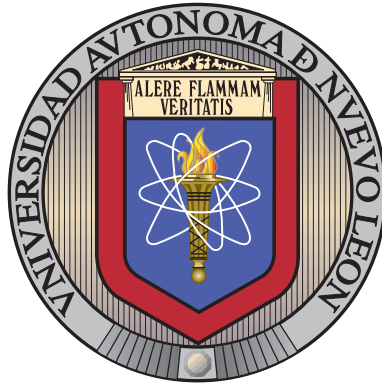


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



ENTROPÍA GRAVITACIONAL DE AGUJEROS
NEGROS Y SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

POR

ALAN ALEJANDRO PANUCO LIÑAN

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN INGENIERÍA

FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



ENTROPÍA GRAVITACIONAL DE AGUJEROS
NEGROS Y SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

POR

ALAN ALEJANDRO PANUCO LIÑAN

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN INGENIERÍA

FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



ENTROPÍA GRAVITACIONAL DE AGUJEROS
NEGROS Y SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

POR

ALAN ALEJANDRO PANUCO LIÑAN

TESIS

DIRIGIDA POR LA DRA. DANIELA PÉREZ

CO-DIRIGIDA POR EL DR. CARLOS LUNA CRIADO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Entropía gravitacional de agujeros negros y segunda ley de la termodinámica”, realizada por el alumno Alan Alejandro Panuco Liñan, con número de matrícula 1810481, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial.

El Comité de Tesis

Dr. Carlos Luna Criado
Presidente

Dr. José Rubén Morones Ibarra
Secretario

Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Vocal

Vo. Bo.

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirector de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Julio 2024

DEDICATORIA

A mis mascotas, Popy, Atom y Patolín.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi profundo agradecimiento a mis padres, Gualberto Panuco Ruíz y Dora Lilia Liñan Abrego, por su amor incondicional y sus sabios consejos a lo largo de mi vida.

Agradezco sinceramente a mis directores de tesis, la Dra. Daniela Pérez y el Dr. Carlos Luna, por su paciencia y apoyo durante todo este proceso. Sus enseñanzas y conocimientos han sido esenciales para la elaboración de esta investigación.

También quiero expresar mi agradecimiento al comité de tesis, compuesto por el Dr. Rubén Morones, el Dr. Gustavo E. Romero y el Dr. Flores Báez, por sus valiosas observaciones y comentarios que han enriquecido significativamente este trabajo.

Mi gratitud también va dirigida al Dr. Prihel Cavildo por los valiosos cursos de Relatividad General que impartió, los cuales me permitieron adquirir el conocimiento necesario para realizar los cálculos presentes en esta tesis.

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías por su apoyo financiero para la realización de este posgrado. Además, expreso mi gratitud a la Universidad Autónoma de Nuevo León, especialmente al programa de posgrado en Ingeniería Física Industrial de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Finalmente, quisiera agradecer a una serie de profesores y colegas que han sido fundamentales en mi camino académico y desarrollo intelectual: Javier Vega, Carolina Rodríguez, Gerardo Piña, Servando Rojas, Rodolfo Chapa, Ramón López y Ángel Andrade. Sus enseñanzas, apoyo y compañía han sido invaluable a lo largo de mi trayectoria universitaria, cuyo culmen es esta tesis.

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivo general	4
1.3. Hipótesis	4
1.4. Objetivos específicos	4
1.5. Justificación	5
2. Marco teórico	6
2.1. Relatividad general	7
2.2. Agujeros negros	8
2.2.1. Agujero negro de Schwarzschild	9
2.2.2. Agujero negro de Kerr	10
2.2.3. Agujero negro de Reissner-Nordström	12
2.3. Termodinámica de agujeros negros	14
2.4. Masa irreducible	16
2.5. Conjetura de Weyl	16
2.6. Estimadores de entropía gravitacional	18

2.7. Estimador de Weyl-Kretschmann	18
2.7.1. Estimador de Weyl-Kretschmann aplicado a agujeros negros	20
2.8. Estimador de Bel-Robinson	23
2.8.1. Coordenadas de Painlevé-Gullstrand	25
2.8.2. Estimador de Bel-Robinson aplicado a agujeros negros	27
3. Metodología	30
4. Resultados	32
4.1. Procesos reversibles e irreversibles en agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström	32
4.2. Estimador de Bel-Robinson aplicado a un agujero negro de Reissner-Nordström	35
4.3. Cambio en la entropía gravitacional en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a Reissner-Nordström	45
4.3.1. Estimador de Bel-Robinson	45
4.3.2. Estimador de Weyl-Kretschmann	47
4.4. Cambio en la entropía gravitacional en el proceso de transformación de un agujero negro de Reissner-Nordström a Schwarzschild	48
4.4.1. Estimador de Bel-Robinson	49
4.4.2. Estimador de Weyl-Kretschmann	50
5. Discusión	51
5.1. Primera transformación	53
5.2. Segunda transformación (transformación inversa)	54
6. Conclusión y consideraciones finales	56

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Diagrama de “embedding” de un agujero negro de Schwarzschild [1].	10
2.	Diagrama de “embedding” bidimensional del agujero negro de Kerr [1].	11
3.	Diagrama de “embedding” bidimensional del agujero negro de Reissner-Nordström [1].	14
4.	Gráfica de la densidad de energía gravitacional en función del radio.	42
5.	Gráfica de la temperatura gravitacional en función del radio.	42
6.	Imagen ilustrativa del proceso.	53
7.	Imagen ilustrativa del proceso.	54

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

La teoría de la relatividad, desarrollada principalmente por Albert Einstein a principios del siglo XX, transformó nuestra concepción del espacio, el tiempo, la materia, la energía y la gravedad. El desarrollo de esta teoría comenzó con los cimientos de la relatividad especial en 1905 [2], y culminó con la publicación de las ecuaciones de campo de Einstein en 1915 [3]. Estas ecuaciones describen cómo la energía, la masa y el momento lineal alteran la geometría del espacio-tiempo, curvándolo. En este marco teórico, la gravedad no se describe como una fuerza, sino como el efecto geométrico de la curvatura del espacio-tiempo [4].

La teoría de la relatividad general ha llevado a una serie de asombrosas predicciones; muchas de ellas confirmadas experimental u observacionalmente, de forma directa o indirecta, incluyendo la deflexión de la luz debido a la gravedad [5], la dilatación del tiempo en campos gravitatorios [6], la existencia de ondas gravitacionales [7, 8], el efecto de lente gravitacional [9], el Big Bang [10], y la existencia de agujeros negros [11, 12].

La primera solución exacta de las ecuaciones de campo de la relatividad general la encontró Karl Schwarzschild en 1916 [11, 12]; la cual describe la geometría del espacio-tiempo alrededor de un cuerpo esférico masivo, de masa M , sin rotación ni carga eléctrica. Aplicando esta solución a una masa suficientemente compacta, se encontró que existe una región del espacio-tiempo entorno a la masa donde la curvatura es tan intensa que nada que entre en ella puede salir, ni siquiera la luz. A esta región del espacio-tiempo desconectada causalmente del resto del universo, se le llama “agujero negro”, y a la superficie imaginaria que marca la frontera entre estas dos regiones se denomina “horizonte de eventos” [13].

La existencia misma de los agujeros negros plantea preguntas fundamentales sobre la naturaleza del espacio, el tiempo y la gravedad en condiciones extremas, y su estudio ha permitido descubrir teóricamente nuevos fenómenos, como la radiación de Hawking [14], el problema de la información [15], la entropía de los agujeros negros [16, 17] y las

ondas gravitacionales emitidas por sistemas binarios de agujeros negros [18], ofreciendo una oportunidad única de ampliar nuestra comprensión del universo.

De acuerdo con las soluciones de agujeros negros encontradas en las ecuaciones de campo de Einstein, un agujero negro puede ser completamente descrito por solo tres propiedades físicas que lo caracterizan: la masa, el momento angular y la carga eléctrica. Por tanto, la materia, la radiación electromagnética o las ondas gravitacionales que caigan en el agujero negro, no dejan más “huella” más allá de estas tres características. A esta idea se la conoce como el teorema de no pelo [19]. Por tanto, de acuerdo a este teorema solo existen cuatro tipos de agujeros negros: los agujeros negros de Schwarzschild [11, 12], que solo tienen masa, agujeros negros de Reissner-Nordström [20, 21], que aparte de masa poseen carga eléctrica, agujeros negros de Kerr [22], que solo tienen masa y momento angular, y los agujeros negros de Kerr-Newman [23], que tienen masa, carga eléctrica y momento angular.

El estudio de los agujeros negros, como una manifestación extrema de la gravedad en el universo, también ha sido elemental para comprender la entropía asociada a la gravitación, la cual se postuló a partir de uno de los problemas fundamentales de la evolución del universo en la cosmología moderna. En el universo primigenio, la materia y la radiación se encontraban en el equilibrio térmico, en un estado de máxima entropía, por lo que la expansión del universo aparentemente violaría la segunda ley de la termodinámica. No obstante, los efectos gravitatorios en aquella edad temprana del universo deben de tenerse cuenta [24]. El físico y matemático Roger Penrose [25] propuso que la gravitación misma debería tener una entropía asociada, de modo que la entropía en el universo primigenio debería ser principalmente la entropía gravitacional, y propuso que podría definirse a partir del tensor de curvatura de Weyl, el cual contiene las 10 componentes independientes del tensor de Riemann que no contiene el tensor de Ricci. Por tanto, el tensor de Weyl es la parte del tensor de Riemann que describe la curvatura en el espacio-tiempo vacío [13].

En 1970, Christodoulou introdujo el concepto de masa irreducible [26], la cual depende de la masa y del momento angular del agujero negro, y siempre aumenta en una transformación irreversible de un agujero negro. Penrose y Floyd dedujeron que el área del horizonte de eventos de un agujero negro de Kerr aumentaba durante el proceso hipotético en el que se extrae energía de un agujero negro giratorio, conocido como proceso de Penrose, y sugirieron que en las interacciones de los agujeros negros, el área total del horizonte de eventos aumenta [27]. Hawking encontró teóricamente que en los procesos donde inciden partículas y/o campos con agujeros negros, el área del horizonte de eventos de un agujero negro nunca disminuye con el tiempo [28]. Bekenstein dedujo una expresión para la entropía del agujero negro, en la cual, la entropía es proporcional al área del

horizonte de eventos [16, 17]. De esta forma, la segunda ley de la termodinámica aplicada en un proceso físico en el que esté presente un agujero negro implica que la entropía total del sistema, constituida por la suma de las entropías de la materia y el agujero negro, nunca decrece [29]. Bardeen, Carter y Hawking derivaron cuatro leyes para la mecánica de los agujeros negros análogas a las cuatro leyes de la termodinámica, donde el área del horizonte de eventos y la gravedad superficial del agujero negro son los análogos a la entropía y la temperatura, respectivamente [30].

Zeldóvich y Starobinski propusieron un mecanismo por el cual los agujeros negros en rotación deberían de perder energía rotacional por la creación y emisión de partículas, en consonancia con el principio de incertidumbre de Heisenberg [31]. Posteriormente, Hawking propuso la que ahora conocemos como radiación de Hawking. Esta radiación de tipo térmica implica que un agujero negro tiene asociada una temperatura y, por tanto, una entropía que es proporcional al área de su horizonte de eventos [14].

En los últimos años, los avances alcanzados por las colaboraciones LIGO y VIRGO en la detección de ondas gravitacionales [8], así como la captura de imágenes de agujeros negros por parte del proyecto Event Horizon Telescope [32], han proporcionado información astronómica precisa sobre los agujeros negros. Esto ha permitido poner a prueba las predicciones teóricas de la relatividad general en relación con estos sistemas físicos, incluyendo la métrica de los agujeros negros [33], el teorema de no pelo [34], y las propiedades de los campos magnéticos entorno al horizonte de eventos [35].

Por otra parte, persiste el desafío de definir la entropía gravitacional, lo cual es crucial para comprender la naturaleza de la gravitación, los agujeros negros astrofísicos [36] y la evolución del universo [37, 38, 39]. Esta necesidad ha impulsado la propuesta de estimadores que permitan evaluar la entropía gravitacional no solo en agujeros negros, sino también en otras regiones del espacio-tiempo. Dado que no se dispone de una teoría cuántica de la gravedad, no es posible por el momento formular una mecánica estadística para las propiedades termodinámicas del espacio-tiempo [36]. Por lo tanto, en los últimos años se han propuesto varios estimadores clásicos basados en tensores de curvatura para determinar la entropía gravitacional para distintas clases de regiones espacio-temporales, no sólo aquellas que representan agujeros negros [40, 24, 41]. La validez de estos estimadores es objeto de estudio actual [42, 43].

En este trabajo se evalúa la validez de dos estimadores propuestos en la literatura: los estimadores de Weyl-Kretschmann [40] y Bel-Robinson [41], los cuales se presentan en el capítulo 2 de esta tesis. Se analiza su compatibilidad con la segunda ley de la termodinámica en la transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström al capturar una partícula con carga eléctrica, y en la transformación

de un agujero negro de Reissner-Nordström a un agujero negro de Schwarzschild al capturar una partícula que tiene una carga eléctrica de misma magnitud que la del agujero negro inicial, pero de signo opuesto.

1.2 OBJETIVO GENERAL

Determinar si en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild que absorbe una partícula cargada a un agujero negro de Reissner-Nordström la entropía asociada al agujero negro aumenta. Asimismo, determinar si, en el proceso de transformación de un agujero negro de Reissner-Nordström que captura una partícula con la misma carga en magnitud pero de signo contrario a la del agujero negro, la entropía gravitacional aumenta al convertirse en un agujero negro de Schwarzschild.

1.3 HIPÓTESIS

Los estimadores clásicos de entropía gravitacional asociados al tensor de Weyl y al tensor de Bel-Robinson, respectivamente, cumplen la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros en los procesos de transformación de un agujero negro de Schwarzschild que absorbe una partícula cargada a un agujero negro de Reissner-Nordström, y de un agujero negro de Reissner-Nordström que captura una partícula con la misma carga en magnitud pero de signo contrario a la del agujero negro a un agujero negro de Schwarzschild..

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Verificar que la expresión para la entropía de Bekenstein-Hawking satisface la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström.

- Calcular la entropía para el agujero negro de Reissner-Nordström con el estimador de Bel-Robinson.

- Determinar la entropía para el agujero negro de Reissner-Nordström con el estimador de Weyl-Kretschmann.

- Comprobar que ambos estimadores cumplen la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström.

- Constatar que ambos estimadores cumplen la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros en el proceso de transformación de un agujero negro de Reissner-Nordström a un agujero negro de Schwarzschild.

