

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL POR MODOS DESLIZANTES PARA GARANTIZAR
LA ESTABILIDAD Y MANIOBRABILIDAD DE VEHÍCULOS
AUTÓNOMOS TERRESTRES EN SITUACIONES CRÍTICAS

POR:

ING. JOSÉ DANIEL AMBRIZ HERNÁNDEZ

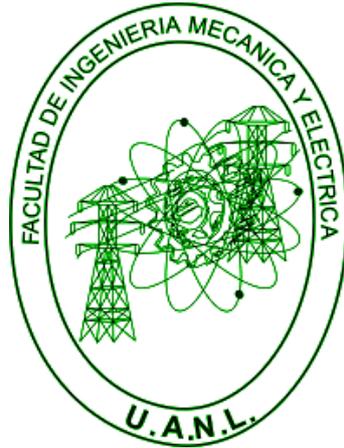
EN OPCIÓN AL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NL

AGOSTO 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL POR MODOS DESLIZANTES PARA GARANTIZAR
LA ESTABILIDAD Y MANIOBRABILIDAD DE VEHÍCULOS
AUTONÓMOS TERRESTRES EN SITUACIONES CRÍTICAS.

POR:

ING. JOSÉ DANIEL AMBRIZ HERNÁNDEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NL

AGOSTO 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis “Control por modos deslizantes para garantizar la estabilidad y maniobrabilidad de vehículos autónomos terrestres en situaciones críticas”, realizada por el estudiante José Daniel Ambriz Hernández, con número de matrícula 1745481, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Evaluación de Tesis

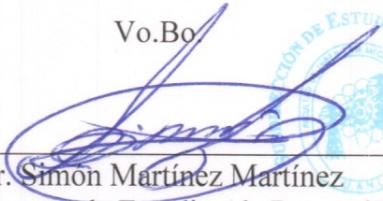
Dr. Jesús de León Morales
Director

Dr. Miguel Ángel Platas Garza
Revisor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez
Revisor

Dra. Dulce Citlalli Martínez Peón
Revisor

Vo.Bo


Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

Institución 190001

Programa 557520

Acta Núm. 4302

Ciudad Universitaria, a 12 de febrero del 2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mis padres, que con todo su amor y apoyo me brindaron una plataforma para crecer, a mis hermanos por su cariño y compañía, a mis amistades por ser mi red de apoyo constante, por ultimo pero no menos importante a mi asesor por su orientación experta y confianza en mi.

Agradezco también la oportunidad de dedicar dos años exclusivamente al estudio de matemáticas aplicadas a la ingeniería. Esta experiencia no solo le otorgó una nueva perspectiva a mi vida, sino que también revitalizó mi carrera de una manera única, devolviéndole vigor como nada más podría haberlo hecho.

Este trabajo es dedicado a todos aquellos que como yo, se conmueven mas allá de las palabras al encontrar los patrones, la relación entre conceptos lejanos y la verdad absoluta de las matemáticas.

“An equation for me has no meaning, unless it expresses a thought of God.”
-Srinivasa Ramanujan.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

CONTROL POR MODOS DESLIZANTES PARA GARANTIZAR LA ESTABILIDAD Y
MANIOBRABILIDAD DE VEHÍCULOS AUTÓNOMOS TERRESTRES EN SITUACIONES
CRÍTICAS

Autor

Ing. José Daniel Ambriz Hernández

Director

Dr. Jesús de León Morales

Monterrey, Nuevo León a 15 de Julio de 2023

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	1
1.3. Definición del problema	2
1.4. Objetivo general, objetivos específicos y metas	3
1.5. Concepto de estabilidad dinámica en vehículos terrestres	3
2. Modelado dinámico del vehículo	6
2.1. Modelo Bicicleta	9
2.2. Sistema de dirección	14
2.3. Modelo dinámico <i>Dual Track</i>	17
2.4. Fuerzas longitudinales	19
2.5. Dinámica de las llantas	20
2.6. Efecto de las fuerzas laterales y longitudinales combinadas	25
2.7. Modelado de fuerzas en las llantas	27
2.8. ABS (sistema de frenos anti bloqueo)	29
2.9. Modelado del sistema de propulsión	31
2.10. Discusión	35
3. Preliminares matemáticos y análisis de estabilidad	36
3.1. Introducción al control por modos deslizantes	36
3.2. Control Equivalente	37
3.3. Fase de alcanzabilidad	38
3.4. Teoría de Lyapunov	39
3.5. Análisis del sistema <i>Dual Track</i>	40
3.6. Discusión	45
4. Diseño de control basado en el algoritmo algoritmo Super Twisting adaptativo (ASTWC)	47
4.1. Construcción matemática	47
4.2. Demostración del teorema del algoritmo Super Twisting adaptativo (ASTWC) .	50
4.3. Diseño de control para el seguimiento de trayectorias en el sistema <i>Dual Track</i>	53
4.4. Discusión	55
5. Resultados y conclusiones	56
5.1. Simulación del ASTWC en modelo <i>Dual Track</i>	56
5.1.1. Referencia deseada para modelo <i>Dual Track</i>	56
5.1.2. Discusión del algoritmo ASTWC en modelo <i>Dual Track</i>	57

5.1.3.	Simulación del algoritmo ASTWC en modelo aumentado <i>Dual Track</i> . . .	63
5.2.	Resultados de simulación del ASTWC en software CarSim	69
5.2.1.	Software de simulación CarSim	69
5.2.2.	Referencia deseada (<i>Yaw Rate</i>) para el simulador	70
5.2.3.	Cotas para referencia deseada	71
5.3.	Validación del algoritmo ASTWC al simulador CarSim	73
5.3.1.	Implementación en Simulink	73
5.3.2.	Validación de ASTWC en vehículo compacto, asfalto seco	76
5.3.3.	Validación de ASTWC vehículo compacto, asfalto mojado	81
5.3.4.	Validación de ASTWC vehículo tipo van, asfalto mojado	84
5.3.5.	Validación de ASTWC vehículo tipo van, prueba sobre hielo	91
5.4.	Discusión	95
5.5.	Conclusiones	95
6.	Apéndice A1/A2	96
6.1.	Grado Relativo y Derivada de Lie	96
6.2.	Puntos de equilibrio y teoría de estabilidad en sentido de Lyapunov	96

Índice de figuras

1.1. Esquema de estabilidad dinámica en vehículos (μ se define como coeficiente de fricción) (Rajamani [41])	4
2.1. Marco de referencia para el vehículo (convención SAE) (Guiggiani [21])	6
2.2. Sistema de referencia fijo en la tierra para el vehículo (Guiggiani [21])	7
2.3. Diagrama esquemático <i>single track</i> (Rajamani [41])	9
2.4. Diagrama esquemático para la dinámica lateral del vehículo (Rajamani [41]) . .	12
2.5. Modelo cinemático 4 ruedas (Rajamani [41])	14
2.6. Configuración trapezoidal (Rajamani [41])	15
2.7. Sistema de dirección (Guiggiani [21])	16
2.8. Diagrama esquemático <i>Dual Track</i> ([34])	17
2.9. Llanta y <i>contact patch</i> (Rajamani [41])	20
2.10. Fuerzas y momentos presentes en la estructura de la llanta (Guiggiani [21]) . .	21
2.11. Deformación en el <i>contact patch</i> (Guiggiani [21])	22
2.12. Relación del <i>slip ratio</i> vs fuerza longitudinal (Guiggiani [21])	23
2.13. Balance de momentos en la rueda (Guiggiani [21])	23
2.14. Curva característica de la fuerza longitudinal (en Newtons) contra el <i>slip ratio</i> en la rueda. (Guiggiani [21])	24
2.15. Comparación de fuerza longitudinal en distintos valores del coeficiente de fricción (Khansari et al. [30])	25
2.16. Círculo de fricción para estimar la fuerza máxima(Rajamani [41])	26
2.17. Diagrama <i>magic formula</i> (Rajamani [41])	28
2.18. Ejemplo de ciclo de trabajo para sistema ABS (Kiencke and Nielsen [31])	30
2.19. Sistema de propulsión / <i>Powertrain</i> (Rajamani [41])	31
2.20. Componentes principales del sistema de propulsión (Rajamani [41])	31
2.21. Descripción a bloques del convertidor de potencia / <i>Torque converter</i> (Rajamani [41])	32
2.22. Flujo de señales en transmisión (Rajamani [41])	33
2.23. <i>Lookup table</i> que relaciona la aceleración requerida con el par entregado (Rajamani [41])	34
2.24. Flujo de señales en el subsistema del motor (Rajamani [41])	34
2.25. Flujo de señales a las llantas (Rajamani [41])	35
3.1. Evolución en el tiempo del sistema (3.42)	45
3.2. Evolución en el tiempo del sistema (3.42) en el caso $\eta_1 = \eta_2$	45
5.1. Diagrama esquemático en Simulink para el control de la dinámica del <i>yaw rate</i> del vehículo usando el control ASTWC	58

5.2. Entradas y salidas de la dinámica del vehículo representada por el modelo Dual Track.	58
5.3. Entradas y salidas del controlador por modos deslizantes (ASTWC).	59
5.4. Bloque generador de referencia del volante y bloque que calcula posición absoluta del vehículo	60
5.5. Señal en lazo abierto del volante	60
5.6. Bloque generador de referencia de <i>yaw rate</i> y bloque generador de par hacia el modelo dinámico	61
5.7. Seguimiento de referencia obtenido	62
5.8. Señal de control generada por ASTWC	62
5.9. Variable deslizante s	63
5.10. <i>Chattering</i> de baja amplitud	63
5.11. Diagrama esquemático del sistema aumentado	64
5.12. Bloques auxiliares añadidos para el caso del modelo aumentado Dual Track	65
5.13. Bloques para sistema de propulsión	65
5.14. Bloques para la simulación de la transmisión	66
5.15. Seguimiento de trayectoria del control ASTWC	66
5.16. Señales de control generadas por ASTWC	67
5.17. Variable deslizante	67
5.18. Velocidad angular en las ruedas	68
5.19. <i>Chattering</i> atenuado presente en control	68
5.20. Interfaz principal software CarSim ([48])	69
5.21. Visualización 3D de la simulación, asfalto mojado	70
5.22. Carsim en Simulink	70
5.23. Modelo en Simulink utilizando simulador CarSim	73
5.24. Bloque del simulador en Simulink	73
5.25. Bloque del control por modos deslizantes ASTWC	74
5.26. Generador de referencia <i>Yaw Rate</i>	74
5.27. Maniobra evasiva <i>Double lane change</i> ([8])	75
5.28. Vehículo Compacto	76
5.29. Parámetros del vehículo.	76
5.30. Sistema de propulsión (<i>PowerTrain</i>)	77
5.31. Configuración de suspensión	77
5.32. Parámetros de las llantas	78
5.33. Configuración del sistema de frenado	78
5.34. Comparación entre vehículo con presencia de control y sin control.	79
5.35. Señales de control generadas por ASTWC.	79
5.36. Variable deslizante s	80
5.37. Parámetro adaptativo Lc	80

5.38. Señal de control ampliada	81
5.39. Visualización en simulador.	81
5.40. Comparación de controladores	82
5.41. Transitorio ampliado	82
5.42. Señal de control ASTWC	83
5.43. Variable deslizando	83
5.44. Parámetro adaptativo Lc	84
5.45. Índice de desempeño (Integral del valor absoluto del error)	84
5.46. Vehículo tipo van	85
5.47. Parámetros del vehículo	85
5.48. Configuración del sistema de propulsión (<i>All wheel drive</i>)	86
5.49. Configuración de la suspensión	86
5.50. Configuración del sistema de frenado	87
5.51. Parámetros en las llantas.	87
5.52. Desempeño de los controles.	88
5.53. Control generado por ASTWC	88
5.54. Superficie deslizando	89
5.55. Parámetro adaptativo Lc	89
5.56. Sobrepasso en seguimiento de trayectoria	90
5.57. Índice de desempeño (Integral del valor absoluto del error)	90
5.58. Seguimiento de trayectoria del control ASTWC	91
5.59. Seguimiento de trayectoria del control <i>Fuzzy</i>	91
5.60. Seguimiento de trayectoria del control Proporcional	92
5.61. Señales de control del ASTWC	92
5.62. Variable deslizando	93
5.63. Parámetro adaptativo Lc	93
5.64. Índice de desempeño (Integral del valor absoluto del error)	94

Capítulo 1. Introducción

1.1. Motivación

De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud (*World Health Organization, WHO*) cada año, millones de accidentes automovilísticos se registran en todo el mundo, muchos de estos accidentes son evitables y comúnmente son resultado de conductores imprudentes o conducción en condiciones ambientales precarias [38]. Con frecuencia los vehículos alcanzan el límite físico de adhesión entre las llantas y el camino debido a las reacciones de pánico del conductor en estas situaciones [51]. Manejar un vehículo en estas condiciones extremas son desconocidas para el conductor promedio, por lo cual, este tiende a empeorar la situación con maniobras poco aptas para la corrección y correspondiente reestabilización.

Por tal motivo, se plantea diseñar una estrategia de control con esta idea en mente, en la cual se previene entrar en este tipo de situaciones. Sistemas como el *Active front steering* (AFS, por sus siglas en inglés) permiten una respuesta notoriamente superior en cuanto al manejo del vehículo, además de asistir al conductor en situaciones peligrosas, sin embargo, cuando el vehículo se encuentra en condiciones críticas (piso resbaloso, por ejemplo) este sistema requiere trabajar en conjunto al DSC (*Dynamic stability control*) y de esta manera mantener al vehículo estable.

El controlador que se implementará en este trabajo, debe ser capaz de rechazar perturbaciones causadas por viento, reducción del coeficiente de fricción del camino (entre otras) así como también debe ser capaz de lidiar con incertidumbres paramétricas.

El esquema de control propuesto pretende mejorar el manejo y estabilidad del vehículo en cualquier situación externa, esto se pretende conseguir mediante la metodología del DSC. El sistema de control del DSC será diseñado con el objetivo de mantener la estabilidad del vehículo a través de la corrección del deslizamiento lateral durante maniobras en condiciones extremas [1].

1.2. Antecedentes

Diversos esquemas de control han sido propuestos e implementados en la literatura, se han realizado comparativas entre controles proporcionales, adaptativos, H-infinito y de lógica difusa [10], la comparación toma en cuenta distintos criterios para evaluar su robustez, tales como la variación de curvatura, variación de velocidad, cambios en el coeficiente de fricción del camino, entre otros. Aparentemente, el control proporcional tiene los errores más grandes, el control H-infinito y el control de lógica difusa (*fuzzy*

control) tienen un desempeño similar mientras que el control adaptativo consigue las mejores respuestas[10].

Otro enfoque que se ha presentado en la literatura es el control predictivo basado en modelo(*Model predictive control*, MPC)[28], el cual consigue resultados prometedores debido a su desempeño robusto, sin embargo, en esta aplicación se requiere un ancho de banda considerable lo cual limita la implementación de dicho algoritmo ya que se requiere la optimización de un problema no lineal, es decir, el esfuerzo computacional requerido para conseguir la implementación en tiempo real es bastante alto.

Actualmente, algunos estudios controlan el sistema de dirección activa (*Automatic Steering System*). Por ejemplo, en [14] se propone un esquema de control basado en redes neuronales y en [23] se propone un esquema adaptativo.

Instituciones como la Agencia de Proyectos de Investigación Avanzados de Defensa (DARPA, por sus siglas en inglés *Defense Advanced Research Projects Agency*), organiza eventos en los cuales se ha abordado esta problemática. En dichos eventos el algoritmo *pure pursuit* ha sido ampliamente aplicado [26], éste muestra buen seguimiento a baja velocidad, pero errores considerables ocurren a mayores velocidades.

En [27] un controlador basado en la teoría de control óptimo fue diseñado. El controlador consigue buenos resultados cuando en las pruebas no existen perturbaciones externas. Sin embargo, la estabilidad y la robustez se ven significativamente afectadas cuando hay perturbaciones presentes.

Para describir las características variables en el tiempo de los automóviles terrestres no tripulados, en [22] se propone un modelo con parámetros linealmente variables o *Linear Parameter Varying (LPV)*, en [22] se propuso una estrategia de control del tipo *gain-scheduling* para asegurar la precisión del control.

El control por modos deslizantes es una de las técnicas más prometedoras para el seguimiento de trayectorias. Es apto para compensar incertidumbres paramétricas y perturbaciones [46] encontradas en este tipo de aplicaciones, además de proporcionar leyes de control relativamente sencillas comparadas con otras técnicas de control robusto, lo cual es una característica deseable para los fines de este trabajo.

1.3. Definición del problema

Dado que el sistema considerado tiene una dinámica no lineal y suele estar sujeto a perturbaciones, además de la presencia de incertidumbres paramétricas, uno de los aspectos clave en el diseño del controlador es la necesidad de garantizar la robustez.

Este trabajo presenta el diseño de un controlador por medio de modos deslizantes para la navegación asistida / estabilización de un vehículo ligero con el objetivo de asistir

la estabilidad del mismo en condiciones externas poco favorables. El esquema de control por modos deslizantes utilizado en este trabajo se apoyará de la forma normal [25] para facilitar el análisis de convergencia. Una característica importante a destacar es la simplicidad de la estructura de control y la facilidad para ajustar los parámetros de diseño.

Además, el uso de un controlador por modos deslizantes de segundo orden tiene la gran ventaja de proporcionar una acción de control continua, lo cual es ideal para un actuador de naturaleza mecánica [50].

1.4. Objetivo general, objetivos específicos y metas

Como objetivo general se pretende diseñar un esquema de control que asista al vehículo a seguir una trayectoria deseable bajo condiciones críticas del entorno. Así mismo, se pretende proponer una ley de control relativamente sencilla comparada con otros esquemas propuestos en la literatura.

Como objetivos particulares, en primera instancia se planea diseñar el controlador por modos deslizantes utilizando un modelo matemático no lineal del automóvil de referencia que pueda representar de manera suficientemente detallada su dinámica, como segundo objetivo se planea implementar el controlador en un software de simulación para validar la robustez, para esta tarea se utilizará un modelo matemático no lineal de referencia el cual estará implementado en Simulink, también se utilizará el programa CarSim, esto con el objetivo de validar al controlador en uno de los software de simulación con los modelos más detallados y precisos que existen en la industria automotriz.

La meta del primer objetivo particular es conseguir un controlador cuyo desempeño cumpla las expectativas de diseño utilizando un modelo matemático aproximado del automóvil, la meta del segundo objetivo es conseguir que la implementación del controlador bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones sobre el modelo matemático de referencia y su aplicación sobre un modelo más detallado por medio de un software de simulación (CarSim) alcance un desempeño robusto.

1.5. Concepto de estabilidad dinámica en vehículos terrestres

El objetivo del esquema de control es prevenir que el vehículo gire sobre su eje vertical de manera errática. Estos esquemas de control generalmente son conocidos como YCS (*Yaw Control System*), ESP (*Electronic stability control program*) o DCS (*Dynamic*

Stability Control) [41].

La Figura 1.1 ayuda a entender el problema de control de manera más intuitiva

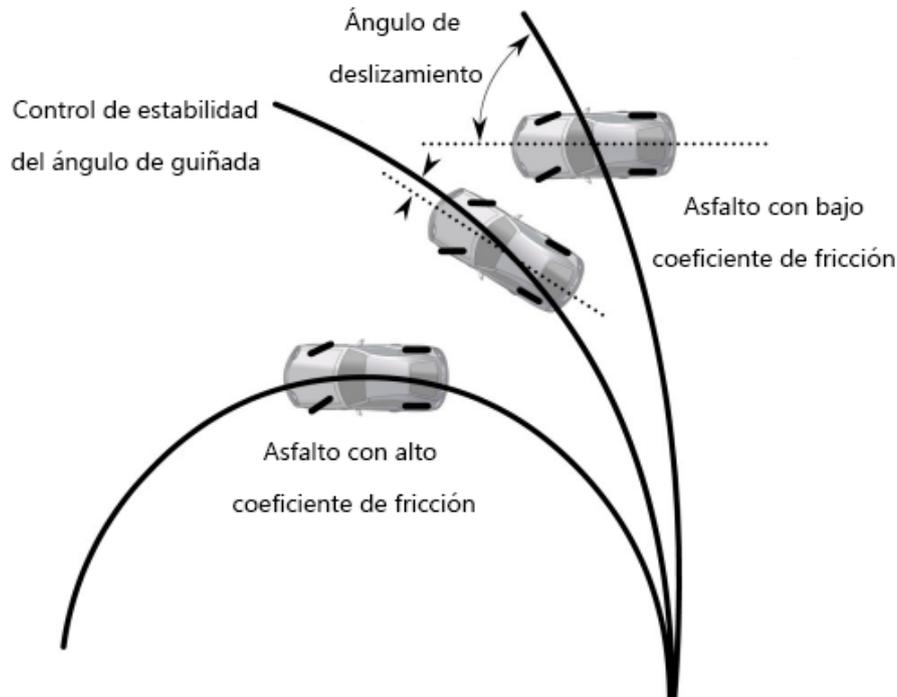


Figura 1.1: Esquema de estabilidad dinámica en vehículos (μ se define como coeficiente de fricción) (Rajamani [41])

La curva inferior muestra la trayectoria que el vehículo seguiría en respuesta a un determinado ángulo en el volante por parte del conductor si el asfalto estuviera seco y tuviera un alto coeficiente de fricción. En este caso, debido a la alta fricción el vehículo puede generar la fuerza lateral necesaria para tomar la curva de manera segura [41].

Si el coeficiente de fricción fuera bajo, o si la velocidad del vehículo fuera demasiado alta, entonces no sería posible seguir la trayectoria deseada por el conductor; el vehículo seguiría una trayectoria con un radio mayor, mostrado por la curva superior.

La función del controlador es restaurar la razón de cambio del ángulo de guiñada (*yaw rate*) del vehículo a valores nominales, es decir, valores esperados por el conductor. Si el coeficiente de fricción es muy bajo, los valores nominales serán alcanzados de manera parcial.

Se han propuesto distintos acercamientos a este problema de estabilidad [41], uno de ellos es el denominado sistema de frenado diferencial (*differential braking*). Esta técnica utiliza el sistema hidráulico en los actuadores de los frenos en el vehículo para aplicar una presión diferencial entre cada una de las llantas para controlar el *yaw rate* del vehículo. Típicamente estos sistemas utilizan moduladores hidráulicos para modular las

presiones en los frenos de cada llanta [41].

Crear una presión de frenado distinta en las llantas izquierdas comparado con las derechas, generará un momento en contra de las manecillas del reloj. De manera similar, crear una presión de frenado distinta en las ruedas derechas comparado con las izquierdas generará un momento en sentido de las manecillas del reloj.

El sistema de control típicamente requiere información que proviene de un sensor que mide el *yaw rate* del vehículo, un sensor que mide el ángulo del volante, un acelerómetro lateral y sensores de presión en cada llanta [41].

Capítulo 2. Modelado dinámico del vehículo

En este capítulo se analizarán en detalle los principales subsistemas del vehículo que resultan de interés para el problema en cuestión, es decir, el control de la razón de cambio de guiñada (*yaw rate*).

De acuerdo con Gillespie a pesar de que un vehículo está compuesto de diversos componentes distribuidos a través de todo el chasis, para efectos de análisis, se puede considerar que se mueven en unidad [20]. Por ejemplo, cuando frena, todos estos componentes reducen su velocidad al mismo tiempo, debido a esto, se puede considerar al vehículo como un solo elemento cuya masa está agrupada en su centro de gravedad, tomando en cuenta además las propiedades adecuadas de inercia, este es un buen punto de partida para empezar el modelado.

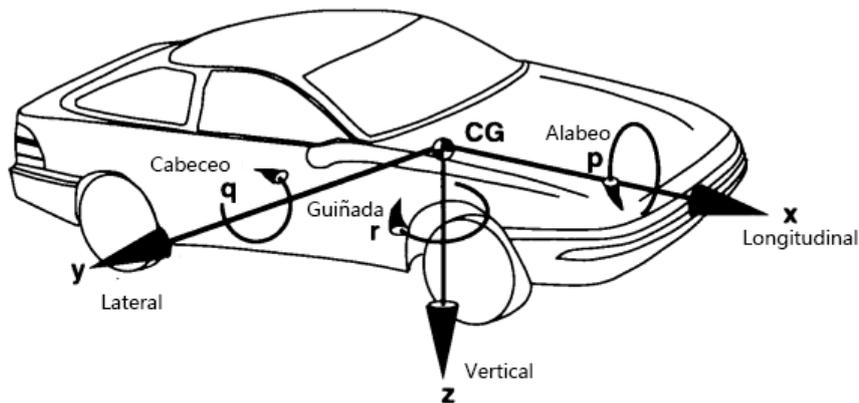


Figura 2.1: Marco de referencia para el vehículo (convención SAE) (Guiggiani [21])

Gillespie define un marco de referencia del vehículo con respecto a un sistema de coordenadas ortogonal (respetando la regla de la mano derecha), cuyo origen se encuentra en el centro de gravedad del vehículo y se desplaza con el vehículo [20]; la Figura 2.1 muestra una representación esquemática. Respetando el estándar de la SAE, las coordenadas son

- **x** - Adelante, en la dirección longitudinal del plano.
- **y** - Lateral, en la dirección lateral del plano.
- **z** - Abajo, en la dirección vertical del vehículo.
- **p** - Razón de cambio del ángulo de alabeo (*Roll rate*), alrededor del eje *x*.
- **q** - Razón de cambio del ángulo de cabeceo (*Pitch rate*), alrededor del eje *y*.
- **r** - Razón de cambio del ángulo de guiñada (*Yaw rate*), alrededor del eje *z*.

Usando estas coordenadas, es fácil describir el estado del vehículo, donde las velocidades están con respecto a un marco de referencia fijo como se puede apreciar en la Figura 2.2.

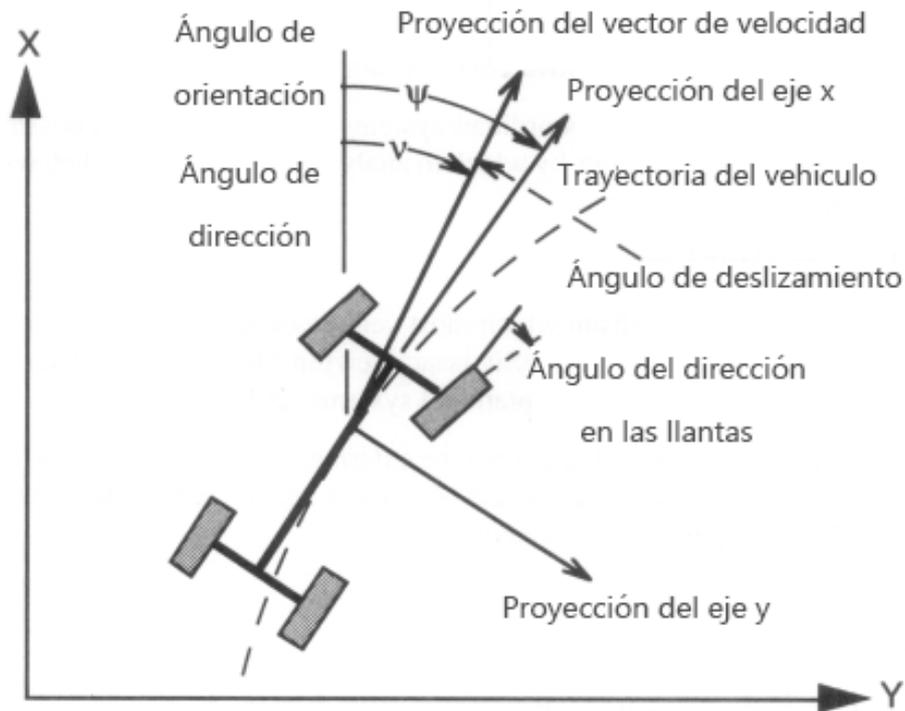


Figura 2.2: Sistema de referencia fijo en la tierra para el vehículo (Guiggiani [21])

La trayectoria que sigue un vehículo está con respecto al marco de referencia de la tierra el cual es un sistema de coordenadas ortogonal (respetando la regla de la mano derecha). Las coordenadas son

- **X** - Adelante
- **Y** - Derecha
- **Z** - Abajo
- ψ - Ángulo de guiñada, (ángulo entre x y X, en inglés *yaw angle*)
- β - Ángulo de deslizamiento (ángulo entre x y el vector de velocidad del vehículo, en inglés *sideslip angle*)

Las fuerzas y momentos se definen normalmente actuando sobre el vehículo, así, una fuerza positiva en la dirección longitudinal (eje x) puede ser interpretada como una fuerza hacia adelante. La fuerza que corresponde a la carga sobre una rueda actúa en

la dirección positiva vertical, por lo tanto, se define negativa en magnitud, debido a la posible confusión que esto puede generar, la SAE J670e *Vehicle Dynamics Terminology* da el nombre de fuerza normal actuando en la dirección negativa vertical.

La ley fundamental bajo la cual se analiza la mayoría de la dinámica de vehículos está formulada por Sir Isaac Newton. Esta ley se aplica para sistemas translacionales y rotacionales [15].

Sistemas translacionales. La suma de las fuerzas externas actuando sobre un cuerpo en una dirección dada, es igual al producto de la masa de dicho cuerpo y la aceleración del mismo en dicha dirección.

$$\sum F_x = M \cdot a_x \quad (2.1)$$

donde

- F_x - Fuerzas en la dirección de x
- M - Masa del cuerpo
- a_x - Aceleración del cuerpo en dirección del x

Sistemas rotacionales. La suma de los pares actuando sobre un cuerpo alrededor de un eje dado, es igual al producto del momento rotacional de inercia de dicho cuerpo y la aceleración rotacional del mismo alrededor de dicho eje.

$$\sum T_x = I_{xx} \cdot \alpha_x \quad (2.2)$$

- T_x - Momento de torsión alrededor del eje x
- I_{xx} - Momento de inercia alrededor del eje x
- α_x - Aceleración del cuerpo alrededor del eje x

La segunda ley de Newton es aplicada al vehículo. Las fuerzas y momentos apropiados son aplicados en cada punto de contacto con el mundo exterior (el camino, gravedad, etc). Esto forma un diagrama de cuerpo libre. De esta manera, podemos formular ecuaciones de movimiento para cada coordenada de interés, principalmente velocidad longitudinal, lateral y la derivada del ángulo de guiñada (*yaw rate*).

2.1. Modelo Bicicleta

Existe una gran variedad de modelos propuestos, entre ellos está el modelo de bicicleta o también conocido como *single track* que introduce de manera muy sencilla el comportamiento de la dinámica lateral de un vehículo. En la Figura 2.3 se muestra un diagrama esquemático para el modelo *single track*.

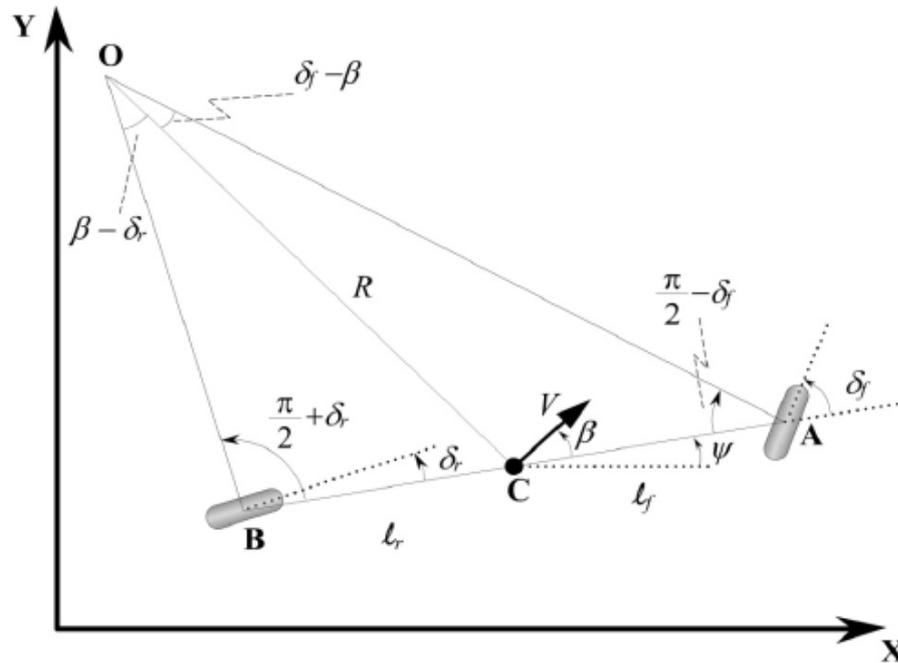


Figura 2.3: Diagrama esquemático *single track* (Rajamani [41])

Bajo ciertas condiciones descritas a continuación, se puede desarrollar un modelo cinemático para el movimiento lateral de un vehículo. Se usa como referencia el desarrollo presentado en [41]. Este modelo provee de una descripción matemática del movimiento del vehículo sin considerar las fuerzas que generan dicho movimiento. Las ecuaciones de movimiento están basadas completamente en las relaciones geométricas gobernando al sistema.

Considerando el esquema anterior, ambas llantas (delanteras y traseras, respectivamente) están agrupadas en una sola. Los ángulos de dichas ruedas, están representados por δ_f y δ_r respectivamente. El modelo es derivado suponiendo que ambas ruedas pueden cambiar de dirección. El centro de gravedad está localizado sobre el punto C. La distancia entre el punto A y B al centro de gravedad se definen como l_f y l_r respectivamente. La distancia entre ejes del vehículo está representado por $L = l_f + l_r$.

En este modelo, consideramos que el vehículo tiene un movimiento planar. Tres coordenadas son necesarias para describir el movimiento del vehículo. X , Y y ψ . (X, Y) son

las coordenadas inerciales de la localización del centro de gravedad del vehículo, mientras que ψ describe su orientación. La velocidad del centro de gravedad del vehículo es definida por V_v y ésta genera un ángulo β con respecto al eje longitudinal del vehículo. El ángulo β es denominado ángulo de deslizamiento (*sideslip angle*).

La hipótesis de mayor peso utilizada en el desarrollo del modelo cinemático, es que los vectores de velocidad en los puntos A y B están en la dirección que la orientación de las rueda delantera y trasera, respectivamente. Esto es equivalente a un *slip angle* en cada rueda igual a cero. Esto solo es cierto cuando la velocidad es baja (debajo de 5 m/s). A baja velocidad, la fuerza lateral generada por las ruedas es baja. Con el fin de manejar en cualquier camino circular de radio R, la fuerza total lateral está dada por

$$\frac{mV_v^2}{R} \quad (2.3)$$

la cual varia cuadráticamente con respecto a la velocidad V_v (V en el diagrama de la Figura 2.3) y es pequeña a bajas velocidades.

El punto O es el centro de giro instantáneo para el vehículo, el cual esta definido como la intersección de la línea AO y BO, cada una perpendicular a la orientación de la rueda delantera y trasera respectivamente.

El radio de la trayectoria del vehículo R esta definido por la longitud de la línea OC la cual conecta el centro de gravedad C al centro de giro instantáneo O. La dirección del vector de velocidad V_v es perpendicular a la línea OC.

Aplicando la regla de senos al triángulo OCA

$$\frac{\sin(\delta_f - \beta)}{l_f} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta_f)}{R} \quad (2.4)$$

y aplicando la regla de senos al triángulo OCB

$$\frac{\sin(\beta - \delta_r)}{l_r} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \delta_r)}{R} \quad (2.5)$$

a partir de (2.4), se tiene que

$$\frac{\sin(\delta_f) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\delta_f)}{l_f} = \frac{\cos(\delta_f)}{R} \quad (2.6)$$

así mismo, a partir de (2.5), se tiene que

$$\frac{\cos(\delta_r) \sin(\beta) - \cos(\beta) \sin(\delta_r)}{l_r} = \frac{\cos(\delta_r)}{R}. \quad (2.7)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.6) por $l_f / \cos(\delta_f)$ obtenemos

$$\tan(\delta_f) \cos(\beta) - \sin(\beta) = \frac{l_f}{R} \quad (2.8)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación (2.7) por $l_r / \cos(\delta_r)$ obtenemos

$$\sin(\beta) - \tan(\delta_r) \cos(\beta) = \frac{l_r}{R} \quad (2.9)$$

Sumando (2.8) y (2.9)

$$(\tan(\delta_f) - \tan(\delta_r)) \cos(\beta) = \frac{l_f + l_r}{R}. \quad (2.10)$$

Si suponemos que el radio de la trayectoria del vehículo cambia lentamente, entonces el *yaw rate* del vehículo ($\dot{\psi}$) debe ser igual a la velocidad angular del vehículo. Debido a que la velocidad del vehículo es V/R , resulta que

$$\dot{\psi} = \frac{V_v}{R}. \quad (2.11)$$

Usando (2.11), (2.10) puede ser reescrita como

$$\dot{\psi} = \frac{V_v \cos(\beta)}{l_f + l_r} (\tan(\delta_f) - \tan(\delta_r)) \quad (2.12)$$

entonces, las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{X} = V_v \cos(\psi + \beta) \quad (2.13)$$

$$\dot{Y} = V_v \sin(\psi + \beta) \quad (2.14)$$

$$\dot{\psi} = \frac{V_v \cos(\beta)}{l_f + l_r} (\tan(\delta_f) - \tan(\delta_r)). \quad (2.15)$$

A mayores velocidades, la hipótesis de que la velocidad en cada rueda es en dirección de la misma no es correcta. En este caso, en vez de el modelo cinemático, es necesario desarrollar un modelo dinámico. Consideraremos el modelo dinámico de la bicicleta. Se tienen 2 grados de libertad, la posición lateral del vehículo y su ángulo de guiñada (*yaw angle*), que es el ángulo de rotación sobre el eje vertical del vehículo. En la Figura 2.4 se muestra un diagrama esquemático para la dinámica lateral del vehículo.

