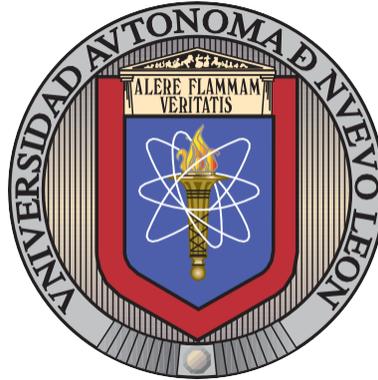


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



EL MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUON
EN QED

POR

FREDDY ARTURO FLORES GALVÁN

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN INGENIERÍA

FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



EL MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUON
EN QED

POR

FREDDY ARTURO FLORES GALVÁN

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN INGENIERÍA

FÍSICA INDUSTRIAL

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JULIO 2024

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “El Momento Magnético Anómalo del Muon en QED”, realizada por el alumno Freddy Arturo Flores Galván, con número de matrícula 1595103, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial.

El Comité de Tesis

Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Director

Dr. Max Salvador Hernández

Revisor

Dr. José Rubén Morones Ibarra

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco

Subdirector de Estudios de Posgrado

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León

JULIO 2024

DEDICATORIA

*Le dedico este trabajo a mis seres queridos, que son:
Mis padres, mi pareja y mis hermanos, a los cuales les debo
todo en la vida y sin ellos no podría haber logrado objetivo
alguno incluido este trabajo.*

*A mis padres, Patricia y Alfredo que desde mi niñez nutrieron
mi curiosidad, asistieron con su guía y consejos en los buenos
y malos momentos, así como un amor incondicional, cálido y
longevo.*

*A mis hermanos Eslhy y Amel, los cuales son mis amigos
inseparables y compañeros de aventuras, los cuales hacen
feliz el día con día, suerte tengo de que estemos juntos en la
vida.*

*A Laura, mi pareja y compañera de vida ayer, hoy y siempre.
Valiente y decidida, artífice en parte de que este y muchos
logros personales en realidad sean conjuntos, todo a través de
apoyo moral, comprensión, cariño y amor.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis seres queridos.

Agradezco el trabajo inmenso de los Doctores que me han educado a lo largo de muchos años de estudio, en particular al Dr. Francisco, al cual debo gran parte de mi conocimiento.

Agradezco a la FCFM y a la UANL por haber sido mi casa de estudios superiores y la catapulta a ser un miembro con contribución social.

A las instituciones gubernamentales que fomentan el desarrollo de la ciencia, como lo es el mismo CONACYT, el cual brindó apoyo en recursos de todo tipo, tanto humanos y económicos para poder lograr esta meta.

Contents

1	Resumen	1
2	Discrepancias numéricas entre observables	2
3	Planteamiento del problema	4
4	Marco teórico	6
4.1	Stern-Gerlach. La cuántica	6
4.2	Las observables, los operadores, la explicación	9
4.3	La polarización de las ondas de la luz	9
4.4	Los kets	12
4.4.1	Productos	14
4.4.2	Representación matricial	16
4.4.3	Los conmutadores	17
4.4.4	Los conmutadores fundamentales	17
4.5	La interpretación de la mecánica cuántica	18
4.6	Los operadores y el tiempo	19
4.7	La mecánica cuántica no relativista	19
4.7.1	Los operadores como dinamismo	22
4.8	El oscilador armónico unidimensional	22
4.9	Las rotaciones	24
4.10	La relación entre el momento magnético y el spin	26
4.11	La ecuación de Pauli	27
4.12	Las notaciones relativistas; métricas y operadores	28
4.13	Partículas elementales	28
4.13.1	Los leptones	29
4.13.2	Los quarks	30
4.13.3	Mesones y Bariones	30
4.14	Las matrices gamma	31
4.15	La mecánica cuántica relativista	31
4.15.1	Klein-Gordon y Dirac	32
4.15.2	El cálculo de g	32
4.16	La teoría cuántica de campos	33
4.16.1	Fourier y la descomposición espectral	33
4.16.2	El campo electromagnético, su cuantización	34
4.17	Teoría de perturbaciones	37
4.18	Diagramas de Feynman	37
4.18.1	El cálculo del g en QFT	39
4.18.2	Las contribuciones supersimétricas	39
5	Metodología para el cálculo	41
6	Cálculo	44
6.1	Parámetros de Feynman	45
7	Exposición de los resultados.	48

8	Justificación del problema	50
9	Hipótesis	50
10	Objetivo general	50
11	Objetivos específicos	50
12	Metodología	51
13	Cronología de actividades futuras	51
14	Referencias	52

List of Figures

1	Conceptualización del experimento de Stern-Gerlach	6
2	Visualización del lo mencionado	7
3	Resultado esperado con los modelos clásicos	8
4	Resultado reflejando la naturaleza cuántica	8
5	Experimento de Stern-Gerlach con campo EM en dirección z	9
6	Experimento de Stern-Gerlach con campo EM en dirección x	10
7	SG con campo EM en dirección Z aplicado a S_x+	10
8	SG con EM en dirección z aplicado a S_z+	10
9	Aproximación del mínimo de la función V	23
10	Exageración de la interacción	27
11	Ortogonalidad entre K y los vectores de polarización	36
12	Vértice fundamental	38
13	Vértice con interacciones no identificadas	41
14	Vértice de interacción con corrección radiativa	44
15	Primera sección del diagrama	44
16	Segunda sección del diagrama	44
17	Segunda sección del diagrama	45
18	Números de referencia	48
19	Descripción pictórica de la situación, [32]	49

List of Tables

1	Resumen de las propiedades principales de los leptones	30
2	Propiedades de los quarks	30
3	Algunas características de las partículas supersimétricas	40
4	Partículas supersimétricas y su tiempo de vida medio	40

Lista de abreviaturas

Campos electromagnéticos (EM)
Eigenestados (EK)
Eigenvalor (EV)
Experimento de Stern-Gerlach (SG)
Fermi Lab (FNAL)
Ket de estado (SK)
Modelo estándar (SM)
Momento magnético anómalo del muon (MMAM)
Laboratorio Nacional de Brookheaven (BNL)
Operador de aniquilación (OP-)
Operador de creación (OP+)
Partes por millón (ppm)
Teoría cuántica de campos (QFT)
Transformaciones de Galileo (TG)
Transformaciones de Lorentz (TL)
Libro 1 (L.1)
Libro 1 (L.2)
Libro 1 (L.3)
Libro 1 (L.4)
Libro 1 (L.5)
Libro 1 (L.6)
Libro 1 (L.7)
Libro 1 (L.8)
Libro 1 (L.8)
Libro 1 (L.9)
Libro 1 (L.10)
Libro 1 (L.11)
Libro 1 (L.12)
Libro 1 (L.13)
Libro 1 (L.14)
Libro 1 (L.15)
Libro 1 (L.16)
Libro 1 (L.17)

Resumen

Palabras clave: momento del muon, QFT, segundo orden.

El avance de la ciencia humana hace posible la existencia de experimentos cada vez más precisos, esto ha llevado a plantear observables que antaño parecería imposible medir, una de estas son los denominados momentos magnéticos anómalos del electrón, muon y del tauon.

Los momentos magnéticos anómalos de estas 3 partículas se modelan primordialmente mediante una de las más conocidas áreas de la física, la teoría cuántica de campos, la cual tiene hitos en su seno, uno de los cuales presume una concordancia entre teoría y experimento sin precedentes en precisión en la ciencia, sin embargo, a la par existen procesos que esta es incapaz de explicar.

En este trabajo revisamos las cuestiones del cálculo a segundo orden en la teoría cuántica de campos tomando solo en cuenta las contribuciones electromagnéticas.

Discrepancias numéricas entre observables

Con los avances teóricos realizados a inicios del siglo pasado, esto es, el nacimiento de la cuántica, y de la relatividad especial y general, la comprensión de los actores en el mundo material tuvo que ser revisada de manera detallada.

La física es una ciencia natural, esto implica que ella se apega al método científico; por ende toda predicción que se realiza en base a modelos teóricos, debe de ser contrastada con experimentos; para ello es que las teorías físicas, dentro del mismo formalismo exponen explícitamente observables, como lo pueden ser la masa, la carga, el momento, etc; sin embargo, no todas las observables presentan la misma facilidad de ser cuantificadas.

De especial interés es el hecho de que ciertas teorías distintas son capaces de exponer las mismas observables físicas pero desde su propio marco de referencia, asignándoles valores e interpretaciones que pueden tener diferencias sustanciales. Una de estas observables es el momento magnético de una corriente eléctrica.

El momento magnético de una corriente puede ser individualizado, y obtener así el momento magnético de una carga realizando una trayectoria cerrada; esta observable es susceptible de ser medida mediante experimentos realizables en el presente; a la par es una característica de la materia con carga que se mueve en un campo magnético, la cual es exhibida de manera explícita en la física clásica, la mecánica cuántica relativista y la mecánica cuántica de campos; ello es capaz de brindar un indicador para determinar cuál teoría es correcta al momento de realizar las predicciones correctas.

Con la experimentación es determinado que la teoría con mayor precisión entre teoría y experimento es la teoría cuántica de campos; esto ha sido así para muchas observables con la posible excepción del muon.