1.5 JUSTIFICACIÓN

Los agujeros negros existen en el universo y son los componentes básicos de la mayor parte de los mecanismos que explican eventos extremos en astrofísica. Dado que los agujeros negros son esencialmente regiones del espacio-tiempo donde la gravedad se manifiesta en su forma más extrema, son los candidatos por excelencia para poner a prueba nuestras representaciones de los fenómenos gravitatorios. En particular, si la gravitación tiene asociada una entropía, distintos tipos de procesos de transformación entre agujeros negros pueden ayudar a comprender la naturaleza de la entropía gravitacional a nivel clásico.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En la física newtoniana el tiempo y el espacio se consideran entidades absolutas, inalterables e independientes, que actúan como el escenario en el que ocurren los eventos en el universo. De este modo, si elimináramos todos los cuerpos del universo, el tiempo y el espacio seguirían existiendo. A pesar del éxito de esta teoría, no todos concordaban con esta idea. Para Leibniz no existen el espacio y el tiempo como entidades independientes, sino que son relaciones entre los cuerpos. Sin objetos en el universo desaparecerían el espacio y el tiempo. Para Leibniz, el tiempo no es más que la medida del cambio de los cuerpos, y si no hay cuerpos que cambien, no hay tiempo. Mientras que el espacio es la medida de las relaciones espaciales entre cuerpos, y si no hay cuerpos, no hay espacio [44].

En relatividad especial, el tiempo y el espacio son relativos, dependientes del estado de movimiento del observador [2], y forman parte de una entidad más general, denominada espacio-tiempo, así como la electricidad y el magnetismo son manifestaciones diferentes de una entidad mayor: el campo electromagnético. El espacio-tiempo es el sistema que incluye a todos los eventos y se representa como una variedad real cuadridimensional diferenciable [1].

En la relatividad general, el espacio-tiempo ya no se considera una entidad ajena a los sistemas físicos, ya que interactúa con ellos. Esta interacción cambia las propiedades del espacio-tiempo. Esencialmente, lo que hará la materia es curvar el espacio tiempo, de modo que cambiará la métrica de Minkowski y, por ende, la norma de un vector en este espacio vectorial se calculará de modo distinto. ¿Qué significa esto? Las trayectorias que siguen las partículas libres (llamadas geodésicas) dependerán de la geometría (métrica) del espacio-tiempo, la cual a su vez quedará determinada por la estructura ontológica del universo. [1].

En este capítulo se presentarán algunos elementos básicos de la relatividad general

2.1 RELATIVIDAD GENERAL

La relatividad general está fundamentada matemáticamente en la geometría diferencial. Esta rama de las matemáticas trabaja con variedades diferenciables. Una variedad, es un espacio topológico que puede estudiarse localmente como un espacio euclidiano, mientras que globalmente puede estar dotado de propiedades topológicas más complejas. En la teoría de la relatividad general, la variedad diferencial que representa al espacio-tiempo se dice que es pseudo-riemanniana, puesto que, localmente puede analizarse como un espacio-tiempo de Minkowski. "Localmente" significa que los elementos de los conjuntos abiertos en la variedad pueden ponerse en correspondencia biunívoca con elementos de conjuntos abiertos en los reales.

Las características geométricas de la variedad topológica diferenciable que representa al espacio-tiempo, son independientes de la elección de la carta coordenada y las relaciones entre los elementos. Los isomorfismos (clase de morfismos que preservan la estructura) en la categoría de variedades diferenciables son los difeomorfismos, los cuales nos permiten hacer cambios de sistemas de coordenadas.

La información de la geometría del espacio-tiempo nos la da el tensor métrico, o como comúnmente se le suele denominar: métrica. Con la métrica podemos analizar como es la gravitación en una región dada. Para encontrar la métrica se precisa del tensor energía-momento, el cual caracteriza a la materia existente en una región específica que curva el espacio-tiempo y las ecuaciones de campo de Einstein [3],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Ricci, del tensor métrico y del tensor energía-momento respectivamente. R es el escalar de Ricci, G es la constante de la gravitación universal y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Las ecuaciones de campo se pueden expresar de forma equivalente considerando que $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ como sigue,

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.2)$$

2.2 AGUJEROS NEGROS

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo con una curvatura concreta y su naturaleza no depende del sistema de coordenadas. Existen 3 propiedades físicas que caracterizan a un agujero negro: masa, carga y momento angular.

A continuación se dará una definición formal de agujero negro que es independiente del sistema de coordenadas. Para ello, sin embargo, es necesario introducir algunos conceptos preliminares (se utilizara la signatura $(-,+,+,+)$ a lo largo de la tesis).

En cada punto de la variedad se tiene un espacio vectorial tangente, el cual posee un producto interno inducido por el tensor métrico. A los espacios vectoriales con producto interno se les llama álgebra vectorial. Con el producto tensorial se puede construir un álgebra tensorial.

Def. Se dice que una curva en un espacio-tiempo es causal si y sólo si su vector tangente v en cada punto de la curva $g(v, v) \leq 0$.

Observación. Si se cumple la igualdad se dice que es tipo luz, si no, se dice que es tipo tiempo. Un espacio-tiempo es orientable temporalmente si se puede definir un campo vectorial suave no nulo tipo tiempo.

Dado un espacio-tiempo orientable temporalmente, se define su futuro causal para todo punto de la variedad \mathcal{M} como,

$$J^+(p) = \{q \in \mathcal{M} \mid \text{existe una curva causal de } p \text{ a } q\}, \quad (2.3)$$

y su pasado causal como,

$$J^-(p) = \{q \in \mathcal{M} \mid \text{existe una curva causal de } q \text{ a } p\}, \quad (2.4)$$

Dado un subconjunto A de \mathcal{M} , se define su futuro causal como,

$$J^+(A) = \bigcup_{p \in A} J^+(p), \quad (2.5)$$

y su pasado causal como,

$$J^-(A) = \bigcup_{p \in A} J^-(p). \quad (2.6)$$

El futuro global del espacio-tiempo \mathcal{M} , se define como,

$$J^+(\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} J^+(p), \quad (2.7)$$

y se denota como \mathcal{J}^+ .

Def. Se dice que un subconjunto A de \mathcal{M} es acronal si y sólo si no existen dos puntos en A tal que estén conectados por una curva tipo tiempo.

Una superficie de Cauchy es una superficie acronal tal que toda curva causal en \mathcal{M} cruza con A únicamente una vez.

Un espacio-tiempo es globalmente hiperbólico si y sólo si admite una hipersuperficie tipo espacio $A \subset \mathcal{M}$ que es una superficie de Cauchy para \mathcal{M} .

Dado un espacio-tiempo tal que todas las geodésicas nulas que inician en una región J^- y finalizan en J^+ , se dice que representa un agujero negro sólo si existe una región desde la cual ninguna geodésica nula puede alcanzar el espacio-tiempo futuro asintóticamente plano, de manera equivalente, existe una región de \mathcal{M} que está desconectada causalmente del futuro global. La región del agujero negro $BH \subset \mathcal{M}$ de dicho espacio-tiempo es $BH = \mathcal{M} - J^-(\mathcal{J})$ y el horizonte de eventos es $BH = J^-(\mathcal{J}) \cap \mathcal{M}$.

A continuación mostraremos algunas soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que representan agujeros negros.

2.2.1 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Karl Schwarzschild resolvió las ecuaciones de campo en el vacío, para una distribución de masa M con simetría esférica y obtuvo una solución que se denomina como métrica de Schwarzschild. El elemento de línea asociado a esta métrica en coordenadas (t, r, θ, ϕ) es el siguiente [11, 12],

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.8)$$

Notar que tenemos dos singularidades en $r = 0$ y $r = \frac{2GM}{c^2}$. Si aplicamos un cambio de coordenadas adecuado podemos ver que la singularidad en $r = \frac{2GM}{c^2}$ desaparece (a esta clase de singularidad se dice que es de coordenadas). Este valor se denomina radio de Schwarzschild y se denota como r_s .

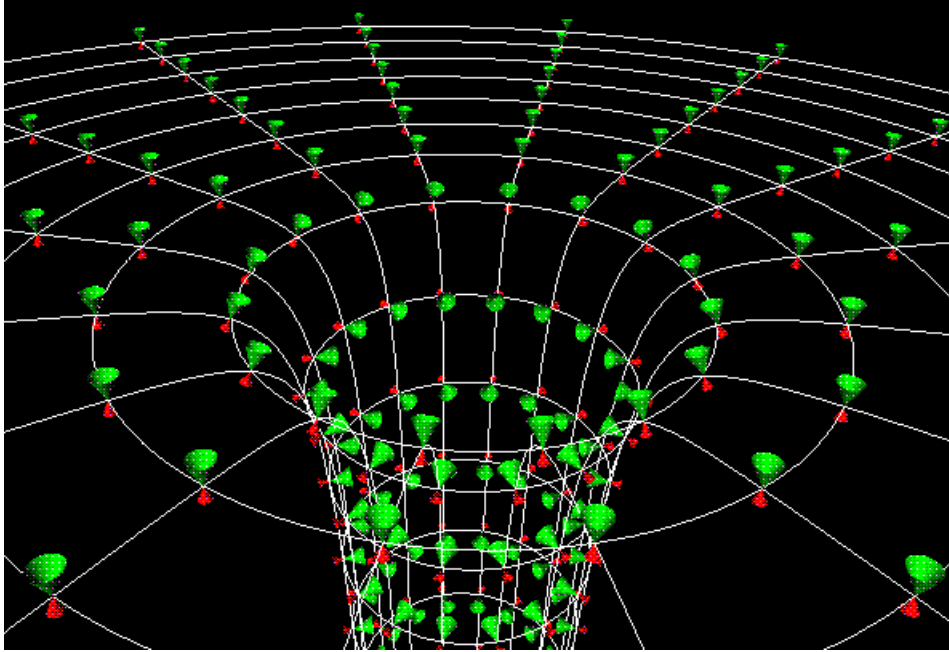


Figura 1: Diagrama de “embedding” de un agujero negro de Schwarzschild [1].

La singularidad en $r = 0$ es esencial, no importa qué sistema de coordenadas se nos ocurra, siempre estará presente. Esta singularidad representa un aspecto geométrico de la variedad topológica, no necesariamente del espacio-tiempo.

Si la masa de un objeto está contenida en un radio menor que $r = \frac{2GM}{c^2}$, se forma un agujero negro. Los eventos de la región entre $r = 0$ y $r = \frac{2GM}{c^2}$ son inaccesibles para un observador fuera de dicha región. La superficie asociada a la singularidad coordenada se la denomina horizonte de eventos.

La figura (1) ilustra un diagrama de “embedding” para el agujero negro de Schwarzschild, el cual es una simplificación bidimensional para vislumbrar un poco la orientación de los conos de luz. Los conos de luz delimitan la región del espacio-tiempo que deben seguir las trayectorias de las partículas materiales. Como puede observarse en la imagen, los conos de luz se van inclinando a medida que se acercan al horizonte de eventos. Una vez que cruzan el horizonte de eventos, las partículas solo pueden moverse hacia el interior del agujero negro.

2.2.2 AGUJERO NEGRO DE KERR

Otra solución de vacío de las ecuaciones de campo es la métrica de Kerr que corresponde a un cuerpo de masa M y momento angular por unidad de masa a , con un momento angular $J = Mca$. El elemento de línea asociado a esta métrica en coordenadas

de Boyer-Lindquist viene dado por [22],

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 - 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + \Sigma\Delta^{-1}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.9)$$

donde

$$g_{tt} = c^2 - 2GMr\Sigma^{-1}, \quad (2.10)$$

$$g_{t\phi} = 2GMac^{-2}\Sigma^{-1}r\sin^2\theta, \quad (2.11)$$

$$g_{\phi\phi} = [(r^2 + a^2c^{-2})^2 - a^2c^{-2}\Delta\sin^2\theta]\Sigma^{-1}\sin^2\theta, \quad (2.12)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2c^{-2}\cos^2\theta, \quad (2.13)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2c^{-2}. \quad (2.14)$$

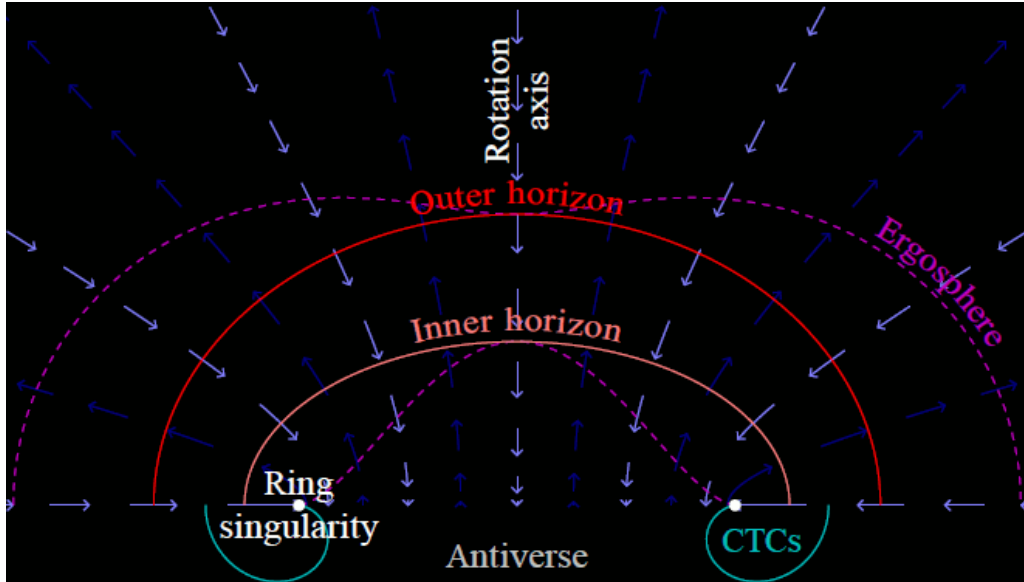


Figura 2: Diagrama de “embedding” bidimensional del agujero negro de Kerr [1].

Para encontrar las singularidades no esenciales (de coordenadas) para esta solución, tenemos que hallar los valores que hacen que se cumpla que,

$$\Delta = 0, \quad (2.15)$$

$$r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2c^{-2} = 0. \quad (2.16)$$

Resolviendo, tenemos que,

$$r_{\pm} = GMc^{-2} \pm \sqrt{(GMc^{-2})^2 - a^2c^{-2}}. \quad (2.17)$$

Las dos raíces corresponden a dos horizontes de eventos distintos. Si hacemos $a = 0$, el horizonte interno coincide con $r = 0$ y el horizonte externo coincide con el horizonte en la solución de Schwarzschild.

La singularidad esencial corresponde a $\Sigma = 0$, esto es,

$$r^2 + a^2 c^{-2} \cos^2 \theta = 0. \quad (2.18)$$

La igualdad se cumple si $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Transformando la expresión anterior a coordenadas cartesianas,

$$x^2 + y^2 = a^2 c^{-2}. \quad (2.19)$$

La relación anterior corresponde a una circunferencia de radio a/c con centro en el origen. Lo interesante es que a diferencia del caso de la métrica de Schwarzschild donde la singularidad es puntual, en este caso, la singularidad es anular, como se visualiza en la Figura 2.

2.2.3 AGUJERO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Otra solución de las ecuaciones importante para el desarrollo de la presente investigación es la métrica de Reissner-Nordström; esta solución posee simetría esférica, al igual que la métrica de Schwarzschild, sin embargo, no es una solución de vacío, ya que el cuerpo además de masa M posee una carga eléctrica Q , la cual genera un campo eléctrico alrededor del cuerpo esférico. El elemento de línea asociado a la métrica de Reissner-Nordström en coordenadas (t, r, θ, ϕ) está dado como sigue [20],

$$ds^2 = -\Delta c^2 dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.20)$$

donde

$$\Delta = 1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (2.21)$$

y

$$q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}, \quad (2.22)$$

siendo ϵ_0 es la constante de la permeabilidad eléctrica en el vacío.