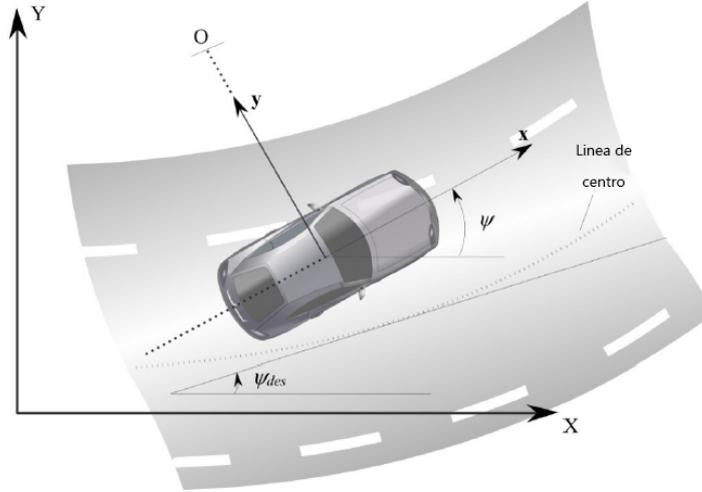


Figura 2.4: Diagrama esquemático para la dinámica lateral del vehículo (Rajamani [41])

De la misma manera que el modelo cinemático, se utiliza como referencia el desarrollo presentado en [41]. Se ignorarán ciertas dinámicas involucradas en el movimiento del vehículo, tal como el ángulo que pueda presentarse en el camino (longitudinal y lateral) entre otras, a continuación se aplica la segunda ley de Newton a lo largo del eje y del vehículo.

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (2.16)$$

donde $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ es la aceleración inercial del vehículo en el centro de gravedad en la dirección del eje y . F_{yf} y F_{yr} son las fuerzas laterales de cada llanta respectivamente. Dos términos contribuyen a la aceleración a_y , la aceleración \ddot{y} que es debido al movimiento en el eje y , y la aceleración centrípeta $V_x \dot{\psi}$. Entonces (2.16) puede expresarse de la siguiente manera

$$m(\ddot{y} + \dot{\psi}V_x) = F_{yf} + F_{yr}. \quad (2.17)$$

Por medio de balance de momentos alrededor del eje vertical se puede obtener la siguiente ecuación dinámica

$$I_z \ddot{\psi} = l_f F_{yf} + l_r F_{yr} \quad (2.18)$$

donde l_f y l_r son las distancias desde la llanta frontal al centro de gravedad y la llanta trasera al centro de gravedad respectivamente. El siguiente paso es modelar las fuerzas laterales generadas por cada llanta (F_{yf} F_{yr}). Resultados experimentales demuestran que las fuerzas laterales generadas son proporcionales al *slip angle* para ángulos suficientemente pequeños. El *slip angle* de una llanta está definido como el ángulo entre la orientación de la llanta y la dirección del vector de velocidad de la misma. En el caso de la llanta delantera

$$\alpha_f = \delta_v - \theta_{vf} \quad (2.19)$$

donde θ_{vf} es el ángulo que el vector de velocidad hace con el eje longitudinal del vehículo

(en este caso la bicicleta) y δ_v es el ángulo del volante. De manera similar, el *slip angle* para la llanta trasera está dado por

$$\alpha_r = -\theta_{Vr}. \quad (2.20)$$

Entonces, la fuerza lateral generada por las llantas delanteras puede ser descrita como

$$F_{yf} = 2C_{\alpha_f}(\delta_v - \theta_{Vf}) \quad (2.21)$$

donde la constante de proporcionalidad C_{α_f} es llamada *cornering stiffness* de cada llanta. El factor 2 denota que ambas llantas están agrupadas en una sola.

Similarmente, para las llantas traseras

$$F_{yr} = 2C_{\alpha_r}(-\theta_{Vr}). \quad (2.22)$$

Las siguientes relaciones pueden ser usadas para calcular los ángulos θ_{Vf} θ_{Vr}

$$\tan(\theta_{Vf}) = \frac{V_y + l_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (2.23)$$

$$\tan(\theta_{Vr}) = \frac{V_y - l_r \dot{\psi}}{V_x}. \quad (2.24)$$

Utilizando la aproximación de ángulos pequeños y la notación $V_y = \dot{y}$

$$\theta_{Vf} = \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{V_x} \quad (2.25)$$

$$\theta_{Vr} = \frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{V_x}. \quad (2.26)$$

Substituyendo (2.19),(2.20),(2.25) y (2.26) en (2.17) y (2.18) el espacio de estados puede ser descrito de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha_f} + 2C_{\alpha_r}}{mV_x} & 0 & -V_x - \frac{2C_{\alpha_f}l_f - 2C_{\alpha_r}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha_f}l_f - 2C_{\alpha_r}l_r}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2C_{\alpha_f}l_f^2 - 2C_{\alpha_r}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

2.2. Sistema de dirección

En el caso específico del modelo de la sección anterior, se definió que ambas llantas (traseras y delanteras respectivamente) estaban agrupadas en una sola, por lo cual se tenía solamente un ángulo en la dirección δ_v . Sin embargo, cabe resaltar que el ángulo en ambas ruedas en general no es el mismo. Esto debido a que el radio que cada rueda recorre es diferente.

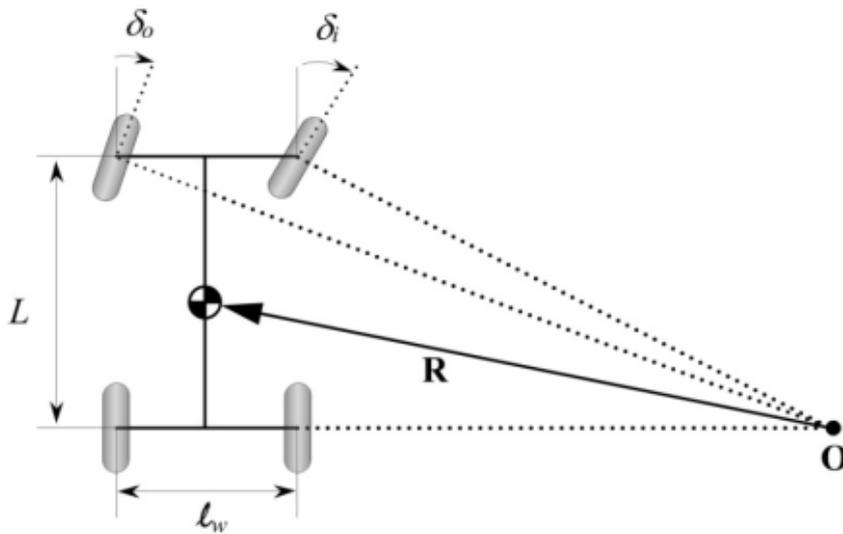


Figura 2.5: Modelo cinemático 4 ruedas (Rajamani [41])

En la Figura 2.5 se muestra un modelo cinemático que toma en cuenta las 4 ruedas del vehículo, obsérvese que el ángulo en las llantas δ_v es el ángulo que se forma entre la orientación de la llanta y el eje x (longitudinal) del vehículo y es medido con respecto al eje z, este se puede definir de manera distinta para cada una de ellas. Por lo general, se toma en cuenta que las ruedas traseras $\delta_r = 0$ [41].

Se tiene que l_w es el ancho del vehículo (distancia entre el centro de ambas ruedas) δ_o y δ_i son los ángulos de la rueda exterior e interior respectivamente. Mientras que tengamos un *slip angle* β pequeño, se puede aproximar a (2.15) de la siguiente manera

$$\frac{\dot{\psi}}{V} \approx \frac{1}{R} = \frac{\delta_v}{L} \quad (2.28)$$

también se puede ver como

$$\delta_v = \frac{L}{R} \quad (2.29)$$

y debido a que el radio que recorren ambas ruedas (interior y exterior) son diferentes se

tiene que

$$\delta_o = \frac{L}{R + \frac{l_w}{2}} \quad (2.30)$$

$$\delta_i = \frac{L}{R - \frac{l_w}{2}} \quad (2.31)$$

se tiene que en promedio, el ángulo de dirección frontal es simplemente

$$\delta_v = \frac{\delta_o + \delta_i}{2} \approx \frac{L}{R}. \quad (2.32)$$

Para conseguir esta relación, típicamente se utiliza una configuración trapezoidal en la columna de dirección la cual se muestra en la Figura 2.6.

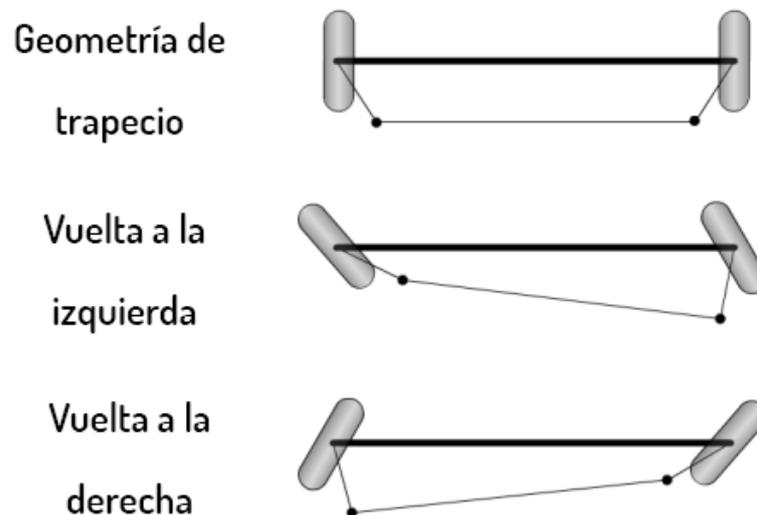


Figura 2.6: Configuración trapezoidal (Rajamani [41])

Un concepto muy importante para la implementación de modelos dinámicos de vehículos es el *steering ratio*, que se define como la relación entre el ángulo presente en el volante y el ángulo presente en las llantas. Normalmente esta relación es de (15 a 1 - 20 a 1) en vehículos compactos y (20 a 1 - 36 a 1) en vehículos pesados o camiones. De acuerdo con Gillespie debido a diversos efectos (como la complianza en el sistema de dirección), la relación real puede llegar a ser hasta el doble de lo diseñado [20].

Los sistemas mecánicos encargados de llevar a cabo la dirección en las ruedas varían en diseño, sin embargo son muy similares en funcionamiento. En la Figura 2.7 se muestran algunas configuraciones.

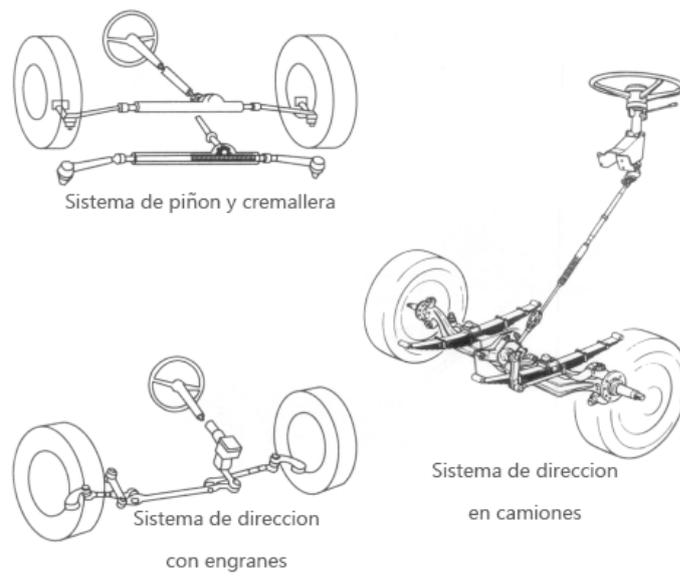


Figura 2.7: Sistema de dirección (Guiggiani [21])

El sistema de dirección de piñón y cremallera es uno de los más utilizados debido a su simplicidad, básicamente consiste en una cremallera que es desplazada linealmente por un piñón.

2.3. Modelo dinámico Dual Track

Para el desarrollo del control de estabilidad en el vehículo, se considerará el denominado *Dual Track*, el cual cuenta con 3 grados de libertad. De acuerdo con la literatura revisada ([2], [4], [41], [20], [33], [54]) este modelo describe adecuadamente la dinámica del ángulo de guiñada, la cual es de interés para nuestro objetivo de control. En la Figura 2.8 se muestra un diagrama esquemático del modelo *Dual Track*.

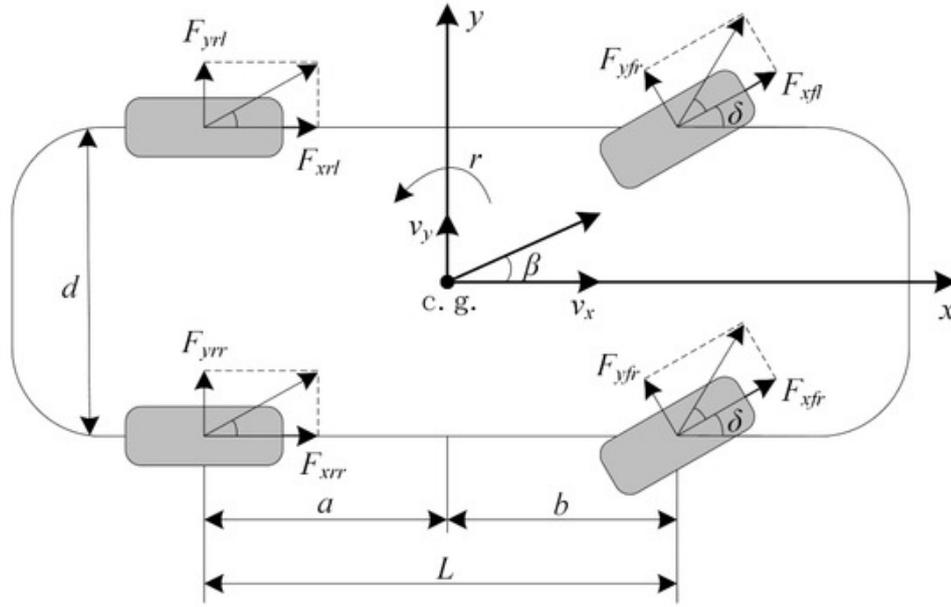


Figura 2.8: Diagrama esquemático *Dual Track* ([34])

Para obtener las ecuaciones de movimiento se recurre a las leyes de balance de fuerza de Newton.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m\ddot{x} \\ \sum M_{cg} &= I_z\ddot{\psi} \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos las siguientes ecuaciones para la dinámica longitudinal, lateral y de guiñada. Nótese que $V_x = u$, $V_y = v$

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= F_{xr} + F_{xf} \cos \delta_v - F_{yf} \sin \delta_v + mrv \\ m\dot{v} &= F_{yr} + F_{xf} \sin \delta_v + F_{yf} \cos \delta_v - mru \\ I_z\dot{r} &= aF_{xf} \sin \delta_v + aF_{yf} \cos \delta_v - bF_{yr} + \frac{d}{2}(F_{xfr} + F_{xfl}) \cos \delta_v + \frac{d}{2}(F_{xrr} + F_{xrl}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como se puede apreciar, el sistema contará con 3 ecuaciones diferenciales.

Para obtener las fuerzas generadas en las llantas se hará uso de un modelo lineal

obteniendo las siguientes expresiones.

$$F_f = -C_{\alpha,f}\alpha_f; \quad F_r = -C_{\alpha,r}\alpha_r.$$

Estas expresiones representan la fuerza lateral que se ejerce en cada llanta. Donde α_i es el *slip angle* respectivo de cada llanta y $C_{\alpha,f}$ corresponde al *cornering coefficient* respectivo de cada llanta.

Definiendo $u_c = [F_{xfl} F_{xfr} F_{xrl} F_{xrr}]'$ como el vector de control y el vector de estados como $x = [u \ v \ r]'$ podemos escribir las ecuaciones de la siguiente forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u_c$ donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} rv - \frac{C_f}{m}(\delta_v - \frac{v+ra}{u})\delta_v \\ -ru + \frac{C_r}{m}\frac{rb-v}{u} - \frac{C_f}{m}(\frac{v+ra}{u} - \delta_v) \\ \frac{a}{I_z}C_f(\delta_v - \frac{v+ra}{u}) - \frac{b}{I_z}C_r\frac{rb-v}{u} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$g(x)u_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(F_{xfl} + F_{xfr} + F_{xrl} + F_{xrr}) \\ \frac{1}{m}\delta_v(F_{xfl} + F_{xfr}) \\ \frac{a}{I_z}\delta_v(F_{xfl} + F_{xfr}) + \frac{d}{2I_z}(F_{xfr} - F_{xfl}) + \frac{d}{2I_z}(F_{xrr} + F_{xrl}) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Para proporcionar la presión hidráulica en los frenos de las ruedas traseras, se utiliza la presión hidráulica de las ruedas delanteras como se sugiere en [53]. Se realiza de la siguiente forma

$$P_{Br} = \frac{K_{Bf} ag + a_x h}{K_{Br} bg - a_x h} P_{Bfl} = f_b(a_x) P_{Bfl}. \quad (2.36)$$

Esta ecuación se implementa para tomar en cuenta los efectos de la transferencia de carga al momento de la desaceleración. Para una descripción más detallada de la proporción en las llantas traseras, se refiere al lector a [20].

Entonces, redefiniendo el vector de entrada de la siguiente manera $u_c = [P_{Bfl} P_{Bfr}]' = [u_1 \ u_2]'$ (2.34) y (2.35) se reescriben como

$$f(x) = \begin{bmatrix} rv - \frac{C_f}{m}(\delta_v - \frac{v+ra}{u})\delta_v + \frac{1}{m}\frac{T_s}{r_w} \\ -ru + \frac{C_r}{m}\frac{rb-v}{u} - \frac{C_f}{m}(\frac{v+ra}{u} - \delta_v) + \frac{1}{m}\frac{T_s}{r_w}\delta_v \\ \frac{a}{I_z}C_f(\delta_v - \frac{v+ra}{u}) - \frac{b}{I_z}C_r\frac{rb-v}{u} + \frac{a}{I_z}\frac{T_s}{r_w}\delta_v \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$g(x)u_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m}(\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} + f_b(a_x)\frac{K_{Bf}}{r_{wf}})(P_{Bfl} + P_{Bfr}) \\ -\frac{1}{m}\delta_v\frac{K_{Bf}}{r_{wf}}(P_{Bfl} + P_{Bfr}) \\ g_{31}P_{Bfl} + g_{32}P_{Bfr} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

donde

$$g_{31} = \frac{1}{I_z} \left[\frac{d}{2} \left(\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} + f_b(a_x)\frac{K_{Br}}{r_{wr}} \right) - a\delta_v\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} \right] \quad (2.39)$$

$$g_{32} = -\frac{1}{I_z} \left[\frac{d}{2} \left(\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} + f_b(a_x) \frac{K_{Br}}{r_{wr}} \right) + a\delta_v \frac{K_{Bf}}{r_{wf}} \right]. \quad (2.40)$$

2.4. Fuerzas longitudinales

En la sección previa, se derivó una ecuación que describe el movimiento longitudinal del vehículo, que de manera general puede ser expresado como

$$m\ddot{x} = F_{xf} + F_{xr} - R_{xf} - R_{xr} - F_{aero} - mg \sin(\theta).$$

La dinámica longitudinal del vehículo es entonces influenciada por la fuerza longitudinal en las llantas, las fuerzas aerodinámicas, la resistencia al rodamiento y las fuerzas gravitacionales [41]. La dinámica del sistema de propulsión consiste en el motor del vehículo (combustión interna o eléctrico), la transmisión y las llantas.

En este trabajo se considerarán principalmente las fuerzas longitudinales generadas por las llantas y la dinámica del sistema de propulsión (*powertrain*). Cabe mencionar que se considerará tracción delantera para el sistema de propulsión del modelo *Dual Track*.

Las fuerzas longitudinales F_{xf} son fuerzas que se ejercen en el suelo a través de las llantas por medio de la fricción.

2.5. Dinámica de las llantas

Las fuerzas críticas que determinan como maniobra, acelera y frena un vehículo se desarrollan en cuatro puntos de contacto de tamaño similar a la palma humana [41]. Un entendimiento de las relaciones entre las llantas, sus puntos de operación y tanto las fuerzas como momentos desarrollados en estos puntos de contacto son una parte esencial para el entendimiento de la dinámica total del vehículo [21].

Aunque la llanta es un elemento visco-elástico de apariencia simple, es un sistema no lineal muy complejo, difícil de cuantificar y modelar, éste es quizás el subsistema que vuelve a nuestro problema difícil de controlar. Las fuerzas y momentos del camino actúan sobre cada llanta del vehículo e influyen sustancialmente en la dinámica del vehículo.

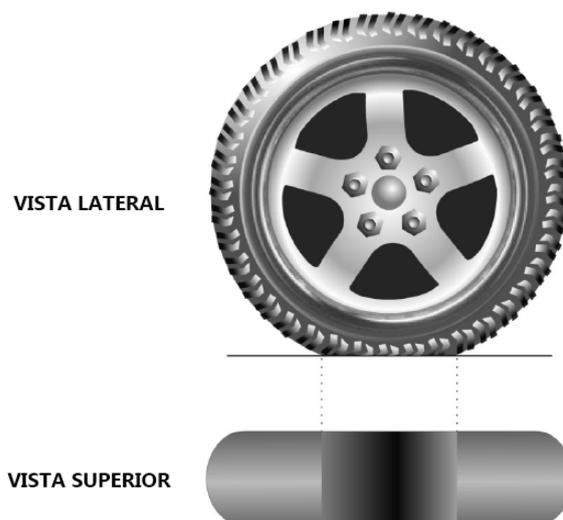


Figura 2.9: Llanta y *contact patch* (Rajamani [41])

A diferencia de una rueda rígida indeformable, el neumático no hace contacto con el camino en un solo punto [5]. En cambio, como se muestra en la Figura 2.9, el neumático del vehículo se deforma debido a la carga vertical sobre él y hace contacto con el camino en un área denominada *contact patch*, la cual es distinta de cero [41].

Se supone que la fuerza que recibe la llanta del camino está en el centro del *contact patch* y se puede descomponer a lo largo de los tres ejes. La fuerza lateral F_y es la fuerza a lo largo del eje Y, la fuerza longitudinal F_x es la fuerza a lo largo del eje X y la fuerza normal o vertical F_z es la fuerza a lo largo del Eje Z. El diagrama que se muestra en la Figura 2.10 ejemplifica de manera más clara esta idea.

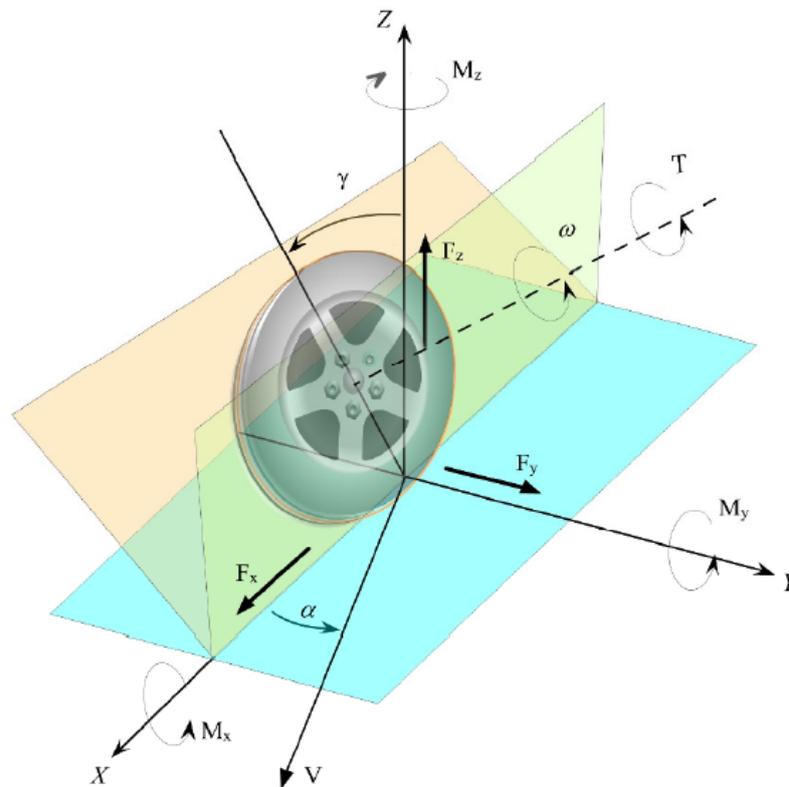


Figura 2.10: Fuerzas y momentos presentes en la estructura de la llanta (Guiggiani [21])

Del mismo modo, el momento que recibe la llanta se puede descomponer a lo largo de los tres ejes. El momento que recibe la llanta a lo largo del eje Z M_z es llamado momento de alineación. El momento a lo largo del eje X M_x se llama el momento de vuelco y el momento a lo largo del eje Y M_y se llama el momento de resistencia a la rotación.

Las fuerzas laterales generadas en las llantas son debidas a la presencia del denominado *slip angle* α que se define como el ángulo entre la orientación de la rueda y la dirección del vector de velocidad de la rueda.

Esto implica que, para que se genere una fuerza lateral en la llanta, debe existir un deslizamiento lateral en la rueda, en otras palabras, una velocidad lateral [41]. De esta manera, al haber un deslizamiento lateral en el *contact patch*, se genera fricción contra el camino. Estas fuerzas de fricción actúan en dirección opuesta a la dirección del vector de velocidad lateral como se muestra en la Figura 2.11.

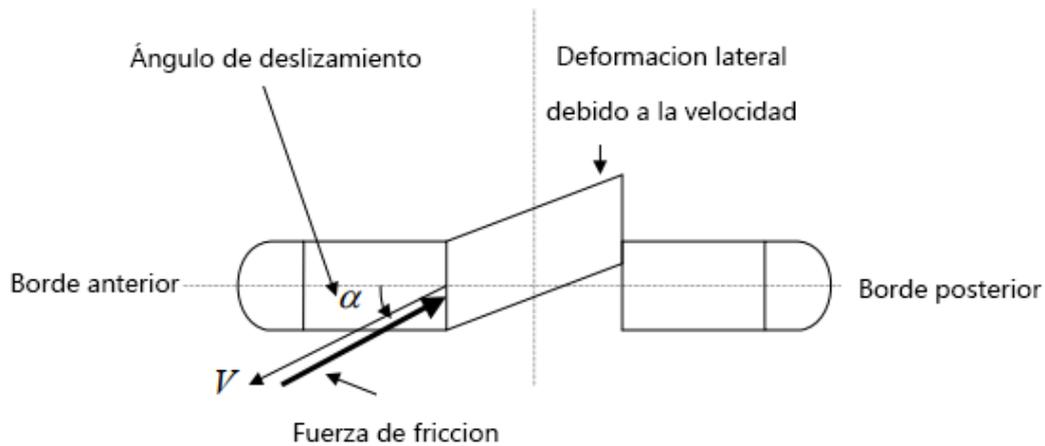


Figura 2.11: Deformación en el *contact patch* (Guiggiani [21])

Particularmente, debido a que la rueda está construida de un material visco elástico, los elementos que la componen se podrían comparar con resortes. Esto implica que los elementos serán deformados en dirección opuesta al vector de velocidad, provocando una fuerza en sentido contrario.

El valor máximo que puede alcanzar la fuerza de fricción lateral es μF_z [41], donde μ es el coeficiente de fricción entre la rueda y el camino y F_z es la fuerza normal en la rueda debido a la carga.

Resultados experimentales muestran que mientras que se mantengan ángulos de deslizamiento pequeños, la fuerza lateral es una proporción del *slip angle* α .

Adicionalmente resultados experimentales han establecido que la fuerza longitudinal generada en cada rueda depende de

1. La relación de deslizamiento (*slip ratio*)
2. La fuerza normal en cada rueda
3. El coeficiente de fricción entre la rueda y el suelo.

Si el coeficiente de fricción entre la llanta y el camino se considera como 1, y la fuerza normal se pretende constante, se puede obtener la fuerza longitudinal ejercida por la llanta en función al *slip ratio* como indica la Figura 2.12.

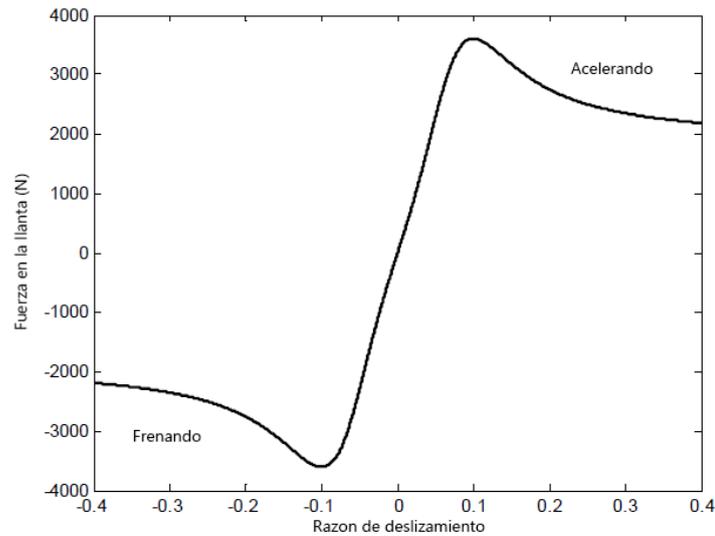


Figura 2.12: Relación del *slip ratio* vs fuerza longitudinal (Guiggiani [21])

cabe resaltar que resultados experimentales han demostrado que la fuerza longitudinal de la llanta en condiciones nominales de manejo es proporcional al *slip ratio* [40].

$$F_{xf} = C_{\sigma f} \sigma_{xf} \quad (2.41)$$

donde $C_{\sigma f}$ es conocido como parámetro de rigidez longitudinal de las llantas, en inglés *longitudinal tire stiffness parameter* [35] y σ_{xf} es el *slip ratio*. Cabe resaltar que durante condiciones de manejo nominales el *slip ratio* es pequeño.

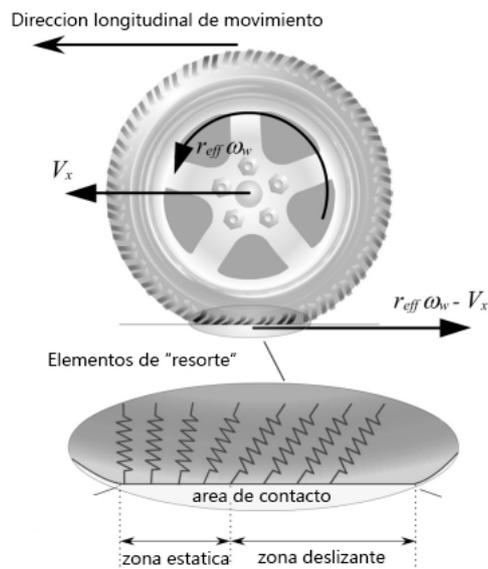


Figura 2.13: Balance de momentos en la rueda (Guiggiani [21])

En la parte inferior de la Figura 2.13 se puede apreciar de manera esquemática la deformación de la suela (*tread*) del neumático. Los elementos de la suela del neumático se modelan como una serie de resortes independientes que se someten a una deformación longitudinal y se resisten a esta con una rigidez longitudinal constante. Tal modelo es comúnmente referido como *Brush model* desarrollado por Pacejka en 1991 [39].

Cuando los elementos resortes de la suela entran al *contact patch* no pueden producir fricción ya que, debido a su complianza, necesitan deformarse para generar una fuerza [40]. Esto solo puede ocurrir cuando la llanta está moviéndose más rápido (en dirección longitudinal) con respecto a la velocidad angular de la misma. De esta manera, cuando el resorte viaja a través del *contact patch*, su deformación aumenta con respecto a la carga vertical y desarrolla aún más fuerza de fricción. Sin embargo, cuando se acerca al final del *contact patch*, la carga disminuye hasta que llega un punto en el cual el resorte empieza a deslizarse en la superficie tal que la fricción generada se desvanece, alcanzando cero cuando deja el camino.

Entonces, la fuerza de aceleración y frenado son generadas produciendo una diferencia entre la velocidad angular de la llanta y su velocidad longitudinal. La consecuencia es un deslizamiento en el *contact patch*. La magnitud de este deslizamiento es igual a

$$Slip\ ratio = (V_x - r_{eff}\omega_w)/V_x$$

donde V_x es la velocidad longitudinal de la rueda, y su velocidad rotacional ω_w y r_{eff} es el radio efectivo. La fuerza longitudinal producida varía con respecto al *slip ratio* como se puede apreciar en la Figura 2.14.

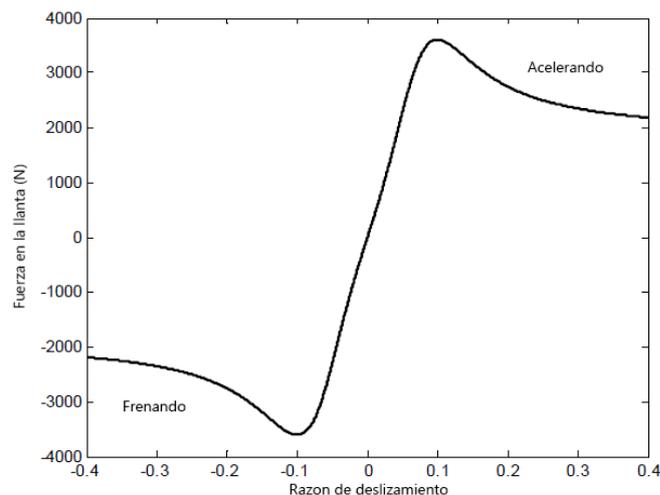


Figura 2.14: Curva característica de la fuerza longitudinal (en Newtons) contra el *slip ratio* en la rueda. (Guiggiani [21])

Cuando se produce un deslizamiento (*slip ratio*) a través de la aplicación de los frenos las fuerzas de fricción aumentan con respecto a la pendiente inicial definida en la gráfica.

En una superficie seca, cuando el deslizamiento alcanza aproximadamente 15-20 por ciento, la fuerza de fricción generada alcanzará un máximo (típicamente en el rango de 70 a 90 por ciento de la carga) [41], esto debido a que la mayoría de los resortes trabajarán efectivamente sin un deslizamiento notorio. Después de este punto, si el deslizamiento incrementa la fuerza de fricción disminuye hasta que se alcanza un 100 por ciento de deslizamiento, en este caso la llanta está bloqueada.

Como se puede apreciar en la Figura 2.15, el desempeño en superficies resbaladizas es cualitativamente similar a las superficies secas, con la diferencia de que la fuerza de fricción máxima que se puede alcanzar disminuye.