En la física de partículas se conoce como momento magnético anómalo a la diferencia entre la teoría cuántica relativista y la teoría cuántica de campos, dividido por 2; tal observable ha sido medida desde los años 50 por diversos laboratorios en el mundo para diversas partículas; de especial interés sigue siendo en la comunidad la experimentación con el muon; experimentos siguen siendo llevados a cabo en la actualidad; siendo el último de ellos en esta misma década el cual fue realizado en el FermiLab de los EUA; los experimentos cada vez más precisos acrecentan la discrepancia entre teoría y experimento; en la actualidad tal medida está en un orden de 4.2 sigmas.

Se hacen esfuerzos teóricos [18], [19] y experimentales cada vez mayores para la resolución de esta problemática; esfuerzos encaminados han sido en la creación de aceleradores de muones más energéticos y con más precisión estadística; resolución de las ecuaciones que modelan al muon por medio de supercomputadoras así como la revisión de los cálculos que se tienen hasta el momento.

Una de las ramas que marca otro de los esfuerzos es en el campo teórico; donde la pauta es asumir que la teoría actual no es capaz de describir el fenómeno del momento magnético anómalo del muon, y por tal motivo se parte en la búsqueda de física que engloba los modelos actuales; uno de estos modelos es la supersimetría.

La supersimetría asume la existencia de partículas que nunca han sido observadas ni en la

naturaleza ni en los aceleradores; sin embargo, es una teoría que engloba a la tenida actualmente, y que además es consistente consigo misma.

En este trabajo se estudiará la familiarización con los cálculos a segundo orden en la teoría cuántica de campos, en donde se tomarán en cuenta las interacciones electromagnéticas.

Planteamiento del problema

El inicio del siglo XX marcó grandes ideas para las teorías físicas. Las teorías que actualmente se denominan clásicas; en ese momento afrontaban ciertas situaciones complejas, una de las más importantes es la no covariancia de las ecuaciones de Maxwell mediante las transformaciones de Galileo (TG) [L.4].

Ciertos conceptos se daban por válidos a un nivel no cuestionable; uno de tales conceptos dentro de las transformaciones de Galileo es que el tiempo es absoluto. Einstein dió por válidas las ecuaciones de Maxwell y tomó como incorrectas las TG; involucrando en su lugar a las transformaciones de Lorentz (TL).

Las suposiciones de Einstein dieron pie a la conocida como relatividad especial; en estas se asume como un principio que la velocidad de la luz es absoluta.

En tiempos similares, y con la problemática de la catástrofe ultravioleta; es propuesto por parte de Planck la cuantización entre la transmisión de energía; esto inicia la cuantización de las teorías; y da un paso en la dirección correcta al ser el efecto fotoeléctrico explicado mediante estas nuevas ideas.

Las 2 teorías anteriores son incompatibles con las teorías convencionales; la relatividad viola el principio impuesto en las TG de que el tiempo es un absoluto; a la par la teoría electromagnética teoriza y muestra que la luz exhibe un comportamiento de onda; aún más, experimentalmente la luz exhibe comportamientos ondulatorios, dicho esto; el tratarla como si la luz estuviera hecha por partículas es capaz de explicar el fenómeno fotoeléctrico.

Las teorías de la relatividad y de la cuántica fueron puestas a prueba en experimentos; ambas han mostrado a la fecha gran concordancia con fenómenos diversos.

Las 2 teorías fundamentales pasaron entonces a ser la relatividad general y la teoría cuántica; sus evoluciones han dado cabida a grandes campos, como lo son la teoría cuántica de campos (QFT), ésta ha podido brindar descripciones muy precisas de propiedades físicas de la materia y sus constituyentes.

Al ser tomadas en cuenta las diversas interacciones que emergen de una teoría cuántica de campos y con la revisión de las partículas virtuales se llega a la creación del modelo estándar de la física.

Una gran variedad de situaciones experimentales han sido propuestas, y confirmadas después por la misma teoría del modelo estándar (SM), sobre todo en lo referente a los constituyentes básicos de la materia.

Entre los constituyentes básicos de la materia, el ya conocido electrón se conocía con cierto detalle, partícula de carga negativa con una masa relativamente pequeña en comparación de otras partículas conocidas, sin embargo de especial importancia por diversas propiedades y cualidades físicas; como el hecho de que es uno de los componentes de los átomos [10].

Con el tiempo diversas partículas nuevas han sido encontradas en la naturaleza, un ejemplo de ello es el hallazgo del muon en 1936 [1].

Con el paso del tiempo diversos experimentos han sido realizados para determinar las propiedades de esta partícula, en específico las formas en las cuales este interactúa con los campos magnéticos, es decir, cómo afectan estos al desplazamiento de los muones; y con ello contrastar teoría y experimento [20]. Una de las cualidades en específico para poder realizar el contraste es con la medición del momento magnético anómalo del muón (mmam).

De ellos se parte que desde los años 50 han sido realizados experimentos [4], incluyendo una variedad de 3 en el CERN.

Cercano al año 2000 se realizaron experimentos [2] con una precisión de 0.54 partes por millón (ppm) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL), los cuales midieron el mmam, y se llegó, aún con el grado de precisión dicho, a que existía una discrepancia entre teoría y experimento de entre 2 y 3 desviaciones estándar.

El último experimento que ha sido llevado a cabo fue en el Fermi Lab (FNAL), dando los primeros resultados en el año 2021, tuvo este una precisión de 0.46 ppm [5]; y por sí solo exhibe una desviación estándar de 3.3; aún más, esto hace que la desviación estándar mundial entre teoría y experimento sea de 4.2 [3],[14].

En el futuro próximo se realizarán experimentos en Japón [9]; los cuales incluirán una forma distinta de realizar este experimento.

Mencionado lo anterior, se parte a la exploración de las interacciones que pueda provocar la supersimetría [2], y detectar si su inclusión, de realizarse, es capaz de prever mejor concordancia entre teoría y experimento.

Marco teórico

Este trabajo tratará, al final, sobre la interacción de cargas eléctricas con otras partículas; por ello se partirá de motivantes electromagnéticos.

Con el advenimiento de las teorías cuánticas se tuvieron que explorar las características de las partículas conforme a esta teoría; cualidades tan clásicas como la masa y la carga fueron revisadas. Cuestiones como la energía también lo fueron, y con ello se llegó a la teoría ondulatoria y/o a la mecánica matricial; ambas teorías describen el universo mediante diferentes enfoques.

Las 2 teorías anteriores son capaces de describir con gran precisión muchos sucesos; uno de los más famosos es el referente a la energía de ligadura del Hidrógeno, la cual en realidad fue obtenida antes de la formulación de la mecánica ondulatoria o la matricial [L.1].

Con tal capacidad de predicción se confrontó la teoría con sistemas cada vez más complejos; como lo son partículas interactuantes con campos a voluntad, de especial interés es la interacción con campos electromagnéticos (EM).

Exponer la problemática deseada a abordar en este trabajo es imposible sin un entendimiento correcto de la teoría cuántica de campos; la cual requiere de los conceptos de la relatividad especial y la teoría cuántica; por este motivo se expondrá la ruta más autocontenida y directa posible.

4.1 Stern-Gerlach. La cuántica

La teoría cuántica nace de manera no relativista; esto es, no tiene la invariancia misma que se exige a las teorías modernas, por lo cual, si bien la mecánica ondulatoria y/o la matricial son capaces de explicar muchos sucesos, también son incapaces de explicar muchos otros. Habrá de utilizarse la concepción por medio de las ideas del álgebra lineal, por ende el desarrollo estará muy cercano a la formulación de Dirac.

Supóngase el siguiente experimento realizado por primera vez por O. Stern y W. Gerlach en 1922 [L.2]

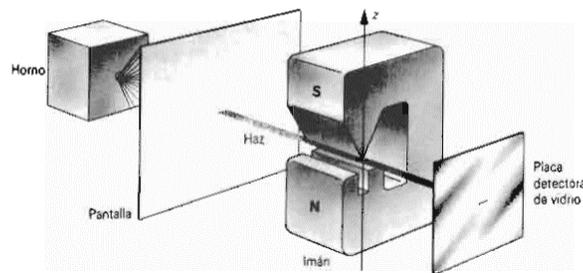


Figure 1: Conceptualización del experimento de Stern-Gerlach

Téngase un haz de partículas con carga (el experimento es con partículas de plata calentadas y provenientes de un horno), las cuales viajarán a través de un campo magnético no uniforme (ver figura 1). Estas partículas, al poseer carga y estar en movimiento, interactuarán con el campo magnético no uniforme. Esto se consigue mediante superficies muy afiladas; el cual tiene, por lo menos, dos direcciones. Acorde a Griffiths, "The electric field diverges away from a (positive) charge; the magnetic field line curls around a current" [L.5]; esto conforme las ecuaciones de Maxwell.

