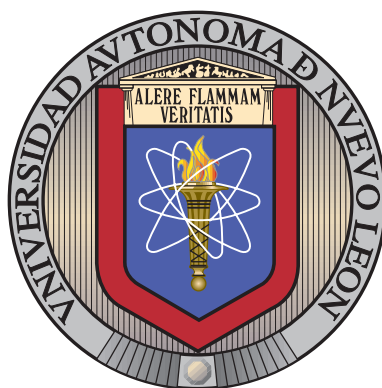


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CORRECCIONES RADIATIVAS EN EL PROCESO DE  
DISPERSIÓN DE MØLLER

POR

JESÚS SERVANDO ROJAS GARZA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CORRECCIONES RADIATIVAS EN EL PROCESO DE  
DISPERSIÓN DE MØLLER

POR

JESÚS SERVANDO ROJAS GARZA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “**Correcciones Radiativas en el proceso de dispersión de Møller**”, realizada por el alumno Jesús Servando Rojas Garza, con número de matrícula 1425472, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener al grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial.

El Comité de Tesis

---

Dr. José Rubén Morones Ibarra  
Presidente

---

Dr. Francisco Vicente Flores Báez  
Secretario

---

Dr. Edgar Martínez Guerra  
Vocal

Vo. Bo.

---

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco  
Subdirector de Posgrado  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Julio 2024

*A Mauricio, por regalarme su tiempo para escribir esta tesis, a mis padres por siempre estar presentes, a la Dra. Hilda Beatriz, su colegio y mis queridos alumnos, por albergarme y hacerme crecer como persona todo este último año.*

# AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco profundamente a mi director el Dr. José Rubén Morones Ibarra por la confianza, el tiempo y el conocimiento otorgados para la realización de este trabajo, al Dr. Edgar Martínez Guerra, por sus valiosos comentarios y correcciones sobre este proyecto, y por su empatía y apoyo continuo como coordinador del programa de posgrado. Agradezco también al Dr. Francisco Vicente Flores Báez por sus valiosas contribuciones como revisor de esta tesis. A mis amigos y compañeros Alan y Ramón por hacer más fáciles y divertidos los estudios de esta maestría. Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías por su apoyo económico para cursar este posgrado. A la Universidad Autónoma De Nuevo León por ser mi alma mater y en específico a la Facultad De Ciencias Físico Matemáticas por ser el lugar en el que mas sentido de pertenencia he encontrado jamás.

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La Dispersión de Møller . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Hipótesis . . . . .	3
1.4. Objetivos . . . . .	4
1.4.1. Objetivo General . . . . .	4
1.4.2. Objetivos particulares . . . . .	4
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. La ecuación de Schrödinger . . . . .	5
2.2. La ecuación de Klein-Gordon . . . . .	7
2.3. La ecuación de Dirac . . . . .	8
2.4. El Campo de Dirac . . . . .	10
2.5. La Matriz de dispersión $S$ . . . . .	11
2.6. Diagramas de Feynman . . . . .	12
2.7. Reglas de Feynman Para la EDQ . . . . .	13
2.8. Correcciones radiativas . . . . .	14
<b>3. Dispersión de Møller a nivel árbol</b>	<b>16</b>

---

3.1. Sección eficaz diferencial de dispersión $d\sigma$ . . . . .	16
3.2. La matriz invariante de Feynman $ \mathcal{M} ^2$ . . . . .	19
3.2.1. Cálculo del Término directo $\mathcal{M}_D$ . . . . .	20
3.2.2. Cálculo del Término de Intercambio $\mathcal{M}_E$ . . . . .	31
3.2.3. Cálculo del Término de Interferencia $2\Re\mathcal{M}_D\mathcal{M}_E$ . . . . .	35
<b>4. Correcciones al propagador del fotón</b>	<b>37</b>
4.1. Autoenergía del fotón . . . . .	38
4.2. Proceso de Regularización . . . . .	43
4.3. Proceso de Renormalización . . . . .	52
<b>5. Conclusiones</b>	<b>58</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.	Diagramas de Feynman a nivel árbol del proceso electrón-electrón. . . . .	1
2.	Diagrama de Feynman del proceso e-e con corrección al propagador del fotón. . . . .	2
3.	Posibles ordenamientos temporales para el proceso $a + b \rightarrow c + d$ . . . . .	12
4.	El diagrama de Feynman del proceso $a + b \rightarrow c + d$ . . . . .	13
5.	Correcciones radiativas [1]. . . . .	15
6.	Diagrama de Feynman de la dispersión de Møller a nivel árbol. . . . .	16
7.	Diagrama centro de momentums (C.M.). . . . .	17
8.	Suma de los Diagramas de Feynman del término directo y el término de intercambio. . . . .	20
9.	Término directo. . . . .	20
10.	Diagrama centro de momentums (C.M.) con ejes x,y,z. . . . .	27
11.	Término de Intercambio. . . . .	31
12.	Diagrama (C.M.) con ejes x,y,z término de intercambio. . . . .	32
13.	Dispersión de Møller a nivel árbol. . . . .	37
14.	Dispersión de Møller propagador modificado. . . . .	38
15.	Diagrama de Feynman para el propagador modificado. . . . .	38
16.	Los pares virtuales $e^+e^-$ actúan como dipolos generando un “apantallamiento” sobre la carga del electrón. . . . .	55



---

CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 LA DISPERSIÓN DE MØLLER

La dispersión de Møller es el nombre que se le da a la interacción (dispersión) entre electrón y electrón en la electrodinámica cuántica, que lleva el nombre del físico danés Christian Møller gracias a su publicación llamada “Electron-electron scattering cross section calculated using one-photon exchange (born) approximation.” En *Annalen der Physik*, 14:531, 1932 [2]. La interacción de electrones que se idealiza en la dispersión de Møller forma la base teórica de muchos fenómenos familiares, como la repulsión de electrones en el átomo de helio.

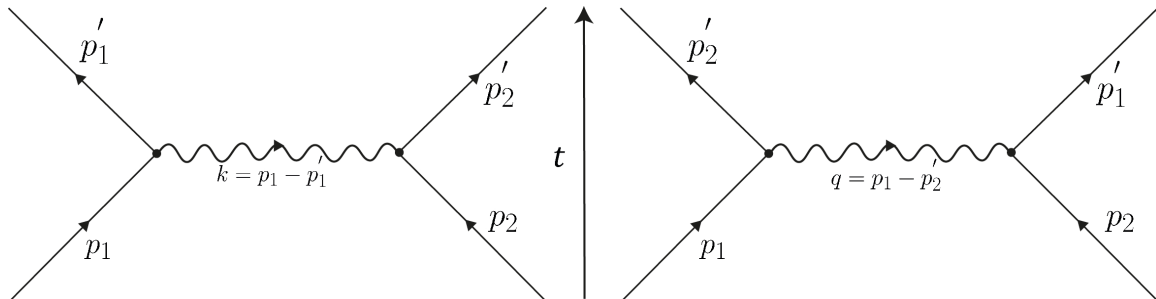


Figura 1: Diagramas de Feynman a nivel árbol del proceso electrón-electrón.

La dispersión de Møller sigue siendo un proceso fundamental dentro de la teoría de las interacciones de partículas. Y el problema de su descripción matemática ha sido un cambio de paradigma en la historia de la física reciente, el tratamiento matemático que se pretende desarrollar en el presente trabajo contribuirá a una descripción rápida y eficaz del proceso general, así como también se desarrollarán paso a paso las correcciones radiativas aplicadas al propagador del fotón y se realizara un análisis de las consecuencias de la introducción de estas correcciones.

Se puede expresar este proceso en la notación utilizada en física de partículas:

$$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$$

También se puede representar este proceso a nivel árbol con dos diagramas de Feynman Fig.1 y la representación que incluye las correcciones radiativas al propagador del fotón puede verse en la Fig.2.

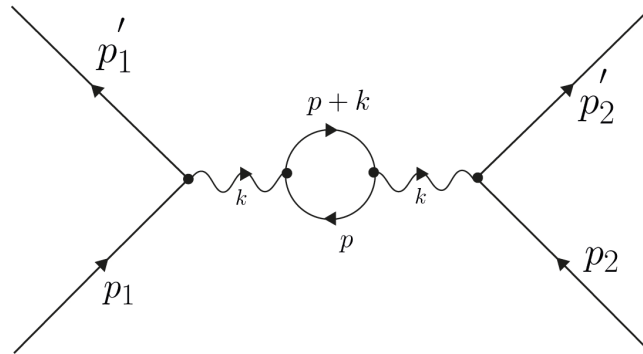


Figura 2: Diagrama de Feynman del proceso e-e con corrección al propagador del fotón.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

El estudio del proceso de dispersión elástica  $e - e$  es el caso ideal para analizar la interacción entre partículas puntuales. Problemas como protón-protón, protón-núcleo a bajas energías son analizados en base al problema  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ .

Este proceso es uno de los más fundamentales de la electrodinámica cuántica. La comprensión de la física y la matemática involucrada en la dispersión de Møller son necesarias para entender procesos más complejos en la física de partículas elementales y en la física nuclear. En su análisis teórico se involucrarán las técnicas matemáticas y metodológicas modernas que se emplean en los procesos de la física nuclear y de la física de altas energías. Este trabajo incluirá correcciones radiativas en el propagador del fotón. Aportando así un estudio moderno del problema de dispersión de Møller con los métodos de la teoría cuántica de campos.

### 1.3 HIPÓTESIS

Se puede realizar una descripción del proceso de dispersión electrón-electrón a nivel árbol e introducir y aplicar las correcciones radiativas correspondientes al propagador del fotón utilizando los métodos matemáticos más modernos de la Teoría Cuántica de Campos, en particular de la Electrodinámica Cuántica de una manera rápida, eficaz y clara.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Como objetivo general del trabajo de tesis se pretende realizar apoyados en el formalismo de la electrodinámica cuántica un cálculo teórico de la sección eficaz de dispersión para el proceso  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  a nivel árbol, también conocido como el proceso de dispersión de Møller, así como también introducir y calcular las correcciones radiativas correspondientes al propagador del fotón.

### 1.4.2 OBJETIVOS PARTICULARES

- Plantear el formalismo de la teoría cuántica relativista para los procesos de dispersión.
- Calcular la matriz invariante de Feynman  $\mathcal{M}$ .
- Analizar la corrección radiativa correspondiente al propagador del fotón.
- Aplicar el tratamiento e introducción de las correcciones en el propagador.
- Hacer los cálculos para el proceso de regularización de las divergencias.
- Realizar el proceso de renormalización de la carga.
- Presentar el resultado de los cálculos.

---

CAPÍTULO 2

# MARCO TEÓRICO

---

## 2.1 LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

La mecánica cuántica postula que las partículas libres se pueden describir mediante paquetes de ondas, que a su vez pueden descomponerse en una integral de Fourier de ondas planas:

$$\psi(\mathbf{x}, t) \propto \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \quad (2.1)$$

Siguiendo la hipótesis de De Broglie sobre la dualidad onda-partícula, la longitud de onda de una partícula en mecánica cuántica puede relacionarse con su momentum con  $\lambda = h/p$ , o de manera equivalente, con el vector de onda  $\mathbf{k}$  que se define como  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ . La frecuencia angular de la onda plana que describe una partícula se define según el postulado de Planck-Einstein,  $E = \hbar\omega$ . En unidades naturales con  $\hbar = 1$ , la hipótesis de De Broglie y el postulado de Planck-Einstein implican que  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$  y  $\omega = E$ , por lo tanto, la ecuación (2.1) se simplifica a:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = N \exp\{i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} - Et)\} \quad (2.2)$$

Donde  $N$  es la constante de normalización.

En la física clásica, la energía y el momentum de una partícula son variables dinámicas dependientes del tiempo y representadas por números reales. En la interpretación de Schrödinger de la mecánica cuántica, la función de onda contiene toda la información sobre el estado de la partícula. Las variables dinámicas de un estado cuántico, como la energía y el momentum, se obtienen a partir de la función de onda. Por lo tanto, en la interpretación de Schrödinger de la mecánica cuántica, las variables dependientes del tiempo de la dinámica clásica son remplazadas por operadores independientes del tiempo que actúan sobre la función de onda que si depende del tiempo. Debido a que la función

de onda contiene toda la información sobre un sistema, una cantidad observable física  $A$  corresponde a la acción de un operador mecánico cuántico  $\hat{A}$  sobre la función de onda [3]. Otro postulado de la mecánica cuántica es que el resultado de la medición del observable  $A$  será uno de los eigenvalores de la ecuación del operador actuando sobre la función de onda.

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad (2.3)$$

Para que  $A$  sea una observable física, los eigenvalores del operador correspondiente deben ser reales, lo que implica que el operador debe ser hermitiano. Esto establece el requerimiento de que:

$$\int \psi_1^* \hat{A}\psi_2 d\tau = \int [\hat{A}\psi_1]^* \psi_2 d\tau \quad (2.4)$$

Dado que la onda plana de (2.2) representa una partícula libre con energía  $E$  y momentum  $p$ , identificaremos los operadores de momentum y energía,  $\hat{\mathbf{P}}$  y  $\hat{E}$ , como:

$$\hat{\mathbf{P}} = -i\nabla \quad \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5)$$

Que actuando sobre la función de onda, arrojan sus respectivos eigenvalores:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}\psi &= -i\nabla\psi = \mathbf{P}\psi \\ \hat{E}\psi &= i\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \end{aligned}$$

En la dinámica clásica la energía total de un sistema puede expresarse como la suma de los términos de su energía potencial y su energía cinética,

$$E = T + V = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V$$

Donde  $E$  puede expresarse como  $H$  es decir el Hamiltoniano del sistema, la expresión equivalente en mecánica cuántica se define como los operadores de (2.5) actuando sobre la función de onda, esto da como resultado la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

## 2.2 LA ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON

Uno de los requisitos fundamentales para una formulación relativista de la mecánica cuántica es que la ecuación de onda asociada sea invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Sin embargo, la ecuación de Schrödinger, introducida en (2.6) no cumple con esta condición. La falta de invariancia de la ecuación de Schrödinger bajo transformaciones de Lorentz se deriva de su construcción a partir de la relación no relativista entre la energía de una partícula libre y su momentum [4]. El primer intento de construir una teoría relativista de la mecánica cuántica se dio con la ecuación de Klein-Gordon. La ecuación de onda de Klein-Gordon se obtiene al escribir la relación de energía-momentum de Einstein,

$$E^2 = \mathbf{P}^2 + m^2, \quad (2.7)$$

En forma de operadores actuando sobre la función de onda,

$$\hat{E} \psi(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{p}}^2 \psi(\mathbf{x}, t) + m^2 \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.8)$$

Usando los operadores de energía y momentum (2.5) se llega a la ecuación de onda de Klein-Gordon;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi - m^2 \psi \quad (2.9)$$

La ecuación de Klein-Gordon, es de segundo orden tanto en las derivadas espaciales como en las temporales, esta puede expresarse en forma manifiestamente invariante bajo transformaciones de Lorentz como,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \psi = 0, \quad (2.10)$$

La ecuación tiene soluciones en forma de onda plana, por lo tanto, las soluciones en forma de onda plana satisfacen la relación de energía-momentum de Einstein, donde la energía de la partícula está relacionada con su momentum por,

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad (2.11)$$

En la mecánica clásica, las soluciones de energía negativa pueden descartarse como no físicas. Sin embargo, en la mecánica cuántica, se requiere que todas las soluciones formen un conjunto completo de estados, y las soluciones de energía negativa no pueden descartarse

de esta manera. Aunque no es claro cómo interpretar las soluciones de energía negativa, hay un problema más grave con las densidades de probabilidad asociadas. Si se tienen las expresiones para la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad,

$$\rho = i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{j} = -i (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2.13)$$

Estas implican que las soluciones de energía negativa tienen densidades de probabilidad negativas no físicas. A partir de la presencia de soluciones de densidad de probabilidad negativa, se puede concluir que la ecuación de Klein-Gordon no proporciona una descripción coherente de todos los estados posibles de una partícula para un sistema relativista.

