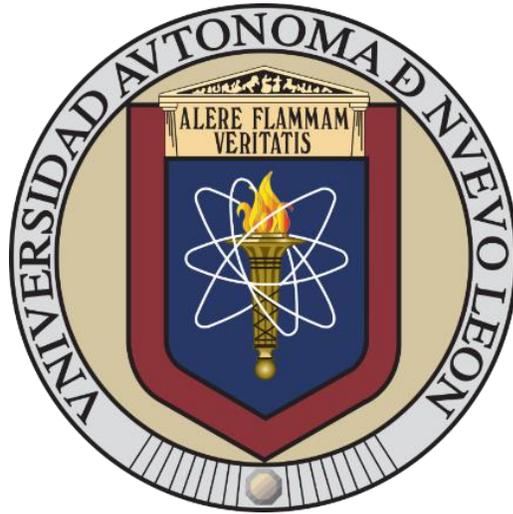


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



CÁLCULO DE LA MASA DEL MESÓN SIGMA A TEMPERATURA
FINITA

Por

RODOLFO DAMIÁN CHAPA GONZÁLEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

Mayo 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



CÁLCULO DE LA MASA DEL MESÓN SIGMA A TEMPERATURA
FINITA

Por

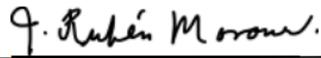
RODOLFO DAMIÁN CHAPA GONZÁLEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

Mayo 2024

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Cálculo de la masa del mesón sigma a temperatura finita”, realizada por el alumno Rodolfo Damián Chapa González, con número de matrícula 1798359, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en ingeniería física industrial.

El Comité de Tesis



Dr. José Rubén Morones Ibarra
Director

Dr. Edgar Martínez Guerra

Revisor

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Diciembre 2023

Agradecimientos

Agradezco enormemente a mi familia por haberme apoyado en mi vida académica, a mis amistades y a mi asesor el Dr. José Rubén Morones Ibarra

Dedicatoria

A mis padres y mi asesor el Dr. José Rubén Morones Ibarra

Índice general

Agradecimientos	4
Dedicatoria	5
Índice general	6
Nomenclatura	8
Resumen	9
1. Introducción	10
2. El mesón sigma.....	13
2.1. Perspectiva histórica	13
2.1.1. La era Pre-QCD.....	13
2.1.2. La evolución del campo sigma	15
3. Simetría quiral y el mesón sigma.....	17
3.1. Justificación.....	18
3.2. Hipótesis.....	18
3.3. Objetivos	19
4. Concepto de masa de una partícula.....	20
4.1. Partículas inestables	21
4.2. Cromodinámica cuántica	23
4.2.1. Simetrías.....	25
4.2.1.1. Rompimiento de simetría quiral	26
4.3. Física estadística.....	27
5. Metodología	32
5.1. Autoenergía del mesón σ interactuando con un par $\pi + \pi -$	32
5.1.1. Formalismo de tiempo imaginario.....	33
5.2. Función espectral del campo sigma.....	39
6. Resultados	40
7. Conclusiones.....	45
Referencias	46

Índice de figuras

Fig 1. Esquema del diagrama de fase en el plano de temperatura y potencial químico [10].

Fig. 2. Densidad de probabilidad de encontrar una partícula inestable con energía E_n

Fig. 3. Visualización de la simetría quiral de una partícula sin masa

Fig. 4. Diagrama de interacción entre el mesón sigma y 2 piones, donde un mesón sigma decae en 2 piones que instantáneamente decaen en un mesón sigma

Fig. 5. Cociente de las masas del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 600MeV$ en función de la temperatura donde se observa una disminución en la masa.

Fig. 6. **Izquierda)** Cociente de las masas del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 500MeV$ en función de la temperatura donde se observa una disminución en la masa. **(Derecha)** Cociente de las masas del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 350MeV$ en función de la temperatura donde se observa una disminución en la masa

Fig. 7. Función espectral del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 600MeV$ visualizada a diferentes temperaturas, donde se observa que a mayor temperatura, el ancho de la curva disminuye, disociándose en 2 piones en $T = 186MeV$

Fig. 8. Funciones espectrales del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 500MeV$ a diferentes temperaturas donde se observa una disminución en el ancho de la curva, disociándose en 2 piones en $T = 150MeV$

Fig. 9. Funciones espectrales del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 350MeV$ a diferentes temperaturas donde se observa una rápida restauración de la simetría quiral en $T = 130MeV$

Nomenclatura

- F_E ~ Fuerza eléctrica externa
- F_B ~ Fuerza magnética externa
- $\Psi_n(t)$ ~ Estado de partícula inestable
- \mathcal{L}_{QCD} ~ Lagrangiano de la cromodinámica cuántica
- f ~ Sabores de quarks
- \bar{q} ~ Antiquark
- q ~ quark
- $F_{\mu\nu}^\alpha$ ~ Campo gluónico
- D_μ ~ Derivada covariante
- H ~ Hamiltoniano
- p ~ Cuatro-vector de momento del mesón sigma
- β ~ Inverso de temperatura
- μ ~ Potencial químico
- Z ~ Función de partición
- τ ~ Tiempo imaginario
- w_n ~ Frecuencia de Matsubara
- Tr ~ Traza
- T ~ Temperatura
- $\vec{\pi}$ ~ Notación para los 3 campos del pión (π^+, π^-, π^0)
- σ ~ Campo del sigma
- \mathcal{L}_{int} ~ Lagrangiano de interacción
- q ~ Cuatro-vector de momento intercambiado en la interacción
- $n_B(E)$ ~ Función de distribución Bose-Einstein
- $\Delta(p)$ ~ Propagador del mesón sigma
- $m_\sigma(T)$ ~ Masa del mesón sigma en función de la temperatura
- m_σ^0 ~ Masa del mesón sigma a temperatura igual a cero
- $\Sigma(p)$ ~ Autoenergía del mesón sigma
- m_π ~ Masa del pión en el vacío
- E ~ Energía de la partícula
- $P.V.$ ~ Valor principal
- $S(p)$ ~ Función espectral

Resumen

La presente tesis se centra en el estudio de la masa del mesón sigma en función de la temperatura, con el objetivo de investigar cómo cambia este parámetro en diferentes condiciones termodinámicas. Se espera que la masa del mesón sigma disminuya a medida que la temperatura aumenta, lo que proporciona información en el estudio de la materia a densidades y temperaturas extremas.

Además, se abordará el fenómeno de la restauración de la simetría quiral donde se espera identificar la temperatura crítica aproximada a la cual se restaura esta simetría, haciendo uso de la “Naive perturbation theory” y técnicas computacionales avanzadas.

1. Introducción

En la naturaleza frecuentemente podemos encontrar simetrías de todo tipo, encontramos simetrías en propiedades geométricas, en nuestros cuerpos, células, incluso en ecuaciones [1]; esto hace pensar que el universo tiene ciertas propiedades que pueden ser explicadas en base a las simetrías que observamos. Ejemplos de simetrías que se respetan en todo el universo son la simetría de traslación espacial y simetría de traslación temporal, que indican que las leyes de la física son las mismas en cualquier punto del espacio y el tiempo respectivamente (las leyes de la física en la tierra son iguales a las leyes de la física en cualquier otro lado y las leyes de la física hace 500 años son las mismas leyes de la física hoy en día). Esto dice que la naturaleza tiene reglas para modelar el universo en el que vivimos, pero el universo rompe algunas de estas reglas (rompimiento de simetrías).

Hoy en día se sabe que toda la materia está compuesta por átomos que a su vez está descrita por partículas [2], la teoría encargada de estudiar a estas partículas y a sus interacciones es el modelo estándar [3], de ella podemos apreciar 3 simetrías principales, $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$, de estas 3 simetrías se desprenden 3 de las 4 fuerzas (interacciones) fundamentales que gobiernan nuestro universo, la electrodinámica cuántica, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte; a cada interacción le corresponde una partícula portadora (bosones) de esta interacción o fuerza, los cuales son los fotones, los bosones W^{\pm}, Z y los gluones, respectivamente.

De acuerdo a las ecuaciones del modelo estándar, estas partículas no deben tener masa [4], pero cuando los bosones W,Z, fueron descubiertas en 1983 [5] se dio a conocer que estas partículas poseían masa, la explicación de este resultado se dio a conocer gracias al mecanismo de Higgs [6] el cual explica que la generación de masa proviene del rompimiento de simetría del campo de Higgs.

Pero este mecanismo no explica al 100% la problemática que existe de la generación dinámica de masa del protón y neutrón, los nucleones (protones y neutrones) están compuestos por 3 tipos de quarks llamados quarks de valencia, si se compara la suma de la masa de los 3 quarks con la masa del nucleón uno se dará cuenta que la masa combinada de los quarks es de apenas el 1% de la masa total, el resto de la masa es debido a la energía de interacción entre quarks por los gluones dentro de los nucleones, el rompimiento de simetría que explica esta energía es el rompimiento de simetría quiral [1]

Vivimos en un universo donde la simetría quiral entre las partículas está rota, esto quiere decir que las partículas derechas y las partículas izquierdas poseen propiedades diferentes, una clara evidencia de esto proviene la interacción débil, la fuerza nuclear débil sólo interactúa en las partículas izquierdas [7], esto no siempre fue así, en un estado de alta energía justo como en el inicio del universo, esta simetría estaba restaurada [8], por ende las propiedades de éstas partículas eran diferentes a las de hoy, se puede estudiar estas propiedades en base a sus partículas más fundamentales: los quarks.

Fue en la década de 1970 cuando Kirzhnits y Linde sugirieron que las simetrías rotas podrían restaurarse a temperatura finita [9]. En particular, la modificación

de las propiedades de los hadrones en materia nuclear densa y caliente, que es un tema interesante en física nuclear, astrofísica y cosmología, comúnmente se ha estudiado mediante el uso de teorías de campo efectivas en QCD.