Para un sistema como lo es el átomo de plata, se tiene una conexión entre la interacción con un campo magnético externo y el momento angular del electrón en la órbita con la menor energía de ligadura (el electrón que se encuentra en un estado de mayor energía);

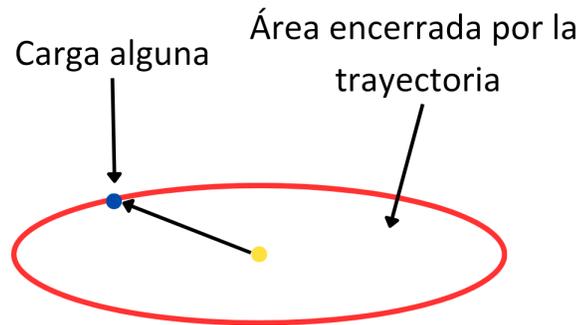


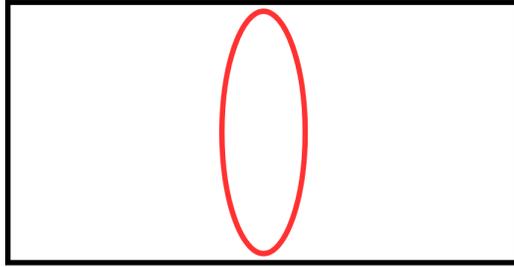
Figure 2: Visualización del lo mencionado

Conforme la teoría clásica; se tendrá una relación de la siguiente manera[L.3]:

$$\mu_L = \frac{q}{2m} L \tag{1}$$

Esto es; μ_L es el momento magnético debido a un momento angular L; es decir, la interacción entre la carga y el campo magnético puede ser entendida totalmente como una cualidad dinámica de la carga; por ello se le conoce como momento magnético orbital. Conforme una característica dinámica, se espera que ésta, en un experimento como el dicho, adquiera cualquier dirección; combinado con el campo magnético no uniforme se espera el siguiente resultado:

Traza



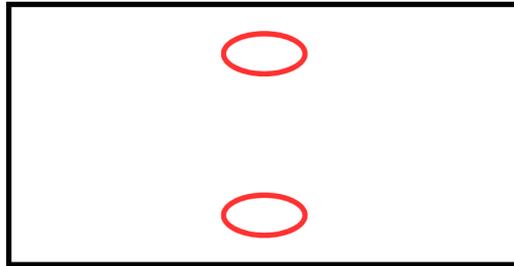
Resultado Clásico

Figure 3: Resultado esperado con los modelos clásicos

Se revisa la imagen de acuerdo a la teoría clásica. Conforme las partículas se desplazan, al interactuar con el campo magnético, se desviarán de su trayectoria original, "A localized current distribution in a nonuniform magnetic induction experiences a force proportional to its magnetic moment" [L.6]; nótese que no existe un nombre unánime para B ; se tomará a B como la cantidad fundamental del magnetismo, y se le llamará campo magnético. Debido a la aleatoriedad del campo y de las mismas partículas, es esperado que el resultado sea como la imagen 3; sin embargo, lo que sucede es lo observado en la imagen 4:

La ecuación número (1) es a la que todo este trabajo estará abocado; a su reformulación por medio de la mecánica cuántica; después en la mecánica cuántica relativista, seguirá el cálculo de esta misma en la QFT y por último será utilizada la hipótesis para proponer correcciones.

Traza



Resultado Cuántico

Figure 4: Resultado reflejando la naturaleza cuántica

El fallo es notable; donde debería de tenerse un continuo se tiene una discretización marcada; como ha sido dicho, este hecho es incompatible con las teorías clásicas. Notable es este hecho, no se ha cometido un error de cálculo; la teoría arroja un resultado que no se observa; por esto es que se menciona la incompatibilidad.

El experimento citado no solo brinda un fenómeno que expone de manera concreta la cuantización del momento angular, se pretende que el causante sea alguna característica física que interactúa de manera similar al momento angular; sin embargo, esto es solo una analogía; esta característica es por sí misma una característica física; y con ello la naturaleza a niveles atómicos o inferiores; expone también la necesidad de la existencia de una característica sin análogo en la mecánica clásica de las partículas.

4.2 Las observables, los operadores, la explicación

Conviene mencionar que los operadores pueden ser representados en diferentes espacios, en general se utilizará la palabra matriz A , para designar al operador A .

El experimento de Stern-Gerlach (SG) es un motivante que permite construir la teoría cuántica desde la interacción cargas-campos electromagnéticos; se partirá de algunas definiciones y se seguirá en general el camino marcado por J.J. Sakurai en su libro "Modern Quantum Mechanics". La versión en general es indistinta; sin embargo, nuestra fuente es la edición del año 2020. Se expone la manera en la que la teoría pretende explicar el fenómeno dicho y con ello se dará el tratamiento sucesivo en este trabajo.

4.3 La polarización de las ondas de la luz

Realícense sucesivos experimentos de Gerlach y observemos sus resultados. Obtendremos haces en los cuales sus componentes cumplen todos una cualidad, a un haz de tal naturaleza se le denomina polarizado.

Primero, se cambiará la notación, asignemos a cada haz proveniente de un experimento de SG el símbolo S , un símbolo $+$ o $-$ según corresponda y un subíndice que indica la dirección del campo en el experimento de SG de donde tal haz proviene.

Primero, y solo por completitud, hagamos referencia al mismo experimento ya realizado en la sección anterior. Un diagrama sería el siguiente:



Figure 5: Experimento de Stern-Gerlach con campo EM en dirección z

Téngase entonces que, el haz incidente se separa en 2 partes, que de manera sugerente serán llamadas componentes. Tómese la denominada S_{z+} y sométasele a un SG con EM en dirección x ; se observará lo siguiente:

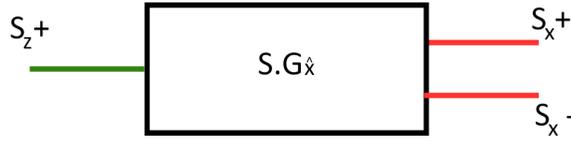


Figure 6: Experimento de Stern-Gerlach con campo EM en dirección x

Tómese una vez más el haz denominado S_x+ y sométase este a un SG con EM en dirección z; se obtendrá lo siguiente:



Figure 7: SG con campo EM en dirección Z aplicado a S_x+

Esto es, se vuelven a tener 2 componentes del tipo S_z con signo más o menos según corresponda; esto es contrastante con ciertos aspectos; el que es de importancia en esta ocasión es el hecho de que S_x+ proviene de un haz polarizado tal que cumplen que al ser sometido a un EG con EM en dirección z se obtiene S_z+ ; sin embargo se observan S_z+ y S_z-

Por último, téngase el siguiente EG con EM en dirección z para S_z+ , será observado lo siguiente:



Figure 8: SG con EM en dirección z aplicado a S_z+

Esto es, se obtiene aquello que es esperado, ya que S_z+ está polarizado justamente para cumplir lo observado en la imagen inmediata anterior.

Por último llamémosle al haz proveniente del horno (el haz inicial) como α , que por lo observado y esperado no está polarizado.

En todos los experimentos anteriores, se obtiene, de aplicar algún SG donde la polarización del haz incidente no coincida con la dirección del EM en el SG, dos haces; diremos que los haces incidentes están conformadas por 2 partes, y que el SG es capaz de separalos en ellas; la única excepción es cuando la dirección del EG y la polarización del haz incidente coincide, en este caso se obtiene el mismo haz incidente.

Notemos que, S_z+ es una representación del haz de partículas; postularemos que está representación (y la de todos los haces) es parte de un espacio vectorial definido sobre el campo de los complejos y que cada haz es un vector en tal espacio. Luego si α consta de 2 partes, a saber S_z+ y

S_Z- entonces vemos a estos 2 como vectores como una base del espacio, entonces podemos escribir:

$$|\alpha\rangle = C_1 |S_Z+\rangle + C_2 |S_Z-\rangle \quad (2)$$

Donde se utiliza $|\rangle$ para denotar que se trata de un vector. Se explora este detalle en secciones posteriores.

Nótese entonces que, al aplicar algún experimento de SG y a la par encontrarnos interesados solo en algún haz, los SG actúan como operadores sobre vectores, a saber:

$$SG |\alpha\rangle = C_1 |S_Z+\rangle \quad (3)$$

Donde SG representa a un operador; esto anterior es una ecuación de autovalores. De nuestra base elegida podemos escribir:

$$SG |S_x+\rangle = C_3 |S_Z+\rangle + C_4 |S_Z-\rangle \quad (4)$$

Luego al aplicar SG con EM en dirección z obtenemos; una vez más de encontrarnos interesados en un solo haz resultante, lo siguiente:

$$SG |S_x+\rangle = C_3 |S_Z+\rangle \quad (5)$$

Esto es, una vez más una ecuación de autovalores.

Por último, si el haz incidente tiene la misma polarización que el EG se obtiene:

$$SG |S_z+\rangle = C_z |S_Z+\rangle \quad (6)$$

Una vez más una ecuación de autovalores. Con la motivante dada, daremos por hecho que la representación por medio del álgebra lineal será adecuada.

