	1.1338	-1.1023
100	3.5513	-3.5198
1000	11.196	-11.1646
10000	35.371	-35.3395

Las ecuaciones (7), (10), (14), (15), (13) son simuladas en Simulink, los resultados se muestran.

5. RESULTADOS

El tiempo de simulación para cada sistema de ecuaciones es $0 \leq t \leq 100$. Los valores del error para cada estimado: Kalman-Bucy extendido y Risk-Sensitive se muestra en la tabla 2. En la tabla 2 se puede observar que los errores (diferencia entre el estado y el estimado obtenido por cada filtro) para ambos estimados son más pequeños para el estimado Risk-Sensitive, similarmente, los valores del criterio exponencial cuadrático J son menores para las ecuaciones de filtrado Risk-Sensitive.

Tabla 2: Valores de errores para los estimados de Kalman-Bucy (14) y Risk-Sensitive (11) y de la función criterio cuadrático a minimizar $J(13)$, para diferentes valores del parámetro ϵ .

ϵ	error Kalman-Bucy extendido	error Risk-Sensitive	J-KB-E	J-R-S
0.001	-14.58	-1.09E-5	0.0125	4.19E-6

0.01	-9.329	-3.44E-5	0.0865	4.19E-5
0.1	-3.303	-0.000108	0.288	4.19E-4
1	-1.049	-0.000344	0.544	4.19E-3
10	-0.3268	-0.001088	0.124	0.04188
100	0.9282	-0.00344	96.15	0.4188
1000	10.53	-0.01088	3939.7	4.1885
10000	49.98	-0.034	8.6E+4	41.885

En la figura 1 se observa la tendencia del estimado Risk-Sensitive vs Kalman-Bucy extendido donde se puede apreciar que el estimado Risk-sensitive es más próximo a

los valores del estado para $\epsilon = 1000$, en cambio en la gráfica del estimado Kalman-Bucy extendido sus oscilaciones son de mayor amplitud, bajo las mismas condiciones que el filtro Risk-Sensitive.

En la figura 2 se presentan las gráficas del error para el estimado Risk-Sensitive y estimado Kalman-Bucy extendido para $\epsilon = 1000$, y $t \in [0, 30]$ con la finalidad de mostrar mas a detalle. Se puede apreciar que el error para el estimado Kalman Bucy extendido oscila en un intervalo de -10 a +10, a diferencia del error del estimado Risk-Sensitive, el cual oscila entre -1 y 1.

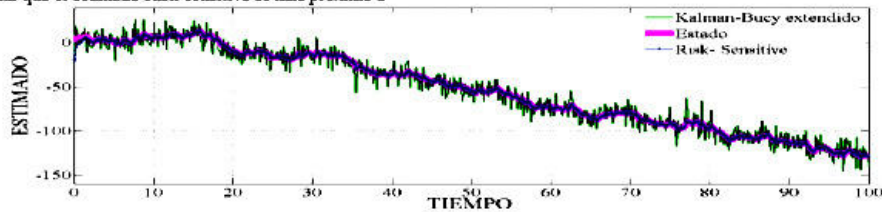


Figura 1: Gráfica de los estimados Kalman-Bucy extendido (14) y Risk-Sensitive (11), con $\epsilon = 1000$.

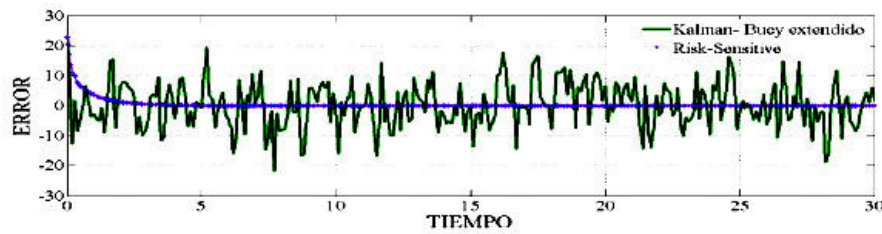


Figura 2: Gráfica de los errores de los estimados Kalman-Bucy extendido (14) y Risk-Sensitive (11), con $\epsilon = 1000$.