La simetría quiral está relacionada a diversas problemáticas dentro del marco de la teoría cuántica de campos, como el estudio de las fases de transición de la cromodinámica cuántica en un diagrama de fases, el confinamiento y el estudio de las masas de los hadrones.

En la presente investigación se estudiará la masa del mesón escalar “ σ ” como función de la temperatura cuando se acopla a 2 piones usando “Naive perturbation theory” y el modelo sigma lineal, los cuales son modelos efectivos que se usan en escala de bajas energías.

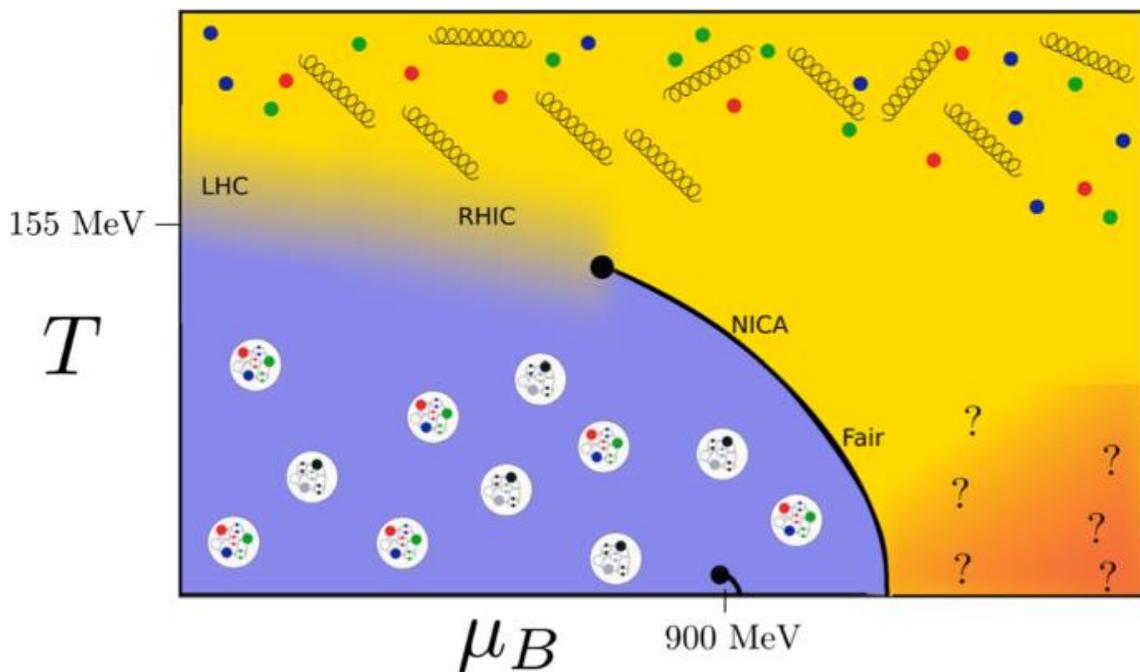


Fig. 1. Diagrama de fases de la cromodinámica cuántica donde se muestra que a altas temperaturas y/o densidades los átomos pasan de ser estados ligados de quarks a un plasma de quarks y gluones [10]

2. El mesón sigma

La cromodinámica cuántica (QCD) ha sido la teoría fundamental de la interacción fuerte por más de 40 años, sin embargo, el espectro de los estados de masa más pequeños y particularmente la de los mesones escalares está en debate; de hecho los mesones escalares ligeros han sido un rompecabezas en el entendimiento de la fuerza nuclear fuerte por casi 6 décadas, el pobre contexto teórico de los hadrones a bajas energías no causa sorpresa, es sabido que la QCD se vuelve no perturbativa a bajas energías y no permite cálculos precisos en el espectro de hadrones ligeros [11]

2.1. Perspectiva histórica

En orden de ilustrar la confusa situación de los mesones escalares ligeros sobre las últimas décadas y ganar una perspectiva en su reciente progreso, es instructivo revisar la historia del mesón sigma.

2.1.1. La era Pre-QCD

Un mesón escalar neutral relativamente ligero fue introducido por Johnson y Teller en 1955[12] en orden de explicar la atracción nucleón-nucleón. Poco tiempo después tal campo fue incorporado por Schwinger[13] a una descripción unificada de las partículas conocidas en términos del spin isotónico, el cual este campo era un singlete y fue llamado campo sigma. Él había remarcado que mientras los piones, los cuales formaban un triplete, eran conocidos, tal campo no había sido observado.

Sin embargo, Schwinger remarcó que si su masa era superior al límite de 2 piones sería altamente inestable y no fácil de observar; esto es, ciertamente lo que sucede y el origen del largo debate acerca de la existencia del mesón sigma.

El mesón sigma fue incorporado a principios de los años 60's en modelos simples de interacción, como el modelo sigma lineal ($L\sigma M$) [14]; en este modelo, el campo sigma pertenece a un multiplete de 4 escalares que sufren un rompimiento de simetría tal que los otros 3 se convierten en bosones de Nambu-Goldstone (NGB) sin masa. En contraste, el campo sigma permanece masivo, si este rompimiento de simetría se identifica con la simetría quiral $SU(2)$ que la QCD tendría si sus 2 quarks más ligeros no tuvieran masa, entonces los 3 bosones de NGB serían identificados con los piones. En realidad, los 2 quarks más ligeros tienen poca masa que pueden ser añadidos a este marco perturbativamente y como consecuencia los piones heredan una masa pequeña comparada a las típicas escalas hadrónicas.

Pero en general, el campo sigma, el cual tiene los números cuánticos del vacío, juega un rol importante en la dinámica del rompimiento de simetría quiral de la QCD. No solo en el modelo sigma lineal, pero el modelo Nambu-Jona-lasinio (NJL) y sus modificaciones también genera un mesón escalar-isoescalar ligero [15] que se acopla fuertemente a 2 piones, consecuencias de esto hace que el tiempo de vida de la partícula sea muy corto y por ende la masa de la partícula tenga mucha incertidumbre; esto se verá más adelante y con más detalle en el capítulo 4.

Aun así, ambos $L\sigma M$ y NJL son simples modelos que, a pesar de capturar características relevantes, ninguno provee una descripción sistemática de la física hadrónica a bajas energías ni tampoco una conexión clara a la QCD. Por tanto, el punto de vista teórico de los años 50's a los años 60's se volvió claro que la existencia y las propiedades del mesón sigma eran muy relevantes para el entendimiento de la atracción nucleón-nucleón y la simetría quiral en las interacciones fuertes; esto ya es una fuerte motivación para el interés detrás del mesón sigma.

2.1.2. La evolución del campo sigma

Está claro que en orden de acatar estos problemas correctamente, se necesita una precisa determinación de la masa, anchura y acoplamiento del mesón sigma. Además, la situación experimental del mesón sigma ha sido tan confusa que incluso su existencia ha sido debatida, a pesar de que ya está firmemente establecido.

Se resumirá brevemente la evolución del mesón sigma en la revista “resumen de las propiedades de las partículas” (RPP) [16]. Después de que su existencia fuera sugerida teóricamente, un estrecho sigma ya había aparecido en la edición 1964 de la RPP, diversas referencias fueron listadas con una masa alrededor de 390 MeV con una anchura entre 50 a 150 MeV. La posibilidad de que fuera una resonancia ancha ya se estaba considerando de 1967 a 1973; un mesón sigma u otro mesón escalar-isoescalar ligero bajo otros nombres (ϵ, η_{\pm}) aparecieron en el listado de partículas; de hecho, en la edición de 1969 había 2 estados $2J^P = 0^+$: un $\sigma(410)$ ancho y un $\eta_{0+}(720)$ estrecho, también llamado a veces ϵ . Desde

1976 tales estados desaparecieron de la lista durante 20 años, regresando en 1996 bajo el nombre de $f_0(400 - 1200)$ ó σ , con una gran incertidumbre en su masa variando de 400 a 1200 MeV. Su nombre fue cambiado a $f_0(600)$ en la edición del 2002 de la RPP pero no fue hasta la edición del 2012 que sufrió su mayor revisión, cambiando su nombre actual $f_0(500)$ y reduciendo la incertidumbre de su masa por un factor de 5.

Algunas teorías efectivas incluyendo “Ladder QCD”, predicen la masa del mesón sigma alrededor de 500-800 MeV. Además la “Simetría reparada de Weinberg” también predice la existencia del mesón [17].

Hay diversas razones para la gran incertidumbre de la masa y anchura del mesón sigma, fue Schwinger en 1957 quien remarcó que el sigma podría ser ancho y difícil de observar, a pesar de ser sugerido en el contexto de la atracción nucleón-nucleón esta interacción no es sensitiva ante los detalles del intercambio de partículas, menos aún si son muy anchas, como el caso del mesón sigma [18]. Por ello mismo, muchos mesones escalares han sido tradicionalmente estudiados en dispersiones mesón-mesón.

3. Simetría quiral y el mesón sigma

En el proceso de colisiones entre iones pesados a altas energías, un largo número de mesones son producidos, piones y sigmas entre ellos. La evolución dinámica del sistema está fuertemente influenciada por el comportamiento termal de los parámetros físicos del mesón. Esta es una de las razones del interés actual en entender la forma en las que las masas y anchuras de los mesones cambian con la temperatura[19]. Incluso aunque la partícula sigma juega un papel importante en interacciones fuertes a bajas energías, sus propiedades a temperatura finita aún no se comprenden del todo bien, particularmente su masa. Sobre este asunto, diferentes descripciones acerca de la naturaleza del sigma han sido propuestos, entre ellos el modelo de “glueballs” [20], tetraquarks[21] y resonancias pión-pión[22]. Por otro lado, estudios experimentales acerca del comportamiento de la materia en condiciones extremas de densidad y temperatura son llevados a cabo en el RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) y en el LHC (Large Hadron Collider) [23].