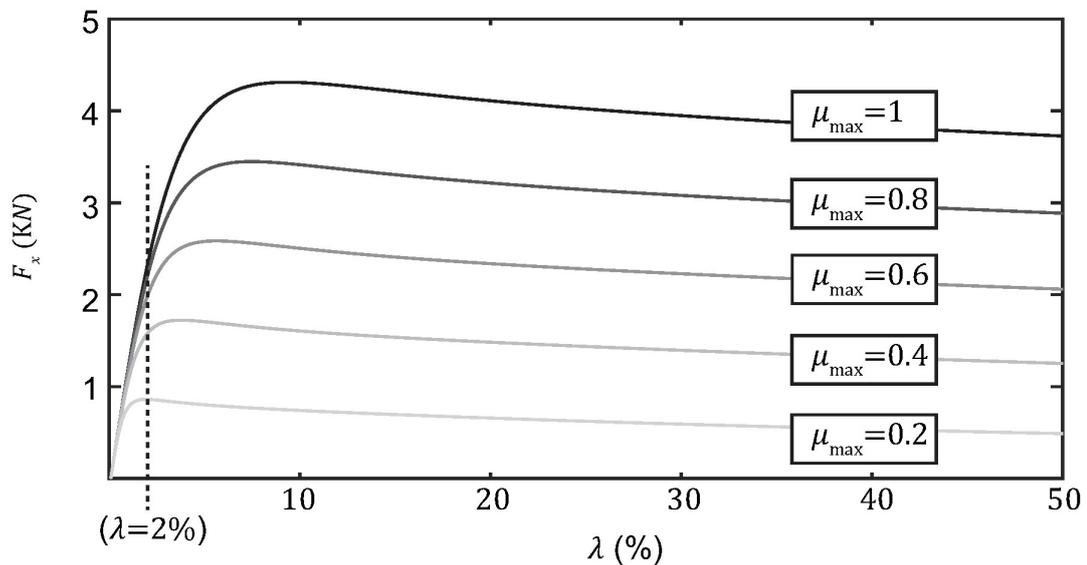


Figura 2.15: Comparación de fuerza longitudinal en distintos valores del coeficiente de fricción (Khansari et al. [30])

2.6. Efecto de las fuerzas laterales y longitudinales combinadas

En presencia de ambas fuerzas siendo generadas al mismo tiempo, que es el caso cuando se entra en una curva por ejemplo, se debe tomar en cuenta que la magnitud total de la fuerza que es posible generar no puede exceder μF_z .

La Figura 2.16 representa el denominado círculo de fricción obtenido a partir de un modelo analítico para fuerzas laterales y longitudinales combinadas. La trayectoria interior corresponde a un *slip ratio* inicial (razón de deslizamiento longitudinal) $\sigma_x =$

0.01, y se puede observar como va disminuyendo cuando se requiere aumentar la fuerza lateral.

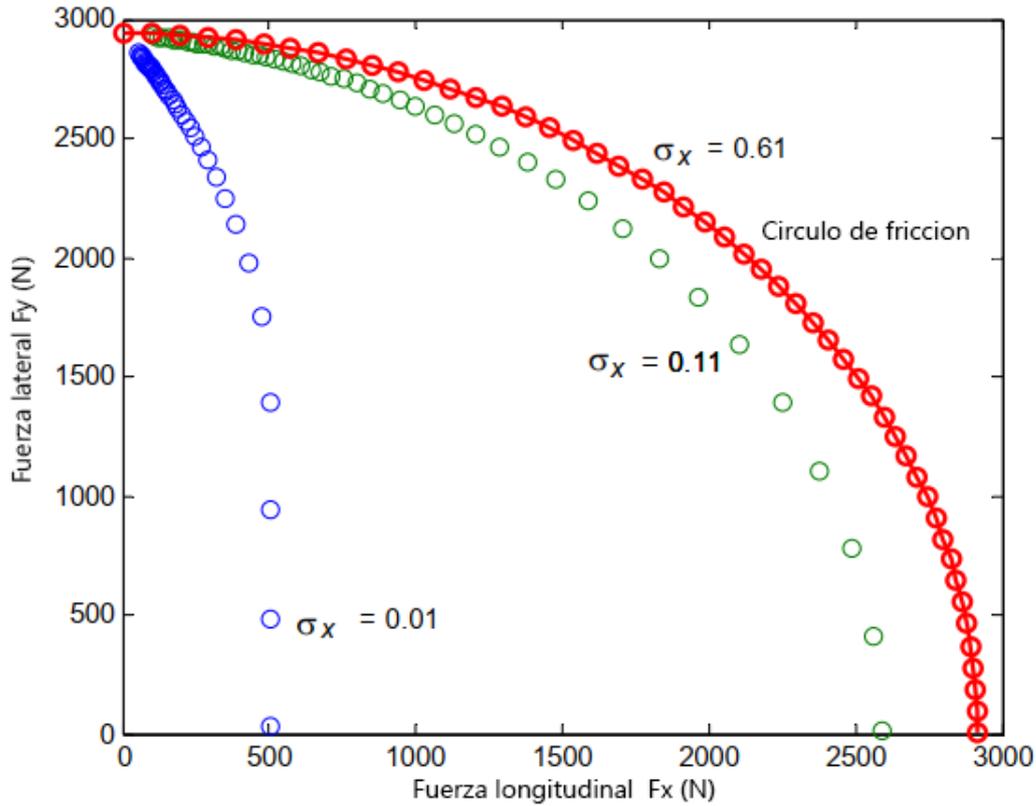


Figura 2.16: Círculo de fricción para estimar la fuerza máxima(Rajamani [41])

Esto significa que, a pesar de que inicialmente se está generando una fuerza longitudinal correspondiente a $\sigma_x = 0.01$, cuando se requiere generar fuerzas laterales al mismo tiempo, la fuerza longitudinal decrecerá incluso con el mismo $\sigma_x = 0.01$, este efecto es más pronunciado para *slip ratios* mayores, como se puede observar en la Figura para $\sigma_x = 0.61$.

En el caso de que se presenten deslizamientos laterales y longitudinales altos, existe un modelo para dichas fuerzas combinadas que toma en cuenta una fuerza normal distribuida de forma parabólica, se describe matemáticamente de la siguiente manera

$$F = \begin{cases} \mu F_z \left[3\theta\sigma_t - \frac{1}{3}(3\theta\sigma_t)^2 + \frac{1}{27}(3\theta\sigma_t)^3 \right] & \text{si } \sigma_t \leq \sigma_m \\ \mu F_z & \text{si } \sigma_t > \sigma_m \end{cases} \quad (2.42)$$

donde F es la magnitud de la fuerza total que se puede generar, σ_t es la combinación de ambos deslizamientos $\sigma_t = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$, y σ_m es el valor donde ocurre un derrape en la

rueda (gira libremente o esta completamente detenida). El análisis a detalle se presenta en [39].

2.7. Modelado de fuerzas en las llantas

Cuando se consideran condiciones nominales de manejo, esto es, un bajo deslizamiento en las llantas (tanto lateral como longitudinal) es una buena opción utilizar aproximaciones lineales para obtener las fuerzas en las llantas. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es mantener al vehículo estable incluso cuando existan condiciones críticas en el suelo, esto es piso mojado o sobre hielo, que puedan provocar un alto deslizamiento en la llanta y por lo tanto la pérdida de control sobre la misma.

Existen modelos analíticos que pueden representar de manera adecuada las fuerzas en las llantas, sin embargo, se han observado discrepancias especialmente cuando se combinan altos deslizamientos longitudinales y laterales [41].

Se han investigado las causas por las cuales estos modelos sufren de diferencias en esos casos y se han llegado a modelos analíticos de una complejidad considerable a comparación del modelo base, por lo cual se ha optado por obtener un modelo empírico, existen diversas alternativas y en este trabajo consideraremos la denominada *Magic Formula* ([5], [45]).

La denominada *Magic Formula* proporciona un método para calcular las fuerzas longitudinales y laterales de la llanta F_x y F_y respectivamente incluso cuando existan condiciones de alto deslizamiento.

Para ello, se define una función que depende de algunos parámetros que son previamente detallados (véase [5]) y cuya magnitud en este trabajo será definida como y_c . En el caso más sencillo donde solamente se genera fuerza lateral o longitudinal, definiremos a *Force* como la variable que representa la amplitud de la fuerza, la cual puede ser expresada en función de una variable S_c cuyo significado físico será definido posteriormente. Entonces y_c se expresa como

$$y_c = D \sin [C \arctan (Bx_c - E(Bx_c - \arctan Bx_c))] \quad (2.43)$$

con

$$Force = y_c(S_c) + S_v, \quad x_c = S_c - S_h \quad (2.44)$$

donde *Force* es la salida, ya sea fuerza longitudinal o lateral y toma en cuenta un *offset* vertical; S_c es la variable de entrada, ya sea el slip angle α o el *slip ratio* σ_x . Se puede observar el comportamiento de la salida *Force* con respecto a la variable x_c (la cual toma en cuenta a la entrada S_c y un *offset* horizontal) en la Figura 2.17.

Los parámetros B , C , D , E , S_v , γ , S_h se denominan como

- B - Stiffness factor
- C - Shape factor
- D - Peak value
- E - Curvature factor
- S_h - Horizontal shift
- S_v - Vertical shift

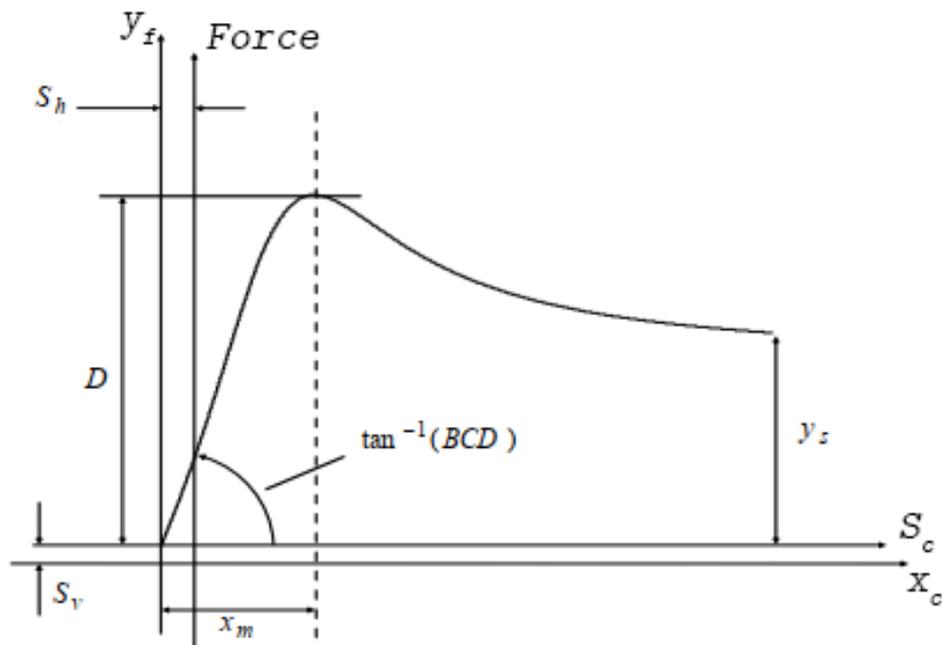


Figura 2.17: Diagrama *magic formula* (Rajamani [41])

Estos parámetros están en función de la fuerza normal F_z (cabe resaltar que para implementar se toma como una constante, pero debido a los efectos de la transferencia de carga entre las llantas del vehículo, esta variable puede ser de gran importancia) y el ángulo de inclinación de la rueda, por ejemplo

$$\begin{aligned}
 D &= a_1 F_z^2 + a_2 F_z \\
 BCD &= a_3 \sin(a_4 \arctan(a_5 F_z)) \\
 E &= a_6 F_z + a_7 F_z + a_8
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

Más información acerca de los parámetros B , C , D , E , S_v , γ , S_h así como los coeficientes a_1 , a_2 , ... a_8 pueden ser consultados en el artículo original de 1987 [5].

La fórmula es capaz de reproducir resultados muy cercanos a las curvas obtenidas con datos experimentales [6].

2.8. ABS (sistema de frenos anti bloqueo)

Los sistemas que previenen el bloqueo del eje en las llantas son conocidos como *Anti-Lock Brake System* (ABS, por sus siglas en inglés) ([42], [13]). Originalmente se diseñaron para prevenir el bloqueo cuando se requería mucha fuerza de frenado, sin embargo, en la actualidad, además de cumplir con ese objetivo se pretende que maximicen la fuerza que las ruedas son capaces de ejercer, es decir mantienen el deslizamiento longitudinal (*slip ratio* σ_x) cercano a su valor óptimo [31], éste es su principio de operación.

Cuando una rueda (o varias) entra en el estado de bloqueo, su *slip ratio* corresponde a un valor cercano a 1 $\sigma_x \approx 1$. Esto quiere decir que las fuerzas longitudinales que se ejercen son subóptimas y por lo tanto, en un escenario de frenado tomaría más distancia para detenerse completamente.

Además, cuando se presenta en un bloqueo en los ejes de las llantas responsables de dirección (generalmente las delanteras), será difícil (incluso imposible) maniobrar el vehículo.

Si el conductor decide presionar el pedal de freno de manera brusca, las llantas disminuirán su velocidad considerablemente más rápido que el vehículo, esto resultará en un mayor *slip ratio*, debido a que

$$\text{Slip ratio} = \sigma_x = \left(\frac{V_x - r_{eff}\omega_w}{V_x} \right). \quad (2.46)$$

Entonces, se pretende que el sistema ABS module de alguna manera la fuerza en cada llanta para prevenir que se presente un bloqueo.

El funcionamiento básico de un sistema del ABS está basado en la modulación de la presión hidráulica [31] en tres acciones

- Reducir
- Mantener
- Aumentar

Para evitar que la rueda entre en un estado de bloqueo se requiere reducir la presión hidráulica presente en los frenos del vehículo, esto causará que el *slip ratio* $\sigma_x \rightarrow 0$ debido a que cuando se reduce la presión en los frenos la rueda podrá girar con más libertad. Sin embargo, se requiere que el vehículo siga ejerciendo una fuerza de frenado, por lo

cual, la reducción debe de pasar a una etapa donde se mantiene la presión hidráulica y posteriormente se aumenta una vez que el peligro de bloqueo se haya evitado. De manera física existe una diversidad de configuraciones posibles para implementar este sistema, por ejemplo (4 canales, 4 sensores), (3 canales, 3 sensores), (1 canal, 1 sensor). Cada canal cuenta con una válvula controlada por el sistema ABS. Dependiendo de la posición de la válvula, la presión hidráulica es reducida, mantenida o aumentada.

Cuando la válvula se abre, la presión del cilindro maestro es entregada al freno, esto provoca que la presión indicada por el conductor se vea reflejada totalmente en el freno. Cuando la válvula se cierra, el freno es aislado de la presión del cilindro maestro, esto provoca que incluso cuando el conductor pretenda ejercer más presión, esta no será reflejada en el freno. La válvula también puede reducir la fuerza de frenado liberando la presión que fue aislada en el freno.

Un problema que se presenta en los sistemas ABS es que el *slip ratio* σ_t no puede ser medido directamente si no es a través de costosos sensores, usualmente sólo se cuenta con las velocidades individuales de cada ruedas, por lo cual se requiere diseñar de algoritmos tomando en cuenta esta situación. Existen algoritmos para el sistema ABS basados en modelos matemáticos así como también basados en reglas como se puede observar en la Figura 2.18. En la Figura se aprecian 3 estados de operación principalmente, estos son, incrementar, reducir o mantener la presión entregada a los frenos. Esto depende de la aceleración en la velocidad angular de las ruedas, lo cual puede sugerir que la rueda esta a punto de bloquearse si, por ejemplo, se presenta una reducción de velocidad súbita.

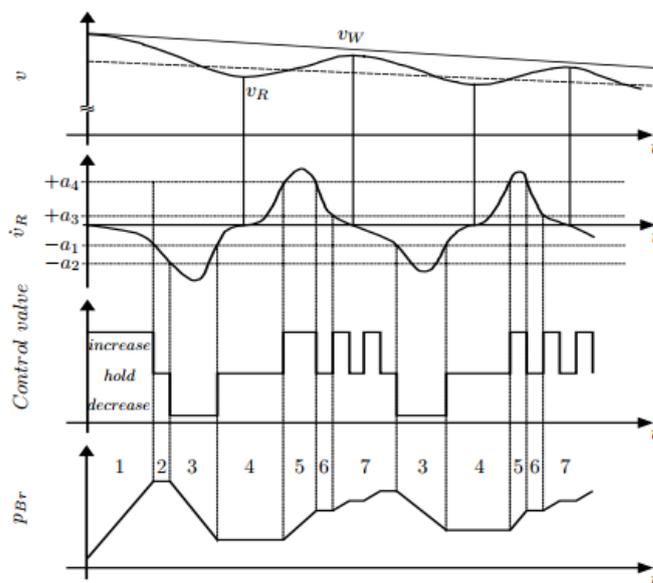


Figura 2.18: Ejemplo de ciclo de trabajo para sistema ABS (Kiencke and Nielsen [31])

2.9. Modelado del sistema de propulsión

La dinámica del sistema de propulsión de un vehículo juega un papel clave en la transferencia de energía desde el motor hacia el suelo [41]. El diagrama esquemático de la Figura 2.19 muestra los principales componentes de el sistema de propulsión.

Las fuerzas longitudinales en las llantas son las encargadas de hacer que el vehículo avance. Estas fuerzas, a su vez dependen de la diferencia entre la velocidad rotacional de las llantas $r_{eff}\omega_w$ y la velocidad longitudinal del vehículo V_x .

La velocidad rotacional del vehículo ω_w esta influenciada de manera directa con el sistema de propulsión.

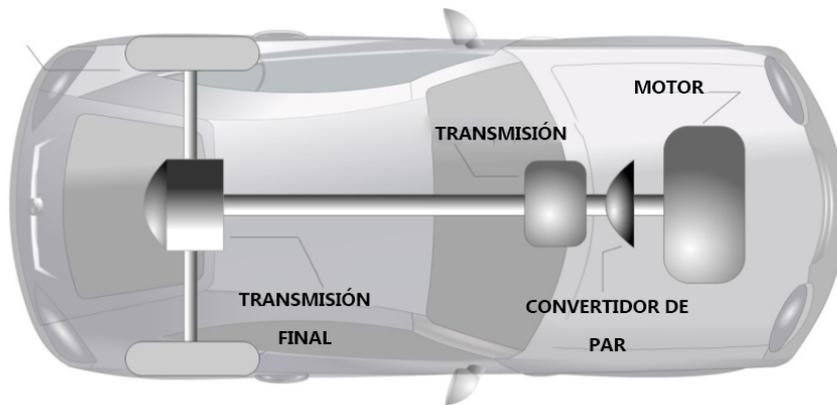


Figura 2.19: Sistema de propulsión / *Powertrain* (Rajamani [41])

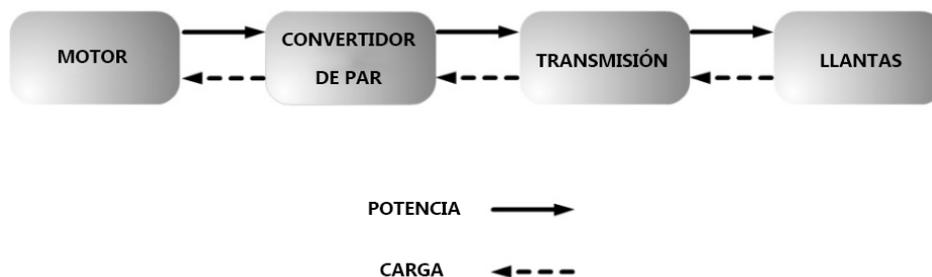


Figura 2.20: Componentes principales del sistema de propulsión (Rajamani [41])

El convertidor de par (*Torque converter*) es un tipo de cople mecánico que conecta al motor con la transmisión [41], el flujo de señales que entran a este subsistema puede observarse en la Figura 2.20. Si el motor está girando lentamente, como cuando el vehículo está detenido en una luz roja, el par convertido en este elemento es muy pe-

queño, por lo cual mantener al vehículo detenido solo requiere que se presione el pedal de freno levemente.

Los convertidores de par modernos pueden multiplicar hasta 3 veces el par generado por el motor. Esto solo sucede cuando el motor esta girando mucho más rápido que la transmisión, a una velocidad angular mayor, la transmisión está girando casi a la misma velocidad que el motor.

Los elementos importantes de un convertidor de par son una bomba, una turbina y el fluido encargado del cople mecánico. La bomba está conectada mecánicamente a la flecha del motor, básicamente girando a la misma velocidad. La turbina está conectada a la transmisión y esto provoca que la transmisión gire a la misma velocidad que la turbina. La bomba y la turbina están acopladas mecánicamente por medio de un fluido.

Para modelar a este sistema es posible utilizar una regresión cuadrática ajustada a datos experimentales, la cual involucra las velocidades de entrada y salida y los pares del convertidor [32].

Sea T_p el par en la bomba y T_t el par en la turbina, así como $\omega_p (= \omega_e)$ la velocidad angular en la bomba (que es igual a la velocidad en el motor) y ω_t la velocidad angular en la turbina.

Los pares están dados por

$$\begin{aligned} T_p &= 3.4^{-3} \omega_p^2 + 2.22^{-3} \omega_p \omega_t - 4.6^{-3} \omega_t^2 \\ T_t &= 5.7^{-3} \omega_p^2 + 0.3^{-3} \omega_p \omega_t - 5.4^{-3} \omega_t^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

La Figura 2.21 muestra las entradas y salidas de este componente.



Figura 2.21: Descripción a bloques del convertidor de potencia / *Torque converter* (Rajamani [41])

El siguiente elemento es la transmisión. Ésta es encargada de multiplicar el par generado por el motor hacia las ruedas. Sea R la razón de engrane de la transmisión (que incluirá la razón de engrane del diferencial). En general, $R < 1$ e incrementa proporcio-

nalmente (de manera manual o automática) a mayores velocidades.

Sea T_t el par de la turbina del convertidor la entrada al sistema de la transmisión. El par transmitido a las ruedas estará definido como T_w . En estado estable (sin tomar en cuenta el periodo que toma realizar el cambio de razón de engrane [12]), se tiene que

$$T_w = \frac{1}{R}T_t. \quad (2.48)$$

De manera similar, la relación entre la velocidad angular de la turbina (en el convertidor) y la velocidad angular de las ruedas es

$$\omega_t = \frac{1}{R}\omega_w. \quad (2.49)$$

El diagrama esquemático presentado en la Figura 2.22 muestra las entradas y salidas al sistema de la transmisión



Figura 2.22: Flujo de señales en transmisión (Rajamani [41])

El siguiente elemento a analizar es el motor. Su dinámica rotacional puede ser descrita por la siguiente ecuación

$$I_e \dot{\omega}_e = T_i - T_f - T_p \quad (2.50)$$

donde T_i es el par de combustión del motor, T_f son pérdidas de par debido a la fricción, T_p es el par de la bomba y representa la carga hacia el motor.

Generalmente se realiza la siguiente agrupación $T_i - T_f = T_e$ Que representa el par total entregado por el motor, y depende de la dinámica en el múltiple de admisión del motor y en la aceleración requerida por el conductor (por medio del pedal de aceleración).

Mientras que T_e puede ser obtenido analíticamente, generalmente se opta por obtenerlo mediante *Look-up tables* (tablas que calculan valores de manera óptima a partir de una entrada de datos) que entregan este valor tomando en cuenta principalmente

- Par en la turbina (carga)
- Aceleración requerida (posición de pedal)
- Velocidad angular de la turbina.

En este trabajo utilizamos *lookup tables* para simular el comportamiento de la dinámica del motor. En la Figura 2.23 se muestra un ejemplo.

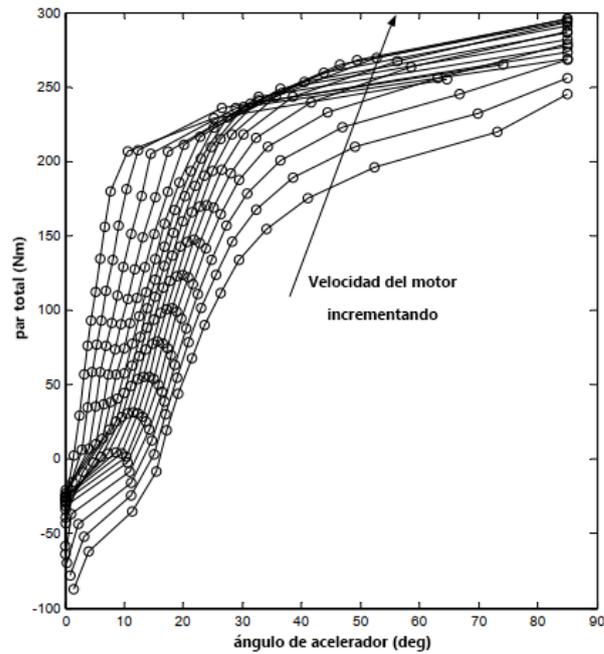


Figura 2.23: *Lookup table* que relaciona la aceleración requerida con el par entregado (Rajamani [41])

El diagrama esquemático de la Figura 2.24 representa las entradas y salidas del sistema del motor



Figura 2.24: Flujo de señales en el subsistema del motor (Rajamani [41])

La dinámica presente en las llantas (considerando, por ejemplo, que la potencia del motor va únicamente a las llantas frontales) está dada por las siguientes expresiones. Para llantas frontales

$$I_w \omega_{wf} = T_{wheel} - r_{eff} F_{xf} \quad (2.51)$$

donde T_{wheel} , ω_{wf} y r_{eff} se describieron anteriormente y F_{xf} es la fuerza longitudinal en las llantas frontales.

Para llantas traseras

$$I_w \omega_{wr} = -r_{eff} F_{xr} \quad (2.52)$$

la fuerza longitudinal total esta dada por

$$F_x = F_{xf} + F_{xr}. \quad (2.53)$$

En la Figura 2.25 se muestra el flujo de señales que entran y salen de este subsistema.



Figura 2.25: Flujo de señales a las llantas (Rajamani [41])

2.10. Discusión

En este capítulo, se analizaron los componentes principales que integran el modelo matemático de un vehículo terrestre, tales como el tren de potencia, y cómo este se vincula con la dinámica presente en las llantas. Asimismo, se examinó la dinámica del centro de masas del vehículo mediante las leyes de balance de fuerza de Newton.

Estos elementos son cruciales para representar de manera explícita la dinámica del *yaw rate*, que será la variable de interés durante el diseño del controlador por modos deslizantes en los próximos capítulos.

Capítulo 3. Preliminares matemáticos y análisis de estabilidad

El control por modos deslizantes es una técnica de diseño con características atractivas para sistemas dinámicos con incertidumbres paramétricas, ciertas clases de perturbaciones, no linealidades, etc [49]. Esto la vuelve una técnica adecuada para nuestro problema en cuestión, en el cual se presentan las situaciones mencionadas anteriormente. En este capítulo se revisarán los conceptos principales de esta metodología de control así como también se revisará la forma normal para sistemas dinámicos no lineales.

3.1. Introducción al control por modos deslizantes

El control por modos deslizantes de primer orden es generalmente el primer acercamiento que se utiliza para describir el concepto de este método de diseño, esto debido a que las matemáticas involucradas son sencillas de comprender, además de que técnicas más avanzadas siguen la misma línea de pensamiento.

Se considerará un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector que representa el estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control y $d \in \mathbb{R}^q$ es la perturbación externa y/o incertidumbre del sistema. Se considera que el espacio vectorial $f(\cdot)$ es diferenciable con respecto a x y absolutamente continuo con respecto al tiempo.

De manera conceptual la variable deslizante s se refiere a una variable artificial que se introduce en el sistema de control para asegurar que la dinámica del sistema se comporte de una manera deseada, especialmente en presencia de perturbaciones o incertidumbres.

Una definición formal se presenta a continuación. Considérese una superficie en el espacio de estados dada por

$$S_0 = \{x : s(x) = 0\}. \quad (3.2)$$

Definición 1. Un deslizamiento (sobre la variable s) ideal ocurre cuando los estados $x(t)$ evolucionan con respecto al tiempo de manera que $s(x(t_r)) = 0$ para un tiempo finito $t_r \in \mathbb{R}^+$ y $s(x(t)) = 0$ para todo $t > t_r$.

Durante un deslizamiento ideal, ocurre efectivamente un colapso dinámico, lo cual implica que la evolución del sistema esta restringida a S_0 la cual está diseñada para ser de un orden dinámico menor al sistema original [17].

Si la acción de control u en (3.1) es discontinua, la ecuación diferencial que describe el sistema en lazo cerrado está escrita como

$$\dot{x} = f^c(x)$$

entonces la función f^c es discontinua con respecto al vector de estados. La teoría de ecuaciones diferenciales clásica ya no es aplicable debido a que generalmente se utilizan la hipótesis de que el sistema es Lipschitz para garantizar la existencia de una solución única.

Para confrontar este problema se utiliza una solución propuesta por Filippov para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo [18], la solución esta dada por el promedio de las soluciones obtenidas cuando se acercan al punto de discontinuidad desde diferentes direcciones.

3.2. Control Equivalente

El control equivalente por definición, es la acción requerida para mantener un deslizamiento ideal sobre $s = 0$ [46], es decir, satisfacer las siguientes condiciones

$$s = \dot{s} = 0$$

y \dot{s} puede ser expresado como

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, d) = 0 \quad (3.3)$$

donde d es un término que representa las perturbaciones e incertidumbres del sistema, cuya estructura será establecida posteriormente. A partir de (3.3) llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, d) = 0. \quad (3.4)$$

Por ejemplo, considérese un sistema afín

$$f(x, u, d) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u + d. \quad (3.5)$$

La estructura del sistema asegura que el control aparece de manera lineal, de manera que

$$\frac{\partial s}{\partial x} \tilde{f}(x) + \frac{\partial s}{\partial x} \tilde{g}(x)u_{eq} + \frac{\partial s}{\partial x} d = 0, \quad (3.6)$$

donde u_{eq} denota que bajo esta expresión (3.6), se determina el control equivalente. Nótese que $\tilde{g}(x)$ debe ser no singular y para analizar el control equivalente u_{eq} , ciertas hipótesis serán introducidas sobre la perturbación.

Posteriormente vamos a diseñar el control para el sistema no lineal perturbado, donde se introducirán ciertas hipótesis sobre la perturbación. Una vez establecidas las hipótesis sobre la perturbación, un análisis de estabilidad será presentado.

3.3. Fase de alcanzabilidad

En esta sección se analizará el diseño de un control que obligue a la trayectoria del sistema a aproximarse a la superficie deslizante, a esta etapa de diseño, se le conoce como etapa de alcanzabilidad [46]. Y posteriormente, en otra etapa, mantenerse en la superficie deslizante.

Con el objetivo de forzar la trayectoria hacia la superficie deslizante, podemos establecer la siguiente formulación matemática

$$\dot{s} = -\eta \text{sign}(s) \quad (3.7)$$

donde η es una constante positiva. Esta condición se conoce como condición de alcanzabilidad.

Para hacer evidente los resultados de esta condición utilizaremos a manera de ejemplo un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma

$$f(x, u) = Ax + Bu = \dot{x} \quad (3.8)$$

el cual es un caso particular para cuando $f(x) = Ax$ y $g(x) = B$. Además, se considerara el caso sin presencia de perturbaciones. Donde $x \in \mathbb{R}^n$ $u \in \mathbb{R}^m$, A y B son matrices de valores constantes de dimensiones adecuadas.

Entonces, considerando que la variable deslizante s ha sido definida como $s = Kx$ donde

$$K = [k_1, k_2, \dots, k_n] \quad k_i > 0$$

tomando la derivada de la superficie deslizante s con respecto al tiempo y considerando nuestro sistema lineal invariante en el tiempo (3.8) podemos ver lo siguiente resulta que

$$\dot{s} = K\dot{x} \longrightarrow \dot{s} = K(Ax + Bu) = 0. \quad (3.9)$$

Considerando que KB es invertible, entonces se tiene que el control u es

$$u = (KB)^{-1}(-KAx + u_{eq}) \quad (3.10)$$

de esta manera, (3.9) es simplemente

$$\dot{s} = u_{eq}. \quad (3.11)$$

Entonces, para cumplir con la condición de alcanzabilidad, el control equivalente se selecciona como

$$u_{eq} = -\eta \text{sign}(s). \quad (3.12)$$

Escogiendo el control u de esa forma eliminamos términos conocidos y agregamos un término adicional que nos ayuda a conseguir la forma que nos impone la condición de alcanzabilidad, por lo tanto, reemplazando (3.10) en (3.9)

$$\dot{s} = -\eta \text{sign}(s).$$

3.4. Teoría de Lyapunov

Recordando que el objetivo del control por modos deslizantes es llevar a la variable deslizante s a cero en tiempo finito y mantenerla en cero, se hará uso de la teoría de Lyapunov para analizar la convergencia del sistema en lazo cerrado.

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo (3.8), seleccionando la variable deslizante $s = Kx$ y una función de Lyapunov escalar V definida positiva de la siguiente manera

$$V = \frac{1}{2}s^2.$$

Derivando V con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(KAx + KBu).$$

Seleccionando el control u como en (3.10) resulta que

$$\dot{V} = s\dot{s} \implies \dot{V} = s(-\eta \text{sign}(s)).$$

Utilizando la siguiente equivalencia $|x| = x \cdot \text{sign}(x)$ que relaciona la función valor absoluto con la función signo

$$\dot{V} = -\eta|s| < 0. \quad (3.13)$$

La convergencia en tiempo finito se analiza utilizando una expresión equivalente para la condición de alcanzabilidad [46]

$$s\dot{s} = -\eta|s|. \quad (3.14)$$

Si realizamos un cambio de variable $v = \frac{1}{2}s^2$, su derivada en el tiempo es $\dot{v} = s\dot{s}$ y podemos ver también que $|s| = \sqrt{2v}$. Entonces utilizando (3.14), sigue que

$$\dot{v} = -\sqrt{2\eta}v^{1/2}$$

esto implica que

$$v^{1/2}(t) = v^{1/2}(0) - \sqrt{2\eta}t \quad (3.15)$$

entonces, el tiempo t_r , es decir $v^{1/2}(t) = 0$ es

$$t_r = \frac{v^{1/2}(0)}{\sqrt{2\eta}}. \quad (3.16)$$

3.5. Análisis del sistema *Dual Track*

En esta sección, se presenta una nueva representación del modelo no lineal *Dual Track* (2.37) - (2.38), esto con el objetivo de facilitar el análisis de estabilidad en lazo cerrado realizado en capítulos posteriores. Para alcanzar este objetivo se utiliza el teorema Input Output *Feedback Linearization* [36] para llevar al sistema *Dual Track* a una estructura conocida como forma normal.

Considere la siguiente representación del sistema *Dual Track*

$$\dot{x} = f(x) + g_1 u_1 + g_2 u_2, \quad y = x_3 = h(x) \quad (3.17)$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$ es el estado, u_1 y u_2 son las entradas al sistema además, $y \in \mathbb{R}$ es la salida a controlar. Entonces el sistema (3.17) se expresa de la siguiente manera

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 x_2 + D_1 D_M \left(\frac{x_2 + x_3 a}{x_1} \right) + P_1 \\ -x_3 x_1 + D_1 \left(\frac{x_3 b - x_2}{x_1} \right) - D_1 \left(\frac{x_2 + x_3 a}{x_1} \right) + P_2 \\ -D_2 \left(\frac{x_2 + x_3 a}{x_1} \right) - D_3 \frac{x_3 b - x_2}{x_1} + P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_4 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_5 \end{bmatrix} u_2 \quad (3.18)$$

donde

$$D_1 = \frac{C_f}{m} = 8.3, \quad D_2 = \frac{aC_f}{I_z} = 7.6, \quad D_3 = \frac{bC_f}{I_z} = 12.3, \quad (3.19)$$

$$D_M \leq \|\delta_v\| = 0.3, \quad T_M \leq \|T_s\| = 200. \quad (3.20)$$

D_M es la cota superior al ángulo del volante, T_M la cota superior al par producido por el motor y $P_1 - P_3$ serán las cotas superiores a las perturbaciones del sistema, cuyos valores son desconocidos. $D_1 - D_3$ son constantes con valores conocidos a partir del modelo nominal.

Realizando las mismas consideraciones de las cotas superiores, el vector g_1 tiene los siguientes valores

$$-1 \leq K_1 \leq 0, \quad -0.2 \leq K_2 \leq 0, \quad 0 \leq K_4 \leq 1. \quad (3.21)$$

En primera instancia se busca expresar al sistema en dos subsistemas, uno controlable y otro no controlable, este tipo de representación se conoce como forma normal

[36].

Considérese un sistema de una sola entrada y una sola salida (*Single input, single output, SISO*) descrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.22}$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$ es el estado, u es la entrada al sistema, $y \in \mathbb{R}$ es la salida a controlar.

Ahora introducimos el resultado referente a la forma normal.