Las siguientes aclaraciones son necesarias. El espacio vectorial es definido sobre el campo de los complejos, por ende serán tenidos que algunos vectores solo diferirán por un factor de fase (algún número del tipo $exp(i\theta)$) postulamos que el estado físico del sistema (en el caso anterior los haces) es representado por cualquiera de tales vectores; esto es, son representaciones equivalentes. Con estas consideraciones de transfondo es posible llegar a las expresiones explícitas de los vectores en nuestro caso anterior, en el caso de tomar a los vectores S_Z+ y S_Z- como base lo siguiente:

$$|S_x+\rangle = \frac{1}{2(1/2)} |S_Z+\rangle + \frac{1}{2(1/2)} |S_Z-\rangle \quad (7)$$

$$|S_x-\rangle = -\frac{1}{2(1/2)} |S_Z+\rangle + \frac{1}{2(1/2)} |S_Z-\rangle \quad (8)$$

$$| S_y+\rangle = \frac{1}{2(1/2)} | S_z+\rangle + i\frac{1}{2(1/2)} | S_z-\rangle \quad (9)$$

$$| S_y\rangle = \frac{1}{2(1/2)} | S_z+\rangle - i\frac{1}{2(1/2)} | S_z-\rangle \quad (10)$$

Estos vectores, y su representación de esta manera permiten el estudio sistemático de las rotaciones.

Téngase un haz de luz, el cual tiene en sus componentes solo una frecuencia, a lo cual suele denominarse monocromático; de la electrodinámica se tendrá que a esta radiación le corresponde un campo eléctrico oscilatorio en alguna dirección perpendicular a su desplazamiento, esto de la invariancia gauge seleccionada adecuadamente; supóngase entonces que la dirección de propagación es z, y la dirección perpendicular en donde oscila su campo eléctrico asociado es en la dirección x; entonces se tendrá a E expresado como alguna función de onda con propagación en la dirección z; recordemos que basta con tener una función de valores reales que tenga una relación de la forma kz-wt; esto de las ondas viajeras.

Es posible expresar algo similar para algún rayo de luz al cual un campo eléctrico asociado en la dirección y (o x de ser requerido).

Al tipo de radiación anterior se le conoce como linealmente polarizada, esto es una traducción directa de linearly polarized; y pueden ser obtenidas experimentalmente mediante filtros que seleccionen componentes del campo en alguna dirección. Tales mismos filtros son capaces de seleccionar direcciones cuyas componentes no se encuentran solo en alguna dirección que subyace sobre los ejes coordenados, esto no debería de sorprender, al final el filtro es desconocedor de los ejes coordenados que nosotros asignamos, y solo tomará en cuenta las diferencias entre su construcción y la onda incidente.

Conforme a lo último dicho, es de esperar, que la radiación que se obtiene de algún filtro, el cuál no brinda una radiación coincidente con los ejes coordenados, sea una superposición de las ondas polarizadas en x e y ; hemos así construido un rayo de luz el cual tiene un campo eléctrico asociado polarizado en un plano perpendicular a la dirección de propagación del rayo; esto es así una generalización de la radiación linealmente polarizada.

En el lenguaje del álgebra lineal, se puede asociar que una onda electromagnética monocromática, con polarización en un plano, es una combinación lineal de campos electromagnéticos oscilantes en una sola dirección contenidos en el plano dicho. Esta idea es provechosa para la realización de la teoría.

Explorada una situación física conocida clásicamente, se partirá a la búsqueda de una teoría matemática que auxilie en la descripción del fenómeno buscado.

4.4 Los kets

Las ideas de la sección anterior han de ser aplicadas, se suele denominar a este vector como vector de estado, nos inclinaremos por la terminología de Dirac y utilizaremos la notación ket y bra, y por ello en el futuro le llamaremos state ket; la cual será utilizada en gran parte de este trabajo ;

un vector debe de estar definido sobre un campo; la analogía aquí entre el espacio tridimensional de las ondas polarizadas y nuestro SG termina; no será propuesto que los vectores se desarrollan en un campo real.

Antes de continuar se detallara la terminología Ket.

Un ket será representado mediante la siguiente notación:

$$|, \rangle \tag{11}$$

Donde la ", " no tiene relevancia en el sentido del vector; es un espacio que puede ser relleno con aquello que sea útil en la operación, es por esto un nombre que es asignado al vector, la terminología de Dirac no es distinta del álgebra lineal, sin embargo es muy útil, ya que muchas relaciones son evidentes; por ende la terminología cumple su labor de realizar la tarea en cuestión de la manera más sencilla posible; sin embargo, es común que se le asocie de nombre cuestiones de relevancia; lo cual es dependiente del interés.

Los kets, por su naturaleza vectorial, cumplen todo aquello que sea necesario para considerarles vectores ¹. [L.7]; sin embargo, en este trabajo se inmescuirán de manera natural espacios sobre el campo de los complejos, a la par que espacios vectoriales de dimensión infinita, estos son llamados espacios de Hilbert; en general, cuando se trate con espacios de dimensión infinita se asumirá que se está en un espacio de Hilbert.

Hágase aquí un postulado; un ket de estado (SK) contiene toda la información que pueda desearse sobre el estado del sistema.

Una observable, entendida cómo una propiedad física del sistema que tiene la capacidad de ser sometida a mediciones, puede, motivantes para esto son dados por De la Peña, L en Introducción a la mecánica cuántica; ser representada mediante algún operador definido en el campo vectorial en el cual se encuentra el SK; un operador actúa conforme las reglas del álgebra lineal, y en general su actuar será una expresión de la forma:

$$\hat{A}(| a \rangle) \tag{12}$$

Donde la \hat{A} acentuada representa al operador; por supuesto el resultado deberá de ser otro ket.

Del álgebra lineal conocida la existencia de los eigenvectores, eigenkets en la terminología de este trabajo; en este escrito y con fin a recordar a quien le corresponden estos; serán llamados en general como el mismo operador pero en minúscula; esto es para el operador \hat{A} obtendremos:

$$| a' \rangle, | a'' \rangle, | a''' \rangle, \dots \tag{13}$$

Correspondiente a estos eigenkets se tendrán sus eigenvalores (EV); correspondientes al mismo operador \hat{A} .

Al hacer mediciones en la mecánica cuántica; será obtenido como resultado que el sistema habrá de, a pesar de antes no estarlo; pasar a encontrarse en algún estado representado por un solo

¹Revise las referencias para más detalle [7]

eigenket (EK); mientras que la medición será el EV correspondiente a tal EK. Planteando esto de manera explícita en un ejemplo, quedaría como sigue.

Sea \hat{B} un operador con EK $|b\rangle$ y EV b ; esto es:

$$\hat{B} |b\rangle = b |b\rangle \quad (14)$$

Los instrumentos involucrados en una medición habrán de brindarnos el valor de b ; con lo cual podrá inferirse que el sistema se encuentra en $|b\rangle$

4.4.1 Productos

Para poder formar productos en estos espacios vectoriales, se abordarán el concepto de los bras; un bra tendrá la siguiente representación:

$$\langle, | \quad (15)$$

A la par, es postulado que a cada ket le corresponde un bra, y que de tenerse un ket con coeficientes complejos, el bra correspondiente será al mismo que en el primer caso pero con el coeficiente conjugado, esto es; a un ket le corresponde el bra siguiente:

$$(c^*)\langle a | \quad (16)$$

Con los kets y bras pueden comenzar a formularse los productos, el primero de ellos será el producto interno y tendrá la forma:

$$\langle b || a \rangle \quad (17)$$

En general lo anterior se denotará por:

$$\langle b | a \rangle \quad (18)$$

Se habrá de trabajar en el campo de los complejos, de modo que el producto interno puede tener como resultado un número complejo, de ello se desprende que:

$$\langle b | a \rangle = \langle a | b \rangle^* \quad (19)$$

El producto anterior es una función bilineal, que al actuar sobre 2 vectores, brinda un escalar; siendo éste definido en el campo del espacio vectorial en cuestión.

Es posible a la par formular una función bilineal la cual brinda como su imagen un operador; en general se denotará esto por:

$$|b\rangle\langle a | \quad (20)$$

Observado el caso especial en donde es tenido:

$$|a\rangle\langle a| \quad (21)$$

La naturaleza de operador de este producto es clara; considere a $|\phi\rangle$; entonces el producto siguiente:

$$|a\rangle\langle a|\phi\rangle \quad (22)$$

De asociar; La asociatividad es una de las operaciones se que asumirán válidas en este trabajo; obtendremos como sigue:

$$|a\rangle(\langle a|\phi\rangle) \quad (23)$$

El producto entre paréntesis no es más que un producto escalar; este brinda como resultado un número, llámesele ϕ a tal número; se obtiene:

$$\phi|a\rangle \quad (24)$$

Nótese que si el ket $|a\rangle$ está normalizado; se tendrá que la ecuación (13) está brindando la proyección del ket $|\phi\rangle$ con el ket $|a\rangle$.

Lo anterior dice que; de tener la situación en la cual los diversos $|a\rangle$, $|a^1\rangle$, $|a^2\rangle$, etc; sean una base de algún espacio en donde se tiene a $|\phi\rangle$; entonces es posible expandir a $|\phi\rangle$ en términos de $|a\rangle$, $|a^1\rangle$, $|a^2\rangle$, etc; esto es:

Sea $|\phi\rangle$, un ket; y sea $|a\rangle$, $|a^1\rangle$, $|a^2\rangle$, etc; una base del espacio en donde $|\phi\rangle$ se encuentra; entonces:

$$|\phi\rangle = \phi_0|a^0\rangle + \phi_1|a^1\rangle + \phi_2|a^2\rangle + \dots \quad (25)$$

De manera más compacta

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^n \phi_n|a^n\rangle \quad (26)$$

Siendo n la dimensión del espacio.

