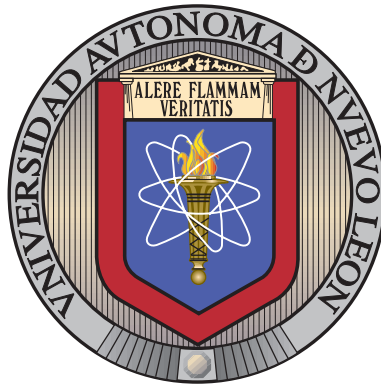


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS DINÁMICOS DE  
LAGRANGE.

POR

ING. YAICO ORLANDO UNUFIO TORRES

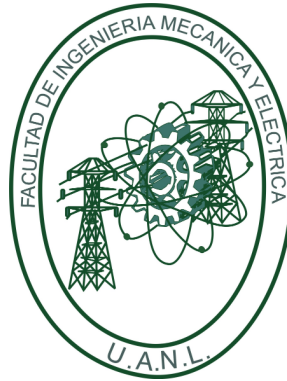
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

NOVIEMBRE, 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS DINÁMICOS DE  
LAGRANGE.

POR

ING. YAIKO ORLANDO UNUFIO TORRES

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

NOVIEMBRE, 2023

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Posgrado**

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis “Control óptimo de sistemas dinámicos de Lagrange”, realizada por el estudiante Yaiko Orlando Unufio Torres, con número de matrícula 2032325, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica.

**El Comité de Evaluación de Tesis**

Dr. René Galindo Orozco  
Director

Dr. Efraín Alcorta García  
Revisor

Dr. Mikhail Valentinovich Basin  
Revisor

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga  
Revisor

Vo.Bo.

  
Dr. Simon Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

Institución 190001

Programa 557520

Acta Núm. 4330

Ciudad Universitaria, a 19 de abril de 2024.

*A quienes han sido la luz en mi sendero hacia el aprendizaje.*

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a aquellos que fueron fundamentales en el desarrollo de este proyecto. A mi familia, por su amor incondicional, apoyo constante y sacrificio para que pudiera alcanzar este logro. A mi madre y padre, por ser mi fuente de inspiración y sostén en cada paso de este camino. A mi hermana, por su ánimo y comprensión en los momentos más desafiantes.

Agradezco también a mi abuela, quien ahora descansa en paz, por haber sembrado en mí la semilla del esfuerzo y la perseverancia desde el inicio. Su influencia perdura en cada logro alcanzado.

Agradezco enormemente a mi asesor de tesis, Dr. René Galindo Orozco, por su orientación experta, paciencia y dedicación incansable. Sus conocimientos y guía fueron pilares fundamentales en la realización de este trabajo.

No puedo pasar por alto el apoyo de mis amigos y compañeros de aula. Sus consejos y motivaciones fueron vitales para completar este proceso.

A todos y cada uno de ustedes, mi más sincero agradecimiento. Este logro no habría sido posible sin su contribución y respaldo.

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Yaiko Orlando Unufio Torres, M.C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2023

**Profesor asesor: Dr. René Galindo Orozco**

Para sistemas Euler-Lagrange no lineales completamente actuados, se propone una solución analítica de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). La ley de control óptima de lazo cerrado resuelve el problema de regulación del estado y minimiza un criterio de horizonte finito propuesto, que incluye a la energía cinética y un término cuadrático de la entrada. El problema de regulación óptima con horizonte infinito se resuelve como un caso particular de la solución obtenida para horizonte infinito. Las trayectorias de estado resultantes y la ley de control son suaves y permanecen dentro de rangos admisibles. Además, la solución analítica propuesta disminuye la carga computacional. Los resultados se ilustran en sistemas mecánicos de doble péndulo y un péndulo sobre carro.

# Índice General

<b>Resumen</b> . . . . .	VI
<b>Índice de Figuras</b> . . . . .	IX
<b>Índice de Tablas</b> . . . . .	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Problema a resolver . . . . .	3
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	6
2.1.1. Control Óptimo . . . . .	6
2.1.2. Ecuación de Lagrange [1] . . . . .	7
2.1.3. Principio de Programación Dinámica [1] . . . . .	8
2.1.4. Teorema de Pontryagin [1] . . . . .	10
2.1.5. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman [2] . . . . .	10
2.1.6. Estabilidad de Lyapunov [3] . . . . .	12
2.1.7. LaSalle [3] . . . . .	13
<b>3. Resultados</b>	<b>16</b>
3.1. Supuestos básicos y criterio a minimizar . . . . .	16
3.2. Regulación óptima para sistemas dinámicos de Lagrange . . . . .	20
<b>4. Ejemplos Ilustrativos</b>	<b>27</b>
4.1. Doble péndulo . . . . .	27

4.1.1. Sistema dinámico . . . . .	27
4.1.2. Simulación y resultados . . . . .	29
4.2. Carro con Péndulo . . . . .	39
4.2.1. Sistema Dinámico . . . . .	39
4.2.2. Simulación y Resultados . . . . .	40
<b>5. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>50</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



# Índice de figuras

3.1. Configuración de retroalimentación. . . . .	26
4.1. Doble Péndulo Planar . . . . .	28
4.2. Posición de salida péndulo $q_1$ . . . . .	31
4.3. Posición de salida péndulo $q_2$ . . . . .	31
4.4. Velocidad de salida péndulo $dq_1/dt$ . . . . .	32
4.5. Velocidad de salida péndulo $dq_2/dt$ . . . . .	32
4.6. Ley de control $u_1$ . . . . .	33
4.7. Ley de control $u_2$ . . . . .	33
4.8. Posiciones angulares de los péndulos $q_1$ y $q_2$ . . . . .	34
4.9. Velocidades Angulares de los péndulos $q_1$ y $q_2$ . . . . .	34
4.10. Leyes de Control $u_1$ y $u_2$ . . . . .	35
4.11. Hamiltoniano $H$ . . . . .	35
4.12. Hamiltoniano $H$ . . . . .	36
4.13. $q_1$ con diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	36
4.14. $q_2$ con diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	37
4.15. $H$ con con respecto a $u_1$ para diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	37
4.16. $H$ con con respecto a $u_2$ para diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	38
4.17. Péndulo sobre carro . . . . .	39
4.18. Posición angular $\phi$ . . . . .	42
4.19. Posición $x$ . . . . .	42
4.20. Velocidad angular $\frac{d\phi}{dt}$ . . . . .	43

4.21. Velocidad del carro $\frac{dx}{dt}$ . . . . .	43
4.22. Ley de control $u_1$ . . . . .	44
4.23. Ley de control $u_2$ . . . . .	44
4.24. Posiciones $x$ y $\phi$ . . . . .	45
4.25. Velocidades $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{d\phi}{dt}$ . . . . .	45
4.26. Leyes de control $u_1$ y $u_2$ . . . . .	46
4.27. Hamiltoniano $H$ . . . . .	46
4.28. Hamiltoniano $H$ . . . . .	47
4.29. $\phi$ con diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	47
4.30. $x$ con diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	48
4.31. $H$ con con respecto a $u_1$ para diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	48
4.32. $H$ con con respecto a $u_2$ para diferentes valores de $\Psi$ . . . . .	49

# Índice de tablas

4.1. Parámetros . . . . . 29

# Capítulo 1

## Introducción

Los sistemas dinámicos pueden definirse como aquel conjunto de componentes o partes en los que al menos uno de sus componentes se relaciona con los demás, en los cuáles sus estados cambian al pasar el tiempo. Estos cambios pueden ser resultado de interacciones entre los componentes, influencias externas, o procesos internos del sistema. De esta manera se pueden desarrollar modelos matemáticos que simulen el comportamiento del sistema analizado [4]. Por ejemplo, en el caso de un péndulo, la posición y la velocidad del péndulo cambian de manera continua a medida que transcurre el tiempo. La evolución se basa en el estado, el sistema parte de un estado  $x_0$  y llega al siguiente estado dependiendo del estado anterior. Además, existe una ley que rige esta evolución, por lo que al conocer su estado inicial se pueden predecir futuros estados. Dentro del gran número de sistemas dinámicos que existen, se encuentran los sistemas dinámicos no lineales de Lagrange (EL) que han sido objeto de estudio durante muchos años [5]. Una de las ciencias que se ha dedicado a estudiarlos ha sido la Mecatrónica, la cual se ha encargado de estudiar y modificar mediante técnicas de control a este tipo de sistemas utilizando múltiples enfoques. El control óptimo para sistemas lineales es uno de ellos y se ha aplicado ampliamente, se pueden ver ejemplos en los trabajos de [6], [7] y [8].

El presente trabajo se centra en el control óptimo de lazo cerrado para sistemas Lagrange no lineales completamente actuados. El principal problema es resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) [9]. Este problema pocas veces tiene solución analítica, por lo cual es difícil de resolver.

## 1.1. Estado del arte

En la literatura se pueden encontrar gran variedad de formas de atacar esta problemática, dentro de las que se encuentran la linealización por retroalimentación que asume el conocimiento exacto del modelo, el desarrollo de aproximaciones de redes neuronales (NN por sus siglas en inglés) de la función de valor de las ecuaciones de HJB [8] y la técnica de retroalimentación integral robusta del signo del error (RISE) [10]. En la mayoría de los casos, la solución de la ecuación HJB se reduce a resolver ecuaciones algebraicas de Riccati.

También hay resultados con soluciones analíticas de la ecuación HJB, aunque son pocos. Ejemplo de esto se puede citar el artículo donde se propone una solución analítica a la ecuación HJB para el sistema EL [11] y se desarrolla más en el trabajo de [7] donde se plantea una ley de control que anula parte de la dinámica no lineal llegando a un modelo no lineal de primer orden, que se utiliza para el diseño de una ley de control óptima minimizando un índice cuadrático y se asegura la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Las redes neuronales se utilizan en estos trabajos para hacer frente a las incertidumbres del modelo.

Otro enfoque es el problema de control óptimo inverso no lineal. Un trabajo en esta dirección es el de [6] que resuelve analíticamente la ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) para sistemas EL. En ese trabajo, un problema de control óptimo se resuelve a través de Desigualdades de Matriciales Lineales, que son las desigualdades de Riccati.

Otra solución al problema de control óptimo inverso se presenta en el trabajo de [8], donde la salida se controla en base a la retroalimentación estimada del estado generada por un observador óptimo inverso de sistemas EL. Igualmente se le da solución al problema, en el trabajo de [12], usando la estructura variacional de la solución del correspondiente problema de valores en la frontera, el problema se transforma en un problema auxiliar de programación multiobjetivo o como en el trabajo de [13], donde se resuelve el problema de control óptimo para una clase de sistemas pseudo-EL, y se propone un enfoque sistemático para obtener una función de Lyapunov para el análisis de estabilidad y el diseño de control.

## 1.2. Problema a resolver

Después de analizar los casos anteriores se puede observar que las formas de abordar el problema de control óptimo y darle solución han sido muy diversas, dentro de las que se encuentran.

- En [7] se utiliza Integral Robusta del Signo del Error (RISE por sus siglas en inglés) que proporciona estabilidad y robustez ante perturbaciones y variaciones en el modelo del sistema, lo que lo hace adecuado para sistemas con modelos inexactos o variables no modeladas.
- En [11] se utilizan Redes Neuronales (NN por sus siglas en inglés) que son para aprender relaciones no lineales complejas entre las entradas y salidas, lo que es ventajoso en sistemas con comportamientos no lineales difíciles de modelar de manera analítica.
- En [6] se utiliza Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) que ofrece robustez y estabilidad ante perturbaciones y variaciones en el modelo del sistema, siendo crucial en sistemas donde la seguridad es crítica

Los abordajes anteriormente mencionados para resolver problemas de control óptimo pueden ser muy eficientes en dependencia de la naturaleza del sistema, los objetivos de control y la disponibilidad de información sobre el modelo y el sistema en cuestión. Aunque también pueden presentar algunas desventajas como son:

- En [7] la utilización de RISE puede llevar a respuestas lentas o acumulación de errores si el sistema opera en estados subóptimos durante períodos prolongados.
- En [11] la utilización de NN puede requerir grandes conjuntos de datos de entrenamiento y tiempo de cómputo significativo.
- En [6] el uso de HJI implica enfoques heurísticos y puede ser más difícil de formalizar matemáticamente en comparación con métodos como el HJB

Para el caso de esta tesis, se decidió resolver el problema de control óptimo de regulación formulando una solución analítica de la ecuación HJB, para un Sistema Dinámico de Lagrange Com-

pletamente Actuado (SDLCA) que tienen la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + \tau_d(t) = \tau(t) \quad (1.1)$$

Donde

- $M(q)\ddot{q}$  Representa el término relacionado con la masa y la aceleración del sistema.  $M(q)$  es la matriz de masa que puede depender de la configuración  $q$  del sistema y  $\ddot{q}$  representa la segunda derivada temporal de la variable  $q$ , que puede ser la posición, ángulo, etc., dependiendo del contexto.
- $C(q, \dot{q})\dot{q}$  Es el término asociado con las fuerzas de Coriolis y centrípetas.  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es una matriz o función que depende de las variables de configuración  $q$  y las velocidades  $\dot{q}$  del sistema.  $\dot{q}$  representa la velocidad en función del tiempo.
- $G(q)$  Representa las fuerzas gravitacionales o términos potenciales asociados con la configuración  $q$  del sistema. Dependiendo del sistema, esta función puede considerar fuerzas gravitacionales o cualquier otro efecto similar.
- $F(\dot{q})$  Es el término de fricción y puede depender de las velocidades  $\dot{q}$  del sistema. Puede representar fuerzas viscosas, de Coulomb u otros tipos de fricción presentes en el sistema.
- $\tau_d(t)$  Es la perturbación externa o la perturbación de control que actúa sobre el sistema en función del tiempo  $t$ . Puede ser una fuerza externa o un término de perturbación introducido intencionalmente en el sistema.
- $\tau(t)$  Representa el término de control aplicado al sistema en función del tiempo  $t$ . Esta es la fuerza de control que se aplica al sistema para influir en su comportamiento y lograr un cierto objetivo.

y presenta las siguientes propiedades [7]:

- La matriz de inercia  $M(q)$  es simétrica, positiva definida.

- La siguiente relación asimétrica se satisface:

$$\xi^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

Además, se toma como verdadero el siguiente supuesto:

- $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$ ,  $F(\dot{q})$  son medibles y acotadas, además sus derivadas parciales con respecto a  $q$  y  $\dot{q}$  existen y también son acotadas.

Y ya que se tiene conocimiento preciso del modelo dinámico del sistema y con esta solución analítica se obtiene una rápida respuesta aunque el sistema opere durante largos periodos de tiempo, se disminuye el cálculo recursivo y la carga computacional y se obtiene una solución óptima en términos de criterio de rendimiento más efectiva que los casos anteriormente analizados.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

Este capítulo está destinado a conocer los teoremas, conceptos y principios que se utilizan en esta tesis para darle solución a la problemática planteada.

### 2.1. Antecedentes

#### 2.1.1. Control Óptimo

El objetivo de la teoría del control óptimo es proporcionar herramientas para elegir entre todas las estrategias de control posibles, la que logre el mejor comportamiento. En problemas de control óptimo en situaciones de la vida real, se pueden aplicar estrategias de control óptimo, como se muestra en el trabajo de [14]. Una parte importante de esta teoría es la modelización del proceso, buscando obtener una expresión simplificada que describa de manera precisa la respuesta del sistema físico a todas las entradas esperadas. Nuestra discusión se limitará a los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias(en forma de variables de estados).