La métrica tiene una singularidad esencial en $r = 0$, y también dos singularidades no esenciales cuando $\Delta = 0$, esto es,

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + q^2 = 0, \quad (2.23)$$

→

$$r = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{(GM)^2}{c^4} - q^2}. \quad (2.24)$$

Sea $r_g = \frac{GM}{c^2}$,

$$r_{\pm} = r_g \pm \sqrt{r_g^2 - q^2}. \quad (2.25)$$

Similarmente al agujero negro de Kerr, hay 2 singularidades no esenciales, es decir, dos horizontes de eventos. Es fácil ver que si $q = 0$, entonces $r_- = 0$ y $r_+ = \frac{2GM}{c^2}$, lo cual es consistente ya que devuelve los valores singulares para Schwarzschild.

A partir de (2.25) vemos 3 escenarios posibles:

1. $r_g > q$. Entonces tenemos dos horizontes de eventos.
2. $r_g = q$. Entonces tenemos que los dos horizontes de eventos coinciden. A este tipo de agujeros negros se les conoce como agujeros negros extrémales.
3. $r_g = q$. En este caso, tenemos la raíz de una cantidad negativa en la ecuación (2.25). Esto se interpreta como que no se forman horizontes de eventos, y se tiene una singularidad desnuda.

En esta tesis, sólo tendremos en cuenta el primer caso.

En la figura (3) se ilustran las diferentes regiones del espacio-tiempo asociadas a la métrica de Reissner-Nordström.

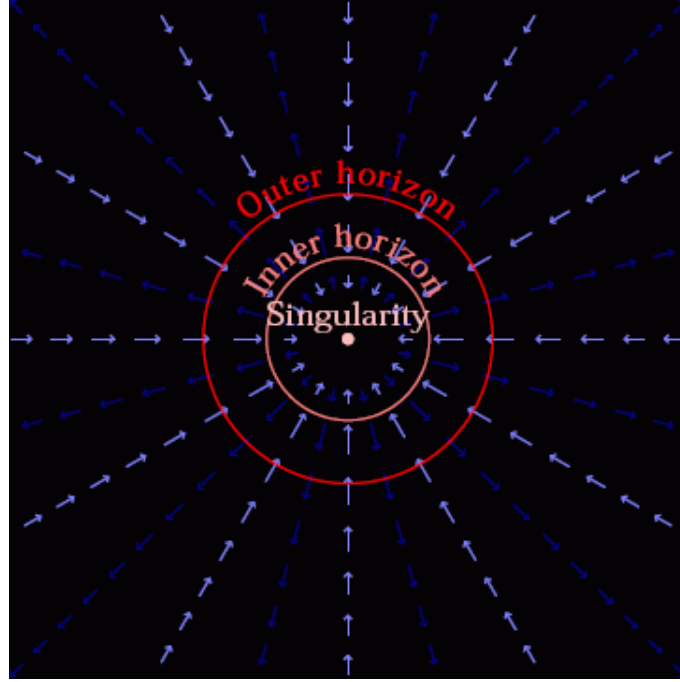


Figura 3: Diagrama de “embedding” bidimensional del agujero negro de Reissner-Nordström [1].

2.3 TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

Hawking, al aplicar teoría cuántica de campos al horizonte de eventos, predijo una radiación térmica. De este modo, es posible atribuir una temperatura al horizonte de eventos [45, 14],

$$\Theta_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_b M}, \quad (2.26)$$

donde \hbar y k_b son las constantes de Planck y de Boltzmann, respectivamente.

Notar que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Theta_H = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_b M} = 0. \quad (2.27)$$

La temperatura del horizonte de eventos es inversamente proporcional a la masa del agujero negro. La radiación de Hawking, implica que un agujero negro puede llegar a evaporarse en un lapso de tiempo finito.

Previo al descubrimiento teórico de esta radiación térmica, Bekenstein notó que el área del horizonte de eventos de un agujero no podía disminuir, puesto que el proceso de una partícula cayendo al agujero negro es irreversible. Al darse cuenta de la semejanza entre las propiedades del área del horizonte de eventos y la entropía, propuso la siguiente

relación [16],

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A. \quad (2.28)$$

Bardeen et al. formularon las 4 leyes de la termodinámica de agujeros negros [30], mediante una analogía entre área y entropía. Estas son:

Ley cero (equilibrio térmico): La gravedad superficial k (temperatura) de un agujero negro estacionario axialmente simétrico es constante en todo punto de su superficie.

Primera ley (conservación de la energía): Cuando un sistema que contiene un agujero negro cambia de un estado estacionario a otro, su masa varía como,

$$dM = \Theta dS_{BH} + \Omega dJ + \Phi dQ + \delta q, \quad (2.29)$$

donde dJ y dQ son las variaciones del momento angular total J y de la carga eléctrica total Q del agujero negro, respectivamente, y δq es la contribución al cambio en la masa total debido al cambio en la distribución estacionaria de materia exterior al agujero negro.

Segunda ley (la entropía nunca decrece): En cualquier proceso clásico, el área de un agujero negro A nunca decrece (por la relación que propuso Bekenstein), y por ende su entropía tampoco decrece, esto es,

$$\Delta S_{BH} \geq 0. \quad (2.30)$$

Los agujeros negros emiten radiación térmica, de modo que el área del horizonte de sucesos disminuirá. Eventualmente el agujero negro se evaporará incrementando la entropía del medio circundante, y por la relación que propuso Bekenstein la entropía asociada al horizonte de sucesos será menor, violando así la segunda ley, de modo que esta última se reformuló como:

Segunda ley generalizada: En cualquier proceso físico que involucre agujeros negros, la entropía generalizada \tilde{S} no decrece,

$$\Delta \tilde{S} = \Delta S_{BH} + \Delta S_M \geq 0, \quad (2.31)$$

donde S_{BH} es la entropía asociada al área del horizonte de sucesos de un agujero negro y S_M es la entropía asociada a la materia y la radiación que emite el agujero negro.

Tercera ley (ley de Nerst): Es imposible mediante algún procedimiento, sin importar cuán idealizado sea, reducir la temperatura de un agujero negro a cero en una secuencia finita de operaciones.

Por el resto de la tesis se trabajará con unidades naturales; $k_B = c = \hbar = k = G = 1$.

2.4 MASA IRREDUCIBLE

La masa M de un agujero negro de momento angular J y carga Q está dada por [26, 46],

$$M^2 = \left(M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2} \quad (2.32)$$

donde M_{ir} es la masa irreducible de un agujero negro,

$$M_{ir} = \frac{1}{2} \sqrt{r_+^2 + J^2}. \quad (2.33)$$

En la física de agujeros negros podemos pensar en dos tipos de procesos: reversibles e irreversibles. Los primeros son aquellos que dejan igual la masa irreducible, mientras que los segundos son aquellos en los cuales la masa irreducible se incrementa. Las propiedades que caracterizan los agujeros negros son: masa, momento angular y carga. Estas magnitudes pueden disminuir o aumentar, no obstante, la masa irreducible no disminuye bajo ninguna transformación. Notar que para un agujero negro de Schwarzschild se tiene que $Q = 0$ y $J = 0$, de modo que la masa irreducible coincide con la masa habitual.

2.5 CONJETURA DE WEYL

La termodinámica trata fundamentalmente de las transformaciones del calor en trabajo mecánico y de las transformaciones del trabajo mecánico en calor. Sabemos actualmente que la explicación última debe buscarse en la interpretación cinética, que reduce todos los fenómenos térmicos a los movimientos desordenados de átomos y moléculas. Al ser una cantidad ingente de partículas, sólo se consideran las propiedades en promedio. La rama de la mecánica que se encarga de estudiar esto es la mecánica estadística. El enfoque de la termodinámica pura es diferente. Las leyes se toman aquí como postulados basados en la evidencia experimental y a partir de ellos se deducen conclusiones [47]. La termodinámica pura estudia las propiedades macroscópicas de los sistemas materiales: temperatura, presión, volumen, etc. Asimismo existe una propiedad atribuida a los procesos físicos denominada entropía. Dicha propiedad es una cantidad escalar que dictamina el grado de ordenamiento de un sistema físico. Un sistema físico que está en equilibrio termodinámico, también posee entropía máxima.

El sistema físico más grande que puede ser estudiado es el universo. Sabemos gracias al desarrollo de la astronomía observacional que el universo primigenio era homogéneo, caliente y además materia y radiación estaban en equilibrio termodinámico, o lo que es lo mismo; en un estado de entropía máxima. Entonces ¿cómo pudo seguir evolucionando? Esta aparente paradoja podría resolverse asignando una entropía a la gravedad tal como sugirió Penrose [25].

Penrose conjeturó que a partir del tensor de Weyl, en principio, es factible mediante operaciones propias del álgebra tensorial, construir un tensor de orden cero, o lo que es lo mismo, un escalar que podría servir para cuantificar la entropía asociada a la gravitación. El tensor de Weyl es cero en los modelos de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, el cual describe bien la geometría del espacio-tiempo a grandes escalas suponiendo un universo homogéneo e isotropo tal que como se supone era en las épocas primordiales [40].

Entonces volviendo a la cuestión de cómo el universo pudo seguir evolucionando si la entropía era máxima, la que realmente era máxima es la entropía asociada a los objetos materiales, no al espacio-tiempo. De tal manera que el universo continuó su evolución porque la entropía gravitacional estaba lejos de ser máxima.

La entropía de la materia está fundamentada en la termodinámica clásica, que a su vez está fundamentada en la física estadística, la cual está desarrollada en parte por la mecánica cuántica. Como no poseemos una teoría cuántica de la gravitación, no podemos desarrollar una física estadística para el espacio-tiempo; sin embargo, en principio es factible construir un estimador clásico para la entropía gravitacional, y si Penrose tenía razón, entonces debe estar involucrado el tensor de Weyl [25].

El tensor de Weyl es un tensor de tipo (0,4) que contiene las componentes independientes del tensor de Riemann que no son capturadas por el tensor de Ricci. El tensor de Weyl puede ser obtenido a través del tensor de Riemann. El tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes, 10 de las cuales están dadas por el tensor de Ricci y el resto por el tensor de Weyl [24]:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}, \quad (2.34)$$

donde R_{abcd} son las componentes del tensor de Riemann, R_{ab} son las componentes del tensor de Ricci, R es el escalar de Riemann, $[\]$ se refiere a la parte antisimétrica, y n es el número de dimensiones del espacio-tiempo.

El comportamiento del tensor de Weyl es el esperado para la entropía gravitacional: es cero en el modelo homogéneo de Friedmann Robertson-Walker y es grande en el espacio-tiempo de Schwarzschild [24].

2.6 ESTIMADORES DE ENTROPÍA GRAVITACIONAL

La expresión de la entropía de Bekenstein-Hawking es válida únicamente sobre el horizonte de eventos. Para cualquier otra región del espacio-tiempo, no aplica la expresión [16]. Entonces surge la pregunta: ¿cómo determinar el valor de la entropía en una región diferente al horizonte de eventos? Para poder abordar esta cuestión se precisa de un estimador clásico.

Un estimador para la entropía gravitacional deberá poseer las siguientes características [41]:

- Debe ser definido positivo.
- Debe ser nulo si y sólo si $C_{abcd} = 0$.
- Debe medir localmente la anisotropía para un campo gravitacional libre.
- Debe reproducir la entropía de Bekenstein-Hawking para agujeros negros.
- Debe crecer monótonamente a medida que se forman estructuras en el universo.

A continuación presentaremos dos estimadores clásicos para la entropía gravitacional.

2.7 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN

Consideremos que la entropía de Bekenstein-Hawking es parte de una descripción más general. Como la entropía es proporcional al área de un horizonte de eventos, se propone que ésta puede ser expresada como una integral de superficie de algún campo vectorial tridimensional $\vec{\Psi}$ sobre algún horizonte $\vec{\sigma}$ [40] ,

$$S = k_s \int_{\sigma} \psi_i d\sigma_i, \quad (2.35)$$

donde k_s es una constante a determinar. Queremos hallar un campo vectorial $\vec{\Psi}$ tal que brinde una descripción convincente de la entropía de un agujero negro.

Para definir una entropía gravitacional reescribimos la integral (2.35) usando el teorema de la divergencia,

$$\int_{\sigma} \psi_i d\sigma_i = \int_V \nabla_i \Psi_i dV. \quad (2.36)$$

Se define la densidad de entropía como,

$$s := k_s \nabla_i \Psi_i. \quad (2.37)$$

Como en esta tesis se trabajará con espacios-tiempos esféricamente simétricos el campo vectorial sólo tiene componente radial \vec{e}_r , esto es,

$$\vec{\Psi} = P \vec{e}_r. \quad (2.38)$$

Por la conjetura de Penrose, se busca obtener P a través de algún escalar asociado al tensor de Weyl. Usaremos la contracción del tensor Weyl consigo mismo, esto es,

$$\mathcal{W} = C^{abcd} C_{abcd}. \quad (2.39)$$

Este escalar se denomina escalar de Weyl.

También haremos uso del escalar de Kretschmann.

$$\mathcal{K} = R^{abcd} R_{abcd}. \quad (2.40)$$

Se propone:

$$P^2 = \frac{C^{abcd} C_{abcd}}{R^{abcd} R_{abcd}}. \quad (2.41)$$

Para espacios-tiempos esféricamente simétricos y estáticos se tiene que $0 \leq P^2 \leq 1$. Esto puede estar relacionado para estados de mínima y máxima entropía.

Notar que cualquier componente de un tensor es un escalar, es decir, un elemento del campo sobre el cual se define el espacio tensorial. La diferencia con el escalar (2.39), es que este ya no forma parte de un objeto más general.

2.7.1 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN APLICADO A AGUJEROS NEGROS

AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Rudjord et al. aplicaron el estimador a la solución de Schwarzschild [40]. Dado que la solución es de vacío, el tensor de Riemann y el de Weyl son iguales, por lo que $P^2 = 1$ ¿Corresponde entonces a una configuración de entropía máxima? El campo vectorial evaluado en el radio del horizonte de eventos r_s nos tiene que reproducir la entropía de Bekenstein-Hawking, esto es,

$$S = k_s \int_{\sigma} \psi_i d\sigma_i = k_s \int_{\sigma} (r_s^2 - \epsilon^2) \text{sen}\theta d\theta d\phi. \quad (2.42)$$

Como se tiene una singularidad en el origen de coordenadas se tiene que integrar sobre una esfera de radio ϵ centrada en el origen y luego restársela a la integral (2.35), para posteriormente tomar el límite en el que épsilon tiende a cero.

$$S = k_s 4\pi(r_s^2 - \epsilon^2). \quad (2.43)$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

$$S = k_s 4\pi r_s^2 = k_s A. \quad (2.44)$$

Comparando con la expresión de la entropía de Bekenstein-Hawking (2.28), entonces

$$k_s = \frac{k_B c^3}{4\hbar G}. \quad (2.45)$$

Se calcula ahora la densidad de entropía en el espacio-tiempo de Schwarzschild. De la definición (2.37) veamos que,

$$s = k_s \nabla_i \Psi_i = k_s \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{h} \frac{P}{h_{rr}} \right), \quad (2.46)$$

$$s = \frac{2k_s}{r} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}. \quad (2.47)$$

Si $r \rightarrow \infty$ entonces $s \rightarrow 0$, lo cual tiene sentido ya que en el límite al infinito la métrica se reduce a la de Minkowski: un espacio-tiempo cuya curvatura es nula.