Realizando algunos pasos a la inversa desde (17) es posible hacer como sigue:

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^n |a^n\rangle\langle a^n|\phi\rangle \quad (27)$$

De suponer que $|\phi\rangle$ es el vector unidad, se obtiene:

$$1 = \sum_{n=0}^n |a^n\rangle\langle a^n| \quad (28)$$

Lo cual regresa el operador identidad.

De especial relevancia es el operador unidad en las transformaciones lineales; es importante la relación apenas dicha; tanto por mostrar la expansión de un ket; tanto porque se puede desprender la creación de transformaciones desde la misma.

4.4.2 Representación matricial

Los operadores pueden en general ser representados como matrices, esta representación es muy útil; sin embargo deberá de aclararse que esto no implica que los operadores sean matrices.

Del álgebra lineal se sabe que puede ser representado un operador como una matriz está representación del operador depende de la base que se utiliza para representarle, por ende no puede ser dicho que la matriz es el operador; para verificar esto con más detalle, considérese el operador \hat{B} ; entonces:

$$B = \left| \sum_{k=0}^k | a^k \rangle \langle a^k | B \sum_{n=0}^n | a^n \rangle \langle a^n | \right. \quad (29)$$

B no depende de n; entonces es admisible escribir:

$$B = \sum_{k=0}^k \sum_{n=0}^n | a^k \rangle \langle a^k | B | a^n \rangle \langle a^n | \quad (30)$$

Una vez más se asocia:

$$\langle a^k | B | a^n \rangle \quad (31)$$

Nótese que esto es un número; se le llamará B_{kn} ; resultando con esto la obtención de un arreglo ordenado de números correspondientes a valores de k y n; esto puede ser representado como una matriz. En general se toma el hecho de que k representa a las filas mientras que n a las columnas; una matriz en un espacio de dimensión 3 tendría la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Teniendo entonces la representación matricial de algún operador arbitrario. Aludiendo a la mención de que $| a \rangle \langle a |$ puede ser tratado como un operador; por ello tendrá una representación matricial análoga a la anterior.

La representación matricial de un operador, como se ha visto, requiere de explorar algún objeto, el cuál será el deseado a representar, elegido el objeto, se seleccionan kets como base; de elegirse como base los EK del operador a representar ,esto implica que los EK son base del espacio; esto no es generalmente cierto; sin embargo, lo es para operadores Hermitianos; su representación matricial será diagonal. Se dice que un operador Q está en representación Q cuando esto sucede.

Todo lo necesario para trabajar con espacio de dimensión finita ha sido dicho; las generalizaciones al espacio de infinitas dimensiones son inmediatas; sin embargo no todas son válidas.

Una de las más relevantes es la transformación de la ecuación:

$$| \phi \rangle = \sum_{n=0}^n | a^n \rangle \langle a^n | \phi \rangle \quad (33)$$

Al pasar al continuo se obtiene una relación de la forma:

$$|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da |a\rangle \langle a|\phi\rangle \quad (34)$$

Una vez más, de elegir a $|\phi\rangle$ como 1; tendremos:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} da |a\rangle \langle a| \quad (35)$$

En general con estas 2 últimas relaciones bastará para el desarrollo en un espacio de dimensión infinita. Esto del hecho de que de ellas se pueden obtener gran cantidad de idéntidades.

4.4.3 Los conmutadores

La posibilidad de representar a los operadores por medio de matrices evoca la posibilidad de que, al igual que sus representaciones, estos no conmuten; haremos las siguientes definiciones.

Se representará por $[A, B]$ el conmutador de a A y B; su manera de evaluarlo es cómo sigue:

$$[A, B] = AB - BA \quad (36)$$

Se escribirá por $\{A, B\}$ el anti-conmutador de a A y B; su manera de evaluarlo es cómo sigue:

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (37)$$

Por supuesto para su evaluación se requiere de que estos operen en algún objeto válido, este objeto puede ser otro operador.

4.4.4 Los conmutadores fundamentales

En general se trabajará en la introducción el la base de los kets de posición.

Ha sido mencionado que a cada una de las observables les corresponde un operador; es mostrable que [L.8],[L.2] los operadores de momento y posición tienen la siguiente forma:

Para el operador de posición:

$$\hat{x} = x \quad (38)$$

Para el operador momento:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (39)$$

Sus conmutadores resultan:

$$[x_i, x_j] = 0, [p_i, p_j] = 0, [x_i, p_j] = i\hbar \delta_i^j \quad (40)$$

Recordando que a cada observable le corresponde un operador; las relaciones de conmutación anteriores mencionan los siguientes puntos:

La medición de la observable posición en alguna dirección conmuta consigo misma; y a la par conmuta con la observable posición en alguna otra dirección. Esto es; direcciones independientes de posición no interactúan entre sí.

La medición de la posición en alguna dirección conmuta consigo misma; y a la par conmuta con la observable momento en alguna otra dirección. Esto es, direcciones del momento independientes unas de otras no interactúan entre sí, las direcciones respecto a sistemas de referencia son arbitrarias; por lo cual la no interacción entre distintas direcciones implica que las cualidades físicas tienen su propia dirección, es decir son indistintas de la elección arbitraria del observador.

La medición de la posición en alguna dirección no conmuta con la medición del momento en la misma dirección; sin embargo sí que lo hace con otras direcciones. Esto es, la medición de la observable posición destruye la información del momento y viceversa, por no interactuar se interpretará que no interfieren unas con otras; mientras que por destruir, se entenderá que el medir hace que se tenga total incertidumbre sobre la otra.

Las primeras 2 aseveraciones son sencillas de asimilar; mientras que la tercera puede no serlo en primera instancia; sin embargo, debemos de recordar que el proceso de medir implica que se actúa sobre el sistema.

Con lo anterior podemos comenzar a revisar la operación de operadores en los kets, la primera cuestión será como sigue:

1.- Los operadores siempre actuarán con los ket en un orden específico, este será, si A representa a un operador, como sigue:

$$A | a \rangle \tag{41}$$

2.- En general serán relevantes los autovalores de los operadores, ya que estos representarán valores de las observables. Vease:

$$A | a \rangle = a | a \rangle \tag{42}$$

3.- Los autovalores se interpretan físicamente como los valores que una observable puede tener.

Conforme lo anterior podríamos ejemplificar, si A es el operador de spin, que al hacer la operación obtenemos el valor a, que puede ser como en los casos estudiados, 1/2 o -1/2.

La teoría completa de este desarrollo se puede revisar a detalle en diversos libros, como por ejemplo [L.2]

4.5 La interpretación de la mecánica cuántica

No se ha hecho; ni se hará mención sobre el "colapso" de las observables conforme estas son medidas; ya que la teoría puede ser descrita sin necesidad de esto, pensando en ensambles de partículas, es decir; la teoría cuántica expresa sus principios para ensambles, esto desde el inicio ha sido así ya que al basarse en una gran cantidad de partículas, que se entiende, exponen cierta naturaleza en medios de un gran conglomerado.

La interpretación sobre el comúnmente llamado colapso de onda, es cuestionable conforme a experimentos, mientras que la interpretación de que la teoría cuántica da información sobre ensambles no; esta interpretación, explícitamente es:

La mecánica cuántica brinda información sobre el ensamble de partículas, no sobre una partícula individual.

4.6 Los operadores y el tiempo

A toda observable le corresponde un operador, notable es sin embargo, que en la teoría cuántica el tiempo no es una observable; esto es, no tiene asociado un operador; de este momento en adelante se le tratará cómo a un parámetro.

4.7 La mecánica cuántica no relativista

Lo desarrollado anteriormente, abre paso a las formulaciones de las observables por medio de operadores, a obtener sus conmutadores y con ello a determinar las relaciones que se tienen entre ellos. Las teorías que engloban a la mecánica cuántica descansan en los operadores y sus relaciones; de hecho la misma QFT propone que los campos sean cuantizados mediante su expresión en operadores.

Se iniciará desde las bases; pero será expuesto solo lo necesario para poder explorar las relaciones de rotaciones entre los operadores y como la evolución de éstos, decanta a los cambios en los estados.

Recordando que a las observables les corresponden operadores; será entendido que se distinguirá por su misma naturaleza el hecho de que alguna observable tenga eigenvalores discretos o continuos, de no serlo, se aclarará.

Por ejemplo; para la posición tendremos que su operador \hat{x} cumplirá la siguiente ecuación de eigenvalores con sus respectivos EK:

$$\hat{x} | x \rangle = x | x \rangle \quad (43)$$

La ecuación anterior puede llegar a causar confusiones debido a que se tiene muchas veces el símbolo x ; a la par este cumple diferentes funciones; las etiquetas son cómo sigue:

$$\hat{x} \quad (44)$$

El símbolo anterior representa un operador; es por ello que tiene una acentuación. Además; para

$$| x \rangle \quad (45)$$

El símbolo x en el ket anterior, representa una etiqueta; es igual de válido escribir la etiqueta interior cómo $| y \rangle$ sin embargo, esto, si bien correcto, no permite visualizar de manera inmediata la ecuación de eigenvalores; lo expresado es que el operador \hat{x} se encuentra actuando sobre el ket $| x \rangle$

En el lado derecho de la ecuación (32) el símbolo x que no se encuentra dentro del ket; representa un número, que bien podría ser complejo, en la mecánica cuántica se espera que los valores

a medir sean reales; a operadores Hermitianos les corresponden eigenvalores reales; nótese que x está cumpliendo el papel de eigenvalor; por último la misma ecuación (32) dicta que volvemos a obtener el mismo ket una vez aplicado el operador.