Si

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \tag{2.1}$$

son variables de estados en función del tiempo  $t$ , y

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \tag{2.2}$$

son entradas de control en función del tiempo  $t$ , entonces el sistema puede ser descrito por la ecuación diferencial de orden  $n$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ \dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Se puede definir

$$x^T(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]^T\tag{2.4}$$

como el vector de estados del sistema, y

$$u^T(t) = [u_1(t) \cdots u_m(t)]^T\tag{2.5}$$

como el vector de control. Las ecuaciones de estado pueden escribirse

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)\tag{2.6}$$

donde  $a$  está descrita en la ec.(2.3)

De esta manera se puede resolver el problema de control óptimo que es maximizar el retorno o minimizar el costo de la operación de los procesos físicos, sociales y económicos.

### 2.1.2. Ecuación de Lagrange [1]

Al considerar el problema de optimización dado por las ecuaciones

$$J(x_0, u) = \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T))\tag{2.7}$$

donde la variable de estado  $x(t)$  satisface, la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0 \quad (2.8)$$

Tomando que las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  satisfacen los **Supuestos Básicos A**

- $h(t) \in \mathbb{R}$
- $g(t, x, u) \in \mathbb{R}$
- $f(t, x, u) \in \mathbb{R}^n$
- Para  $f(t, x, u)$  y  $g(t, x, u)$  todas las derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $u$  existen y son continuas.

Dado

$$H(t, x, u, \lambda) = g(t, x, u) + \lambda f(t, x, u) \quad (2.9)$$

Si  $u^*(t) \in U$  es un control que produce un mínimo local para el costo funcional (2.7), y  $x^*(t)$  y  $\lambda^*(t)$  son el estado y costo correspondientes, entonces es necesario que

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial \lambda}, x^*(0) = x_0 \quad (2.10)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial x}; \lambda^*(T) = \frac{\partial h(x^*(T))}{\partial x} \quad (2.11)$$

y para  $t \in [0, T]$

$$\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial u} = 0 \quad (2.12)$$

### 2.1.3. Principio de Programación Dinámica [1]

Sea  $u^*(t) \in \mathcal{U}$  un control que produce un mínimo local para la función de costo (2.7), y sea  $x^*(t)$  la trayectoria de estado correspondiente. Defina el valor inicial de la función de valor  $V(t, x)$  como:

$$V(t_0, \bar{x}) := J^*(t_0, \bar{x}), \bar{x} = x(t_0) \quad (2.13)$$

y asumiendo que ambas derivadas parciales de  $V(t, x)$  existen,  $\frac{\partial V}{\partial x}$  es continua y, además,  $\frac{d}{dt}V(t, x(t))$  existe. Entonces para  $t_0 \leq t \leq T$  se tiene la Ec.de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ g(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, u) \right\}, V(T, x) = h(x(T)) \quad (2.14)$$

y

$$u^*(t, x) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ g(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, u) \right\} \quad (2.15)$$

### Prueba

Como se ha demostrado en [1] que siempre que  $u^*(.)$  sea un control óptimo, entonces necesariamente la ecuación (2.14) se cumple bajo los supuestos establecidos. Lo que queda por demostrar es que si el control  $u^*(.)$  se elige como en la ecuación (2.15), este control es óptimo.

De la ecuación (2.14) se deduce que para un  $u(.) \in \mathcal{U}$  arbitraria,

$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \leq g(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, u)$  y  $-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \leq g(t, x^*, u^*) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*) f(t, x^*, u^*)$  o planteado de otra manera

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, u) + g(t, x, u) \geq 0 \quad (2.16)$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*) f(t, x^*, u^*) + g(t, x^*, u^*) = 0 \quad (2.17)$$

Como  $\frac{dV(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$  integrando las ecuaciones (2.16) y (2.17) de 0 a  $T$

$$V(T, x(T)) - V(0, x(0)) + \int_0^T g(t, x, u) dt \geq 0 \quad (2.18)$$

y

$$V(T, x^*(T)) - V(0, x(0)) + \int_0^T g(t, x^*, u^*) dt = 0 \quad (2.19)$$

Al sustituir  $V(0, x(0))$  de la ecuación(2.19) en la ecuación(2.18) se obtiene

$$\int_0^T g(t, x, u) dt + V(T, x(T)) \geq \int_0^T g(t, x^*, u^*) dt + V(T, x^*(T))$$

de lo cual está claro que  $u^*(.)$  es óptima.

#### 2.1.4. Teorema de Pontryagin [1]

Al considerar el problema de optimización dado por las ecuaciones (2.7) y (2.8). Suponiendo que las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  satisfacen los **Supuestos Básicos A** e introduciendo  $H := g + \lambda f$ . Dado  $u^*(t) \in \mathcal{U}$ , un control que produzca un mínimo local para el funcional de costo (2.7), y sea  $x^*(t)$  sea la trayectoria de estado correspondiente. Entonces existe una función  $[\lambda^*]^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface:

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*, u^*) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda)}{\partial \lambda}, x^*(0) = x_0; \quad (2.20)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial x}; \dot{\lambda}^*(T) = \frac{\partial h(x^*(T))}{\partial x} \quad (2.21)$$

para todo  $t \in (0, T)$  en el que  $u^*$  es continua

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*, u, \lambda^*) \quad (2.22)$$

esto es

$$u^*(t) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*, u, \lambda^*) \quad (2.23)$$

#### 2.1.5. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman [2]

La ecuación

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.24)$$

tiene un índice de rendimiento de

$$J(x(t_0), t_0) = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x, u, t) dt \quad (2.25)$$

Se desea determinar un control óptimo continuo  $u^*(t)$  en un intervalo dado  $[t_0, T]$  que minimice  $J$  y lleve un estado inicial dado  $x(t_0)$  a un estado final que satisfaga

$$\Psi(x(T), T) = 0 \quad (2.26)$$

para una función dada. Veamos primero qué forma adopta el principio de optimalidad de Bellman para este problema.

Supongamos que  $t$  es el tiempo actual y  $t + \Delta t$  es un tiempo futuro cercano a  $t$ . Entonces el costo de ir  $J(x(t), t)$  se puede escribir

$$J(x, t) = \phi(x(T), T) + \int_{t+\Delta t}^T L(x, u, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} L(x, u, \tau) d\tau \quad (2.27)$$

Estamos usando  $\tau$  como una variable ficticia ya que  $t$  es el tiempo actual. Por lo tanto, podemos decir

$$J(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} L(x, u, \tau) d\tau + J(x + \Delta x, t + \Delta t) \quad (2.28)$$

donde  $x + \Delta x$  es el estado en el tiempo  $t + \Delta t$  que resulta cuando se usan las actuales  $x(t)$  y  $u(t)$  en (2.24). Tenga en cuenta que

$$\Delta x = f(x, u, t)\Delta t \quad (2.29)$$

La ecuación (2.28) describe todos los costes posibles para pasar del tiempo  $t$  al tiempo final  $T$ . De acuerdo con el principio de optimalidad de Bellman, sin embargo, los únicos candidatos para  $J^*(x, t)$  son aquellos costes  $J(x, t)$  que son óptimos de  $\Delta t + t$  a  $T$ . Supongamos que se conoce el costo óptimo  $J^*(x + \Delta x, t + \Delta t)$  para todos los posibles  $x + \Delta x$ . Supongamos también que se ha determinado el control óptimo en el intervalo  $[t + \Delta t, T]$  para cada  $x + \Delta x$ . Entonces solo queda seleccionar el control actual  $u(t)$  en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$ . Por eso,

$$J^*(x, t) = \min_{u(t)} \left[ \int_t^{t+\Delta t} L(x, u, \tau) d\tau + J^*(x + \Delta x, t + \Delta t) \right] \quad (2.30)$$

$$t \leq \tau \leq t + \Delta t$$

Desafortunadamente, (2.30) no proporciona un medio directo para encontrar analíticamente el control y el costo óptimos, aunque algunos métodos de solución numérica lo usan. Por lo tanto, realicemos algunas manipulaciones adicionales para encontrar una manera de calcular estas cantidades.

Realice una expansión en serie de Taylor de  $J^*(x+x, t+t)$  sobre  $(x, t)$  y realizar una aproximación a la integral en (2.30) para escribir,

$$J^*(x, t) = \min_{u(t)} \int_{t \leq r \leq t + \Delta t} \left( L\Delta t + J^*(x, t) + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T \Delta x + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t \right) \quad (2.31)$$

Ahora use (2.29) y observe que  $J^*$  y  $J_t^* \Delta t$  son independientes de  $u(\tau)$ ,  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ , para ver que

$$J^*(x, t) = J^*(x, t) + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t = \min_{u(t)} \int_{t \leq r \leq t + \Delta t} \left( L\Delta t + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T f \Delta t \right), \quad (2.32)$$

o

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t = \min_{u(t)} \int_{t \leq r \leq t + \Delta t} \left( L\Delta t + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T f \Delta t \right), \quad (2.33)$$

Dejando  $t \rightarrow 0$  finalmente se obtiene

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left( L + \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T f \right) \quad (2.34)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial para el costo óptimo  $J^*(x, t)$ . Se llama la ecuación HJB.

### 2.1.6. Estabilidad de Lyapunov [3]

Se considera el sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.35)$$

donde  $f : D \Rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $\mathbb{R}^n$  el conjunto de n-coordenadas de números reales, es una función localmente Lipschitz desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Se supone que  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es un Punto de Equilibrio (PE) de (2.35), es decir  $f(\bar{x}) = 0$ . Se caracteriza y estudia la estabilidad de  $\bar{x}$ . Por conveniencia, se asume que  $\bar{x} = 0$  (esto se hace sin perder generalidad porque, si no es así, se define  $y = x - \bar{x}$  y se trabaja con la ecuación  $\dot{y} = g(y)$  donde  $g(y) = f(y + \bar{x})$ , que tiene un equilibrio en el origen.)

**Definición** El PE  $\bar{x} = 0$  de (2.35) es

- *Estable*, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que
 
$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$
- *Inestable* si no es estable
- *Asintóticamente Estable* (AE) si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que
 
$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

**Teorema 2.1.1.** *Teorema de Estabilidad de Lyapunov [3]*

Sea el origen  $\bar{x} = 0$  un PE de (2.35) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V : D \Rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D$$

Entonces  $\bar{x} = 0$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}$$

entonces  $\bar{x} = 0$  es AE. ■

### 2.1.7. LaSalle [3]

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a un sistema estacionario. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$ . Entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .* ■



*Demostración.* Sea  $x(t)$  una solución de un sistema estacionario que comienza en  $\Omega$ . Como  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ ,  $V(x(t))$  es una función decreciente de  $t$ . Como  $V(x)$  es continua en el conjunto compacto  $\Omega$ , está acotada inferiormente en  $\Omega$ , por lo tanto  $V(x(t))$  tiene un límite cuando  $t \rightarrow \infty$ . Notemos también que el conjunto límite positivo  $L^+$  está en  $\Omega$  porque  $\Omega$  es un conjunto cerrado. Para cada  $p \in L^+$ , existe una secuencia  $t_n$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  y  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por continuidad de  $V(x)$ ,  $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$ , lo que implica  $V(x) = a$  en  $L^+$ . Como  $L^+$  es un conjunto invariante,  $\dot{V}(x) = 0$  en  $L^+$ . Por lo tanto,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Como  $x(t)$  es acotada,  $x(t)$  tiende a  $p \in L^+$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $x(t)$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$  □

A diferencia del Teorema de Lyapunov, el Teorema de laSalle no requiere que la función  $V(x)$  sea definida positiva. Nótese también que la construcción del conjunto  $\Omega$  no tiene que estar ligada a la construcción de la función  $V(x)$ . Sin embargo, en muchas aplicaciones la construcción de  $V(x)$  garantizará por sí misma la existencia de un conjunto  $\Omega$ . En particular, si  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  está acotado y  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega_c$ , entonces podemos tomar  $\Omega = \Omega_c$ . Cuando  $V(x)$  es definida positiva,  $\Omega_c$  está acotada para  $c > 0$  suficientemente pequeña. Esto no es necesariamente cierto cuando  $V(x)$  no es definida positiva. Por ejemplo, si  $V(x) = (x_1 - x_2)^2$ , el conjunto  $\Omega_c$ , no está acotado por pequeño que sea  $c$ . Si  $V(x)$  es radialmente ilimitado, es decir,  $V(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$ , el conjunto  $\Omega_c$ , está acotado para todos los valores de  $c$ . Esto es cierto ya sea que  $V(x)$  sea o no definida positiva. Sin embargo, verificar la limitación radial es más fácil para funciones definidas positivas, ya que es suficiente dejar que  $x$  se aproxime a  $\infty$  a lo largo de los ejes principales. Esto puede no ser suficiente si la función no es definida positiva, como se puede ver en  $V(x) = (x_1 - x_2)^2$ . Aquí,  $V(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$  a lo largo de las líneas  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , pero no cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$  a lo largo de  $x_1 = x_2$ .

Cuando nuestro interés es mostrar que  $x \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , necesitamos establecer que el conjunto invariante más grande en  $E$  es el origen. Esto se hace mostrando que ninguna solución puede permanecer idéntica en  $E$ , excepto la solución trivial  $x(t) = 0$ .

En el próximo capítulo, se procederá a detallar y analizar los resultados obtenidos a través de la aplicación de los Teoremas, conceptos y principios que se analizaron con anterioridad.

# Capítulo 3

## Resultados

El objetivo fundamental de este capítulo es presentar y analizar los resultados obtenidos en la resolución del problema de control óptimo de regulación para un sistema dinámico no lineal de tipo Lagrange (sección 1.2). Esta problemática se resolvió planteando una solución analítica de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Para lograr este resultado, se aplicaron una serie de herramientas teóricas y métodos avanzados, incluyendo el Teorema de Pontryagin (sección 2.1.4), el Teorema de LaSalle (sección 2.1.7), el Principio de Programación Dinámica (sección 2.1.3), el Teorema de Lyapunov (sección 2.1.6), y la propia ecuación de HJB (sección 2.1.5). Este capítulo detalla el proceso analítico, los resultados obtenidos y las implicaciones significativas de esta solución para el control óptimo de sistemas no lineales de tipo Lagrange.

### 3.1. Supuestos básicos y criterio a minimizar

Considere el sistema de Lagrange totalmente actuado, que tiene la forma (1.1) y que presenta la relación asimétrica (1.2), se asume que cumplen con los siguientes **Supuestos Básicos B** :

**Supuesto 1.-** *La gravedad, las perturbaciones externas y las fuerzas de fricción son conocidas o pueden medirse o estimarse.*

Las fuerzas de gravedad se pueden considerar en el criterio a través de la energía potencial  $E_p(q)$ , *i.e.*,  $G(q) = \frac{\partial E_p(q)}{\partial q}$ , sin embargo, de esta manera, se vuelve difícil probar la estabilidad del sistema

en lazo cerrado.

**Supuesto 2.-**  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\tau_d$  están acotados.

Bajo el Supuesto 2,  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$ ,  $\mathcal{F}(\dot{q})$  están acotados y tienen derivadas parciales primera y segunda acotadas.

**Supuesto 3.-** El sistema EL dado por la ecuación (1.1) es controlable.

Bajo el Supuesto 3, la dinámica cero es estable, es decir el sistema no tiene modos inestables ocultos.