AGUJERO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Como se vio anteriormente, el agujero negro de Reissner-Nordström se caracteriza por una masa M y una carga fuente Q , de modo que generará un campo eléctrico, dejando de ser una solución de vacío. Notar que como es un caso estático, no rota, de modo que no posee campo magnético. El estimador ya ha sido aplicado a este agujero negro [24, 40].

De la ecuación (2.41), se tiene que necesitamos el escalar de Kretschmann y Weyl en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström (se hace uso de naturales) los cuales tienen los valores siguientes,

$$C^{abcd}C_{abcd} = \frac{48}{r^8}(Q^2 - Mr)^2, \quad (2.48)$$

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{8}{r^8}(6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4). \quad (2.49)$$

Sustituyendo en (2.41), obtenemos,

$$P^2 = \frac{\frac{48}{r^8}(Q^2 - Mr)^2}{\frac{8}{r^8}(6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4)}, \quad (2.50)$$

$$P^2 = \frac{6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 6Q^4}{6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}. \quad (2.51)$$

Sumando y restando Q^4 en el numerador, y separando términos se tiene que,

$$P^2 = \frac{6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}{6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4} + \frac{-Q^4}{6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}, \quad (2.52)$$

$$P^2 = 1 - \frac{Q^4}{6M^2r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}. \quad (2.53)$$

De esta expresión podemos observar que en el caso de Reissner-Nordström la entropía ya no puede corresponder al estado de máxima entropía, claro, si lo que se sugirió es correcto.

Recordemos que el campo vectorial $\vec{\Psi}$ es tridimensional, de modo que precisamos de la parte espacial del tensor métrico.

Las componentes de la parte espacial del tensor métrico se definen como,

$$h_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{i0}g_{j0}}{g_{00}}, \quad (2.54)$$

con $i, j = 1, 2, 3$. El elemento infinitesimal de superficie asociado a la parte espacial de la métrica está dado como,

$$d\sigma = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_{rr}}} d\theta d\phi. \quad (2.55)$$

Las componentes de la parte espacial de la métrica de Reissner-Nordström se pueden arreglar en una matriz diagonal tal que,

$$h_{ij} = \text{diag} \left(\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right), r^2, r^2 \text{sen}\theta \right), \quad (2.56)$$

de modo que el diferencial de superficie queda como $d\sigma = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$, lo cual tiene sentido ya que se trabajó en coordenadas esféricas.

Calculando la entropía para el horizonte de eventos externo,

$$S_+ = k_{RN} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P(r_+) r_+^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi - k_{RN} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P(\epsilon) \epsilon^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi, \quad (2.57)$$

$$S_+ = k_{RN} (P(r_+) r_+^2 - P(\epsilon) \epsilon^2) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}\theta d\theta d\phi, \quad (2.58)$$

tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, entonces,

$$S_+ = k_{RN} P(r_+) r_+^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}\theta d\theta d\phi. \quad (2.59)$$

Por lo tanto

$$S_+ = k_{RN} 4\pi r_+^2 \sqrt{1 - \frac{Q^4}{6M^2 r_+^2 - 12Mr_+ Q^2 + 7Q^4}} \quad (2.60)$$

Nótese que este resultado para la entropía sobre el horizonte de eventos, es menor que la entropía de Bekenstein-Hawking. Recordar que si $Q = 0$, el horizonte de eventos externo pasa a ser el radio de Schwarzschild. De tal manera que si $Q \rightarrow 0$, entonces la ecuación (2.60) se reduce a (2.44), y nos devuelve la expresión para la entropía sobre el horizonte de eventos en el agujero negro de Schwarzschild.

De (2.37) se puede calcular la densidad de entropía gravitacional del espacio-tiempo,

$$s_{RN} = k_{RN} \left| \frac{1}{r^2} \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) \right|, \quad (2.61)$$

notar que,

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) = 2rP + r^2 \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.62)$$

definiendo

$$2rP := s_{RN_1} = 2r \sqrt{1 - \frac{Q^4}{6M^2 r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}}, \quad (2.63)$$

$$r^2 \frac{\partial P}{\partial r} := s_{RN_2} = \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\sqrt{6} r^2 Q^4 M}{(6r^2 - 12rQ^2 + 7Q^4)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (2.64)$$

Obsérvese que si $Q \rightarrow 0$, entonces se obtiene la expresión para la densidad de entropía gravitacional para un agujero negro de Schwarzschild.

El estimador de Weyl-Kretschmann ha sido analizado en otros espacios tiempos. A continuación mencionaremos algunos de estos análisis asociados a objetos compactos.

Chakraborty et al. aplicaron el estimador a distintas clases de agujeros de gusano encontrando resultados viables para la entropía gravitacional [43]. En particular se analizó el agujero de gusano de Ellis, el agujero de gusano de Darmour-Solodukhin, la metrica exponencial de agujero de gusano y el agujero de gusano NUT.

Pérez et al. estudiaron las propiedades termodinámicas en el interior de un agujero negro regular bajo condiciones específicas, también se aplicó el estimador a un espacio tiempo de Schwarzschild-deSitter obteniendo un comportamiento adecuado para la entropía gravitacional.

Romero et al. analizaron el estimador para el agujero negro de Kerr [24], pero la formulación tuvo que ser modificada ya que la densidad de entropía divergía, por lo que el escalar P tuvo que ser redefinido como el escalar de Weyl, dando una descripción razonable de la densidad de entropía gravitacional.

2.8 ESTIMADOR DE BEL-ROBINSON

Le definición que postula Clifton et al. [41] está motivada por una analogía con la termodinámica clásica,

$$T_{grav} dS_{grav} = dU_{grav} + p_{grav} dV, \quad (2.65)$$

donde T_{grav} , S_{grav} , U_{grav} y p_{grav} denotan la temperatura efectiva, entropía, energía interna y presión isotrópica del campo gravitacional, respectivamente, y V es el volumen espacial.

El estimador depende del marco de referencia, de tal manera que precisaremos de un vector unitario tipo tiempo u^a y un vector unitario tipo espacio z^a ; el vector z se elije de modo que sea ortogonal a la colección de hipersuperficies generada cuando hacemos t constante y esté alineado con la tetraada principal de Weyl.

El tensor de Bel-Robinson es un elemento de un álgebra tensorial tal que sus componentes están dadas como sigue,

$$T_{abcd} = \frac{1}{4} \left(C_{eabf} C_{cd}^{ef} + C_{eabf}^* C_{cd}^{*ef} \right), \quad (2.66)$$

donde C_{abcd} es el tensor de Weyl. A partir de él, se deduce las expresiones para p_{grav} y ρ_{grav} , las cuales dependerán de la clase de espacio-tiempo que se está tratando. Las métricas que representan agujeros negros son campos gravitacionales tipo Coulomb.

Las expresiones para p_{grav} y ρ_{grav} para espacios-tiempos tipo Coulomb tienen la siguiente forma,

$$8\pi\rho_{grav} = 2\alpha\sqrt{\frac{2W}{3}}, \quad (2.67)$$

$$p_{grav} = 0, \quad (2.68)$$

donde α es un escalar constante y W (no confundir con el escalar de Weyl) es la “superdensidad de energía”. La cual está dada por,

$$W = \frac{1}{4} (E_a^b E_b^a + H_a^b H_b^a), \quad (2.69)$$

donde E_{ab} y H_{ab} son las partes eléctrica y magnética del tensor de Weyl, respectivamente (en analogía con la descomposición del tensor de Maxwell en parte eléctrica y magnética); las expresiones para E_{ab} y H_{ab} tienen la forma,

$$E_{ab} = C_{acbd} u^c u^d, \quad (2.70)$$

$$H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{acd} C_{be}^{cd} u^c u^e, \quad (2.71)$$

donde $\eta_{abc} = \eta_{abcd} u^d$ es el tensor alternante espacial ($\eta_{abcd} = \eta_{[abcd]}$, $\eta_{0123} = \sqrt{|g_{ab}|}$). E_{ab} y H_{ab} son simétricos sin traza y ortogonales a u^a .

Para definir la temperatura se hace uso de resultados de la termodinámica de agujeros negros y teoría cuántica de campos en espacios-tiempos curvos. La definición es de tal manera que es local (en lugar de ser válida para horizontes solamente) y en los límites

correctos reproduce los resultados de los cálculos semiclásicos en los espacios-tiempos de Schwarzschild y de Sitter. Por lo tanto se puede determinar la temperatura en cualquier punto del espacio-tiempo a través de la siguiente ecuación,

$$T_{grav} = \frac{|u_{a;b}l^ak^b|}{\pi}. \quad (2.72)$$

donde

$$k^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^a + z^a), \quad (2.73)$$

$$l^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^a - z^a). \quad (2.74)$$

Clifton et al. construyeron una ecuación termodinámica fundamental de la forma (2.65). En presencia de un campo de fluido perfecto de materia, se tiene que,

$$T_{grav}\dot{s} = (\rho_{grav}v), \quad (2.75)$$

donde el punto denota la derivada total.

Antes de mostrar la aplicación del estimador a agujeros negros introduciremos un sistema de coordenadas que será de utilidad.

2.8.1 COORDENADAS DE PAINLEVÉ-GULLSTRAND

Cualquier espacio-tiempo estático con simetría esférica puede ser escrito de forma canónica sin pérdida de generalidad como [48],

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.76)$$

Informalmente un espacio-tiempo se dice que es estático si y sólo si el tensor métrico es independiente del tiempo y además no rota.

Si la geometría contiene un horizonte, se tiene que,

$$N^2 = e^{\Phi(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right), \quad (2.77)$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (2.78)$$

esto es,

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.79)$$

Esta métrica tiene horizontes en los valores de r que satisfacen $b(r_H) = r_H$. Si un horizonte está presente, la geometría describe un agujero negro [48].

Para un espacio-tiempo esféricamente simétrico dependiente del tiempo, es natural escribir [49]

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r,t)} \left(1 - \frac{b(r,t)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{b(r,t)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.80)$$

Cualquier métrica esféricamente simétrica se puede escribir en términos de dos funciones desconocidas y aquí se están haciendo dependientes del tiempo. La localización del horizonte ahora corresponde con los valores que cumplan $b(r_H(t)) = r_H(t)$.

Conocer la evolución del horizonte $r_H(t)$ resulta imposible, ya que la matriz de coeficientes métricos tiene un determinante nulo, o lo que es lo mismo, es una matriz singular en el horizonte. Para lidiar con esta dificultad se opta por usar un sistema de coordenadas que se comporte bien en el horizonte. Entre estos sistemas encontramos el de Painlevé-Gullstrand (PG).

Partiendo de (2.80) se realiza el cambio de coordenadas $t \rightarrow T(r, t)$, donde T es el tiempo en PG. Tomando el diferencial total de T , se tiene que,

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial r} dr. \quad (2.81)$$

Se define $\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}$ y $\frac{\partial T}{\partial r} = T'$. Despejando dt ,

$$dt = \frac{1}{\dot{T}} dT - \frac{T'}{\dot{T}} dr, \quad (2.82)$$

sustituyendo en (2.80), se tiene,

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r,t)} \left(1 - \frac{b(r,t)}{r}\right) \left(\frac{1}{\dot{T}} dT - \frac{T'}{\dot{T}} dr\right)^2 + \left(1 - \frac{b(r,t)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.83)$$

Desarrollando y exigiendo que $g_{rr}=1$, se llega a la condición.

$$T' = \pm \frac{\sqrt{b(r,t)/r}}{1 - b(r,t)/r} e^{\Phi(r,t)} \dot{T}. \quad (2.84)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial, lineal y homogénea de primer orden para $T(r, t)$. Imponer (2.84) implica que.

$$g_{Tr} = \pm \frac{e^{-\Phi(r,t)}}{\dot{T}} \sqrt{b(r,t)/r}, \quad (2.85)$$

que se puede escribir como,

$$g_{Tr} = \pm C(r, T) \sqrt{b(r, T)/r} \equiv v(r, T); \quad (2.86)$$

esto define implícitamente a $c(r, T)$ y conduce a,

$$g_{TT} = -(C(r, T)^2 - v(r, T)^2). \quad (2.87)$$

Por lo tanto la métrica final, ahora en forma de PG, esta dada como,

$$ds^2 = -[C(r, T)^2 - v(r, T)^2]dT^2 + 2v(r, T)drdT + dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.88)$$

Cualquier espacio-tiempo esféricamente simétrico, independientemente de si es estático o no, siempre puede ponerse localmente en la forma (2.88).

Nótese que la métrica de Schwarzschild estática se obtiene tomando $C = 1$ y $v(r, T) = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$, esto es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}drdT + dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.89)$$

De forma explícita el tiempo de las coordenadas de Schwarzschild y el tiempo de las coordenadas de PG se relacionan de la siguiente forma [50].

$$T = t + 2r_s \left(\sqrt{\frac{r}{r_s}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{r/r_s} - 1}{\sqrt{r/r_s} + 1} \right| \right). \quad (2.90)$$

2.8.2 ESTIMADOR DE BEL-ROBINSON APLICADO A AGUJEROS NEGROS

AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

El estimador de Bel-Robinson ya fue aplicado al espacio-tiempo Schwarzschild [41]. Como se mencionó anteriormente, es posible hacer cambios de coordenadas para los ten-

sores métricos. Para calcular la entropía de Schwarzschild se trabaja en las coordenadas de Gullstrand-Painlevé (T, r, θ, ϕ) donde la métrica tiene la forma (2.89).