El estudio de la materia a altas temperaturas, densidades y las fases de transición que toman lugar entre las diferentes fases es interesante desde ciertos puntos de vista y han sido objeto de intenso estudio en los últimos años debido a su relevancia a la física de partículas, astrofísica y cosmología[24]. De acuerdo al modelo del Big Bang se cree que una serie de fases transición transcurrieron en las primeras etapas de la evolución del universo, la fase de transición de la QCD es una de ellas, uno de los objetivos de la investigación es estudiar la simetría quiral la cual es espontáneamente rota.

Un método poderoso en afrontar la restauración de la simetría quiral es construir parámetros de orden que caracterizan el estado de la simetría del sistema en consideración, estas cantidades son cero cuando una fase de transición ha ocurrido.

El mesón sigma decrece su masa en asociación con la simetría quiral en un medio caliente o denso y la anchura del mesón también se espera a que decrezca ya que el pión no cambia su masa mientras el sistema está en su fase Nambu-Goldstone. Por tanto, se espera ver al mesón sigma como una resonancia aguda a altas temperaturas o densidades [25]

3.1. Justificación

El estudio de las propiedades de los hadrones en condiciones extremas de densidad y temperatura es un tema de gran interés en cosmología, astrofísica, física nuclear y física de partículas; ya que da información acerca las fases de transición de la materia nuclear y el rompimiento de la simetría quiral

Actualmente en el LHC y el RHIC existen proyectos experimentales de colisiones relativistas de iones pesados, donde se someten a prueba estudios realizados en diversos marcos teóricos que permitan analizar este comportamiento a temperatura y potencial químico finito.

3.2. Hipótesis

La masa del mesón sigma depende de la temperatura del medio en el que se encuentra, disminuyendo su masa conforme la temperatura aumenta, restaurando parcialmente la simetría quiral.

3.3. Objetivos

El objetivo principal de la investigación es el de determinar la dependencia de la masa del mesón sigma con la temperatura, haciendo uso del formalismo del tiempo imaginario y “naive perturbation theory” en teoría cuántica de campos, donde posteriormente se construirá la función espectral del mesón y analizar la dependencia del ancho de la curva con la temperatura; para ello se necesitan cumplir los siguientes objetivos particulares:

- Calcular la autoenergía del mesón sigma
- Separar en su parte real e imaginaria la autoenergía del sigma
- Encontrar la expresión de la masa del sigma en función de la temperatura
- Construir la función espectral del sigma
- Visualizar la gráfica de la masa del sigma respecto a la temperatura
- Analizar el valor de temperatura en la cual el mesón sigma se disocia en 2 piones para cada masa del sigma inicial

4. Concepto de masa de una partícula

La masa de una partícula es un atributo importante y es por esto por lo que se debe establecer un procedimiento para medirla. Para una partícula estable o que tenga un tiempo de vida suficientemente larga para que deje una huella en una cámara de niebla, el problema de determinar la masa de una partícula cargada es sencillo. Se aplica un campo eléctrico o magnético externo y se observa la trayectoria de la partícula.

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = m\vec{a} \qquad \vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \qquad (1)$$

Para el caso de partículas neutras, se usan diferentes procesos. El problema se presenta cuando la partícula es inestable y decae en un tiempo promedio $\tau \equiv \Delta t$; lo más simple es usar el principio de incertidumbre $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ en el marco de referencia donde la partícula esté en reposo.

$$E = mc^2$$

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

$$\Delta E \Delta t = \Delta E \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$(\Delta m)c^2 \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta m \geq \frac{\hbar}{2c^2 \tau} \qquad (2)$$

De (2) se sabe que siempre se tendrá una incertidumbre en la determinación de la masa de la partícula.

4.1. Partículas inestables

El estado de una partícula inestable se escribe como $\psi_n(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$, entonces la probabilidad de encontrar a la partícula sin decaer a un tiempo t está dada por

$$\langle \psi_n(t) | \psi_n(t) \rangle = e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Para determinar las propiedades de la partícula asociada con la energía $E_n = \hbar \omega_n$ pasamos del espacio de tiempo al espacio de frecuencias

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

Esto lo hacemos mediante una transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{\psi_n(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \psi_n(t) dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i(\omega - \omega_n) - \frac{\lambda}{2}}$$

Esta función requiere que se considere $|F(\omega)|$ para analizarla

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega - \omega_n)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \quad (4)$$

Recordando que $E = \hbar \omega$, usando unidades naturales sustituimos en (4)

$$|F(E)|^2 = \frac{1}{(E - E_n)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \quad (5)$$

Y la probabilidad de encontrar el sistema en un estado de energía E y $E + dE$ en la vecindad de E_n está dada por

$$P(E, E + dE) = |F(E)|^2 dE = \frac{dE}{(E - E_N)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \quad (6)$$

Si se grafica $|F(E)|^2$ se obtendría que el máximo de la función se encuentra en $E = E_n$

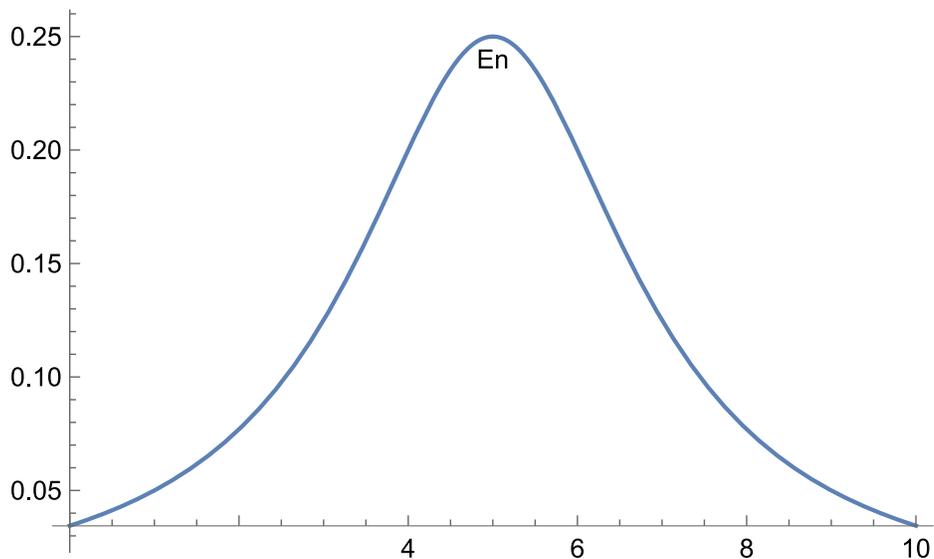


Fig. 2. Densidad de probabilidad de encontrar una partícula inestable con energía E_n

De esta función podemos definir el ancho de la curva entre E_1 y E_2

Anchura:
$$\Delta|F(E)|^2 = \lambda$$

Según el principio de incertidumbre energía-tiempo, cuanto más definida esté la energía de una partícula, mayor es su vida media. La incertidumbre en la energía

ΔE es proporcional a la constante de desintegración, e inversamente proporcional a la vida media, esto es

$$\Delta E = \frac{1}{\tau} = \lambda$$

Por ello a las partículas que tienen mucha incertidumbre en su masa se les conoce como partículas “anchas” debido a la anchura mostrada en resonancias.

4.2. Cromodinámica cuántica

En toda teoría cuántica de campos las transformaciones deben ser unitarias

$$U^\dagger U = \hat{I}$$

Donde I es la matriz de identidad. Por otra parte todo operador unitario U puede escribirse en la forma

$$\hat{U} = e^{iaH}$$

Donde H es un operador hermitiano y “ a ” se le conoce como parámetro de la transformación U y H como el generador de la transformación U .

La lagrangiana de la QCD para quarks sin masa, está dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,\dots} \bar{q}_f i\gamma^\mu D_\mu q_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (7)$$

$a=1,2,\dots,8$; la lagrangiana posee una simetría $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, esto significa que (7) es invariante ante las siguientes transformaciones

$$q_i \rightarrow q'_i = e^{i\theta} q_i$$

Esta simetría conduce a que existe una cantidad conservada, que proviene de una corriente de Noether $\partial_\mu J^\mu = 0$.

La cantidad conservada es la carga o número bariónicos $Q_B \sim Const.$ Esto se observa en la naturaleza, en todos los procesos entre partículas. La lagrangiana (7) también es invariante ante la transformación quirral

$$q_i \rightarrow q'_i = e^{i\gamma_5 \theta} q_i$$

Por el teorema de Noether, existe una corriente conservada $\partial_\mu J_5^\mu = 0$, lo cual implica que existe una cantidad conservada

$$Q_5 = \int J_5^\mu d^3 \vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_5}{dt} = 0$$

Con lo cual de acuerdo con la mecánica cuántica, toda cantidad que se conserve conmuta con el hamiltoniano

$$[Q_5, \hat{H}] = 0 \tag{8}$$

La ecuación (8) implica que los hadrones deben existir en pares, con la misma masa y carga, pero paridades opuestas.

El espectro de hadrones se obtiene de

$$H|\psi\rangle = m_\psi|\psi\rangle \tag{9}$$

Aplicando el operador de carga axial Q_5 a (9), se obtiene que el estado $Q_5|\psi\rangle$ es eigenestado del hamiltoniano con masa igual al estado $|\psi\rangle$

$$H(Q_5|\psi\rangle) = m_\psi(Q_5|\psi\rangle) \tag{10}$$

Hay 2 estados, 2 partículas $|\psi\rangle$ y $Q_5|\psi\rangle$ con la misma carga, masa y con paridades opuestas; $Q_5|\psi\rangle$ tiene paridad opuesta a $|\psi\rangle$. Estos estados que representan partículas no se observan en la naturaleza, por tanto la simetría quiral a las energías que se observan debe ser rota espontáneamente; a energías muy elevadas podría restaurarse la simetría quiral ya que

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow |p|^2, \quad p \gg m$$

La simetría quiral se restaura, tendremos entonces 2 fases para las partículas que interaccionan fuertemente. La fase de simetría quiral rota y la fase de simetría quiral restaurada. Estas 2 fases corresponden a la fase hadrónica y la fase de plasma de quarks y gluones.