5. CONCLUSIONES

Se aplicaron las ecuaciones de filtrado óptimo Risk-Sensitive y de Kalman-Bucy extendido a un modelo de calefacción, representado mediante una resistencia eléctrica. Se puede observar que el estimado Risk-Sensitive es mejor que el Kalman-Bucy extendido ya que los valores de la función exponencial cuadrática a minimizar J son menores para el estimado Risk-Sensitive así mismo, el error es más pequeño, bajo las mismas condiciones y todos los valores del parámetro ϵ . Se calculó la desviación estándar del error de cada uno de los filtros siendo estas $\sigma = 0.905$ para el estimado Risk-Sensitive y $\sigma = 18.416$ para el estimado de Kalman-Bucy extendido lo cual confirma lo mencionado anteriormente.

REFERENCIAS

Alcorta-García MA, B. M.-S. (2009). Risk-Sensitive approach to optimal filtering and control for linear Stochastic Systems.

International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 5 (6), 1—08-051.

Alcorta-García MA, B. M.-S. (2009). Risk-Sensitive approach to optimal filtering and control for linear Stochastic Systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 5 (6), 1—08-051.

Alcorta-García, M. A., Basin, M., & Acosta Sanchez, Y. (9-11 de December de 2008). Optimal Risk-Sensitive Filtering and Control for Linear Stochastic Systems. *IJICIC*.

Alcorta-García, M. (2007). Optimal Filtering for Linear Systems: Kalman-Bucy versus Risk-Sensitive.

Alcorta-García, M. V. (2003). Optimal Filtering and Control for Third Degree Polynomial Systems. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, 10 (5), 663-680.

- Alcorta-García, M., Rostro, S. G., Anguiano, Alemán, Y. N., Villarreal, N. E., & Cantù, H. R. (2014). Application of nonlinear Risk-Sensitive optimal control equations to excitable noise system. *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, Miedzyzdroje, Poland: IEEE.
- Alcorta-García, S. G. (2011). Optimal Risk-Sensitive Filtering for System Stochastic of Second and Third Degree. *Intelligent Control and Automation*, 2, 47-56.
- Alessandro Beghi, L. C. (2011). On-line, auto-tuning control of Electronic Expansion Valves. *International Journal of refrigeration*, 34, 1151-1161.
- B. Saleh, A. A. (2015). Flow Control Methods in Refrigeration Systems: A Review. *International Journal of Control, Automation and System*, 4 (1).
- Bellman, R. (2003). *Dynamic programming*.
- Bernhard, B. (2008). *H ∞ optimal control and related minmax design problems*. Modern Classics Birkhäuser.
- Bucy, R. E. (1960). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Journal of Basic Engineering*, 83 (1), 95-108.
- Calafiore, L. E. (2001). Robust Filtering for Discrete-Time Systems with Bounded Noise and Parametric Uncertainty. *IEEE Transactions on automatic control*, 46 (7), 1084-1089.
- Cengel, Y. (2012). *Termodinamica*. México D.F.: Mc Graw Hill.
- Dost' al, J., & Ferkl, L. (2014). Model Predictive Control of Climatic Chamber with On-off Actuators. *Preprints of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control*. Cape Town, South Africa.
- Fleming, W. H. (1992). *Risk-Sensitive optimal control and differential games*. (T. E.-D. Duncan, Ed.) Berlin, Germany: Springer Berlin Heidelberg.
- Francis, B. A. (1987). A course in H ∞ control theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 88, .
- Holman. (1999). *Transferencia de calor* (8 $^{\circ}$ ed.). Madrid, España: Mc Graw Hill.
- Jazwinski, A. H. (1998). *Stochastics Processes and Filtering Theory*. New York: Dover Publications Inc.
- K.K. Tan, T. L. (2001). On-line relay identification, assessment and tuning of PID. *Journal of Process Control II*, 483-496.
- Kalman, R., & Bucy, R. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Transactions, Part D Journal of Basic Engineering*, 83, 95-108.
- Khayyam, H. (2013). Adaptive intelligent control of vehicle air conditioning system. *Applied Thermal Engineering*, 51, 1154-1161.
- Magdi S Mahmouda, P. S. (2004). Robust Kalman filtering for discrete-time Markovian jump systems with parameter uncertainty. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 169 (1), 53-69.
- McEneaney, W. (1999). Robust/game-theoretic methods in filtering and estimation. *Proc. DARPA Symposium an Advances in Enterprise Control*.
- McKean, H. D. (1975). *Fourier series and integrals*. Academic Press.
- R. E. Mortensen. (1968). Maximum Likelihood Recursive Nonlinear Filtering. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2 (6), 386-394.
- Runolfsson, T. (1990). Stationary risk-sensitive lqg control and its relation to lqg and H ∞ -control. *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, (págs. 1018-1023).
- Schimitz, J. E. (2012). Fuzzy-PID controller applied to a refrigeration system. 20.
- Soyguder. (2011). Intelligent system based on wavelet decomposition and neural network for predicting of fan speed for energy saving in HV AC system43.. *Energy and Buildings*, 43, 814-822.
- W. M. McEneaney. (1998). Robust H ∞ Filtering for Nonlinear Systems. *Systems and Control Letters*, 33 (5), 315-325.
- Whittle, P. (1990). *Risk-sensitive optimal control*. John Wiley and Sons.
- Xu, D. C. (2014). Optimal Kalman Filtering for a Class of State Delay Systems with Randomly Multiple Sensor Delays. *Abstract and Applied Analysis, Hindawi*, ID 716716, 10 pages.
- Yin, X. (2017). Initial-state detectability of stochastic discrete-event systems with probabilistic sensor failures. *Automatica*, 80, 127-134.
- Yunus A. Cengel, A. J. (2011). *Transferencia de calor y masa* (Cuarta ed.). México: Mc Graw Hill.