La representación matricial del tensor métrico es,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & -\sqrt{\frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

el determinante es $|g_{\mu\nu}| = -r^4 \sin^2 \theta$, y su inversa está dada como,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{\frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r}} & (1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

Este sistema de coordenadas admite hipersuperficies con t constante que intersectan el horizonte, y tienen geometría euclideana. Se eligen los siguientes vectores unitarios u^a y z^b .

$$u_a = \left(0; \frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2M}{r}|}}, 0, 0 \right), \quad (2.93)$$

$$z^a = \left(\frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2M}{r}|}}; 0, 0, 0 \right). \quad (2.94)$$

Estos vectores satisfacen que en la región $r < 2m$; $u^a u_a = -1$, $z^a z_a = 1$ y $u^a z_a = 0$. Entonces de (2.67) y (2.72) se tiene que la densidad de energía gravitacional y la temperatura en cada punto de la región $r < 2m$ están dadas como,

$$8\pi\rho_{grav} = \alpha \frac{2M}{r^3}, \quad (2.95)$$

$$T_{grav} = \frac{M}{2\pi r^2 \sqrt{|1 - \frac{2M}{r}|}}. \quad (2.96)$$

La ecuación (2.75) no puede ser aplicada a espacios-tiempos estacionarios ya que involucra estrictamente cambios en las cantidades termodinámicas a lo largo del tiempo. Por lo tanto se elige comparar dos espacios-tiempos distintos estacionarios de agujeros

negros que podrían representar la gravitación antes y después de que una pequeña cantidad de masa sea agregada al agujero negro. Entonces (2.75) toma la forma,

$$\delta S_{grav} = \frac{\delta(\rho_{grav}v)}{T_{grav}}. \quad (2.97)$$

Calculando la entropía gravitacional integrando en el volumen V encerrado por el horizonte de eventos (se ha tomado $v = z^a \eta_{abcd} dx^b dx^c dx^d$),

$$S_{grav} = \int_V s_{grav} = \int_V \frac{\rho_{grav}v}{T_{grav}} = \int_V \frac{\alpha r}{2} \sin\theta dr d\theta d\phi, \quad (2.98)$$

$$S_{grav} = \alpha \frac{A_{hor}}{4}. \quad (2.99)$$

Nótese que si se cumple que $\alpha = 1$, entonces se obtiene la siguiente expresión para la entropía gravitacional del agujero negro de Schwarzschild, y como se pedía en los criterios que debe cumplir el estimador, es igual a la entropía de Bekenstein-Hawking,

$$S_{grav} = \frac{A_{hor}}{4}. \quad (2.100)$$

El estimador de Bel-Robinson ha sido aplicado en otros espacios tiempos. A continuación mencionaremos algunos de estos análisis asociados a objetos compactos.

Chakraborty et al. evaluaron el estimador a distintos tipos de agujeros de gusano encontrando resultados viables para la entropía gravitacional [43]. Se aplicó al agujero de gusano de Ellis, pero la temperatura gravitacional dio cero, haciendo imposible calcular la entropía gravitacional, para resolver este problema, introdujeron otra expresión para la temperatura que les permitió determinar la entropía gravitacional. También se aplicó el estimador al agujero de gusano de Darmour-Solodukhin, y para la métrica exponencial de agujero de gusano y al agujero negro NUT. En este último, la entropía arroja varias expresiones, al ser la métrica no estrictamente Petrov tipo D.

Pérez et al. aplicaron el estimador al agujero negro de Kerr, calcularon la superdensidad de energía, la temperatura y la entropía gravitacional. Sin embargo, para los vectores elegidos la entropía gravitacional no está definida correctamente, aún el estimador podría arrojar un resultado apropiado bajo otro marco de referencia. [42, 51].

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En esta tesis se investiga si los estimadores clásicos de entropía gravitacional, el estimador de Weyl-Kretschmann y el estimador de Bel-Robinson, satisfacen la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros estudiando el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström. Para ello, se ha seguido la siguiente metodología:

1. Determinación del valor en que aumenta la masa irreducible en transformaciones que involucren agujeros negros de Reissner-Nordström.
2. Empleo del estimador de Bel-Robinson a un agujero negro de Reissner-Nordström.
3. Comprobación de si el estimador de Bel-Robinson reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking para un agujero negro de Reissner-Nordström.
4. Estudio del cambio de entropía gravitacional en la transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström empleando el estimador de Weyl-Kretschmann.
5. Estudio del cambio de entropía gravitacional en la transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström empleando el estimador de Bel-Robinson.
6. Estudio del cambio de entropía gravitacional en la transformación de un agujero negro de Reissner-Nordström a un agujero negro de Schwarzschild empleando el estimador de Weyl-Kretschmann.
7. Estudio del cambio de entropía gravitacional en la transformación de un agujero negro de Reissner-Nordström a un agujero negro de Schwarzschild empleando el estimador de Bel-Robinson.
8. Comprobación de que el estimador de Weyl-Kretschmann satisface la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros en ambos procesos de transformación.

-
9. Comprobación de que el estimador de Bel-Robinson satisface la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros en ambos procesos de transformación.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Supongamos que se tiene un agujero negro de Schwarzschild de masa M y se deposita sobre el horizonte de eventos del mismo una partícula de prueba de masa μ y carga e . Una vez que la partícula atraviese el horizonte de eventos, el agujero negro tendrá una carga neta e y la geometría del espacio-tiempo corresponderá a la solución de Reissner-Nordström.

De acuerdo a la Segunda Ley de la Termodinámica de los agujeros negros, en este proceso, la entropía (o el área del horizonte de eventos) del agujero negro resultante o bien se mantiene constante o bien se incrementa. A continuación, se demostrará en forma explícita que en esta transformación particular, la segunda ley sigue siendo válida.

4.1 PROCESOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES EN AGUJEROS NEGROS DE SCHWARZSCHILD Y REISSNER-NORDSTRÖM

Considere una partícula de prueba de masa μ , carga e y componente axial del momento angular L_z fuera de un agujero negro de Reissner-Nordström de masa en reposo M y carga Q . La energía de la partícula de prueba en el infinito se calcula como [4],

$$E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \quad (4.1)$$

donde,

$$\begin{aligned} \alpha &= r^4, \\ \beta &= eQr^3, \\ \gamma &= (eQr)^2 - \Delta L_z^2 - \mu^2 \Delta \rho^2 - \rho^4 [(p^r)^2 + (p^\theta)^2], \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + Q^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2, \\ p^r &= \frac{dr}{d\lambda}, \\ p^\theta &= \frac{d\theta}{d\lambda}.\end{aligned}$$

Se supone que la órbita de la partícula está en el plano ecuatorial ($\theta = 0$), de modo que $p^\theta = 0$. Sobre el horizonte de eventos $r = r_+$ ($\Delta = 0$) el valor de E es mínimo, esto es,

$$E = \frac{eQ}{r_+} + |p^r|. \quad (4.2)$$

Una vez que la partícula cae dentro del agujero negro, el cambio en la masa del agujero negro es igual a la energía de la partícula absorbida. Usando $e = \delta Q$,

$$\delta M = \frac{Q\delta Q}{r_+} + |p^r|. \quad (4.3)$$

Notar que $|p^r| \geq 0$ y $|p^r| = 0 \leftrightarrow p^r = 0$; por lo que se cumple la siguiente relación,

$$\delta M \geq \frac{Q\delta Q}{r_+}, \quad (4.4)$$

o lo que es lo mismo,

$$\delta M \geq \frac{Q\delta Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}. \quad (4.5)$$

Tomemos el caso en que se cumple la igualdad,

$$\delta M = \frac{Q\delta Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}. \quad (4.6)$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior, se obtiene,

$$M = M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}}, \quad (4.7)$$

donde M_{ir} se denomina masa irreducible. De la ecuación (4.7), la expresión para M_{ir} es,

$$M_{ir} = \frac{1}{2}r_+. \quad (4.8)$$

A continuación se mostrará explícitamente que $\delta M_{ir} \geq 0$.

Dado que $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ y $r_+ = 2M_{ir}$, notar que al diferenciar queda la expresión,

$$2\delta M_{ir} = \delta M + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\delta M - \frac{Q}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\delta Q. \quad (4.9)$$

La ecuación (4.3) puede reescribirse como

$$r_+\delta M - Q\delta Q = r_+|p^r|, \quad (4.10)$$

$$(M + \sqrt{M^2 - Q^2})\delta M - Q\delta Q = (M + \sqrt{M^2 - Q^2})|p^r|. \quad (4.11)$$

Dividiendo entre $\sqrt{M^2 - Q^2}$ en ambos lados de la igualdad,

$$\frac{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\delta M - \frac{Q}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\delta Q = \frac{|p^r|(M + \sqrt{M^2 - Q^2})}{\sqrt{M^2 - Q^2}}. \quad (4.12)$$

Simplificando,

$$\delta M + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\delta M - \frac{Q}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\delta Q = |p^r| \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \right). \quad (4.13)$$

Utilizando la expresión (4.9), se obtiene,

$$2\delta M_{ir} = |p^r| \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \right). \quad (4.14)$$

Por lo tanto, el incremento de la masa irreducible esta dado por.

$$\boxed{\delta M_{ir} = \frac{|p^r|}{2} \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \right) \geq 0.} \quad (4.15)$$

Esto prueba que la masa irreducible en un proceso reversible ($p^r = 0$) que involucre agujeros negros de Reissner-Nordström (o de Schwarzschild si hacemos $Q = 0$) permanece constante y en un proceso irreversible ($p^r \neq 0$) se incrementa. A partir de la expresión (4.15) podemos calcular en forma explícita (conociendo M, Q y p^r) el aumento de la masa irreducible.

Asimismo, de la relación $M_{ir} = \frac{1}{2}r_+$, se verifica que el área del horizonte de eventos está dado como sigue,

$$A_H = 16\pi M_{ir}^2. \quad (4.16)$$

4.2 ESTIMADOR DE BEL-ROBINSON APLICADO A UN AGUJERO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Anteriormente en la tesis se discutió que el estimador de Bel-Robinson sólo ha sido puesto a prueba en el espacio-tiempo de Schwarzschild [41] y en el espacio-tiempo de Kerr [42, 51]. Es de interés mostrar si este estimador reproduce correctamente la entropía de Bekenstein-Hawking. Esto es lo que se hará a continuación.

Para poder calcular este estimador es conveniente (como ya se mostró en la Sección 2.8.2) escribir la métrica en coordenadas de Painlevé-Gullstrand (T, r, θ, ϕ) .

De forma general para un espacio-tiempo esféricamente simétrico en coordenadas de PG, se tiene

$$ds^2 = -[C(r, T)^2 - v(r, T)^2]dT^2 + 2v(r, T)drdT + dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.17)$$

En particular, para la métrica de RN, $C = 1$ y

$$v(r, T) = -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}, \quad (4.18)$$

entonces,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dT^2 - 2\left(\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}\right)drdT + dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.19)$$

Esta es la métrica de Reissner-Nordström en coordenadas de Painlevé-Gullstrand. Si $r_q = 0$ se obtiene la métrica de Schwarzschild en PG nuevamente.

La representación matricial de la métrica es,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}) & -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

y su inversa es,

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} & (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Este sistema de coordenadas admite hipersuperficies con t constante que intersectan con el horizonte de eventos, y que tienen geometría euclidea. Para los vectores unitarios u^a y z^b se elijen los siguientes,

$$u_a = \left(0; \frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}|}}, 0, 0 \right), \quad (4.22)$$

$$z^a = \left(\frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}|}}; 0, 0, 0 \right). \quad (4.23)$$

Calculando u^a se tiene que,

$$u^a = g^{ab} u_b = g^{a1} u_1, \quad (4.24)$$

$$u^0 = -\sqrt{\frac{2m}{r} - \frac{q^2}{r^2}} \left(\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.25)$$

$$u^1 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Por lo tanto,

$$u^a = \left(-\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}; \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0 \right), \quad (4.27)$$

$$u^a u_a = u^1 u_1 = \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.28)$$

$$u^a u_a = u^1 u_1 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-1}. \quad (4.29)$$

Calculando z_a se tiene que,

$$z_a = g_{ab} z^b = g_{a0} z^0, \quad (4.30)$$

$$z_0 = g_{00} z^0 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.31)$$

$$z_1 = g_{10} z^0 = - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.32)$$

Luego

$$z_a = \left(- \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}; - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} \left(\left| 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right| \right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0 \right). \quad (4.33)$$

Nótese que para cualquier caso del valor absoluto, los vectores siguen cumpliendo la ortogonalidad. De modo que la elección de los vectores es correcta.

Para calcular la superdensidad de energía usamos la ecuación (2.69). Para un espacio-tiempo de Reissner-Nordström, la parte magnética del tensor de Weyl es cero,

$$W = \frac{1}{4} E_{ab} E^{ab}. \quad (4.34)$$

Calculando la componente eléctrica del tensor de Weyl con la paquetería “GRTensor” en “Mathematica”, tenemos que,

$$(E_{ab}) = \begin{pmatrix} -\frac{2(-Q^2+Mr)(Q^2-2Mr+r^2)}{r^6} & -\frac{2(-Q^2+Mr)\sqrt{-Q^2+2Mr}}{r^4} & 0 & 0 \\ -\frac{2(-Q^2+Mr)\sqrt{-Q^2+2Mr}}{r^4} & -\frac{2(-Q^2+Mr)(-Q^2+2Mr)}{r^4(Q^2-2Mr+r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{-Q^2+Mr}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{-Q^2+Mr \sin^2 \theta}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

y multiplicando el tensor consigo mismo en su forma contravariante, se obtiene,

$$E_{ab}E^{ab} = \frac{6(Mr - Q^2)^2}{r^8}. \quad (4.36)$$

Por lo tanto la superdensidad de energía queda dada por,

$$W = \frac{3}{2} \frac{(Mr - Q^2)^2}{r^8}. \quad (4.37)$$

Ya habiendo calculado W utilizamos la ecuación (2.67) para encontrar la densidad de energía gravitacional. Esto es,

$$8\pi\rho_{grav} = 2\alpha \frac{|Mr - Q^2|}{r^4}, \quad (4.38)$$

Para determinar la temperatura calculamos los vectores l y k en virtud de los vectores u y z con las expresiones (2.74) y (2.73) respectivamente, después se usa la ecuación (2.72) para hallar la temperatura gravitacional.

$$T_{grav} = \frac{|Mr - Q^2|}{2\pi r^3 \sqrt{|1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}|}}. \quad (4.39)$$

Ya habiendo determinado la densidad de energía gravitacional y la temperatura, es importante notar que si $Q = 0$, volvemos a obtener las expresiones de estas cantidades para el caso del agujero negro de Schwarzschild.

Calculamos la entropía, como

$$S = \int \frac{\rho \cdot v}{T}, \quad (4.40)$$

donde $v = z^a \eta_{abcd} dx^b dx^c dx^d$. Usando que solo z^0 es distinta de cero y $\eta_{0123} = \sqrt{g_{ab}}$. Entonces,

$$v = z^0 \sqrt{g_{ab}} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (4.41)$$

o lo que es lo mismo

$$v = z^0 dV = \frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}|}} dV. \quad (4.42)$$

Sustituyendo en expresión de la entropía,

$$S = \int \frac{\alpha}{4\pi} \frac{|Mr - Q^2|}{r^4} \frac{2\pi r^3 \sqrt{|1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}|}}{|Mr - Q^2|} \frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}|}} dV, \quad (4.43)$$

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_+} \frac{\alpha}{2r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi, \quad (4.44)$$

$$S = \pi\alpha r_+^2. \quad (4.45)$$

Multiplicando por 4, y dividiendo entre 4,

$$\boxed{S = \frac{\alpha}{4} A_+} \quad (4.46)$$

Esto coincide con la entropía de Bekenstein-Hawking (haciendo $\alpha = 1$).