Una teoría efectiva de la QCD debe poseer las simetrías de la lagrangiana \mathcal{L}_{QCD} . La simetría quiral en el límite de masa cero de los quarks debe además ser espontáneamente rota. El modelo sigma lineal es una de estas teorías efectivas que incorpora de forma natural el rompimiento de esta simetría; al romper espontáneamente esta simetría aparece el problema a la pregunta de cómo se puede restaurar esta simetría. 2 son las formas en lo que esto se puede lograr, mediante temperaturas y densidades extremas, tenemos así un diagrama de al menos 2 fases.

4.2.1. Simetrías

Las simetrías juegan un papel importante en la teoría cuántica de campos. Éstas introducen restricciones en las posibles interacciones para un problema físico o fenómeno y pueden manipular la estructura del lagrangiano de la teoría[26].

Existen 2 tipos de simetrías, las locales donde los parámetros de la transformación son dependientes del espacio-tiempo y las globales, las cuales son independientes del espacio tiempo, además clasifican a las partículas acorde a su número cuántico y predicen la existencia de partículas sin masa.

La cromodinámica cuántica, la teoría de la interacción fuerte, es un ejemplo de teoría “gauge” cuyo grupo de simetría local $SU(N_c)$ actúa sobre los grados de libertad del color. En la vida real $N_c = 3$, pero imponiendo que N_c sea un parámetro libre, permite que uno estudie las propiedades de la teoría de forma general [27].

4.2.1.1. Rompimiento de simetría quiral

Un fenómeno quiral es aquello que no es idéntico a su imagen espejo. El spin de una partícula puede ser usada para definir la helicidad de esa partícula. En el caso de partículas sin masa, la helicidad es la misma que la quiralidad; la invarianza ante la transformación de paridad por un fermión de Dirac es llamada simetría quiral.

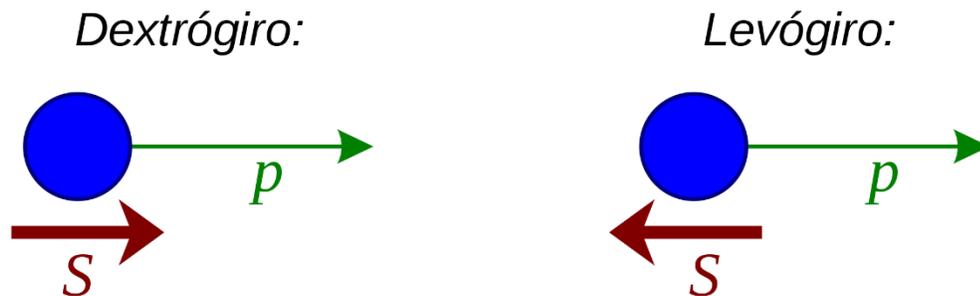


Fig. 3. Visualización de la simetría quiral de una partícula sin masa

En la física de partículas, el rompimiento de simetría quiral se asocia con fermiones sin masa. Esto es usualmente asociado con una teoría “gauge” tal como la cromodinámica cuántica.

La idea fue introducida a la física de partículas por Yoichiro Nambu, en particular, en el modelo efectivo de Nambu-Jona-Lasinio, el cual es una teoría de bosones compuesta que exhiben un rompimiento dinámico de la simetría quiral cuando la constante de acoplamiento de un 4-fermión se vuelve suficientemente largo [28]

4.3. Física estadística

El tratamiento teórico estándar de los campos fundamentales y sus interacciones usan el lenguaje de la teoría cuántica de campos. Este tratamiento ha sido extremadamente exitoso en describir el comportamiento de todas las partículas conocidas que constituyen el modelo estándar. Sin embargo, el marco teórico de esta teoría a temperatura cero, no incorpora de forma natural los efectos relevantes del medio a altas temperaturas y densidades [29].

El problema de la termodinámica en la teoría cuántica de campos ha hecho que los físicos implementen técnicas de análisis; Matsubara, pionero en el ámbito de la teoría de campos termal, desarrolló el formalismo de tiempo imaginario que describe los sistemas en equilibrio. Este formalismo tiene una gran importancia en la QFT (teoría cuántica de campos por sus siglas en inglés) a temperatura cero en la forma de propagadores, la estructura diagramática de la expansión perturbativa y las auto-energías [30].

El comportamiento estadístico de un sistema mecánico-cuántico en equilibrio térmico es normalmente estudiado a través de un ensamble termodinámico. En general uno define una matriz de densidad para el ensamble como [31]

$$\rho(\beta) = Z^{-1}(\beta)e^{-\beta\mathcal{H}}$$

Donde β representa el inverso de la temperatura de equilibrio, \mathcal{H} es el hamiltoniano particular del ensamble y $Z(\beta)$ es la función de partición del ensamble

Sea la función de partición

$$Z = \sum_i e^{-\beta\epsilon_i} = \sum_i \langle i | e^{-\beta H} | i \rangle \quad (11)$$

En la representación de números de ocupación $|n\rangle$, consideremos el caso de bosones con frecuencia w y energía $E = \hbar w$. En una teoría cuántica, la dualidad onda-partícula asocia una partícula de energía E una frecuencia $\nu = \frac{E}{\hbar}$

El estado $|n\rangle$ indica que hay n bosones en el sistema. El estado $|0\rangle$ es el vacío

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle \quad (12)$$

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta w}} \quad (13)$$

Donde (11) es la función de partición para bosones.

Por otra parte, para cualquier operador \hat{A} , su promedio térmico está dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z} \text{Tr}[ZA] \quad (14)$$

Se calculará el número promedio de bosones a la temperatura $T = \frac{1}{\beta}$

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i \langle i | e^{-\beta(H-\mu N)} N | i \rangle \quad (15)$$

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i \langle i | e^{-\beta(\epsilon_i - \mu n_i)} n_i | i \rangle \quad (16)$$

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial}{\partial \mu} \langle i | e^{-\beta(\epsilon_i - \mu n_i)} | i \rangle \quad (17)$$

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \quad (18)$$

Aplicando (18) a la función de partición de bosones

$$\langle \hat{N} \rangle_{\beta} = \frac{1}{e^{-\beta(w-\mu)} - 1} \quad (19)$$

De igual forma para fermiones, la función de partición es

$$Z = 1 + e^{-\beta(w-\mu)} \quad (20)$$

El valor esperado del número de fermiones está dado por

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(w-\mu)} + 1} \quad (21)$$

El cual es la distribución de Fermi-Dirac.

Se considerarán 2 operadores en la representación de Heisenberg, es decir, dependientes del tiempo $\hat{A}(t), \hat{B}(t)$ evaluados en diferentes puntos del espacio-tiempo.

$$\langle A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, 0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{\beta H} A(\vec{x}, t) B(\vec{y}, 0)] \quad (22)$$

$$\langle A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, 0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{\beta H} A(\vec{x}, t) e^{-\beta H} e^{\beta H} B(\vec{y}, 0)] \quad (23)$$

$$\langle A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, 0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} [A(\vec{x}, t) e^{-\beta H} e^{\beta H} B(\vec{y}, 0) e^{-\beta H}] \quad (24)$$

$$\langle A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, 0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} [A(\vec{x}, t) e^{-\beta H} e^{-i(-i\beta H)} B(\vec{y}, 0) e^{-i(-i\beta H)}] \quad (25)$$

$$\langle A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, 0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{\beta H} A(\vec{x}, t) B(\vec{y}, i\beta)] \quad (26)$$

En general

$$\langle A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, 0) \rangle = \pm \langle A(\vec{x}, t) B(\vec{y}, i\beta) \rangle \quad (27)$$

Se observa que a la temperatura imaginario $i\beta$ juega un papel de variable temporal, identificando una rotación de Wick.

$$t = -i\tau \quad (28)$$

Este tiempo está en el espacio de Minkowski, τ es el tiempo imaginario; el tiempo imaginario $it = \tau = \beta$ se asocia con la temperatura de la ecuación (11)

Y se concluye que el campo o el operador B, es periódico en el tiempo $t = -i\beta = -i\tau$, ya que

$$B(\vec{y}, 0) = B(\vec{y}, i\beta) \quad (29)$$

Cuando hay un periodo temporal T, le asociamos también una frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (30)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pm i\beta \quad (31)$$

$$\omega_n = 2n\pi T \quad (32)$$

Por otra parte, para fermiones

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad n \in \mathbb{Z} \quad (33)$$

Al hacer el cambio desde un espacio de Minkowski a un espacio euclideo, las coordenadas de los 4-vectores se transforma de acuerdo con

$$k_0 \rightarrow ik_4 = iw_n, \vec{k} \rightarrow \vec{k} \quad (34)$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (35)$$

En general, la función de partición de un sistema estadístico no puede ser evaluado exactamente

$$Z(\beta) = Tr(\rho(\beta)) = Tr(e^{-\beta H}) \quad (36)$$

De esta forma, es conveniente hacer una expansión perturbativa en la constante de acoplamiento, ya que se tiene una suma sobre los valores esperados sobre todos los posibles estados en el espacio de Hilbert; de igual manera, el formalismo de Matsubara provee una forma de evaluar la función de partición perturbativamente, usando métodos diagramáticos los cuales son análogos a los usados en la teoría cuántica de campos a temperatura cero. [32]

5. Metodología

Se calculará la forma como cambia la masa del mesón sigma como función de la temperatura; la masa definida como la posición del polo del propagador será calculada con $T = 0, T \neq 0$ usando Naive perturbation theory, donde se observará que al aumentar la temperatura la masa del sigma disminuye, esto se interpreta como una restauración de la simetría quiral.