## 2.3 LA ECUACIÓN DE DIRAC

Los problemas con la ecuación de Klein-Gordon llevaron a Dirac a buscar una formulación alternativa de la mecánica cuántica relativista. La ecuación que encontró no solo resolvió el problema de las densidades de probabilidad negativas, sino que también proporcionó una descripción natural del espín intrínseco y los momentums magnéticos de los fermiones de espín medio [3]. Dirac buscó una ecuación de onda que fuera de primer orden tanto en sus derivadas espaciales como temporales,

$$E\hat{\psi} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi \quad (2.14)$$

lo cual, en términos de los operadores de energía y momentum, puede ser escrito como,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y \frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta m)\psi \quad (2.15)$$

Si las soluciones representan partículas relativistas, también deben satisfacer la relación de energía-momentum de Einstein, lo que implica que satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. Este requisito impone fuertes restricciones sobre las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  explícitamente las siguientes,

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I \quad (2.16)$$

$$\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \quad (2.17)$$

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \quad (j \neq k) \quad (2.18)$$



Donde  $I$  representa la unidad. Las relaciones anticonmutativas impuestas por (2.17) y (2.18) no pueden ser satisfechas por cualquier tipo de número, los objetos matemáticos más simples que pueden satisfacerlas son las matrices, por la propiedad cíclica de las trazas, con (2.17) y (2.18) se puede probar que,

$$Tr(\alpha_i) = -Tr(\alpha_i) \quad (2.19)$$

Debido a que la suma de los eigenvalores de una matriz es igual a su traza, y aquí las matrices tienen eigenvalores de  $+1$  o  $-1$ , la única forma en que la traza puede ser cero es si las matrices  $\alpha_i$  y  $\beta$  tienen dimensión par. Por lo tanto,  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  y  $\beta$  son cuatro matrices hermíticas mutuamente anticonmutativas de dimensión par y traza cero. Dado que solo hay tres matrices mutuamente anticonmutativas de  $2 \times 2$  y traza cero, el objeto de menor dimensión que puede representar  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  y  $\beta$  son matrices de  $4 \times 4$ . Por lo tanto, el Hamiltoniano de Dirac de  $\hat{H} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)$  es una matriz de operadores de  $4 \times 4$  que debe actuar sobre una función de onda de cuatro componentes, conocida como un espínor de Dirac.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

El álgebra de la ecuación de Dirac está completamente definida por las ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.18). Sin embargo, es conveniente introducir una forma explícita para  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  y  $\beta$ . La elección convencional es la representación de Dirac-Pauli, basada en las matrices de espín de Pauli.

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Donde,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

La ecuación de Dirac en su forma covariante puede ser expresada como,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.21)$$

Donde  $\gamma^\mu$  son las matrices gamma de Dirac definidas como,

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^1 \equiv \beta\alpha_x, \quad \gamma^2 \equiv \beta\alpha_y, \quad \gamma^3 \equiv \beta\alpha_z \quad (2.22)$$

Cabe destacar que las matrices satisfacen las relaciones de anticonmutación de Clifford y las condiciones de Hermiticidad.

## 2.4 EL CAMPO DE DIRAC

En la segunda cuantización del campo de Dirac, se expande el campo de Dirac en términos de modos de oscilación. Esto significa que se descompone el campo en términos de sus componentes de onda plana [1]. La función de onda plana describe cómo se comporta el campo en el espacio y el tiempo. El campo de Dirac se puede expandir en términos de modos de oscilación de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (u_s(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p})e^{-ipx} + v_s(\mathbf{p})b_s^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx})$$

Donde:

- $\sum_s$  representa la suma sobre todos los posibles estados de espín  $s$ .
- La integral  $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$  se realiza sobre todo el espacio de momentums.
- $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$  es un factor de normalización que asegura que la densidad de probabilidad esté bien definida.
- $u_s(\mathbf{p})$  y  $v_s(\mathbf{p})$  son los eigenvectores de la matriz de Dirac para partículas y antipartículas, respectivamente.
- $a_s(\mathbf{p})$  y  $b_s^\dagger(\mathbf{p})$  son los operadores de aniquilación y creación de partículas y antipartículas, respectivamente.
- $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  es la energía de la partícula.
- $e^{-ipx}$  y  $e^{ipx}$  son las ondas planas.

Ademas, los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de conmutación canónicas anticonmutativas (o relaciones de anticonmutación de fermiones) y también satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\{a_r(\mathbf{p}), a_s^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

$$\{b_r(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

$$\{a_r(\mathbf{p}), a_s(\mathbf{q})\} = 0$$

$$\{b_r(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{q})\} = 0$$

Los operadores de energía, momentum y carga para el campo de Dirac en términos de los operadores de creación y aniquilación son:

- Operador de Energía ( $\mathcal{H}$ ):

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_s^\dagger(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p}) + b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}))$$

- Operador de Momentum ( $\mathbf{P}$ ):

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_s^\dagger(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p}) + b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}))$$

- Operador de Carga ( $Q$ ):

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_s^\dagger(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p}) - b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}))$$

Donde  $a_s^\dagger(\mathbf{p})$  y  $b_s^\dagger(\mathbf{p})$  son los operadores de creación de partículas y antipartículas, respectivamente, mientras que  $a_s(\mathbf{p})$  y  $b_s(\mathbf{p})$  son los operadores de aniquilación. Los sub-índices  $s$  denotan los distintos estados de espín. Las integrales son sobre todo el espacio de momentums.

## 2.5 LA MATRIZ DE DISPERSIÓN $S$

La matriz de dispersión  $S$  es una matriz que actúa en el espacio de Hilbert de los estados de entrada y salida del sistema [1]. En el contexto de la teoría cuántica de campos,  $S$  se expresa de la siguiente manera:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \} \quad (2.23)$$

Donde:

- $T$  es el operador de ordenamiento temporal.
- $\mathcal{H}$  es la densidad Hamiltoniana de interacción, expresado en términos de los operadores de campo.
- La integral se realiza sobre todo el espacio.

Esta expresión representa la evolución temporal de los operadores de campo bajo la influencia de la interacción, donde  $S$  codifica cómo los estados de entrada se transforman en estados de salida debido a la interacción.  $S$  es de suma importancia ya que la amplitud de probabilidad de que en un sistema se pase de un estado inicial a uno final esta dada por  $\langle f | S | i \rangle$ .

## 2.6 DIAGRAMAS DE FEYNMAN

Los diagramas de Feynman son una parte esencial del lenguaje de la física de partículas. Ellos son una poderosa representación de las transiciones entre estados en la teoría cuántica de campos y representan todos los posibles ordenamientos temporales en los que puede ocurrir un proceso [4].

Por ejemplo, para el proceso  $a + b \rightarrow c + d$  tenemos los diagramas ordenados en el tiempo de la Fig. 3, en el de la izquierda la partícula  $a$  emite un fotón que después es recibido por la partícula  $b$ , y en el de la derecha es  $b$  quien emite el fotón y  $a$  es quien lo absorbe. Estos son los dos posibles ordenamientos temporales en los que puede ocurrir el proceso.

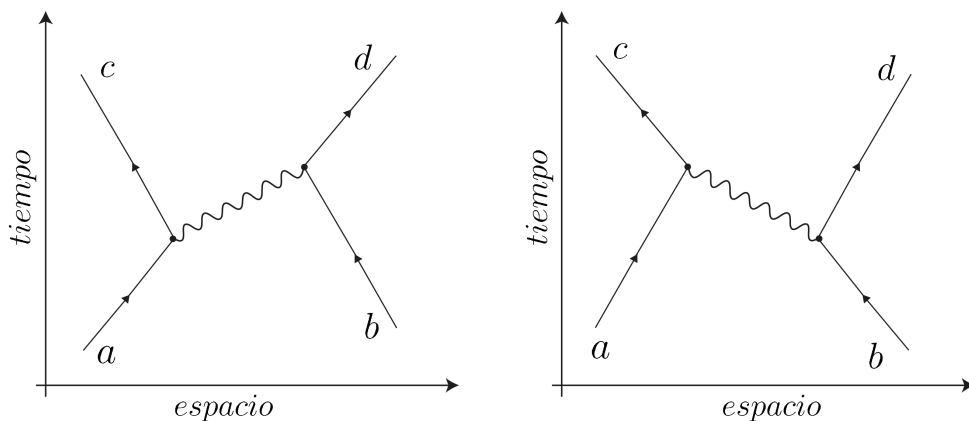


Figura 3: Posibles ordenamientos temporales para el proceso  $a + b \rightarrow c + d$ .

La suma de estos posibles ordenamientos temporales se representa mediante un diagrama de Feynman. La parte inferior del diagrama representa el estado inicial y la parte superior representa el estado final. Todo lo intermedio representa la manera en que ocurrió la interacción, independientemente del orden en el tiempo. Por lo tanto, el diagrama de Feynman para los procesos de dispersión  $a + b \rightarrow c + d$ , que se muestran en la Fig.3, representa la suma de los dos posibles ordenamientos temporales Fig.4.

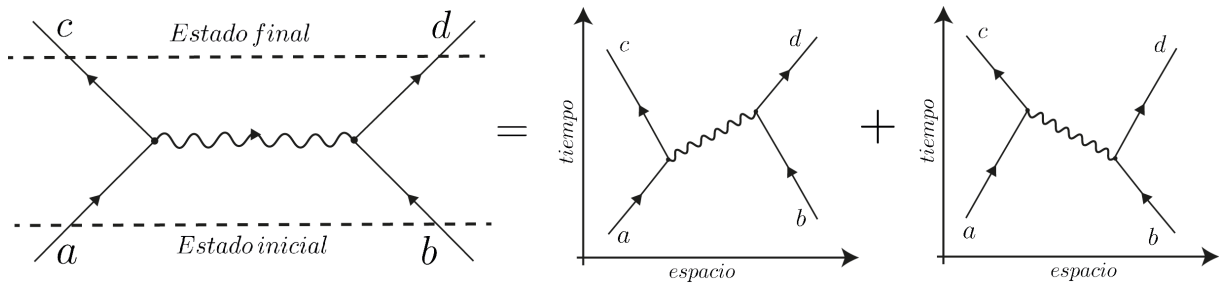


Figura 4: El diagrama de Feynman del proceso  $a + b \rightarrow c + d$ .

Las partículas intercambiándose que aparecen en la parte intermedia de un diagrama de Feynman se denominan partículas virtuales. Una partícula virtual es una construcción matemática que es la consecuencia de sumar todos los posibles diagramas ordenados en el tiempo y sumar los posibles estados de polarización de la partícula de intercambio [4].

Lo mas usual es que los diagramas de Feynman se presenten en el espacio de momentums ya que esto permite simplificar la matemática asociada a estos.









## 2.7 REGLAS DE FEYNMAN PARA LA EDQ

Los elementos de la matriz  $S$ , con los cuales se realizan distintos tipos de cálculos, exhiben una estructura definida que nos permite asociar factores individuales y características con los diferentes aspectos de su correspondiente diagrama de Feynman de la interacción, esto nos permite definir una serie de reglas con las cuales se puede construir la expresión matemática directamente de los diagramas de Feynman. Es importante definir  $\mathcal{M}$  como:

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)} \quad (2.24)$$

Donde  $\mathcal{M}$  es conocida como la «matriz invariante de Feynman» o «amplitud de Feynman», la contribución  $\mathcal{M}^{(n)}$  viene del  $n$ -ésimo orden de la perturbación del termino  $S^{(n)}$  [1]. La amplitud de Feynman se obtiene conectando líneas internas y externas a los vértices del diagrama, donde en cada vértice confluyen los campos de las líneas que lo tocan, y

donde también para cada vértice se conserva la energía, así  $\mathcal{M}^{(n)}$  se obtiene en base a las siguientes reglas [1]:

- Por cada vértice escríbase un factor  $ie\gamma^\alpha$ .
- Por cada línea fotónica interna con momentum  $k$   escríbase un factor  $iD_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}$ .
- Por cada línea fermiónica interna etiquetada con momentum  $p$   escríbase un factor  $iS_{F\alpha\beta}(p) = i\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}$ .
- Por cada línea externa se escriben los factores:
  - Para cada electrón inicial con momentum  $p$  ,  $u(p, s)$
  - Para cada electrón final con momentum  $p$  ,  $\bar{u}(p, s)$
  - Para cada positrón inicial con momentum  $p$  ,  $\bar{v}(p, s)$
  - Para cada positrón final con momentum  $p$  ,  $v(p, s)$
  - Para cada fotón inicial con momentum  $k$  ,  $\epsilon(k, s)$
  - Para cada fotón final con momentum  $k$  ,  $\epsilon(k, s)$
- Los factores de los espinores para cada línea fermiónica están ordenados de tal forma que se leen de derecha a izquierda, apareciendo en la misma secuencia como si se siguiera la línea fermiónica en la dirección de sus flechas.
- Por cada loop fermiónico cerrado tome la traza y multiplíquelo por un factor  $(-1)$ .
- Por cada loop cerrado intégrese con respecto al cuadrimomentum interno  $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ .

## 2.8 CORRECCIONES RADIATIVAS

Las correcciones radiativas son ajustes que se aplican a los cálculos teóricos en física de partículas y teoría cuántica de campos para tener en cuenta los efectos de las partículas virtuales. Estas correcciones se manifiestan al tener en cuenta órdenes superiores al segundo orden en teoría de perturbaciones, se espera que las correcciones sean del orden de la constante de estructura fina  $\alpha$ . Sin embargo, al realizar dichos cálculos nos encontramos con integrales divergentes.

Las correcciones se utilizan para mejorar la precisión de los cálculos teóricos y hacerlos consistentes con los resultados experimentales observados. Aunque en muchos casos

estas correcciones son pequeñas en comparación con los valores principales de las cantidades medidas, en situaciones de alta precisión o en cálculos de alta energía, estas correcciones pueden ser significativas y deben ser tenidas en cuenta para obtener resultados precisos y confiables.

Se pueden aplicar a todos los órdenes en teoría de perturbaciones, de modo que es posible calcular con una precisión extraordinariamente alta. La total concordancia de estas predicciones con experimentos igualmente precisos (por ejemplo, para los momentos magnéticos anómalos de los leptones), constituye uno de los grandes triunfos de la física [1].

Ejemplos de correcciones radiativas incluyen la auto energía de los electrones Fig.5 a), que provoca un cambio en su masa efectiva, y los efectos de las interacciones electromagnéticas entre partículas cargadas en procesos de dispersión, también está la auto energía del fotón Fig.5 b), que provoca una redefinición de la carga eléctrica del electrón. Otra corrección radiativa es la corrección al vértice Fig.5 c). Cabe mencionar que en el presente trabajo solo se calculara la auto energía del fotón.

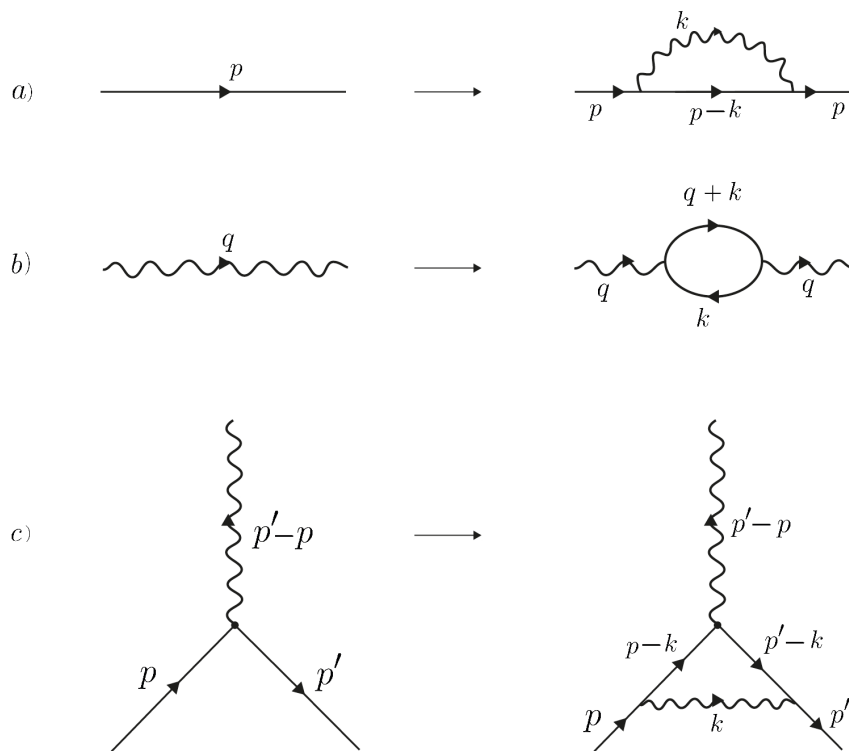


Figura 5: Correcciones radiativas [1].