A continuación realizaremos el mismo cálculo sin considerar unidades naturales. Teniendo ésto en cuenta, el elemento de línea es el siguiente,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{kGQ^2}{c^4 r^2} \right) dT^2 - 2c \left(\sqrt{\frac{2GM}{c^2 r} - \frac{kGQ^2}{c^4 r^2}} \right) dr dT + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.47)$$

donde k es la constante de Coulomb, que esta dada por,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4.48)$$

Para los vectores unitarios y ortogonales entre sí, u^a y z^b se elijen los siguientes,

$$u_a = \left(0; \frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{kGQ^2}{c^4 r^2}|}}, 0, 0 \right), \quad (4.49)$$

$$z^b = \left(\frac{1}{\sqrt{|1 - \frac{2GM}{r} + \frac{kGQ^2}{c^4 r^2}|}}; 0, 0, 0 \right). \quad (4.50)$$

Calculando la súper densidad de energía,

$$W = \frac{3G^2 (Mc^2r - kQ^2)^2}{2c^8 r^8}. \quad (4.51)$$

Se obtiene entonces que la densidad de energía gravitacional y la temperatura están dadas como,

$$8\pi\rho_{grav} = \beta 2\alpha \frac{G|Mc^2r - kQ^2|}{c^4 r^4}, \quad (4.52)$$

$$T_{grav} = \beta \frac{G|Mc^2r - kQ^2|}{c^4 2\pi r^3 \sqrt{|1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{kGQ^2}{c^4 r^2}|}}, \quad (4.53)$$

donde β es una cantidad que se introduce para que las unidades de la densidad de energía gravitacional y la temperatura gravitacional sean las correspondientes. Está dada por,

$$\beta = \frac{\hbar c}{k_B}. \quad (4.54)$$

Nótese que la entropía queda de la misma forma que en el caso de las unidades naturales, ya que después de simplificar, la integral es la misma que en el caso anterior.

$$S = \frac{\alpha}{4} A_+. \quad (4.55)$$

Comparando con la expresión de la entropía de Bekenstein-Hawking (2.28), entonces hacemos,

$$\alpha = \frac{k_B c^3}{\hbar G}. \quad (4.56)$$

Sustituyendo α y β en las ecuaciones (4.52) y (4.53) y simplificando, llegamos a las expresiones adecuadas para la densidad de energía gravitacional y para la temperatura gravitacional, medidas en Joules sobre metro cubico (J/m^3) y en Kelvins (K) respectivamente,

$$8\pi\rho_{grav} = 2 \frac{|Mc^2r - kQ^2|}{r^4}, \quad (4.57)$$

$$T_{grav} = \frac{\hbar G}{k_B c^3 2\pi r^3} \frac{|Mc^2r - kQ^2|}{\sqrt{|1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{kGQ^2}{c^4 r^2}|}}. \quad (4.58)$$

De la ecuación (2.25) se tiene que la relación entre la masa y la carga debe cumplir que,

$$Q \leq M\sqrt{\frac{G}{k}}. \quad (4.59)$$

O lo que es lo mismo, con $\lambda \leq 1$,

$$Q = \lambda M\sqrt{\frac{G}{k}}. \quad (4.60)$$

Obsérvese que la densidad de energía gravitacional y la temperatura gravitacional es cero cuando r tiene al infinito. Pero también es cero cuando se cumple la siguiente condición,

$$Mc^2r - kQ^2 = 0, \quad (4.61)$$

despejando r ,

$$r = \frac{kQ^2}{Mc^2}, \quad (4.62)$$

sustituyendo la ecuación (4,60) en la ecuación (4,62), se obtiene,

$$r = \lambda^2 \frac{MG}{c^2} = \lambda^2 r_g. \quad (4.63)$$

Cuando r toma el valor anterior, la temperatura y la densidad de energía son cero.

Procedemos con el gráfico de las expresiones obtenidas. Consideremos tres agujeros negros de Reissner-Nordström, los tres con masa $M = 10M_\odot$, donde M_\odot denota una masa solar, y cada agujero negro con carga $Q_1 = 0.1M\sqrt{\frac{G}{k}}$, $Q_2 = 0.5M\sqrt{\frac{G}{k}}$ y $Q_3 = 0.9M\sqrt{\frac{G}{k}}$ respectivamente.

A continuación mostraremos las gráficas de la densidad de energía gravitacional y de la temperatura gravitacional para cada carga. Las líneas punteadas corresponden al horizonte de eventos externo de cada agujero negro.

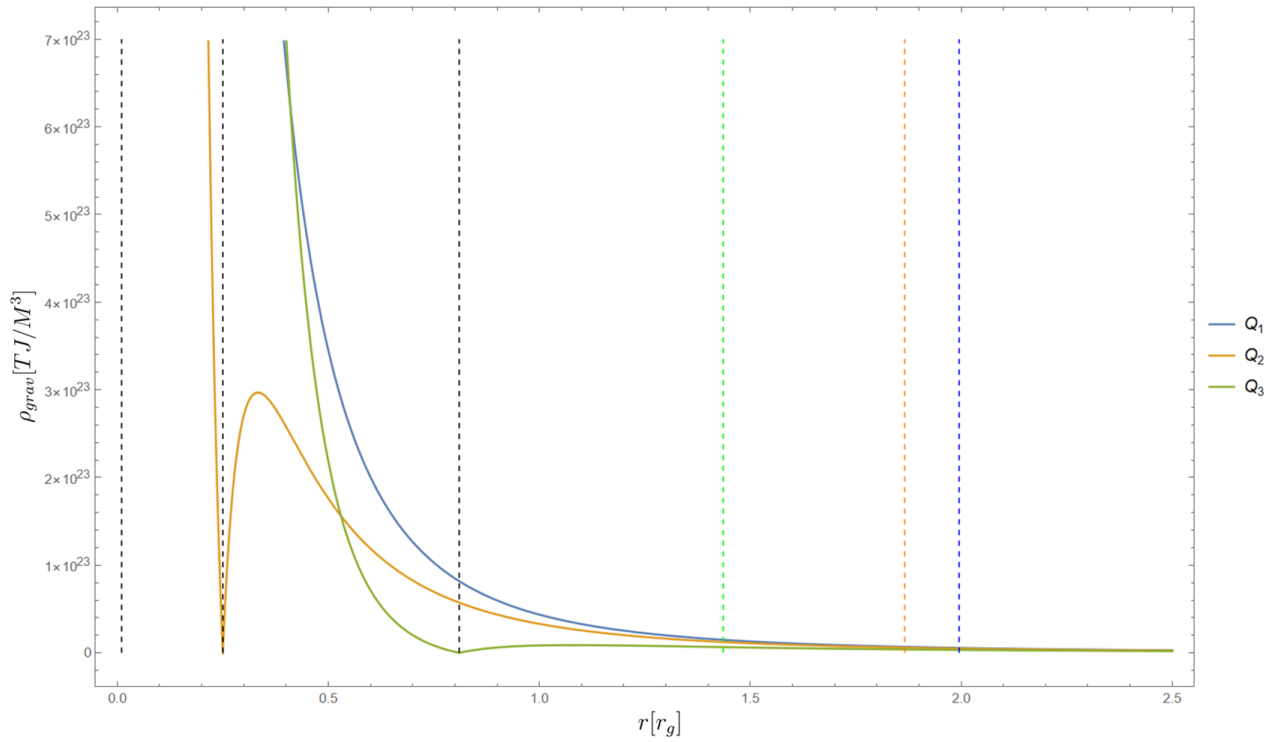


Figura 4: Gráfica de la densidad de energía gravitacional en función del radio.

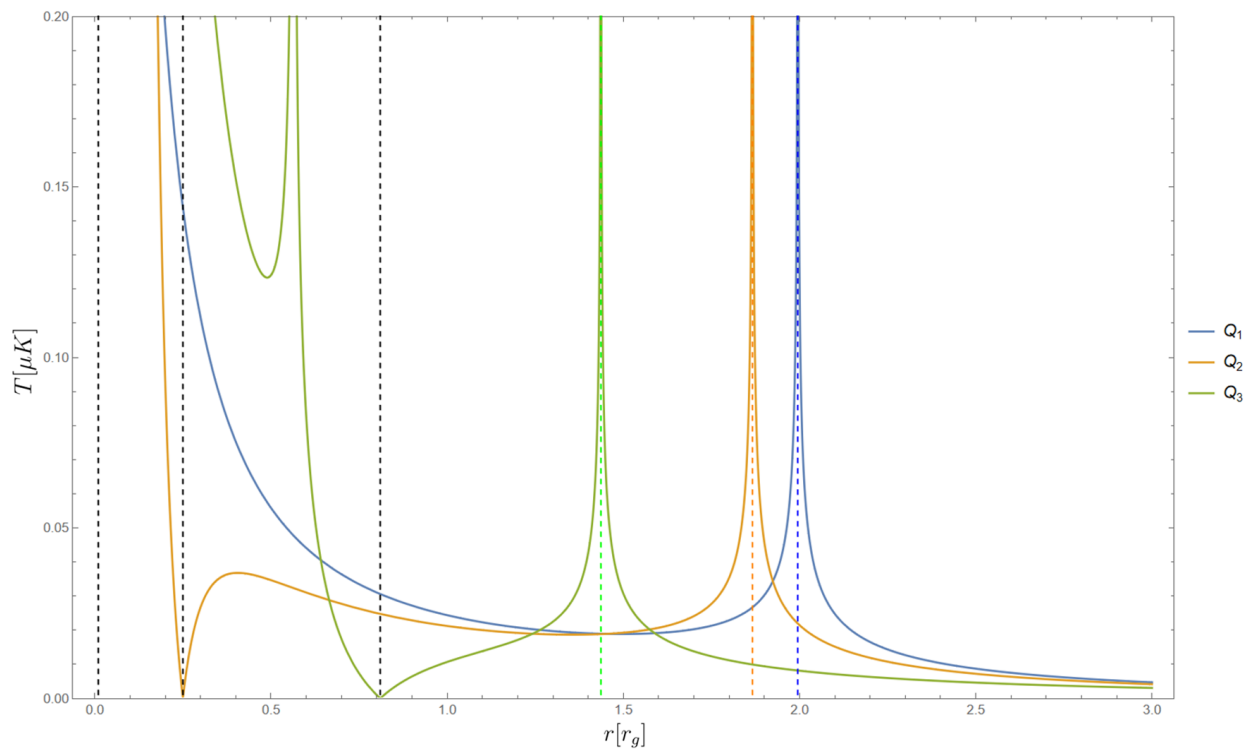


Figura 5: Gráfica de la temperatura gravitacional en función del radio.

De la Figura (4) se puede observar que la densidad gravitacional es infinita en la singularidad esencial y finita sobre el horizonte de eventos (interno y externo).

Nótese que la densidad de energía gravitacional es mayor para el agujero negro con carga Q_1 sobre su horizonte de eventos, que para los agujeros negros con carga Q_2 y Q_3 sobre sus respectivos horizontes de eventos. De tal forma que se cumple la relación,

$$\rho(r \geq r_{+1}, Q_1) \geq \rho(r \geq r_{+2}, Q_2) \geq \rho(r \geq r_{+3}, Q_3). \quad (4.64)$$

Basado en el comportamiento de la gráfica notemos que para un agujero negro de Reissner-Nordström, la densidad sobre y a partir del horizonte de eventos (interno y externo) es menor a medida que disminuye su carga.

Las líneas punteadas de color negro denotan los valores en que la densidad de energía es cero en el interior de los distintos agujeros negros cargados.

Nótese que una vez que la curva naranja pasa el valor radial $\lambda^2 r_g$ (donde la temperatura es cero en el interior del agujero negro), ésta vuelve a crecer, alcanzando un máximo, y después disminuye hasta que la temperatura es cero (y permanece así). Esto no sólo pasa con la curva naranja, pasa con las tres, pero no se aprecia en la gráfica.

Para determinar en qué valor de la densidad de energía gravitacional alcanza el valor máximo pasando el valor radial $\lambda^2 r_g$, precisamos conocer la derivada de la densidad de energía. La cual es,

$$\frac{d\rho_{grav}}{dr} = \frac{3Mc^2r - 4kQ^2}{4\pi r^5}. \quad (4.65)$$

Igualamos a cero para encontrar el valor radial donde la densidad de energía es máxima.

$$\frac{3Mc^2r - 4kQ^2}{4\pi r^5} = 0 \quad (4.66)$$

Despejando r , obtenemos que,

$$r = \frac{4kQ^2}{3Mc^2}. \quad (4.67)$$

Denotemos este valor como r_m .

Sustituyendo la ecuación (4,60) en r_m y simplificando, se tiene que,

$$r_m = \frac{4}{3}\lambda^2 r_g. \quad (4.68)$$

De esta expresión, verificamos que el máximo está después del valor donde la densidad de energía es cero ($r_m > \lambda^2 r_g$).

Evaluando r_m en la función (4,57) y simplificando, encontramos el valor máximo que toma la densidad de energía gravitacional.

$$\rho_m = \frac{3^3 M^4 c^8}{4^5 \pi k^3 Q^6}. \quad (4.69)$$

De la figura (5) se observa que en cada agujero negro, la temperatura tiene un comportamiento asintótico en el origen y sobre los horizontes de eventos (externos e internos). Después de los horizontes, la temperatura decrece rápidamente.

Las líneas de color negro denotan los valores donde la temperatura gravitacional es cero en cada agujero negro. Obsérvese para la curva verde, que toma el valor cero entre su horizonte de eventos interno y entre el horizonte de eventos externo.

Probaremos a continuación que esto siempre sucede. Primero veamos que el horizonte interno es menor que el valor sobre el cual cero la temperatura ($\lambda^2 r_g$) en el interior del agujero negro.

Como cualquier número real positivo menor o igual a 1 aumenta al aplicarle la raíz cuadrada, entonces se cumple que,

$$0 \leq 1 - \lambda^2 \leq \sqrt{1 - \lambda^2} \leq 1. \quad (4.70)$$

Despejando λ^2 , se tiene que,

$$\lambda^2 \geq 1 - \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad (4.71)$$

multiplicando en ambos lados por r_g ,

$$\lambda^2 r_g \geq r_g - r_g \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad (4.72)$$

$$\lambda^2 r_g \geq r_g - \sqrt{r_g^2 - r_g^2 \lambda^2}. \quad (4.73)$$

Despejando λ^2 de la ecuación (4.60), se obtiene,

$$\lambda^2 = \frac{k Q^2}{G M^2}. \quad (4.74)$$

Notar que,

$$r_g^2 \lambda^2 = \frac{k}{G} \frac{Q^2}{M^2} \frac{G^2 M^2}{c^4}, \quad (4.75)$$

$$r_g^2 \lambda^2 = \frac{k G Q^2}{c^4} = \frac{G Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} = q^2. \quad (4.76)$$

Sustituyendo r_g^2 en la desigualdad (4.73), se tiene que,

$$\lambda^2 r_g \geq r_g - \sqrt{r_g^2 - q^2}. \quad (4.77)$$

Para el caso del horizonte externo es trivial ya que $r_+ \geq r_g \geq \lambda^2 r_g$. Por lo tanto hemos mostrado que se cumple la siguiente condición,

$$r_- \geq \lambda^2 r_g \geq r_+. \quad (4.78)$$

Esto implica que el valor radial sobre el cual la temperatura gravitacional y la densidad de energía gravitacional es cero (en el interior del agujero negro), se encuentra entre el horizonte interno y el horizonte externo.