IMPLEMENTATION OF CONTROL
ALGORITHMS IN A CLIMATIC
CHAMBER

2016 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering

Implementation of control algorithms in a climatic chamber

Mirna Maricela Martínez Flores^a, Santos Mendez Díaz^b, María Aracelia Alcorta García^a,
Nora Elizondo Villarreal^a, Facundo Cortés Martínez^c, Simon Martínez Martínez^b,
Arturo Morales Fuentes^b, Luis Gerardo Garza Garza^a

^aFacultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León
Pedro de Alba S/N, C.P. 66455, San Nicolás de los Garza, N. L., México
mirna_mtz@gmail.com, maaracelia@gmail.com, nelizond@yahoo.com,

^bFacultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León
Pedro de Alba S/N, C.P. 66455, San Nicolás de los Garza, N. L., México
santos.mendezdz@uanl.edu.mx, simon.martinez@uanl.edu.mx, arturo.moralesfu@uanl.edu.mx

^cFacultad de Ingeniería Ciencias y Arquitectura, Universidad Juárez del Estado de Durango
Av. Universidad S/N, Fracc. Filadelfia, 35070 Gómez Palacio, Dgo., México
facundo_cm@yahoo.com.mx

Abstract

The climatic chambers are enclosures that provide a desired climate regardless of the outside environment. They are frequently used in research and industry, durability testing of materials, devices or appliances. FIME-UANL developed a climatic chamber; it is located in the climate-controlled laboratory. This climatic chamber has the facility of electronic expansion valve (EEV), electronic hot gas valve bypass (EHGB), pressure regulating valve (EPR). The goal of this work is to develop and implement control algorithms, that to improve the performance of the cooling system of the climatic chamber without compromising its performance in terms of accuracy and stability. In addition to assessing the energy performance through the pressure ratio due to the use of control strategies in the cooling system of the climatic chamber using cooling system COP and pressure ratio as a comparator.