Teorema 3.5.1. *Input Output Feedback Linearization* Se considera que el grado relativo del sistema ρ está bien definido. Entonces el sistema (3.22) es localmente parcialmente linealizabile con índice ρ por medio de una retroalimentación de estado, esto es, localmente equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, z), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-\rho} \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad 1 \leq i < \rho \\ \dot{z}_\rho &= v \\ y &= z_1\end{aligned}\tag{3.23}$$

Si y solo si $\rho \leq n$; donde n es la dimensión del sistema.

El teorema anterior utiliza los resultados del siguiente lema.

Lema 3.5.1. *Suponiendo que el grado relativo $\rho \leq n$ para el sistema (3.22) entonces existen $n - \rho$ funciones $\eta_i(x)$*

$$\eta_i(x), \dots, \eta_{n-\rho}(x), h(x), \dots, \mathcal{L}_f^{\rho-1}h(x)\tag{3.24}$$

$$\langle d\eta_i, g \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n - \rho\tag{3.25}$$

que forman un difeomorfismo local cerca del origen. Nótese que las funciones en (3.24) deben de cumplir con la condición (3.25). En coordenadas locales

$$(\eta, z) = (\eta(x), z(x)) = (\eta_1(x), \dots, \eta_{n-\rho}(x), z_1(x), \dots, z_\rho(x))\tag{3.26}$$

el sistema (3.22) está expresado

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} \quad 1 \leq i < \rho \\ \dot{z}_\rho &= \mathcal{L}_f^\rho h + u \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h = v \\ y &= z_1.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Para una demostración detallada de este lema, se refiere al lector a [36].

Debido a que el grado relativo de nuestro sistema $\rho = 1$ se debe de encontrar un difeomorfismo de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = T(x). \quad (3.28)$$

De acuerdo con el Lema 3.5.1, podemos elegir ϕ_i , $i = 1, 2$; tal que la siguiente condición se cumpla

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot g_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.29)$$

Para nuestro sistema solamente se necesita utilizar una entrada en un momento dado, entonces para el siguiente análisis se considera que $u_2 = 0 \rightarrow g_2 = 0$. Entonces

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot g_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_4 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.30)$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} K_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} K_4 &= 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} K_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} K_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Escogiendo ϕ_i , $i = 1, 2$ como

$$\eta_1 = \phi_1(x) = \left(\frac{x_2}{K_2} - \frac{x_1}{K_1} \right), \quad \eta_2 = \phi_2(x) = \left(\frac{x_3}{K_4} - \frac{x_1}{K_1} \right) \quad (3.32)$$

y sustituyendo en (3.31), resulta que

$$\frac{1}{K_2} K_2 + \left(-\frac{1}{K_1} K_1 \right) = 0, \quad \frac{1}{K_4} K_4 + \left(-\frac{1}{K_1} K_1 \right) = 0 \quad (3.33)$$

y así, se puede concluir que son solución al sistema de ecuaciones de acuerdo con la condición (3.29)

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \mathcal{L}_f \phi_1(x) \\ \dot{\eta}_2 &= \mathcal{L}_f \phi_2(x) \\ \dot{z}_1 &= \mathcal{L}_f h(x) + \mathcal{L}_g h(x) \cdot u. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Desarrollando cada ecuación de (3.34) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \mathcal{L}_{f(x)}\phi_1(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \right) \\
 &= f_1 \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) + f_2 \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) + f_3 \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \right) \\
 &= -f_1 \cdot \left(\frac{1}{K_1} \right) + f_2 \cdot \left(\frac{1}{K_2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

lo cual implica que

$$\dot{\eta}_1 = \frac{f_2}{K_2} - \frac{f_1}{K_1}. \tag{3.36}$$

De manera similar, para $\dot{\eta}_2$, se tiene que

$$\dot{\eta}_2 = \frac{f_3}{K_4} - \frac{f_1}{K_1}. \tag{3.37}$$

Por último, para \dot{z}_1

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= \mathcal{L}_f h + \mathcal{L}_g h \cdot u = \left(\frac{\partial h}{\partial x_3} \right) \cdot f_3 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_3} \right) \cdot g_1 \\
 &= f_3 + K_4 \cdot u.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

A partir de la dinámica controlable (3.38) se puede buscar una ley de control que estabilice z_1 , sin embargo, es necesario analizar la dinámica no controlable, es decir, la dinámica cero del sistema. A continuación se hace un análisis de la dinámica cero. Uno de los requisitos para utilizar la técnica de *Input Output Feedback Linearization* es que la dinámica interna y más específicamente, la dinámica cero sea estable [25]. Esto es, se aplica un control que force $z_1 \rightarrow 0$. Se presenta la siguiente definición para la estabilidad de la dinámica cero.

Definición 3.5.1. *Sistema de fase mínima. El sistema (3.22) con grado relativo $\rho \leq n$ se considera de fase mínima si su dinámica cero cuenta con un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen ($\eta = 0$).*

De acuerdo con (3.34) la dinámica cero queda expresada como

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \frac{1}{K_2} \left(-2D_1 \frac{x_2}{x_1} + P_2 \right) - \frac{1}{K_1} \left(D_1 D_M \frac{x_2}{x_1} + P_1 \right) \\
 \dot{\eta}_2 &= \frac{1}{K_4} \left((D_3 - D_2) \frac{x_2}{x_1} + P_3 \right) - \frac{1}{K_1} \left(D_1 D_M \frac{x_2}{x_1} + P_1 \right).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

A partir del siguiente cambio de variable $[\eta_1 \ \eta_2 \ z_1]^T = T(x)$ resulta que x está dada

por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{K_4} z_1 - K_1 \eta_2 \\ \frac{K_2}{K_4} z_1 + K_2 \eta_1 - K_2 \eta_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = T^{-1}(\eta, z_1). \quad (3.40)$$

Utilizando (3.40) en (3.39) resulta que

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \frac{1}{K_2} \left(-2D_1 \left(-\frac{K_2}{K_1} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \right) + P_2 \right) - \frac{1}{K_1} \left(D_1 D_M \left(-\frac{K_2}{K_1} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \right) + P_1 \right) \\ \dot{\eta}_2 &= \frac{1}{K_4} \left((D_3 - D_2) \left(-\frac{K_2}{K_1} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \right) + P_3 \right) - \frac{1}{K_1} \left(D_1 D_M \left(-\frac{K_2}{K_1} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \right) + P_1 \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Utilizando los valores numéricos en (3.21)-(3.20) para simplificar (3.41) resulta que

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -17.08 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \right) + P_{\eta_1} \\ \dot{\eta}_2 &= -1.43 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \right) + P_{\eta_2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde P_{η_1} y P_{η_2} son constantes que representan las perturbaciones del sistema. Ahora se debe comprobar que esta dinámica es estable. Para ello, definimos $P_{\eta_1} = 0$ y $P_{\eta_2} = 0$, para observar la dinámica nominal. Entonces, utilizando la teoría de Lyapunov analizamos la dinámica del sistema (3.42) y para ello se propone la siguiente función definida positiva

$$V(\eta) = \frac{1}{2 \cdot 17.08} \eta_1^2 + \frac{1}{2 \cdot 1.43} \eta_2^2 \quad (3.43)$$

derivando (3.43) en el tiempo se tiene

$$\dot{V}(\eta) = -\frac{\eta_1(\eta_1 - \eta_2)}{\eta_2} - \frac{\eta_2(\eta_1 - \eta_2)}{\eta_2}. \quad (3.44)$$

Simplificando, resulta que

$$\dot{V}(\eta) = \frac{1}{\eta_2} (-\eta_1^2 + \eta_2^2). \quad (3.45)$$

Podemos observar que $\dot{V}(\eta) = 0$ cuando $\eta_1 = \eta_2$ lo cual implica la estabilidad del sistema.

Se realiza una simulación numérica para analizar el comportamiento del sistema (3.42) y se obtiene el resultado mostrado en la Figura 3.1.

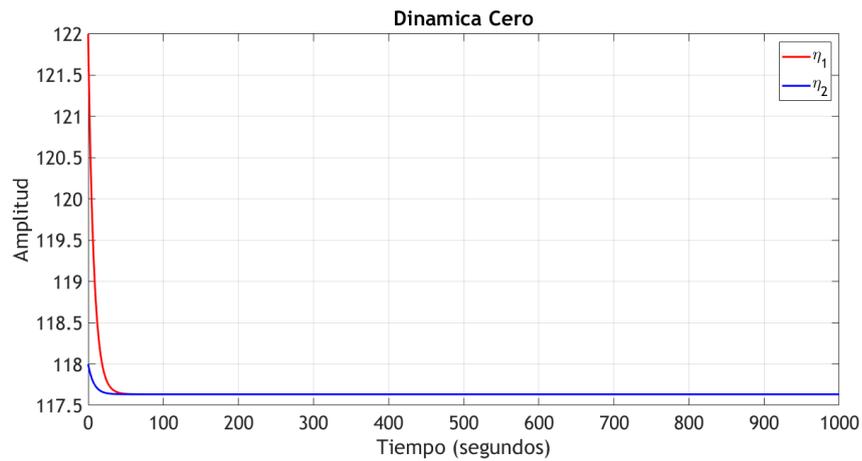


Figura 3.1: Evolución en el tiempo del sistema (3.42)

así mismo, se realiza una simulación del sistema (3.42) cuando las condiciones iniciales son iguales se obtiene el resultado mostrado en la Figura 3.2

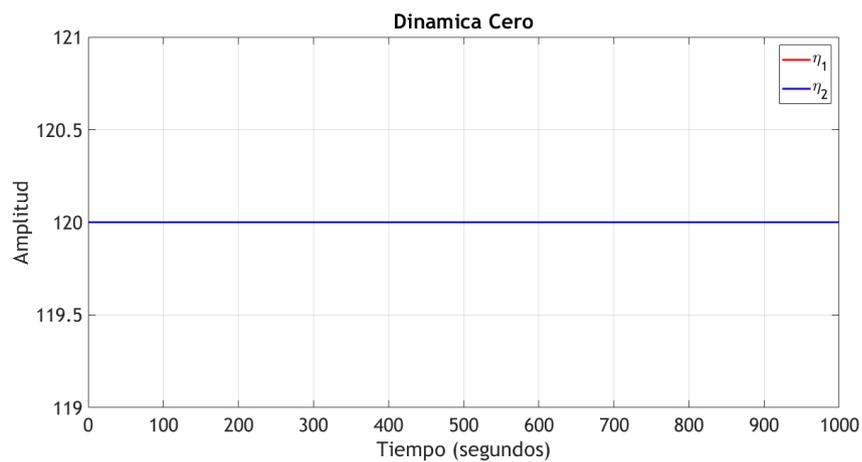


Figura 3.2: Evolución en el tiempo del sistema (3.42) en el caso $\eta_1 = \eta_2$

Con esto se establece que la dinámica cero es estable, sin embargo, no es asintóticamente estable, debido a que solo se mencionan condiciones para $\dot{V}(\eta) = 0$. Esto implica que la dinámica del sistema es de fase mínima débil.

3.6. Discusión

En este capítulo se abordan los conceptos principales del diseño de control por modos deslizantes con el objetivo de hacer evidente las ventajas que este presenta al momento de trabajar con sistemas dinámicos no lineales, con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, todas ellas características presentes en vehículos terrestres.

Asimismo, se analiza la estabilidad de la dinámica interna del modelo *Dual Track* y se establece la forma normal, cuya estructura facilita el análisis de convergencia al momento de realizar el diseño del control por modos deslizantes en el próximo capítulo.

Capítulo 4. Diseño de control basado en el algoritmo Super Twisting adaptativo (ASTWC)

En capítulos previos se describió a detalle el funcionamiento de el control por modos deslizantes convencional o de primer orden, sin embargo, a pesar de que proporciona una buena solución para sistemas con incertidumbres y/o perturbaciones externas sufre de el fenómeno *chattering* (oscilación de alta frecuencia en la señal de control) [55] lo cual lo convierte en una propuesta poco práctica. Distintas soluciones han sido propuestas para corregir este problema ([7], [16]).

En este capítulo se abordará una de los acercamientos más utilizados para evitar el fenómeno de *chattering*, denominado algoritmo Super Twisting. Se analizarán sus propiedades de convergencia en lazo cerrado para sistemas no lineales en presencia de perturbaciones [3].

4.1. Construcción matemática

Considérese el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + \delta \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ es el estado, $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control, $f(x)$ y $g(x)$ son términos no lineales, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema y δ es un término que representa la incertidumbre y/o perturbaciones del sistema.

Hipótesis 4.1.1. *Se considera que los términos $f(x)$ y $g(x)$ son globalmente Lipschitz con respecto a x .*

Definiendo una superficie deslizante S como $S = \vartheta e_1 + e_2$, donde $e_1 = x_1 - x_{ref}$ es el error de seguimiento, $e_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{ref}$ y $\vartheta > 0$ Entonces la dinámica de S está dada por

$$\dot{S} = \vartheta e_2 + f(x) + g(x)u + \delta - \ddot{x}_{ref}.\tag{4.2}$$

Escogiendo la ley de control u como

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-\vartheta e_2 - f(x) + \ddot{x}_{ref} + v_{st} \right)\tag{4.3}$$

donde v_{st} contiene al algoritmo Super Twisting

$$v_{st} = -2L_c^2|S|^{1/2}\text{sign}(S) + v, \quad \dot{v} = \begin{cases} -\frac{L_c^4}{2}\text{sign}(S) & \text{si } |v_{st}| < v_M \\ -v_{st} & \text{si } |v_{st}| \geq v_M \end{cases} \quad (4.4)$$

y el parámetro L_c del controlador será posteriormente determinado por una ley adaptativa. Entonces, (4.3) es un control por modos deslizantes Super Twisting (STWC).

El uso de una ley adaptativa es conveniente cuando la cota superior del término que acota las perturbaciones y/o incertidumbres en el sistema (δ) es desconocida, (véase por ejemplo [24], [19], [56]).

Cabe resaltar que el término v en (4.4) es resultado de un proceso de integración, por lo cual se requieren tomar medidas para evitar el fenómeno de *wind-up* el cual toma lugar cuando la acción de integración continúa a pesar de que el controlador esta saturado, por lo cual se especifica un límite superior v_M para el control STWC. A continuación se presenta un análisis de convergencia considerando que el control STWC está operando por debajo de este límite superior. Para un análisis considerando la operación por encima del límite, se refiere al lector a [46].

La dinámica de la superficie deslizante (4.2) en lazo cerrado con el control (4.3) esta dada por

$$\dot{S} = -2L_c^2|S|^{1/2}\text{sign}(S) + v + \delta, \quad \dot{v} = -\frac{L_c^4}{2}\text{sign}(S). \quad (4.5)$$

La convergencia a 0 en tiempo finito de la variable deslizante S y su derivada en el tiempo \dot{S} será revisada en un capítulo posterior.

Hipótesis 4.1.2. Sean δ y su derivada en el tiempo $\dot{\delta}$, funciones acotadas, esto es

$$|\delta(t)| \leq \delta_M, \quad |\dot{\delta}(t)| \leq \Delta_M$$

con $\delta_M, \Delta_M > 0$ de valor desconocido

Considérese el siguiente cambio de variable $Y_1 = S$ y $Y_2 = v + \delta$, entonces, tenemos al sistema (4.5) expresado como

$$\dot{Y}_1 = -2L_c^2|Y_1|^{1/2}\text{sign}(Y_1) + Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -\frac{L_c^4}{2}\text{sign}(Y_1) + d(t) \quad (4.6)$$

con $d(t) = \dot{\delta}(t)$.

Si ahora tomamos en cuenta el cambio de coordenadas dado por

$$\xi_1 = \frac{Y_1}{L_c^2}, \quad \xi_2 = \frac{Y_2}{L_c^2} \quad (4.7)$$

y derivando en el tiempo, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -2L_c|\xi_1|^{1/2}\text{sign}(\xi_1) + \xi_2 - \frac{2\xi_1\dot{L}_c}{L_c} \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{L_c^2}{2}\text{sign}(\xi_1) + \frac{d(t)}{L_c^2} - \frac{2\xi_2\dot{L}_c}{L_c}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Para simplificar la representación del sistema, consideramos nuevamente un cambio de variable

$$\varphi_1 = |\xi_1|^{1/2}\text{sign}(\xi_1), \quad \varphi_2 = \frac{\xi_2}{L_c}.\quad (4.9)$$

Entonces la dinámica del sistema (4.8) es representada de la siguiente manera

$$\dot{\varphi} = \alpha_c \left[(A_c - P_c^{-1}C_c^T C_c) \varphi + \Phi_c \right] - N_c \varphi \frac{\dot{L}_c}{L_c}\quad (4.10)$$

donde

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T, C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, P_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\quad (4.11)$$

y

$$\alpha_c = \frac{L_c}{2|\xi_1|^{1/2}}, \quad \Phi_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2|\xi_1|^{1/2}}{L_c^4} d(t) \end{bmatrix}.$$

Nótese que P_c es una matriz simétrica definida positiva, solución a la ecuación algebraica de Lyapunov

$$P_c + A_c^T P_c + P_c A_c - C_c^T C_c = 0.$$

Además nótese que $P_c N_c + N_c P_c = R_c$, siendo R_c una matriz simétrica definida positiva, entonces las siguientes desigualdades son satisfechas

$$\lambda_{\min}(P_c)\|\varphi\|^2 \leq \varphi^T P_c \varphi \leq \lambda_{\max}(P_c)\|\varphi\|^2\quad (4.12)$$

y

$$\lambda_{\min}(R_c)\|\varphi\|^2 \leq \varphi^T R_c \varphi \leq \lambda_{\max}(R_c)\|\varphi\|^2\quad (4.13)$$

dando lugar a la siguiente desigualdad

$$\varphi^T R_c \varphi \leq \frac{\lambda_{\min} R_c}{\lambda_{\max} P_c} \varphi^T P_c \varphi = \omega \varphi^T P_c \varphi\quad (4.14)$$

donde $\omega = \frac{\lambda_{\min} R_c}{\lambda_{\max} P_c}$ y $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ son valores propios, mínimos y máximos respectivamente.

Además, el término Φ_c satisface la siguiente hipótesis

Hipótesis 4.1.3. *Los términos en Φ_c son uniformemente acotados con respecto al control*

u y localmente Lipschitz con respecto a φ , esto es, $\exists \rho > 0$ que satisface $\|\Phi_c\| \leq \rho \|\varphi\|$

Entonces introducimos el siguiente resultado sobre la convergencia del algoritmo Super Twisting deslizante y deduciremos la ley de adaptación de la ganancia L_c

Teorema 4.1.1. *Considérese el sistema (4.6) y que las hipótesis 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3 son satisfechas. Además, el parámetro adaptativo L_c es solución de la ecuación*

$$\dot{L}_c = k_c (\omega^{1/2} |S|^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c^2) \quad (4.15)$$

para $k_c > 0$ y $\gamma_c > 0$ escogidas de manera adecuada. Entonces las trayectorias de (4.6) convergen a una vecindad del origen en tiempo finito.

4.2. Demostración del teorema del algoritmo Super Twisting adaptativo (ASTWC)

En las primeras etapas del desarrollo de los controladores por modos deslizantes de orden superior, las pruebas de convergencia se basaban en métodos de homogeneidad. En cambio, en trabajos más recientes ([47], [37]) se presenta una prueba de convergencia del algoritmo Super Twisting basado en un enfoque de la teoría de Lyapunov. En este trabajo, se aplica un metodo basado en Lyapunov [3].

Considérese una función de Lyapunov

$$V_{(\varphi, L_c)} = V_\varphi + V_{L_c} \quad (4.16)$$

donde $V_\varphi = \varphi^T P_c \varphi$ y $V_{L_c} = \frac{\gamma_c}{2} L_c^2$ para $\gamma_c > 0$

Entonces derivando la función de Lyapunov (4.16) con respecto al tiempo y sustituyendo los términos apropiados, resulta que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(\varphi, L_c)} = & -\alpha_c \varphi^T P_c \varphi - \alpha_c \varphi^T C_c^T C_c \varphi - \frac{\dot{L}_c}{L_c} \varphi^T (P_c N_c + N_c P_c) \varphi \\ & + \gamma_c \dot{L}_c L_c + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tomando en cuenta las desigualdades (4.12) - (4.14) y que $-\alpha_c \varphi^T C_c^T C_c \varphi < 0$ para $L_c > 0$, entonces (4.17) se expresa como

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\alpha_c V_\varphi - \frac{\dot{L}_c}{L_c} (\omega V_\varphi - \gamma_c L_c^2) + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c. \quad (4.18)$$

El término $(\omega V_\varphi - \gamma_c L_c^2)$ en (4.18) se puede factorizar como

$$(\omega V_\varphi - \gamma_c L_c^2) = (\omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} + \gamma_c^{1/2} L_c) (\omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c)$$

y definiendo $\beta_{(V_\varphi, L_c)} = (\omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} + \gamma_c^{1/2} L_c) > 0$ tenemos que

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\alpha_c V_\varphi - \beta_{(V_\varphi, L_c)} \frac{\dot{L}_c}{L_c} (\omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c) + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c. \quad (4.19)$$

Por otro lado, las desigualdades

$$|\xi_1| = |\varphi_1|^2 \leq \|\varphi\|^2, \quad \lambda_{\min}(P_c) \|\varphi\|^2 \leq V_\varphi \leq \lambda_{\max}(P_c) \|\varphi\|^2 \quad (4.20)$$

son satisfechas, donde $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ son los valores propios mínimo y máximo de P_c , respectivamente. Entonces, se tienen las siguientes desigualdades

$$|\xi_1|^{1/2} = \|\varphi\| \leq \left(\frac{V_\varphi}{\lambda_{\min}(P_c)} \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

donde $\xi_1 = \frac{Y_1}{L_c^2} = \frac{S}{L_c^2}$. Recordando la desigualdad (4.21), (4.19) es reescrita como

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\alpha_c V_\varphi - \beta_{(V_\varphi, L_c)} \frac{\dot{L}_c}{L_c} \left[\omega^{1/2} \left(\frac{|S|}{L_c^2} \right)^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c \right] + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c \quad (4.22)$$

definiendo la siguiente ecuación que determina la ley de adaptación de la ganancia del controlador

$$\dot{L}_c = \left[\omega^{1/2} \left(\frac{|S|}{L_c^2} \right)^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c \right] k_c L_c \quad (4.23)$$

y con $k_c > 0$, entonces, resulta que la ecuación de Lyapunov (4.22) puede ser reescrita como

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\alpha_c V_\varphi - k_c \beta_{(V_\varphi, L_c)} \left[\omega^{1/2} \left(\frac{|S|}{L_c^2} \right)^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c \right]^2 + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c. \quad (4.24)$$

A partir de (4.24) y tomando el segundo término de esta ecuación $\left[\omega^{1/2} \left(\frac{|S|}{L_c^2} \right)^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c \right]^2$, el cual debe ser diferente de cero, y tomando en cuenta que todos los términos en la expresión son positivos, entonces para que \dot{V} sea definida negativa se tiene que

$$\gamma_c \leq \omega \frac{|S(0)|}{L_c^4(0)} \quad (4.25)$$

donde $S(0)$ y $L_c(0)$ representan las condiciones iniciales de cada una de ellas. Entonces

tomando en cuenta lo anterior se tiene la siguiente desigualdad

$$M_c = \left[\omega^{1/2} \left(\frac{|S|}{L_c^2} \right)^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c \right]^2 > 0. \quad (4.26)$$

Además, recordando la definición de $\beta_{(\varphi, L_c)}$, (4.24) queda como

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\alpha_c V_\varphi - k_c M_c \left[\omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} + \gamma_c^{1/2} L_c \right] + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c \quad (4.27)$$

desarrollando el segundo término

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\alpha_c V_\varphi - k_c M_c \omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} - k_c M_c \gamma_c^{1/2} L_c + 2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c. \quad (4.28)$$

De la la hipótesis 4.1.3 y aplicando la norma del término $2\alpha_c \varphi^T P_c \Phi_c$, considerando (4.21), se tiene que

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\frac{L_c}{2|\xi_1|^{1/2}} [1 - \sigma_c] V_\varphi - k_c M_c \omega^{1/2} V_\varphi^{1/2} - k_c M_c \gamma_c^{1/2} L_c \quad (4.29)$$

donde

$$\sigma_c = \frac{2\varphi \|P_c\|}{\lambda_{\max} P_c}$$

entonces (4.29) se expresa como

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq - \left[\frac{L_c \lambda_{\min}^{1/2}(P_c)}{2} [1 - \sigma_c] + k_c M_c \omega^{1/2} \right] V_\varphi^{1/2} - k_c M_c \gamma_c^{1/2} L_c \quad (4.30)$$

y se define el siguiente término

$$\Gamma_c = \left[\frac{L_c \lambda_{\min}^{1/2}(P_c)}{2} [1 - \sigma_c] + k_c M_c \omega^{1/2} \right] > 0. \quad (4.31)$$

Entonces para garantizar la convergencia del algoritmo y la robustez ante cualquier perturbación, el término Γ_c , debe ser positivo. Por lo tanto, la siguiente condición debe ser satisfecha

$$k_c > \frac{L_c \lambda_{\min}^{1/2}(P_c)}{2M_c \omega^{1/2}} (1 - \sigma_c) \quad (4.32)$$

esto es

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\Gamma_c V_\varphi^{1/2} - \frac{k_c M_c \gamma_c^{1/2} L_c \sqrt{2}}{\sqrt{2}}. \quad (4.33)$$

Seleccionando $\varrho_c = \min[\Gamma_c, k_c M_c \sqrt{2}]$, entonces

$$\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\varrho_c \left[V_\varphi^{1/2} + \frac{\gamma_c^{1/2} L_c}{\sqrt{2}} \right]. \quad (4.34)$$

Utilizando la desigualdad de Jensen $[|a_c|^m + |b_c|^m]^{1/m} \leq |a_c| + |b_c|$ definiendo $a_c = V_\varphi^{1/2}$, $b_c = V_{L_c}^{1/2}$ y $m = 2$ La siguiente desigualdad es establecida

$$V_{(\varphi, L_c)}^{1/2} = [|V_\varphi^{1/2}|^2 + |V_{L_c}^{1/2}|^2]^{1/2} \leq |V_\varphi^{1/2}| + \frac{\gamma_c^{1/2} |L_c|}{\sqrt{2}}. \quad (4.35)$$

De esta manera, se tiene que $\dot{V}_{(\varphi, L_c)} \leq -\rho V_{(\varphi, L_c)}^{1/2}$. Entonces, $\dot{V}_{(\varphi, L_c)}$ es negativo definido y se asegura una convergencia en tiempo finito, para L_c suficientemente grande y $\rho > 0$.

4.3. Diseño de control para el seguimiento de trayectorias en el sistema *Dual Track*

En esta sección se detallará la implementación del algoritmo Super Twisting adaptativo en conjunto con el *feedback* linealizante para el seguimiento de la referencia deseada en presencia de perturbaciones y/o incertidumbres paramétricas.

Se supone que el sistema *Dual Track* (2.34)-(2.35) se representa en la forma normal, esto es, la dinámica del subsistema controlable y no controlable

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad 1 \leq i < \rho \\ \dot{z}_\rho &= \mathcal{L}_f^\rho h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h(x) \cdot u + \delta(\eta, z) \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde ρ es el grado relativo del sistema y δ es un término que acota todas las incertidumbres y/o perturbaciones del sistema. De este modo, se hará uso del teorema *input-output feedback linearization* 3.5.1 así como también de la teoría de modos deslizantes para resolver el problema de seguimiento de trayectoria robusto.

Para el análisis del seguimiento de trayectoria del subsistema controlable (4.36) es necesario expresar su dinámica en términos del error de seguimiento [29]

$$R = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} z_1 - r \\ \vdots \\ z_\rho - r^{\rho-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

donde R es un vector que contiene las $\rho-1$ derivadas de la señal de referencia r . Entonces

el sistema (4.37) se puede expresar en términos del error de seguimiento.

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= f_0(\eta, z) \\
 \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho \\
 \dot{e}_\rho &= \mathcal{L}_f^\rho h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h(x) \cdot u + \delta(\eta, z) - r^\rho \\
 y &= z_1.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Definiendo a $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h(x) = b(\eta, z_1)$ y $\mathcal{L}_f^\rho h(x) = a(\eta, z_1)$ como las funciones que representan la dinámica real del sistema. Empezamos el diseño por modos deslizantes seleccionando la variable deslizante como

$$s = \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i e_i + e_\rho \tag{4.39}$$

y, derivando en el tiempo

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{\rho-1} k_i e_{i+1} + a(\eta, z_1) + b(\eta, z_1) \cdot u + \delta(\eta, z_1) - r^\rho. \tag{4.40}$$

Escogiendo el control u como

$$u = -\frac{1}{b(\eta, z_1)} \left(\sum_{i=1}^{\rho-1} k_i e_{i+1} + a(\eta, z_1) - r^\rho + v \right) \tag{4.41}$$

con $b(\eta, z_1) \neq 0$ y reemplazando (4.41) en (4.40), se tiene que

$$\dot{s} = v + \delta(\eta, z_1). \tag{4.42}$$

Debido a que nuestro sistema tiene grado relativo igual a uno ($\rho = 1$), el análisis se facilita en gran manera. Escogemos la variable deslizante como

$$s = e_1. \tag{4.43}$$

Derivando (4.43) en el tiempo se tiene que

$$\dot{s} = (a(\eta, z_1) + b(\eta, z_1) \cdot u + \delta(\eta, z) - \dot{r}). \tag{4.44}$$

De manera particular, de acuerdo con (3.38)

$$a(\eta, z_1) = f_3. \tag{4.45}$$

Mientras que $b(\eta, z_1) = K_4$. Esto es debido a que se está realizando el análisis toman-

do en cuenta $u_1 \neq 0$, $u_2 = 0$. Escogiendo la ley de control u como

$$u = -\frac{1}{K_4} (f_3 - \dot{r} + v) \quad (4.46)$$

y sustituyendo (4.46) en (4.44) se tiene que

$$\dot{s} = v + \delta(\eta, z_1) \quad (4.47)$$

donde v es el controlador por modos deslizantes Super Twisting adaptativo

$$v = -2L_c^2 |S|^{1/2} \text{sign}(S) + u_{st}, \quad \dot{u}_{st} = \begin{cases} -\frac{L_c^4}{2} \text{sign}(S) & \text{si } |v| < V_M \\ -v & \text{si } |v| \geq V_M \end{cases} \quad (4.48)$$

y $V_M = 9$ sirve como límite para la ley de control, además L_c es el parámetro adaptativo que obedece a la siguiente ecuación

$$\dot{L}_c = k_c (\varpi^{1/2} |S|^{1/2} - \gamma_c^{1/2} L_c^2) \quad (4.49)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -2L_c^2 |S|^{1/2} \text{sign}(S) + u_{st} + \delta \\ \dot{u}_{st} &= -\frac{L_c^4}{2} \text{sign}(S) \end{aligned} \quad (4.50)$$

lleva a una estructura similar a (4.5). A partir de aquí se puede seguir el desarrollo presentado en el capítulo anterior para analizar la convergencia a la superficie deslizante.

4.4. Discusión

En este capítulo se revisó a detalle el algoritmo Super Twisting para el control de sistemas no lineales con presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas (ambas presentes en el modelo *Dual Track*); se destaca la atenuación del fenómeno de *chattering* presente en controladores por modos deslizantes de primer orden y se introduce un elemento de saturación que pretende evitar el sobrepaso de los límites físicos en los actuadores. También se presenta en detalle el análisis de convergencia a la superficie deslizante.

A continuación se realizará la implementación del algoritmo Super Twisting presentado en este capítulo. Será sujeto a distintos modelos, a variaciones paramétricas y también a perturbaciones externas a través de cambios en el coeficiente de fricción del suelo.

Capítulo 5. Resultados y conclusiones

5.1. Simulación del ASTWC en modelo *Dual Track*

En las siguientes secciones realizaremos la simulación del modelo de 3 grados de libertad *Dual Track* (2.33) cuyo vector de estados es $x = [u \ v \ r]'$. Recordando que u es la velocidad longitudinal, r es el *yaw rate* del vehículo y v es la velocidad lateral. Cuenta con las siguientes entradas de control $u_c = [F_{xfl} \ F_{xfr} \ F_{xrl} \ F_{xrr}]'$. Se implementa el control ASTWC para un seguimiento de trayectoria.

5.1.1. Referencia deseada para modelo *Dual Track*

De acuerdo a la teoría de dinámica de vehículos [41] y particularmente al modelo dinámico *single track* (o bicicleta), el ángulo del volante en estado estable requerido para establecer una trayectoria de radio R está dada por

$$\delta_{ss} = \frac{l_f + l_r}{R} + K_v a_y \quad (5.1)$$

donde K_v es el *understeer gradient* y está dado por

$$K_v = \frac{l_r m}{2C_{af}(l_f + l_r)} - \frac{l_f m}{2C_{ar}(l_f + l_r)}. \quad (5.2)$$

Combinando (5.1)-(5.2) y despejando R se obtiene

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta_{ss}}{(l_f + l_r) + \frac{m u (l_r C_{ar} - l_f C_{af})}{2C_{af} C_{ar} L}}. \quad (5.3)$$

Si suponemos condiciones nominales de manejo, podemos decir que el radio de la trayectoria del vehículo cambia lentamente debido a una baja velocidad [41], entonces el *yaw rate* del vehículo (r) debe ser igual a la velocidad angular del vehículo ($r = \frac{u}{R}$).

Entonces, la trayectoria deseada está representada por medio del *yaw rate* nominal, y esta es calculada en base a la siguiente expresión

$$r_t = u \frac{1}{R} \quad (5.4)$$

donde R se describió previamente y u es la velocidad longitudinal del vehículo. De ésta manera se obtiene la referencia deseada en base a parámetros del vehículo, el ángulo del volante y la velocidad longitudinal.

Este *yaw rate* objetivo es modificado para procurar una trayectoria segura en base a

las condiciones del suelo, obtenemos r_{des}

$$r_{des} = \begin{cases} r_t & \text{si } |r_t| < \frac{\mu g}{u} \\ \text{sign}(r_t) \frac{\mu g}{u} & \text{si } |r_t| \geq \frac{\mu g}{u} \end{cases} \quad (5.5)$$

5.1.2. Discusión del algoritmo ASTWC en modelo *Dual Track*

Para evaluar al algoritmo de control por modos deslizantes (ASTWC) en primera instancia se utiliza el modelo dinámico *Dual Track* definido en capítulos anteriores, el cual consta de 3 variables de estado.

Definiendo $u_c = [F_{xfl} F_{xfr} F_{xrl} F_{xrr}]'$ como el vector de control y, el vector de estados como $x = [u v r]'$ podemos escribir las ecuaciones de la siguiente forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u_c$

$$f(x) = \begin{bmatrix} rv - \frac{C_f}{m}(\delta_v - \frac{v+ra}{u})\delta_v \\ -ru + \frac{C_r}{m} \frac{rb-v}{u} - \frac{C_f}{m}(\frac{v+ra}{u} - \delta_v) \\ \frac{a}{I_z} C_f(\delta_v - \frac{v+ra}{u}) - \frac{b}{I_z} C_r \frac{rb-v}{u} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$g(x)u_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(F_{xfl} + F_{xfr} + F_{xrl} + F_{xrr}) \\ \frac{1}{m}\delta_v(F_{xfl} + F_{xfr}) \\ \frac{a}{I_z}\delta_v(F_{xfl} + F_{xfr}) + \frac{d}{2I_z}(F_{xfr} - F_{xfl}) + \frac{d}{2I_z}(F_{xrr} + F_{xrl}) \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Para proporcionar la presión hidráulica en los frenos de las ruedas traseras, se utiliza la presión hidráulica de las ruedas delanteras de acuerdo a (2.36). De esta manera, redefiniendo el vector de entrada de la siguiente manera $u_c = [P_{Bfl} P_{Bfr}]'$ (5.6) y (5.7) se reescriben como

$$f(x) = \begin{bmatrix} rv - \frac{C_f}{m}(\delta_v - \frac{v+ra}{u})\delta_v + \frac{1}{m} \frac{T_s}{r_w} \\ -ru + \frac{C_r}{m} \frac{rb-v}{u} - \frac{C_f}{m}(\frac{v+ra}{u} - \delta_v) + \frac{1}{m} \frac{T_s}{r_w} \delta_v \\ \frac{a}{I_z} C_f(\delta_v - \frac{v+ra}{u}) - \frac{b}{I_z} C_r \frac{rb-v}{u} + \frac{a}{I_z} \frac{T_s}{r_w} \delta_v \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Entonces se redefine el vector $g(x)$ de la siguiente manera

$$g(x)u_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m}(\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} + f_b(a_x) \frac{K_{Bf}}{r_{wf}})(P_{Bfl} + P_{Bfr}) \\ -\frac{1}{m} \delta_v \frac{K_{Bf}}{r_{wf}}(P_{Bfl} + P_{Bfr}) \\ g_{31}P_{Bfl} + g_{32}P_{Bfr} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde

$$g_{31} = \frac{1}{I_z} \left[\frac{d}{2} \left(\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} + f_b(a_x) \frac{K_{Br}}{r_{wr}} \right) - a \delta_v \frac{K_{Bf}}{r_{wf}} \right] \quad (5.10)$$

$$g_{32} = -\frac{1}{I_z} \left[\frac{d}{2} \left(\frac{K_{Bf}}{r_{wf}} + f_b(a_x) \frac{K_{Br}}{r_{wr}} \right) + a\delta_v \frac{K_{Bf}}{r_{wf}} \right]. \quad (5.11)$$

Para la implementación en simulink se utiliza el *solver* ode45 con un tiempo de integración máximo de 1e-3 y mínimo de 1e-4. El diagrama a bloques se muestra en la Figura 5.1.