---

CAPÍTULO 3

# DISPERSIÓN DE MØLLER A NIVEL ÁRBOL

---

En el presente capítulo se procederá a realizar una descripción del proceso de la dispersión de Møller a nivel árbol (a segundo orden en teoría de perturbaciones), es decir, sin la introducción de loops que impliquen el tratamiento con partículas virtuales en el propagador del fotón dentro del diagrama de Feynman, considérese la interacción de dos electrones  $e$  cada uno con cuadrimomentum  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente antes de la interacción (iniciales) y  $p'_1$  y  $p'_2$  después de la interacción (finales), que interactúan mediante el intercambio de un fotón con cuadrimomentum  $k = p_1 - p'_1$  en el término directo y  $q = p_1 - p'_2$  en el término de intercambio.

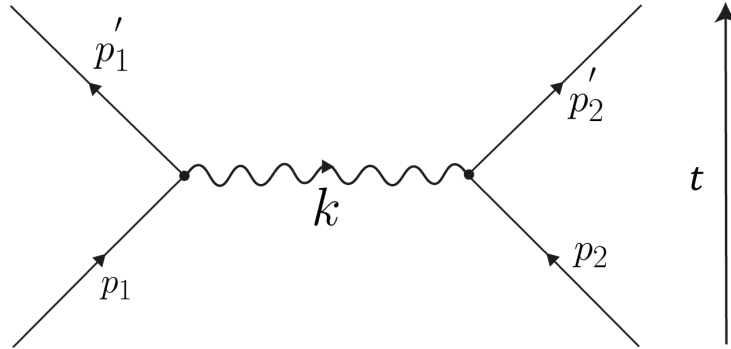


Figura 6: Diagrama de Feynman de la dispersión de Møller a nivel árbol.

## 3.1 SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL DE DISPERSIÓN $d\sigma$

A fin de poner a prueba la teoría se procederá a encontrar un observable, la sección eficaz diferencial de dispersión  $d\sigma$ , su expresión general esta dada por la ecuación [1]:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum p'_f - \sum p_i \right) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel}} \left( \prod_l (2m_l) \right) \left( \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (3.1)$$



Donde en el argumento de la delta de Dirac se manifiesta la conservación del cuadrimomentum, ya que para que la delta tenga valor su argumento debe ser cero es decir  $p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2 = 0$ . El siguiente término de la ecuación se relaciona directamente con la definición de  $d\sigma$  e incluye una corrección que relaciona al flujo de electrones detectados con el flujo de electrones iniciales, después se tiene  $m_l$  que es la masa de las partículas involucradas, en este caso las masas son iguales y son la del electrón, seguidamente aparece la densidad de estados y por último la matriz invariante de Feynman  $\mathcal{M}$ .

Entonces para el caso particular de la dispersión de Møller se tiene:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel}} (2m)^4 \frac{d^3 \mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3 \mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.2)$$

Para simplificar los cálculos es importante realizar una correcta elección del marco de referencia en este caso se realizarán teniendo como origen el centro de momentums (C.M.) representado en la Fig.7,

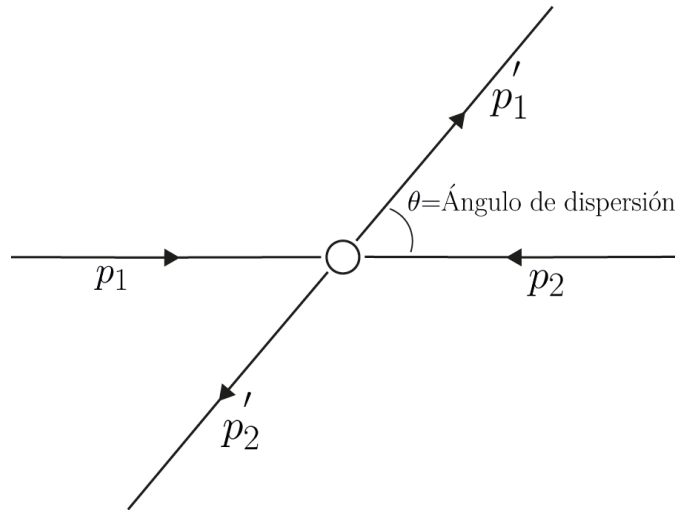


Figura 7: Diagrama centro de momentums (C.M.).

Desde este marco de referencia se pueden obtener las siguientes relaciones entre los tri-momentums y sus respectivas energías:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1), \quad p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2) = (E_2, -\mathbf{p}_1) \quad (3.3)$$

$$p'_1 = (E'_1, \mathbf{p}'_1), \quad p'_2 = (E'_2, \mathbf{p}'_2) = (E'_2, -\mathbf{p}'_1) \quad (3.4)$$

Por la conservación de la energía,

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2, \quad E_{CM} = E_1 + E_2 \quad (3.5)$$

Separando la delta de Dirac en 2 partes, una con la parte de las energías y la otra con los trimomentums:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(E'_1 + E'_2 - E_{CM}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel}} (2m)^4 \cdot \frac{d^3 \mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3 \mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.6)$$

Simplificando,

$$d\sigma = \frac{\delta(E'_1 + E'_2 - E_{CM}) 4m^4}{(2\pi)^2 4E'_1 E'_2 E_1 E_2 v_{rel}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \cdot d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_2 |\mathcal{M}|^2 \quad (3.7)$$

El próximo paso es integrar respecto a  $d^3 \mathbf{p}'_2$ , esto da como resultado:

$$d\sigma = \frac{4m^4 \delta(E'_1 + E'_2 - E_{CM})}{(2\pi)^2 4E'_1 E'_2 E_1 E_2 v_{rel}} d^3 \mathbf{p}'_1 |\mathcal{M}|^2 \Big|_{\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1} \quad (3.8)$$

Usando la identidad,

$$d^3 \mathbf{p}'_1 = |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega'_1 \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.8) se obtiene,

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{C.M.} = \frac{4m^4 \delta(E'_1 + E'_2 - E_{CM})}{16\pi^2 E'_1 E'_2 E_1 E_2 v_{rel}} |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| |\mathcal{M}|^2 \quad (3.10)$$

Para realizar ahora la integral respecto a  $d|\mathbf{p}'_1|$  en la ecuación (3.10) donde los integrandos están en el argumento de la delta de Dirac, se usará el siguiente resultado de la integral de una delta de Dirac:

$$\delta[f(|\mathbf{p}'_1|)] = \frac{\delta[|\mathbf{p}'_1| - |\mathbf{p}_i|]}{|\mathbf{p}'_1| \left[ \frac{1}{E'_1} + \frac{1}{E'_2} \right]} \quad (3.11)$$

Donde  $|\mathbf{p}_i|$  en el resultado anterior es el cero de  $f(|\mathbf{p}'_1|)$  que corresponde a  $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  así  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$ ,

$$\therefore |\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2| = |-\mathbf{p}'_2| = |\mathbf{p}_2| \quad (3.12)$$

En el centro de momentums ya que  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ ,

Sustituyendo (3.11) en (3.10), se obtiene:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{C.M.} = \frac{4m^4}{16\pi^2 E'_1 E'_2 E_1 E_2 v_{rel}} \frac{|\mathbf{p}'_1|^2 |\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}'_1| \left( \frac{E'_1 + E'_2}{E'_1 E'_2} \right)} \quad (3.13)$$

Simplificando,

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{C.M.} = \frac{4m^4}{16\pi^2 (E'_1 + E'_2) E_1 E_2} |\mathbf{p}'_1| |\mathcal{M}|^2 \quad (3.14)$$

$$E_{CM} = E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2,$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{C.M.} = \frac{4m^4}{16\pi^2 E_{CM} E_1 E_2} |\mathbf{p}'_1| |\mathcal{M}|^2 \Bigg|_{\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1} \quad (3.15)$$

Solo queda realizar el cálculo de la matriz invariante de Feynman, en la dispersión de Møller deben de considerarse para el cálculo de su amplitud tanto el término directo como el término de intercambio ya que ambos términos representan las dos posibles formas en las que puede suceder la dispersión (representados en la Fig.8). Para obtener una correcta representación del proceso es indispensable se consideren estas dos posibilidades de la interacción.

### 3.2 LA MATRIZ INVARIANTE DE FEYNMAN $|\mathcal{M}|^2$

$\mathcal{M}$  es la matriz invariante de Feynman la cual a su vez es la suma de las respectivas matrices del término directo ( $\mathcal{M}_D$ ) y del término de intercambio ( $\mathcal{M}_E$ ) por lo tanto  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D + \mathcal{M}_E$ , así que  $|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_D + \mathcal{M}_E|^2 = |\mathcal{M}_D|^2 + |\mathcal{M}_E|^2 + 2Re\mathcal{M}_D\mathcal{M}_E$ , para encontrar cada uno de estos términos se usaran las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica en particular las siguientes:

- Por cada vértice escríbase un factor  $ie\gamma^\alpha$ .

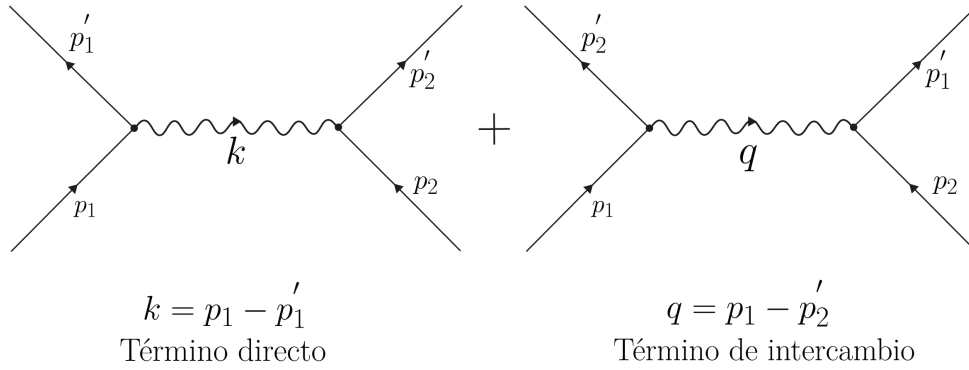


Figura 8: Suma de los Diagramas de Feynman del término directo y el término de intercambio.

- Por cada línea fotónica interna etiquetada con momentum  $k$  escribese un factor  $\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}$ .
- Por cada línea fermiónica externa escribanse los factores:
  - Para cada electrón inicial con momentum  $p$   $u(p, s)$
  - Para cada electrón final con momentum  $p'$   $\bar{u}(p', s')$

### 3.2.1 CÁLCULO DEL TÉRMINO DIRECTO $\mathcal{M}_D$

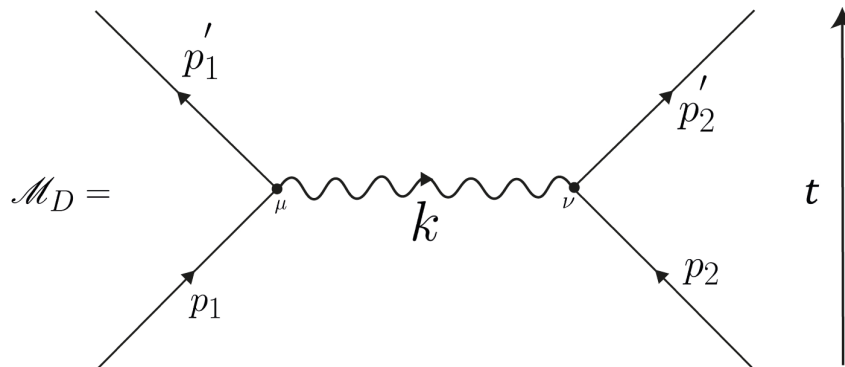


Figura 9: Término directo.

Se encontrará primeramente el término  $\mathcal{M}_D$ , aplicando estas reglas al diagrama del término directo Fig.9 de izquierda a derecha y en contra del tiempo yendo en contra de la línea fermiónica externa hasta llegar al vértice izquierdo, se escribe el vértice y se continúa por la línea fermiónica, para después escribir el propagador y de nuevo por la línea fermiónica de la derecha en contra del tiempo hasta llegar al vértice derecho y finalizar con la última línea fermiónica externa, y se encuentra que su correspondiente expresión matemática asociada es la siguiente:

$$\mathcal{M}_D = \bar{u}(p'_1, s'_1) i e \gamma^\mu u(p_1, s_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}(p'_2, s'_2) i e \gamma^\nu u(p_2, s_2) \quad (3.16)$$

Reagrupando a la izquierda todos los términos de la expresión que no son matrices y por lo tanto conmutan, se obtiene:

$$\mathcal{M}_D = -i^3 e^2 \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\nu u(p_2, s_2) \quad (3.17)$$

Posteriormente se aplica  $g_{\mu\nu}$  a  $\gamma^\nu$ ,  $g_{\mu\nu} \gamma^\nu = \gamma_\mu$  y se omite  $i\epsilon$  de la expresión al ser este término una prescripción de Feynman que se introduce para garantizar que las singularidades en el plano complejo de  $k^2$  estén correctamente desplazadas, esto garantiza que las integrales que involucran a el propagador sean convergentes, pero en el caso de la dispersión de Møller a nivel árbol se vuelve innecesario al no presentar divergencias, así reducimos la expresión a:

$$\mathcal{M}_D = \frac{-i^3 e^2}{k^2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \quad (3.18)$$

Por otra parte:

$$|\mathcal{M}_D|^2 = \mathcal{M}_D \mathcal{M}_D^\dagger = \frac{e^4}{k^4} \left[ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right] \cdot \left[ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\nu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\nu u(p_2, s_2) \right]^\dagger \quad (3.19)$$

Obsérvese que los términos de la forma  $\bar{u}(a) \gamma^\mu u(b)$  son cantidades escalares y no matrices puesto que  $u$  es un espinor de Dirac (una matriz columna) y  $\bar{u}$  es el conjugado de la transpuesta de  $u$  (una matriz fila) mientras que las gammas de Dirac son matrices  $4 \times 4$ , es decir todo el término equivale a una multiplicación como sigue;  $(1 \times 4)(4 \times 4)(4 \times 1) = (1 \times 1)$ , esto es de especial importancia puesto que se pueden agrupar y mover estos términos a conveniencia.