1. Introduction

FIME-UANL has a climate-controlled chamber, which can control temperature and possibly humidity. It comprises a refrigeration system and a heating system [1]. To allow operation over a wide temperature range. The refrigeration system consists of these components: the compressor, condenser, evaporator, interconnecting piping and electronically controlled valves for controlling refrigerant flow. This valves are, Electric Expansion Valve (EEV), Electric Hot Gas Bypass valve (EHGB), Electric Pressure Regulating valve (EPR). The components of the refrigeration system, the compressor is who consumes more energy during operation. The operating conditions of the compressor are directly influenced by the operating conditions in the evaporator and

condenser, in addition to the pressure ratio. The pressure ratio is the condition that most influences the evaporation pressure. For the temperature control, use the conventional on/off control way has many drawbacks such as low control accuracy, high-energy consumption, and a short lifetime of a compressor due to the frequent start and stop operations. Two alternative capacity controls for the oil cooler, hot-gas bypass (HB) and the variable speed compressor (VSC), have been developed to solve those problems. The HB control scheme can be readily realized by adding one adjustable valve to the conventional on/off control system to control target temperature like it is presented in [2]. Is important also the superheat is maintained as a certain value. If the superheat is below 0°C, this system is in danger of liquid compression in a compressor, and at a high temperature, the COP of the system will decrease. Therefore, the superheat should be controlled for both, preventing the liquid back phenomenon and ensuring maximum COP in this control scheme, as you can see in [2]. Frost build-up blocks the gap between fins and decreases the air flow rate, and the heating capacity and COP of air-source heat pump become lower. The hot-gas bypass defrosting (HGBD) is a potential method of frost removal. However, the papers studying the HGBD cycle are much less, see for example [3]. For effective control of evaporation pressure, the variables required for identification of the system are needed to be measured. The state of the art heat pumps measure the refrigerant temperatures at the inlet and outlet of the compressor, the evaporating temperature of the refrigerant, and the condensing temperature and use them to control evaporation temperature by changing the evaporation pressure EPCT (evaporation pressure control based on evaporator outlet temperature reading) EPCT [4]. However, as such change

sensitively following the change in the outdoor and indoor temperatures, it is difficult to achieve quick and accurate control for the evaporation pressure. In order to supplement the weak point of EPCT method and to achieve efficient control of the evaporation pressure, a new method of an evaporation pressure control based on the evaporator outlet pressure reading (EPCP) method was developed. The EPCP method uses the refrigerant pressure at the outlet of the evaporator as the control input. If the pressure is measured and it is used as the control input, the evaporation pressure can be more accurately controlled than when temperature is used as the control input. If evaporation pressure is controlled to be the optimum evaporation pressure matching the load, the indoor air temperature would be stabilized and energy efficiency would be improved. The studies, however, which have applied the EPCP method to the actual heat pump, is rare. Therefore, studies are required to be conducted to evaluate the EPCP method and optimize the method for application to the heat pump as can be seen in [4]. The control method "On-Off" was the most widely used technique for controlling conventional refrigeration systems [5]. This method has the inconvenient because has the consumption peak is too high during their state transitions. The PID controller has been widely used in heating, air conditioning systems and refrigeration systems [5].

2. Description of climatic Chamber of FIME-UANL



Figure 1 Image of the climatic chamber FIME-UANL.

The climate chamber located in the climate controlled laboratory from FIME-UANL shown in Figure 1 has a space of 3.4 x 3.4 x 3.4 meters and has a temperature range from 0 to 45 ° C, plus four stop stations installed force to evaluate refrigerator up 29ft³. The temperature control is performed by regulating the flow of refrigerant and a current variation from heating element.

Final control elements relevant to actuators include heating element, electric expansion valve and bypass hot gas valve. To control the refrigerant flow is used an electric expansion valve (EEV) and the bypass hot gas valve (EHGB). The EEV is programmed with a restriction known as superheat "There is evaporation of refrigerant in whole question but without excessive overheating; as this could cause wear on the compressor lubricating oil. In the (EHGB) short-circuit is performed in the cooling system by injecting hot steam in the evaporator inlet, reducing the capacity of the evaporator absorbing heat sensitive enclosure. Both valves operate using stepper motors, controlling the number of steps is handling the valve opening. It has installing the EPR valve and a free passage to evaporator refrigerant compressor suction, as shown in Figure 2.