5.1. Autoenergía del mesón σ interactuando con un par

$$\pi^+ \pi^-$$

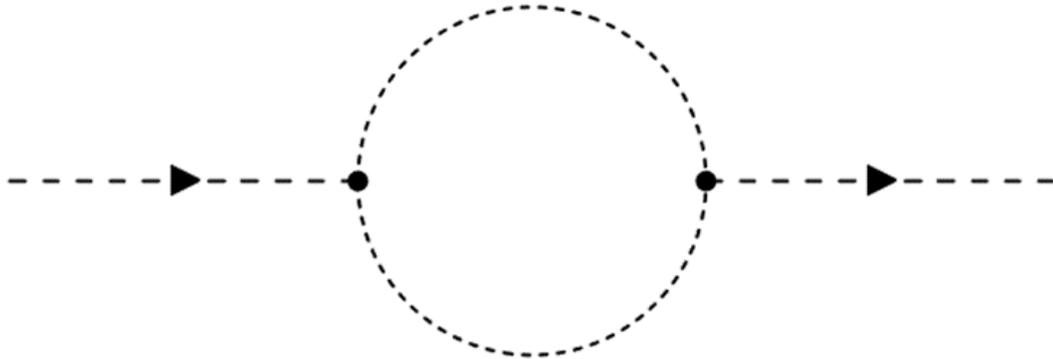


Fig. 4. Diagrama de interacción entre el mesón sigma y 2 piones, donde un mesón sigma decae en 2 piones que instantáneamente decaen en un mesón sigma

El lagrangiano de interacción, que describe el decaimiento de una partícula pseudo-escalar σ en un par de partículas neutras pseudo-escalares $\pi \cdot \pi$ de masas m_π está dado por [33]

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} m_\pi \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \sigma \quad (37)$$

Y la autoenergía de la interacción está dada por

$$-i \Sigma(p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{V^2}{[q^2 - m^2 + i\epsilon][(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (38)$$

Donde $V = \frac{1}{2} g_{\sigma\pi\pi} m_\pi$ es el potencial de interacción; La partícula σ es considerado en este cálculo como una resonancia de 2 piones; se introducen los campos complejos para representar los piones π^+ , π^- , π^0 y la interacción se multiplica por 3.

5.1.1. Formalismo de tiempo imaginario

Este formalismo provee una forma de evaluar la función de partición perturbativamente, usando métodos diagramáticos los cuales son análogos a los que son usados convencionalmente en la teoría cuántica de campos a temperatura cero [34].

En el formalismo de tiempo imaginario se hace el cambio en el espacio tiempo de Minkowski al espacio Euclídeo.

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2$$

$$q_0 \rightarrow iq_0 \equiv q_4 \Rightarrow q_0 = -iq_4$$

$$\Rightarrow q^2 = -q_4^2 - \vec{q}^2$$

Por definición $q_4 = w_n = 2n\pi T$

$$\Rightarrow q^2 - m^2 = -(w_n^2 + \vec{q}^2 + m^2) = -(w_n^2 + E_q^2)$$

$$(p+q)^2 - m^2 = -(w_0 + w_n)^2 - E_{p+q}^2$$

$$dq_0 \rightarrow -idq_4 = -id\Delta q_4 = -2i\pi T \Delta n$$

Sustituyendo estas cantidades en la expresión de la autoenergía

$$-i \Sigma(p) = -iT \sum_{n \in Z} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^4} \frac{V^2}{[w_n^2 + E_q^2][(w_n + w_0)^2 + E_{q+p}^2]} \quad (39)$$

En un marco de referencia en donde la partícula sigma esté en reposo y realizando la suma en el integrando, se tiene

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^4} V^2 \left(\frac{1}{E}\right) \left(\frac{1}{4E^2 + w_0^2}\right) (2n_B(E) + 1) \quad (40)$$

Donde $n_B(E)$ es la función de distribución de Bose-Einstein con $E = \sqrt{q^2 + m_\pi^2}$, $m_\pi = 140 \text{ MeV}$, $ip_4 = iw_0$ se puede observar que el integrando de (40) es esféricamente simétrico en la variable de integración. Por tanto, se puede escribir

$$d^3 \vec{q} = q^2 dq d\Omega = 4\pi q^2 dq$$

$$\Sigma(p) = 4\pi V^2 \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{4E^2 + w_0^2}\right) (2n_B(E) + 1) \quad (41)$$

En el problema con sigma en reposo, para el espacio de Minkowski $\vec{p} = 0$, $m_\sigma = p_0 = w_0$, en (41) se está realizando la integral en el espacio euclideo, por lo que se debe regresar al espacio de Minkowski para obtener cantidades físicas.

Antes de esto, se realiza un cambio de variable $E = \sqrt{q^2 + m_\pi^2}$, $E dE = q dq$

$$\Sigma(p) = \left(\frac{V^2}{2\pi^2}\right) \int_{m_\pi}^\infty \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{4E^2 + w_0^2}\right] (2n_B(E) + 1) \quad (42)$$

Recordando que $p_0 \rightarrow ip_0 = p_4 = w_0 \Rightarrow im_\sigma = w_0$ y sustituyendo en la ecuación (42) se ve la relación de la autoenergía del mesón sigma en función de la temperatura y masa del sigma

$$\Sigma(p) = \left(\frac{V^2}{2\pi^2}\right) \int_{m_\pi}^{\infty} \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{4E^2 - m_\sigma^2} \right] (2n_B(E) + 1) \quad (43)$$

Para evitar singularidades en el integrando, se hará $m_\sigma^2 \rightarrow m_\sigma^2 - i\epsilon$ [35]

$$\Sigma(p) = \left(\frac{V^2}{2\pi^2}\right) \int_{m_\pi}^{\infty} \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{4E^2 - m_\sigma^2 + i\epsilon} \right] (2n_B(E) + 1) \quad (44)$$

La autoenergía es una función de naturaleza compleja, por tanto, haciendo uso de la siguiente propiedad se puede separar la ecuación (44) en su parte real e imaginaria

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P.V. \left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta(x) \quad (45)$$

Donde P.V. representa el valor principal, separando la ecuación (44) en su parte real e imaginaria se obtiene:

$$\Sigma(p) = \left(\frac{V^2}{2\pi^2}\right) \left\{ P.V. \int_{m_\pi}^{\infty} \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{4E^2 - m_\sigma^2} \right] (2n_B(E) + 1) + i\pi \int_{m_\pi}^{\infty} \delta(4E^2 - m_\sigma^2) \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \frac{2n_B(E) + 1}{4E^2 - m_\sigma^2} \right\} \quad (46)$$

La parte real de la autoenergía se asocia con la masa física del campo sigma debido a su relación con el propagador del campo escalar-isoescalar sigma, mientras que la parte imaginaria se asocia con la anchura, tiempo de vida y la incertidumbre de su masa.

La parte real de la autoenergía se puede descomponer en su parte dependiente de la temperatura y una independiente de la temperatura

$$\begin{aligned}
Re \Sigma(p, T) = & \frac{V^2}{8\pi^2} P.V. \int_{m_\pi}^{\infty} \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{4E^2 - m_\sigma^2} \right] 2n_B(E) + \\
& \frac{V^2}{8\pi^2} P.V. \int_{m_\pi}^{\infty} \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{4E^2 - m_\sigma^2} \right]
\end{aligned} \tag{47}$$

En el cálculo de la masa del mesón sigma que se calculó con el polo del propagador, solo se utilizará la parte real del propagador; la parte de la autoenergía dependiente de la temperatura es una integral convergente debido al factor de la distribución de Boltzmann

$$n_B(E) = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \tag{48}$$

Mientras que la parte independiente de la temperatura es logarítmicamente divergente, por ello se optará introducir una energía de corte de 1.4 GeV [36]

En orden de evaluar la masa del mesón sigma, se debe calcular el propagador modificado, el cual es una herramienta matemática que describe la propagación de partículas en un medio o cuando sufre interacciones; sea el propagador modificado obtenido a partir de la ecuación de Dyson:

$$i\Delta(p) = i\Delta_0(p) + i\Delta_0(p)[-i\Sigma(p)]i\Delta(p) \tag{49}$$

Donde $\Sigma(p)$ es la autoenergía del mesón, $i\Delta_0(p) = \frac{i}{p^2 - (m_\sigma^0)^2 - i\epsilon}$ es el propagador libre del mesón, el cual describe como se propaga el mesón sigma en el vacío.