4.3 CAMBIO EN LA ENTROPÍA GRAVITACIONAL EN EL PROCESO DE TRANSFORMACIÓN DE UN AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD A REISSNER-NORDSTRÖM

Lo que se hará en las dos subsecciones siguientes es calcular la variación de entropía gravitacional con el estimador de Bel-Robinson y el estimador de Weyl-Kretschmann en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a uno de Reissner-Nordström para verificar que ambos estimadores cumplen la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros.

4.3.1 ESTIMADOR DE BEL-ROBINSON

Dado que tanto la entropía del agujero negro de Schwarzschild como la de Reissner-Nordström con este estimador coinciden con su entropía de Bekenstein-Hawking respectivamente, sólo tenemos que comprobar que la entropía de Bekenstein-Hawking no disminuye durante el proceso.

Para realizar la prueba, se precisa conocer la relación entre la masa irreducible del agujero negro de Schwarzschild y del agujero negro de Reissner-Nordström. De la ecuación (4.15) como inicialmente el agujero negro no tiene carga, hacemos $Q = 0$,

$$\delta M_{ir} = |p^r|, \quad (4.79)$$

o lo que es lo mismo,

$$M_{irRN} - M_{irS} = |p^r|, \quad (4.80)$$

donde M_{irRN} y M_{irS} es la masa irreducible para Schwarzschild y Reissner-Nordström, respectivamente. Despejando M_{irRN} , se tiene que,

$$M_{irRN} = |p^r| + M_{irS}, \quad (4.81)$$

Escribamos las expresiones de la entropía de Bekenstein-Hawking para ambos agujeros negros en virtud de esta relación.

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild,

$$S_S = k16\pi M_{irS}^2. \quad (4.82)$$

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Reissner-Nordström,

$$S_{RN} = k16\pi M_{irRN}^2 = k16\pi (|p^r| + M_{irS})^2, \quad (4.83)$$

$$S_{RN} = k16\pi (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r| + M_{irS}^2). \quad (4.84)$$

Restemos la ecuación (4.84) a la ecuación (4.82)

$$\boxed{S_{RN} - S_S = k16\pi (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|)}. \quad (4.85)$$

Note que esta cantidad nunca es negativa, por lo que implica que la entropía nunca disminuye.

Habiendo mostrado que la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros sigue siendo válida en el proceso de transformación estudiado, y como el estimador de Bel-Robinson coincide con la entropía de Bekenstein-Hawking en los dos tipos de agujeros

negros, éste estimador satisface la segunda ley de la termodinámica. En lo que sigue analizamos si el estimador de Weyl-Kretschmann también cumple dicha ley.

4.3.2 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN

A continuación escribiremos las expresiones de la entropía para el agujero negro de Schwarzschild y de Reissner-Nordström dadas por el estimador, respectivamente, y además haciendo uso de la expresión (4.82).

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild,

$$S_S = k16\pi M_{irS}^2. \quad (4.86)$$

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Reissner-Nordström con $P < 1$,

$$S_{RN} = k16\pi M_{irRN}^2 P, \quad (4.87)$$

$$S_{RN} = k16\pi (|p^r| + M_{irS})^2 P, \quad (4.88)$$

$$S_{RN} = k16\pi P (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r| + M_{irS}^2), \quad (4.89)$$

$$S_{RN} = k16\pi P M_{irS}^2 + k16\pi P (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|), \quad (4.90)$$

Restando la ecuación (4.86) a la ecuación (4.90)

$$S_{RN} - S_S = k16\pi(P - 1)M_{irS}^2 + k16\pi P (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|), \quad (4.91)$$

y luego factorizando, se obtiene que,

$$S_{RN} - S_S = k16\pi [(P - 1)M_{irS}^2 + P (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|)]. \quad (4.92)$$

Para que se satisfaga la segunda ley de la termodinámica debe cumplirse,

$$(P - 1)M_{irS}^2 + P (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|) \geq 0, \quad (4.93)$$

o lo que es lo mismo,

$$\boxed{P|p^r|^2 + 2M_{irS}P|p^r| + (P - 1)M_{irS}^2 \geq 0.} \quad (4.94)$$

Resolviendo la desigualdad,

$$|p^r| \geq M_{irS} \left[\frac{1}{\sqrt{P}} - 1 \right]. \quad (4.95)$$

Nótese que en caso de que el proceso sea reversible, esto es $|p^r| = 0$, para que la condición se satisfaga debe que ocurrir que $P = 1$. Pero como necesariamente $P < 1$ para un agujero negro de Reissner-Nordström, entonces la desigualdad no se cumple para los procesos reversibles, y por ende, en esta clase de procesos la entropía decrece, violando la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros.

Sólo en procesos irreversibles el estimador de Weyl-Kretschmann satisface que la variación de entropía gravitacional sea positiva en el proceso de transformación, siempre que los valores de $|p^r|$, M_{irS} , P sean tales que cumplan la condición (4.95).

4.4 CAMBIO EN LA ENTROPÍA GRAVITACIONAL EN EL PROCESO DE TRANSFORMACIÓN DE UN AGUJERO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM A SCHWARZSCHILD

La entropía también debería aumentar o mantenerse constante en el proceso de transformación del agujero negro de Reissner-Nordström resultante del proceso anterior, a un agujero negro de Schwarzschild. Cabe destacar que el “nuevo” agujero negro de Schwarzschild no tendrá necesariamente las mismas propiedades que el agujero negro de Schwarzschild inicial.

Antes de iniciar la prueba, debemos saber cuanto aumenta la masa irreducible. De la ecuación (4.15), hacemos $Q = e$, ya que la carga del agujero negro resultante en el proceso anterior coincide con la carga de la partícula entrante.

$$M_{irS2} - M_{irRN} = \frac{|p_2^r|}{2} \left(1 + \frac{M_{RN}}{\sqrt{M_{RN}^2 - e^2}} \right), \quad (4.96)$$

donde M_{irS2} es la masa irreducible del agujero negro de Schwarzschild generado al finalizar este proceso. La etiqueta “S2” es para diferenciar del proceso de la sección anterior. M_{irRN} denota la masa irreducible del agujero negro de Reissner-Nordström, que en este caso, lógicamente coincide con el caso anterior.

Definimos

$$w = 1 + \frac{M_{RN}}{\sqrt{M_{RN}^2 - e^2}}. \quad (4.97)$$

Notar que si $M_{RN} \gg e$ entonces $w \rightarrow 2$, de modo que la variación de la masa irreducible es similar al caso anterior.

Sustituyendo w en la expresión (4.96), se tiene que

$$M_{irS_2} - M_{irRN} = \frac{|p_2^r|}{2}w, \quad (4.98)$$

despejando M_{irS_2} ,

$$\boxed{M_{irS_2} = \frac{|p_2^r|}{2}w + M_{irRN}.} \quad (4.99)$$

4.4.1 ESTIMADOR DE BEL-ROBINSON

Como vimos en la sección anterior, las expresiones para la entropía del estimador de Bel-Robinson coinciden con las de Bekenstein-Hawking en el caso de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Por lo que en este proceso, nuevamente, basta con probar que la entropía de Bekenstein-Hawking cumple con la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros.

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Reissner-Nordström,

$$S_{RN} = k16\pi M_{irRN}^2 = k16\pi (|p^r| + M_{irS})^2. \quad (4.100)$$

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild,

$$S_{S_2} = k16\pi M_{irS_2}^2 = k16\pi \left(\frac{|p_2^r|}{2}w + M_{irRN} \right)^2, \quad (4.101)$$

$$S_{S_2} = k16\pi \left(\frac{|p_2^r|^2}{4}w^2 + w|p_2^r|M_{irRN} + M_{irRN}^2 \right). \quad (4.102)$$

Restando la ecuación (4.100) a la ecuación (4.102),

$$\boxed{S_{S_2} - S_{RN} = k16\pi \left(\frac{|p_2^r|^2}{4}w^2 + w|p_2^r|M_{irRN} \right).} \quad (4.103)$$

Esta cantidad es no negativa, por lo cual en este proceso la entropía nunca disminuye.

No importa si el proceso es reversible o irreversible, el estimador de Bel-Robinson en este proceso de transformación satisface la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros.

4.4.2 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN

A continuación escribiremos la expresiones de la entropía para el agujero negro de Reissner-Nordström resultante del proceso anterior y de Schwarzschild dadas por el estimador, respectivamente, y además haciendo uso de la expresión (4.99).

Entropía en el horizonte de eventos de un agujero negro de Reissner-Nordström ($P < 1$),

$$S_{RN} = k16\pi M_{irRN}^2 P. \quad (4.104)$$

Entropía final en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild ($P = 1$),

$$S_{S2} = k16\pi M_{irS2}^2, \quad (4.105)$$

$$S_{S2} = k16\pi \left(\frac{|p_2^r|}{2} w + M_{irRN} \right)^2, \quad (4.106)$$

$$S_{S2} = k16\pi \left(\frac{|p_2^r|^2}{4} w^2 + w|p_2^r| M_{irRN} + M_{irRN}^2 \right). \quad (4.107)$$

Restando la ecuación (4.104) a la ecuación (4.107), se obtiene,

$$\boxed{S_{S2} - S_{RN} = k16\pi M_{irRN}^2 (1 - P) + k16\pi \left(\frac{|p_2^r|^2}{4} w^2 + w|p_2^r| M_{irRN} \right)}. \quad (4.108)$$

Nótese que este incremento siempre es positivo ya que P es menor que 1.

No importa si el proceso es reversible o irreversible, el estimador de Weyl-Kretschmann en este proceso de transformación satisface la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros, puesto que la entropía gravitacional no decrece. No obstante, cabe destacar que si el proceso es reversible, esto es $|p_2^r| = 0$, la entropía gravitacional aumenta, no permanece constante.

CAPÍTULO 5

DISCUSIÓN

Cuando un agujero negro interactúa con el medio que lo rodea (materia y campos) su masa M , carga Q y momento angular por unidad de masa a pueden cambiar, esto es, pueden aumentar o disminuir. Sin embargo, el área del horizonte de eventos, esto es, su entropía, se mantiene constante o aumenta. Nunca decrece. En particular, en el Capítulo 4 se mostró que el área del horizonte de eventos es directamente proporcional a la masa irreducible al cuadrado. Luego es esta cantidad la que se mantiene constante si la transformación es reversible, o aumenta en caso de que la transformación sea irreversible.

En el Capítulo 4 se probó en forma explícita que en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström, mediante la inyección de una partícula P_1 con carga e en el horizonte de eventos, $\delta M_{ir} \geq 0 \iff |p^r| \geq 0$, siendo p^r la componente radial del momento lineal de la partícula. Además, se calculó explícitamente el valor en que aumenta la entropía con ambos estimadores en este proceso.

Por otro lado, se mostró por primera vez que el estimador de Bel-Robinson reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro de Reissner-Nordström. Asimismo, encontramos las expresiones de la densidad de energía gravitacional y la temperatura gravitacional, las cuales son consistentes con las expresiones obtenidas por Clifton et al. para un agujero negro de Schwarzschild, haciendo la carga nula.

Determinamos también la temperatura y la densidad, considerando unidades no naturales. Elaboramos las gráficas (4) y (5) para un agujero negro de diez masas solares, con valores distintos para la carga. Con ayuda de las gráficas, observamos que el valor de la densidad a partir del horizonte de eventos es mayor cuanto más pequeña sea la carga.

Por otra parte, la temperatura diverge en el origen y sobre el horizonte de eventos (interno y externo). Una vez pasado el horizonte, la temperatura disminuye rápidamente. Para un observador en el infinito, la temperatura que percibiría sobre el horizonte de eventos del agujero negro coincide con la radiación de Hawking.

También vimos que en el interior del agujero negro, el valor radial sobre el cual la temperatura y la densidad de energía es cero, es el mismo ($\lambda^2 r_g$). Respecto a la densidad, encontramos que alcanza un valor máximo después de que el valor radial supera $\lambda^2 r_g$.

Para el estimador de Bel-Robinson, la variación de entropía está en función del momento radial de la partícula y la masa irreducible que tiene el agujero negro de Schwarzschild. Explícitamente, la expresión es,

$$S_{RN} - S_S = k16\pi (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|). \quad (5.1)$$

Es fácil ver, que la entropía aumenta sólo si el proceso es irreversible. Y se mantiene constante sólo si el proceso es reversible. En consecuencia, el estimador de Bel-Robinson cumple con la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros.

Para el estimador de Weyl-Kretschmann, el cambio en la entropía está en función de la masa del agujero negro de Schwarzschild, del momento radial de la partícula entrante y de P (escalar que se introduce para el estimador en la Sección 2.7). Además, estos valores, deben ser tales que $|p^r| \geq M_{irS} [P^{-1/2} - 1]$ para que la variación entrópica no sea negativa.

Como se detalló en la Sección 4.3.2, si el proceso es reversible la entropía decrece. Por lo tanto, sólo es posible, para el estimador de Weyl-Kretschmann, satisfacer la segunda ley de la termodinámica si el proceso es irreversible

$$S_{RN} - S_S = k16\pi [(P - 1)M_{irS}^2 + P (|p^r|^2 + 2M_{irS}|p^r|)]. \quad (5.2)$$

En el Capítulo 4 se mostró en forma explícita el incremento entrópico con cada estimador en el proceso de transformación inverso, es decir, del agujero negro de Reissner-Nordström (obtenido al final del proceso previo) a un agujero negro de Schwarzschild (no necesariamente el mismo que teníamos al inicio del proceso anterior), mediante la inyección de una partícula P_2 con carga $-e$ en el horizonte de eventos.

Para el estimador de Bel-Robinson, el incremento de entropía está en función del momento radial de la partícula P_2 , la masa irreducible que tiene el agujero negro de Reissner-Nordström y de w (se definió en la Sección 4.4). Explícitamente, la expresión es,

$$S_{S2} - S_{RN} = k16\pi \left(\frac{|p_2^r|^2}{4} w^2 + w |p_2^r| M_{irRN} \right). \quad (5.3)$$

Notar que si el proceso es reversible ($|p_2^r| = 0$), la entropía se mantiene constante. Y si el proceso es irreversible ($|p_2^r| \neq 0$), la entropía aumenta. Por ende, el estimador de Bel-

Robinson, en este proceso, cumple la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros.

Para el estimador de Weyl-Kretschmann, la diferencia de entropía depende del momento radial de la partícula P_2 , la masa irreducible que tiene el agujero negro de Reissner-Nordström, de w y de el escalar P . Explícitamente, la expresión es,

$$S_{S_2} - S_{RN} = k16\pi M_{irRN}^2 (1 - P) + k16\pi \left(\frac{|p_2^r|^2}{4} w^2 + w|p_2^r| M_{irRN} \right). \quad (5.4)$$

Obsérvese que si el proceso es reversible, la entropía aumenta, en lugar de permanecer constante. Y si el proceso es irreversible, la entropía aumenta. Por lo tanto, el estimador de Weyl-Kretschmann cumple con la segunda ley de la termodinámica en este proceso. Asimismo, no hay condición alguna que deban cumplir las variables en este caso.

A continuación mostraremos cuánto cambia la masa y la carga del agujero negro al final de cada proceso de transformación.