A la par es entendido que el operador de posición \hat{x} brindará eigenvalores continuos; ya que una partícula, en principio, puede ocupar cualquier posición del espacio en lo referente a que ninguna posición es privilegiada; algo similar ocurre para el momento; el cual tendrá una representación similar, hacemos:

$$\hat{p} | p \rangle = p | p \rangle \quad (46)$$

Son conocidas las relaciones de conmutación de estos operadores; éstas ya han sido expuestas en este trabajo.

Es deseado obtener a la par operadores que permiten hacer cambios; por ejemplo desplazamientos, o cambios en el tiempo, estos operadores deberían de cumplir ciertas propiedades que hacen coherencia, una de ellas es que todas puedan ser obtenidas desde la identidad, esto es uno de esos resultados que se rescatan de la mecánica clásica; estas propiedades son como sigue:

Sea \hat{A} un operador el cual toma como argumento a a_n , entonces:

1.- Que sea un operador unitario, esto es, que no cambie la magnitud de la cantidad física en cuestión.

2.- Aplicaciones sucesivas del operador sean equivalente a una sola que tome como argumento a la suma del argumento de los operadores.

Matemáticamente esto es:

$$\hat{A}(a_n)\hat{A}(a_m) = \hat{A}(a_n + a_m) \quad (47)$$

3.-Que su inversa sea evaluar el argumento en el sentido contrario. Matemáticamente ésto es:

$$\hat{A}(-a_n) = \hat{A}^{-1}(a_n) \quad (48)$$

4.- Que se genere desde la identidad. Matemáticamente esto es, cuando $a_n \rightarrow 0$ entonces:

$$\hat{A}(a_n) \rightarrow 1 \quad (49)$$

La razón de que las propiedades anteriores sean así es un hecho de como se espera que sean tales operadores ante situaciones extremas.

Conforme las anteriores características es posible obtener diversos operadores; entre ellos; uno de vital importancia, es aquel que causa evolución con el tiempo; será supuesto que el Hamiltoniano está involucrado, en la mecánica clásica el Hamiltoniano y la energía tienen una relación estrecha; la energía es capaz de explicar evoluciones temporales posibles; por ello es que se utiliza el hamiltoniano en el presente trabajo.

El operador que crea la evolución temporal tendrá la forma siguiente

$$U(t + dt, t_0) = 1 - \frac{i\hat{H}dt}{\hbar} \quad (50)$$

El operador anterior crea un cambio temporal infinitesimal una vez sea aplicado.

De la mecánica clásica podemos relacionar los cambios en el tiempo con el Hamiltoniano, esto se hace por analogía; solo está siendo rescatando la terminología no se implica que exista una relación directa; sin embargo las relaciones que emergen serán por supuesto similares o incluso idénticas; ya que buscamos que cumplan papeles lo más parecidos posible. Es esperado entonces que el hamiltoniano permita describir la evolución temporal en los ket estados; con lo cual será obtenida la dinámica de los sistemas.

La definición del operador de evolución temporal incluye todo lo que se desea conocer de los cambios del sistema en lo referente en el tiempo; sin embargo, la forma en la que está escrito no es del todo útil; por ello se hará un tratamiento que guíe a expresiones útiles; se comienza con el uso de la cualidad exigida número 2; para ello se escribe como sigue:

Sea $U(t + dt, t)$ la manera de denotar el operador que ocasiona el cambio temporal desde t hasta $t + dt$; por analogía se escribe:

$$U(t + dt, t_0) = U(t + dt, t)U(t, t_0) \quad (51)$$

Pero, conforme la definición explícita del operador:

$$U(t + dt, t) = 1 - \frac{i\hat{H}dt}{\hbar} \quad (52)$$

Substituyendo en la ecuación anterior tendremos:

$$U(t + dt, t_0) = \left(1 - \frac{i\hat{H}dt}{\hbar}\right)U(t, t_0) \quad (53)$$

De aquí se puede deducir que:

$$i\hbar \frac{U(t + dt, t_0) - U(t, t_0)}{dt} = \hat{H}U(t, t_0) \quad (54)$$

Esto no es más que:

$$i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}U(t, t_0) \quad (55)$$

Esta ecuación brinda como es la manera en la que el operador de evolución temporal cambia con el pasar del tiempo, con lo cuál una vez tenida una expresión para el Hamiltoniano es directo saber el cambio de este operador. El hecho que se tenga un operador que cambia con el tiempo hace sospechar que, por ejemplo, tenido un estado de un sistema puede permitirse que el tiempo pase y bastaría con ingresar el operador transformado para estudiar el sistema en tiempo requerido; esto es correcto, pero no solo eso, es limitado; es coherente ejecutar una mecánica que parta de las evoluciones de los operadores; este es el enfoque de Heisenberg y es el que será útil para determinar constantes de movimiento.

4.7.1 Los operadores como dinamismo

Mencionado en la subsección anterior; se comienza en la búsqueda de las transformaciones de los operadores.

Serán generalizados ciertos criterios; revisando el operador de evolución Γ cuyo parámetro de evolución será γ ; esto es:

$$\Gamma(\gamma) \tag{56}$$

Γ se propone que tiene que cumplir las características que hemos propuesto; para cuando $\gamma \rightarrow 0$ entonces:

$$\Gamma \rightarrow 1 \tag{57}$$

Se puede operar de manera coherente con lo anterior, y obtener:

$$U^\dagger \Gamma U = U^\dagger 1 U \tag{58}$$

Ahora; Γ esta asociado con alguna observable, ésta, puede evolucionar; o a la par el operador relacionado a Γ puede ser quien evolucione, es decir; asignamos un operador Γ concreto a cada punto temporal, al cual es posible bien llamarle $\Gamma(t)$. Conocidos a los operadores de evolución temporal; entonces podemos escribir:

$$\Gamma_t(t) = U^\dagger \Gamma(0) U \tag{59}$$

Teniendo así una transformación de similitud de algún operador arbitrario, la cual puede ser aplicada a algún otro operador en cuestión.

Con esto se consigue un abanico abierto con el cual es directo obtener otra ecuación relevante, la cual permitirá explorar las constantes del movimiento, iniciando por diferenciar la ecuación anterior respecto al parámetro tiempo, obtendremos:

$$\frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = -\frac{U^\dagger \hat{H}}{i\hbar} \tag{60}$$

4.8 El oscilador armónico unidimensional

El oscilador armónico, es de las principales situaciones relevantes a estudiar en la teoría cuántica, una de las razones, es la similitud que se consigue con el oscilador armónico mecánico convencional pero aún más; el potencial tiene la forma algebraica como el término cuadrático de una expansión de Taylor; hagamos un diagrama.

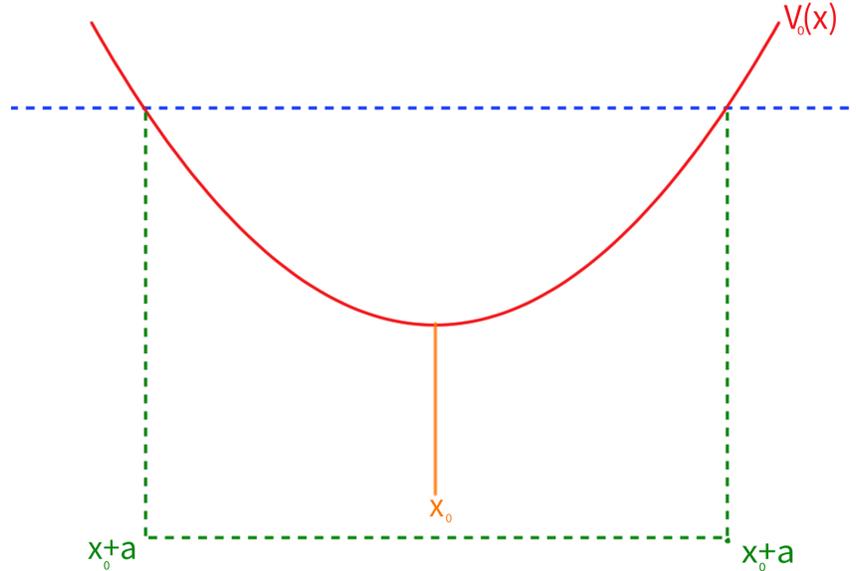


Figure 9: Aproximación del mínimo de la función V

En este diagrama se tiene una situación de equilibrio estable, ésto es, ante algún desplazamiento de la partícula desde el punto de equilibrio, aparecerá una fuerza, el concepto de fuerza es utilizado en el sentido clásico; que tenderá a llevar a la partícula en cuestión a al posición de equilibrio.