**Supuesto 4.-** La energía cinética es una forma cuadrática y la energía potencial no depende de  $\dot{q}(t)$ .

La energía cinética de un sistema con restricciones holonómicas se puede expresar como (ver el libro de [15]),  $E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i)^T \dot{r}_i$  donde  $r_1, \dots, r_N$  son las posiciones de los centros de masa que son funciones de  $q$  y del tiempo  $t$ . Por lo tanto,  $E_k$  se puede descomponer en un término cuadrático  $\frac{1}{2} (\dot{q})^T M(q) \dot{q}$  y los términos de  $\frac{\partial r_i}{\partial t}$ . Entonces, el supuesto 4 es equivalente a suponer que  $r_i$  no depende explícitamente de  $t$ . El significado físico del Supuesto 4 es que cuando  $\tau = 0$  y sin fricción,  $H := E_k + E_p$  no depende explícitamente de  $t$  y dado que  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ , entonces se conserva  $H$ .

**Supuesto 5.-** La entrada de control no está restringida.

Bajo el Supuesto 5, el criterio que se propone a continuación tiene una solución óptima que, de existir, es única. Aunque, si  $u$  está acotado, pueden surgir soluciones óptimas en los vértices de  $u$ . Entonces, bajo el Supuesto 1, una ley de control que compensa la gravedad, las perturbaciones externas y las fuerzas de fricción es,

$$\tau = G(q) + \mathcal{F}(\dot{q}) + \tau_d + u \quad (3.1)$$

donde  $u$  es una nueva entrada de control. Sea el vector de estado dado por  $x := \begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T$ .

Entonces, una descripción de espacio de estado de la ecuación EL (1.1) es,

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} q^T(t_0) & \dot{q}^T(t_0) \end{bmatrix}^T \quad (3.2)$$

siendo

$$f(t, x, u) := \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1)(u - C(x_1, x_2)x_2) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde  $M(x_1)$  es una matriz no singular debido a  $M(x_1) > 0$ ,  $M^{-1}(x_1)(u - C(x_1, x_2)x_2)$  es una función local de Lipschitz y el estado se conoce o se puede estimar.

Al aplicar el siguiente Teorema de Programación Dinámica (ver los libros [1] y [16]) tenemos condiciones suficientes para la solución de problemas de control óptimo, llegando a ecuaciones HJB.

**Teorema 3.1.1.** *Considere el problema de optimización con costo funcional,*

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x, u) dt + h(x(t_f)) \quad (3.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in \mathbb{R}^m$ , sujeto a,

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) \quad (3.5)$$

Suponiendo que  $f(t, x, u)$ ,  $L(t, x, u)$  y  $h(x(t_f))$  satisfacen,

1. Ambos  $f(t, x, u) \leq L|x| + N$  y  $L(t, x, u)$  son funciones continuas en  $(t_0, t_f)$  y tiene  $n + m + 1$  derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $u$ ,
2.  $h(x(t_f))$  tiene una derivada continua,
3.  $\mathcal{U}$  es un conjunto acotado, donde  $u \in \mathcal{U}$  es continua en  $(t_0, t_f)$ ,

Sea  $u^* \in \mathcal{U}$ , un control que produce un mínimo local de  $J(x_0, u)$  y  $x^*$  la trayectoria del estado asociado. Definiendo la función de valor,  $V(t, x) := J^*(t, x)$  y suponiendo que,

1.  $V(t, x)$  tiene derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $u$ ,
2.  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$  es continua y,
3.  $\frac{dV(t, x)}{dt}$  existe.

Entonces para  $t_0 \leq t \leq t_f$ , la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman es,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} &= \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L(t, x, u) + \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T f(t, x, u) \right\} \\ u^*(t, x) &= \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L(t, x, u) + \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T f(t, x, u) \right\} \\ V(t_f, x(t_f)) &= h(x(t_f)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

■

*Demostración.* Ver los libros [1] y [16].

□

El Teorema 3.1.1 se puede aplicar tanto para  $u \in \mathcal{U}$  con restricciones como para  $u$  sin restricciones como en el Supuesto 5. Bajo los **Supuestos Básicos B** se propone minimizar el criterio,

$$J(x_0, u) := \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f), \quad (3.7)$$

donde  $Q_f = Q_f^T \geq 0$  y se considera la función de Lagrange,

$$L(x, u) = \frac{1}{4} x_2^T x_2 + x^T \Theta(x, t) x + x_2^T M^{-1}(x_1) C(x_1, x_2) x_2 + (u + \Psi(t) x_1)^T R(x_1) (u + \Psi(t) x_1) \quad (3.8)$$

siendo  $R(x_1) = R^T(x_1) > 0$ ,  $\Theta(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M^{-1}(x_1) \Psi(t) & 0 \end{bmatrix}$  y  $\Psi(t) = \Psi^T(t) > 0$ . Las propiedades de los sistemas EL y aplicando los supuestos mencionados en el principio de este capítulo, se utilizan para simplificar la solución de la ecuación HJB. Además, el criterio propuesto que viene dado por la Ec.(3.7) tiene las **Propiedades Básicas C** siguientes:

1. El término cuadrático  $(u + \Psi(t) x_1)^T R(x_1) (u + \Psi(t) x_1)$ , asegura que  $J(x_0, u)$  es una función convexa que es una condición suficiente para la existencia de un control óptimo (ver [1]).
2. Asegura que el control óptimo de la retroalimentación estará en función de las posiciones y las velocidades.
3. Sea el cambio de entrada (ver [16]),  $v := u + \Psi(t) x_1$ , entonces,  $(u + \Psi(t) x_1)^T R(x_1) (u + \Psi(t) x_1) = v^T R(x_1) v$ . Por lo tanto, la función de Lagrange propuesta es equivalente a la

forma cuadrática estándar  $L(x, v) = \frac{1}{4}x_2^T x_2 + x^T \Theta(x, t)x + x_2^T M^{-1}(x_1)C(x_1, x_2)x_2 + v^T R(x_1)v$ .

El problema de control óptimo a resolver es,

**Problema 1.**- Minimizar el criterio asociado a un problema de control de regulación dado por la Ec.(3.7) sujeto a la dinámica EL dada por la ecuación. (3.2), *i.e.*, resuelve la ecuación HJB dada por la Eq. (3.6)/.

En la siguiente sección se da una solución al control de regulación óptimo planteado por el Problema 1.

### 3.2. Regulación óptima para sistemas dinámicos de Lagrange

La estabilidad de lazo cerrado no es necesaria para problemas de control óptimo en tiempo finito, sin embargo, la estabilidad de lazo cerrado se desea por razones prácticas. Este requisito es muy importante para la rotura de lazos de retroalimentación, fallas, para aumentar el ancho de banda de lazo cerrado o para minimizar los errores numéricos. Además, los sistemas de lazo cerrado inestables son muy sensibles y, en caso de fallas del sensor, la respuesta es impredecible, lo que mejora el rendimiento del lazo cerrado. Entonces, en el presente trabajo, se asegura la estabilidad en lazo cerrado, basada en el Teorema de estabilidad de Lyapunov (2.1.6), se realizará la demostración a continuación.

*Demostración.* Como  $M(x_1)$  es una matriz no singular, entonces el control dado por la Ec.(3.1) está bien definido. Entonces, aplicando este control al sistema EL dado por Eq. (1.1), el sistema de lazo cerrado es,

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(t_0) = q(t_0) \\ \dot{x}_2 = M^{-1}(x_1) \left[ \frac{-1}{2}M(x_1)x_2 - \Psi(t)x_1 - C(x_1, x_2)x_2 \right] \\ x_2(t_0) = \dot{q}(t_0) \end{cases} \quad (3.9)$$

Bajo el supuesto 2, sea la función de Lyapunov,

$$V_L(x) := E_k(x_1, x_2) + \frac{1}{2}x_1^T \Psi(t)x_1 > 0 \quad (3.10)$$

donde  $E_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^T M(x_1)x_2$  es energía cinética, por lo tanto

$$V_L = \frac{1}{2}x_2^T M(x_1)x_2 + \frac{1}{2}x_1^T \Psi(t)x_1 \quad (3.11)$$

Entonces, de la Ec.(3.11),  $\dot{V}_L(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema de lazo cerrado dado por la ecuación. (3.9) es,

$$\dot{V}_L = x_2^T M(x_1)\dot{x}_2 + \frac{1}{2}x_2^T \dot{M}(x_1)x_2 + \frac{1}{2}x_1^T \Psi(t)x_2 \quad (3.12)$$

sustituyendo  $\dot{x}_2$  dada por la ecuación 3.9 quedaría

$$\dot{V}_L = \frac{-1}{2}x_2^T M(x_1)x_2 + x_2^T (\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2))x_2 \quad (3.13)$$

donde  $(\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2))$  viene dada por la Ec.(1.2). Ya que  $(\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2))$  satisface  $x_2^T (\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2))x_2 = 0, \forall x_2 \neq 0$ ,

Como  $M(x_1) > 0$ , entonces  $\dot{V}_L < 0$  aplicando el Teorema de Lyapunov y el estado del sistema re-  
troalimentado es asintóticamente estable. Por eso,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$ .  $\square$

Se resuelve un problema de regulación óptima para sistemas EL, encontrando una solución analítica a la ecuación HJB para sistemas EL. La solución propuesta al *Problema 1* se desarrolla de la siguiente manera,

**Teorema 3.2.1.** *Considere el sistema de Lagrange (EL) dado por la Ec.(3.2) donde*

$M^{-1}(x_1)(u - C(x_1, x_2)x_2)$  *es una función local de Lipschitz. El sistema EL satisface los* **Supuestos**

**Básicos B**, *y supongamos que,*

$$R(x_1) := (M(x_1)M(x_1))^{-1} \quad (3.14)$$

*es una matriz simétrica no singular y*

$$E_k(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^T M(x_1)x_2 \quad (3.15)$$



es la energía cinética, entonces el control óptimo,

$$u^* = \frac{-1}{2} M(x_1) K(t) x_2 - \Psi(t) x_1, \quad (3.16)$$

donde  $K(t) = k(t)I$ ,  $\Psi(t) = \Psi^T(t) > 0$ . Siendo

$$k(t) = \frac{e^t + e^{t_f} \frac{1}{Q_f - 1} + \frac{1}{2} (e^{t_f} - e^t)}{e^{t_f} \frac{1}{Q_f - 1} + \frac{1}{2} (e^{t_f} - e^t)} \quad (3.17)$$

y minimiza el criterio,

$$J(x_0, u) := \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f), \quad (3.18)$$

con

$$L(x, u) = \frac{1}{4} x_2^T x_2 + x^T \Theta(x, t) x + x_2^T K(t) M^{-1}(x_1) C(x_1, x_2) x_2 + (u + \Psi(t) x_1)^T R(x_1) (u + \Psi(t) x_1) \quad (3.19)$$

donde,  $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K(t) M^{-1}(x_1) \Psi & 0 \end{bmatrix}$ , la función Hamiltoniana  $H\left(x, u, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right) := L(x, u) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x, u)$

satisface,  $H\left(x^*, u^*, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x^*}\right) = 0$ , siendo  $x^*$  es la trayectoria del estado asociada con  $u^*$ . ■

*Demostración.* De la Ec.(3.2) el estado del sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable.

Bajo el supuesto 2 el criterio dado por la ecuación (3.7) está bien definido y bajo el Supuesto 3 la solución óptima, si existe, es única (ver el libro de [1]). Además, el criterio dado por la Ec.(3.18) sujeto a los sistemas EL (1.1) satisfacen todos las **Propiedades Básicas C**. Entonces, la ecuación HJB de la Ec.(3.6) es,

$$\begin{aligned} \frac{-\partial V(t, x)}{\partial t} &= \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ H\left(x, u, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right) \right\} \\ H\left(x, u, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right) &= L(x, u) + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}\right)^T x_2 + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_2}\right)^T \dot{x}_2 \\ V(t_f, x(t_f)) &= \frac{1}{2} x_2^T(t_f) Q_f x_2(t_f) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $Q_f = \frac{1}{\xi(t_f)} + 1$ ,  $\dot{x}_2$  y  $L_i(x, u)$  están dadas por ecuaciones (3.2) y (3.19), respectivamente. Co-

mo  $M(x_1) = M^T(x_1) > 0$ ,  $R(x_1) = R^T(x_1) > 0$  y por el Supuesto 3,  $u$  no está acotada, entonces, de la Ec.(3.14), tomando las derivadas parciales de las formas cuadráticas en la condición de optimalidad,  $\frac{\partial}{\partial u} \left\{ H \left( x, u, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) \right\} = 0$ , luego aplicando la propiedad 3 de la ecuación (3.7) quedaría  $\frac{\partial}{\partial v} \left\{ H \left( x, v, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) \right\} = 0$ , donde

$$(v^T)^* = \frac{-1}{2} \frac{\partial V(\cdot)}{\partial x_2} M^{-1}(x_1) R^{-1}(x_1) \quad (3.21)$$

donde  $R(x_1)$  está dada por la Ec.(3.14), quedaría

$$(v^T)^* = \frac{-1}{2} \frac{\partial V(\cdot)}{\partial x_2} M(x_1) \quad (3.22)$$

entonces para  $v^*$  la ecuación de HJB es

$$\begin{aligned} \frac{-\partial V(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{4} x_2^T x_2 + x^T \Theta(x, t) x + x_2^T K(t) M^{-1}(x_1) C(x_1, x_2) x_2 + v^T R(x_1) v + \\ &\frac{\partial V(\cdot)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V(\cdot)}{\partial x_2} M^{-1}(x_1) [v - \Psi x_1 - C x_2] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sea la función de valor

$$V(t, x) = \frac{1}{2} x_2^T K(t) x_2 \quad (3.24)$$

que implica

$$V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2} x_2^T(t_f) K(t_f) x_2(t_f) \quad (3.25)$$

por lo que

$$K(t_f) = Q_f \quad (3.26)$$

que cumple con las suposiciones del Teorema 3.1.1

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x_2} = x_2^T K(t) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} = \frac{1}{2} x_2^T \dot{K}(t) x_2$$

sustituyendo las derivadas de las Ec.(3.27) de la función de valor en (3.23)

$$-\frac{1}{2}x_2^T \dot{K}(t)x_2 = \frac{1}{4}x_2^T x_2 + x^T \Theta(x, t)x + \frac{1}{4}x_2^T K^2(t)x_2 - \frac{1}{2}x_2^T K^2(t)x_2 - x_2^T K(t)M^{-1}(x_1)\Psi x_1 \quad (3.28)$$

desarrollando queda

$$\dot{K}(t) = \frac{1}{2} [K^2(t) - I] \quad (3.29)$$

Luego, tomando  $K(t) = k(t)I$ ,  $k(t) = \frac{1}{\xi(t)} + b$  y  $b = 1$  entonces

$$k(t) = \frac{1}{\xi(t)} + 1 \quad (3.30)$$

siendo  $k(t)$  y  $\xi(t)$  escalares y sustituyendo  $K(t)$  en (3.29)

$$-\frac{1}{\xi^2(t)} \dot{\xi}(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi(t)} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \quad (3.31)$$

desarrollando queda

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{1}{2} - \xi(t) \quad (3.32)$$

usando el factor de integración  $e^t$  en la Ec.(3.32) es,

$$\frac{d(e^t \xi(t))}{dt} = -\frac{1}{2} e^t \quad (3.33)$$

integrando de  $t \mapsto t_f$

$$e^{t_f} \xi(t_f) - e^t \xi(t) = -\frac{1}{2} (e^{t_f} - e^t) \quad (3.34)$$

sabiendo que  $K(t_f) = Q_f = \frac{1}{\xi(t_f)} + 1$  y despejando  $\xi(t)$  entonces

$$\xi(t) = \frac{e^{t_f} \frac{1}{Q_f - 1} + \frac{1}{2} (e^{t_f} - e^t)}{e^t} \quad (3.35)$$

Luego sustituyendo la Ec.(3.35) en la Ec.(3.30),  $k(t)$  queda como la Ec.(3.17) □

Por otro lado es importante mencionar que en esta tesis se analizó el problema de control ópti-

mo de horizonte infinito como un caso particular del problema de control óptimo de horizonte finito, se muestra en el siguiente corolario

**Corolario 3.2.1.1.** *Considere el sistema de Lagrange (EL) dado por la Ec.(3.2) que satisfacen los **Su-  
puestos Básicos B** del Teorema 3.2.1 , siendo la ley de control la Ec.(3.16) con  $K(t) = I$  y minimiza el criterio,*

$$J(x_0, u) := \int_{t_0}^{\infty} L(x, u) dt \quad (3.36)$$

donde  $L_2(x, u)$  está dada por la ecuación (3.19) y  $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M^{-1}(x_1)\Psi & 0 \end{bmatrix}$ ; la función Hamiltoniana  $H\left(x, u, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right) := L(x, u) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x, u)$  satisface,  $H\left(x^*, u^*, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x^*}\right) = 0$ , siendo  $x^*$  es la trayectoria del estado asociada con  $u^*$ . ■

*Demostración.* Dado que para  $t_f = \infty$ ,  $x(\infty) = 0$  y de la Ec.(3.17),  $k(t) = 1$  y partiendo de la demostración del Teorema 3.2.1 con  $K(t_f) = Q_f = I_2$ , se obtiene  $u^*$  de la Ec.(3.16) y se resuelve la ecuación de HJB.