Se trabajara ahora solo con el segundo término a fin de eliminar la daga de la expresión, aplicando el siguiente desarrollo y usando algunas propiedades de las matrices:

$$\left[ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\nu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\nu u(p_2, s_2) \right]^\dagger = \quad (3.20)$$

$$\left[ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\nu u(p_1, s_1) \right]^\dagger \left[ \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\nu u(p_2, s_2) \right]^\dagger = \quad (3.21)$$

$$\left[ u^\dagger(p'_1, s'_1) \gamma^0 \gamma^\nu u(p_1, s_1) \right]^\dagger \left[ u^\dagger(p'_2, s'_2) \gamma^0 \gamma_\nu u(p_2, s_2) \right]^\dagger = \quad (3.22)$$

$$\left[ u^\dagger(p_1, s_1) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} u(p'_1, s'_1) \right] \left[ u^\dagger(p_2, s_2) \gamma_\nu^\dagger \gamma^{0\dagger} u(p'_2, s'_2) \right] \quad (3.23)$$

En la ecuación (3.23) se introdujo la matriz identidad de la siguiente manera  $I = (\gamma^0)^2$  de forma que esta no altera las matrices, después se agrupan las  $\gamma^0$  como se muestra,

$$\left[ u^\dagger(p_1, s_1) (\gamma^0)^2 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} u(p'_1, s'_1) \right] \left[ u^\dagger(p_2, s_2) (\gamma^0)^2 \gamma_\nu^\dagger \gamma^{0\dagger} u(p'_2, s'_2) \right] \quad (3.24)$$

y como  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ ,

$$\left[ (u^\dagger(p_1, s_1) \gamma^0) (\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0) u(p'_1, s'_1) \right] \left[ (u^\dagger(p_2, s_2) \gamma^0) (\gamma^0 \gamma_\nu^\dagger \gamma^0) u(p'_2, s'_2) \right] \quad (3.25)$$

Usando ahora las siguientes propiedades  $u^\dagger \gamma^0 = \bar{u}$ ,  $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$  y  $\gamma^0 \gamma_\nu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\nu$  se sustituye, obteniendo así expresiones más fáciles de manipular,

$$\left[ \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \right] \left[ \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \right] \quad (3.26)$$

Sustituyendo este término en la expresión original se tiene:

$$|\mathcal{M}_D|^2 = \frac{e^4}{k^4} \left[ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \right] \left[ \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right] \cdot \left[ \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \right] \left[ \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \right] \quad (3.27)$$

Considerese ahora que no se conocen los estados de polarización de los electrones, y como las funciones de onda de cada electrón dependen de su espín se debe entonces sumar sobre todos los posibles estados de espín de las partículas de entrada  $\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1}$  y promediar sobre todos los posibles estados de espín de las partículas de salida  $\frac{1}{2} \sum_{S'_1=\pm 1} \frac{1}{2} \sum_{S'_2=\pm 1}$  [1]. Este procedimiento permite tener en cuenta todas las posibilidades de interacción entre las partículas y obtener una descripción completa y precisa del proceso de dispersión en cuestión, teniendo en cuenta la contribución de todos los estados de espín posibles tanto en las partículas de entrada como en las de salida. Entonces la matriz  $|\mathcal{M}_D|^2$  a calcular será la matriz promedio  $|\overline{\mathcal{M}_D}|^2$ :

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s'_1} \sum_{s'_2} \left[ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \right] \left[ \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \right] \left[ \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right] \left[ \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \right] \quad (3.28)$$

Ahora se usará el operador de proyección de energía positiva:

$$\sum_{s_b} u(p_b, s_b) \bar{u}(p_b, s_b) = \frac{\not{p}_b + m_b}{2m_b} \quad (3.29)$$

Reagrupando los términos de la ecuación (3.28) se tiene,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s'_1} \sum_{s'_2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu [u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1)] \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu [u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2)] \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \quad (3.30)$$

Como cada sumatoria solo afecta a su espín correspondiente,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{s'_1} \sum_{s'_2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu \left[ \sum_{s_1} u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \right] \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu \left[ \sum_{s_2} u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \right] \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \quad (3.31)$$

sustituyendo (3.29) en (3.31) se tiene,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{s'_1} \sum_{s'_2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu \left[ \frac{\not{p}_1 + m_1}{2m_1} \right] \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu \left[ \frac{\not{p}_2 + m_2}{2m_2} \right] \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \quad (3.32)$$

Definiendo ahora las matrices [5]  $Q(1)_{ij}$  y  $Q(2)_{kl}$ ,

$$Q(1)_{ij} = \gamma^\mu \left[ \frac{\not{p}_1 + m_1}{2m_1} \right] \gamma^\nu \quad Q(2)_{kl} = \gamma_\mu \left[ \frac{\not{p}_2 + m_2}{2m_2} \right] \gamma_\nu \quad (3.33)$$

Reescribiendo la ecuación (3.32) con (3.33) se tiene,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{s'_1} \bar{u}_i(p'_1, s'_1) Q(1)_{ij} u_j(p'_1, s'_1) \sum_{s'_2} \bar{u}_k(p'_2, s'_2) Q(2)_{kl} u_l(p'_2, s'_2) \quad (3.34)$$

Donde la suma sobre los índices  $i$  y  $j$  esta implícita así como lo esta también la de  $k$  y  $l$ ,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} Q(1)_{ij} \sum_{s'_1} \bar{u}_i(p'_1, s'_1) u_j(p'_1, s'_1) Q(2)_{kl} \sum_{s'_2} \bar{u}_k(p'_2, s'_2) u_l(p'_2, s'_2) \quad (3.35)$$

Luego,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} Q(1)_{ij} \left( \frac{\not{p}'_1 + m'_1}{2m'_1} \right)_{ij} Q(2)_{kl} \left( \frac{\not{p}'_2 + m'_2}{2m'_2} \right)_{kl} \quad (3.36)$$

Se puede observar que las sumas sobre  $i, j$  y  $k, l$  dan como resultado las trazas de las matrices,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \left\{ Tr \left[ Q(1) \left( \frac{\not{p}'_1 + m'_1}{2m'_1} \right) \right] \right\} \left\{ Tr \left[ Q(2) \left( \frac{\not{p}'_2 + m'_2}{2m'_2} \right) \right] \right\} \quad (3.37)$$

Sustituyendo (3.33) en (3.37),

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \left\{ Tr \left[ \gamma^\mu \left( \frac{\not{p}_1 + m_1}{2m_1} \right) \gamma^\nu \left( \frac{\not{p}'_1 + m'_1}{2m'_1} \right) \right] \right\} \left\{ Tr \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\not{p}_2 + m_2}{2m_2} \right) \gamma_\nu \left( \frac{\not{p}'_2 + m'_2}{2m'_2} \right) \right] \right\} \quad (3.38)$$

Como todas las masas en la interacción son la misma, es decir la del electrón se tiene:



$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4(2m)^4} \left\{ \text{Tr} \left[ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m) \right] \right\} \left\{ \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m) \right] \right\} \quad (3.39)$$

Desarrollando los productos de las matrices dentro del argumento de las trazas se obtiene que,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4(2m)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}'_1 + \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu m + \gamma^\mu m \gamma^\nu \not{p}'_1 + \gamma^\mu m \gamma^\nu m \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}'_2 + \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu m + \gamma_\mu m \gamma_\nu \not{p}'_2 + \gamma_\mu m \gamma_\nu m \right\} \quad (3.40)$$

Para continuar es conveniente listar unas reglas y relaciones que son de extremada utilidad al tratar con las trazas de un producto de matrices gamma de Dirac, y que se derivan directamente de las relaciones de anticonmutación de las matrices gamma [5]:

1. Para cualesquiera 2 matrices de  $n \times n$   $A$  y  $B$ ,

$$\text{Tr} (A + B) = \text{Tr} (A) + \text{Tr} (B) \quad (3.41)$$

2. Si  $(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu)$  contiene un número impar de matrices gamma, entonces,

$$\text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 \quad (3.42)$$

3. Para el producto de un número de matrices gamma par,

$$\text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta} \quad (3.43)$$

$$\text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \quad (3.44)$$

Al aplicar el punto 2 en la ecuación (3.40) se eliminan los siguientes términos,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4(2m)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}'_1 + \cancel{\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu m} + \cancel{\gamma^\mu m \gamma^\nu \not{p}'_1} + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}'_2 + \cancel{\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu m} + \cancel{\gamma_\mu m \gamma_\nu \not{p}'_2} + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \quad (3.45)$$

Resultando en,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4(2m)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}'_1 + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}'_2 + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \quad (3.46)$$

y recordando que  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$  se puede reescribir,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4(2m)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \gamma^\alpha p_{1\alpha} \gamma^\nu \gamma^\beta p'_{1\beta} + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma_\alpha p_2^\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta p_2'^\beta + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \quad (3.47)$$

Al aplicar el punto 1 y 3 en la ecuación (3.47) se obtiene,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{4k^4(2m)^4} \left\{ p_{1\alpha} p'_{1\beta} 4 [g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}] + 4m^2 g^{\mu\nu} \right\} \cdot \left\{ p_2^\alpha p_2'^\beta 4 [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}] + 4m^2 g_{\mu\nu} \right\} \quad (3.48)$$

Aplicando todas las métricas sobre los cuádrimomentums y sacando el factor  $4^2$ ,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{4^2 e^4}{4k^4(2m)^4} \left\{ p_1^\mu p_1'^\nu - p_1 \cdot p_1' g^{\mu\nu} + p_1^\nu p_1'^\mu + m^2 g^{\mu\nu} \right\} \cdot \left\{ p_{2\mu} p_{2\nu}' - p_2 \cdot p_2' g_{\mu\nu} + p_{2\nu} p_{2\mu}' + m^2 g_{\mu\nu} \right\} \quad (3.49)$$

Realizando la multiplicación de los 2 factores se obtiene la siguiente expresión de 16 términos,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{4^2 e^4}{4k^4(2m)^4} \left\{ p_1 \cdot p_2 p_1' \cdot p_2' - p_1 \cdot p_1' p_2 \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2' p_1' \cdot p_2 + m^2 p_1 \cdot p_1' \right. \\ \left. - p_1 \cdot p_1' p_2 \cdot p_2' + 4p_1 \cdot p_1' p_2 \cdot p_2' - p_1 \cdot p_1' p_2 \cdot p_2' - 4m^2 p_1 \cdot p_1' \right. \\ \left. + p_1 \cdot p_2' p_1' \cdot p_2 - p_1 \cdot p_1' p_2 \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2 p_1' \cdot p_2' + m^2 p_1 \cdot p_1' \right. \\ \left. + m^2 p_2 \cdot p_2' - 4m^2 p_2 \cdot p_2' + m^2 p_2 \cdot p_2' + 4m^4 \right\} \quad (3.50)$$

Reduciendo términos semejantes,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{4^2 e^4}{4k^4(2m)^4} \{2p_1 \cdot p_2 p'_1 \cdot p'_2 + 2p_1 \cdot p'_2 p'_1 \cdot p_2 - 2m^2 p_1 \cdot p'_1 - 2m^2 p_2 \cdot p'_2 + 4m^4\} \quad (3.51)$$

Al buscar soluciones para energías muy elevadas  $E \gg m$ , los términos que contienen el factor  $m^2$  en la ecuación anterior pueden despreciarse frente a los otros términos. Se obtiene entonces que:

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{4^2 e^4}{4k^4(2m)^4} 2\{p_1 \cdot p_2 p'_1 \cdot p'_2 + p_1 \cdot p'_2 p'_1 \cdot p_2\} \quad (3.52)$$

Se buscará ahora representar los productos punto ( $p_1 \cdot p_2$ ,  $p'_1 \cdot p'_2$ ,  $p_1 \cdot p'_2$ ,  $p'_1 \cdot p_2$ ) en términos del ángulo de dispersión  $\theta$ , para esto se tomará en cuenta el diagrama de la Fig.10 para escribir cada cuadrivector en términos de sus respectivas componentes, todo esto recordando que el cálculo se realiza en el centro de momentums, así se obtienen las siguientes relaciones:

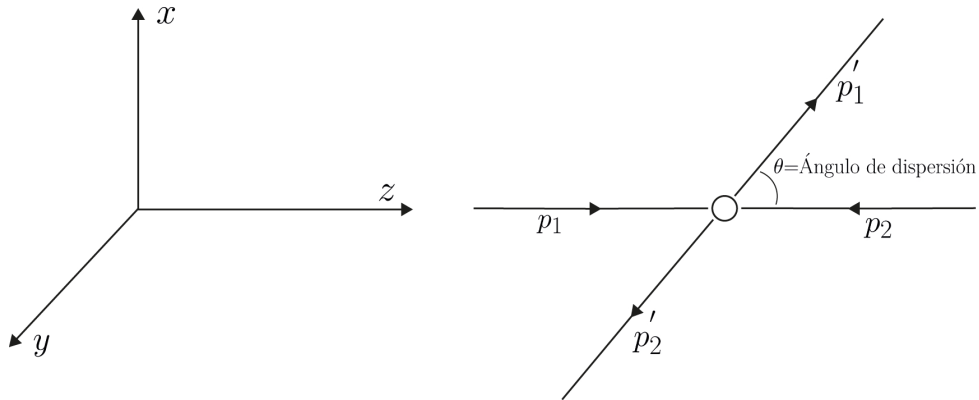


Figura 10: Diagrama centro de momentums (C.M.) con ejes x,y,z.

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) = (E_1, 0, 0, p_z) = \left( \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2}, 0, 0, p_z \right) \quad (3.53)$$

$$p_2 = (E_2, -\mathbf{p}_1) = (E_2, 0, 0, -p_z) = \left( \sqrt{|-\mathbf{p}_1|^2 + m^2}, 0, 0, -p_z \right) \quad (3.54)$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad (3.55)$$

$$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \quad (3.56)$$

$$E_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2} = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m^2} = E_2 \quad (3.57)$$

$$E_1 = E_2 \quad (3.58)$$

Entonces los cuádrimomentums expresados en términos de sus componentes son,

$$p_1 = (E_1, 0, 0, p_z) \quad (3.59)$$

$$p_2 = (E_1, 0, 0, -p_z) \quad (3.60)$$

$$p'_1 = (E_1, |\mathbf{p}'_1| \text{sen}\theta, 0, |\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta) \quad (3.61)$$

$$p'_2 = (E_1, -|\mathbf{p}'_1| \text{sen}\theta, 0, -|\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta) \quad (3.62)$$

De la conservación de la energía  $E_i = E_f$ ,

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (3.63)$$

$$2E_1 = 2E'_1 \quad (3.64)$$

$$E_1 = E'_1 = E \quad (3.65)$$

$$E_i = E_f \quad (3.66)$$

Por lo tanto, el producto punto  $p_1 \cdot p_2$  es igual a,

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^0 p_2^0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = E^2 - \mathbf{p}_1 \cdot (-\mathbf{p}_1) = E^2 + \mathbf{p}_1^2 \quad (3.67)$$

$$= E^2 + (E^2 - m^2) \xrightarrow{E \gg m} 2E^2 \quad (3.68)$$

$$p_1 \cdot p_2 = 2E^2 \quad (3.69)$$

El producto punto  $p'_1 \cdot p'_2$  es igual a,

$$p'_1 \cdot p'_2 = p_1'^0 p_2'^0 - \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = E^2 - \mathbf{p}'_1 \cdot (-\mathbf{p}'_1) = E^2 + |\mathbf{p}'_1|^2 \quad (3.70)$$

$$= E^2 + (E^2 - m^2) \xrightarrow{E \gg m} 2E^2 \quad (3.71)$$

$$p'_1 \cdot p'_2 = 2E^2 \quad (3.72)$$

Se prosigue como sigue para encontrar el producto punto  $p'_1 \cdot p_2$ ,

$$p'_1 \cdot p_2 = p_1'^0 p_2^0 - \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 = E^2 - [|\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta] [-p_z] \quad (3.73)$$

$$p'_1 \cdot p_2 = E^2 + p_z |\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta = E^2 + |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta \quad (3.74)$$

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m^2} \xrightarrow{E \gg m} E \quad (3.75)$$

$$|\mathbf{p}'_1| = \sqrt{E_1'^2 - m^2} \xrightarrow{E \gg m} E \quad (3.76)$$

sustituyendo (3.76) y (3.75) en (3.74), se obtiene:

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 = E^2 + E^2 \cos\theta = E^2 (1 + \cos\theta) \quad (3.77)$$

por otra parte  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)$ ,

$$1 + \cos\theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.78)$$

sustituyendo (3.78) en (3.77), se obtiene el producto punto  $\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}_2$ :

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.79)$$

De forma análoga se encuentra el producto punto  $\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}_1$ ,

$$\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}_1 = p_2^0 p_1^0 - \mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}_1 = E^2 - \left[ -|\mathbf{p}'_1| \cos\theta \right] [p_z] \quad (3.80)$$

$$= E^2 + p_z |\mathbf{p}'_1| \cos\theta = E^2 + \sqrt{E_1'^2 - m^2} \sqrt{E^2 - m^2} \cos\theta \quad (3.81)$$

$$= E^2 + E^2 \cos\theta = E^2 (1 + \cos\theta) = 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}_1 = 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.83)$$

Sustituyendo (3.69),(3.72),(3.79),(3.83) en la ecuación (3.52) se llega a:

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{4^2 e^4}{4k^4 (2m)^4} 2 \left\{ (2E^2) (2E^2) + \left( 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \left( 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \quad (3.84)$$

Multiplicando y factorizando  $4E^4$ ,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{4^2 e^4}{4k^4 (2m)^4} 2 \left\{ 4E^4 \left( 1 + \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \quad (3.85)$$

Simplificando,

$$|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{2e^4 E^4}{k^4 m^4} \left( 1 + \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.86)$$