La expresión algebraica en el caso de estudio en este momento tiene la forma:

$$V(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad (61)$$

Donde m es la masa de la partícula, w es la frecuencia angular y x es la posición.

Con esto, el Hamiltoniano tendrá la siguiente forma, nótese que de las definiciones de la desviación estandar se puede mencionar que el operador aplicado en su cuadrado o el cuadrado del operador no son lo mismo, y exhibirán una dispersión, sin embargo en la mecánica cuántica es postulada la igualdad entre ambas operaciones [L.8].

$$\hat{H} = \frac{1}{2}mw^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (62)$$

Entonces la ecuación de Schrodinger para oscilador armónico tendrá la forma siguiente:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2\psi \quad (63)$$

La solución del oscilador armónico puede encontrarse en diferentes libros ².

²Se pueden revisar las referencias de [L.1],[L.2],[L.8]

Será de gran utilidad la solución obtenida mediante los operadores de creación y aniquilación, en la teoría cuántica clásica, se les suele denominar escalera, sin embargo en este trabajo el fin es la aplicación a QFT, donde los nombres dichos son los ya mencionados; una justificación puede encontrarse en [L.8].

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad (64)$$

Este último es el que se habrá de conocerse como el operador de creación, donde x y p son sus respectivos operadores.

A la par es definido el operador de aniquilación como sigue:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad (65)$$

En analogía con esto es posible escribir el operador Hamiltoniano del oscilador armónico cómo sigue:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (66)$$

Es demostrable que los operadores de creación (OP+) y aniquilación (OP-) cumplen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (67)$$

Nótese que el operador posición y el operador momento tienen representaciones en cualquier espacio de Hilbert; por esto es que OP+ y OP- son independientes de el sistema físico en cuestión, es decir; pueden ser aplicados a todo aquel sistema que tenga un Hamiltoniano como el obtenido en esta subsección.

Será retomado el uso de estos operadores conforme sea planteado llegar a las cuantizaciones de los campos. Obsérvese como se comportan con los kets de estado del oscilador armónico, y con ello será dada una interpretación.

4.9 Las rotaciones

Se inicia la búsqueda de los operadores de rotación, ésto llevará directamente a el entendimiento del espin; llegando así a una nueva comprensión de esta característica; así como a su relación con otras, de especial atención es su similitud con el momento angular; esta fue planteada al inicio de esta obra, aquí se mostrará la razón de la similitud tanto fenomenológica tanto en la teoría. Es buscada la representación de espinor y las matrices de Pauli.

Con anterioridad se han definido las características que son deseadas que algún operador de relevancia cumpla; retomándose una vez más; es propuesto que el operador de rotación respecto a el eje i cómo J_i , y el operador rotación será:

$$D = 1 - J_i \quad (68)$$

Donde J es el denominado generador de rotaciones; estos cumplen lo siguiente:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad (69)$$

Todo aquello que cumpla este conmutador será una representación de las rotaciones; esto es, podemos tener proyecciones de los operadores en su espacio.

Para rotar al rededor de algún eje se procede como lo siguiente.

$$D = 1 - \frac{Jn}{\hbar}\phi \quad (70)$$

Debe de tenerse especial atención en la ecuación anterior, se tiene el producto interno, por ello, por ejemplo; la proyección del operador J en la dirección n , una de las primeras confusiones es revisar como es que se hace el producto interno entre un vector cuyas componentes son matrices, con un vector convencional, sin embargo; recuérdese que los operadores no son matrices, las matrices son una representación de ellos en un espacio alguno en el cual, es posible operar, dicho esto; la ecuación anterior representa la proyección del operador rotación en la dirección del vector n ; esto es de gran utilidad, ya que permite definir rotaciones que tengan cualquier eje como su eje de rotación.

Nótese que si definimos los siguientes operadores:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |- \rangle\langle+|) \quad (71)$$

$$S_y = \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |- \rangle\langle+|) \quad (72)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |- \rangle\langle-|) \quad (73)$$

Estos satisfacen las relaciones de conmutación de J , por ende son una representación de las rotaciones en el espacio de los ket $|+\rangle$ y $|-\rangle$, por ende tenemos total libertad de aplicarlos a tales ket y a todo aquello que sea representado por ellos.

Si tomamos a $|+\rangle$ y $|-\rangle$ como las bases del espacio en donde ellos se encuentran; entonces podemos escribir:

$$|\alpha\rangle = C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle \quad (74)$$

Luego para rotar a $|\alpha\rangle$ basta con aplicar alguno de los operadores S_k . En la situación actual es sencillo desarrollar los operadores S_k en su forma matricial, utilice la base $|+\rangle$ y $|-\rangle$ y habrá de llegarse a las matrices de Pauli; estas son:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Tenemos entonces una representación matricial de los operadores de rotación en un espacio de dos dimensiones; resta encontrar aquellos objetos sobre los que actúan; del algebra lineal sabemos que actuarán sobre vectores; es directo que estos tienen que tener la forma:

$$x = \begin{pmatrix} \langle + | \alpha \rangle \\ \langle - | \alpha \rangle \end{pmatrix} \quad (78)$$

Esto es, a las rotaciones de vectores en el espacio cuya base es $|+\rangle$ y $|-\rangle$ podemos representarlas por las matrices de Pauli y los vectores de la ecuación anterior, estos últimos se denominan spinores. La dimensión del vector columna que representa al vector α viene determinada por la cantidad de vectores base en el espacio; esto es igual para las representaciones matriciales de los operadores de rotación. Se encontrará que en la mecánica relativista será requerido un spinor con 4 valores.

4.10 La relación entre el momento magnético y el spin

De la experimentación, podemos adecuar de manera forzada una relación entre el momento magnético orbital y la interacción entre los campos magnéticos.

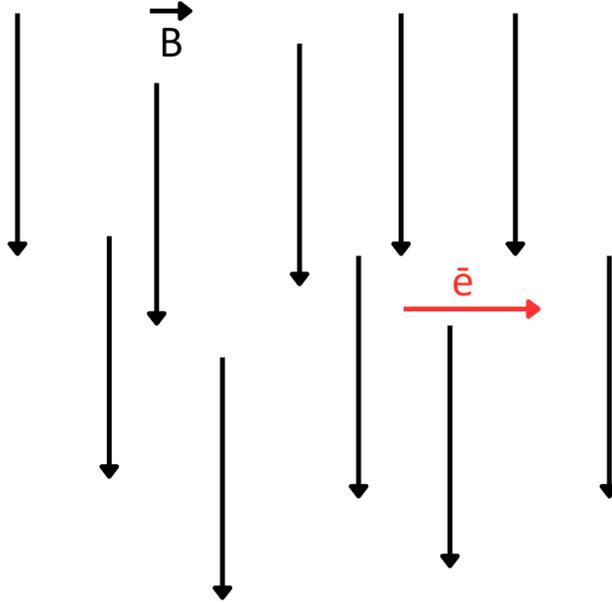


Figure 10: Exageración de la interacción

Conforme lo expuesto se consigue una nueva relación, la cual expresa el momento magnético no orbital; esta expresión cuántica es [L.3]

$$\mu = -\frac{e}{2m}S \quad (79)$$

La obtención de esto, es como se dice forzada, pero nos servirá como un punto en el cual apoyarnos una vez estemos haciendo los cálculos, ya que la interacción tendrá la misma forma matemática.

4.11 La ecuación de Pauli

La mecánica cuántica no relativista es incapaz de explicar sin métodos artificiales la existencia del spin, esto es; no surge de manera natural de el mismo marco que ella plantea; esto, sin embargo, no evita que se pueda adecuar a las ecuaciones fundamentales de ésta.

Lo anterior es logable mediante la ecuación de Pauli, la cual puede formularse mediante los operadores de rotación que han sido revisados en secciones anteriores; se procede a expresar una ecuación fundamental que recupere al spin bajo las rotaciones.

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eV - \frac{g_s \mu_B}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (80)$$

La ecuación de Pauli es una expresión no relativista, la cual, sin embargo tiene en si el fenómeno del spin.

La ecuación de Pauli exhibe una suma con los términos de la mecánica cuántica convencional, esto es debido a la independencia que exhiben los estados que están definidos sobre distintos espacios.

No será utilizada en este trabajo; es sin embargo una de las ecuaciones que incluye nuestra factor a medir; vease el 2 que corresponde a S:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi + \frac{\mu_0}{\hbar} \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) \Psi. \quad (81)$$

4.12 Las notaciones relativistas; métricas y operadores

Para la labor en proceso, es requerido comenzar a utilizar la notación relativista y las ideas de que ella emanan; esto es involucrar al espacio-tiempo sin una distinción marcada entre ellas, aquí se tendrá una rotura entre la idea de parámetro en el tiempo.

Utilizado será a lo largo de este trabajo la métrica que suele ser adoptada en la actualidad en la mayoría de los trabajos; primero veamos la representación que utilizaremos de la métrica siguiente:

$$\begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad (82)$$

Esta es una representación de la métrica para poder operar; donde tendremos:

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \quad (83)$$

En general se suele referir a ella como la métrica de traza -2; sin embargo nótese que el hecho de utilizar una métrica con traza 2 solo habrá de obtener en este trabajo algunos signos opuestos.