Claramente, la función hamiltoniana se minimiza, *i.e.*,  $H\left(x^*, v^*, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x^*}\right) = 0$ , por lo tanto, por el Teorema de Programación Dinámica (ver [1] y [16]) el criterio  $J(x_0, u)$  se minimiza. □

Como  $R(x_1) > 0$  entonces la función hamiltoniana óptima  $H\left(x, v, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)$  y por consiguiente  $H\left(x, u, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)$  son funciones convexas con respecto a  $x_2(t)$ , que por el Teorema de Arrow (ver [1]), es condición suficiente para la existencia de un control óptimo. Además, el resultado de la demostración dada en la sección 3.2 es similar a la solución para sistemas lineales con una perturbación de estado conocida (ver [1] y [16]), aunque gracias al Teorema 3.2.1 no se requiere resolver ecuaciones diferenciales de Riccati.

Al aplicar el teorema de Lyapunov, en el inicio de la sección 3.2, se obtiene que el estado del sistema converge a cero. Entonces, es posible cambiar el valor del estado estacionario usando una traslación al estado deseado  $x_d$  que no es una función del tiempo. Como,  $x_{1d} = q_d$  no es función del tiempo, entonces  $x_{2d} = \dot{q}_d = 0$ . Por lo tanto, la ley de control óptima, despejando la Propiedad

3 de la ecuación (3.8) es,

$$u^*(t) = \frac{-1}{2} M(x_1 - x_{1d}) x_2 - \Psi(t)((x_1 - x_{1d})) \quad (3.37)$$

Bajo la ley de control dada por la Ec.(3.37),  $\lim_{t \rightarrow \infty} x^* = x_d$ . Otra solución para sistemas lineales es incluir el estado deseado en el índice cuadrático (ver los libros de [1] y [16]). Para sistemas estables, se utiliza un modelo de referencia y variables de diferencia. Para sistemas inestables, una solución es transformar el criterio a la forma estándar utilizando un sistema de aumento de estado artificial. Otra solución es mediante la solución de dos ecuaciones diferenciales de Riccati. Todas estas soluciones se vuelven confusas o autosuficientes para los sistemas EL. El enfoque utilizado aquí es similar al anterior.

En el Teorema 3.2.1.1, seleccionando  $\Psi(t)$  en lugar de  $\Psi \in \mathfrak{R}$ , el HJB no se resuelve, sin embargo, la función hamiltoniana  $H\left(x, u, \frac{V(t,x)}{x}\right) \rightarrow 0$  como  $\Psi(t) \rightarrow 0$ . Entonces, cuando la ganancia de control de la posición tiende a cero, la solución se aproxima al óptimo. Por lo tanto,  $\Psi$  llega a un control subóptimo donde la ganancia de control de posición caracteriza el límite superior del criterio propuesto. Además, en el Corolario 3.2.1.1 se revela que conforme  $\Psi(t) \rightarrow 0$  el sistema de lazo cerrado permanece estable pero no asintóticamente estable.

Una configuración de retroalimentación de la ley de control propuesta se muestra en la Fig.3.1, donde el control óptimo denota la Ec.(3.37) y compensación denota la compensación de las fuerzas de gravedad y fricción dada por la Ec.(3.1). Los resultados de esta tesis se ilustran con ejemplos matemáticos en la siguiente sección.

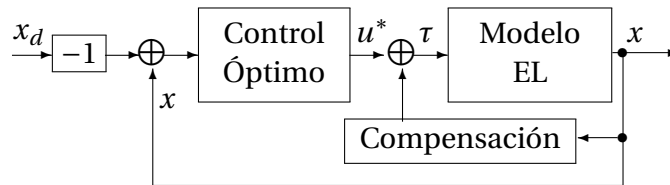


Figura 3.1: Configuración de retroalimentación.

# Capítulo 4

## Ejemplos Ilustrativos

Los resultados obtenidos en esta tesis se muestran en este capítulo mediante la aplicación de la ley de control a dos ejemplos matemáticos. Es importante recalcar que los siguientes ejemplos ilustran el Corolario 3.2.1.1 desarrollado en la sección 3.2 del Capítulo 3, en el cual se dio una solución al problema de regulación óptima de horizonte infinito.

### 4.1. Doble péndulo

#### 4.1.1. Sistema dinámico

Considere el péndulo doble que se muestra en la Fig.4.1 donde  $q_1$  y  $q_2$  son las posiciones angulares de las uniones,  $m_1$  y  $m_2$  son la masa total de los eslabones 1 y 2, respectivamente,  $l_1$  es la longitud del enlace uno,  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$  son las distancias a los centros de masa de los eslabones 1 y 2, respectivamente,  $I_1$  y  $I_2$  son los momentos de inercia de los eslabones 1 y 2, respectivamente, y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Las energías potencial y cinética están dadas por:

$$\begin{aligned} E_p(q) &= m_1 g l_{c1} s_{q_1} + m_2 g (l_1 s_{q_1} + l_{c2} s_{(q_1+q_2)}), \text{ y} \\ E_k(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 + J_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + J_3 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_{q_2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

respectivamente, donde  $J_1 := m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2$ ,  $J_2 := m_2 l_{c2}^2$ ,  $J_3 := m_2 l_1 l_{c2}$ . Como  $E_k(q, \dot{q})$  no depende explícitamente del tiempo, entonces  $E_k(q, \dot{q})$  tiene una forma cuadrática, *i.e.*,  $E_k(q, \dot{q}) =$

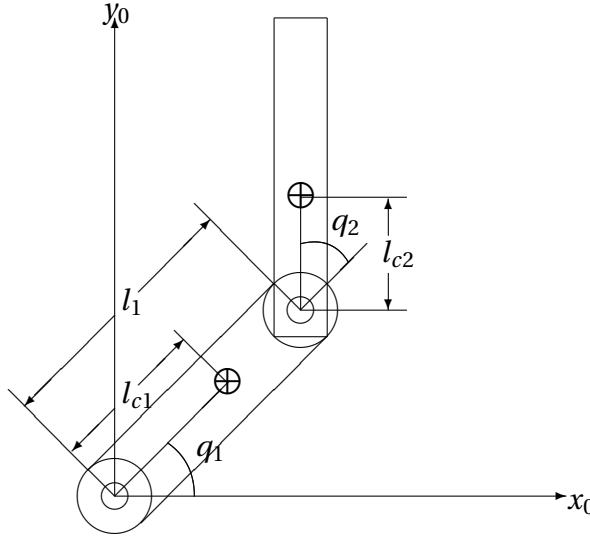


Figura 4.1: Doble Péndulo Planar

$\dot{q}^T(t)M(q(t))\dot{q}(t)$ , donde,

$$M(q) = \begin{bmatrix} J_1 + 2J_3c_{q_2} + I_1 + I_2 & J_2 + J_3c_{q_2} + I_2 \\ J_2 + J_3c_{q_2} + I_2 & J_2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Como  $J_2 + I_2 > 0$ , el peor de los casos para  $J_1 + 2J_3c_{q_2} + I_1 + I_2$  es cuando  $c_{q_2} = -1$  y  $l_{c2} = l_1$  para el cual  $J_1 + 2J_3c_{q_2} + I_1 + I_2 = m_1l_{c1}^2 + I_1 + I_2 > 0$  y  $\det(M(q)) = (J_1 + I_1 - J_2)(J_2 + I_2) - J_3^2c_{q_2}$  cuyo peor caso es cuando  $c_{q_2} = 1$  para el cual  $\det(M(q)) = (m_1l_{c1}^2 + I_1)(m_2l_{c2}^2 + I_2) + m_2I_2l_1^2 > 0$ , entonces, usando el criterio de Sylvester's  $M(q) > 0$ . Luego, la ley de control óptima viene dada por la ecuación (3.37), para este caso se tomó  $x_1d = 0$

$$u^* = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (J_1 + 2J_3c_{q_2} + I_1 + I_2)\dot{q}_1 + (J_2 + J_3c_{q_2} + I_2)\dot{q}_2 + 2\Psi q_1 \\ (J_2 + J_3c_{q_2} + I_2)\dot{q}_1 + (J_2 + I_2)\dot{q}_2 + 2\Psi q_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

y se aplica al modelo EL totalmente accionado no lineal de este sistema mecánico, que tiene la forma

$$\begin{aligned} J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + J_3((2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_{q_2} - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2s_{q_2}) + \\ (m_1l_{c1} + m_2l_1)gc_{q_1} + m_2gl_{c2}c_{(q_1+q_2)} = \tau_1 - b_1\dot{q}_1 \\ J_2\ddot{q}_2 + J_2\ddot{q}_1 + J_3\ddot{q}_1c_{q_2} + J_3\dot{q}_1^2s_{q_2} + m_2gl_{c2}c_{(q_1+q_2)} = \tau_2 - b_2\dot{q}_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Parámetro	Valor	Unidad
$l_1$	0.450	m
$l_{c1}$	0.091	m
$l_{c2}$	0.048	m
$m_1$	23.902	kg
$m_2$	3.880	kg
$I_1$	1.266	kg m <sup>2</sup>
$I_2$	0.093	kg m <sup>2</sup>
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

Tabla 4.1: Parámetros

### 4.1.2. Simulación y resultados

Los valores de los parámetros se dan en el libro de [17] y se muestran en la tabla 4.1 y los coeficientes de fricción son  $b_1 = b_2 = 0.5$ .

Las simulaciones en MatLab-Simulink se realizan en la configuración de control de la Fig.3.1 y se muestran en las figuras 4.2 a 4.32, para el estado deseado  $x_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$  en la posición de equilibrio superior está en la posición vertical y para las condiciones iniciales realizamos varias simulaciones con valores iniciales diferentes:

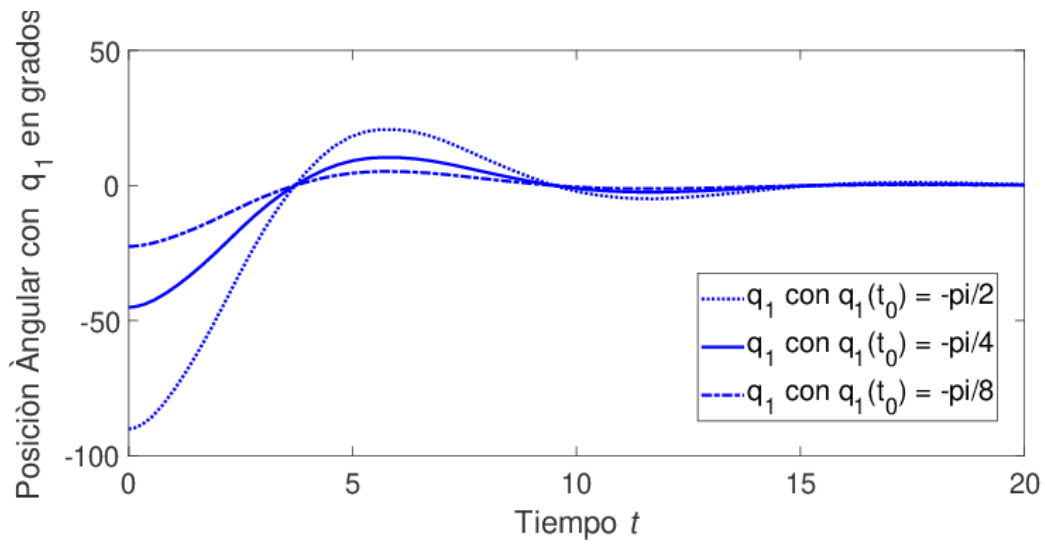
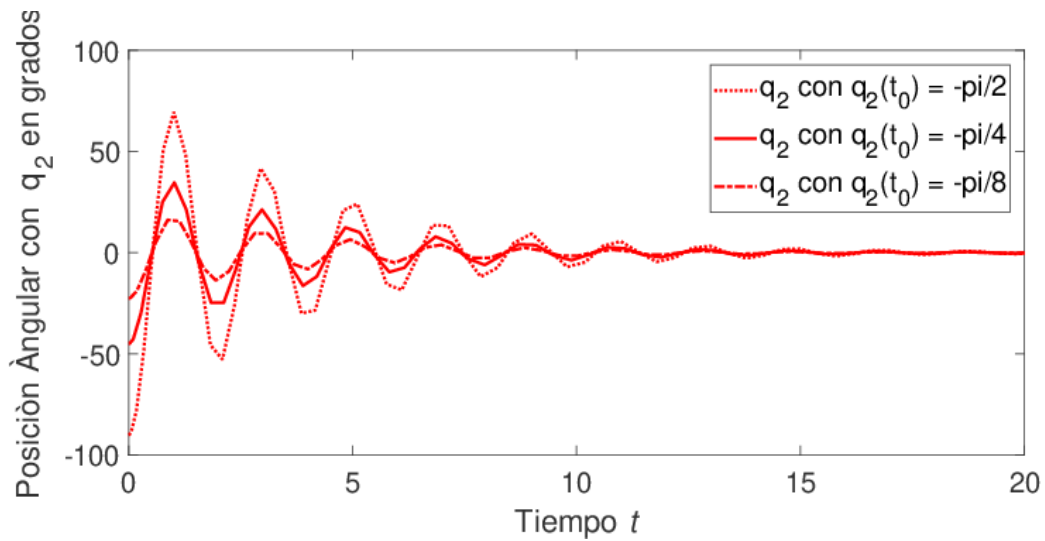
- En la Fig.4.2, la Fig.4.4, la Fig.4.6 y la Fig.4.11;  $q_1(t_0) = -\pi/2$ ,  $q_1(t_0) = -\pi/4$  y  $q_1(t_0) = -\pi/8$  y en todos los casos  $q_2(t_0) = 0$
- En la Fig.4.3, la Fig.4.5, la Fig.4.7 y la Fig.4.12;  $q_2(t_0) = -\pi/2$ ,  $q_2(t_0) = -\pi/4$  y  $q_2(t_0) = -\pi/8$  y en todos los casos  $q_1(t_0) = 0$
- En la Fig.4.16 y la Fig.4.14;  $q_1(t_0) = 0$  y  $q_2(t_0) = \pi$  en ambos casos.
- En la Fig.4.13 y la Fig.4.15;  $q_1(t_0) = -\pi/2$  y  $q_2(t_0) = 0$  en ambos casos
- En la Fig.4.9, la Fig.4.8 y la Fig.4.10;  $q_1(t_0) = -\pi/2$  y  $q_2(t_0) = \pi$  para todos los casos
- El valor de la matriz  $\Psi$  se selecciona  $\Psi = \psi I_2$ . Conociendo que para diferentes valores de  $\psi$  se minimiza el Hamiltoniano, como se muestra en la Fig.4.15 y en la Fig.4.16, se decide tomar  $\psi = 0.9$  arbitrariamente para realizar las simulaciones, ya que las curvas de  $q_1$  y  $q_2$  con respecto al tiempo, usando este valor de  $\psi$ , logran alcanzar el estado estacionario de