Por otra parte se definió  $k = p_1 - p'_1$ , entonces:

$$k^2 = (p_1 - p'_1)_0^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 \quad (3.87)$$

$$= (E_1 - E'_1)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 \quad (3.88)$$

$$= -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 \quad (3.89)$$

$$= -(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}'_1{}^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1) \quad (3.90)$$

$$= -(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}'_1{}^2 - 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}'_1|\cos\theta) \quad (3.91)$$

$$= -(E^2 + E'^2 - 2E^2\cos\theta) \quad (3.92)$$

$$= -2(E^2 - E^2\cos\theta) \quad (3.93)$$

$$= -2E^2(1 - \cos\theta) \quad (3.94)$$

Entonces,

$$k^4 = [-2E^2(1 - \cos\theta)]^2 = 4E^4(1 - \cos\theta)^2 \quad (3.95)$$

Con la identidad  $\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ ,

$$1 - \cos\theta = 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2} \quad (3.96)$$

Sustituyendo (3.96) en (3.95) se obtiene:

$$k^4 = 4E^4 \left( 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (3.97)$$

$$k^4 = 16E^4 \text{sen}^4\frac{\theta}{2} \quad (3.98)$$

Por último sustituyendo (3.98) en (3.86) finalmente se llega a que  $|\overline{\mathcal{M}}_D|^2$  es igual a:

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}}_D|^2 = \frac{e^4}{8m^4} \left\{ \frac{1 + \cos^4\frac{\theta}{2}}{\text{sen}^4\frac{\theta}{2}} \right\}} \quad (3.99)$$

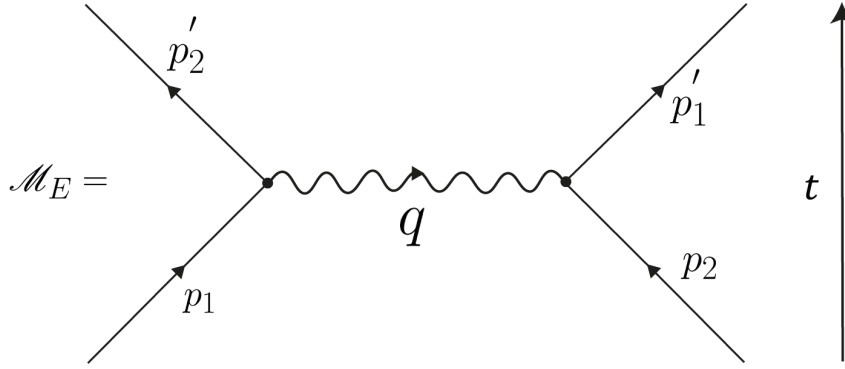


Figura 11: Término de Intercambio.

### 3.2.2 CÁLCULO DEL TÉRMINO DE INTERCAMBIO $\mathcal{M}_E$

De forma análoga a como se hizo en el término directo ahora se construirá la expresión matemática asociada al diagrama de Feynman del término de intercambio Fig.11 aplicando las reglas respectivas obteniéndose como resultado:

$$\mathcal{M}_E = \bar{u}(p_2', s_2') ie\gamma^\mu u(p_1, s_1) \frac{i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_1', s_1') ie\gamma^\nu u(p_2, s_2) \quad (3.100)$$

Contrayendo  $\gamma^\nu$  con  $g_{\mu\nu}$  y despreciando  $i\epsilon$  como se hizo en el cálculo del término directo se obtiene:

$$\mathcal{M}_E = \frac{i^3 e^2}{q^2} \bar{u}(p_2', s_2') \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1', s_1') \gamma_\mu u(p_2, s_2) \quad (3.101)$$

Ahora el módulo al cuadrado de la matriz  $\mathcal{M}_E$  es igual a:

$$|\mathcal{M}_E|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left| \bar{u}(p_2', s_2') \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1', s_1') \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right|^2 \quad (3.102)$$

Realizando el mismo procedimiento que se utilizó para  $|\mathcal{M}_D|^2$  se obtiene:

$$|\overline{\mathcal{M}_E}|^2 = \frac{4^2 e^4}{4q^4 (2m)^4} \left\{ p_2^\mu p_1'^\nu - p_2 \cdot p_1' g^{\mu\nu} + p_2^\nu p_1'^\mu + m^2 g^{\mu\nu} \right\} \cdot \left\{ p_{1\mu} p_{2\nu}' - p_1 \cdot p_2' g_{\mu\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu}' + m^2 g_{\mu\nu} \right\} \quad (3.103)$$

Desarrollando el producto y despreciando los términos con  $m^2$  ya que se está considerando una interacción donde  $E \gg m$  se tiene:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_E|^2 = \frac{4^2 e^4}{4q^4 (2m)^4} \{ & p_2 \cdot p_1 p_1' \cdot p_2' - p_2 \cdot p_1' p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_2' p_1' \cdot p_1 \\ & - p_2 \cdot p_1' p_1 \cdot p_2' + 4p_2 \cdot p_1' p_1 \cdot p_2' - p_2 \cdot p_1' p_1 \cdot p_2' \\ & + p_2 \cdot p_2' p_1' \cdot p_1 - p_2 \cdot p_1' p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1 p_1' \cdot p_2' \} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Reduciendo términos semejantes,

$$|\overline{\mathcal{M}}_E|^2 = \frac{4^2 e^4}{4q^4 (2m)^4} 2 \{ p_2 \cdot p_1 p_1' \cdot p_2' + p_2 \cdot p_2' p_1' \cdot p_1 \} \quad (3.105)$$

Como se hizo para el término directo  $\overline{\mathcal{M}}_E$ , se buscará ahora representar los productos punto ( $p_2 \cdot p_1$ ,  $p_1' \cdot p_2'$ ,  $p_2 \cdot p_2'$ ,  $p_1' \cdot p_1$ ) en términos del ángulo de dispersión  $\theta$ , para esto se tomará en cuenta el diagrama de la Fig.12 que corresponde al término de intercambio de igual forma se escribirá cada cuadrimomentum en términos de sus respectivas componentes, todo esto recordando que el cálculo se realiza en el centro de momentums, así se obtienen las siguientes relaciones:

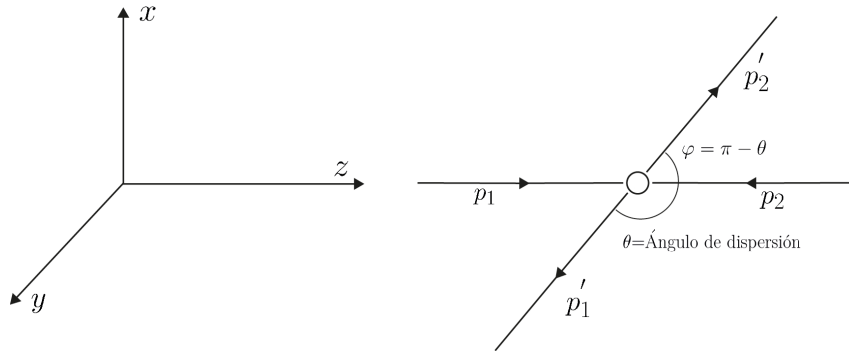


Figura 12: Diagrama (C.M.) con ejes x,y,z término de intercambio.

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) = (E_1, 0, 0, p_z) = \left( \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2}, 0, 0, p_z \right) \quad (3.106)$$

$$p_2 = (E_2, -\mathbf{p}_1) = (E_2, 0, 0, -p_z) = \left( \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m^2}, 0, 0, -p_z \right) \quad (3.107)$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad (3.108)$$

$$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \quad (3.109)$$



$$E_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2} = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m^2} = E_2 \quad (3.110)$$

$$E_1 = E_2 \quad (3.111)$$

Entonces los cuadrimentums expresados en términos de sus componentes son,

$$p_1 = (E_1, 0, 0, p_z) \quad (3.112)$$

$$p_2 = (E_1, 0, 0, -p_z) \quad (3.113)$$

$$p'_1 = (E_1, |\mathbf{p}'_1| \text{sen}\theta, 0, |\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta) \quad (3.114)$$

$$p'_2 = (E_1, -|\mathbf{p}'_1| \text{sen}\theta, 0, -|\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta) \quad (3.115)$$

De la conservación de la energía  $E_i = E_f$ ,

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (3.116)$$

$$2E_1 = 2E'_1 \quad (3.117)$$

$$E_1 = E'_1 = E \quad (3.118)$$

$$E_i = E_f \quad (3.119)$$

Por lo tanto, el producto punto  $p_2 \cdot p_1$  es igual a,

$$p_2 \cdot p_1 = p_2^0 \cdot p_1^0 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 = E^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = E^2 + \mathbf{p}_1^2 \quad (3.120)$$

$$= E^2 + (E^2 - m^2) \longrightarrow 2E^2 \quad (3.121)$$

$$p_2 \cdot p_1 = 2E^2 \quad (3.122)$$

El producto punto  $p'_1 \cdot p'_2$  es igual a,

$$p'_1 \cdot p'_2 = p_1'^0 p_2'^0 - \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = E^2 - \mathbf{p}'_1 \cdot (-\mathbf{p}'_1) = E^2 + |\mathbf{p}'_1|^2 \quad (3.123)$$

$$= E^2 + (E^2 - m^2) \xrightarrow{E \gg m} 2E^2 \quad (3.124)$$

$$p'_1 \cdot p'_2 = 2E^2 \quad (3.125)$$

Se prosigue como sigue para encontrar el producto punto  $p'_1 \cdot p_1$ ,

$$p'_1 \cdot p_1 = p_1'^0 p_1^0 - \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}_1 = E^2 - [|\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta] [p_z] \quad (3.126)$$

$$p'_1 \cdot p_1 = E^2 - p_z |\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta = E^2 - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}'_1| \text{cos}\theta \quad (3.127)$$

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m^2} \xrightarrow{E \gg m} E \quad (3.128)$$

$$|\mathbf{p}'_1| = \sqrt{E_1'^2 - m^2} \xrightarrow{E \gg m} E \quad (3.129)$$

Sustituyendo (3.129) y (3.128) en (3.127), se obtiene:

$$p'_1 \cdot p_1 = E^2 - E^2 \cos\theta = E^2 (1 - \cos\theta) \quad (3.130)$$

Por otra parte  $\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta)$ ,

$$1 - \cos\theta = 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.131)$$

Sustituyendo (3.131) en (3.130), se llega a:

$$p'_1 \cdot p_1 = 2E^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.132)$$

De forma análoga se encuentra el producto punto  $p_2 \cdot p'_2$ ,

$$p_2 \cdot p'_2 = p_2^0 p_2'^0 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}'_2 = E^2 - [-p_z] \left[ -|\mathbf{p}'_1| \cos\theta \right] \quad (3.133)$$

$$= E^2 - p_z |\mathbf{p}'_1| \cos\theta = E^2 - \sqrt{E_1'^2 - m^2} \sqrt{E^2 - m^2} \cos\theta \quad (3.134)$$

$$= E^2 - E^2 \cos\theta = E^2 (1 - \cos\theta) = 2E^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.135)$$

$$p_2 \cdot p'_2 = 2E^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.136)$$

Sustituyendo (3.122),(3.125),(3.132) y (3.136) en (3.105) se encuentra que,

$$|\overline{\mathcal{M}}_E|^2 = \frac{4^2 e^4}{4q^4 (2m)^4} 2 \left\{ 4E^4 + 4E^4 \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (3.137)$$

Multiplicando y factorizando  $4E^4$ ,

$$|\overline{\mathcal{M}}_E|^2 = \frac{4^2 e^4 4E^4}{4q^4 (2m)^4} 2 \left\{ 1 + \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (3.138)$$

Por otra parte se definió  $q = p_1 - p'_2$  entonces:

$$q^2 = \left( p_1 - p'_2 \right)_0^2 - \left( \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2 \right)^2 \quad (3.139)$$

$$= (E_1 - E'_2)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)^2 \quad (3.140)$$

$$= -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)^2 \quad (3.141)$$

$$= -(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}'_2{}^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_2) \quad (3.142)$$

$$= -(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}'_2{}^2 - 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}'_2|\cos\varphi) \quad (3.143)$$

$$= -(E^2 + E^2 - 2E^2\cos\varphi) \quad (3.144)$$

$$= -2(E^2 - E^2\cos\varphi) \quad (3.145)$$

$$= -2E^2(1 - \cos\varphi) \quad (3.146)$$

Luego,

$$\cos\varphi = \cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \cancel{\text{sen}\pi\text{sen}\theta} \quad (3.147)$$

$$\cos\varphi = -\cos\theta \quad (3.148)$$

Sustituyendo (3.148) en (3.146),

$$q^2 = -2E^2(1 + \cos\theta) \quad (3.149)$$

Entonces,

$$q^4 = [-2E^2(1 + \cos\theta)]^2 = 4E^4(1 + \cos\theta)^2 \quad (3.150)$$

Sustituyendo (3.150) en (3.138) se obtiene,

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}}_E|^2 = \frac{e^4}{8m^4} \left\{ \frac{1 + \text{sen}^4\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}} \right\}} \quad (3.151)$$

### 3.2.3 CÁLCULO DEL TÉRMINO DE INTERFERENCIA $2\Re\mathcal{M}_D\mathcal{M}_E$

Por último, se encontrara el valor del término de interferencia de forma análoga a como se hizo con el término directo y el término de intercambio, se calculará en base a las expresiones de las matrices que se han obtenido con anterioridad:

$$\mathcal{M}_D = \bar{u}(p'_1, s'_1)ie\gamma^\mu u(p_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}(p'_2, s'_2)ie\gamma^\nu u(p_2, s_2) \quad (3.152)$$

$$\mathcal{M}_E = \bar{u}(p'_2, s'_2) i e \gamma^\mu u(p_1, s_1) \frac{i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p'_1, s'_1) i e \gamma^\nu u(p_2, s_2) \quad (3.153)$$

Ahora bien,

$$2\Re \mathcal{M}_D \mathcal{M}_E = \mathcal{M}_D \mathcal{M}_E^\dagger + \mathcal{M}_E \mathcal{M}_D^\dagger \quad (3.154)$$

Desarrollando de manera similar se puede comprobar que,

$$\overline{2\Re \mathcal{M}_D \mathcal{M}_E} = \frac{4^2 e^4}{4k^2 q^2 (2m)^4} 4 \{ p_1 \cdot p_2 p'_1 \cdot p'_2 \} \quad (3.155)$$

Entonces,

$$\overline{2\Re \mathcal{M}_D \mathcal{M}_E} = \frac{4^2 e^4}{4k^2 q^2 (2m)^4} 4 \{ E^2 + [E^2 \text{sen}^2 \theta + E^2 \text{cos}^2 \theta] \} \quad (3.156)$$

Así para el término cruzado se tiene,

$$\boxed{\overline{2\Re \mathcal{M}_D \mathcal{M}_E} = \frac{e^4}{8m^4} \left\{ \frac{2}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2}} \right\}} \quad (3.157)$$

Recordando que la amplitud de Feynman es  $|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_D + \mathcal{M}_E|^2 = |\mathcal{M}_D|^2 + |\mathcal{M}_E|^2 + 2\Re \mathcal{M}_D \mathcal{M}_E$  por lo tanto se tiene que,

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{8m^4} \left[ \frac{1 + \text{cos}^4 \frac{\theta}{2}}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \text{sen}^4 \frac{\theta}{2}}{\text{cos}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2}} \right] \quad (3.158)$$

Sustituyendo (3.158) en (3.15) y con  $e^4 = 16\pi^2 \alpha^2$  donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina, finalmente se obtiene la sección eficaz de dispersión en el centro de momentums,

$$\boxed{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'_1} \right)_{C.M.} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left[ \frac{1 + \text{cos}^4 \frac{\theta}{2}}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \text{sen}^4 \frac{\theta}{2}}{\text{cos}^4 \frac{\theta}{2}} \right]} \quad (3.159)$$

---

## CAPÍTULO 4

# CORRECCIONES AL PROPAGADOR DEL FOTÓN

---

En el capítulo anterior se analizó el diagrama de la Fig.13 de la dispersión de Møller a segundo orden en teoría de perturbaciones, ahora se procederá a realizar un análisis de la corrección radiativa asociada al propagador del fotón, se puede notar que existe una modificación en el diagrama de Feynman Fig.14 del proceso, este loop (lazo) que aparece en el propagador del fotón implica que existe esta corrección (radiativa) a cuarto orden en teoría de perturbaciones.