Despejando para $\Delta(p)$ en la ec. (49) se obtiene el propagador modificado

$$\Delta(p) = \frac{1}{\Delta_0(p)^{-1} - \Sigma(p, T)} = \frac{1}{p^2 - m_\sigma^2(T=0) - \Sigma(p, T)} \tag{50}$$

El polo real del propagador modificado es la masa física del mesón sigma, por tanto

$$p^2 = m_\sigma^2(T = 0) + Re\{\Sigma(p, T)\} \quad (51)$$

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m_\sigma^2(T) = m_\sigma^2(T = 0) + Re\{\Sigma(p, T)\} \quad (52)$$

La parte real de la autoenergía tiene la propiedad que puede separarse en su parte dependiente de la temperatura e independiente de la temperatura

$$(m_\sigma^2(T))_{Physical} = m_\sigma^2(T = 0) + Re\{\Sigma(p, T)\} + Re\{\Sigma(p, T = 0)\} \quad (53)$$

Donde

$$Re\{\Sigma(p, T)\} = \frac{3g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\pi^2}{16\pi^2} P.V. \int_{m_\pi}^\Lambda dE \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \frac{2n_B(E)}{E^2 - \left(\frac{m_\sigma}{2}\right)^2}$$

$$Re\{\Sigma(p, T = 0)\} = \frac{3g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\pi^2}{16\pi^2} P.V. \int_{m_\pi}^\Lambda dE \frac{\sqrt{E^2 - m_\pi^2}}{E^2 - \left(\frac{m_\sigma}{2}\right)^2}$$

Los datos necesarios para realizar este cálculo son $m_\pi = 139.5 MeV$, $\Lambda = 1.4 GeV$, $m_\sigma = \{300, 500, 600\} MeV$, $g_{\sigma\pi\pi} = 14.02 GeV$, con esto la expresión final de la masa del mesón sigma es:

$$m_\sigma^2(T) = m_\sigma^2(T = 0) + \frac{3}{16} \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\pi^2}{\pi^2} P.V. \int_{m_\pi}^\Lambda \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{E^2 - \left(\frac{m_\sigma}{2}\right)^2} \right] 2n_B(E) +$$

$$\frac{3}{16} \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2 m_\pi^2}{\pi^2} P.V. \int_{m_\pi}^\infty \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \left[\frac{1}{E^2 - \left(\frac{m_\sigma}{2}\right)^2} \right]$$

(54)

En términos del cociente de su masa dependiente de T y a T=0, la expresión se modifica a

$$\frac{m_{\sigma}^2(T)}{m_{\sigma}^2(T=0)} = 1 + \frac{3}{16} \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2 m_{\pi}^2}{\pi^2 m_{\sigma}^2(T=0)} \left\{ P.V. \int_{m_{\pi}}^{\Lambda} dE \sqrt{E^2 - m_{\pi}^2} \frac{2n_B(E)}{[E^2 - (\frac{m_{\sigma}(T)}{2})^2]} + \right. \\ \left. P.V. \int_{m_{\pi}}^{\Lambda} dE \sqrt{E^2 - m_{\pi}^2} \frac{1}{E^2 - (\frac{m_{\sigma}(T)}{2})^2} \right\} \quad (55)$$

De la ecuación (55) se puede demostrar que el punto inicial es el punto (0,1) donde el eje coordenado es $(T, \frac{m_{\sigma}^2(T)}{m_{\sigma}^2(T=0)})$, de aquí se demostrará el comportamiento de la función, donde la hipótesis es que la función decrecerá con el aumento de la temperatura.

Mientras tanto, la parte imaginaria de la auto-energía, está dada por

$$Im \Sigma(p) = -\frac{V^2}{2\pi^2} \frac{\pi}{4} \sqrt{\left(\frac{m_{\sigma}}{2}\right)^2 - m_{\pi}^2} \frac{2n_B\left(\frac{m_{\sigma}}{2}\right)+1}{m_{\sigma}} \quad (56)$$

$$Im \Sigma(p) = -\frac{V^2}{16\pi} \sqrt{1 - 4 \frac{m_{\pi}^2}{m_{\sigma}^2}} \left[2n_B\left(\frac{m_{\sigma}}{2}\right) + 1 \right] \quad (57)$$

se puede observar que a T=0, la parte imaginaria de la autoenergía representa una razón de decaimiento, la cual es el cuadrado de la amplitud de decaimiento integrado sobre todo el espacio[37]

La interpretación física de la ecuación (57), es que para que exista la parte imaginaria, se requiere que el radical sea real, esto es:

$$1 - 4 \frac{m_{\pi}^2}{m_{\sigma}^2} > 0$$

$$m_\sigma^2 > 4m_\pi^2 = (2m_\pi)^2$$

La energía en reposo del sigma

$$E_\sigma = m_\sigma > 2m_\pi$$

Debe ser mayor que la energía en reposo de 2 piones, por tanto, el proceso de creación de un par de piones es energéticamente posible; los procesos que contienen una parte imaginaria son disipativos.

5.2. Función espectral del campo sigma

Otra forma de calcular la masa de la partícula es a través de la función espectral, la cual se define como [38]

$$S(p) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(\Delta(p))$$

$$S(p, T) = -2\pi \frac{\text{Im} \Sigma(p, T)}{[p^2 - m_\sigma^2(T=0) - \text{Re} \Sigma(p, T)]^2 + \text{Im}^2 \Sigma(p, T)} \quad (58)$$

Donde $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = p_0^2 = (m_\sigma(T))^2$

La función espectral se interpreta como la densidad de probabilidad de encontrar una partícula a temperatura T para un dado valor de p .

La masa de la partícula se define como el valor de p en $S(p)$ que corresponde al valor máximo; para cada valor de temperatura, se tendrá una función espectral distinta.

6. Resultados

Una vez obtenida la ecuación (55) que describe como cambia la masa del mesón sigma en función de la temperatura, uno puede observar que se trata de una ecuación implícita, cuya función incógnita forma parte de un integrando, esto complica las cosas ya que se necesitaría calcular numéricamente la integral por cada iteración. El integrando es una función decreciente y posee una discontinuidad en $E = m_\sigma(T)$ el cual es un valor que hay que evitar en orden de obtener un cálculo numérico convergente.

El cálculo será realizado con el apoyo del método numérico de Nystrom, el cual es un método que busca soluciones a ecuaciones integrales pasando de un problema continuo a uno discreto.

El concepto de temperatura crítica T_c en una teoría de campos está asociada con un cambio de fase; La NPT (Naive perturbation theory) reproduce algunas características de cambios de fase

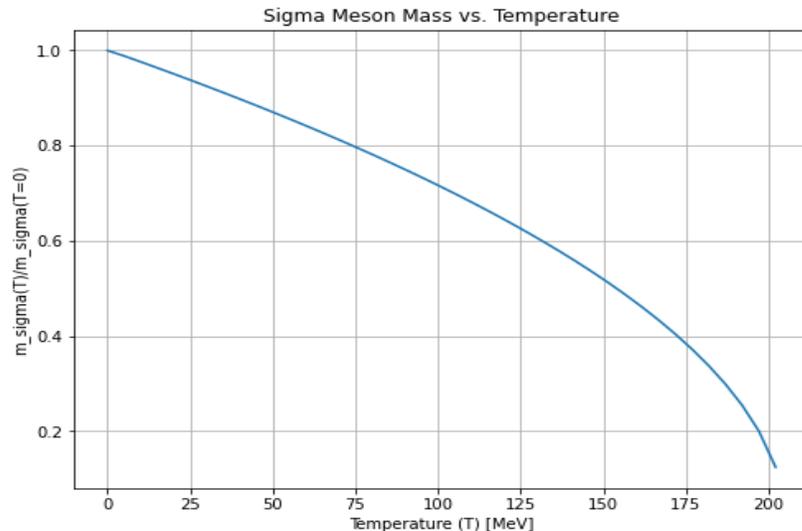


Fig. 5. Cociente de la masa del mesón sigma a temperatura T y a $T = 0$ con $m_\sigma^0 = 600MeV$ donde se observa una disminución en la masa con el aumento de la temperatura.

Se puede observar en La figura (5) que la masa del sigma tiende a decrecer al haber un aumento en la temperatura, decreciendo hasta llegar a un valor de cero a $T = 200MeV$ aproximadamente.

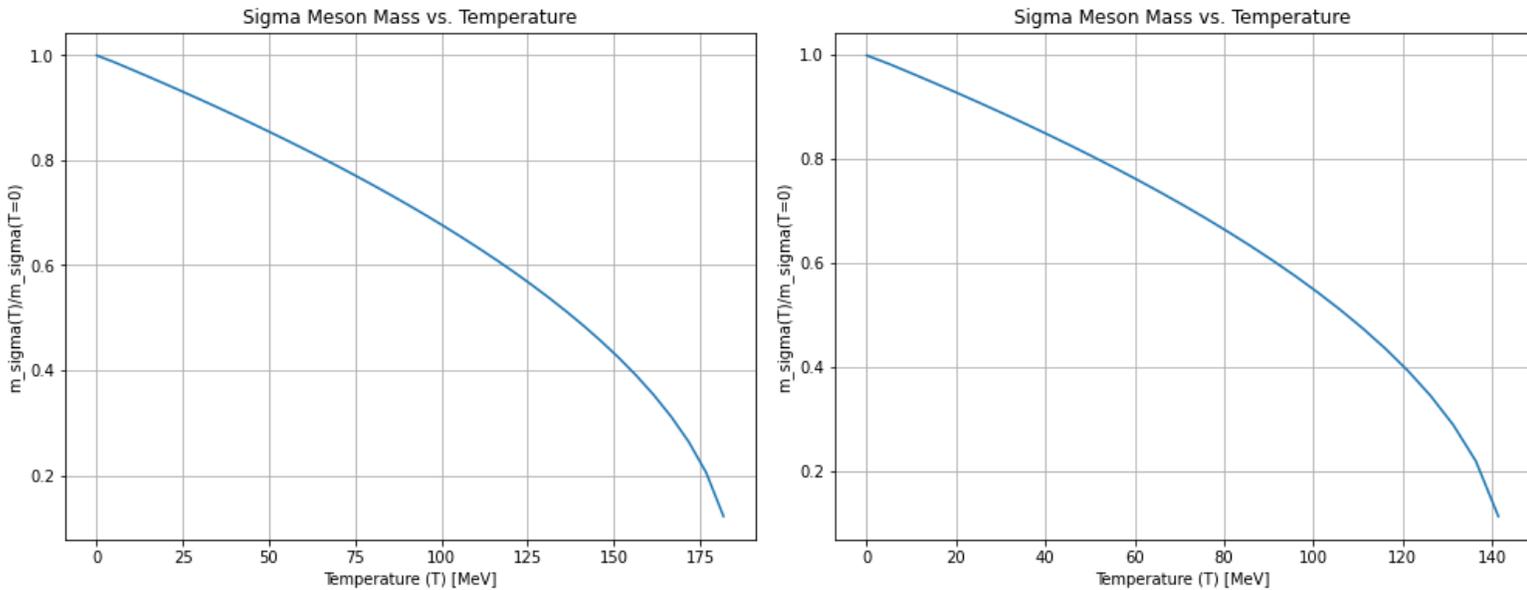


Fig. 6. (Izquierda) Cociente de la masa del mesón sigma a temperatura T y a $T = 0$ con $m_{\sigma}^0 = 500MeV$ donde se observa una disminución en la masa **(Derecha)** Cociente de la masa del mesón sigma a temperatura T y a $T = 0$ con $m_{\sigma}^0 = 350MeV$ donde se observa una disminución en la masa

Naturalmente, la tendencia de la curva se mantiene al variar el parámetro de la masa inicial, este decrecimiento en la masa es un indicador que la simetría quiral está siendo restaurada, esto debido a que la interacción entre quarks y gluones (responsable de dar masa efectiva a los hadrones) decrece.