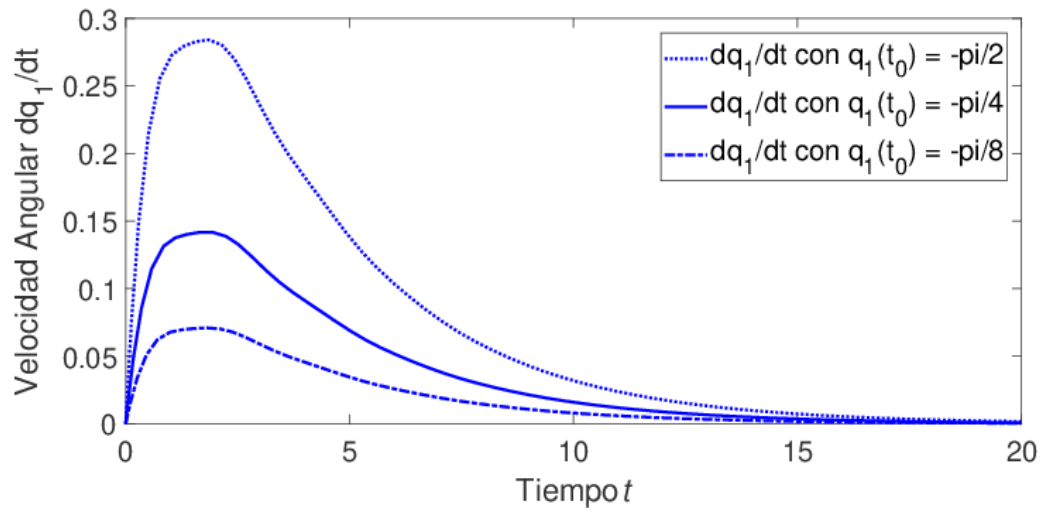
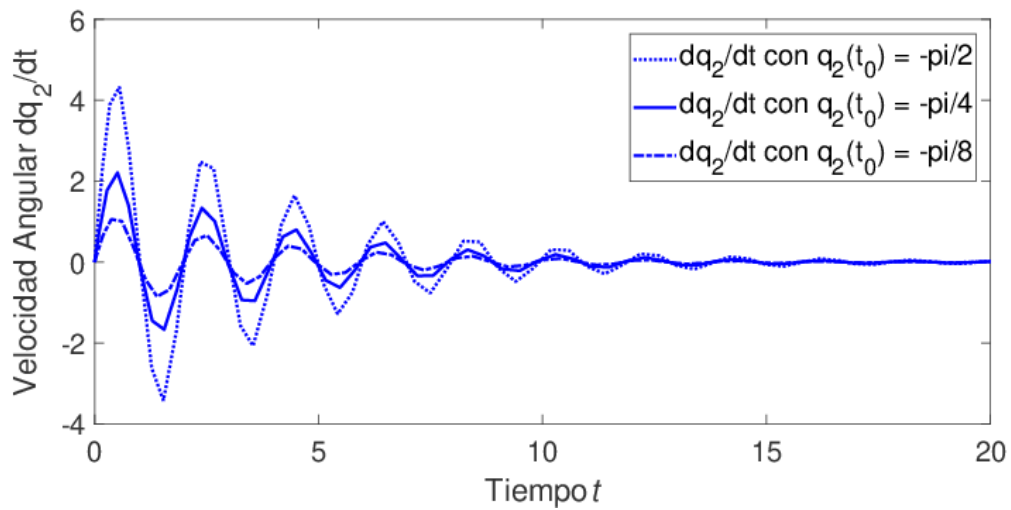


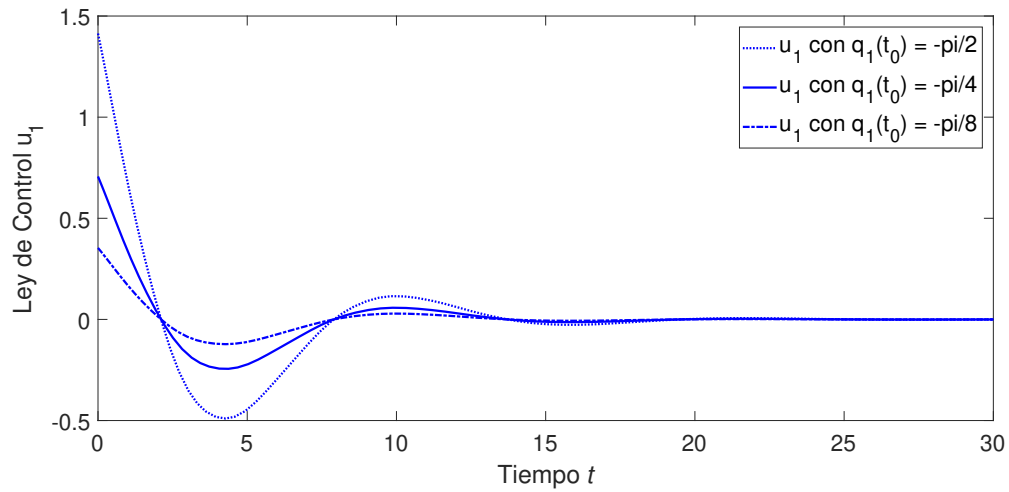
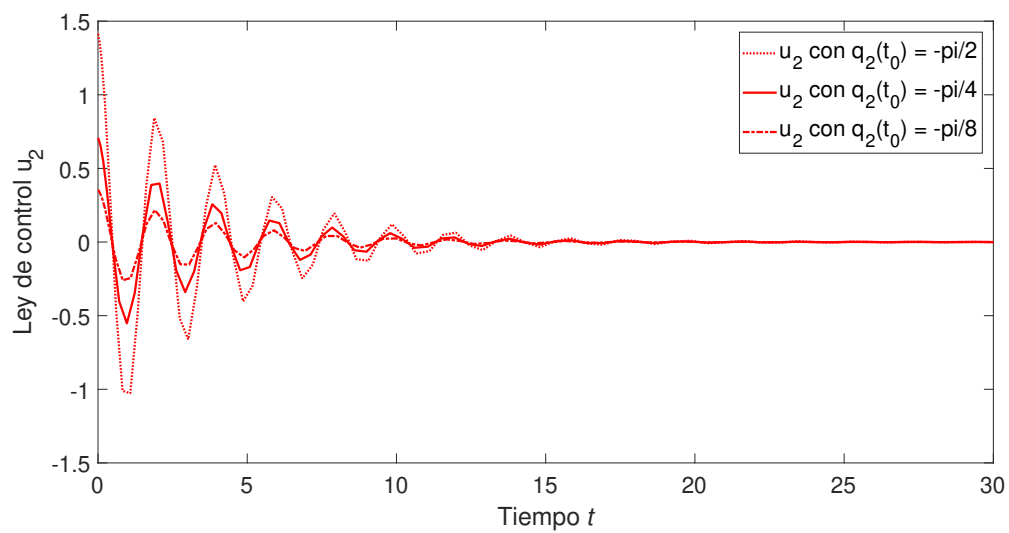
manera veloz, aunque se experimenten algunas transiciones oscilatorias, como se puede observar en la Fig.4.13 y la Fig.4.14 respectivamente.

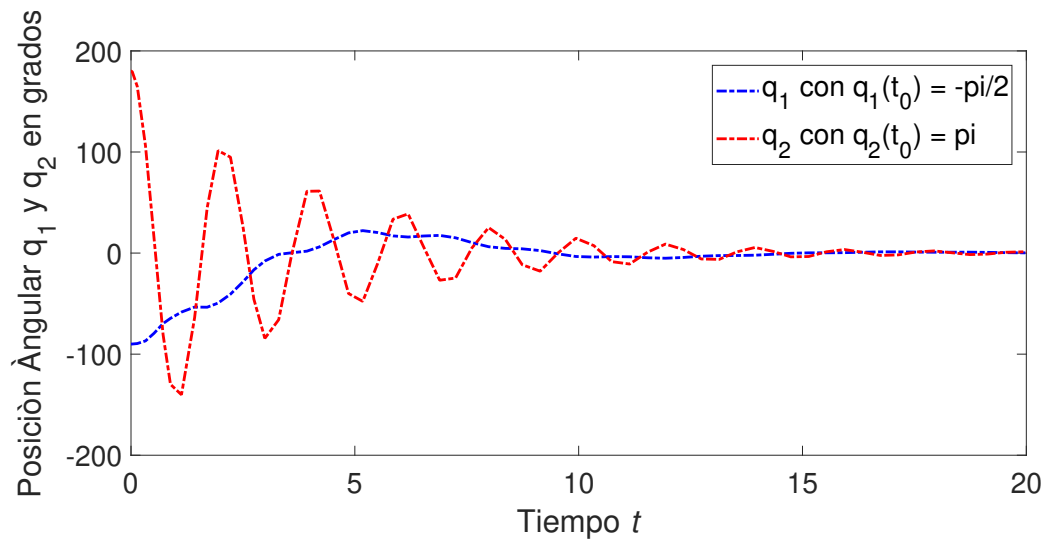
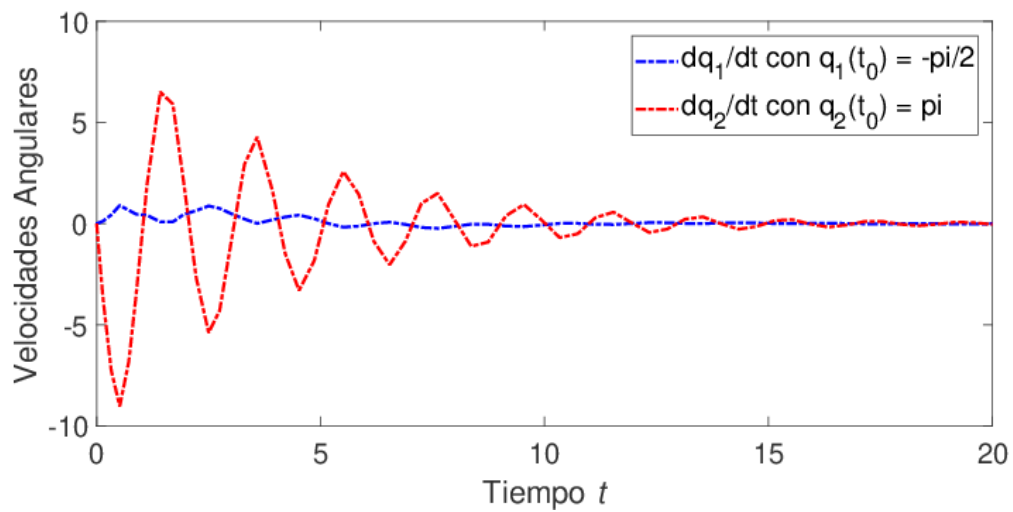
La Fig.4.2 y la Fig.4.3 muestran que las salidas del sistema convergen a las posiciones deseadas para todas las condiciones iniciales. Como se esperaba, las velocidades convergen a cero, como se muestra en la Fig.4.4 y la Fig.4.5. Se realiza con una entrada de control suave y acotada (consulte la Fig.4.6 y la Fig.4.7) y, como se esperaba, la ley de control óptimo genera trayectorias de estado óptimo suaves como se muestra en las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5.

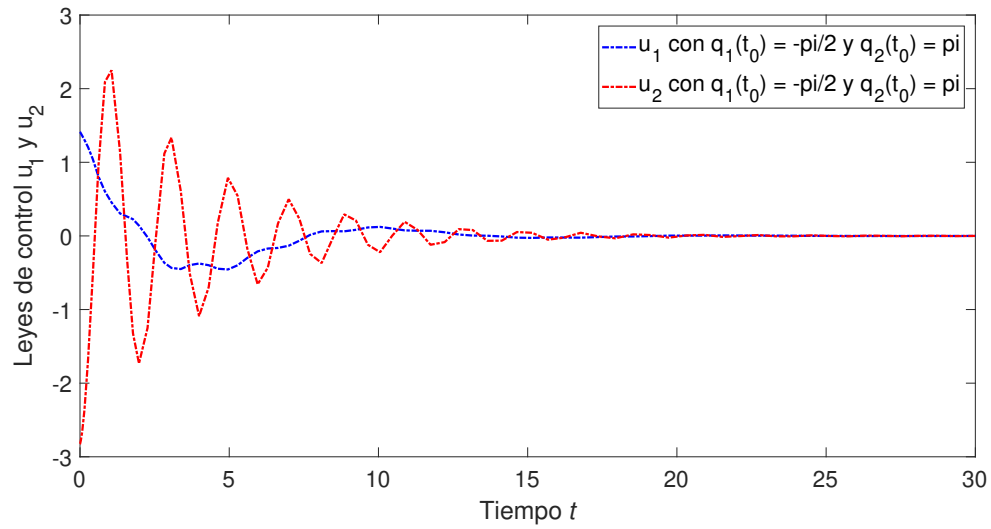
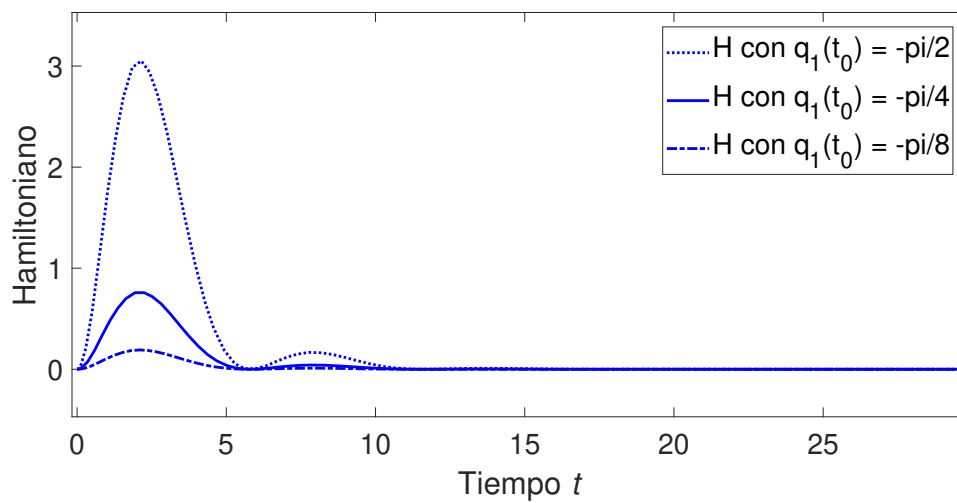
Por otro lado la Fig.4.8 exhibe la convergencia de las salidas del sistema hacia las posiciones deseadas desde cualquier condición inicial. Como era de esperar, las velocidades tienden a cero, como se evidencia en la Fig.4.9. Este proceso se logra mediante una entrada de control suave y limitada, tal como se puede apreciar en la Fig.4.10. La ley de control óptimo, como se puede observar desde la Fig.4.8 hasta la Fig.4.9, produce trayectorias de estado óptimo suaves, como se esperaba. Por último las Fig.4.11 y la Fig.4.12 muestran como al aplicar la ley de control se minimiza el Hamiltoniano, demostrando por consiguiente que también se minimiza la función de costo.