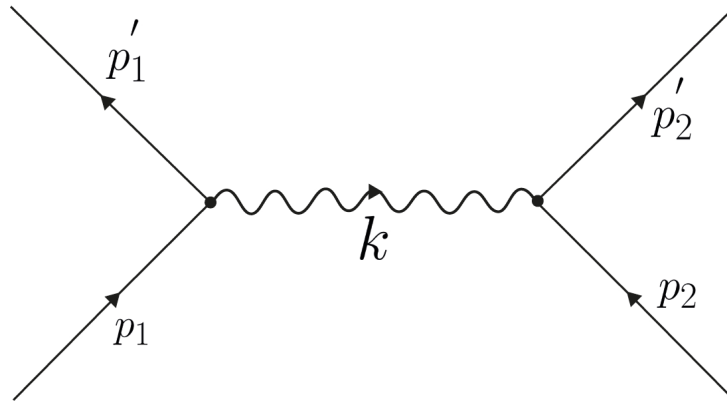


Figura 13: Dispersión de Møller a nivel árbol.

De las correcciones radiativas vistas en la Fig.5 del capítulo 1, sección 2.8, solo se incluirá en este trabajo la correspondiente al propagador del fotón Fig.5 b). A esta modificación del propagador del fotón se le conoce como «polarización del vacío» o «autoenergía del fotón» y en ella el fotón interactúa con el vacío cuántico de tal forma que en el primer vértice del loop el fotón se descompone en un par electrón-positrón y después en el segundo vértice estos se aniquilan produciendo de nuevo un fotón, cabe destacar que este par electrón-positrón son partículas virtuales [5].

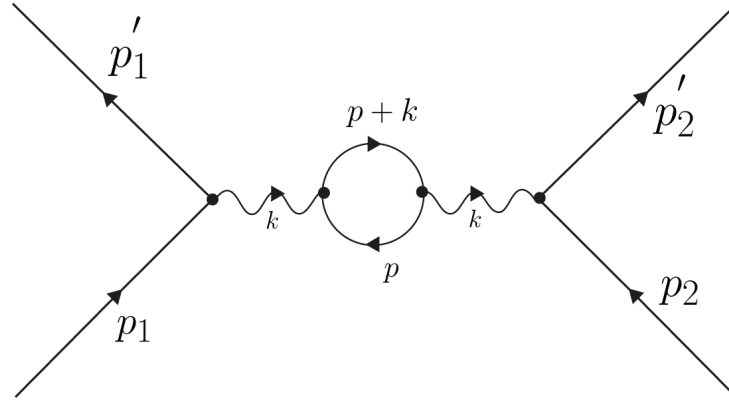


Figura 14: Dispersión de Møller propagador modificado.

### 4.1 AUTOENERGÍA DEL FOTÓN

A fin de encontrar como modifica este loop la dispersión de Møller se utilizaran las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica en particular las siguientes [1]:

- Por cada línea fermiónica interna etiquetada con momentum  $p \longrightarrow$  escribese un factor  $iS_{\alpha\beta}(p) = i\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}$ .
- Por cada loop fermiónico cerrado tome la traza y multiplíquelo por un factor  $(-1)$ .
- Por cada loop cerrado intégrese con respecto al cuadrimomentum interno  $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ .
- En cada vértice se satisface la conservación de la energía-momentum.
- En cada vértice escribese  $ie\gamma^\mu$ .

Lo siguiente es encontrar la expresión matemática asociada a la modificación del diagrama, para esto solo se tomara en cuenta la parte del diagrama que incluye únicamente al propagador Fig.15.

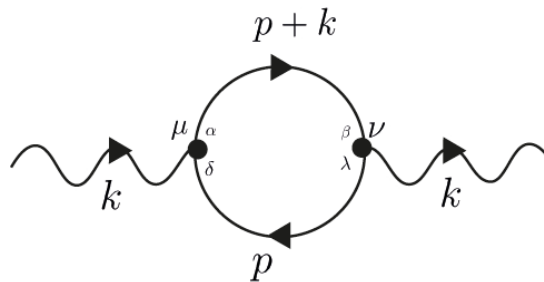


Figura 15: Diagrama de Feynman para el propagador modificado.

Del diagrama Fig.15 se sabe que en cada vértice debe de cumplirse la ley de conservación de energía momentum es decir, el cuadrimomentum del electrón virtual creado es igual a  $p + k$  y el del positrón es  $p$  donde  $p$  es desconocido, es por esto que se integra sobre todos los posibles valores de  $p$ . Así aplicando las reglas de Feynman se llega a la siguiente expresión:

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (ie_0\gamma^\mu)_{\delta\alpha} iS_{\alpha\beta}(p+k) (ie_0\gamma^\nu)_{\beta\lambda} iS_{\lambda\delta}(p) \quad (4.1)$$

Donde  $-i\Pi^{\mu\nu}(k)$  que representa el loop es un tensor de Lorentz de segundo orden y los índices asociados a los factores de los vértices  $\delta\alpha$  y  $\beta\lambda$  representan en primer término a las líneas fermiónicas entrantes y después a las líneas fermiónicas salientes.

Se puede observar que en el integrando se tiene un término de la forma de la traza de un producto de matrices,

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = (-1)(ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[\gamma^\mu iS(p+k)\gamma^\nu iS(p)] \quad (4.2)$$

Sustituyendo los propagadores,

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = e_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu \left[ \frac{i[(\not{p} + \not{k}) + m]}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \gamma^\nu \left[ \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \right\} \quad (4.3)$$

Sacando el factor  $i^2$ ,

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -e_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu \left[ \frac{(\not{p} + \not{k}) + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \gamma^\nu \left[ \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \right\} \quad (4.4)$$

Al tomar la traza en (4.4) solo sobreviven los términos con un número par de factores  $\gamma$  (Matrices de Dirac), ya que los impares son 0, se puede tomar solo la traza del numerador ya que el denominador no contiene ninguna matriz,

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -e_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{Tr \{ \gamma^\mu (p_\alpha + k_\alpha) \gamma^\alpha \gamma^\nu p_\beta \gamma^\beta + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \}}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][p^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (4.5)$$

Tomándose la traza en el numerador,

$$\begin{aligned}
& Tr[\gamma^\mu(p_\alpha + k_\alpha)\gamma^\alpha\gamma^\nu p_\beta\gamma^\beta] + m^2 Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = \\
& 4(p_\alpha + k_\alpha)p_\beta \{g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\} + 4m^2g^{\mu\nu} = \\
& 4\{(p^\mu + k^\mu)p^\nu - (p^\beta + k^\beta)p_\beta g^{\mu\nu} + (p^\nu + k^\nu)p^\mu\} + 4m^2g^{\mu\nu} = \\
& 4\{(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - (p \cdot p + k \cdot p)]g^{\mu\nu}\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Sustituyendo (4.6) en (4.5),

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-4e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - (p \cdot p + k \cdot p)]g^{\mu\nu}}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][p^2 - m^2 + i\epsilon]} \tag{4.7}$$

Para realizar esta integral se usará la parametrización de Feynman; considérese la siguiente identidad [1],

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} \tag{4.8}$$

En la ecuación (4.8) se introducirá una nueva variable  $z$ , definida a través de la relación,

$$t = b + (a-b)z \tag{4.9}$$

$$dt = (a-b)dz \tag{4.10}$$

Sustituyendo (4.9) y (4.10) en (4.8) se obtiene,

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_{z_1}^{z_2} \frac{(a-b)dz}{[b+(a-b)z]^2} \tag{4.11}$$

Donde  $z_1 = 1$  y  $z_2 = 0$ , cambiando estos límites de integración,

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_1^0 \frac{(a-b)dz}{[b+(a-b)z]^2} \tag{4.12}$$

La parametrización de Feynman consiste en usar la ecuación (4.12) en la ecuación (4.7) para obtener la representación integral del factor 1 sobre su denominador, así que reemplazando y obviando la preescrición de Feynman por el momento, se tiene que,

$$b = p^2 - m^2 \tag{4.13}$$

$$a = (p+k)^2 - m^2 \tag{4.14}$$

$$a - b = [p^2 + 2pk + k^2 - m^2] - [p^2 - m^2] = 2pk + k^2 \tag{4.15}$$



Sustituyendo (4.13), (4.14) y (4.15) en (4.12),

$$\frac{1}{[p^2 - m^2][(p+k)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dz}{[[p^2 - m^2] + (2pk + k^2)z]^2} \quad (4.16)$$

Ahora insertando (4.16) en (4.7) se llega a:

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{4e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \int_0^1 dz \left\{ \frac{(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - (p+k) \cdot p]g^{\mu\nu}}{[(p^2 - m^2) + (2pk + k^2)z]^2} \right\} \quad (4.17)$$

Se introducirá ahora una nueva variable en la integral respecto a  $p$ , definiéndose como:

$$q = p + kz \quad (4.18)$$

$$p = q - kz \quad (4.19)$$

$$d^4p = |J|d^4q \quad (4.20)$$

Tomando el denominador y completando el cuadrado,

$$\begin{aligned} p^2 - m^2 + 2pkz + k^2z &= \\ p^2 + 2pkz + (kz)^2 - (kz)^2 + k^2z - m^2 &= \\ (p+kz)^2 - k^2z^2 + k^2z - m^2 &= \\ (p+kz)^2 + zk^2(1-z) - m^2 & \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si se realiza un desplazamiento en el origen de integración sobre  $p$  y se toma  $p \rightarrow p' = p+kz$  se logra que el denominador en (4.17) dependa solamente de  $k^2$  obteniendo en (4.21),

$$p'^2 + k^2z(1-z) - m^2 \quad (4.22)$$

Sustituyendo (4.22), en (4.17),

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{4e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \int_0^1 dz \frac{(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - (p+k) \cdot p]g^{\mu\nu}}{[p'^2 + k^2z(1-z) - m^2]^2} \quad (4.23)$$

Si se desarrolla de numerador se tiene,

$$2p^\mu p^\nu + k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu + [m^2 - p^2 - pk]g^{\mu\nu} \quad (4.24)$$

Sustituyendo (4.24) en (4.23), se obtiene después de realizar el corrimiento en la variable de integración,

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{4e_0^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^4p \frac{2p'^\mu p'^\nu + 2k^\mu k^\nu z(z-1) - p'^2 g^{\mu\nu} + [m^2 + k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu}}{[p'^2 + k^2 z(1-z) - m^2]^2} \quad (4.25)$$

En la expresión (4.25), se han eliminado los términos de la forma  $\int d^4p' p'_\mu f(p'^2)$  ya que estos son cero, debido a que se esta integrando  $\int_{-\infty}^{\infty} dp'_\alpha p'_\alpha f(p'^2) = 0$ , dado que el integrando es una función impar de la variable de integración  $p'_\alpha$ . Una característica que se puede observar de (4.25) es que  $\Pi^{\mu\nu}(k^2)$  es función solamente de  $k^2$  y no de variables lineales de  $k$ , los términos lineales se han cancelado con el proceso de integración. Ahora bien, conviene transformar la integral en la ecuación (4.25) a un espacio euclideo mediante una rotación de Wick. Primeramente para evitar escribir  $p'$  usemos la variable  $p$ . Se realizará la rotación de wick de la siguiente manera, de tal forma que el subíndice  $E$  representa que se esta trabajando en un espacio euclidiano.

$$\begin{aligned} p_0 &\rightarrow ip_0 = ip_E^0 \\ dp_0 &= idp_E^0 \\ p^2 = p_0^2 - \mathbf{P}^2 &\rightarrow (ip_E^0)^2 - \mathbf{P}^2 = -(p_E^0)^2 - \mathbf{P}^2 = -p_E^2 \\ p^2 &\rightarrow -p_E^2 \\ d^4p &\rightarrow idp_E d^3\mathbf{P} = id^4p_E \end{aligned}$$

Por otra parte el término que contiene  $p^\mu p^\nu$  en el integrando de la ecuación (4.25) se puede escribir como  $\int d^4p p^\mu p^\nu$  el cual es cero para  $\mu \neq \nu$ , ya que  $\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 p^0 p^i = 0$ , puesto que el integrando es una función impar de  $p^0$ . Lo mismo ocurre con cualquier otro término  $p^\mu p^\nu$  donde  $\mu \neq \nu$ , una manera de expresar este resultado, es escribir:

$$p^\mu p^\nu = \frac{1}{4} p^2 g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{para } \mu \neq \nu \\ p^2 & \text{para } \mu = \nu \end{cases} \quad (4.26)$$

Esto puede verse claramente si se multiplica (4.26) por  $g_{\mu\nu}$  en ambos miembros, obteniendose:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= \frac{1}{4} p^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} p^2 \delta_\mu^\mu = \frac{1}{4} p^2 \\ p_\mu p^\mu &= p^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{1}{4}g^{\mu\nu}p^2$  en la ecuación (4.25) se obtiene:

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{i4e_0^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^4p_E \frac{\frac{1}{2}p_E^2 g^{\mu\nu} + 2z(z-1)k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[m^2 + z(1-z)k^2]}{[p_E^2 + m^2 - z(1-z)k^2]^2} \quad (4.27)$$

Se definirá ahora  $\Delta$  de tal forma que pueda compactarse la integral,

$$\Delta \equiv m^2 - k^2 z(1-z) \quad (4.28)$$

Y por último se separará la integral (4.27) en 2 partes, para continuar con el proceso de regularización:

$$I_1 \equiv \int d^4p_E \frac{F[\Delta]}{[p_E^2 + \Delta]^2} = F[\Delta] \int d^4p_E \frac{1}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.29)$$

$$I_2 \equiv \int d^4p_E \frac{\frac{1}{2}p_E^2 g^{\mu\nu}}{[p_E^2 + \Delta]^2} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \int d^4p_E \frac{p_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.30)$$

## 4.2 PROCESO DE REGULARIZACIÓN

El proceso de regularización es un método empleado en la teoría cuántica de campos para manejar las divergencias matemáticas que surgen en cálculos perturbativos asociados a la integración que implica tener loops en los diagramas de Feynman, como es el caso que estamos tratando. El propósito fundamental de la regularización es controlar estas divergencias y asegurar que los resultados obtenidos sean físicamente significativos [1]. En las integrales (4.29) y (4.30) se presentan divergencias de tal forma que el valor del momentum  $p$ , que es el valor que se quiere encontrar, se dispara al infinito, pero para evitar esto se puede establecer un valor finito para la integración « $\Lambda$ (cutoff)», algo que en español se denomina a veces como “corte al momentum”, esto da como resultado que nuestras integrales se vuelvan convergentes y solo ahí es cuando tiene un significado físico el valor de la integral.

De (4.29) y (4.30) se definirán 2 nuevas integrales  $I_3$  e  $I_4$ :

$$I_3 \equiv \int d^4p_E \frac{1}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.31)$$

$$I_4 \equiv \int d^4p_E \frac{p_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.32)$$

Definiendo la variable  $x$  para introducirla en (4.31),

$$x = \frac{\Delta}{p^2 + \Delta} \quad (4.33)$$

$$dx = -\Delta(p_E^2 + \Delta)^{-2} dp_E^2 \quad (4.34)$$

$$-\frac{dx}{\Delta} = \frac{dp_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.35)$$

De (4.33):

$$p_E^2 = x^{-1}\Delta(1 - x) \quad (4.36)$$

Al contar el orden o grado de potencia en el numerador y el denominador de (4.31) se encuentra que para valores muy grandes de  $p_E$ , la integral es logarítmicamente divergente, buscando una generalización de la integral para  $N$  dimensiones,

$$d^4 p_E = d\Omega_4 p_E^3 dp_E \quad (4.37)$$

donde  $d\Omega_4$  es el ángulo sólido en 4 dimensiones,

$$d\Omega_3 = \text{sen}\theta d\theta d\phi \quad (4.38)$$

$$d\Omega_4 = \text{sen}\theta_1 \text{sen}^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \quad (4.39)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}^2\theta_2 = 2\pi^2 \quad (4.40)$$

en espacios euclidianos.