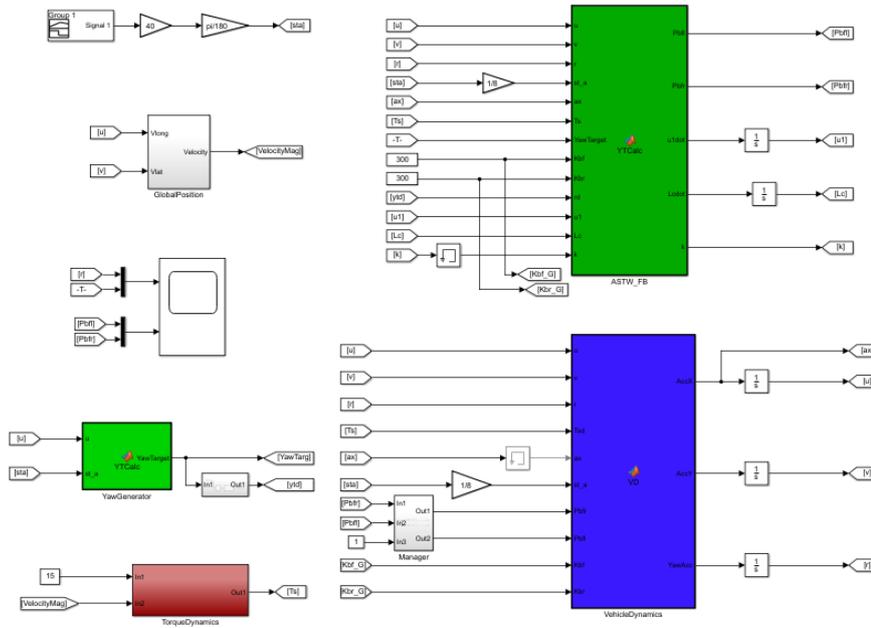


Figura 5.1: Diagrama esquemático en Simulink para el control de la dinámica del *yaw rate* del vehículo usando el control ASTWC

A continuación, se proporciona una descripción más detallada de cada bloque presentado en la figura anterior.

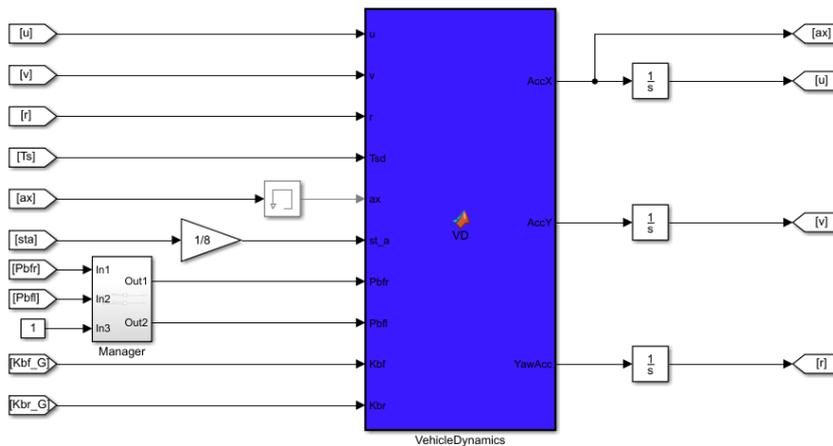


Figura 5.2: Entradas y salidas de la dinámica del vehículo representada por el modelo Dual Track.

En el bloque presentado en la Figura 5.2 se ejecuta a dinámica del modelo *Dual Track* (5.8) - (5.9).

Se utiliza un factor de escalamiento $1/8$ para representar la relación de engranaje entre el ángulo del volante δ y el ángulo en las ruedas.

El bloque *manager* es simplemente un seleccionador para ejecutar o no la señal de control, en donde el 1 representa control activo y 0 representaría control inactivo. El valor inicial de los integradores es 0, a excepción del primero ($AccX$), con un valor de $1e-3$. El código utilizado puede ser revisado en el Apéndice A2.

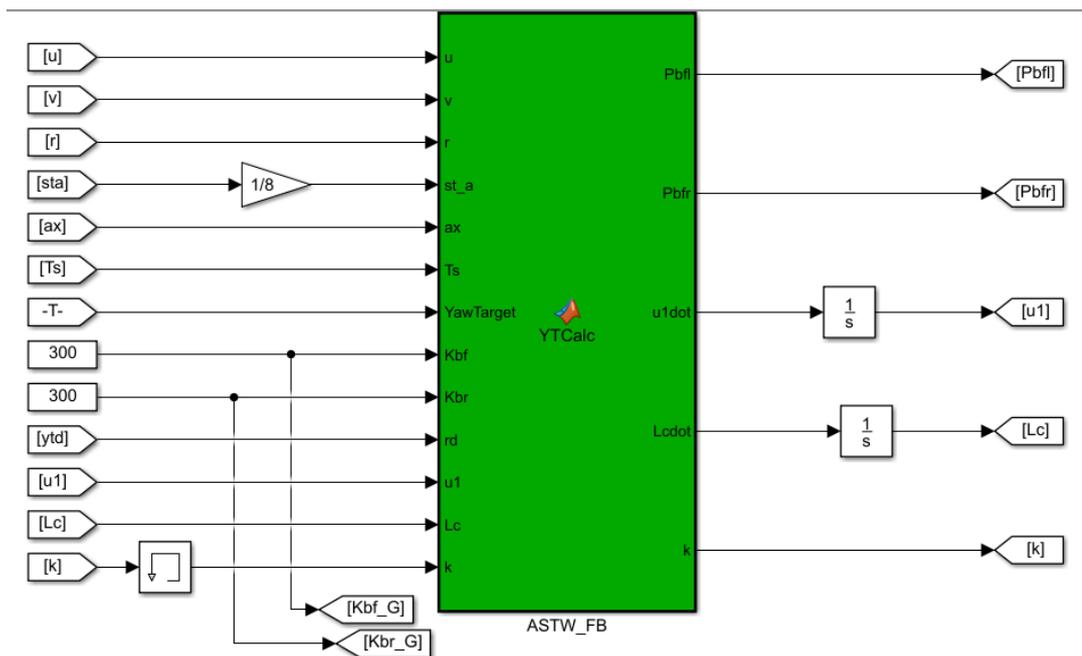


Figura 5.3: Entradas y salidas del controlador por modos deslizantes (ASTWC).

En el bloque presentado en la Figura 5.3 se ejecuta el control adaptativo por modos deslizantes Super Twisting, cabe destacar que también se utiliza el factor $1/8$ de manera similar al bloque descrito anteriormente (y por las mismas razones).

El bloque de memoria en k nos ayuda a inicializar una variable auxiliar. El integrador de Lc tiene una condición inicial de 3, obtenido empíricamente. El código utilizado puede ser revisado en el Apéndice A2.

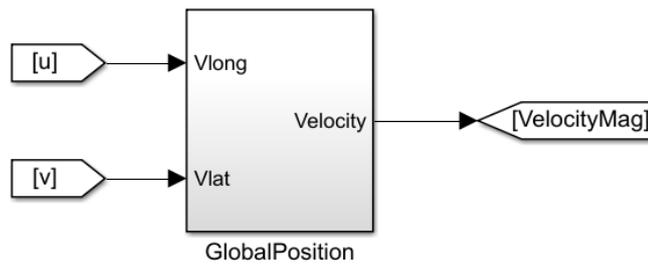
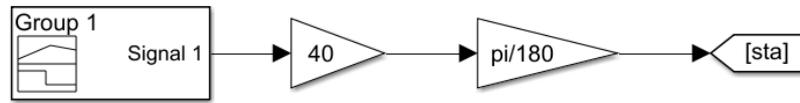


Figura 5.4: Bloque generador de referencia del volante y bloque que calcula posición absoluta del vehículo

En el primer bloque de la Figura 5.4 se genera una referencia en el volante a manera de *open loop* el cual es escalado por una constante y convertido a radianes, la señal del ángulo en el volante es entonces *sta* como se muestra en la Figura 5.5. El segundo bloque nos ayuda simplemente a obtener la velocidad resultante.

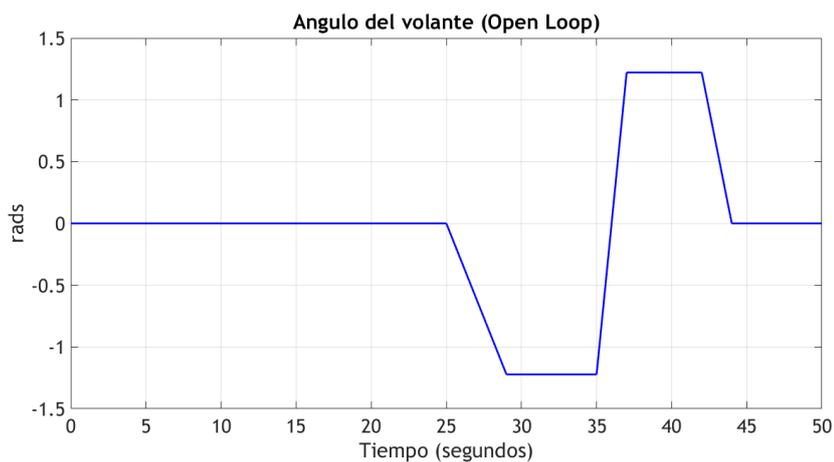


Figura 5.5: Señal en lazo abierto del volante

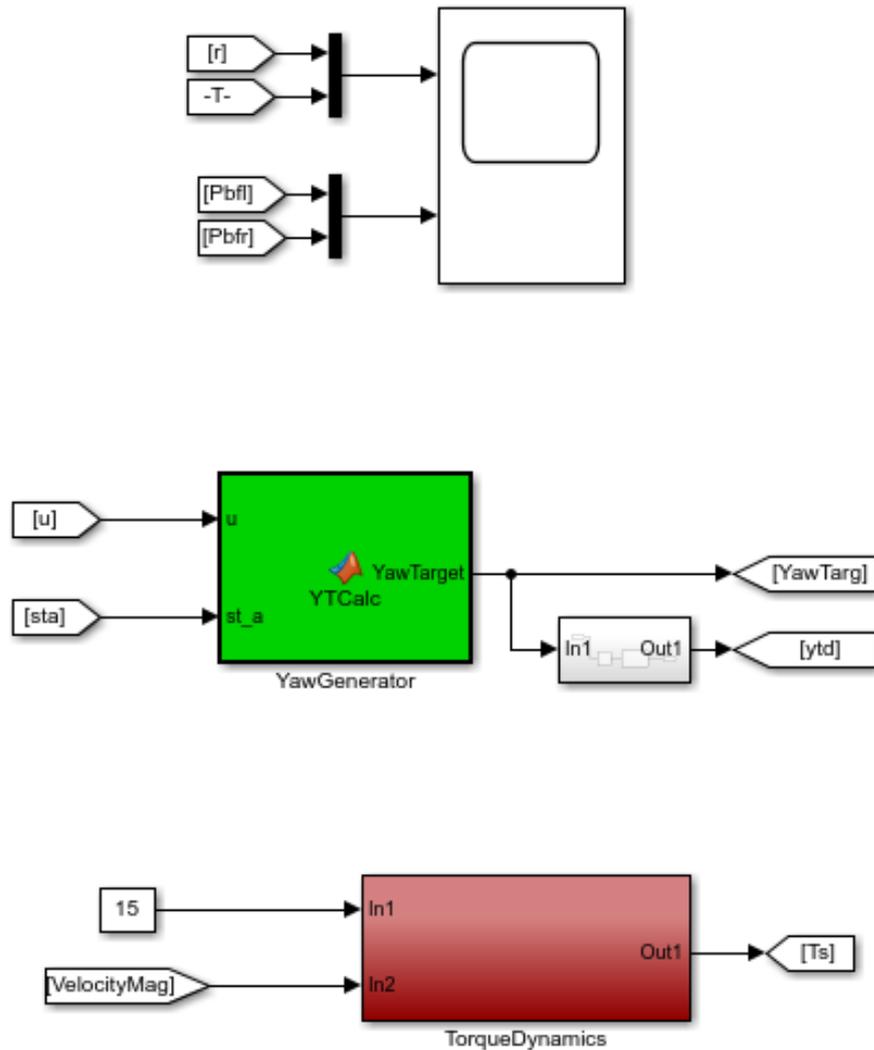


Figura 5.6: Bloque generador de referencia de *yaw rate* y bloque generador de par hacia el modelo dinámico

En el primer bloque de la Figura 5.6 se monitorea el desempeño del controlador. El segundo bloque genera la referencia a partir del ángulo del volante y la velocidad longitudinal, a su vez la referencia deseada será derivada numéricamente y a fin de evitar señales con ruido debido a la derivada se implementa un filtro pasa baja. El código del generador de referencia se puede consultar en el Apéndice A2.

A fin de proporcionar un par a las ruedas (como si contara con un motor), se implementa un Control PI cuyo objetivo será conseguir una velocidad de 15 m/s en este caso. A continuación se presentan los resultados obtenidos de esta simulación.

La Figura 5.7 muestra el seguimiento de referencia obtenido por el controlador. La referencia es la línea azul mientras que el sistema en lazo cerrado con el control ASTWC

es la línea punteada roja.

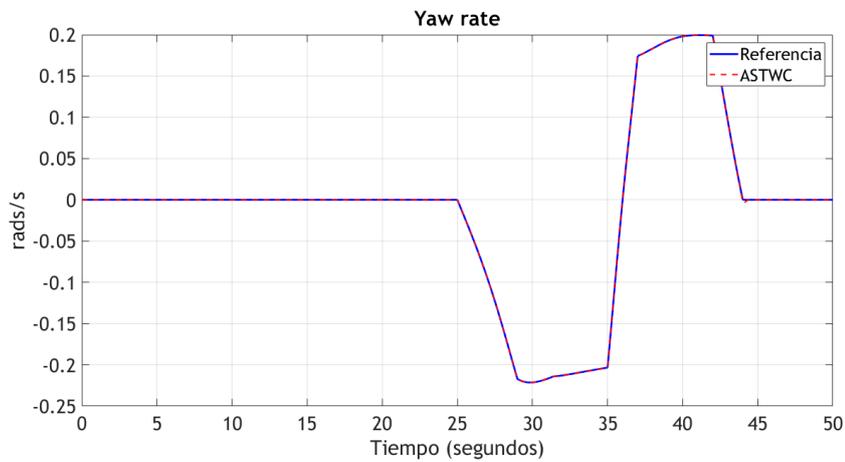


Figura 5.7: Seguimiento de referencia obtenido

La Figura 5.8 muestra la señal de control generada, se puede observar que se presenta el fenómeno de *chattering* de manera atenuada.

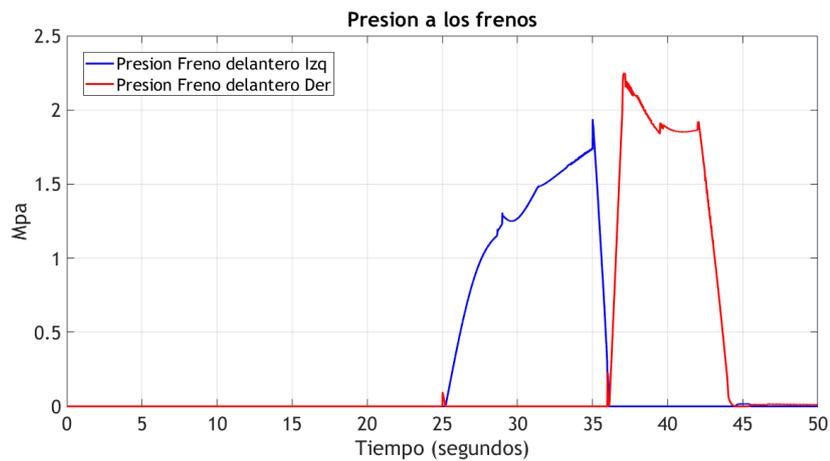


Figura 5.8: Señal de control generada por ASTWC

En la Figura 5.9 se observa como la variable deslizante se mantiene cercana a cero a lo largo de la prueba.

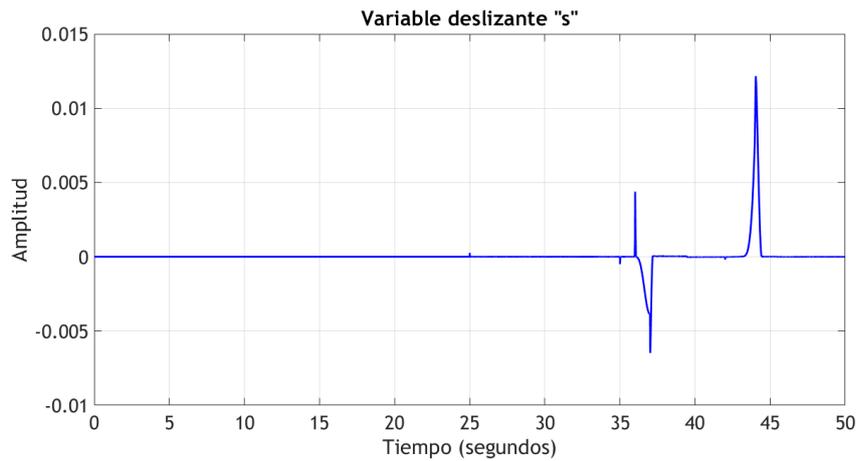


Figura 5.9: Variable deslizante s

Se obtiene un seguimiento de referencia satisfactorio, y cualitativamente se puede apreciar una señal de control continua en su mayoría, presentando el fenómeno (en algunas zonas) de *chattering* atenuado como se muestra en la Figura 5.10.

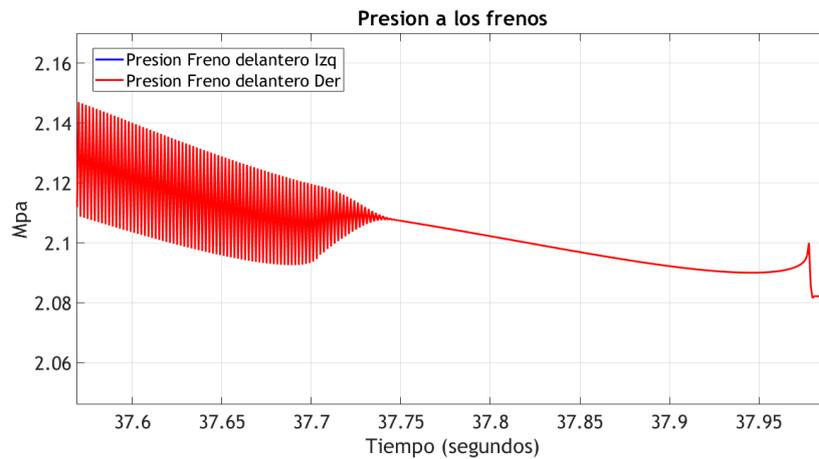


Figura 5.10: Chattering de baja amplitud

5.1.3. Simulación del algoritmo ASTWC en modelo aumentado *Dual Track*

En esta sección se considera el modelo *Dual Track* añadiendo la dinámica de las ruedas, es decir, se añaden 4 variables de estado, una para cada velocidad en cada rueda.

Considerando un vehículo con tracción delantera, se conserva la estructura de nues-

tro sistema original y se agregan las siguientes ecuaciones dinámicas

$$\begin{aligned}
 J_w \dot{\omega}_{fl} &= T_{dfl} - T_{bfl} - r_{eff} F_{xfl} \\
 J_w \dot{\omega}_{fr} &= T_{dfr} - T_{bfr} - r_{eff} F_{xfr} \\
 J_w \dot{\omega}_{rl} &= -T_{brl} - r_{eff} F_{xrl} \\
 J_w \dot{\omega}_{rr} &= -T_{brr} - r_{eff} F_{xrr}.
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

En donde J_w es la inercia de la rueda, ω_i es la velocidad angular en rad/s para cada rueda respectivamente, T_{dii} es el par transmitido desde el motor hacia las ruedas, T_{bii} es el par de frenado en cada rueda y finalmente F_{xii} es la fuerza longitudinal en cada rueda, la cual será obtenida en base al modelo de la *Magic Formula*.

De manera general, el par de frenado en cada rueda está en función a la presión, y suele ser proporcional, en donde se toman en cuenta diversos factores como el área de frenado en la rueda (área de las balatas, por ejemplo), el coeficiente de fricción de la rueda, el radio de el área de frenado en la rueda. Para efectos de simulación se escoge un factor de 300 para cada rueda, por lo cual el par de frenado es

$$T_{bii} = 300P_{brake}.$$
(5.13)

La diferencia que existe entre el modelo simple y este modelo es la manera de implementar las fuerzas presentes en cada rueda, por lo cual, en este modelo aumentado se opta por separar (para efectos de claridad) la dinámica del vehículo, la cual recibe las fuerzas ejercidas por las ruedas (tanto laterales como longitudinales) desde un bloque distinto como se muestra en la Figura 5.11.

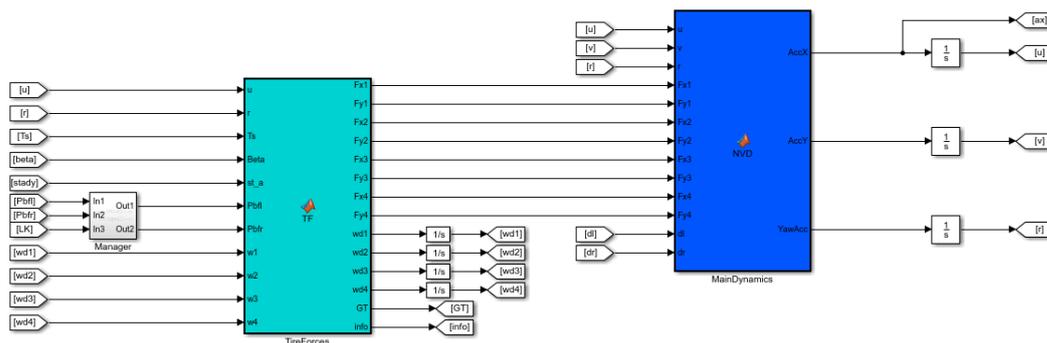


Figura 5.11: Diagrama esquemático del sistema aumentado

Se puede apreciar en la Figura anterior como se generan las fuerzas en un bloque distinto (la dinámica de la velocidad angular de cada rueda también se genera en este bloque) al bloque en donde se tiene la dinámica principal del vehículo. Los códigos

implementados se pueden consultar en el Apéndice A2.

De manera general (para efectos de simulación) se utiliza los mismos bloques en simulink. Sin embargo, debido a que en este modelo aumentado también se simula el sistema de propulsión (*powertrain*), se mencionarán los bloques añadidos a continuación

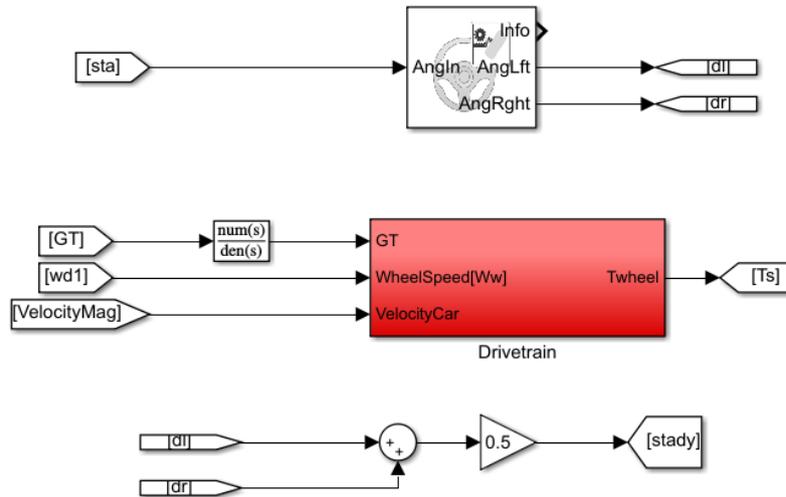


Figura 5.12: Bloques auxiliares añadidos para el caso del modelo aumentado Dual Track

El primer bloque de la Figura 5.12 representa la relación cinemática que existe entre el ángulo del volante y las ruedas, cabe mencionar que se opta por usar una configuración de cremallera y piñón.

El segundo bloque representa el sistema del sistema de propulsión, en donde se utiliza un filtro pasa baja para simular el transitorio que existe en el momento de efectuar un cambio en la relación de engranaje de la transmisión (GT). En la siguiente Figura 5.13 se muestra el sistema de propulsión implementado en simulink, se puede observar que el bloque utilizado para generar la potencia a la transmisión utiliza *lookup tables*.

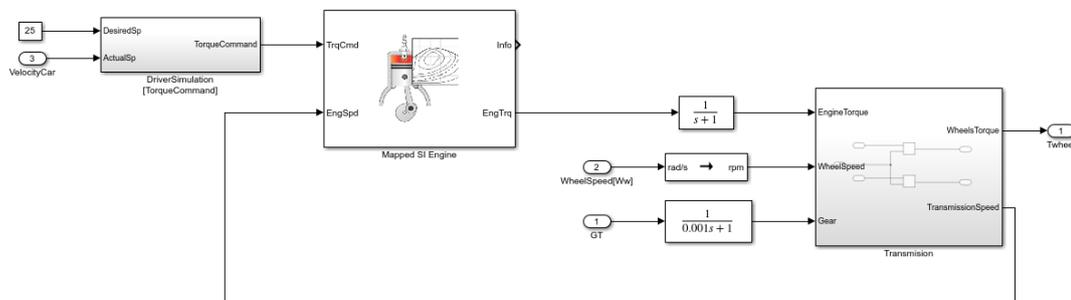


Figura 5.13: Bloques para sistema de propulsión

Para modelar el sistema de propulsión, en primera instancia se utiliza un modelo por medio de *look up tables* para la potencia del motor, el cual recibe una referencia a seguir dependiendo de la velocidad deseada y la velocidad actual del vehículo.

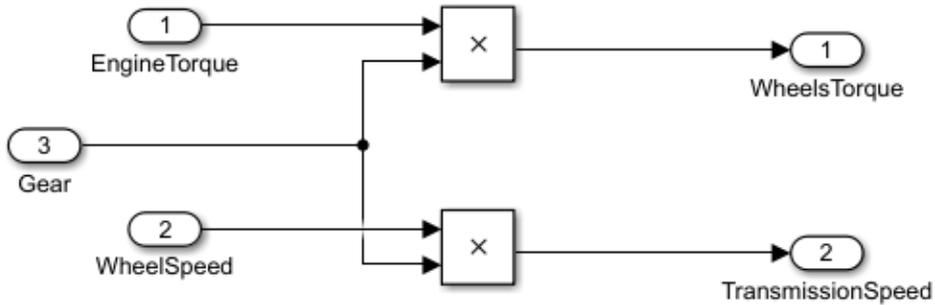


Figura 5.14: Bloques para la simulación de la transmisión

Como se puede ver en la Figura 5.14 se implementa una transmisión de acuerdo a (2.48)-(2.49) en simulink. Con este modelo *Dual Track* aumentado se obtuvieron los siguientes resultados.

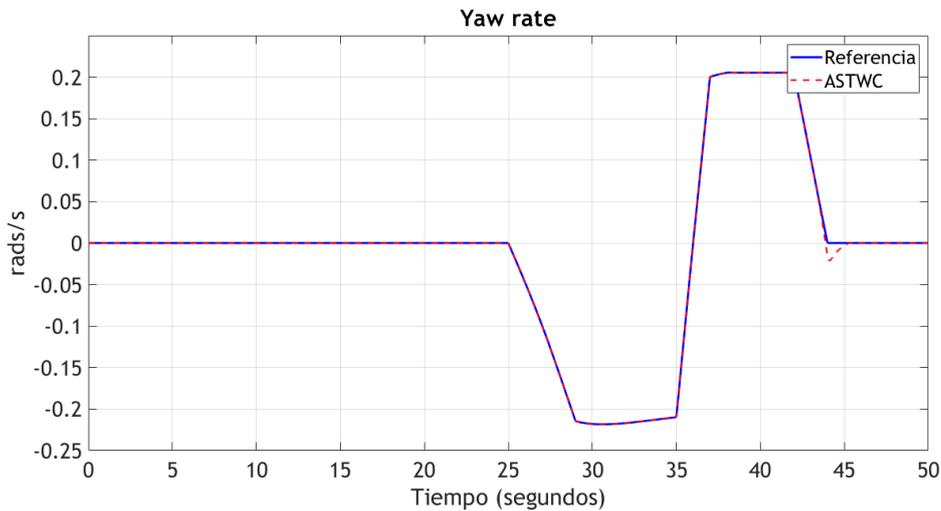


Figura 5.15: Seguimiento de trayectoria del control ASTWC

En la Figura 5.15 se observa como se obtiene un seguimiento de referencia satisfactorio.

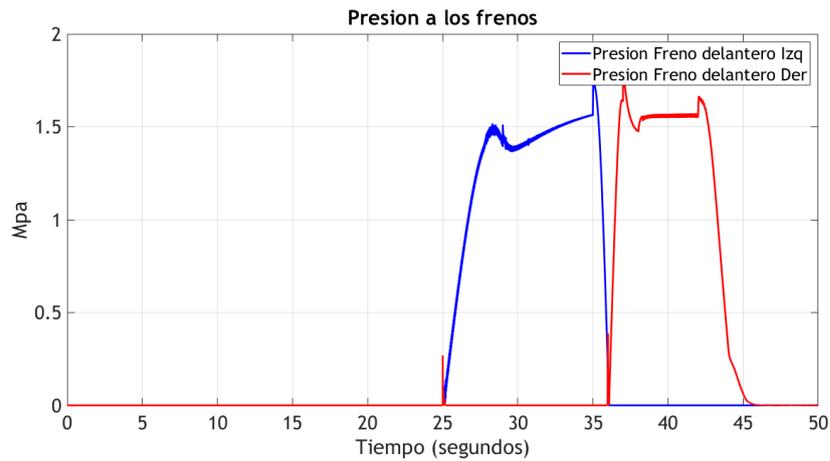


Figura 5.16: Señales de control generadas por ASTWC

La señal de control generada por el ASTWC se muestra en la Figura 5.16. Se aprecia como existe el fenómeno de *chattering* de manera atenuada. En la Figura 5.17 se muestra como la superficie deslizante se mantiene cercana a cero a lo largo de la prueba, lo cual corresponde al correcto desempeño del controlador.

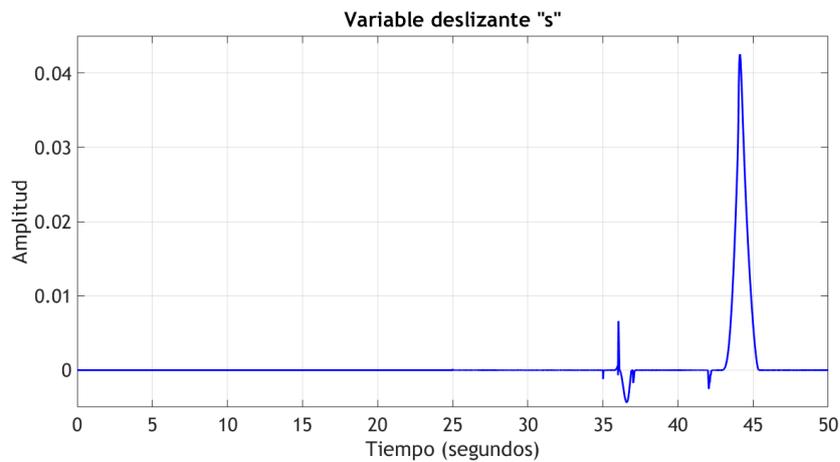


Figura 5.17: Variable deslizante

La Figura 5.18 presenta la velocidad en las ruedas, se aprecia como al momento de ejecutar la maniobra y activar los frenos del vehículo disminuye la velocidad en las ruedas, como es de esperarse.

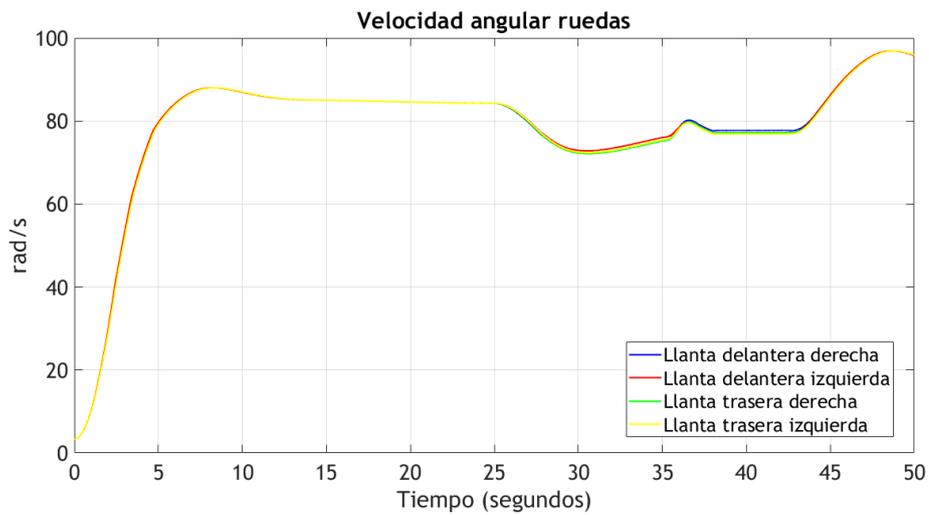


Figura 5.18: Velocidad angular en las ruedas

Se puede apreciar un buen seguimiento de referencia y una señal de control en la que se puede apreciar el fenómeno de *chattering* atenuado como se muestra en la Figura 5.19.

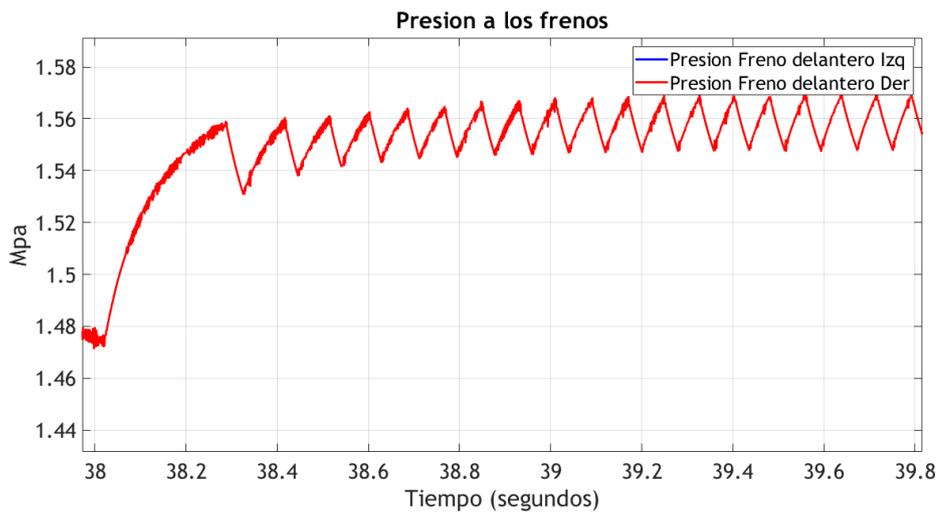


Figura 5.19: *Chattering* atenuado presente en control

5.2. Resultados de simulación del ASTWC en software CarSim

En esta sección se implementará el control por modos deslizantes al simulador CarSim, el cual será descrito a continuación.

5.2.1. Software de simulación CarSim

Parte del desarrollo de la tesis se centra en la validación del esquema de control desarrollado, por lo cual, se hace uso de un software de simulación denominado CarSim.