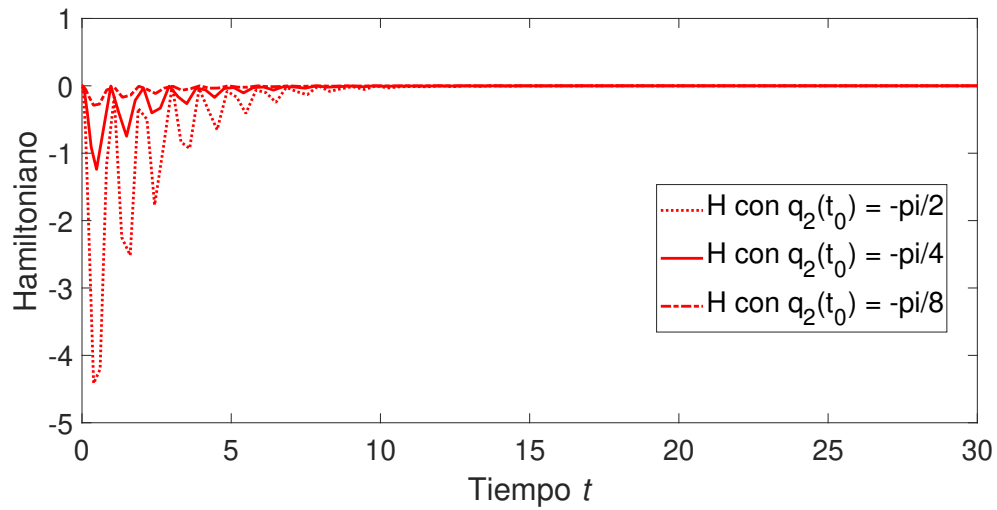
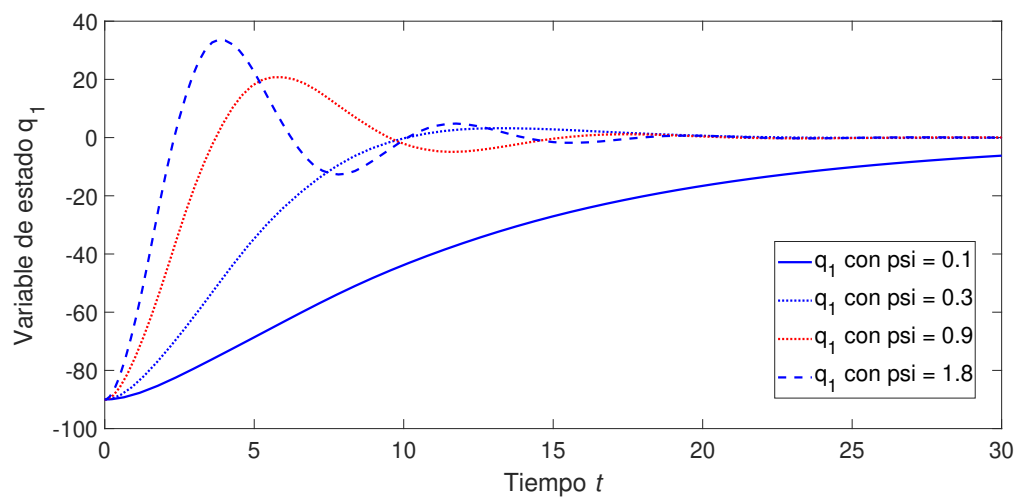
Figura 4.2: Posición de salida péndulo  $q_1$ .Figura 4.3: Posición de salida péndulo  $q_2$ .

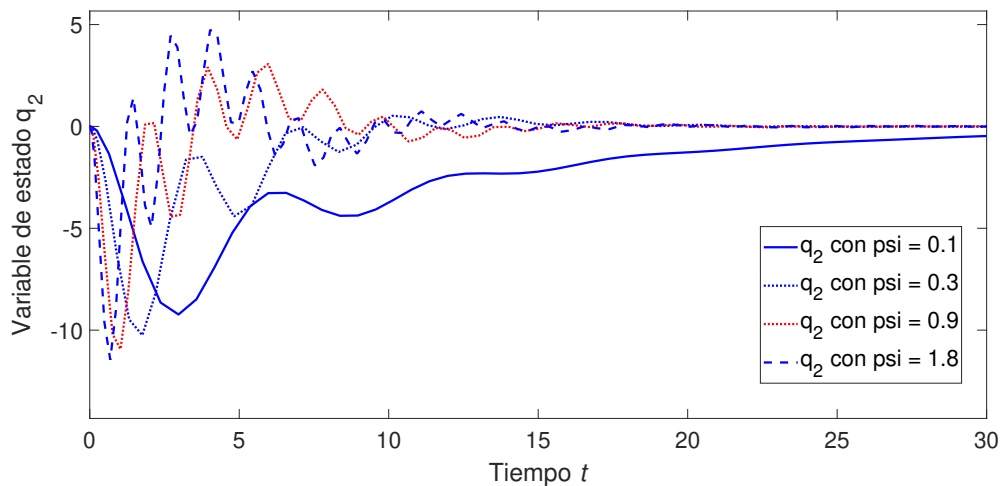
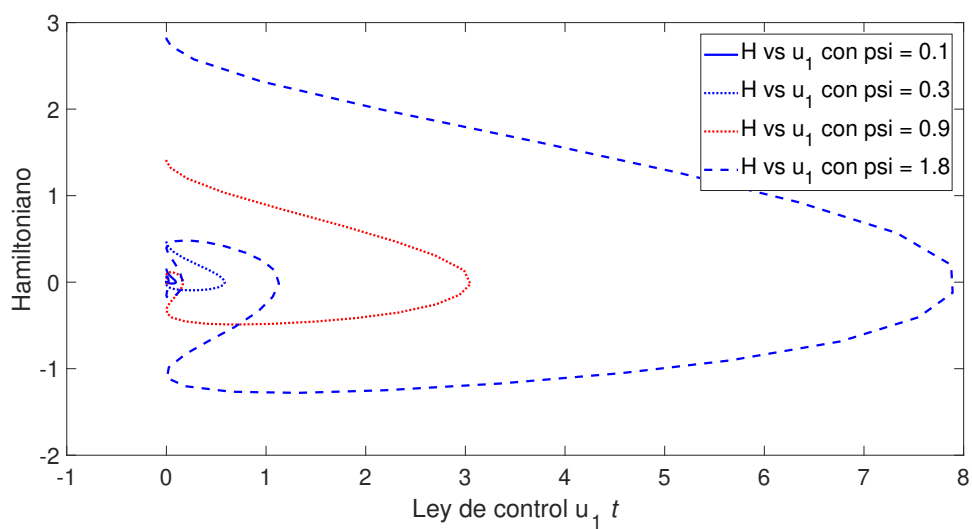
Figura 4.4: Velocidad de salida péndulo  $dq_1/dt$ .Figura 4.5: Velocidad de salida péndulo  $dq_2/dt$ .

Figura 4.6: Ley de control  $u_1$ .Figura 4.7: Ley de control  $u_2$ .

Figura 4.8: Posiciones angulares de los péndulos  $q_1$  y  $q_2$ .Figura 4.9: Velocidades Angulares de los péndulos  $q_1$  y  $q_2$ .

Figura 4.10: Leyes de Control  $u_1$  y  $u_2$ .Figura 4.11: Hamiltoniano  $H$ .

Figura 4.12: Hamiltoniano  $H$ .Figura 4.13:  $q_1$  con diferentes valores de  $\Psi$ .

Figura 4.14:  $q_2$  con diferentes valores de  $\Psi$ .Figura 4.15:  $H$  con respecto a  $u_1$  para diferentes valores de  $\Psi$ .



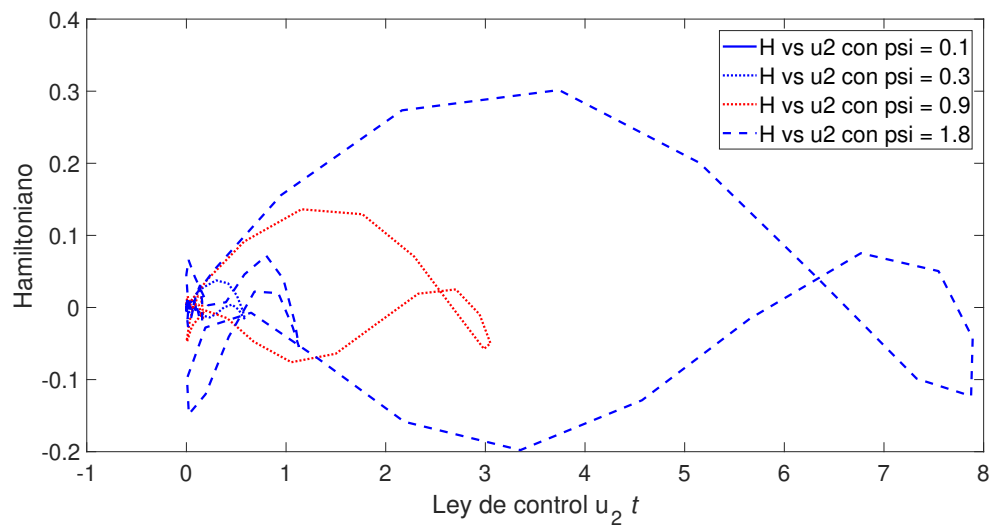


Figura 4.16:  $H$  con con respecto a  $u_2$  para diferentes valores de  $\Psi$ .

## 4.2. Carro con Péndulo

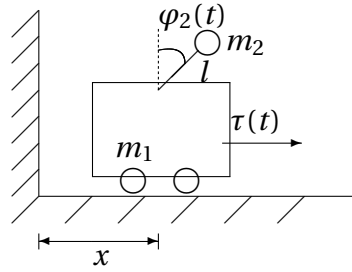


Figura 4.17: Péndulo sobre carro

### 4.2.1. Sistema Dinámico

Considere el péndulo en un automóvil que se muestra en la Fig.4.17 donde  $x$  es la posición del automóvil y  $\phi$  es la posición angular de la unión,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas totales del carro y péndulo, respectivamente,  $l$  es la longitud del péndulo y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Las energías potencial y cinética están dadas por,

$$\begin{aligned} E_p(q) &= mglc_\phi, \text{ y} \\ E_k(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2l\dot{x}\dot{\phi}c_\phi \end{aligned} \quad (4.5)$$

respectivamente. Como  $E_k(q, \dot{q})$  no depende explícitamente del tiempo, entonces  $E_k(q, \dot{q})$  tiene una forma cuadrática. Sea  $q := \begin{bmatrix} x & \phi \end{bmatrix}^T$ , por lo tanto, la forma cuadrática de  $E_k(q, \dot{q})$  es  $E_k(q, \dot{q}) = \dot{q}^T(t)M(q(t))\dot{q}(t)$ , donde,

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2lc_\phi \\ m_2lc_\phi & m_2l^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Dado que  $m_1 + m_2 > 0$ ,  $m_2l^2 > 0$  y  $\det(M(q)) = m_2l^2(m_1 + m_2s_\phi^2) > 0$ , Así, usando el criterio de Sylvester  $M(q) > 0$ . Entonces, la ley de control óptima viene dada por la ecuación (3.37), para este

caso se tomó con  $x_1 d = 0$

$$u^* = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\dot{x} + (m_2 l c_\phi)\dot{\phi} + 2\Psi x \\ (m_2 l c_\phi)\dot{x} + (m_2 l^2)\dot{\phi} + 2\Psi\phi \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

y se aplica al modelo EL no lineal totalmente accionado de este sistema mecánico,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\phi} c_\phi - \dot{\phi}^2 s_\phi) &= F - b_1 \dot{x} \\ m_2 l^2 \ddot{\phi} + m_2 l \ddot{x} c_\phi - m_2 g l s_\phi &= \tau - b_2 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.2.2. Simulación y Resultados

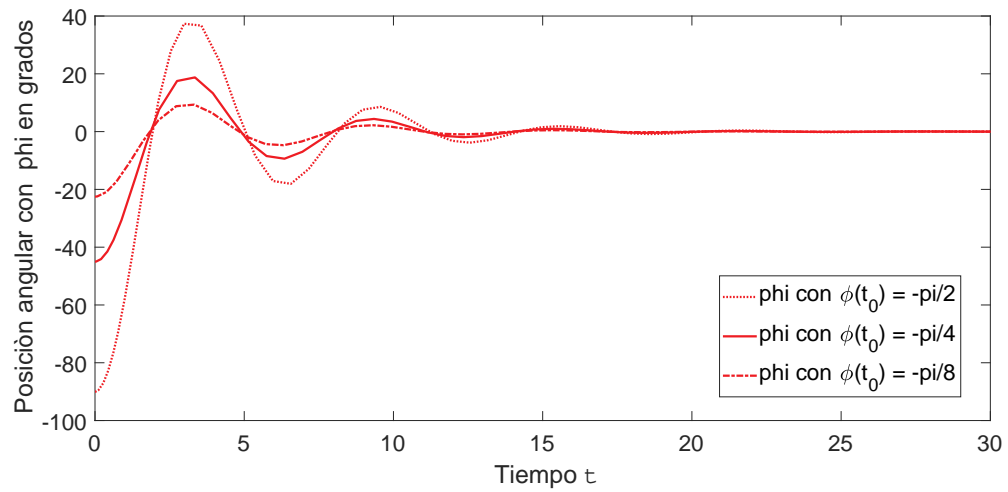
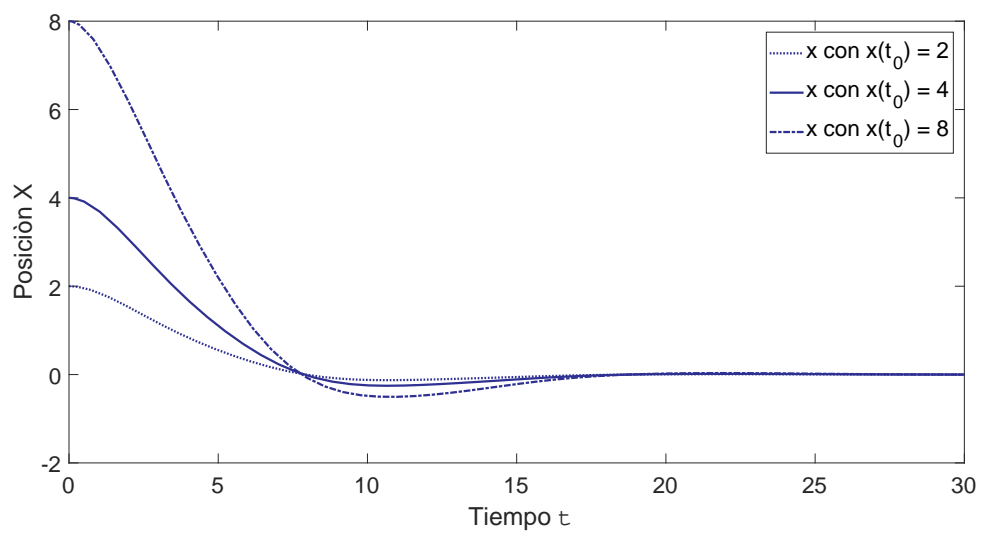
Los valores de los parámetros son  $g = 9,81$ ,  $l = 1$ ,  $b_1 = b_2 = 0,5$ ,  $m_2 = 1$  y  $m_1 = 5$ .