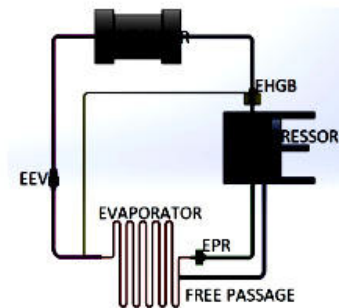


Figure 2 Diagram of the installation of the actuators of the cooling system

The control of the heating system for temperature elevation has a heater element of 10kW; the power supply is regulated using a SCR. The SCR (SCR) is controlled by 4-20mA signal from the module 9265. The following technical specifications refer to the SCR: Inputs Supply Voltage 110/220/440 VAC, environment temperature from 30 to 120 degrees Celsius, convection cooling. The control of the heating system for temperature elevation has a heater element of 10kW; the power supply is regulated using a SCR. The SCR (SCR) is controlled by 4-20mA signal from the module 9265. The following technical specifications refer to the SCR: Inputs Supply Voltage 110/220/440 VAC, environment temperature from 30 to 120 degrees Celsius, convection cooling.

The data acquisition system include a NI 9227 module for current measurements, voltage measuring is using the NI9225 module, the temperatures inputs by NI 9214. The system

include a pressure sensor with range from 0-150 psi, a pressure sensor with range from 150-300 psi and a thermistor sensor (2k) with range from -40 to 160 degrees Fahrenheit.

3. Control strategies of the refrigeration systems

The control manual (open loop) was executed in the refrigerator system to characterize the functionality and get the reaction curve of the process variables of temperature and pressure in the evaporator and the compressor output, in each of the actuators like electric expansion valve (EEV), the pressure regulating valve evaporator (EPR) and the bypass hot gas valve (EHGB). The reaction temperature in the evaporator and the pressures of high and low is analyzed, thereby determining an algorithm suitable control that allows stability in set point temperature, optimizing the flow of refrigerant, controlling superheat (SH) and obtaining an improved efficiency in the refrigeration cycle. With open loop tests were obtained dead time, process time and the total time of each of the actuators of the cooling system and the heater element, the gain of each of the actuators is calculated. Applying regulatory control tuning obtain the controller gain, integral time and derivative time, these values were used to determine the PID from every valves of the refrigerant system and heating of the climatic chamber.

DESIGN #1: EEV (ELECTRIC EXPANSION VALVE).

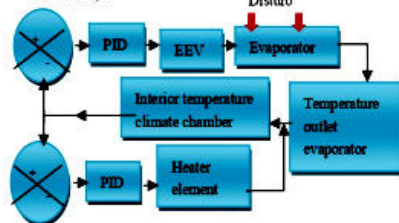


Figure 3 Diagram control design #1 EEV

To control the climatic chamber is implemented a first control algorithm design consisting of a heater element and an electric expansion valve. As shown in Figure 3 design #1 with a PID the heater element is controlled and another PID control was implemented in the electric expansion valve (EEV), the EEV is open all the time and only the opening percentage is modified by the control. The power supply of the heater element, is proportionally and when the temperature inside, is greater than the set point, the heater element is

off.

DESIGN 2: EEV + EHGB (ELECTRIC EXPANSION VALVE AND BYPASS HOT GAS VALVE).

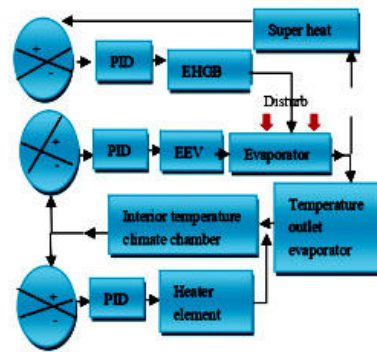


Figure 4 Diagram Control Design #2 EEV + EHGB

As shown in Figure 4, the Design #2 has three PID acting independently and simultaneously.

For temperature control inside of the climatic chamber are used two PID control, one from the heater element and the second is used for the EEV, similar case as design #1. On the other hand, the second PID is controlling the super heat by proportional opening or close of the valve EHGB.

DESIGN 3: EEV + EPR (ELECTRIC EXPANSION VALVE AND PRESSURE CONTROL VALVE EVAPORATOR).