En general:

$$d\Omega_n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta_1 \text{sen}\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \text{sen}^2\theta_2 \cdots \int_0^\pi d\theta_{n-2} \text{sen}^{n-2}(\theta_{n-2}) \quad (4.41)$$

Para un ángulo sólido en  $N$  dimensiones se partira del área de una esfera unitaria que está dada por:

$$A = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta d\phi = 4\pi \quad (4.42)$$

En una dimensión,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (4.43)$$

En  $N$  dimensiones,

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^N = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_N^2} dx_N \quad (4.44)$$

$$= \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\sum_i^N x_i^2} = \int d^N x e^{-\sum_i^N x_i^2} = (\sqrt{\pi})^N \quad (4.45)$$

$$= \int_0^\infty d\Omega_N \int_0^\infty x^{N-1} e^{-x^2} dx = (\sqrt{\pi})^N \quad (4.46)$$

Para un integrando esféricamente simétrico  $f(r)$ ,

$$\int_0^\infty r^{N-1} d\Omega_N dr f(r) = \int_0^\infty d\Omega_N \int_0^\infty r^{N-1} f(r) dr \quad (4.47)$$

De (4.46),

$$\left[ \int d\Omega_N \right] \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{N}{2}-1} e^{-x^2} \quad (4.48)$$

$$(4.49)$$

$$= \left[ \int d\Omega_N \right] \frac{1}{2} \int_0^\infty dy (y)^{\frac{N}{2}-1} e^{-y} \quad (4.50)$$

$$(4.51)$$

$$= \left[ \int d\Omega_N \right] \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \quad (4.52)$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (4.53)$$

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx \quad (4.54)$$

De (4.52),

$$\int d\Omega_N = \frac{2(\sqrt{\pi})^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \quad (4.55)$$

Ahora escribiendo la integral de (4.32) como:

$$I_4 = \int d\Omega_4 \int_0^\infty dp_E p_E^3 \frac{p_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.56)$$

Se puede observar que (4.56) es cuadráticamente divergente para  $p_E \rightarrow \infty$ ,

$$I_4 \xrightarrow{p_E \rightarrow \infty} \int d\Omega_4 \int_0^\infty dp_E \frac{p_E^5}{p_E^4} \quad (4.57)$$

$$= \int d\Omega_4 \int_0^\infty dp_E p_E \rightarrow DIVERGENTE \quad (4.58)$$

Convertir (4.56) en una integral convergente es lo que se conoce como regularizar la integral. Una forma de hacerlo es imponiendo un cutoff  $\Lambda$  tal que  $p_E \leq \Lambda$ , con lo que la integral  $I_4$  quedaría como:

$$I_4 = \int d\Omega_4 \int_0^\Lambda dp_E \frac{p_E^5}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.59)$$

Se usara el procedimiento de regularización dimensional, el cual consiste en integrar en una dimensión  $D < 4$  de tal manera que  $\int d\Omega_D \int_0^\infty d^D p_E p_E^{D-1} \frac{p_E}{[p_E^2 + \Delta]^2}$ ,

$$I_4 \rightarrow \int d\Omega_D \int_0^\infty d^D p_E \frac{p_E^{D+1}}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.60)$$

Será convergente para  $D + 1 < 4$

Se sabe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (4.61)$$

Diverge para  $p = 1$  y converge para  $p > 1$

Similarmente,

$$I(n, \alpha) \equiv \int \frac{d^n p}{[p - m^2 + i\epsilon]^\alpha} \rightarrow \int \frac{d^n p}{p^{2\alpha}} \quad (4.62)$$

es convergente para  $n < 2\alpha$ . Para el caso de potencias iguales en el numerador y denominador  $\int_\beta^\infty \frac{dx}{x} = \ln(\infty) - \ln(\beta)$  se dice que es logarítmicamente divergente, pero para  $\int_\beta^\infty \frac{dx}{x^{1+\epsilon}} = x^{-\epsilon}$  es convergente. Considerese el caso,

$$\int d^n q \frac{\partial}{\partial q^\mu} [q^\mu f(q)] \quad (4.63)$$

Si  $f(q) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0$  la integral (4.63) es cero por el teorema de la divergencia,

$$\int d^n q \frac{\partial}{\partial q^\mu} [q^\mu f(q)] = \int d^n q \left\{ q^\mu \partial_\mu f(q) + \frac{\partial q^\mu}{\partial q^\mu} f(q) \right\} \quad (4.64)$$

$$= \int d^n q \{ q^\mu \partial_\mu f(q) + \delta_\mu^\mu f(q) \} \quad (4.65)$$

$$= \int d^n q \{ q^\mu \partial_\mu f(q) + n f(q) \} = 0 \quad (4.66)$$

$$n \int d^n q f(q) = - \int d^n q q^\mu \partial_\mu f(q) \quad (4.67)$$

$$\int d^n q \frac{1}{(q^2 + m^2)^\alpha} = \frac{2\alpha m^2}{2\alpha - n} \int d^n q \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha+1}} \quad (4.68)$$

Obsérvese que en (4.68) la integral de la derecha puede ser convergente si  $n < 2(\alpha+1)$  y la divergencia de la integral original  $\int d^n q \frac{1}{(q^2+m^2)^\alpha}$  se ha trasladado al polo del coeficiente de la integral  $2\alpha - n = 0 \rightarrow n = 2\alpha$  (polo simple). Se puede repetir este proceso hasta lograr que la integral sea finita para valores de  $n$  cercanos a la dimensión  $M$  espacio-tiempo  $n = 4$ . La divergencia se ha trasladado en polos simples, es decir, se ha aislado la divergencia.

$$n \int d^n q f(q) = - \int d^n q q^\mu \partial_\mu f(q) \quad (4.69)$$

Observe que una integral divergente, como la de la izquierda, puede convertirse en convergente mediante procesos de derivación; considérese por ejemplo:

$$f(q) = \frac{1}{[q^2 + m^2]^\alpha} \quad (4.70)$$

$$q^\mu \partial_\mu f(q) = - \frac{2\alpha q}{[q^2 + m^2]^{\alpha+1}} \quad (4.71)$$

Sustituyendo (4.71) en (4.69),

$$n \int d^n q \frac{1}{[q^2 + m^2]^\alpha} = 2\alpha \int d^n q \frac{q^2}{[q^2 + m^2]^{\alpha+1}} \quad (4.72)$$

Introduciendo  $q^2 = (q^2 + m^2) - m^2$  en el miembro derecho de (4.72),

$$2\alpha \int d^n q \frac{q^2 + m^2 - m^2}{[q^2 + m^2]^{\alpha+1}} = 2\alpha \int \frac{d^n q}{[q^2 + m^2]^\alpha} - 2\alpha m^2 \int \frac{d^n q}{[q^2 + m^2]^\alpha} \quad (4.73)$$

Sustituyendo (4.73) en (4.72),

$$n \int d^n q \frac{1}{[q^2 + m^2]^\alpha} = 2\alpha \int \frac{d^n q}{[q^2 + m^2]^\alpha} - 2\alpha m^2 \int \frac{d^n q}{[q^2 + m^2]^{\alpha+1}} \quad (4.74)$$

$$[2\alpha - n] \int d^n q \frac{1}{[q^2 + m^2]^\alpha} = 2\alpha m^2 \int d^n q \frac{1}{[q^2 + m^2]^{\alpha+1}} \quad (4.75)$$

$$\int d^n q \frac{1}{[q^2 + m^2]^\alpha} = \frac{2\alpha m^2}{2\alpha - n} \int d^n q \frac{1}{[q^2 + m^2]^{\alpha+1}} \quad (4.76)$$

La divergencia de la integral de la izquierda se traslada a un polo, en el término de la derecha. El polo ocurre para  $2\alpha - n = 0$

Se quiere calcular la integral de (4.27),

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{i4e_0^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^4 p_E \frac{\frac{1}{2}p_E^2 g^{\mu\nu} + 2z(z-1)k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[m^2 + z(1-z)k^2]}{[p_E^2 + m^2 - z(1-z)k^2]^2} \quad (4.77)$$

Comenzando primero con la integral  $I_3$ ,

$$I_3 = \int d^4 p_E \frac{1}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.78)$$

Esta integral es divergente. Realizando esta integral en  $D$  dimensiones,

$$I_3 = \int d^D p_E \frac{1}{[p_E^2 + \Delta]^2} = \int_{\Omega_D} d\Omega_D \int_0^\infty \frac{p_E^{D-1} dp_E}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.79)$$

$$I_3 = \frac{2(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{p_E^{D-2} p_E dp_E}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.80)$$

$$I_3 = \frac{2(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{(p_E^2)^{\frac{D-2}{2}} \frac{1}{2} dp_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.81)$$

Introduciendo la variable  $x$  definida en la ecuación (4.33) y sustituyendo (4.35) y (4.36) en (4.81) se obtiene:

$$I_3 = \frac{2(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_1^0 \frac{1}{2} [x^{-1} \Delta (1-x)]^{\frac{D-2}{2}} \left( -\frac{dx}{\Delta} \right) \quad (4.82)$$

$$I_3 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \Delta^{\frac{D}{2}-2} \int_0^1 x^{1-\frac{D}{2}} (1-x)^{\frac{D}{2}-1} dx \quad (4.83)$$

Usando ahora la definición de la función beta,

$$B(\alpha, \beta) \equiv \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (4.84)$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (4.85)$$

Aplicando (4.85) en (4.83) se obtiene:

$$I_3 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \Delta^{\frac{D}{2}-2} \left[ \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \right] \quad (4.86)$$

$$\alpha - 1 = 1 - \frac{D}{2} \rightarrow \alpha = 2 - \frac{D}{2} \quad (4.87)$$

$$\beta - 1 = \frac{D}{2} - 1 \rightarrow \beta = \frac{D}{2} \quad (4.88)$$

$$I_3 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Delta^{2-\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \quad (4.89)$$



Definiendo  $2 - \frac{D}{2} = \frac{4-D}{2} \equiv \frac{\epsilon}{2}$  ya que la integral se ha realizado en  $D < 4$  dimensiones y tomando  $\lim_{D \rightarrow 4} I_3$  se tiene que  $I_3$  es:

$$I_3 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Delta^{\frac{4-D}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Delta^{\frac{\epsilon}{2}}} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (4.90)$$

Este resultado se sustituirá después en la ecuación (4.27).

Se calculará ahora la integral  $I_4$  definida por:

$$I_4 = \int d^4 p_E \frac{p_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.91)$$

Realizando la integral en  $D$  dimensiones,

$$I_4 = \int d^D p_E \frac{p_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} = \int_{\Omega_D} d\Omega_D \int_0^\infty \frac{p_E^{D-1} p_E^2 dp_E}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.92)$$

$$I_4 = 2 \frac{\sqrt{\pi}^{-D}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty p_E^D \frac{\frac{1}{2} dp_E^2}{[p_E^2 + \Delta]^2} \quad (4.93)$$

Nuevamente se introduce la variable  $x$  y su diferencial y se obtiene:

$$I_4 = \frac{2\sqrt{\pi}^{-D}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \frac{1}{2} \int_1^0 [x^{-1} \Delta (1-x)]^{\frac{D}{2}} \left(-\frac{dx}{\Delta}\right) \quad (4.94)$$

$$I_4 = \frac{\sqrt{\pi}^{-D}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-\frac{D}{2}} (1-x)^{\frac{D}{2}} \frac{1}{\Delta^{1-\frac{D}{2}}} dx \quad (4.95)$$

$$I_4 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \Delta^{\frac{D}{2}-1} \int_0^1 x^{-\frac{D}{2}} (1-x)^{\frac{D}{2}} dx \quad (4.96)$$

Usando nuevamente la función beta se obtiene:

$$\alpha - 1 = -\frac{D}{2} \rightarrow \alpha = 1 - \frac{D}{2} \quad (4.97)$$

$$\beta - 1 = \frac{D}{2} \rightarrow \beta = 1 + \frac{D}{2} \quad (4.98)$$

$$I_4 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \Delta^{\frac{D}{2}-1} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(2)} \quad (4.99)$$

$$I_4 = \frac{(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \Delta^{\frac{D}{2}-1} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(2)} \quad (4.100)$$

$$I_4 = (\sqrt{\pi})^D \Delta^{\frac{D-2}{2}} \frac{D}{2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (4.101)$$

De  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \rightarrow \Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$ ,

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right)}{1 - \frac{D}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{1 - \frac{D}{2}} \quad (4.102)$$

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \frac{D/2\Delta^{\frac{D}{2}-1}}{1 - \frac{D}{2}} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \quad (4.103)$$

Sustituyendo (4.103) en (4.101) se obtiene:

$$\boxed{I_4 = (\sqrt{\pi})^D \Delta^{\frac{D-2}{2}} \frac{D}{2} \frac{1}{1 - \frac{D}{2}} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)\right]} \quad (4.104)$$

Sustituyendo (4.90) y (4.104) en la ecuación (4.27),

$$-i\Pi^{\mu\nu}(k) = -i\frac{4e_0^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \left\{ F[\Delta]I_3 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}I_4 \right\} \quad (4.105)$$

Donde:

$$F[\Delta]I_3 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}I_4 = \left\{ 2z(z-1)k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu} [m^2 + z(1-z)] \right\} I_3 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}I_4 \quad (4.106)$$

$$= 2z(z-1)k^\mu k^\nu I_3 + g^{\mu\nu} \left\{ (m^2 + z(1-z)k^2)I_3 + \frac{1}{2} [\pi^2(2)\Delta(-1)] \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right] \right\} \quad (4.107)$$

Desarrollando,

$$I_3 = \pi^2 \Delta^{-\frac{\epsilon}{2}} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right\} = \pi^2 e_0^{\ln\Delta^{-\frac{\epsilon}{2}}} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right\} \quad (4.108)$$

$$I_3 = \pi^2 e_0^{-\frac{\epsilon}{2}\ln\Delta} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right\} = \pi^2 \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2}\ln\Delta + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right] \quad (4.109)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.105) se obtiene:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{4e_0^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right] \int_0^1 dz \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2}\ln\Delta \right] 2z(1-z)[k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu] \quad (4.110)$$

Ahora se definirá la función de polarización  $\Pi(k^2)$ ,

$$\Pi^{\mu\nu}(k^2) \equiv (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \Pi(k^2) \quad (4.111)$$

De (4.110),

$$\Pi(k^2) = \frac{4e_0^2}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right] \int_0^1 dz \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \Delta \right] 2z(1-z) \quad (4.112)$$

Simplificando,

$$\Pi(k^2) = \frac{e_0^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma_E + \gamma_E \frac{\epsilon}{2} \ln \Delta \right] 2z(1-z) \quad (4.113)$$

y para  $k = 0$ ,

$$\Pi(0) = \frac{e_0^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln(m^2) - \gamma_E + \gamma_E \frac{\epsilon}{2} \ln(m^2) \right] 2z(1-z) \quad (4.114)$$

Restando (4.114) a (4.113) se obtiene:

$$\Pi^R(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(0) = \frac{e_0^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz [-\ln \Delta + \ln(m^2)] 2z(1-z) \quad (4.115)$$

Simplificando,

$$\Pi^R(k^2) = -\frac{2e_0^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz (1-z) z \ln \left( \frac{\Delta}{m^2} \right) \quad (4.116)$$

$$= -\frac{e_0^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz (1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right] \quad (4.117)$$

Se ha obtenido la función de polarización regularizada  $\Pi^R(k^2)$  definida por (4.117) donde se han eliminado las divergencias al realizar la resta en (4.115), es decir  $\Pi^R(k^2)$  es ahora una cantidad finita. Ya solamente es necesario realizar el cálculo de la integral, para esto se introduce la constante de estructura fina  $\alpha$  que en unidades naturales se define como,

$$\alpha = \frac{e_0^2}{4\pi} \quad (4.118)$$

la cual es una cantidad adimensional,

$$\alpha = \frac{1}{137} \quad (4.119)$$

Sustituyendo en (4.118) en (4.117) se obtiene:

$$\Pi^R(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1-z) z \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right] \quad (4.120)$$

Cuando  $\frac{k^2}{m^2} \ll 1$  y desarrollando con una serie de McLaurin  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$  por lo tanto:

$$\ln \left[ 1 + \frac{k^2 z(z-1)}{m^2} \right] \approx \frac{k^2 z(z-1)}{m^2} \quad (4.121)$$

Sustituyendo (4.121) en (4.120),

$$\Pi^R(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz(1-z)z \left[ \frac{k^2 z(z-1)}{m^2} \right] = \frac{2\alpha k^2}{\pi m^2} \int_0^1 [z^4 - 2z^3 + z^2] dz \quad (4.122)$$

$$\Pi^R(k^2) \approx \frac{2\alpha}{\pi} \frac{k^2}{m^2} \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] \quad (4.123)$$

$$\boxed{\Pi^R(k^2) \approx \frac{\alpha}{\pi} \frac{k^2}{m^2} \frac{1}{15}} \quad (4.124)$$

### 4.3 PROCESO DE RENORMALIZACIÓN

Una teoría de campos se denomina renormalizable si sus predicciones en términos de un número finito de parámetros (es decir, masas y constantes de acoplamiento) siguen siendo finitas cuando se eliminan todos los parámetros de corte (cut-off's). La electrodinámica cuántica es una teoría renormalizable, en ella los resultados están bien definidos y son finitos en el límite cuando el cut-off del momentum  $\Lambda$  tiende al infinito, los resultados son insensibles a la forma del cut-off, siempre que  $\Lambda$  sea mucho mayor en escala que el momentum del proceso bajo consideración. En otras palabras, para la electrodinámica cuántica, las predicciones teóricas obtenidas con un  $\Lambda$  finito no son mensurablemente diferentes de las obtenidas en el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , siempre que  $\Lambda$  sea mucho mayor que la escala de energía del experimento. Por el contrario, en una teoría que no es renormalizable aún puede quedar bien definida y finita mediante la introducción de parámetros de corte  $\Lambda$  adecuados. Sin embargo, en una teoría no renormalizable de este tipo las predicciones físicas divergen en el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  y por lo tanto son inevitablemente sensibles a la forma y magnitud de los cut-off's, incluso para  $\Lambda$  muy grandes [1].