Las simulaciones en MatLab-Simulink se realizan en la configuración de retroalimentación de la Fig.3.1 y se muestran en las figuras 4.18 a 4.32, para el estado deseado  $x_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ , y para las condiciones iniciales

- En la Fig.4.18, la Fig.4.23 y la Fig.4.28;  $\phi(t_0) = -\pi/2$ ,  $\phi(t_0) = -\pi/4$  y  $\phi(t_0) = -\pi/8$  respectivamente, mientras que en todos los casos  $x(t_0) = 0$
- En la Fig.4.19, la Fig.4.22 y la Fig.4.27;  $x(t_0) = 2$ ,  $x(t_0) = 4$  y  $x(t_0) = 8$  respectivamente, mientras que en todos los casos  $\phi(t_0) = 0$
- En la Fig.4.20, la Fig.4.32 y la Fig.4.29;  $x(t_0) = 0$  y  $\phi(t_0) = -\pi/2$  para todos los casos.
- En la Fig.4.21, la Fig.4.30 y la Fig.4.31;  $x(t_0) = 4$  y  $\phi(t_0) = 0$  para todos los casos.
- En la Fig.4.24, la Fig.4.25 y la Fig.4.26  $x(t_0) = 4$  y  $\phi(t_0) = -\pi/2$  para todos los casos
- El valor de la matriz  $\Psi$  se selecciona  $\Psi = \psi I_2$ . Conociendo que para diferentes valores de  $\psi$  se minimiza el Hamiltoniano, como se muestra en la Fig.4.31 y en la Fig.4.32, se decide tomar  $\psi = 0.9$  arbitrariamente para realizar las simulaciones, ya que las curvas de  $x$  y  $\phi$  con respecto al tiempo, usando este valor de  $\psi$ , logran alcanzar el estado estacionario de manera veloz, aunque se experimenten algunas transiciones oscilatorias, como se puede observar en la Fig.4.29 y la Fig.4.30 respectivamente.

En la Fig.4.18 y la Fig.4.19 se muestra que el sistema converge al estado deseado ( $\phi$  ángulo del péndulo y  $x$  posición del carro respectivamente), así como se muestra el comportamiento de las respectivas velocidades (Fig.4.20 y Fig.4.21) . Se realiza con una entrada de control suave y acotada (ver figuras 4.22 y 4.23) y como se esperaba, la ley de control óptimo genera trayectorias de estado óptimo suaves.

Las Fig.4.24 y La Fig.4.25 ilustran la convergencia del sistema hacia el estado deseado, que se refleja en el ángulo del péndulo ( $\phi$ ) y la posición del carro ( $x$ ). Este proceso se logra mediante el uso de una entrada de control suave y restringida, como se detalla en la Fig.4.26. Tal como se preveía, la aplicación de la ley de control óptimo genera trayectorias suaves hacia el estado óptimo del sistema. Por último las Fig.4.27 y la Fig.4.28 muestran como al aplicar la ley de control se minimiza el Hamiltoniano, demostrando por consiguiente que también se minimiza la función de costo.

Figura 4.18: Posición angular  $\phi$ Figura 4.19: Posición  $x$

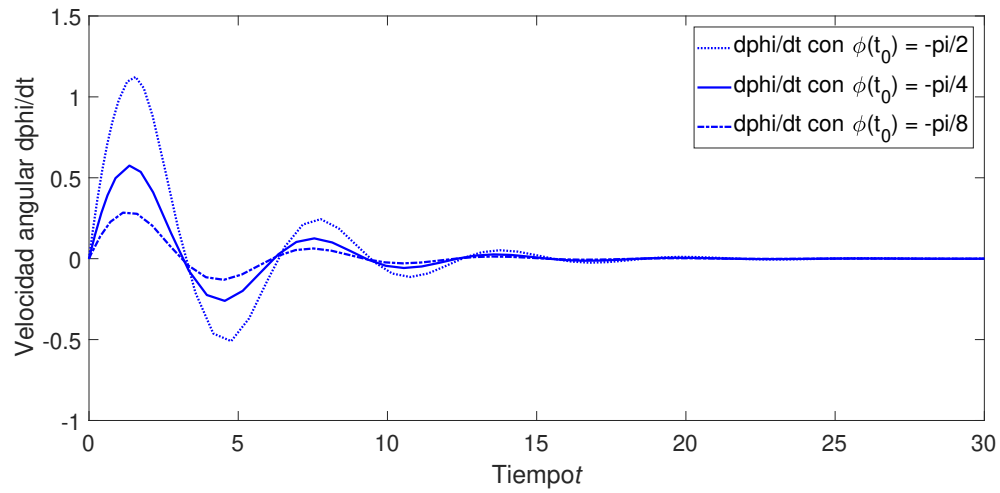


Figura 4.20: Velocidad angular  $\frac{d\phi}{dt}$

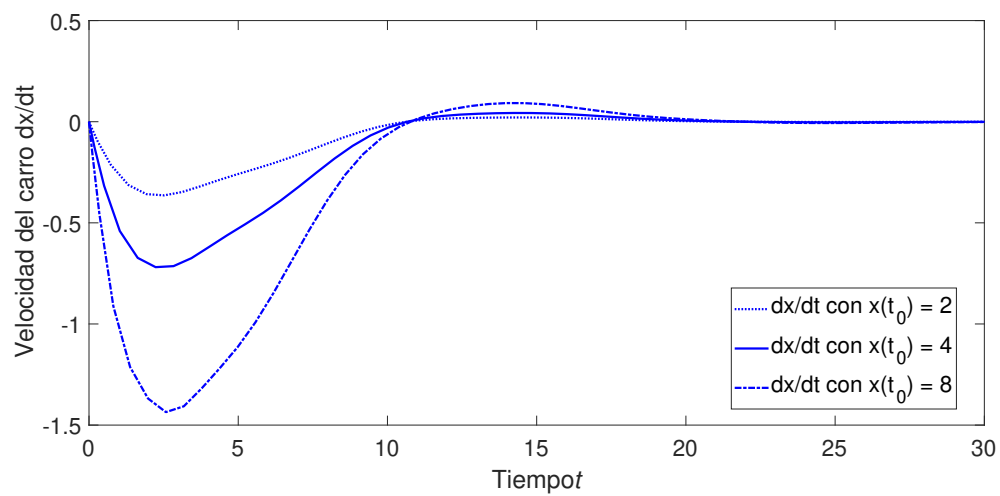
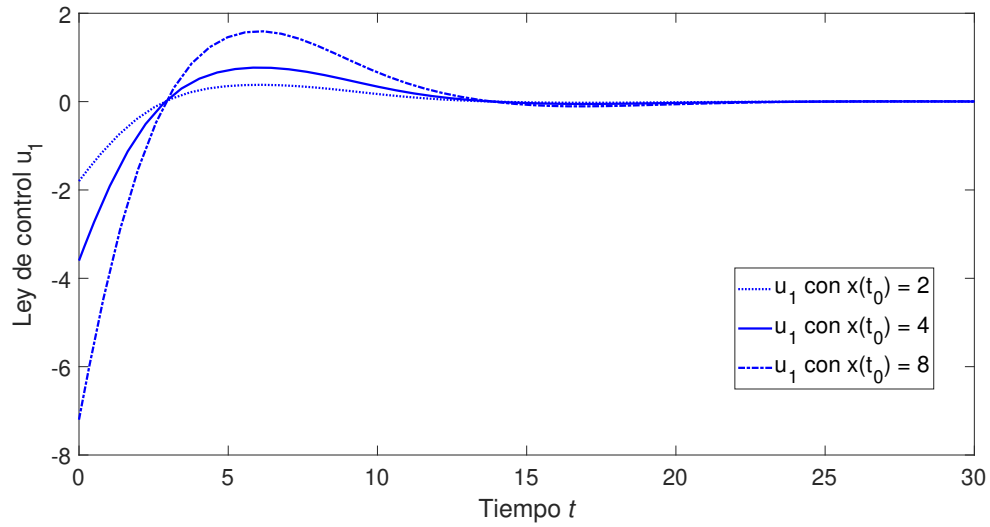
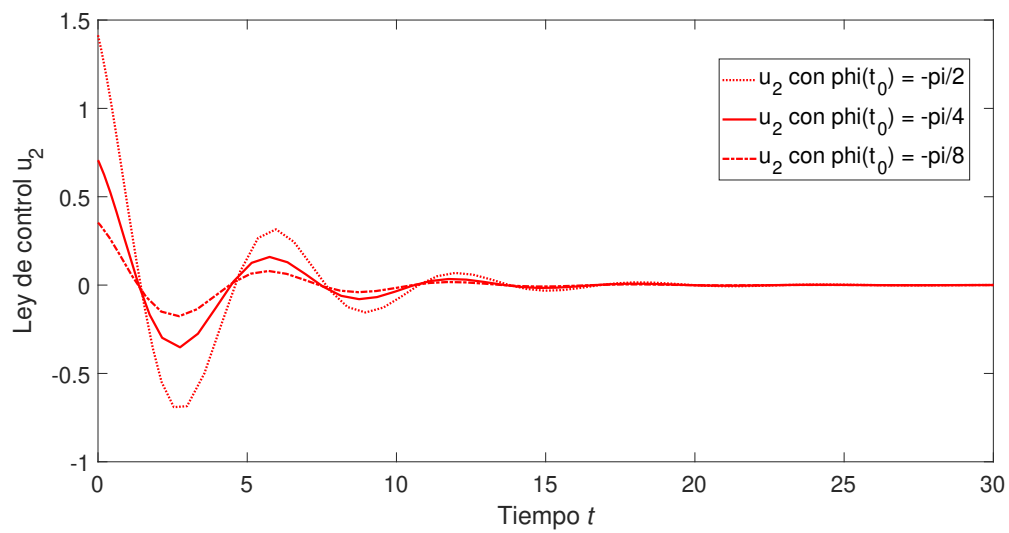
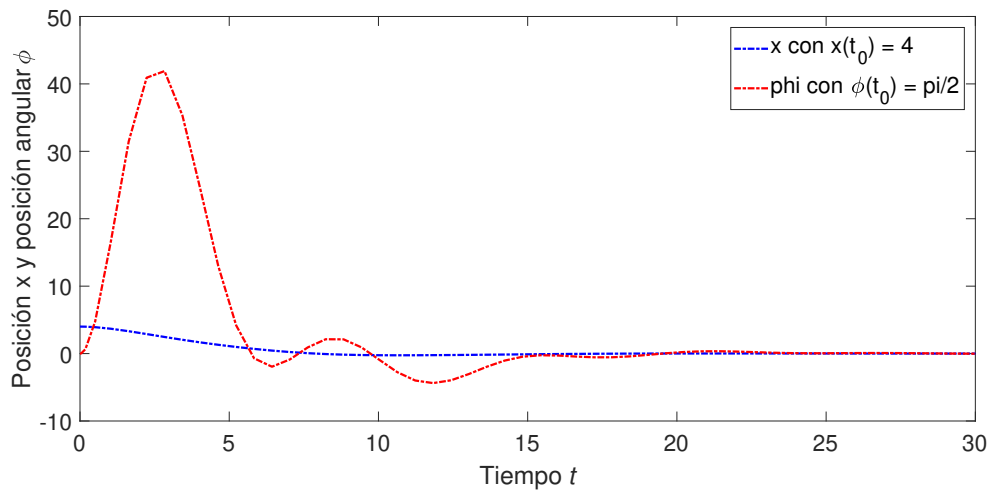
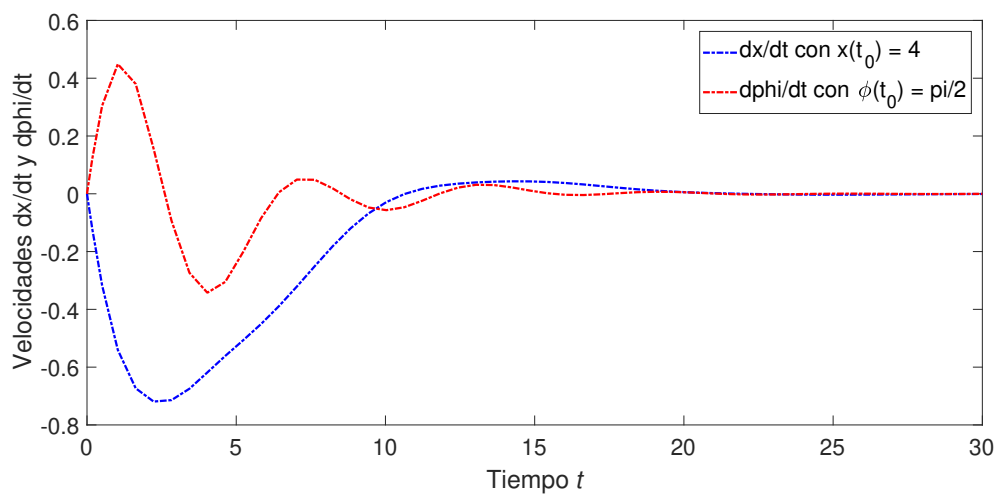
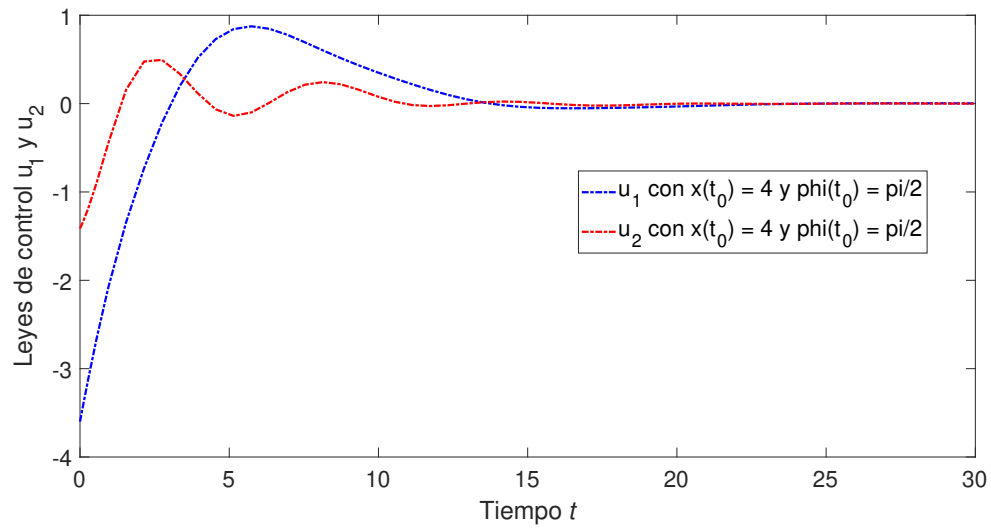
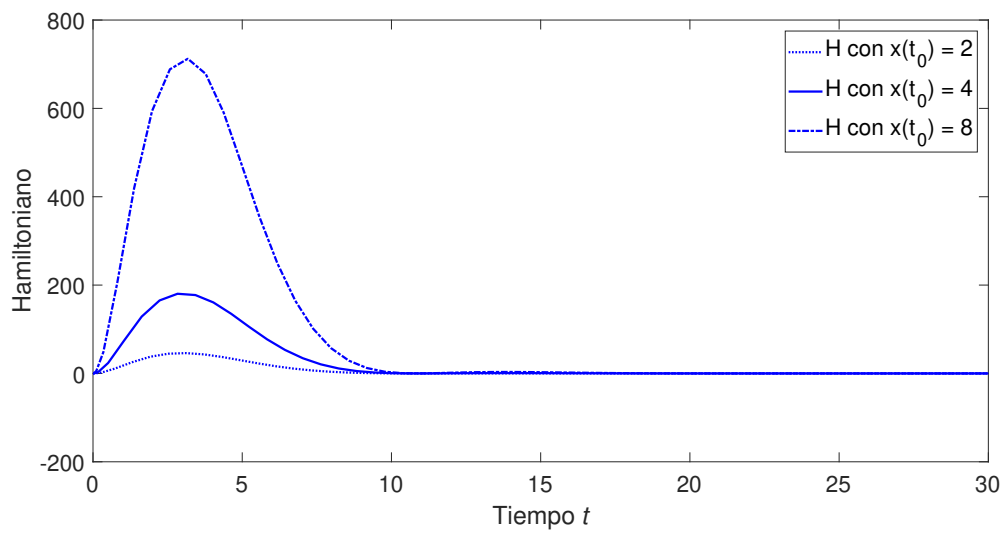