Este simulador es ampliamente utilizado en la industria automotriz debido a que proporciona un modelo dinámico bastante detallado ([44], [43]), con el que podemos fielmente representar la dinámica de un vehículo real.

Como se muestra en la Figura 5.20, el software cuenta con una interfaz que permite una gran flexibilidad en las condiciones de operación, parámetros del vehículo, dinámica del vehículo, perturbaciones externas.

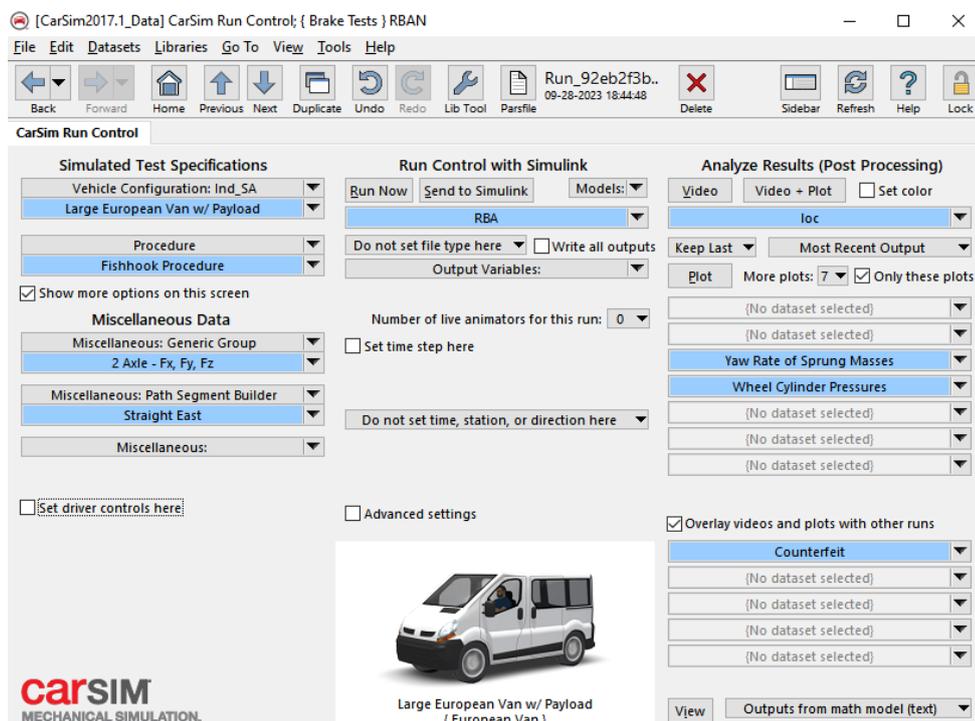


Figura 5.20: Interfaz principal software CarSim ([48])

Por medio de la interfaz tenemos acceso a prácticamente todas las dinámicas del vehículo. También cuenta con un visualizador 3D para observar la ejecución del controlador como se muestra en la Figura 5.21.

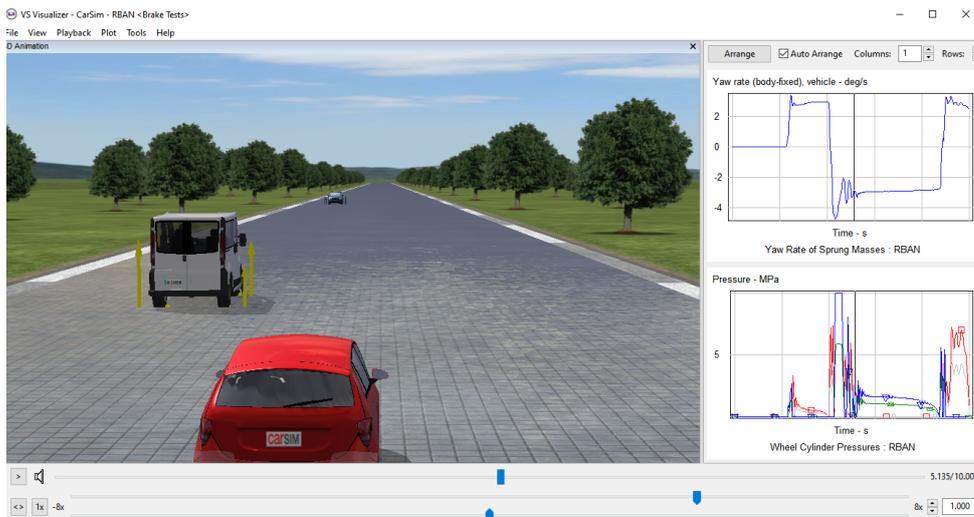


Figura 5.21: Visualización 3D de la simulación, asfalto mojado

Por medio de Simulink podemos interactuar con dichos modelos matemáticos como se muestra en la Figura 5.22. El simulador proporciona un bloque con el cual accedemos a los actuadores y sensores del vehículo, solo se necesita especificar que señales requerimos en la interfaz del simulador.

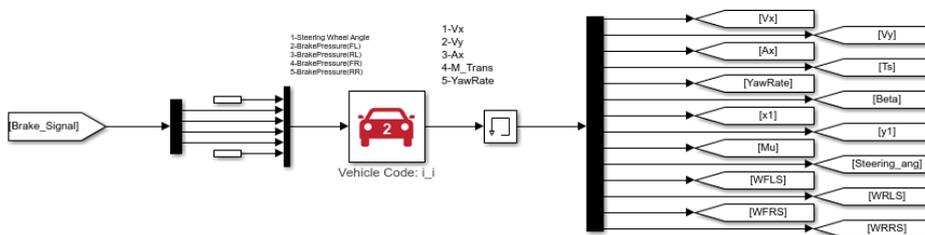


Figura 5.22: Carsim en Simulink

5.2.2. Referencia deseada (*Yaw Rate*) para el simulador

La trayectoria deseada está representada por medio del *yaw rate* que se presentaría durante una operación en condiciones nominales. Esto representa una estimación de la trayectoria que el conductor esperaría. Se usó como referencia el estudio realizado en [11].

Se toma en cuenta un modelo dinámico presentado en [53] similar al derivado en (2.33). Tanto la primera como la tercera ecuación del modelo son consideradas en estado estacionario, es decir $\dot{u} = 0$, $\dot{r} = 0$. También se considera que el vehículo no presenta una transferencia de peso considerable, se desprecia la rotación alrededor del eje longi-

tudinal y se considera que está desplazándose sobre asfalto seco. Con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} mru &= F_{yr} + F_{yf} \cos(\delta_f) + F_{xf} \sin(\delta_f) \\ 0 &= l_1 F_{yf} \cos(\delta_f) - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin(\delta_f). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Si multiplicamos la primera ecuación de (5.14) por l_1 y la combinamos con la segunda ecuación de (5.14) para eliminar términos comunes, queda una expresión que relaciona el *yaw rate* con la velocidad longitudinal y las fuerzas laterales ejercidas en las ruedas

$$(mru)l_1 = (l_1 + l_2)F_{yr}. \quad (5.15)$$

Considerando que en [53] se obtiene la siguiente relación

$$F_{yr} = \frac{2C_{ar}(l_2 r - v)}{u} \quad (5.16)$$

donde C_{ar} es el valor *cornering stiffness* de la llanta trasera.

Sustituyendo (5.16) en (5.15) y despejando r , obtenemos que

$$r = \frac{v}{l_2 - (ml_1 u^2) / [2C_{ar}(l_1 + l_2)]}. \quad (5.17)$$

Debido a que se suponen ángulos pequeños en las llantas frontales, se obtiene que

$$v \approx u \tan(\delta_f) \approx u \delta_f = uk_g \delta_v \quad (5.18)$$

donde k_g es la razón de engranaje que existe entre el ángulo del volante (δ_v) y el ángulo en las ruedas frontales (δ_w) (generalmente va de 15 a 1 a 20 a 1 para vehículos compactos). Entonces

$$r \approx \frac{u \delta_v}{zk_1 - zk_2 u^2} = r_{des} \quad (5.19)$$

donde zk_1 y zk_2 son constantes definidas como

$$zk_1 = \frac{l_2}{k_g}, \quad zk_2 = \frac{ml_1}{[2k_g C_{ar}(l_1 + l_2)]}. \quad (5.20)$$

Con esto se obtiene el valor de referencia para el *yaw rate* del vehículo r_{des} , el cual ha sido derivado a partir de condiciones nominales de manejo y está en función de la velocidad longitudinal y el ángulo en el volante δ_v .

5.2.3. Cotas para referencia deseada

La referencia deseada descrita en la sección anterior no siempre puede ser obtenida. Esto debido a que hay ocasiones en las cuales las condiciones del suelo no podrían pro-

porcionar las fuerzas requeridas para la trayectoria que se desea [41]. Esto quiere decir que la referencia deseada en el *yaw rate* será acotada por el coeficiente de fricción entre la llanta y el suelo.

Tenemos que la aceleración lateral en el centro de gravedad puede ser descrita como

$$a_{ycg} = ur + \dot{v}. \quad (5.21)$$

Recordando que u es la velocidad longitudinal, r es el *yaw rate* del vehículo y v es la velocidad lateral. Debido a que $v = u \tan(\beta)$ la aceleración lateral puede ser relacionada con el *yaw rate* y el ángulo de deslizamiento del vehículo β por medio de la ecuación

$$a_{ycg} = ur + \tan(\beta)\dot{u} + \frac{u\dot{\beta}}{\sqrt{1 + \tan^2(\beta)}}. \quad (5.22)$$

La aceleración lateral debe ser acotada por el coeficiente de fricción entre la rueda y el suelo (μ) de la siguiente manera

$$a_{ycg} \leq \mu g. \quad (5.23)$$

El primer término de (5.22) domina el valor de a_{ycg} , esto debido a que si el valor de β y su derivada son pequeños, el segundo y tercer término contribuyen solo una pequeña parte de la aceleración lateral total. Entonces, combinando (5.22) y (5.23) se tiene que

$$r_{des} \leq 0.85 \frac{\mu g}{u}. \quad (5.24)$$

El factor 0.85 permite que el segundo y tercer término de (5.22) contribuyan en un 15 % a la aceleración lateral total [41].

Entonces, se tiene que la referencia que el controlador debe seguir es

$$r_{target} = \begin{cases} \frac{u\delta_v}{zk_1 - zk_2u^2} & \text{si } |r_{des}| < 0.85 \frac{\mu g}{u} \\ \text{sign}(r_{des}) \frac{0.85\mu g}{u} & \text{si } |r_{des}| \geq 0.85 \frac{\mu g}{u} \end{cases} \quad (5.25)$$

5.3. Validación del algoritmo ASTWC al simulador CarSim

5.3.1. Implementación en Simulink

El modelo en Simulink se puede observar en la Figura 5.23. Se aprecia una estructura muy similar a la presentada en las secciones anteriores, con la diferencia de que el modelo dinámico estará a cargo del bloque proporcionado por CarSim.

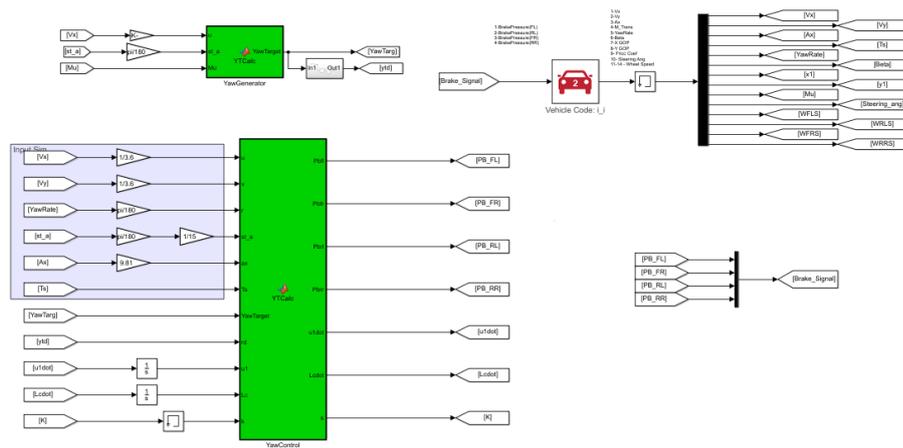


Figura 5.23: Modelo en Simulink utilizando simulador CarSim

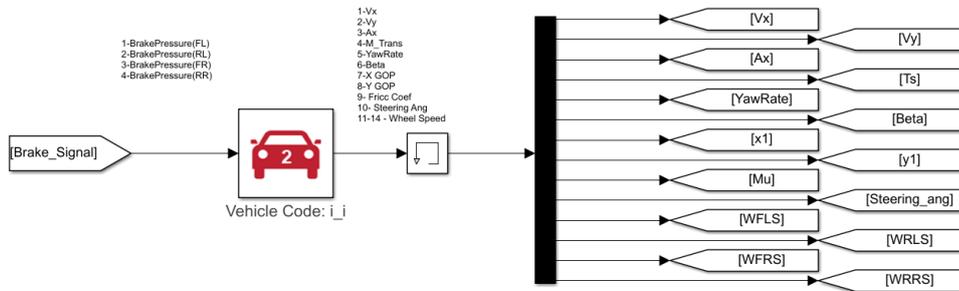


Figura 5.24: Bloque del simulador en Simulink

En la Figura 5.24 se puede observar como se implementa el simulador en Simulink, este bloque admite entradas y salidas, las cuales son especificadas en la interfaz del mismo simulador. A este bloque entran las 4 señales de presión para el freno en cada rueda. También requerimos mediciones de las diversas señales que se utilizan para el control, las cuales se pueden apreciar en la salida del bloque, cabe mencionar que es necesario realizar conversión de unidades (en ciertos casos).

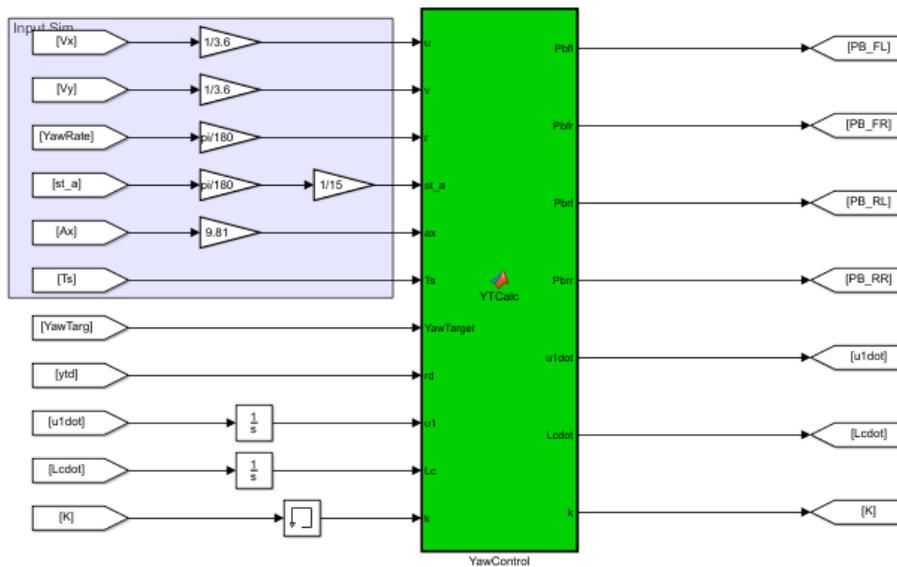


Figura 5.25: Bloque del control por modos deslizantes ASTWC

En el bloque de la Figura 5.25 se puede apreciar como entran las diversas señales de medición del simulador (las ganancias corresponden a conversión de unidades) y la ganancia de 1/15 corresponde a la relación entre el ángulo del volante y el ángulo de las ruedas, además, entra la referencia de *yaw rate* así como su derivada (*ytd*). Entran también las diversas señales auxiliares de control.

También se puede observar que entrega las presiones de cada freno. El código utilizado junto con los coeficientes utilizados pueden consultarse en el Apéndice A2.

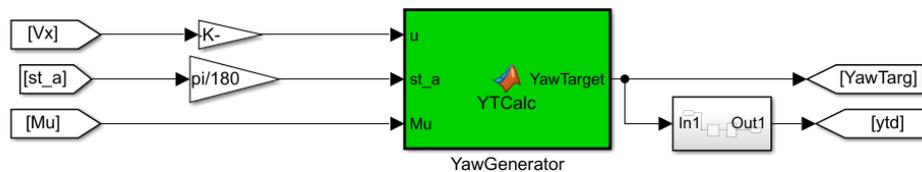


Figura 5.26: Generador de referencia *Yaw Rate*.

En el bloque de la Figura 5.26 se genera la referencia deseada para el *yaw rate* del vehículo tal como se describe en (5.25). El código utilizado se puede consultar en el Apéndice A2.

Se considera en primera instancia asfalto seco, una velocidad longitudinal de 120 kilómetros por hora la cual se tratará de mantener a lo largo de la maniobra por medio de un modelo de control integrado en CarSim y se realiza una maniobra evasiva del tipo *double lane change* como se aprecia en la Figura 5.27. Cabe mencionar que esta maniobra

es ejecutada en lazo cerrado por los modelos integrados en CarSim, por lo cual nuestro modelo de Simulink solo tiene la medición de la posición angular del volante.

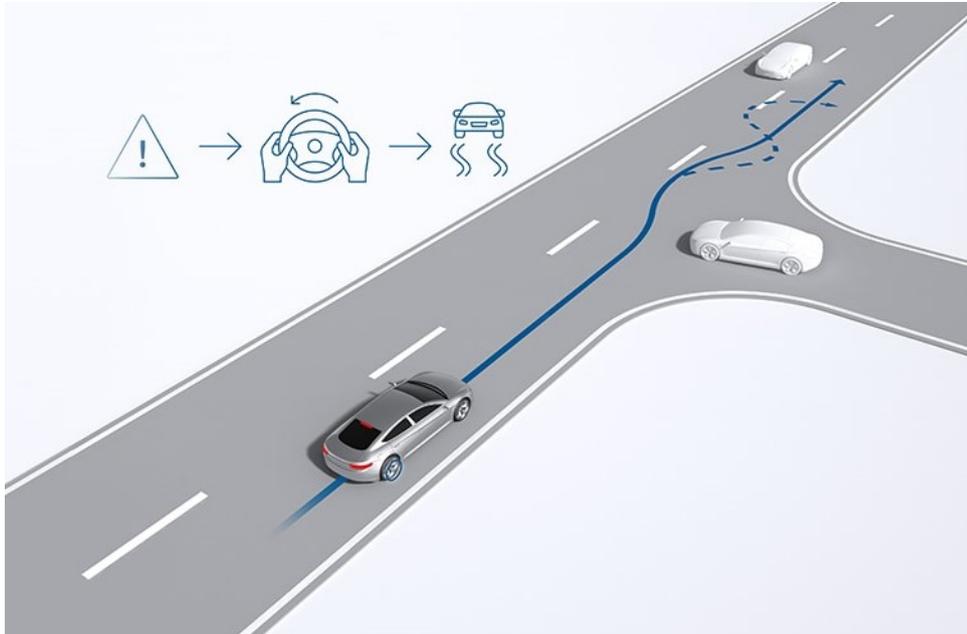


Figura 5.27: Maniobra evasiva *Double lane change* ([8])

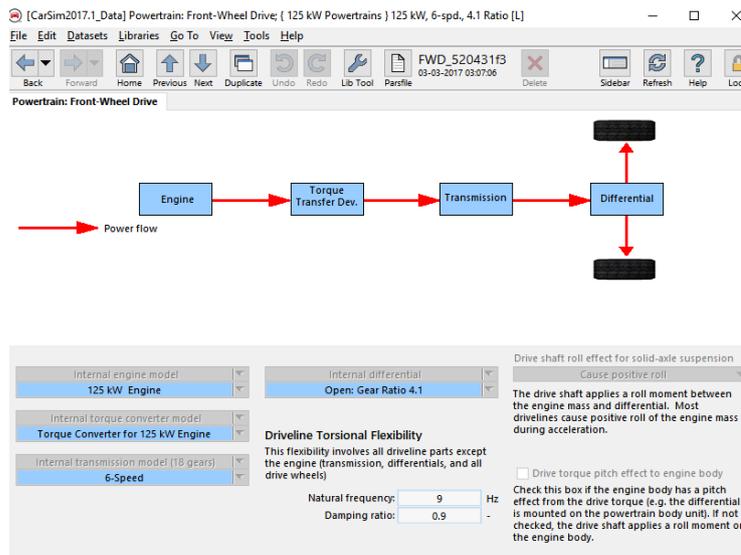


Figura 5.30: Sistema de propulsión (*PowerTrain*)

En la Figura 5.30 se presentan las configuraciones del sistema de propulsión. Cabe mencionar que se considera un sistema de tracción delantera. Se pueden apreciar los diversos subsistemas que lo componen, como el diferencial y el convertidor de par.

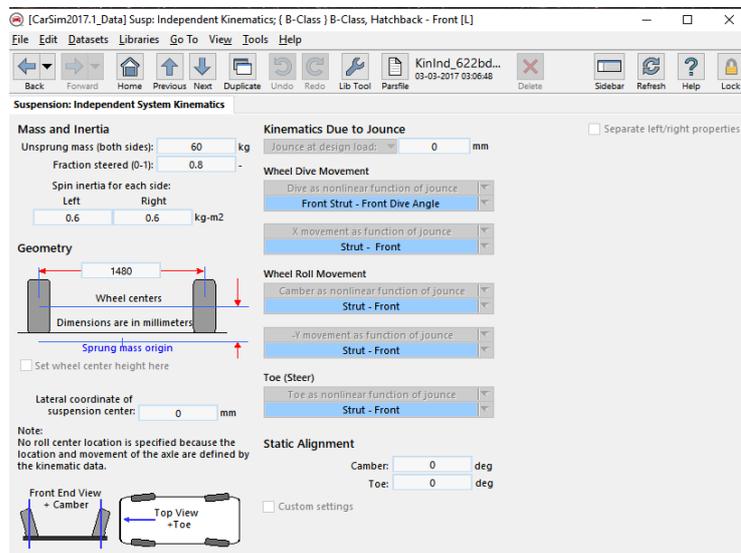


Figura 5.31: Configuración de suspensión

En la Figura 5.31 se muestran las configuraciones del sistema de suspensión del vehículo, los valores son los predefinidos por CarSim.

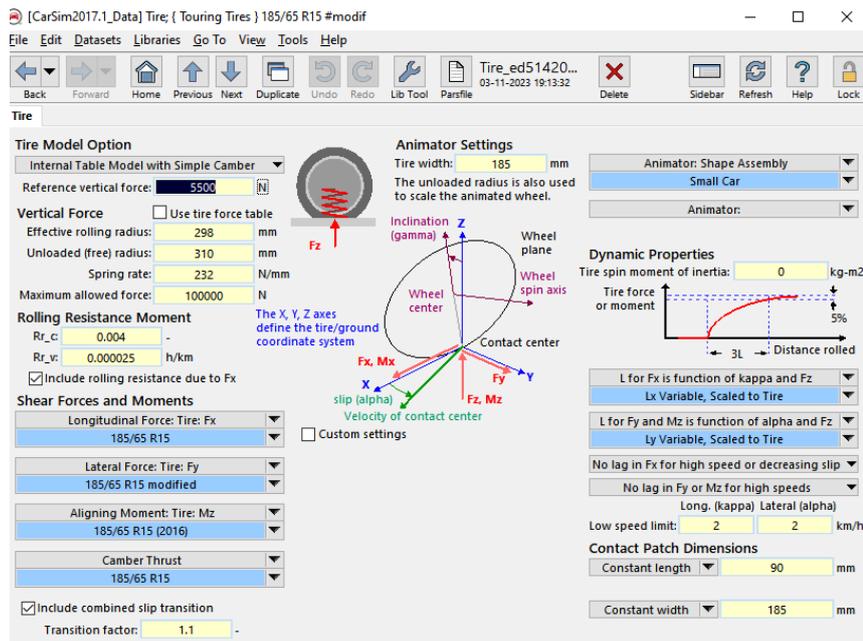


Figura 5.32: Parámetros de las llantas

En la Figura 5.32 se muestran los parámetros y distancias entre llantas, se puede apreciar que el simulador toma en consideración diversos factores para modelar este subsistema.

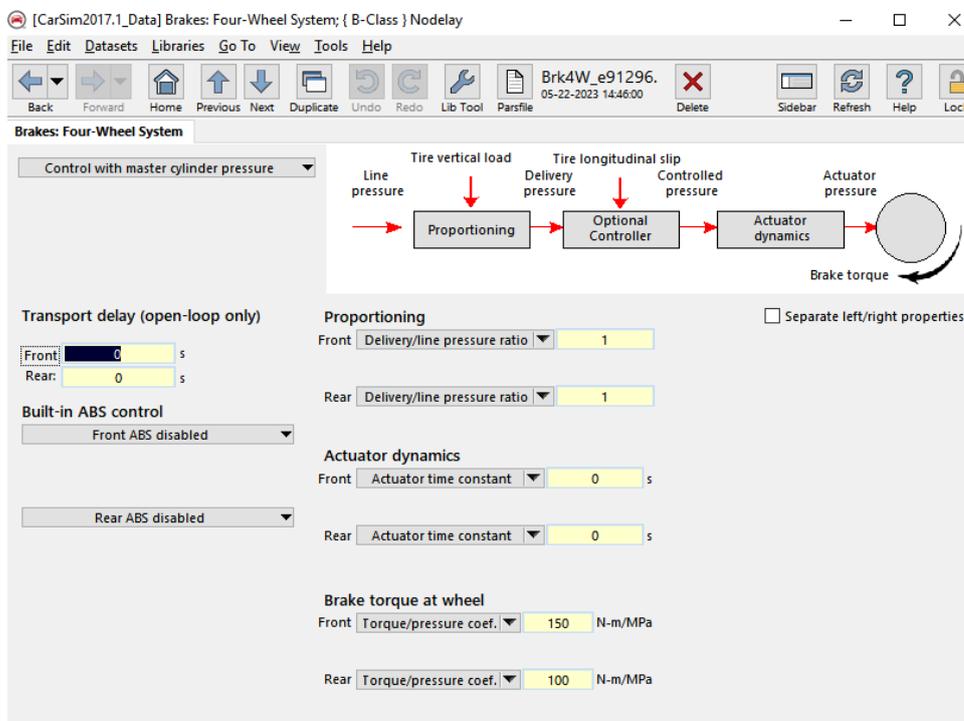


Figura 5.33: Configuración del sistema de frenado

La Figura 5.33 muestra la configuración del sistema de frenado, cabe mencionar que se desactiva el control ABS por default del simulador CarSim para evitar que la señal de control del ASTWC sea manipulada, así como también se deshabilita la dinámica del actuador obteniendo una respuesta inmediata a nuestra señal de control.

En la Figura 5.34 se presentan los resultados de una prueba con el vehículo compacto rojo, en donde se compara el desempeño con control ASTWC y sin control.

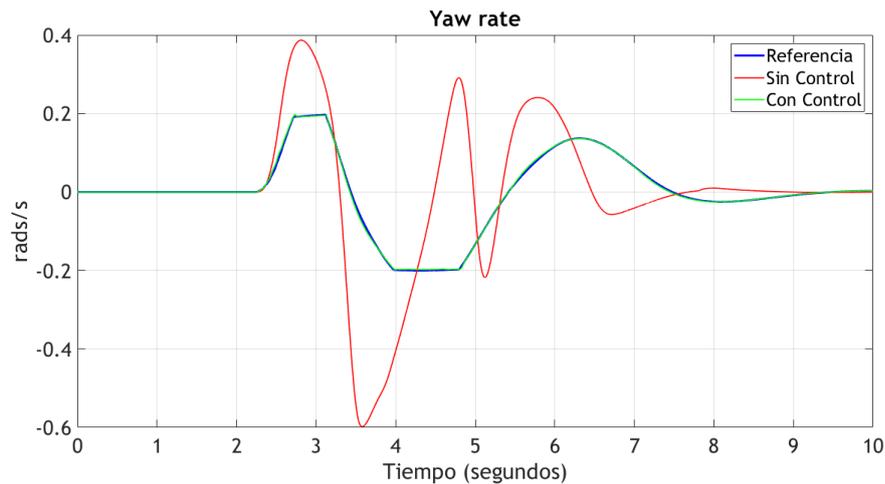


Figura 5.34: Comparación entre vehículo con presencia de control y sin control.

La Figura 5.35 muestra las señales de control generadas por el algoritmo ASTWC, se aprecia la ausencia de el fenómeno de *chattering* en la mayoría de la prueba.

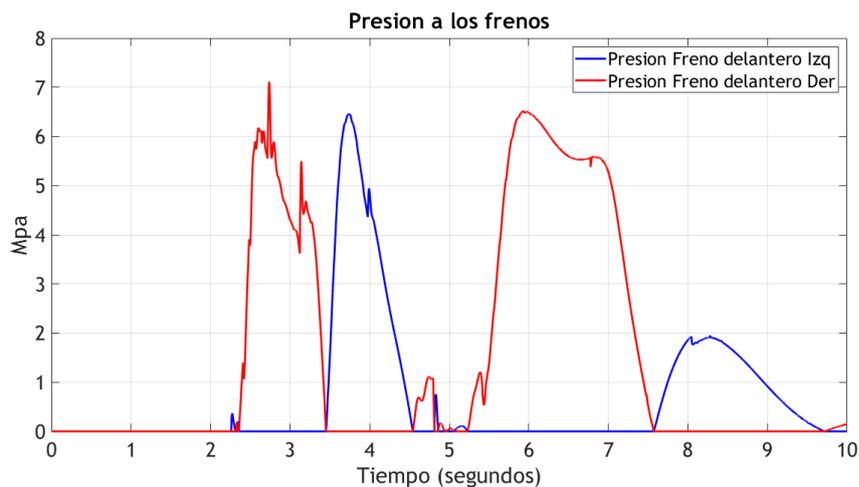


Figura 5.35: Señales de control generadas por ASTWC.

En la Figura 5.36 se observa como el controlador logra mantener a la superficie deslizante cercana a cero.

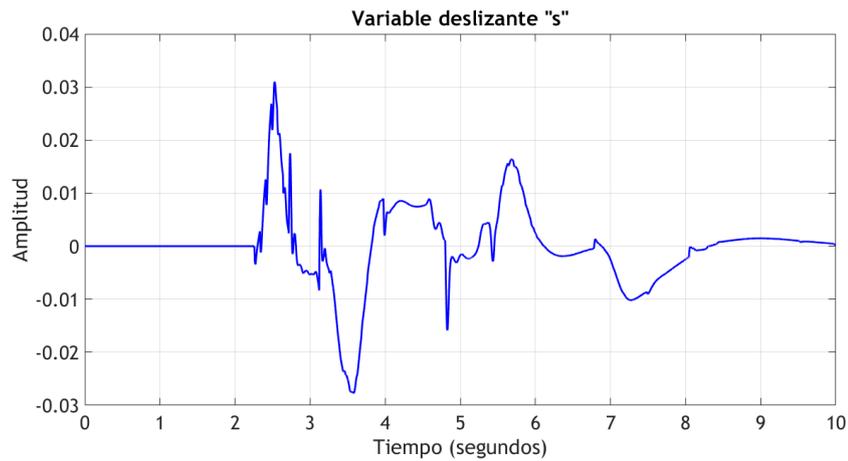


Figura 5.36: Variable deslizante s

En la Figura 5.37 se aprecia como la ley de adaptación modifica de manera constante el parámetro L_c para garantizar el correcto desempeño del control.

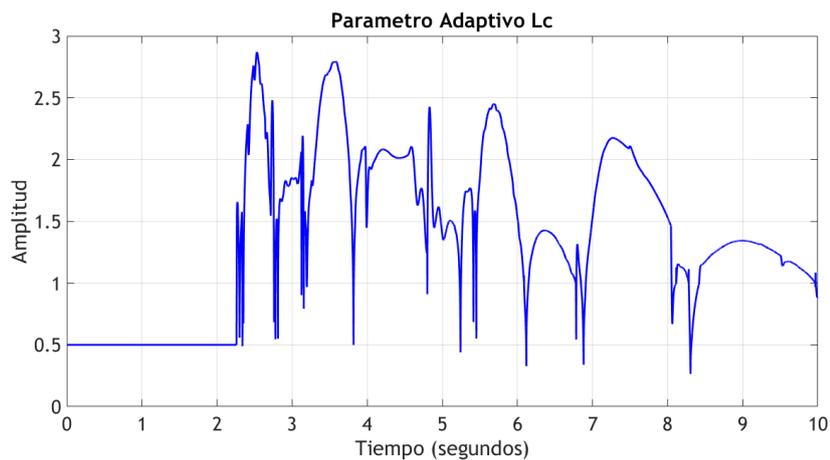


Figura 5.37: Parámetro adaptativo L_c

Se puede observar como el algoritmo ASTWC logra generar una señal de control (en este caso) sin presencia de *chattering*. En la Figura 5.38 se muestra la señal generada por el ASTWC de manera más cercana.

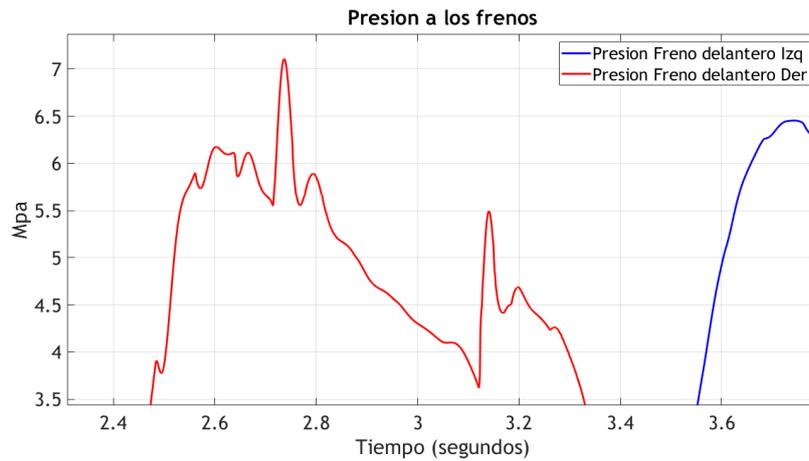


Figura 5.38: Señal de control ampliada

Se puede apreciar en el simulador el seguimiento de referencia y las señales de control. En la Figura 5.39 se muestra el visualizador 3D de CarSim para esta prueba.

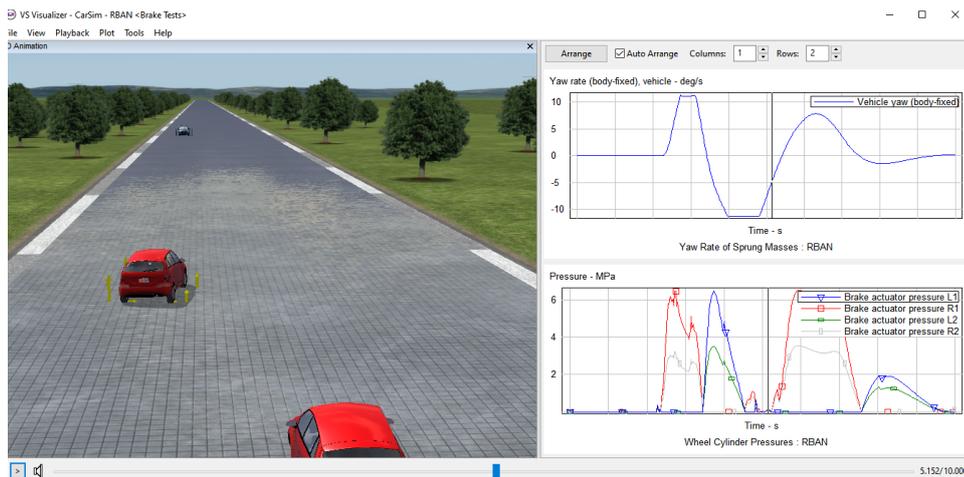


Figura 5.39: Visualización en simulador.

5.3.3. Validación de ASTWC vehículo compacto, asfalto mojado

Con el objetivo de comprobar la robustez del controlador, se propone efectuar la misma prueba pero con condiciones de suelo mojado.

También se compara el control ASTWC con un control proporcional basado en modos deslizantes [54] y un control basado en lógica difusa (*fuzzy control*) presentado en [9]. Se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.40.