Existen otras investigaciones acerca de la naturaleza de la masa del mesón sigma, dichas investigaciones poseen la misma tendencia de la curva a diferencia que al agregar más interacciones la curva llega a un valor mínimo y luego la masa vuelve a incrementarse [39]. Este incremento no es único del mesón sigma, los

piones también incrementan su masa una vez que la simetría quiral es restaurada; esto es ya que, al haber pasado la zona de desconfinamiento, ya no se pueden considerar los mesones sigmas ni los piones como estados ligados de quarks.

Este cálculo cumple la hipótesis de la investigación mas no da la información requerida para saber a qué temperatura aproximadamente existe una restauración de la simetría quiral, para ello, se necesita interpretar los resultados dados de la función espectral.

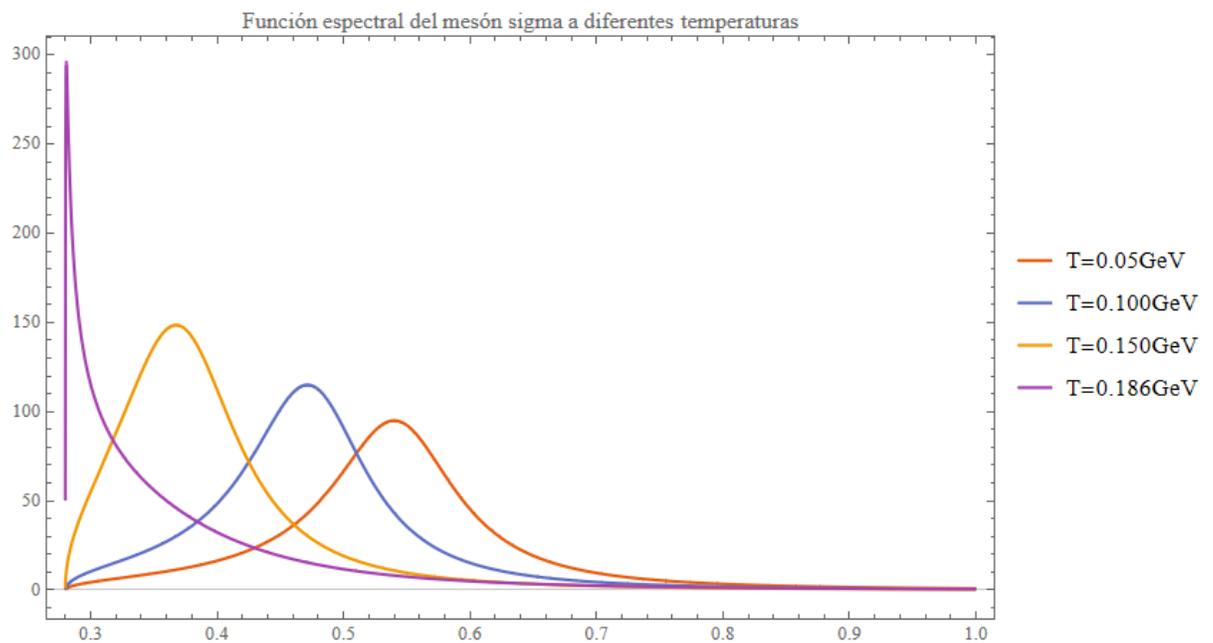


Fig. 7. Función espectral del mesón sigma con $m_{\sigma}^0 = 600MeV$ visualizada a diferentes temperaturas, donde se observa que a mayor temperatura, el ancho de la curva disminuye, disociándose en 2 piones en $T = 186MeV$

La figura (7) representan la función espectral para $m_{\sigma}^{T=0} = 600MeV$, donde en el eje coordenado, el eje horizontal corresponde a la energía "p" (masa del mesón) y el eje vertical es "S(p)"; recordando que la masa física del mesón, es el valor

de p que coincide con el máximo de la función se puede observar que con el aumento de temperatura este valor decrece, esto de acuerdo con la ecuación (53).

A medida que aumenta la temperatura se observa un pequeño incremento en el ancho de la curva seguida de una caída drástica en $p = 280 \text{ MeV}$; la función espectral permanece invariante al llegar a ese punto, esto es debido que, al llegar a cierta temperatura ($T \approx 186 \text{ MeV}$ en este caso), el mesón sigma se disocia en 2 piones, por ello el pico converge en el umbral de la masa de 2 piones, esto se interpreta como una restauración de simetría quiral.

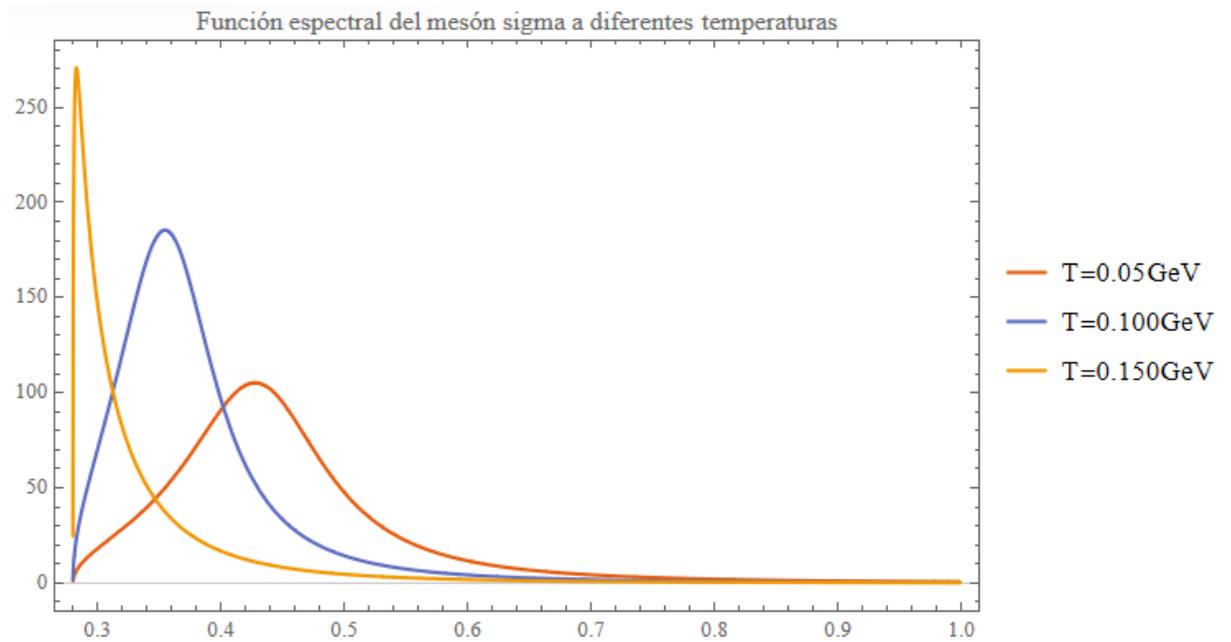


Fig. 8. Funciones espectrales del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 500 \text{ MeV}$ a diferentes temperaturas donde se observa una disminución en el ancho de la curva, disociándose en 2 piones en $T = 150 \text{ MeV}$

Para una masa inicial de $m_\sigma^0 = 500 \text{ MeV}$ la función espectral posee la misma tendencia; al llegar a $T = 150 \text{ MeV}$ la curva permanece invariante ante el aumento de temperatura; conforme la temperatura aumenta el ancho de curva decrece,

por tanto, la incertidumbre en la masa del mesón sigma decrece con el aumento de la temperatura.

Para el caso de $m_\sigma^0 = 350$, se puede observar que la incertidumbre rápidamente disminuye debido a que el parámetro inicial de la masa es un valor cercano al umbral de 2 veces la masa del pión; en este caso la restauración de la simetría quiral sucede a un valor aproximado de $T \approx 130MeV$, cuyo valor es menor de lo que otras investigaciones predicen; esto podría indicar una incoherencia alrededor de este valor en particular