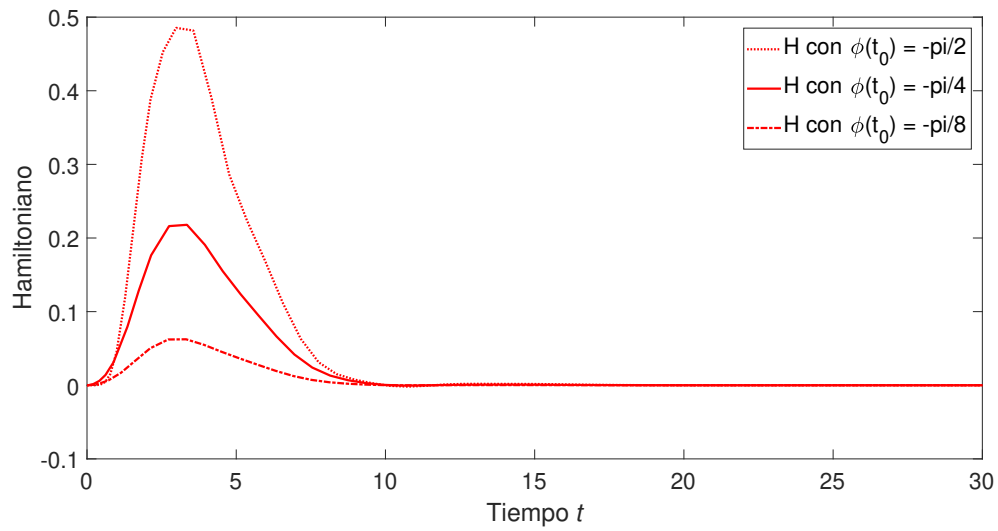
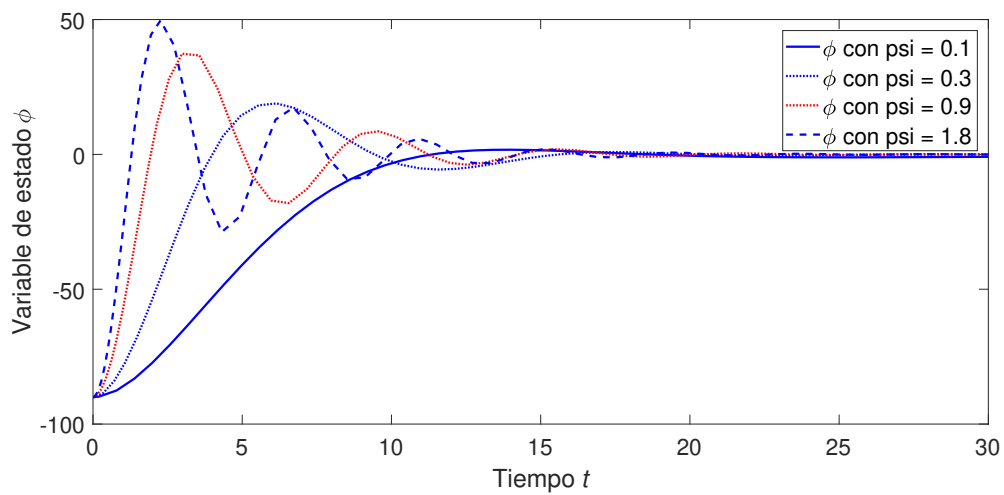
Figura 4.21: Velocidad del carro  $\frac{dx}{dt}$

Figura 4.22: Ley de control  $u_1$ Figura 4.23: Ley de control  $u_2$

Figura 4.24: Posiciones  $x$  y  $\phi$ Figura 4.25: Velocidades  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{d\phi}{dt}$



Figura 4.26: Leis de controle  $u_1$  e  $u_2$ Figura 4.27: Hamiltoniano  $H$ .

Figura 4.28: Hamiltoniano  $H$ .Figura 4.29:  $\phi$  con diferentes valores de  $\Psi$ .

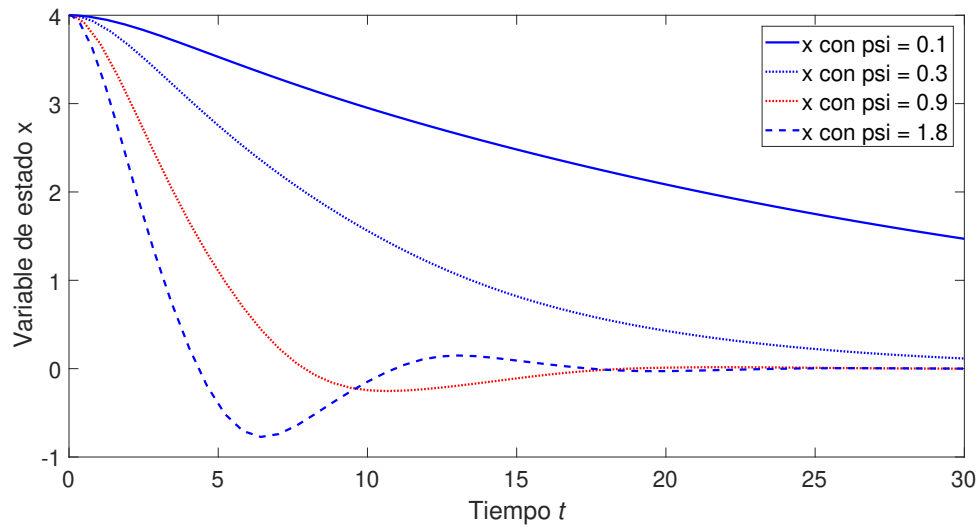


Figura 4.30:  $x$  con diferentes valores de  $\Psi$ .

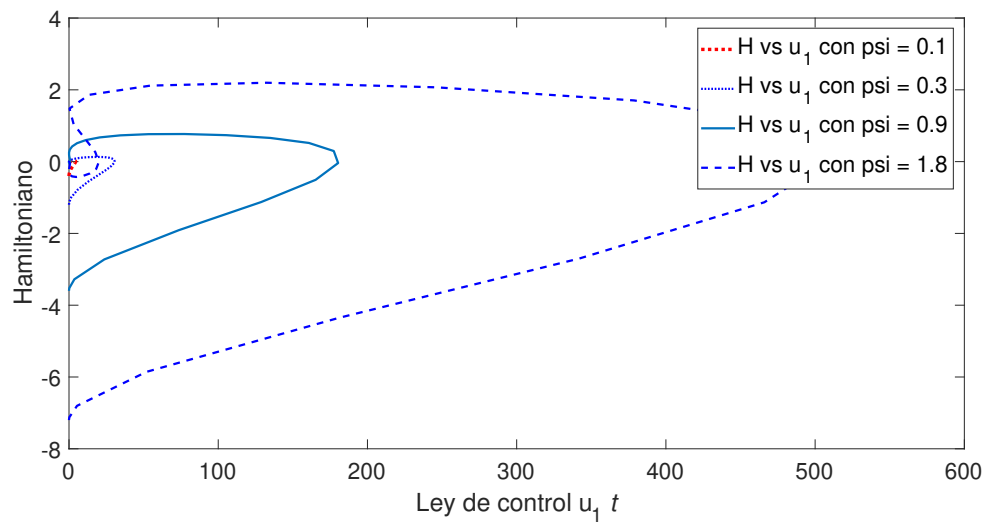


Figura 4.31:  $H$  con respecto a  $u_1$  para diferentes valores de  $\Psi$ .

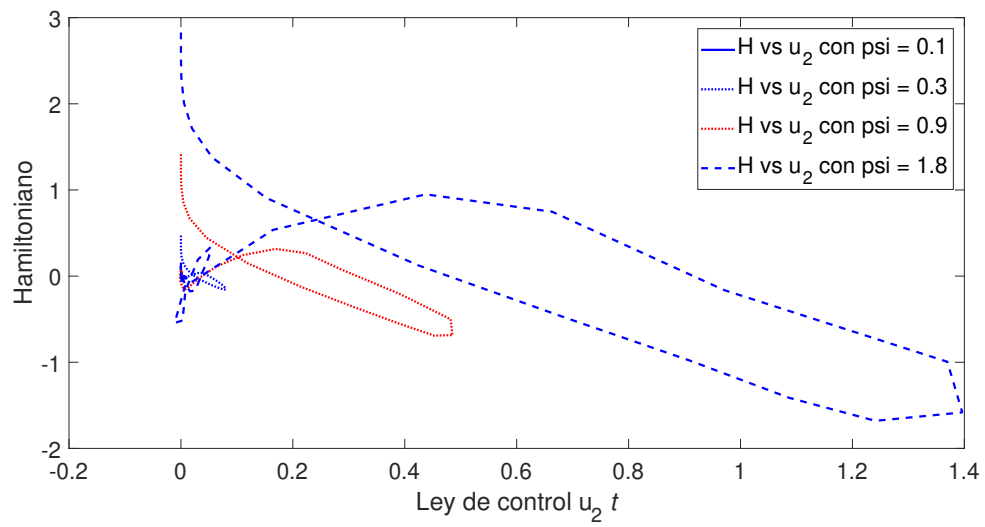


Figura 4.32:  $H$  con respecto a  $u_2$  para diferentes valores de  $\Psi$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajos Futuros

En conclusión, después de analizar diversas aproximaciones para abordar el problema de control óptimo en sistemas dinámicos, se ha observado una variedad de enfoques que han demostrado eficacia en diferentes contextos. Desde el uso de técnicas robustas como la Integral Robusta del Signo del Error (RISE), hasta la aplicación de Redes Neuronales (RN) para capturar relaciones no lineales complejas y el empleo de la metodología Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) para lograr robustez y estabilidad en sistemas críticos.

Cada enfoque presenta sus propias ventajas y desventajas. Mientras que RISE ofrece estabilidad y robustez ante perturbaciones, puede tener respuestas lentas en estados subóptimos prolongados. Las Redes Neuronales, aunque capaces de aprender relaciones no lineales, pueden requerir conjuntos de datos grandes y tiempo de cómputo significativo. La metodología HJI, aunque robusta, implica enfoques heurísticos y puede ser más difícil de formalizar matemáticamente en comparación con métodos como el HJB.

Para abordar el problema de control óptimo de regulación en esta tesis, se optó por una solución analítica de la ecuación HJB, aplicada a sistemas dinámicos no lineales con características específicas. Esta elección se basa en la disponibilidad de un modelo dinámico preciso del sistema, lo que permite una rápida respuesta y una solución óptima en términos de criterio de rendimiento. Además, la formulación analítica reduce la carga computacional y el cálculo recursivo, lo que puede ser crucial en aplicaciones donde se requiere eficiencia computacional.

En resumen, la elección de una solución analítica basada en la ecuación HJB para el problema

de control óptimo de regulación en sistemas dinámicos específicos se presenta como una alternativa eficiente y efectiva, aprovechando el conocimiento detallado del modelo para lograr resultados óptimos y reducir la complejidad computacional.

Por otro lado, en el contexto de futuras investigaciones, se proponen diversas direcciones para ampliar y fortalecer el alcance de esta investigación. Estos son algunos posibles caminos a seguir:

- Obtener soluciones analíticas de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para otros criterios específicos, lo que podría enriquecer la comprensión y aplicación de este marco teórico en una variedad de contextos y condiciones.
- Resolver la ecuación de HJB para el seguimiento de trayectorias, lo que proporcionaría un enfoque más completo para el diseño de sistemas de control dinámico.
- Utilizar los resultados obtenidos en este estudio como base para abordar el control óptimo en sistemas politópicos o en contextos relacionados con la teoría de juegos dinámicos. Esto permitiría explorar aplicaciones más amplias y complejas de los hallazgos actuales.
- Implementar y realizar pruebas prácticas en prototipos de laboratorio utilizando la ley de control propuesta. Esto proporcionaría una validación experimental crucial y permitiría evaluar la eficacia y viabilidad del enfoque teórico en condiciones reales.

Estas áreas representan posibles líneas de investigación que podrían enriquecer y profundizar el impacto de este trabajo, abriendo nuevas perspectivas y aplicaciones en el campo del control y la optimización de sistemas dinámicos.

Por otro lado, es importante mencionar que durante el desarrollo de esta tesis se publicaron dos artículos, que sirven para fortalecer y ampliar el alcance de nuestra investigación. Se puede acceder a los artículos completos en las siguientes URL:

- <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9465322>
- <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01969722.2022.2071407>

# Bibliografía

- [1] J. Engwerda, *LQ dynamic optimization and differential games*. John Wiley & Sons, 2005.
- [2] F. L. Lewis, D. Vrabie, and V. L. Syrmos, *Optimal control*. John Wiley & Sons, 2012.
- [3] H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [4] K. Ogata, *Sistemas de control en tiempo discreto*. Pearson educación, 1996.
- [5] R. Ortega, J. A. L. Perez, P. J. Nicklasson, and H. J. Sira-Ramirez, *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] J. Park and W. K. Chung, “Analytic nonlinear h/sub/spl infin//inverse-optimal control for euler-lagrange system,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, no. 6, pp. 847–854, 2000.
- [7] K. Dupree, P. M. Patre, Z. D. Wilcox, and W. E. Dixon, “Asymptotic optimal control of uncertain nonlinear euler-lagrange systems,” *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 99–107, 2011.
- [8] O. Aksoy, E. Zergeroglu, and E. Tatlicioglu, “Inverse optimal adaptive output feedback control of euler-lagrange systems: A variable structure observer based approach,” in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 7642–7647, IEEE, 2015.
- [9] R. Kalman, “The theory of optimal control and the calculus of variations,” *Mathematical optimization techniques*, vol. 309, p. 329, 1963.

- [10] K. Dupree, P. M. Patre, M. Johnson, and W. E. Dixon, “Inverse optimal adaptive control of a nonlinear euler-lagrange system, part i: Full state feedback,” in *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pp. 321–326, IEEE, 2009.
- [11] Y. H. Kim, F. L. Lewis, and D. M. Dawson, “Intelligent optimal control of robotic manipulators using neural networks,” *Automatica*, vol. 36, no. 9, pp. 1355–1364, 2000.
- [12] V. Azhmyakov, “Optimal control of mechanical systems,” *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, vol. 2007, 2007.
- [13] L. Rodrigues, “Optimal control of a class of pseudo euler-lagrange systems,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 38, no. 2, pp. 266–278, 2017.
- [14] N. Kalbussi, A. Rapaport, T. Bayen, N. Benamar, F. Ellouze, and J. Harmand, “Optimal control of filtration and back-washing under membrane clogging,” 2017.
- [15] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, “Classical mechanics addison-wesley,” *Reading, MA*, vol. 426, 1980.
- [16] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2004.
- [17] R. Kelly, V. Santibánes, *et al.*, “Control de movimiento de robots manipuladores,” 2003.