5.1 PRIMERA TRANSFORMACIÓN

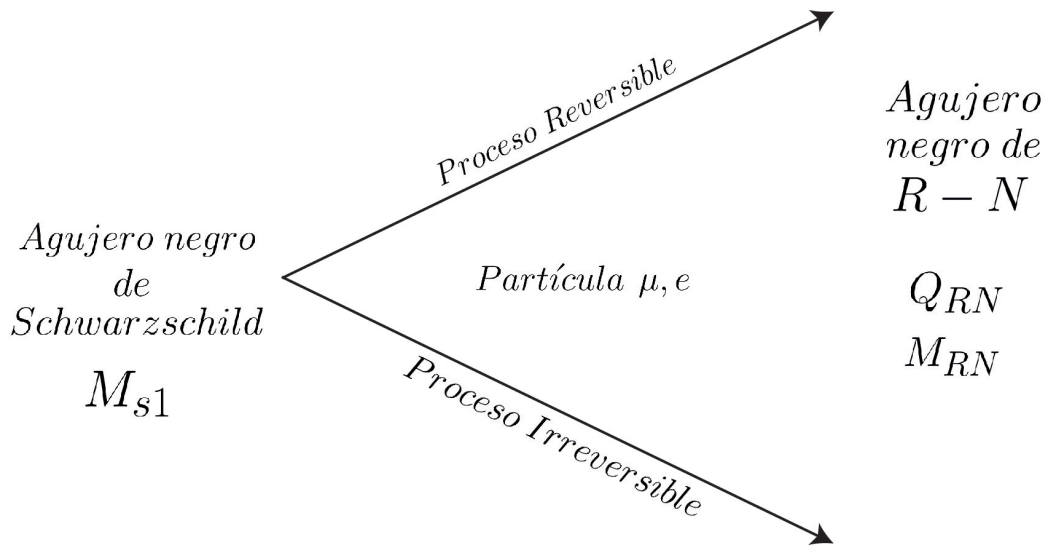


Figura 6: Imagen ilustrativa del proceso.

Sabemos que la masa y la masa irreducible del agujero negro de Reissner-Nordström se relacionan a través de la siguiente expresión,

$$M_{RN} = M_{irRN} + \frac{Q_{RN}^2}{4M_{irRN}}, \quad (5.5)$$

Al final del proceso la carga del agujero negro es la carga de la partícula, $Q_{RN} = e$.

Recordar que el incremento de la masa irreducible es,

$$M_{irRN} = |p^r| + M_{irS1}. \quad (5.6)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.5), tenemos que la masa del agujero negro al final del proceso es,

$$M_{RN} = |p^r| + M_{irS1} + \frac{e^2}{4|p^r| + 4M_{irS1}}. \quad (5.7)$$

Si el proceso es reversible, hacemos $p^r = 0$, se tiene que $M_{irRN} = M_{irS1}$ y además,

$$M_{RN} = M_{irS1} + \frac{e^2}{4M_{irS1}}. \quad (5.8)$$

Notar que $M_{irS1} = M_{S1}$, entonces de la ecuación (5.7), es fácil ver que independientemente de si el proceso es reversible o no, la masa del agujero negro aumenta en el proceso.

5.2 SEGUNDA TRANSFORMACIÓN (TRANSFORMACIÓN INVERSA)

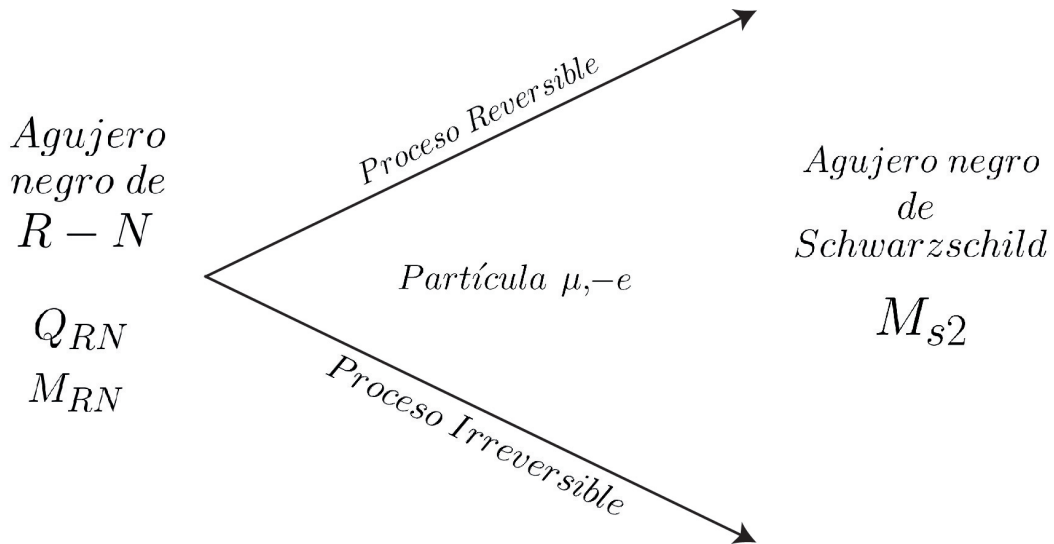


Figura 7: Imagen ilustrativa del proceso.

De la ecuación (4.96) y recordando que $M_{irS_2} = M_{S_2}$, se tiene que la masa del agujero negro de Schwarzschild está dada como,

$$M_{S_2} = \frac{|p_2^r|}{2} \left(1 + \frac{M_{RN}}{\sqrt{M_{RN}^2 - e^2}} \right) + M_{irRN}, \quad (5.9)$$

Si el proceso es reversible ($|p_2^r| = 0$), entonces se tiene que,

$$M_{S_2} = M_{irRN}. \quad (5.10)$$

Considerando que el proceso de la primera transformación fue reversible, entonces $M_{irRN} = M_{irS_1} = M_{S_1}$. Teniendo en cuenta esto, se tiene que,

$$M_{S_2} = M_{S_1}. \quad (5.11)$$

Por lo tanto, si el proceso es reversible en ambas transformaciones, entonces al final volvemos a tener el agujero negro de Schwarzschild que teníamos al principio. Además, el valor en que aumenta la masa en la primera transformación es el mismo valor en que disminuye en la segunda transformación.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de esta tesis fue determinar si la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros se satisface en ciertos procesos de transformación entre agujeros negros. Se mostró explícitamente que la entropía del horizonte de eventos se mantiene constante o aumenta tanto en el proceso de transformación de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström como en el proceso inverso.

Dado que los agujeros negros son esencialmente regiones del espacio-tiempo con una curvatura específica, es natural suponer que la entropía no sea una propiedad exclusiva del horizonte de eventos sino del propio espacio-tiempo. En ausencia de una teoría cuántica de la gravitación, los estimadores clásicos para la entropía gravitacional son, luego, una herramienta valiosa para investigar la evolución entrópica en distintas clases de espacios-tiempos.

El estimador de entropía gravitacional que cumplió sin ninguna restricción la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros, en los procesos de transformación analizados en esta tesis, es el estimador de Bel-Robinson. Este estimador podría aplicarse a otra clase de métricas que también sean solución a las ecuaciones de campo de Einstein, y explorar qué ocurre con la segunda ley de la termodinámica en un proceso de transformación.

Como trabajo a futuro, se plantea analizar si el estimador de Bel-Robinson satisface la segunda ley de la termodinámica en procesos de transformación de agujeros negros rotantes (espacio-tiempo de Kerr) a agujeros negros rotantes con carga (espacio-tiempo de Kerr-Newman). Por otro lado, sería interesante analizar la evolución entrópica gravitacional en, por ejemplo, el proceso de dos ondas gravitacionales colisionando entre sí, o el paso de una onda gravitacional sobre un agujero negro, la inyección de partículas en un agujero de gusano, etc. Hay una gran cantidad de procesos que merecen ser estudiados y

que podrían llevar a resultados que permitan comprender un poco más la naturaleza de la gravitación y del espacio-tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G.E. Romero and G.S. Vila. *Introduction to Black Hole Astrophysics*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 9783642395963. URL <https://books.google.com.mx/books?id=sCm6BQAAQBAJ>.
- [2] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10): 891–921, January 1905. doi: 10.1002/andp.19053221004.
- [3] Albert Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, January 1915.
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [5] Arthur Stanley Eddington. *Report on the Relativity Theory of Gravitation*. Fleetway Press, London, 1919.
- [6] Brian Patterson, Marisa Serna, Mihai A. Gearba, Ryan Olesen, Patrick O’Shea, J. Schiller, and Justin Steele. An undergraduate demonstration of gravitational time dilation. *The Physics Teacher*, 58(4):268–270, 2020.
- [7] Albert Einstein. Approximative integration of the field equations of gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1:688–696, 1916.
- [8] B. P. Abbott, et al. (LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116:061102, 2016.
- [9] Pedro V. Cunha and Carlos A. Herdeiro. Shadows and strong gravitational lensing: A brief review. *General Relativity and Gravitation*, 50:1–27, 2018.
- [10] George Gamow. The evolution of the universe. *Nature*, 162(4122):680–682, 1948.

- [11] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. In *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 424–434, March 1916.
- [12] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196, January 1916.
- [13] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [14] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220, August 1975. doi: 10.1007/BF02345020.
- [15] Samir D. Mathur. The information paradox: A pedagogical introduction. *Classical and Quantum Gravity*, 26(22):224001, 2009.
- [16] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, Apr 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.7.2333. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- [17] Jacob D. Bekenstein. Black holes and the second law. *Nuovo Cimento Lettere*, 4: 737, 1972.
- [18] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, R. Cavalieri, and et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116:061102, 2016.
- [19] Norman Gürlebeck. No-hair theorem for black holes in astrophysical environments. *Physical Review Letters*, 114:151102, 2015.
- [20] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, January 1916. doi: 10.1002/andp.19163550905.
- [21] Gunnar Nordström. On the energy of the gravitation field in einstein’s theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20:1238–1245, 1918.
- [22] Roy P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. , 11(5):237–238, September 1963. doi: 10.1103/PhysRevLett.11.237.
- [23] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, et al. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6:918, 1965.

- [24] Gustavo E. Romero, Romain Thomas, and Daniela Pérez. Gravitational entropy of black holes and wormholes. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(3): 925–942, sep 2011. doi: 10.1007/s10773-011-0967-8. URL <https://doi.org/10.1007/s10773-011-0967-8>.
- [25] Roger Penrose. General relativity. In Stephen W. Hawking and W. Israel, editors, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, pages 581–638. 1979.
- [26] Demetrios Christodoulou. Reversible and irreversible transformations in black-hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, 25:1596–1597, Nov 1970. doi: 10.1103/PhysRevLett.25.1596. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.25.1596>.
- [27] Roger Penrose and Robert M. Floyd. Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature Physical Science*, 229:177, 1971.
- [28] Stephen W. Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Physical Review Letters*, 26:1344, 1971.
- [29] Jacob D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, 9:3292, 1974.
- [30] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31:161–170, 1973.
- [31] Y. B. Zel’Dovich and A. A. Starobinskij. Creation of particles and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 61:2161–2175, 1971.
- [32] Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11241*, 2019.
- [33] Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Juan Carlos Algaba, Richard Anantua, Keiichi Asada, Iván Martí-Vidal, et al. First sagittarius a* event horizon telescope results. vi. testing the black hole metric. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2):L17, 2022.
- [34] Avery E. Broderick, Tim Johannsen, Abraham Loeb, and Dimitrios Psaltis. Testing the no-hair theorem with event horizon telescope observations of sagittarius a*. *The Astrophysical Journal*, 784(1):7, 2014.

- [35] Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Juan Carlos Algaba, Richard Anantua, Keiichi Asada, and Andrew E. Lowitz. First sagittarius a* event horizon telescope results. viii. physical interpretation of the polarized ring. *The Astrophysical Journal Letters*, 964(2):L26, 2024.
- [36] Daniela Pérez. *Agujeros Negros Astrofísicos*. PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata, 2016.
- [37] Subenoy Chakraborty, Subhajit Guha, and Ritabrata Goswami. An investigation on gravitational entropy of cosmological models. *International Journal of Modern Physics D*, 30(07):2150051, 2021.
- [38] Krzysztof Bolejko. Gravitational entropy and the cosmological no-hair conjecture. *Physical Review D*, 97(8):083515, 2018.
- [39] Sean M. Carroll and Aidan Chatwin-Davies. Cosmic equilibration: A holographic no-hair theorem from the generalized second law. *Physical Review D*, 97(4):046012, 2018.
- [40] Ø Rudjord, Øyvind Grøn, and Sigbjørn Hervik. The weyl curvature conjecture and black hole entropy. *Physica Scripta*, 77(5):055901, apr 2008. doi: 10.1088/0031-8949/77/05/055901. URL <https://doi.org/10.1088/00318949/77/05/055901>.
- [41] Timothy Clifton, George F. R. Ellis, and Reza Tavakol. A gravitational entropy proposal. *Classical and Quantum Gravity*, 30(12):125009, June 2013. doi: 10.1088/0264-9381/30/12/125009.
- [42] Daniela Pérez and Gustavo E. Romero. Gravitational entropy of Kerr black holes. *General Relativity and Gravitation*, 46(9):1774, September 2014. doi: 10.1007/s10714-014-1774-3.
- [43] Samarjit Chakraborty, Sarbari Guha, and Rituparno Goswami. How appropriate are the gravitational entropy proposals for traversable wormholes? *General Relativity and Gravitation*, 54(5):47, May 2022. doi: 10.1007/s10714-022-02934-3.
- [44] G.E. Romero. *Scientific Philosophy*. Springer International Publishing, 2018. ISBN 9783319976303. URL <https://books.google.com.mx/books?id=JuT5uAEACAAJ>.
- [45] S. W. Hawking. Black hole explosions? *nat*, 248(5443):30–31, March 1974. doi: 10.1038/248030a0.
- [46] Demetrios Christodoulou and Remo Ruffini. Reversible transformations of a charged black hole. *Phys. Rev. D*, 4:3552–3555, Dec 1971. doi: 10.1103/PhysRevD.4.3552. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.3552>.

-
- [47] E. Fermi and A. Scotti. *Termodinamica*. Programma di mat. fisica elettronica. Bollati Boringhieri, 1972. ISBN 9788833951829. URL <https://books.google.com.mx/books?id=AYejAAAACAAJ>.
- [48] M. Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. Computational and Mathematical Physics. American Inst. of Physics, 1995. ISBN 9781563963940. URL https://books.google.com.mx/books?id=Zo_vAAAAMAAJ.
- [49] Alex B. Nielsen and Matt Visser. Production and decay of evolving horizons. *Classical and Quantum Gravity*, 23(14):4637–4658, July 2006. doi: 10.1088/0264-9381/23/14/006.
- [50] Thomas Mueller and Frank Grave. Catalogue of Spacetimes. *arXiv e-prints*, art. arXiv:0904.4184, April 2009. doi: 10.48550/arXiv.0904.4184.
- [51] Daniela Pérez and Gustavo E. Romero. Gravitational entropy of a Kerr black hole. In *2nd Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Astrophysics, and Cosmology*, pages 133–138, 2015.