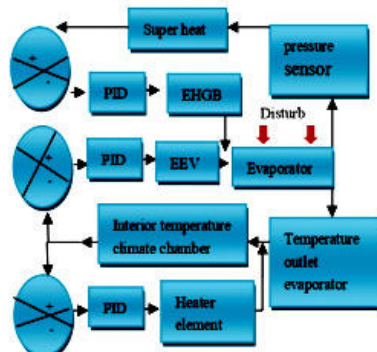


Figure 5 Diagram Control Design #3 EEV + EPR

As shown in Figure 5 Design #3 also has three PID control acting independently and simultaneously. Two PID as in the previous

designs are controlling the interior temperature of the climatic chamber by the partial opening of the EEV and supplying power of heater element. The other PID is controlling the superheat by the partial closure of the pressure-regulating valve (EPR) in order to achieve the pressure according to the saturation temperature plus 10 °F of superheat that is set as set point of the pressure.

4. Results and discussion

To the control of the temperature inside of the climatic chamber for the 3 designs are using the same actuators, the heater element, the electric expansion valve (EEV) that the opening is conditioned by supplying current 4 to 20 mA.

The temperature variation between the set point and the measured value from the climatic chamber is the error, if the error is positive, the temperature will be decreased. The error of the set point from the temperature is calculated as the difference between the real measured inside from the climatic chamber and the set point value. If the error is positive will be necessary decrease the temperature and the heater element will be off and the electric expansion valve will open proportionally according to the PID control by this way decrease to reach the value of the stability (SPNT). If the error is negative, the temperature needs increase the element of heater turning on; the electric expansion valve will close it proportionally.

The PID control from the refrigeration system is conditioning the actuators according to the design. Superheat (SH) is controlled according to the design and function of the hot gas valve bypass (EHGB). Another valve is used for control the SH is the pressure regulating valve (EPR) by EPCP (evaporation pressure control based on the evaporator outlet pressure reading) [4]. Opening the valve by conditioning the power supply 4 -20 mA. SH control is used as a measure of refrigerant system security, so that the operation be safely equipment and not compromise the life of the components of the refrigeration system mainly the compressor. The tests were conducted at an internal temperature of 21 °C as set point of the climatic chamber, with very similar environmental conditions and thermal load began.

As shown in Figure 6, green line is the design 1 the temperature stability of 21 °C set point with a temperature difference relative to the set point +/- 0.4 °C and an average is 21 °C which represents a standard deviation of 0.15. This shows that with this control algorithm has great stability in set point temperature inside the climatic chamber. In

addition it can be seen that the cooling system reacts in less time than heating it for having no actuator in place to compensate for the lack of heat load.

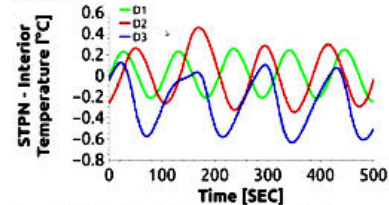


Figure 6 Stability internal temperature climatic chamber

Performing the test of the design 2 the stability was achieved in the internal temperature of the climatic chamber of 21 °C +.5 -.4 with an average value of 20.96 °C and standard deviation of 0.24 as shown in Figure 6 red line.

With Design 3 (D3: EEV + EPR) is the control algorithm in which working with the electronic expansion valve in the cooling system and the heating element for the heating system, but superheat (SH) is controlled by EPCP (control evaporating pressure based on the pressure reading evaporator outlet) conditioning the EPR. Stability was achieved in the temperature inside the climatic chamber of 21 °C +0.15 -0.65 representing an average of 21.23 °C with a standard deviation of 0.25, as shown in Figure 6 blue line.

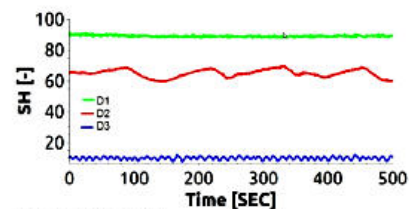


Figure 7 Superheat (SH)

In this test Design 1 EEV (electronic expansion valve) the superheat (SH) is not controlled, only is monitored, It can be seen in Figure 7 green line superheating (SH) 89 °F with a Std Dev 1.17. The superheat is not controlled because this control strategy the opening of the EEV causing fluctuations in spending the refrigerant mass which affects the suction temperature and consequence of superheat the peak observed is due to the opening of the EEV was modified to maintain the required operating conditions.