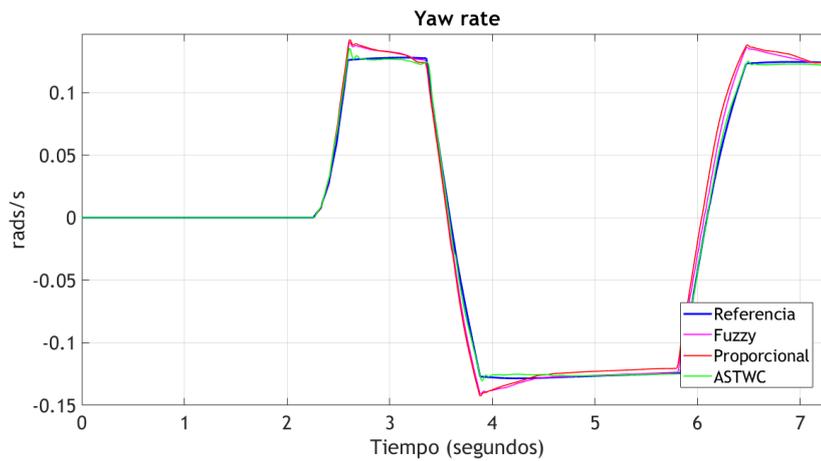


Figura 5.40: Comparación de controladores

Se puede observar como todos los controladores tienen un desempeño similar, en la Figura 5.41 se presenta una imagen ampliada de la respuesta transitoria.

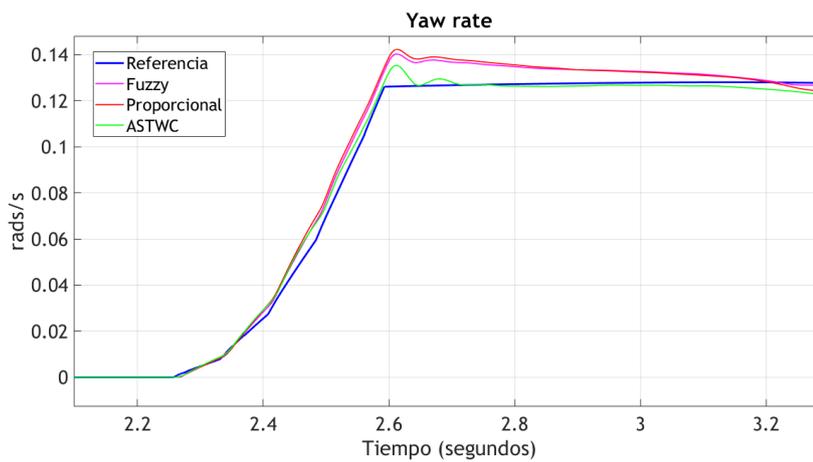


Figura 5.41: Transitorio ampliado

Las señales de control para el algoritmo ASTWC se presentan en la Figura 5.42, de nuevo, mostrando en su mayor parte la ausencia de *chattering*.

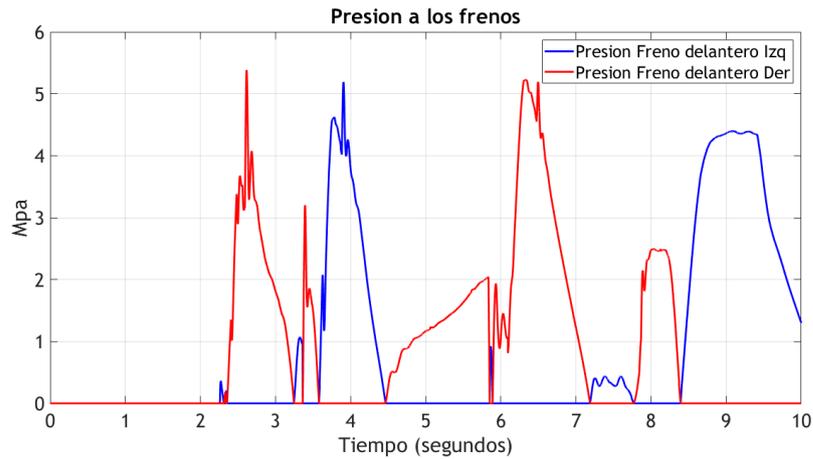


Figura 5.42: Señal de control ASTWC

En la Figura 5.43 se observa claramente como la superficie deslizante se mantiene cercana a cero, lo cual corresponde al correcto desempeño del controlador.

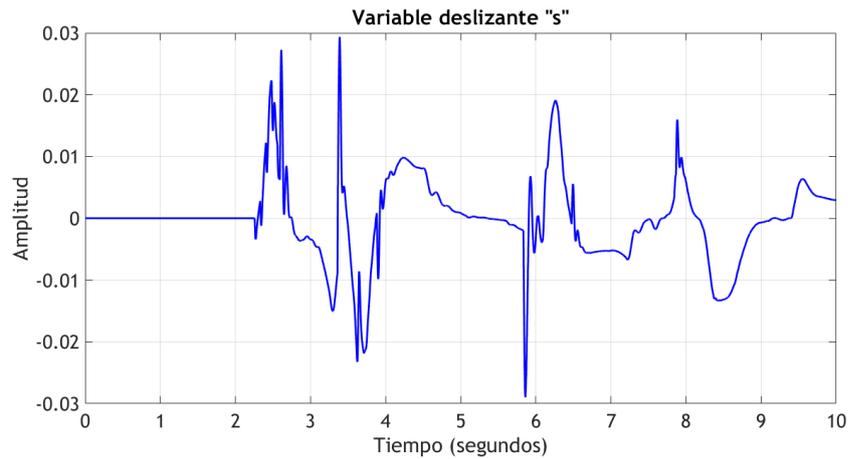


Figura 5.43: Variable deslizante

En la Figura 5.44 se observa como el parámetro adaptativo L_c varía a lo largo de la prueba para garantizar la convergencia a la superficie deslizante.

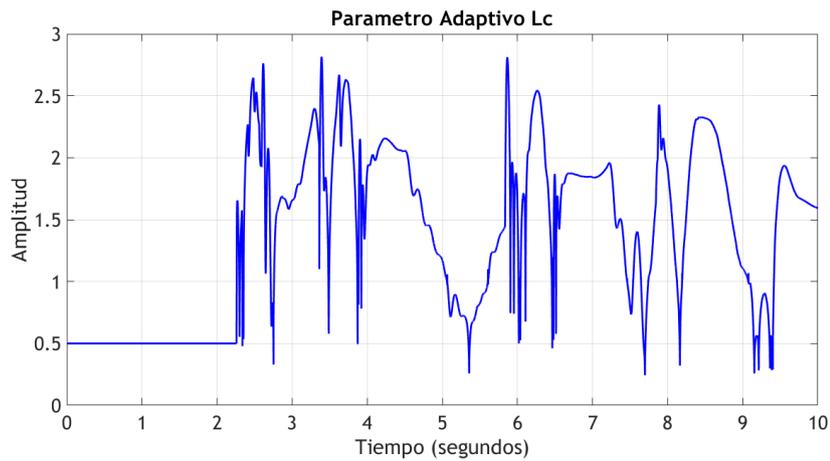


Figura 5.44: Parámetro adaptativo Lc

En la Figura 5.45 se presenta un índice de desempeño basado en el criterio IEA (Integral del valor absoluto del error) para el vehículo compacto.

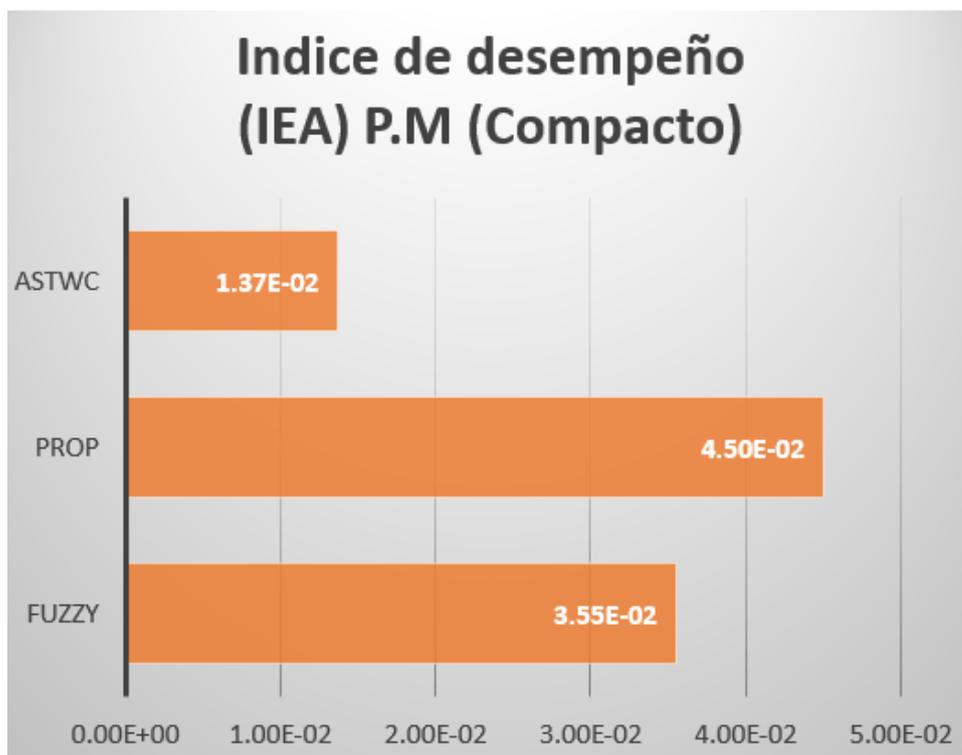


Figura 5.45: Índice de desempeño (Integral del valor absoluto del error)

5.3.4. Validación de ASTWC vehículo tipo van, asfalto mojado

Se realiza la misma prueba en piso mojado, sin embargo, para probar el desempeño del controlador sujeto a cambios paramétricos en la planta, vamos a utilizar un vehículo

diferente como se puede apreciar en la Figura 5.46.

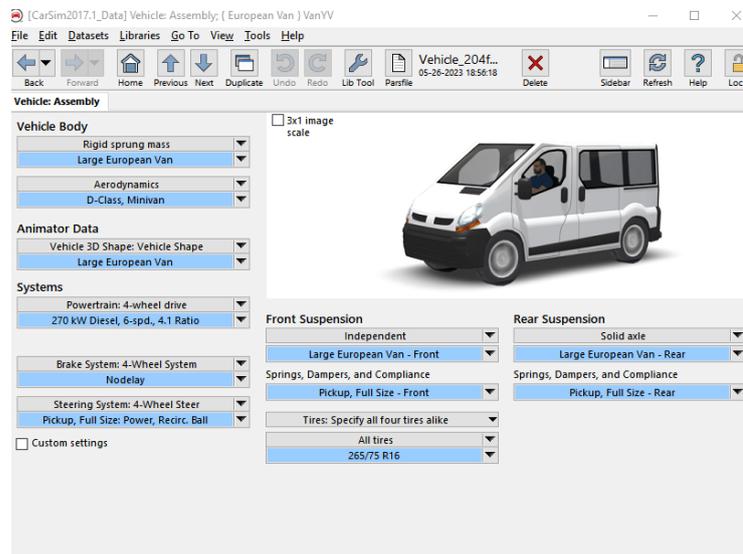


Figura 5.46: Vehículo tipo van

A continuación se presenta la configuración de sus diferentes subsistemas.

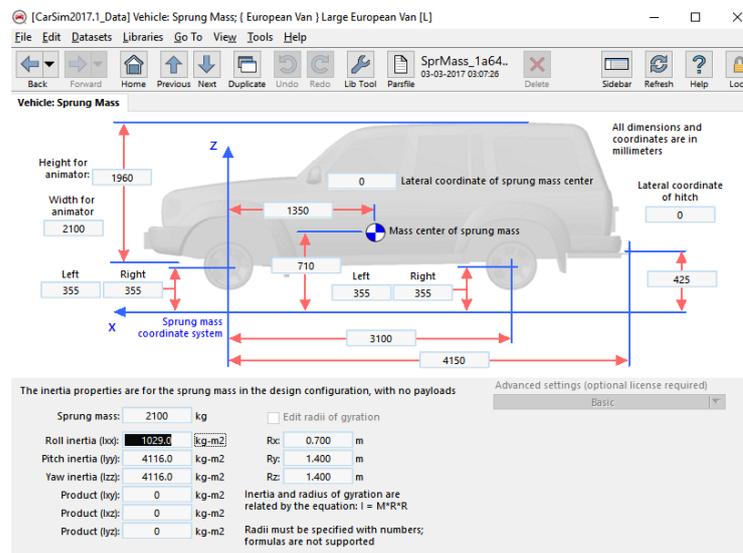


Figura 5.47: Parámetros del vehículo

El vehículo cuenta con los parámetros dimensionales mostrados en la Figura 5.47, también se detallan las inercias y el peso, cuyos valores los proporciona CarSim.

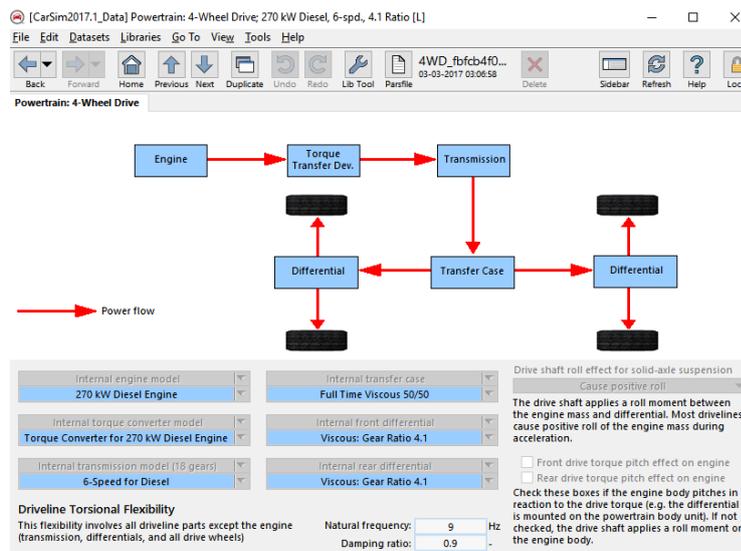


Figura 5.48: Configuración del sistema de propulsión (*All wheel drive*)

Como se puede apreciar en la Figura 5.48 la configuración del sistema de propulsión entrega la potencia del motor a las 4 ruedas.

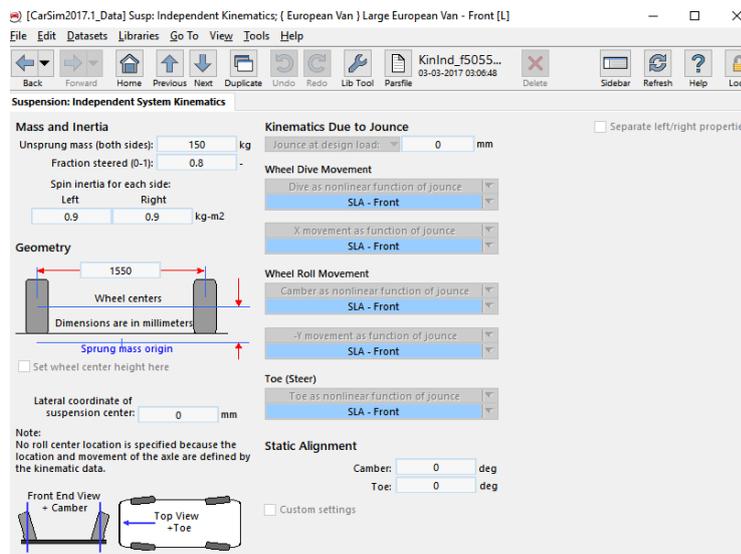


Figura 5.49: Configuración de la suspensión

En la Figura 5.49 se puede apreciar la configuración del sistema de suspensión para este vehículo tipo van, sus valores son proporcionados por CarSim.

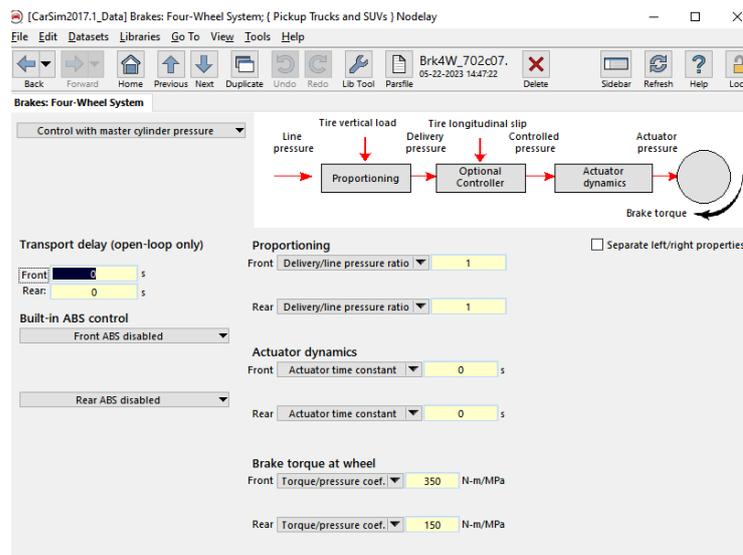


Figura 5.50: Configuración del sistema de frenado

La Figura 5.50 muestra la configuración del sistema de frenado, cabe destacar que se deshabilita el control ABS del simulador CarSim para evitar que la señal de control del ASTWC sea manipulada, así como también se deshabilita la dinámica del actuador obteniendo una respuesta inmediata a nuestra señal de control.

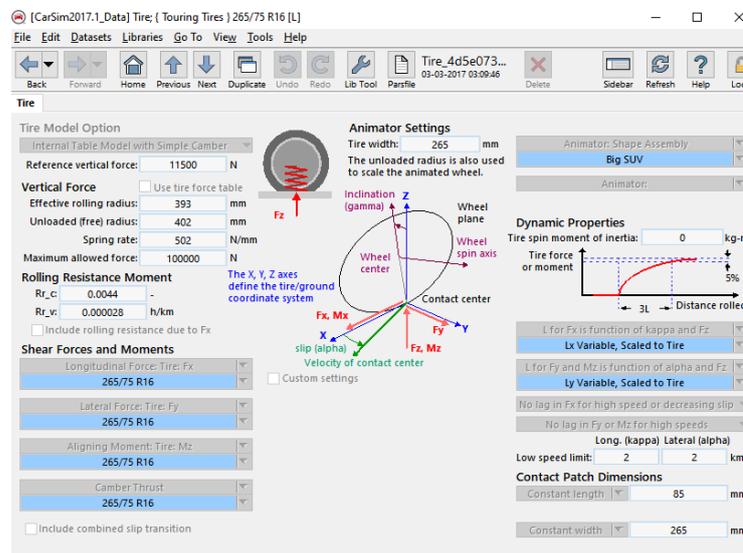


Figura 5.51: Parámetros en las llantas.

En la Figura 5.51 se muestran los parámetros y distancias entre llantas, se puede apreciar que el simulador toma en consideración diversos factores para modelar este subsistema.

Con este vehículo se obtienen los siguientes resultados.

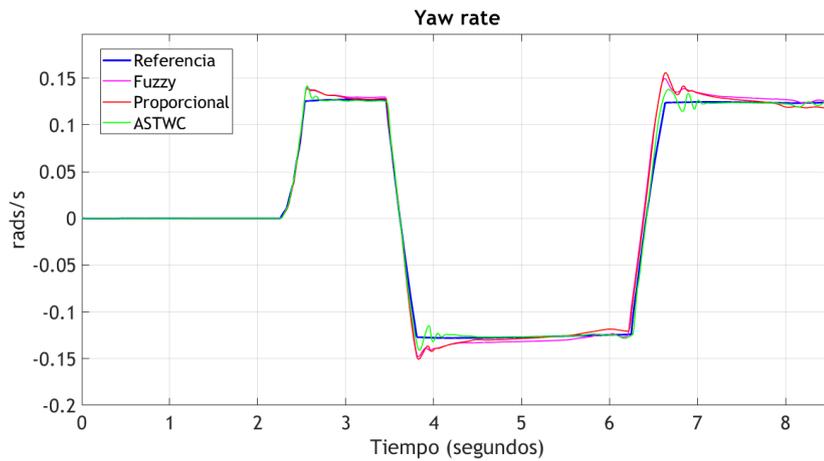


Figura 5.52: Desempeño de los controles.

La Figura 5.52 muestra el desempeño de los 3 controladores, se aprecia como el ASTWC logra entrar en estado estable de manera más rápida que los demás.

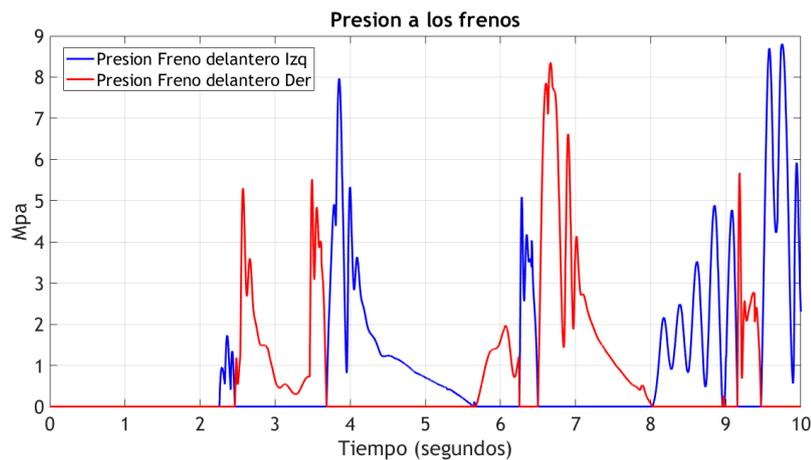


Figura 5.53: Control generado por ASTWC

La Figura 5.53 muestra la señal de control generada por el ASTWC, destacando la ausencia de *chattering* en la mayoría de la prueba, lo cual representa una ventaja para sistemas mecánicos. En la Figura 5.54 se muestra la evolución de la superficie deslizante durante la prueba, se observa que se mantiene cercana a cero en todo momento.

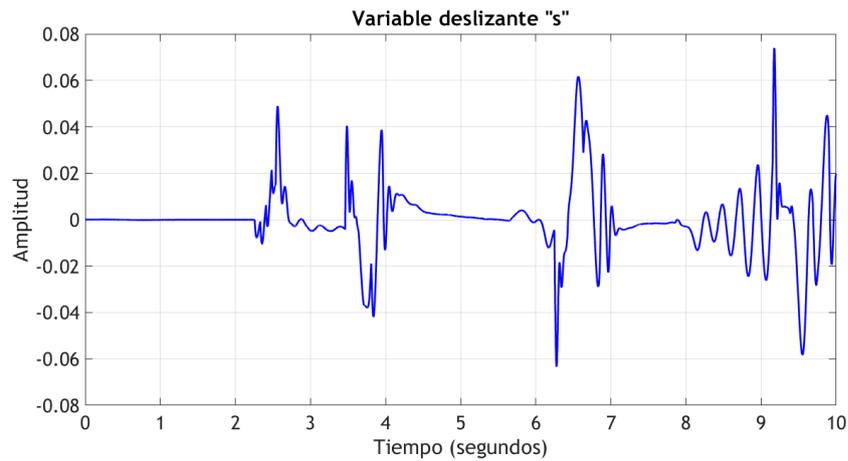


Figura 5.54: Superficie deslizante

En la Figura 5.55 se observa como el la ley de adaptación modifica el valor del parámetro L_c para garantizar el correcto desempeño del controlador.

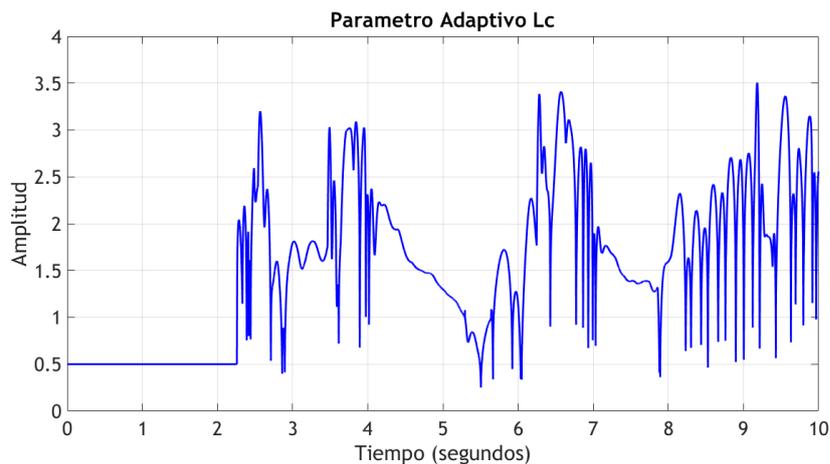


Figura 5.55: Parámetro adaptativo L_c

En la Figura 5.56 se observa como se presenta un sobrepaso en una sección del seguimiento de trayectoria por parte de los tres controladores, siendo el ASTWC el que converge a estado estable de manera más rápida.

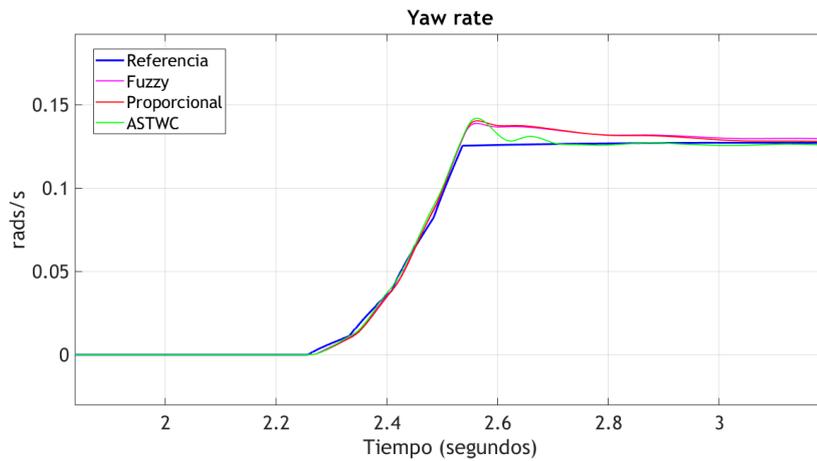


Figura 5.56: Sobrepasso en seguimiento de trayectoria

Se supone que es causado por la saturación en las fuerzas efectivas que pueden ejercer las ruedas.

En la Figura 5.57 se presentan los índices de desempeño de los controladores.

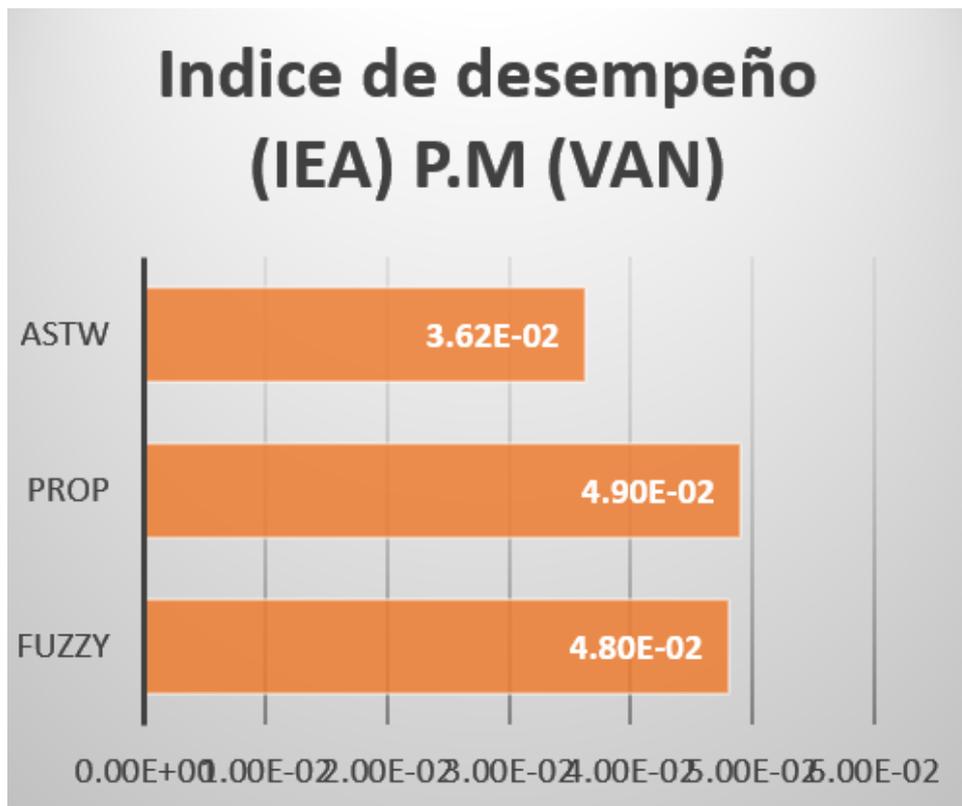


Figura 5.57: Índice de desempeño (Integral del valor absoluto del error)

5.3.5. Validación de ASTWC vehículo tipo van, prueba sobre hielo

De nueva cuenta se realiza la prueba, esta vez sobre una superficie cubierta de hielo, por lo cual el coeficiente de fricción disminuye considerablemente.

Los resultados, en esta ocasión, se presentan en diferentes gráficas, para efectos de claridad entre el desempeño de cada controlador, en la Figura 5.58 se presenta el algoritmo ASTWC, se observa que obtiene un mejor desempeño particularmente al final de la prueba. En la Figura 5.59 se presenta el algoritmo *fuzzy* y en la Figura 5.60 se presenta el algoritmo proporcional, ambos con desempeño similar.

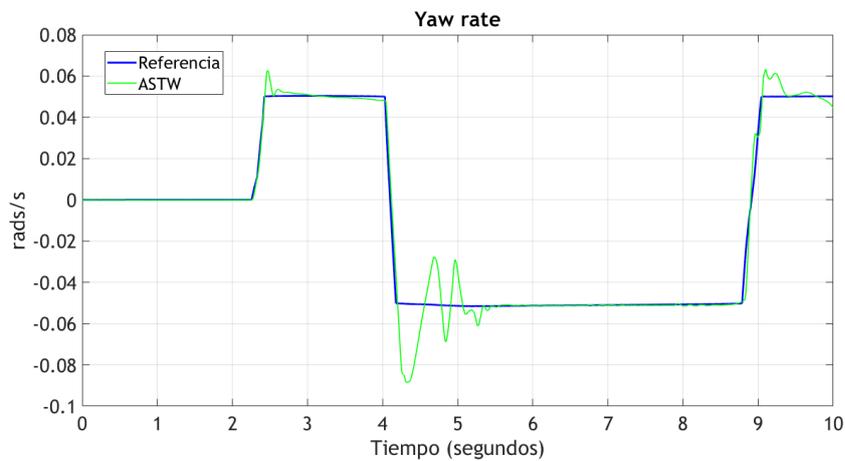


Figura 5.58: Seguimiento de trayectoria del control ASTWC

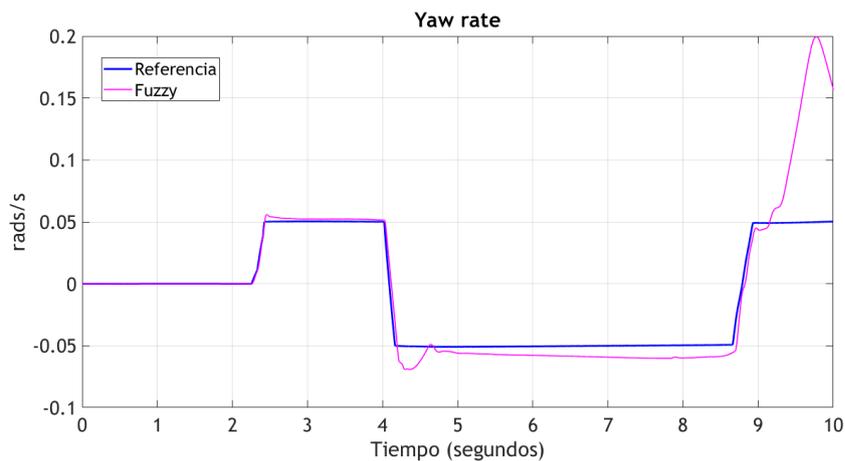


Figura 5.59: Seguimiento de trayectoria del control *Fuzzy*

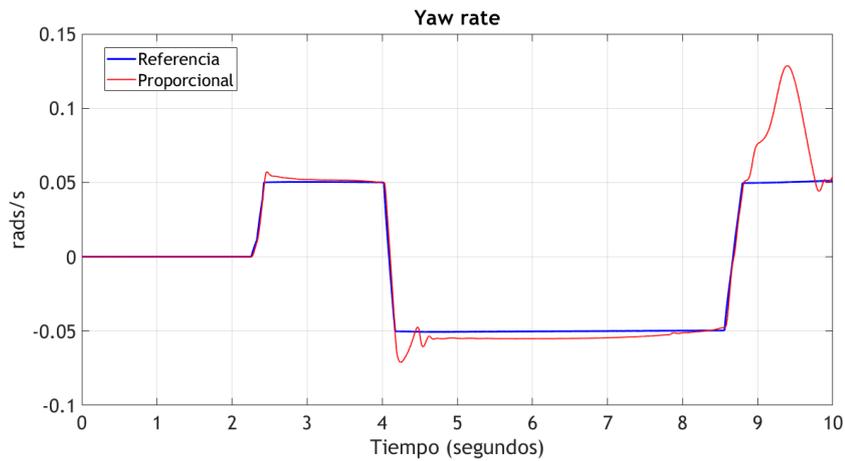


Figura 5.60: Seguimiento de trayectoria del control Proporcional

La Figura 5.61 muestra la señal de control, se observa que el fenómeno de *chattering* no es presentado en el transcurso de esta prueba, sin embargo existe una sección en donde se alcanza el límite físico para el actuador lo cual se ve reflejado con un sobrepaso en la respuesta transitoria.

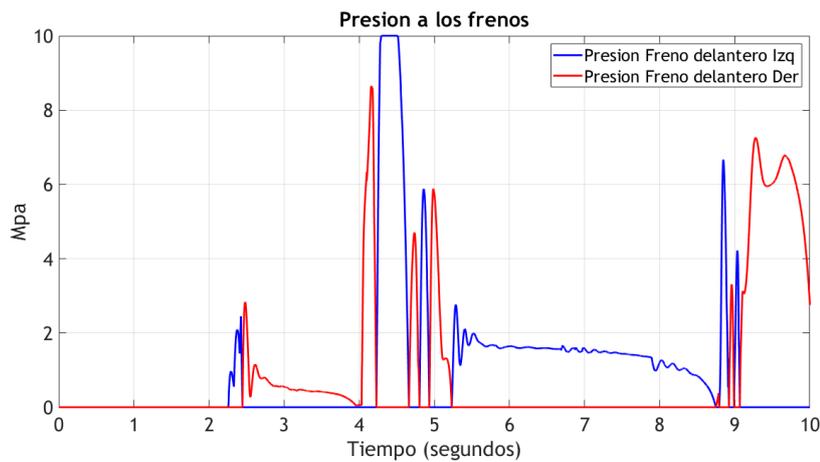


Figura 5.61: Señales de control del ASTWC

La Figura 5.62 muestra la evolución de la variable deslizante durante la prueba, se pueden observar algunas secciones que se alejan de cero y posteriormente vuelve a converger, esto debido a que los actuadores entran en una zona de saturación.

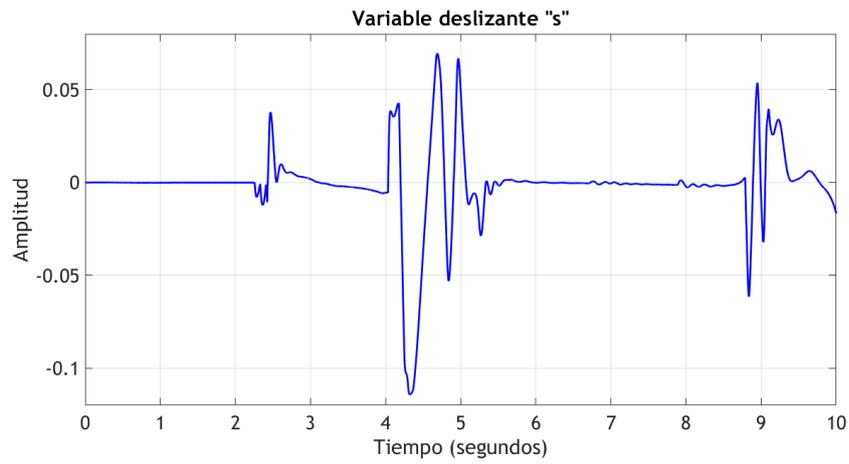


Figura 5.62: Variable deslizante

En la Figura 5.63 se observa como el parámetro adaptativo varía más en esta prueba que en las anteriores debido a las condiciones de operación.