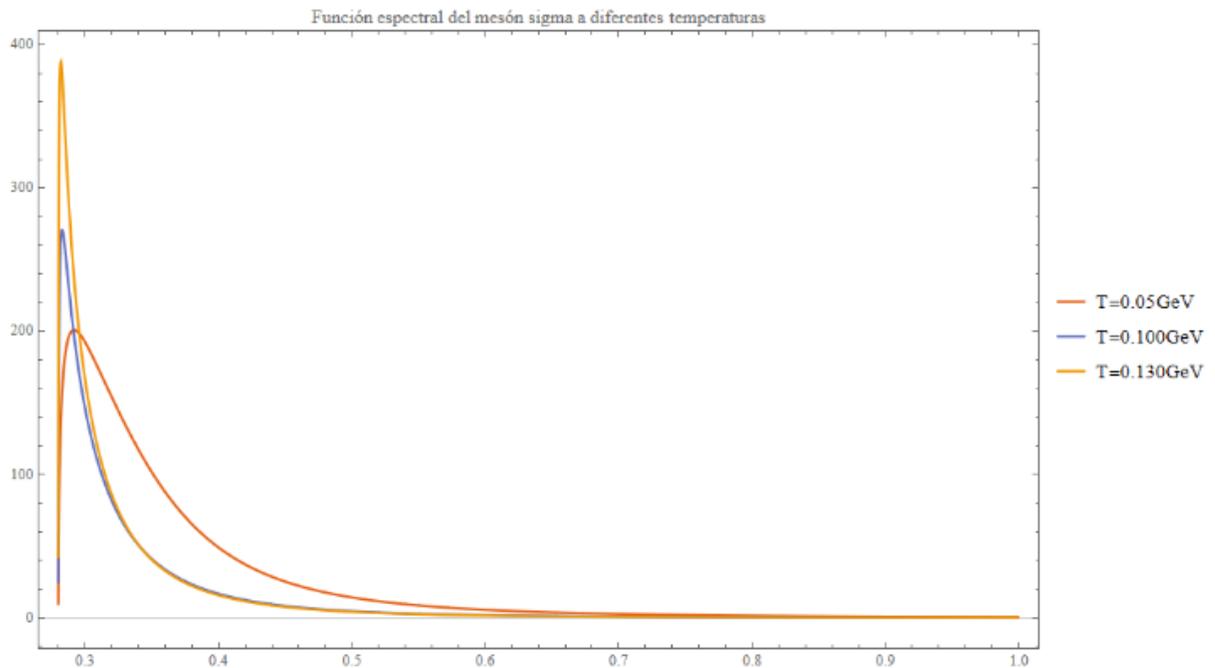


Fig. 9. Funciones espectrales del mesón sigma con $m_\sigma^0 = 350MeV$ a diferentes temperaturas donde se observa una rápida restauración de la simetría quiral en $T = 130MeV$

7. Conclusiones

Se ha usado la Naive perturbation theory como marco teórico para calcular el comportamiento de las propiedades térmicas del mesón sigma a diferentes valores iniciales para el mesón, tal que $m_\sigma = 350,500,600 \text{ MeV}$; se ha encontrado que la masa efectiva del mesón sigma disminuye con respecto al aumento de la temperatura, los resultados concuerdan con estudios previos donde muestran una tendencia general del sistema a restaurar la simetría quiral a altas temperaturas, el análisis de la función espectral también fue calculado con los valores iniciales del mesón antes mencionados, y se mostró que la posición del pico es desplazada, moviéndose hacia el valor del doble de la masa del pión con el aumento de la temperatura. Este resultado se interpreta como la tendencia al sistema de restaurar la simetría quiral, estos valores de temperatura están dentro del rango $130 - 186 \text{ MeV}$, el valor de la masa del mesón sigma que se acerca más al punto donde se restaura la simetría quiral en estudios previos más completos es $m_\sigma^0 = 500 \text{ MeV}$ el cual se disocia en 2 piones en $T \approx 150 \text{ MeV}$ [40].

Referencias

- [1] Sidharth, B. G., Murillo, J. C., Michelini, M. & Perea, C. (2020). *Fundamental Physics and Physics Education Research*. Springer Publishing.
- [2] Mata Carrizal, N. B. (2021). *Estudio del diagrama de fases de la cromodinamica cuantica en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio con diferentes métodos de regularización* [Doctorado]. UANL.
- [3] Schmitz, K. S. (2018). *Physical Chemistry: Multidisciplinary Applications in Society (English Edition)* (1.^a ed.). Elsevier.
- [4] Schmitz, K. S. (2016). *Physical Chemistry: Concepts and Theory (English Edition)* (1.^a ed.). Elsevier.
- [5] Weinberg, S. (1967). A Model of Leptons. *Physical Review Letters*, 19(21), 1264-1266. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.19.1264>
- [6] G. Bernardi, M. Carena, and T. Junk: "Higgs bosons: theory and searches", Reviews of Particle Data Group: Hypothetical particles and Concepts, 2007
- [7] *W bosons remain left-handed.* (s. f.). symmetry magazine. <https://www.symmetrymagazine.org/article/july-2015/w-bosons-remain-left-handed>
- [8] Morones-Ibarra, J. R., Enriquez-Perez-Gavilan, A., Rodriguez, A. I. H., Flores-Baez, F. V., Mata-Carrizalez, N. B. & Ordoñez, E. V. (2017). Chiral symmetry restoration and the critical end point in QCD. *Open Physics*, 15(1), 1039-1044. <https://doi.org/10.1515/phys-2017-0130>
- [9] David A Kirzhnits and Andrei D Linde. Symmetry behavior in gauge theories. *Annals of Physics*, 101(1):195–238, 1976
- [10] Guenther, J.N. Overview of the QCD phase diagram. *Eur. Phys. J. A* **57**, 136 (2021)

- [11] Peláez, J. R. (2016). From controversy to precision on the sigma meson: A review on the status of the non-ordinary $f_0(500)$ resonance. *Physics Reports*, 658, 1–111. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.09.001>
- [12] M. H. Johnson and E. Teller, *Phys. Rev.* 98, 783 (1955)
- [13] J. S. Schwinger, *Annals Phys.* 2, 407 (1957).
- [14] M. Gell-Mann and M. Levy, *Nuovo Cim.* 16, 705 (1960).
- [15] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* 122, 345 (1961). T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rept.* 247, 221 (1994) [hep-ph/9401310].
- [16] R.M. Barnett et al. (Particle Data Group), *Physical Review D* 54, 1 (1996)
- [17] Kunihiro, T. (2000). Roles of chiral symmetry and the sigma meson in hadron and nuclear physics. In *arXiv [hep-ph]*. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0009116>
- [18] V. V. Flambaum and E. V. Shuryak, *Phys. Rev. C* 76, 065206 (2007) [nucl-th/0702038 [nucl-th]]
- [19] Ibarra, J. R. M., Aguirre, A. J. G., & Flores-Baez, F. V. (2015). Properties of the sigma meson at finite temperature. *International Journal of Modern Physics. A, Particles and Fields, Gravitation, Cosmology*, 30(35), 1550214. <https://doi.org/10.1142/s0217751x15502140>
- [20] 12. T. K. Mukherjee, M. Huang and Q. S. Yan, *AIP Conf. Proc.* 1492, 171 (2012).
- [21] H.-X. Chen, A. Hosaka and S.-L. Zhu, *Phys. Rev. D* 76, 094025 (2007).
- [22] M. Albaladejo and J. A. Oller, *Phys. Rev. D* 86, 034003 (2012).
- [23] S. Chiku, *Prog. Theor. Phys.* 104, 1129 (2000).
- [24] Petropoulos, N. (1999). Linear sigma model and chiral symmetry at finite temperature. *Journal of Physics. G, Nuclear and Particle Physics: An Institute of Physics Journal*, 25(11), 2225–2241. <https://doi.org/10.1088/0954-3899/25/11/305>

- [25] Kunihiro, T. (2000). Roles of chiral symmetry and the sigma meson in hadron and nuclear physics. In *arXiv [hep-ph]*. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0009116>
- [26] Cordova, C., Dumitrescu, T. T., Intriligator, K., & Shao, S.-H. (2022). Snowmass white paper: Generalized symmetries in quantum field theory and beyond. In *arXiv [hep-th]*. <http://arxiv.org/abs/2205.09545>
- [27] Sazdjian, H. (2016). Introduction to chiral symmetry in QCD. In *arXiv [hep-ph]*. <http://arxiv.org/abs/1612.04078>
- [28] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio (1961), *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*, Phys. Rev. **122**, 345-358
- [29] Kumar, P. (1993). Quantum field theory and critical phenomena. By J. Zinn-Justin, Oxford Science publications, Clarendon Press, Oxford 1989. 914 pp. *International Journal of Quantum Chemistry*, 46(6), 745–745. <https://doi.org/10.1002/qua.560460607>
- [30] Lundberg, T., & Pasechnik, R. (2021). Thermal Field Theory in real-time formalism: concepts and applications for particle decays. *European Physical Journal. A, Hadrons and Nuclei*, 57(2). <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00288-5>
- [31] Millington, P. (2014). Imaginary Time Formalism. In *Thermal Quantum Field Theory and Perturbative Non-Equilibrium Dynamics* (pp. 73–79). Springer International Publishing.
- [32] T. Matsubara, A new approach to quantum statistical mechanics, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351
- [33] T. Nishikawa, O. Morimatsu, Y. Hidaka, Thermal sunset diagram for scalar field theories. Phys. Rev. D **68**(7), 076002 (2003)
- [34] T. Matsubara, A new approach to quantum statistical mechanics, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351.

- [35] Kapusta, J. I., & Wong, S. M. H. (2001). Two-loop self-energy and multiple scattering at finite temperature. *Physical Review D: Particles and Fields*, 64(4). <https://doi.org/10.1103/physrevd.64.045008>
- [36] Wolf, G., Friman, B., & Soyeur, M. (1998). In-medium ω -meson broadening and s-wave pion annihilation into $e+e^-$ pairs. *Nuclear Physics. A*, 640(1), 129–143. [https://doi.org/10.1016/s0375-9474\(98\)00450-3](https://doi.org/10.1016/s0375-9474(98)00450-3)
- [37] Weldon, H. A. (1983). Simple rules for discontinuities in finite-temperature field theory. *Physical Review D: Particles and Fields*, 28(8), 2007–2015. <https://doi.org/10.1103/physrevd.28.2007>
- [38] Fortmann, C. (2009). Single-particle spectral function for the classical one-component plasma. *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 79(1 Pt 2), 016404. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.016404>
- [39] Aguirre, G., & Jacob, A. (2017). *Hadrones en la materia nuclear a temperatura finita*. <http://eprints.uanl.mx/13978/>
- [40] Lutz, M., Klimt, S., & Weise, W. (1992). Meson properties at finite temperature and baryon density. *Nuclear Physics. A*, 542(4), 521–558. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(92\)90256-j](https://doi.org/10.1016/0375-9474(92)90256-j)