Se han calculado las correcciones radiativas al propagador del fotón a cuarto orden en teoría de perturbaciones, para poder trabajar con cantidades finitas bien definidas se ha tenido que regularizar la teoría mediante la introducción de parámetros de corte adecuados (cut-off's). Ahora se debe de considerar si las correcciones radiativas siguen siendo finitas en los límites en los que se han eliminado los cut-off's para restaurar la electrodinámica cuántica.

Escribiendo el propagador modificado como:

$$iD_{\alpha\beta}(k) = -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2} [-ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k)] \frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2} \quad (4.125)$$

Por otra parte, de la estructura tensorial de  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  se tiene,

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (4.126)$$

Debido a que la interacción de un fotón  $A_\mu(x)$  en la electrodinámica cuántica es siempre con la corriente conservada  $J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  entonces, se tiene  $J^\mu(x)A_\mu(x) = H_{Int}$ ,

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (4.127)$$

$$\mathcal{F}[\partial_\mu J^\mu(x)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int [\partial_\mu J^\mu(x)] e^{-ikx} d^4x = 0 \quad (4.128)$$

Integrando por partes  $u = e^{ikx}$ ,  $dv = \partial_\mu J^\mu(x) dx$ ,

$$\partial_\mu (J^\mu(x) e^{ikx}) = [\partial_\mu J^\mu(x)] e^{ikx} + J^\mu(i k_\mu) e^{ikx} \quad (4.129)$$

$$\int [\partial_\mu J^\mu(x)] e^{ikx} d^4x = \int \partial_\mu (J^\mu e^{ikx}) d^4x - ik_\mu J^\mu e^{ikx} = 0 \quad (4.130)$$

$$\oint_S \partial_\mu (J^\mu e^{ikx}) d^4x - ik_\mu J^\mu e^{ikx} = 0 \quad (4.131)$$

$$\implies k_\mu J^\mu = 0 \quad (4.132)$$

Donde (4.132) es una condición gauge, similarmente,

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (4.133)$$

Por lo tanto, en la ecuación (4.126) el término  $k^\mu k^\nu B(k^2) = 0$  ya que  $k^\nu B(k^2)$  es un término proporcional al momentum del fotón dando como resultado que la forma de  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  dada por (4.126) se simplifique a:

$$\Pi^{\mu\mu} = -g^{\mu\mu} A(k^2) \quad (4.134)$$

Sustituyendo (4.134) en (4.125) se obtiene:

$$iD_{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} - \frac{ig_{\alpha\mu}}{k^2} [-ie_0^2 g^{\mu\nu} A(k^2)] \left(-i\frac{g_{\nu\beta}}{k^2}\right) \quad (4.135)$$

$$iD_{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} + ie_0^2 g_{\alpha\beta} \frac{A(k^2)}{k^2} \quad (4.136)$$

$$iD_{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} \left[ 1 - e_0^2 \frac{A(k^2)}{k^2} \right] \quad (4.137)$$

La ecuación (4.137) representa a el propagador modificado del fotón debido a la interacción,

$$iD_{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} \frac{1}{1 + e_0^2 \left( \frac{A(k^2)}{k^2} \right)} \quad (4.138)$$

$$iD_{\alpha\beta}(k^2) = -ig_{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{k^2 + e_0^2 A(k^2)} \right] \quad (4.139)$$

$$-\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} \rightarrow -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} \left[ 1 - e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2} \right] \quad (4.140)$$

$$-\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} \rightarrow -ig_{\alpha\beta} \frac{1}{k^2 + e_0^2 A(k^2)} \quad (4.141)$$

Desarrollando  $A(k^2)$  alrededor de  $k^2 = 0$  considerando que, para un fotón real  $k^2 = 0$  y  $A(k^2 = 0) = 0$  se tiene,

$$A(k^2) = A(0) + \frac{dA}{dk^2} \Big|_{k^2=0} k^2 + \frac{1}{2!} \frac{d^2 A}{d(k^2)^2} \Big|_{k^2=0} k^4 + \dots \quad (4.142)$$

$$A(k^2) = A'(k^2 = 0)k^2 + A''(0)k^4 \quad (4.143)$$

Multiplicando (4.141) por  $e_0^2$  se obtiene:

$$-\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} e_0^2 \rightarrow -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} A''(0) \quad (4.144)$$

$$-\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} e_0^2 \rightarrow -\frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2} e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] \quad (4.145)$$

Observe que el término de la derecha es igual al de la izquierda pero multiplicado por el factor  $[1 - e_0^2 A'(0)]$ , esto se interpreta físicamente como si la magnitud de la carga del electrón interactuando mediante el intercambio de un fotón hubiera cambiado.

$$\boxed{e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)]} \quad (4.146)$$

A este resultado se le conoce como renormalización de la carga  $e_0$ , donde a  $e_0$  se le suele llamar carga desnuda y donde la carga real del electrón o carga renormalizada es  $e_R$ , dada por:

$$e_R = e = \sqrt{e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)]} = e_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) \right] \quad (4.147)$$

$$e_R = Z_3 e_0 = \left[ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) \right] \quad (4.148)$$

$$e_R = e_0 - \frac{1}{2}e_0^3 A'(0) \quad (4.149)$$

Donde  $e_0$  es infinita y  $A'(0)$  también es infinita,  $e_R$  es finita,  $A'(0)$  está asociada a la parte divergente de  $\Pi(k^2)$ . La interpretación física de esta corrección a la carga es la siguiente, cuando el fotón propagándose se descompone en el par electrón-positrón, estas partículas virtuales responden a la carga del electrón de tal forma que las partículas de carga opuesta tienden a alinearse cerca del electrón, creando una nube de carga que rodea a él electrón real Fig.16. Como consecuencia esta nube de partículas virtuales polarizadas actúa creando un “apantallamiento” sobre el electrón es decir se reduce la carga efectiva de la partícula real, como resultado esta carga efectiva que se mide es menor que la carga intrínseca del electrón [5].

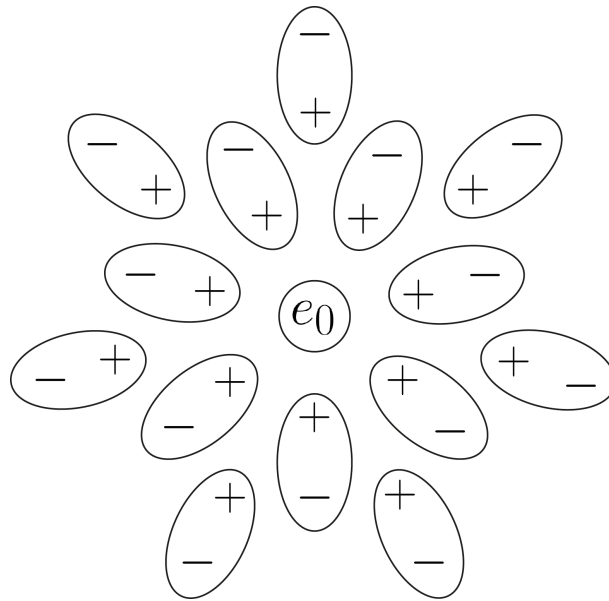


Figura 16: Los pares virtuales  $e^+e^-$  actúan como dipolos generando un “apantallamiento” sobre la carga del electrón.

En este proceso de renormalización de la carga, se redefinió la carga original que se había introducido en la lagrangiana y que en realidad era  $e_0$  y se cambió por una cantidad finita  $e_R$  dada por (4.148) que es una cantidad finita. Se definieron,

$$\Pi^R(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(0) \quad (4.150)$$

y

$$\Pi(k^2) = A(k^2) \quad (4.151)$$

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} A(k^2) \quad (4.152)$$

Al imponer la condición  $A(0) = 0$  y desarrollar,

$$A(k^2) = A(0) + \left. \frac{dA}{dk^2} \right|_{k^2=0} k^2 + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2A}{d(k^2)^2} \right|_{k^2=0} k^4 + \dots$$

el proceso de regularización quedó expresado en la substracción de  $A'(0)$ . Para entender el concepto de renormalización es conveniente introducir la idea de interacción a través de un diagrama.

Considérese el campo escalar libre:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.153)$$

Si se inicia con un campo escalar sin masa, su lagrangiano correspondiente será,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (4.154)$$

y su propagador  $i\Delta = \frac{i}{p^2}$  el cual tiene asociado el diagrama,

$$\text{---} = \frac{i}{p^2}$$

Considerese ahora un término de masa que se introduce  $\text{---} \times \text{---} = -im^2$  ya que corresponde a  $m^2 \phi^2 = \phi m \phi$  entonces el propagador modificado por la interacción sera:

$$i\Delta = \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \times \text{---} + \dots$$

$$i\Delta = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\pi) \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\pi) \frac{i}{p^2} (-i\pi) \frac{i}{p^2} + \dots \quad (4.155)$$

$$i\Delta = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\pi) \left[ \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\pi) \frac{i}{p^2} + \dots \right] \quad (4.156)$$

$$i\Delta = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} (-i\pi) i\Delta \quad (4.157)$$

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_0}{1-r} = \frac{\frac{i}{p^2}}{1 - \frac{m^2}{p^2}} = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (4.158)$$

ya que  $r = (-i\pi) \frac{i}{p^2} = \frac{m^2}{p^2}$

$$\implies i\Delta = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (4.159)$$

Obsérvese que el cambio en el propagador se manifiesta como una masa  $\text{---} \times \text{---}$ . Un efecto similar será observado si en el propagador libre del fotón  $\text{---}^k = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2}$  se introduce un término extra en la lagrangiana original del campo electromagnético libre:



$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.160)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = \text{~~~~~}$$

Luego,

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \Delta\mathcal{L}_{EM} \quad (4.161)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \otimes \text{~~~~~}$$

Nótese que en el caso de la masa  $\text{---} \times \text{---}$  no se han introducido nuevos campos. Similarmen- te en el caso del campo electromagnético, el fotón, modificado por  $\text{~~~~~} \otimes \text{~~~~~}$  no requiere de otro campo sino solo de un término extra  $\Delta\mathcal{L}_{EM}$  donde,

$$\Delta\mathcal{L}_{EM} \approx (\text{factor}) \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{\epsilon} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (4.162)$$

El nuevo término en la lagrangiana se conoce como contratérmino, este ha absorbido los cambios infinitos pero inobservables entre los parámetros desnudos y los parámetros físicos [5].

---

## CAPÍTULO 5

# CONCLUSIONES

---

Los resultados obtenidos entre la experimentación y las predicciones teóricas de la electrodinámica cuántica la han colocado como una de las teorías más precisas de la física, un ejemplo de esto es el resultado obtenido en la medición de la diferencia energética entre los niveles de energía del átomo de hidrógeno que coincide con la predicción de la teoría hasta en una parte en mil millones. La dispersión de Møller por su cuenta a demostrado ser un proceso de interacción paradigmático dentro de la electrodinámica cuántica este constituye la base teórica de muchos fenómenos físicos conocidos y sigue siendo el modelo físico dominante para todos los procesos experimentales de dispersión de electrones de baja energía ( $<100$  MeV), por lo cual es siempre un limitante a la hora de diseñar dichos experimentos. Con la realización del presente trabajo sobre la dispersión de Møller se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- En el estudio realizado en el capítulo 3 de la dispersión de Møller a nivel árbol se muestra claramente la importancia de la construcción de la matriz invariante de Feynman  $\mathcal{M}$  ya que en ella se encuentra toda la información dinámica de la interacción, la construcción de esta matriz es claramente una excelente forma para aprender y poner en práctica los métodos de la electrodinámica cuántica.
- La representaciones pictóricas de la dispersión es decir sus diagramas de Feynman y la aplicación de las reglas de Feynman para obtener las expresiones matemáticas asociadas a los diagramas, pone en evidencia la importancia de la invención de estos mismos, en las secciones asociadas al cálculo de los diferentes términos de la matriz  $\mathcal{M}$  se realizó de forma detallada el desarrollo de los métodos matemáticos para encontrar el resultado de dicha matriz evidenciando la superioridad de los métodos creados por Feynman que reducen considerablemente el trabajo necesario, en contraste con los del formalismo matemático de las teorías de dispersión.
- Por otro parte la introducción de la corrección al propagador del fotón en el capítulo cuatro de este trabajo ha permitido conocer a detalle el tratamiento matemático

necesario para calcular correcciones radiativas, por ejemplo la parametrización de Feynman o los métodos que se utilizan para tratar las divergencias causadas por la introducción de loops dentro de los diagramas de Feynman, estas divergencias tienden a presentarse comúnmente en integrales ya conocidas, con métodos matemáticos ya desarrollados para su resolución, como lo es la regularización dimensional y que se ha mostrado a detalle en la sección de regularización.

- La conclusión mas importante de este trabajo es sin duda alguna la presentada en la sección de renormalización en el capítulo cuatro, considerar la modificación al propagador del fotón es decir la introducción del loop en el propagador, implica tomar en cuenta lo que se conoce como “auto energía del fotón o polarización del vacío” es decir el fotón interactúa con el vacío de tal forma que se descompone en un par virtual electrón-positrón para después volver a reintegrarse creando de nuevo el fotón, en el intervalo en el que las partículas virtuales se encuentran presentes estas responden a la carga del electrón de tal forma que las partículas de carga opuesta tienden a alinearse cerca del electrón, creando una nube de carga que rodea a el electrón real. Como consecuencia esta nube de partículas virtuales polarizadas actúa creando un “apantallamiento” sobre el electrón, es decir se reduce la carga efectiva de la partícula real, como resultado esta carga efectiva que se mide es menor que la carga intrínseca del electrón, puntualizando, la corrección al propagador del fotón tiene como consecuencia que en el proceso de renormalización de la teoría la carga del electrón durante la interacción se redefina.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 1993.
- [2] C. Møller. Electron-electron scattering cross section calculated using one-photon exchange (born) approximation. *Annalen der Physik*, 14:531, 1932.
- [3] B. R. Martin and G. Shaw. *Particle Physics*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 2008.
- [4] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [5] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [6] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, 2008.
- [7] M. Redhead. Calculated radiative corrections to unpolarized møller scattering cross section. *Proceedings of the Royal Society*, 1953.
- [8] R. Polovin. Calculated radiative corrections to unpolarized møller scattering cross section. *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 4:385, 1957.
- [9] Y. Tsai. Calculated radiative corrections to unpolarized møller scattering cross section. *Physical Review D*, 20:269, 1960.
- [10] Luis de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica, 3.a edition, 2006.