In the Design 2 EEV + EHGB (electronic

expansion valve and valve hot gas bypass), the superheat (SH) is also controlled by the opening or closing of the EHGB. As shown in Figure 7 red line was achieved having a SH 64 ° F despite a set point SH was 10 ° F, so it stayed 44 ° F above the get but with a lower value of 25 ° F the previous algorithm (D: 1 EEV). By using the EHGB hot gas is injected into the evaporator, inlet thereby achieving a mixture of refrigerant, at high temperature and pressure refrigerant at a lower temperature and pressure, whereby the evaporator first serves as a mixing chamber and then as a heat exchanger. Where the phase change occurs and extract heat from inside the enclosure this causes decreasing refrigerant superheat. In the Design 3 EEV + EPR (electric expansion valve and pressure control valve evaporator), 1 superheat (SH) and as in the previous test the set point of SH 10 ° F, was obtained in average a value of 9.95 ° F represents a standard deviation of 0.92, as shown in Figure 7, blue line. Several flaws are as a result of excessive superheat of the refrigerant in the suction compressor, for this reason the pressure-regulating valve (EPR) it is located at the evaporator outlet, the EPR is conditioning the opening, the pressure is changed and therefore the suction temperature is controlled. It can control the superheat (SH) since this is the difference between the suction temperature and the saturation temperature of the refrigerant the suction pressure. For this condition can be controlled to ensure the life of refrigeration equipment. The superheat is high so this condition cause superheat in the compressor and produce a mixture of refrigerant and oil that produce certain reactions, which are capable of etching copper pipes and mainly electric compressor motors. Design 1, EEV (electronic expansion valve) is not optimal control, have performances in the coolant flow may cause the compressor to work in unsafe conditions and there by shorten the life.

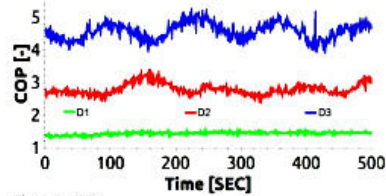


Figure 8 COP

In this test, design 1 EEV (electronic expansion valve). As shown in Figure 8 green line the COP of the refrigeration system had an average value of 1.43. In Design 2 EEV + EHGB (electronic

expansion valve and valve hot gas bypass), the COP of the cooling system continuously is measured and an average of 3.03, was obtained in this experimental run, as shown in Figure 8 red line. You can see that the COP with this control algorithm has a value greater than the design 1, evidence of design 1 and this design were performed under very similar conditions to be comparable so the COP can be attributed to the control strategy. In addition, continuous measuring COP of the cooling system has an average value of 4.55, as shown in Figure 8 blue line remains high value for a refrigeration system.

Table 1 Result comparison among control desings

DESING	Temperature 21 °C		Superheat (SH) 10°F		COP	
	Average	Σ	Average	Σ	Average	
EEV	21.00 °C	3.20	89.47 °F	1.7	1.43	
EEV + EHGB	20.96 °C	0.24	64.04°F	2.6	3.03	
EEV + EPR	21.3 °C	0.25	9.95°F	0.9	4.55	

As shown in Table 1, the analysis for stability in these experimental tests the average indoor temperature is very close to the set temperature even in the designs 1 and 2. This average is practically the set point value and the standard deviations better value obtained with designs 2 and 3 likewise COP values higher order of magnitude have with design 3. The slogan of superheat was achieved with designs 3 as can be seen the impact use of EPR (pressure regulating valve).

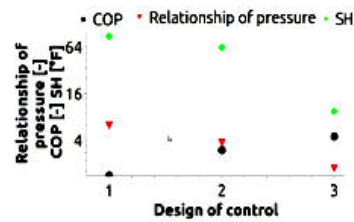


Figure 9 COP, Relationship of pressure and super heat of the three designs of control.

As shown in Figure 9 the tendency of the COP is inverse to the pressure ratio that is if the conjunction as pressure decreases the COP increases and if it is expected this behavior since a

lower ratio less pressure compressor work and the COP should have a greater magnitude. Superheat and pressure ratio have the same tendency, if a design is superheat high-pressure ratio is also higher in that same design.