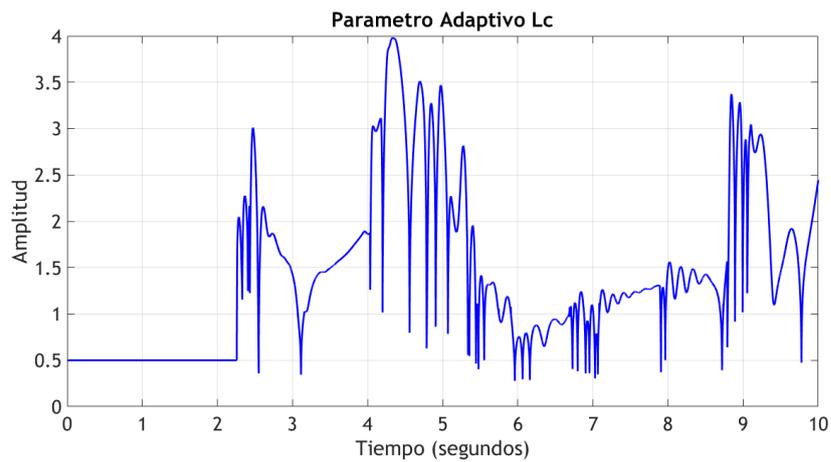


Figura 5.63: Parámetro adaptativo Lc

El desempeño de los controladores se presenta en la Figura 5.64

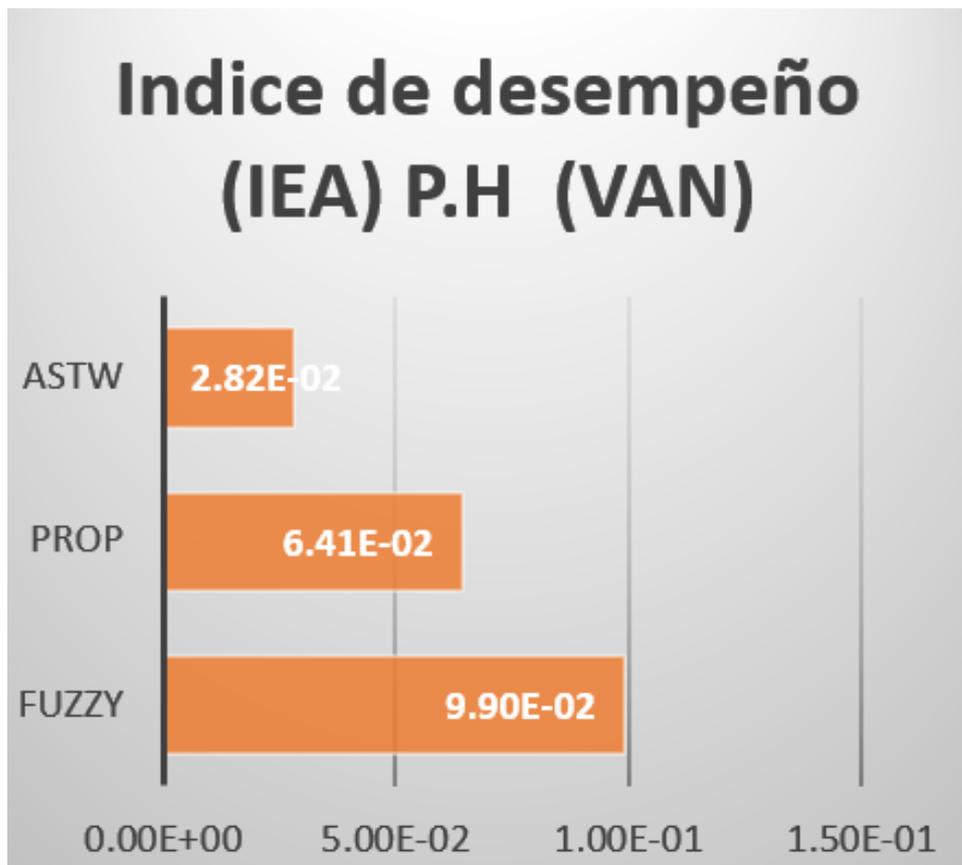


Figura 5.64: Índice de desempeño (Integral del valor absoluto del error)

5.4. Discusión

En este capítulo se presentó el desempeño que se obtuvo mediante el algoritmo Super Twisting. Se observa a través de las distintas pruebas que el algoritmo es capaz de realizar un seguimiento de trayectoria adecuado, así como también se observa el efecto de *chattering* atenuado, lo cual presenta una gran ventaja para actuadores de naturaleza mecánica como los presentes en vehículos terrestres. Se realiza una comparación con otros esquemas de control y se observa un desempeño superior mediante el índice de desempeño IEA (Integral del valor absoluto del error).

5.5. Conclusiones

La metodología está basada a partir de un modelo dinámico del vehículo descrito mediante ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Para resolver el problema de maniobrabilidad, se analizó la dinámica del ángulo de guiñada, ya que esta variable está estrechamente vinculada con la estabilidad dinámica del vehículo. Para ello se seleccionó el modelo *Dual Track* que permite caracterizar la dinámica del vehículo.

Partiendo de este modelo se diseñó una ley de control no lineal por modos deslizantes para garantizar la estabilidad dinámica del vehículo y se obtuvieron condiciones suficientes para garantizar la estabilidad en lazo cerrado mediante un análisis basado en la teoría de Lyapunov.

En este trabajo una versión adaptativa del algoritmo Super Twisting por modos deslizantes para el control de guiñada de un vehículo terrestre ha sido propuesta, además de incorporar una saturación en el controlador, evitando sobrepasar el límite físico del actuador.

Además, la validación de este algoritmo ha sido realizada utilizando un software especializado llamado CarSim. Este software permite validar, bajo diferentes condiciones tanto ambientales como del vehículo, el desempeño del algoritmo de control propuesto.

Resultados en simulación han sido obtenidos utilizando Simulink y CarSim. De estos resultados muestran el buen desempeño que ha sido obtenido en presencia de perturbaciones y diferentes condiciones de manejo tales como asfalto seco, húmedo o sobre hielo. Se confirma que el sistema mantiene un seguimiento de trayectoria efectivo, incluso en presencia de dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones en el sistema.

Por otra parte es necesario investigar el desempeño de otras leyes de control bajo la acción de diferentes perturbaciones; encontrando condiciones para asegurar su robustez, lo cual se puede explorar en trabajos futuros.

Capítulo 6. Apéndice A1/A2

6.1. Grado Relativo y Derivada de Lie

La derivada de lie describe la derivada de una función escalar a lo largo de un campo vectorial y tiene las siguientes notaciones equivalentes [36]

$$\mathcal{L}_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x). \quad (6.1)$$

La solución entrega una función evaluada en los reales. Debe notarse que $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ se puede denotar como $d\lambda(x) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right]$.

La derivada de λ a lo largo de f , k veces se denota como $\mathcal{L}_f^k \lambda$, donde

$$\mathcal{L}_f^k \lambda(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_f^{k-1} \lambda}{\partial x} f(x).$$

Considérese un sistema de una sola entrada y una sola salida (*Single input single output, SISO*) descrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

Entonces el grado relativo ρ de dicho sistema esta definido como el entero que satisface

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{i-1} h(x) &= 0; & 1 \leq i \leq \rho - 1, \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0, & \forall x \in U_0 \end{aligned}$$

donde U_0 es una vecindad del origen. Sin perdida de generalidad, la definición del grado relativo puede ser definida en cualquier punto del espacio de estados $x \in \mathbb{R}^n$

6.2. Puntos de equilibrio y teoría de estabilidad en sentido de Lyapunov

Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que empiezan en una vecindad cercana a dicho punto se mantienen cercanas, de otra manera es inestable [52]. Se dice que es asintoticamente estable si todas las soluciones que empiezan en una vecindad cercana no solo se mantienen cerca, si no que además tienden al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ [29].

Considérese un sistema de la siguiente manera

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.2)$$

donde $f(x)$ es localmente Lipschitz y esta definida en un dominio $D \in \mathbb{R}^n$. Supóngase que el punto de equilibrio del sistema esta definido en el origen de \mathbb{R}^n , esto es $\bar{x} = 0$. Sin perdida de generalidad cualquier punto de equilibrio podría ser el origen a través de un cambio de variable.

Definición 2. El punto de equilibrio $x = 0$ de (6.2) es

1. Estable si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

2. Inestable si no es estable.

3. Asintoticamente estable si es estable y δ puede ser escogida tal que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

De manera conceptual podemos tomar como ejemplo un péndulo, debido a que el concepto de estabilidad asintótica es natural en este caso, es decir, al considerar el punto de equilibrio estable (la posición angular del péndulo es cero grados, y su velocidad es cero) y una condición inicial cercana a dicho punto de equilibrio es fácil determinar que todas las soluciones que parten de este conjunto de condiciones iniciales tienden al punto de equilibrio.

Físicamente, esto es fácilmente representado por medio de la ecuación de energía (suma de energía potencial y cinética) de un péndulo planar

$$E(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2} \quad (6.3)$$

en donde x_1 y x_2 son variables de estado representando el ángulo con respecto a la vertical y su derivada respectivamente.

Analizando esta ecuación podemos llegar a 2 resultados. Cuando la fricción se desprecia, el sistema es conservativo, es decir, no hay perdida de energía. Matemáticamente, esto se representa como

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (6.4)$$

Es decir, la energía no varia en el tiempo, a pesar de que el sistema está en movimiento. Cuando la fricción es tomada en cuenta, intuitivamente sabemos que la energía

se disipará y eventualmente ($t \rightarrow \infty$) será cero. De manera matemática

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \quad (6.5)$$

Entonces, examinando el comportamiento dinámico de la función de la energía, para el caso del péndulo, podemos determinar la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

Estos conceptos están fuertemente ligados con la estabilidad en sentido de Lyapunov, debido a que en esta teoría se proponen funciones que pueden ser usadas en vez de la función de energía para determinar la estabilidad en puntos de equilibrio.

Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el dominio \mathbb{R}^n que contiene el origen. Entonces la derivada de V a lo largo de las trayectorias de (6.2) es

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x). \quad (6.6)$$

Se puede observar como $\dot{V}(x)$ depende del sistema de ecuaciones del sistema dinámico analizado. Se tiene que, si $\dot{V}(x)$ es negativo, V decrece a lo largo de las trayectorias de (6.2). Formalmente, se presenta el teorema de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 2 Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (6.2) y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(x) &> 0 \quad \forall x \in D \\ \dot{V}(x) &\leq 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Entonces $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (6.8)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

```
function [AccX,AccY,YawAcc] = VD(u,v,r,Tsd,ax,st_a,Pbfr,Pbfl,Kbf,Kbr)

    Cr=49885; %Cornering Stiffness (Rear Combined) N/rad
    Cf=49885; %Cornering Stiffness (Front Combined) N/rad
    m=1200; %Vehicle mass (kg)
    b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
    a=1; %front lenght (From CG) (m)
    Iz=1300; %Moment of Inertia about Z axis (kgm)
    rw=0.298; %Effective radius m
    rwr=0.298; %Effective radius m front
    rwf=0.298; %Effective radius m rear
    h=0.540; %Height of center sprung mass
    d=1.55; %track width m
    g=9.81; %Gravity

%% Transmission Gear

    FDG=4;

    if u<5

        GT=3.5*FDG;

    elseif u>=5 && u<12

        GT=3.0*FDG;

    elseif u>=12 && u<16

        GT=2.5*FDG;

    elseif u>=16 && u<20

        GT=2.0*FDG;

    else

        GT=1.4*FDG;

    end

    Ts=Tsd*GT;
    %% State Eqns f(x)

    %f vector aux
    aux1=(v+(r*a))/u;
    aux2=((r*b)-v)/u;

    f11=r*v;
    f12=(Cf/m)*(st_a-aux1)*st_a;
    f13=Ts/(m*rw);
```

```
f21=r*u;
f22=(Cr/m)*aux2;
f23=(Cf/m)*(aux1-st_a);
f24=((Ts*st_a)/(m*rw));

f31=(a*Cf/Iz)*(st_a-aux1);
f32=(b*Cr/Iz)*aux2;
f33=((a*Ts*st_a)/(Iz*rw));

%% Output Eqns g(x)

%Aux Out Ecns
fb=Kbf/Kbr;
a_x=(a*g+ax*h)/(b*g-ax*h);
aux3=(Kbf/rwf);
aux4=(Kbr/rwr);

g11=(1/m);
g12=(aux3+fb*a_x*aux3);
g13=(Pbfl+Pbfr);

g21=(1/m)*st_a*aux3*(Pbfl+Pbfr);

g31=(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)-(a*st_a*aux3));
g32=-1/Iz*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)+(a*st_a*aux3));

%% Full row vectors

f1=f11-f12+f13;
f2=-f21+f22-f23+f24;
f3=f31-f32+f33;

g1=-g11*g12*g13;
g2=-g21;
g3=g31*Pbfl+g32*Pbfr;

AccX = f1+g1;
AccY = f2+g2;
YawAcc = f3+g3;
```

```
function YawTarget = YTCalc(u,st_a)

Cr=1091; %Cornering Stiffness (Rear Combined) N/deg
Cf=1091; %Cornering Stiffness (Front Combined) N/deg
m=1200; %Vehicle mass (kg)
b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
g=9.81; %Gravity
Mu=0.7;
L=2.6; %wheelbase m

%%Yaw reference
Kus=(m*g/L)*((b/Cf)-(a/Cr));

uch=sqrt((g*L)/Kus);

%%YawRT
YTU=(u*st_a)/(L*(1+(u^2/uch^2)));

ValComp=(Mu*g)/u;

%Smooth yawTarget
if abs(YTU)<ValComp
    YawTarget=YTU;
elseif abs(YTU)>=ValComp
    YawTarget=ValComp*sign(YTU);
else
    YawTarget=0;
end
```

```

function [Pbfl,Pbfr,uldot,Lcdot,k,s] = YTCalc(u,v,r,st_a,ax,Ts,YawTarget,Kbf,Kbr,rd,u1,
Lc,k)

%% Parameters
%%Nominal Values

Cr=49885; %Cornering Stiffness (Rear Combined) N/rad
Cf=49885; %Cornering Stiffness (Front Combined) N/rad
b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
Iz=1300; %Moment of Inertia about Z axis (kgm)
rwr=0.298; %Effective radius m front
rwf=0.298; %Effective radius m rear
rw=0.298;
h=0.540; %Height of center sprung mass
d=1.55; %track width m
g=9.81; %Gravity
%%

fb=Kbf/Kbr;
a_x=(a*g+ax*h)/(b*g-ax*h);
aux3=(Kbf/rwf);
aux4=(Kbr/rwr);

if YawTarget >= 0
    kG=(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)-(a*st_a*aux3));
    c = -3;
else
    kG=-(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)+(a*st_a*aux3));
    c = 3;
end

s = c*(r-YawTarget);

%% ADAT STWS Lc
if abs(YawTarget)>1e-4 || k == 1

    kc=0.317;
    wc=0.220;
    yck=0.0033;
    k=1;

    V = -2 * (Lc^2) * (abs(s)^(1/2)) * sign(s) - u1;

    uldot = ((Lc^4)/2) * sign(s);

    Lcdot = kc*( (wc^(1/2)) * (abs(s)^(1/2)) - (yck^(1/2)) * (Lc^2));

else
    V=0;

```

```
    uldot=0;
    Lcdot=0;

end

%%FEEDACK LINEARIZATIO

aux1=(v+(r*a))/u;
aux2=((r*b)-v)/u;

f31=(a*Cf/Iz)*(st_a-aux1);
f32=(b*Cr/Iz)*aux2;
f33=((a*Ts*st_a)/(Iz*rw));

f3=f31-f32+f33;

Pbf_1r = -(f3/kG)+(rd/kG);

Pbf_1=(Pbf_1r)+V/kG;

%%Limiter

if abs(Pbf_1)>10
    Pbf_1=10*sign(Pbf_1);
end

%% Control logic switch (Manager)

%Non negative pressures ****BSSSSSS****
if Pbf_1<0
    sw_left=1;
    sw_right=0;
else
    sw_left=0;
    sw_right=1;
end

if YawTarget ~= 100
    Pbf1 = abs(Pbf_1)*sw_left;
    Pbf1r = abs(Pbf_1)*sw_right;
else
    Pbf1 = 0;
    Pbf1r = 0;
end
```

```
function [Pbfl,Pbfr,uldot,Lcdot,k,info] = YTCalc(u,v,r,st_a,ax,Ts,YawTarget,Kbf,Kbr,rd,
ul,Lc,k)

Cr=1091; %Cornering Stiffness (Rear Combined) N/rad
Cf=1091; %Cornering Stiffness (Front Combined) N/rad
b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
Iz=1300; %Moment of Inertia about Z axis (kgm)
rwr=0.298; %Effective radius m front
rwf=0.298; %Effective radius m rear
rw=0.298;
h=0.540; %Height of center sprung mass
d=1.55; %track width m
g=9.81; %Gravity

fb=Kbf/Kbr;
a_x=(a*g+ax*h)/(b*g-ax*h);
aux3=(Kbf/rwf);
aux4=(Kbr/rwr);

if YawTarget >= 0
    kG=(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)-(a*st_a*aux3));
    c = -2;
else
    kG=-(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)+(a*st_a*aux3));
    c = 2;
end

s =c*(r-YawTarget);

%% ADAT STWS Lc
if abs(YawTarget)>1e-4 || k == 1

    kc=1.5;
    wc=0.020;
    yck=0.00053;

    k=1;

    V = -2 * (Lc^2) * (abs(s)^(1/2)) * sign(s) - ul;

    uldot = ((Lc^4)/2) * sign(s);

    Lcdot = kc*( (wc^(1/2)) * (abs(s)^(1/2)) - (yck^(1/2)) * (Lc^2));

else

    V=0;
    uldot=0;
    Lcdot=0;
```

```
end

aux1=(v+(r*a))/u;
aux2=((r*b)-v)/u;

f31=(a*Cf/Iz)*(st_a-aux1);
f32=(b*Cr/Iz)*aux2;
f33=((a*Ts*st_a)/(Iz*rw));

f3=f31-f32+f33;

Pbf_1r = -(f3/kG)+(rd/kG);

Pbf_1=(Pbf_1r)+V/kG;

%%Limiter

if abs(Pbf_1)>10
    Pbf_1=10*sign(Pbf_1);
end

%% Control logic switch (Manager)

if Pbf_1<0
    sw_left=1;
    sw_right=0;
else
    sw_left=0;
    sw_right=1;
end

if YawTarget ~= 100
    Pbf1 = abs(Pbf_1)*sw_left;
    Pbf2 = abs(Pbf_1)*sw_right;
else
    Pbf1 = 0;
    Pbf2 = 0;
end

info=[s,YawTarget,Lc,V,Pbf_1r]';
```

```
function [Fx1,Fy1,Fx2,Fy2,Fx3,Fy3,Fx4,Fy4,wd1,wd2,wd3,wd4, GT,info]= TF(u,r,Ts,Beta,st_a,
Pbfl,Pbfr,w1,w2,w3,w4)

b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
rw=0.298;
Iw=1;

%%Torque Proportion Constant
TqK1=300;
TqK2=300;
TqK3=150;
TqK4=150;

%% LateralForces

%%Average slip angles
af1=Beta;
af2=(r*a)/u;
af3=st_a;

ar1=Beta;
ar2=(r*b)/u;

af=af1+af2-af3;
ar=ar1-ar2;

afd=af*(180/pi); %% Slip angle Degrees
ard=ar*(180/pi);

%% Longitudinal Forces
%% Slip Ratios

%%Wheel long velocity

%% During Accel

wo=(u/rw);

kp1=((w1-wo)/w1)*100;
kp2=((w2-wo)/w2)*100;
kp3=((w3-wo)/w3)*100;
kp4=((w4-wo)/w4)*100;

%% FxYi force in function of slip ratio && Slip angle (Acording to Magic Formula)
Bx=0.210;
Cx=1.67;
Dx=6090;
Ex=0.686;

By=0.164;
```

```
Cy=1.27;
Dy=5237;
Ey=-1.61;

%%Long
Fx1=Dx*sin(Cx*atan((Bx*kp1)-Ex*(Bx*kp1-atan(Bx*kp1))));
Fx2=Dx*sin(Cx*atan((Bx*kp2)-Ex*(Bx*kp2-atan(Bx*kp2))));
Fx3=Dx*sin(Cx*atan((Bx*kp3)-Ex*(Bx*kp3-atan(Bx*kp3))));
Fx4=Dx*sin(Cx*atan((Bx*kp4)-Ex*(Bx*kp4-atan(Bx*kp4))));

%%Lat
Fyf=Dy*sin(Cy*atan((By*afd)-Ey*(By*afd-atan(By*afd))));
Fyr=Dy*sin(Cy*atan((By*ard)-Ey*(By*ard-atan(By*ard))));

%% Lateral Forces

Fy1=-Fyf*0.5;
Fy2=-Fyf*0.5;
Fy3=-Fyr*0.5;
Fy4=-Fyr*0.5;

%% Transmission Gear

FDG=4;

if u<5

    GT=3.5*FDG;

elseif u>=5 && u<12

    GT=3.0*FDG;

elseif u>=12 && u<18

    GT=2.5*FDG;

elseif u>=18 && u<23

    GT=2.0*FDG;

else

    GT=1.4*FDG;

end

%% Motor Giving power Front Wheels

Tdw1= Ts;
```

```
Tdw2= Ts;
```

```
%% Wheel Dynamics
```

```
wd1 = (1/Iw)*((Tdw1)-(rw*Fx1)-(TqK1*Pbfl)); %%Front Left  
wd2 = (1/Iw)*((Tdw2)-(rw*Fx2)-(TqK2*Pbfr)); %%Front Right  
wd3 = (1/Iw)*(-(rw*Fx3)-(TqK3*Pbfl)); %%Rear Left  
wd4 = (1/Iw)*(-(rw*Fx4)-(TqK4*Pbfr)); %%Rear Right
```

```
info=[Fx1, kp1, kp2, kp3, kp4]';
```

```
function [AccX,AccY,YawAcc] = NVD(u,v,r,Fx1,Fy1,Fx2,Fy2,Fx3,Fy3,Fx4,Fy4,dl,dr)

m=1300; %Vehicle mass (kg)
b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
Iz=1300; %Moment of Inertia about Z axis (kgm)
d=1.55; %track width m
Df=0.5*d;

%% State Eqns f(x)+g(u,x)

f11=Fx1*cos(dl);
f12=Fx2*cos(dr);
f13=Fx3;
f14=Fx4;
f15=Fy1*sin(dl);
f16=Fy2*sin(dr);
f17=m*v*r;

f21=Fx1*sin(dr);
f22=Fx2*sin(dr);
f23=Fy3;
f24=Fy4;
f25=Fy1*cos(dl);
f26=Fy2*cos(dr);
f27=m*u*r;

f31=Fy1*(a*cos(dl)+Df*sin(dl));
f32=(Fy3+Fy4)*b;
f33=Fy2*(a*cos(dr)-Df*sin(dr));
f34=Fx1*(-Df*cos(dl)+a*sin(dl));
f35=Fx2*(a*sin(dr)+Df*cos(dr));
f36=Fx3*Df;
f37=Fx4*Df;

%% Full row vectors

f1=(1/m)*(f11+f12+f13+f14-f15-f16+f17);
f2=(1/m)*(f21+f22+f23+f24+f25+f26-f27);
f3=(1/Iz)*(f31-f32+f33+f34+f35-f36+f37);

AccX = f1;
AccY = f2;
YawAcc = f3;
```

```
function YawTarget = YTCalc(u,st_a,Mu)

Cr=10091;
m=1200; %Vehicle mass (kg)
b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
g=9.81; %Gravit
L=2.6; %wheelbase m
kgk=0.066; %Gear SWHE 2 DRWHE 15:1

st_aREC=st_a;

h1=b/kgk;

h2=(m*a)/(2*kgk*Cr*L);

p_yref=-(u*st_aREC)/(h1-h2*(u^2)); %%Yaw Rate (Unsaturated)

YawTarget=p_yref;

ValComp=0.85*(Mu*g)/u;

%Smooth yawTarget
if abs(YawTarget)>=ValComp
    YawTarget=ValComp*sign(YawTarget);
elseif abs(YawTarget)<ValComp
    YawTarget=YawTarget;
else
    YawTarget=0;
end
```

```

function [Pbfl,Pbfr,Pbrl,Pbrr,uldot,Lcdot,k] = YTCalc(u,v,r,st_a,ax,Ts,YawTarget,rd,u1,
Lc,k)

%% Nominal Params
Cr=10000;
Cf=10000;
m=1200; %Vehicle mass (kg)
b=1.6; %rear lenght (From CG) (m)
a=1; %front lenght (From CG) (m)
Iz=1300; %Moment of Inertia about Z axis (kgm)
rwr=0.298; %Effective radius m front
rwf=0.298; %Effective radius m rear
rw=0.298;
h=0.540; %Height of center sprung mass
d=1.55; %track width m
g=9.81; %Gravity
Mu=1;
L=2.6; %wheelbase m
Kbf=250;
Kbr=250;
kgk=0.066; %Gear SWHE 2 DRWHE 15:1
%%0.2 MU / 80 KM H / 60 DEG ST

fb=Kbf/Kbr;
a_x=(a*g+ax*h)/(b*g-ax*h);
aux3=(Kbf/rwf);
aux4=(Kbr/rwr);

if YawTarget > 0
    kG=(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)-(a*st_a*aux3)); %%%K4 u1
    c=3;
else
    kG=-(1/Iz)*((d/2)*(aux3+fb*a_x*aux4)+(a*st_a*aux3)); %%%K5 u2
    c=-3;
end
%% Sliding variable (relative degree subs === 1) (Linear variable)
s = c*(r-YawTarget);
%%
%%
monit=0;
if abs(YawTarget) > 1e-4 || k==1

    wc=0.0220;
    yck=1e-5;

    Mc=( (wc^(1/2)) * ((abs(s)/(Lc^(1/2)))^(1/2)) - (yck^(1/2))*Lc )^2;

    kc = abs(((Lc*0.618) / (2*Mc*0.469))); %ADAT

```

```
V = -2 * (Lc^2) * (abs(s)^(1/2)) * sign(s) + u1;

RelTol=9;

if abs(V) < RelTol

    uldot = -((Lc^4)/2) * sign(s);

else

    uldot=-V;

end

Lcdot = kc*( (wc^(1/2)) * (abs(s)^(1/2)) - (yck^(1/2)) * (Lc^2));

k=1;

cp1=1;

usaT=0;

else

    V=0;
    uldot=0;
    Lcdot=0;
    ycin=0;
    kc=0;
    cp1=0;
    usaT=0;

end

%%
%%NEW U FEEDACK LINEARIZATION

aux1=(v+(r*a))/u;
aux2=((r*b)-v)/u;

f31=(a*Cf/Iz)*(st_a-aux1);
f32=(b*Cr/Iz)*aux2;
f33=((a*Ts*st_a)/(Iz*rw));

f3=f31-f32+f33;

Pbf_1r = -(f3/kG)+(rd/kG);

Pbf_1=cp1*(Pbf_1r)+V/kG;

if abs(Pbf_1) > 10
```

```
Pbf_1=10*sign(Pbf_1);
end

%% Control logic switch (Manager)
%% Non negative pressures
if Pbf_1<0
    sw_left=0;
    sw_right=1;
else
    sw_left=1;
    sw_right=0;
end

if abs(YawTarget) > 0 && k==1

    Pbf1 = abs(Pbf_1)*sw_left;
    Pbf2 = abs(Pbf_1)*sw_right;
    Pbrl=fb*a_x*Pbf1;
    Pbr2=fb*a_x*Pbf2;

else

    Pbf1 = 0;
    Pbf2 = 0;
    Pbrl=0;
    Pbr2=0;
    k=0;

end

%%
```

Bibliografía

- [1] Abe, M., Kano, Y., Suzuki, K., Shibahata, Y., and Furukawa, Y. (2001). Side-slip control to stabilize vehicle lateral motion by direct yaw moment. *JSAE Review*, 22(4):413–419.
- [2] Ackermann, J. (1997). *Robust control*. Communications and Control Engineering. Springer, Guildford, England, 1 edition.
- [3] Alvaro-Mendoza, E., De León-Morales, J., Hamida, M. A., and Ghanes, M. (2023). Adaptive sensorless control for interior permanent magnet synchronous motor based on sliding mode approach. *ISA Transactions*, 139:524–547.
- [4] Aripin, M. K., Sam, Y. M., Danapalasingam, K. A., Peng, K., Hamzah, N., and Ismail, M. F. (2014). A review of active yaw control system for vehicle handling and stability enhancement. *International Journal of Vehicular Technology*, 2014:1–15.
- [5] Bakker, E., Nyborg, L., and Pacejka, H. B. (1987). Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. In *SAE Technical Paper Series*. SAE International.
- [6] Bakker, E., Pacejka, H. B., and Lidner, L. (1989). A new tire model with an application in vehicle dynamics studies. In *SAE Technical Paper Series*. SAE International.
- [7] Bartolini, G., Ferrara, A., and Usai, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):241–246.
- [8] Bhardwaj, U. (2020). Electronic stability program. <https://www.bosch-mobility.com/en/solutions/driving-safety/electronic-stability-program/>.
- [9] Boada, B. L., Boada, M. J., and Díaz, V. (2005). Fuzzy-logic applied to yaw moment control for vehicle stability. *Vehicle System Dynamics*, 43(10):753–770.
- [10] Chaib, S. and Netto, M. (2004). Hinf, adaptive, pid and fuzzy control: A comparison of controllers for vehicle lane keeping. pages 139 – 144.
- [11] Chen, C.-K., Dao, T.-K., and Lo, M.-F. (2008). A compensated-yaw-moment-based vehicle stability controller. In *2008 Chinese Control and Decision Conference*, pages 892–897.
- [12] Cho, D. and Hedrick, J. K. (1989). Automotive powertrain modeling for control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111(4):568–576.

-
- [13] Choi, S. B. (2008). Antilock brake system with a continuous wheel slip control to maximize the braking performance and the ride quality. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(5):996–1003.
- [14] Cui, Z. (2012). Steering control of an autonomous vehicle based on rbf neural networks compensation and dynamic systems. *In Advanced Materials Research*, 460(460):98–102.
- [15] Den Hartog, J. (1961). *Mechanics*. Dover Books on Physics. Dover Publications.
- [16] Derbel, N., Ghommam, J., and Zhu, Q., editors (2017). *Applications of Sliding Mode Control*. Springer Singapore.
- [17] Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control*. CRC Press.
- [18] Filippov, A. F. (2010). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Mathematics and its Applications. Springer, Dordrecht, Netherlands.
- [19] Ghabi, J. and Dhouibi, H. (2018). Adaptive sliding mode controller for an inverted pendulum. In *2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD)*, pages 1397–1401.
- [20] Gillespie, T. D. (1992). *Fundamentals of vehicle dynamics*. Premiere Series Books. SAE International, Warrendale.
- [21] Guiggiani, M. (2014). *The Science of Vehicle Dynamics*. Springer Netherlands.
- [22] Guo, J., Luo, Y., and Li, K. (2019). Robust gain-scheduling automatic steering control of unmanned ground vehicles under velocity-varying motion. *Vehicle System Dynamics*, 57(4):595–616.
- [23] Guo, J., Luo, Y., and Qiang, L. (2018). Adaptive nonlinear trajectory tracking control for lane change of autonomous four-wheel independently drive electric vehicles. *IET Intelligent Transport Systems*, 12.
- [24] Huang, Y.-J., Kuo, T.-C., and Chang, S.-H. (2008). Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 38(2):534–539.
- [25] Isidori, A. (1999). *Nonlinear Control Systems II*. Springer London.
- [26] J. Gong, Y. J. (2014). Model predictive control for self-driving vehicle. *Beijing Institute of Technology*.
-

- [27] Katriniok, A., Maschuw, J. P., Christen, F., Eckstein, L., and Abel, D. (2013). Optimal vehicle dynamics control for combined longitudinal and lateral autonomous vehicle guidance. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 974–979.
- [28] Keviczky, T., Falcone, P., Borrelli, F., Asgari, J., and Hrovat, D. (2006). Predictive control approach to autonomous vehicle steering. In *2006 American Control Conference*, pages 6 pp.–.
- [29] Khalil, H. K. (2001). *Nonlinear Systems*. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 3 edition.
- [30] Khansari, M. H., Yaghoobi, M., and Abaspour, A. (2015). Independent model generalized predictive controller design for antilock braking system. *International Journal of Computer Applications*, 114(1):18–23.
- [31] Kiencke, U. and Nielsen, L. (2005). *Automotive control systems*. Springer, Berlin, Germany, 2 edition.
- [32] Kotwicki, A. J. (1982). Dynamic models for torque converter equipped vehicles. In *SAE Technical Paper Series*. SAE International.
- [33] Le, A.-T. and Chen, C.-K. (2015). Adaptive sliding mode control for a vehicle stability system. In *2015 International Conference on Connected Vehicles and Expo (ICCVE)*, pages 214–219.
- [34] Lin, J., Zou, T., Zhang, F., and Zhang, Y. (2022). Yaw stability research of the distributed drive electric bus by adaptive fuzzy sliding mode control. *Energies*, 15(4):1280.
- [35] Loeb, J. S., Guenther, D. A., Chen, H.-H. F., and Ellis, J. R. (1990). Lateral stiffness, cornering stiffness and relaxation length of the pneumatic tire. In *SAE Technical Paper Series*. SAE International.
- [36] Marino, R. and Tomei, P. (1995). *Nonlinear control design*. Prentice Hall information & system sciences series. Prentice-Hall, London, England.
- [37] Moreno, J. A. and Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2856–2861.
- [38] Organization, W. H. (2022). Who. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/road-traffic-injuries>.

-
- [39] Pacejka, H. and Sharp, R. (1991). Shear force development by pneumatic tyres in steady state conditions: A review of modelling aspects. *Vehicle System Dynamics*, 20(3-4):121–175.
- [40] Pacejka, H. B. (2000). Modelling of tyre force and moment generation. In *Rolling Contact Phenomena*, pages 277–327. Springer Vienna.
- [41] Rajamani, R. (2012). *Vehicle Dynamics and Control*. Springer US.
- [42] Reif, K. (2018). *Automotive handbook*.
- [43] Sayers, M. W. (1999). Vehicle models for RTS applications. *Vehicle System Dynamics*, 32(4-5):421–438.
- [44] Sayers, M. W. and Han, D. (1996). A generic multibody vehicle model for simulating handling and braking. *Vehicle System Dynamics*, 25(sup1):599–613.
- [45] Schuring, D. J., Pelz, W., and Pottinger, M. G. (1993). The BNPS model - an automated implementation of the “magic formula” concept. In *SAE Technical Paper Series*. SAE International.
- [46] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Springer New York.
- [47] Shtessel, Y. B., Moreno, J. A., Plestan, F., Fridman, L. M., and Poznyak, A. S. (2010). Super-twisting adaptive sliding mode control: A Lyapunov design. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5109–5113.
- [48] Simulation, M. (2023). Carsim. <https://www.carsim.com/>.
- [49] Slotine, J.-J. E. and Li, W. (1990). *Applied nonlinear control*. Pearson, Upper Saddle River, NJ.
- [50] Tagne, G., Talj, R., and Charara, A. (2013). Higher-order sliding mode control for lateral dynamics of autonomous vehicles, with experimental validation. In *2013 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, pages 678–683.
- [51] Van Zanten, A., Erhardt, R., Landesfeind, K., and Pfaff, G. (2000). Vehicle stabilization by the vehicle dynamics control system esp. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(26):95–102. IFAC Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, 18–20 September 2000.
- [52] Vukic, Z. (2003). *Nonlinear Control Systems*. CRC Press.

- [53] Wong, J. Y. (2001). *Theory of ground vehicles*. John Wiley & Sons, Nashville, TN, 3 edition.
- [54] Yi, K., Chung, T., Kim, J., and Yi, S. (2003). An investigation into differential braking strategies for vehicle stability control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 217(12):1081–1093.
- [55] Young, K., Utkin, V., and Ozguner, U. (1999). A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3):328–342.
- [56] Zhang, Y., Ang, W. T., Jin, J., Zhang, S., and Man, Z. (2008). Nonlinear adaptive sliding mode control for a rotary inverted pendulum. In *Lecture Notes in Electrical Engineering*, pages 345–360. Springer US.