5. Conclusions

The climatic chamber at the Faculty of Mechanical and Electrical Engineering-UANL, has been working as an experimental facility for validation and implementation of different designs in the control strategies developed this paper. It has been observed in previous studies it is possible to obtain a good stability in the set point temperature inside the climatic chamber, has not been evaluated aspects related to energy consumption. The control elements receive the set point from programmable logic controller via analog inputs that are obtained from different control strategies. In the three control designs implemented in this work, the set point of the temperature inside of the climatic chamber showed a variation of ± 0.7 relative to the set point (STPN), but some oscillations are observed from refrigeration system disturbances from the climatic chamber. When comparing the average and standard deviation of the set temperature all designs or strategies fail to perform well in control of the temperature inside of the climatic chamber. With the super heat, it was possible to reach the set point only when we worked with the pressure-regulating valve (EPR) as this valve controls the pressure at the evaporator outlet, maintaining the suction pressure with less swings. However when it worked with the hot gas bypass valve (EHGB) it failed to reach the value of superheat (SH) desired, because pressure is control it by injecting hot gas to the evaporator inlet causing further oscillations. Besides an increase in temperature involves an increase in pressure on the contrary if required decrease pressure the valve opening is reduced and consequently decreases the flow of coolant at high pressure and temperature from the compressor, but overheating the be high causing greater instability and its control is difficult. Finally when only worked with the EEV design 1 does not has little superheat control, very high values which can cause observed that the oil and coolant mixing and results in the decrease equipment life. After analyzing the average values of super heat experimental evidence it is concluded that only when working with the EPR overheating of the coolant is within the control conditions by what is proposed in the future employ control algorithms that include this valve,

as in the design 3. Moreover, due to the measurement of coefficient of cooling system performance (COP) concludes that the Design 1 has lower COP in the cooling system. It also concludes that the control algorithms that create a lower pressure ratio and greater control in super heat will be those who have the greatest impact in saving energy consumption. This was observed when the algorithm is used Design 3. The control algorithms using the electric regulating valve pressure in the evaporator (EPR) have great advantages over the control algorithms that do not use it, therefore it is recommended to encourage the use of EPR in the control algorithms of the climatic chamber. The use of the EPR as control strategy represents a minor investment effort than Inverter system; however, the amount of energy savings is less. The EPR implementation can be an available saving strategy to be improve in actual operative equipment. As a future work will apply and implement different modern control strategies for evaluating system performance refrigeration and pressure ratio, working on the same designs and cooling system actuators.

6. Bibliography

- [1] Adrián Martín Cobos, Santos Méndez Díaz, Cámara climática de bajo costo para evaluación de refrigeradores, Memorias del XIX Congreso Internacional de la SOMIN, 25-27 septiembre 2013, Pachuca Hidalgo, México. ISBN: 978-607-95309-9-0.
- [2] Ekren Orhan, Comparison of different controllers for variable speed compressor and electronic expansion valve, International Journal of Refrigeration. Elsevier, vol. 33, USA, 2010. pp. 1161-1168. www.elsevier.com/locate/ijrefrig
- [3] Hung Dong, Comparison between hot-gas bypass defrosting and reverse-cycle defrosting methods on an air-to-water heat pump, applied energy. Elsevier, vol. 86, USA, 2009. pp. 1697-1703. www.elsevier.com/locate/apenergy
- [4] Seok-Kown Jeong, Dan-Bi Lee, Comparison of system performance on hot-gas bypass and variable speed compressor in an oil cooler for machine tools Mechanical Science and technology. Springer, vol. 23, USA, 2014. pp. 721-727. www.springerlink.com/content/1738-494x DOI 10.1007/12206-013-1136-1
- [5] Young Sung Parka, Ji Hwn Jeon, Heat pump control based on direct measurement of evaporation pressure to improve energy efficiency and indoor air temperature stability at a low cooling condition, Applied Energy. Elsevier, vol. 132, USA, 2014. pp. 99-107. www.elsevier.com/locate/apenergy