4.13 Partículas elementales

Hasta este momento han sido mencionado en lo mínimo posible a las partículas elementales; y cuando se ha hablado de ellas se ha hecho desde un punto de vista cualitativo.

El fin de este trabajo es explorar las contribuciones que tienen diversas partículas en los cálculos para el mmam; sin embargo no es posible revisar esto sin el concepto de las partículas fundamentales.

Será dada una exposición de ellas; aún más se revisarán las partículas que, al momento, no podemos asegurar su existencia; éstas son las partículas que propone la supersimetría. Se da inicio desde lo conocido y se comienza a dar un contexto histórico de ellas. Al final de este capítulo serán expuestas algunas tablas para una clasificación que resulte lo más sencilla posible; solo serán representados valores de relevancia para el trabajo, existe literalmente un compendio de todas

estas partículas que se va actualizando cada poco tiempo revisar referencia la más actualizada.

Las partículas elementales con las cuales se tiene mayor familiaridad es el protón, electrón y neutrón, estas partículas son componentes de los átomos, y se conocen con un detalle sorprendente. La física que se desprende de estas partículas parece ser coherente dentro de sí misma; las cargas son asignadas de manera en que solo existen 3 valores; cada una porta uno de tales valores; positivo-protón, negativo-electrón, neutro-neutrón; sus combinaciones forman a los diversos elementos y son fácilmente obtenibles de manera experimental, sin embargo; algunos hechos respecto a las teorías con estos 3 bloques fundamentales son llamativos, algunos pocos son:

1.- El protón y el TAUON son mucho más masivos que el electrón.

2.- El núcleo atómico está conformado por un conglomerado de partículas de carga positiva, ¿que las mantiene juntas?.

Las dos observaciones anteriores llevan a descubrimientos sorprendentes; como lo es el hecho de que el protón y neutrón no son partículas elementales (se les conoce como hadrones) y al descubrimiento de una fuerza de la naturaleza, que actualmente se conoce cómo fuerza fuerte; ello implica la existencia de más partículas fuera del contexto de las 3 ya mencionadas.

Uno de los primeros intentos por explicar la fuerza capaz de aprender el núcleo de carga eléctrica positiva es realizada por Yukawa; él teoriza en sus ideas una manera por la cual la fuerza tiene que tener una partícula asociada; esta partícula se conoce en la actualidad como el pion. Los piones resultan ser los responsables de que conozcamos actualmente al muon, el cual forma parte central del trabajo presente.

La propuesta y después descubrimiento de partículas que no forman parte de los átomos hace creer que la física que se conoce es limitada; aun más con el tiempo se han descubierto tantas partículas que el solo hecho de pensar en la existencia de 3 y solo 3 resulta totalmente increíble con el conocimiento moderno.

4.13.1 Los leptones

Los electrones son una de las partículas elementales más estudiadas, cuentan con las siguientes características:

- Una carga eléctrica negativa.
- Tienen spin $1/2$.
- Obedecen la estadística de Fermi.
- Son constituyentes de los átomos.

Además son uno de los llamados leptones. Los leptones son partículas elementales las cuales cumplen todas las condiciones listadas anteriormente, con la notable excepción de la última; no todos los leptones forman átomos; de los 3 existentes, el electrón el muon y el tauon solo el primero es parte de los átomos elementales.

Existen diferencias entre los 3 leptones, una es la ya mencionada, otra es la diferencia que existe entre las masas de estas 3 partículas, veámoslo en una tabla:

Table 1: Resumen de las propiedades principales de los leptones.

	Mass [MeV/c ²]	Spin	Charge [e]	Antiparticle	Flavor
Electron	0.511	$\frac{1}{2}$	-1	Positron	e^-
Muon	105.7	$\frac{1}{2}$	-1	Antimuon	μ^-
Tau	1777	$\frac{1}{2}$	-1	Antitau	τ^-

Otra cuestión relevante son los tiempos de vida de los leptones, el electrón es un leptón considerado estable; esto es, no puede decaer en alguna otra partícula, mientras que el Muon y el Tauon si pueden decaer en otras partículas, aún más, suelen hacerlo, por ello se les dice inestables. Véase la tabla 1.

4.13.2 Los quarks

Los leptones son partículas elementales, por ende no están creadas de otras; sin embargo otras partículas, anteriormente consideradas como elementales, en realidad están formadas por los denominados quarks, entre ellas están los protones y los neutrones, sin embargo no son las únicas.

Este trabajo esta más centrado en los leptones y sus interacciones, se resumen en una tabla las características relevantes de los quarks:

Table 2: Propiedades de los quarks

Quark	Carga eléctrica [e]	Masa[MeV/c ²]	Spin	Antipartícula	Decaimiento
Up	$+\frac{2}{3}$	2.2 – 4.7	$\frac{1}{2}$	\bar{u}	$u \rightarrow d + W^+$
Down	$-\frac{1}{3}$	4.5 – 5.3	$\frac{1}{2}$	\bar{d}	$d \rightarrow u + W^-$
Charm	$+\frac{2}{3}$	1.18 – 1.35 GeV/c ²	$\frac{1}{2}$	\bar{c}	$c \rightarrow s + W^+$
Strange	$-\frac{1}{3}$	80 – 130	$\frac{1}{2}$	\bar{s}	$s \rightarrow u + W^-$
Top	$+\frac{2}{3}$	169.1 ± 1.1 GeV/c ²	$\frac{1}{2}$	\bar{t}	$t \rightarrow b + W^+$
Bottom	$-\frac{1}{3}$	4.18 – 4.98 GeV/c ²	$\frac{1}{2}$	\bar{b}	$b \rightarrow c + W^-$

Note que se pueden tener decaimientos a bosones W, los cuales son los mediadores de la fuerza nuclear fuerte.

4.13.3 Mesones y Bariones

Los mesones y bariones son partículas que están constituidas por pares o triadas de quarks, respectivamente, resumirlos en una sola tabla es complicado, esto debido a la cantidad de partículas que forman parte de tal grupos; nos quedaremos con lo siguiente:

- 1.- Los mesones están conformados de 2 quarks, cualesquiera que estos sean.
- 2.- Los Bariones están conformados de 3 quarks, cualesquiera que estos sean.

Por cualesquiera que estos sean nos referimos a que incluso pueden repetirse. Al momento no es distinguible un Barion de otro por la disposición de los quarks que le conforman, es decir presentan simetría ante combinaciones y permutaciones.

La información anterior ya nos permitirá sobre que partículas explorar y ciertas propiedades de estas, en particular el muon, para más detalle véase [L.1]

4.14 Las matrices gamma

Con el estudio en las rotaciones se llega a que la inclusión de las matrices de Pauli genera una manera sistemática de abordar diversas situaciones, sin embargo; las ideas de Pauli no son relativistas. Tendrá que obtenerse una generalización en un espacio relativista, esta generalización parte de las matrices gamma; las cuales serán de utilidad al estudio de la ecuación de Dirac.

Nótese una vez más que se trabajará con las representaciones para poder ser útiles a la hora de realizar los cálculos; partamos de recordar las matrices de Pauli incluyendo la matriz identidad, éstas tienen la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

Se puede iniciar por definir un producto en estas matrices, uno que sea capaz de emular a los llamados productos exteriores, esto es; generar de dos vectores en un mismo espacio vectorial; un vector fuera de su mismo espacio. Se representa este producto por:

Las matrices gamma son una manera de hacer álgebra, su representación explícita es solo útil para hacer cuentas explícitas.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

Como ha venido siendo dicho, lo anterior es una manera de representar a unos operadores, la representación anterior se conoce como canónica o de Dirac, sin embargo no es la única; siempre que se hagan cuentas en este trabajo se utilizará la representación de Dirac para las gammas.

4.15 La mecánica cuántica relativista

Cuestiones como la ecuación de Pauli como ya fue visto, no son satisfactorias; esto ya que resuelven un caso proponiendo en base al experimento, si bien; esto es en muchas situaciones una situación a afrontar, los Hamiltonianos suelen proponerse acorde a "educated guessings", es referente a situaciones en específico, no a una cualidad que se ve intrínseca a las partículas, con ello es visualizado que la teoría cuántica no relativista exhibe como mínimo 2 inconsistencias;

- 1.- No es invariante ante transformaciones de Lorentz.
- 2.- No es capaz de explicar el spin de manera natural.

Con el marco de la relatividad especial y la teoría cuántica no relativista en mente, se procede a obtener un esfuerzo en una dirección en la cual sea obtenida una teoría en la que ambas compaginen, es importante notar que se revisa si la cuántica cumple con la relatividad especial y no al contrario; esto es debido a que la relatividad especial dicta cómo es que las leyes o teorías físicas deben expresarse, de tal forma que la física sea invariante ante transformaciones; y con ello determinar cuales serán las leyes esperadas, donde por supuesto se tiene que tener covarianza de las ecuaciones ante transformaciones de Lorentz.

4.15.1 Klein-Gordon y Dirac

Uno de los puntos de partida convencionales para revisar la validez de una teoría con la relatividad especial, o incluso el intentar corregirla para que la respete, es la expresión de la energía relativista, esta es:

$$E^2 = m^2 c^2 + c^2 p \cdot p \quad (85)$$

Luego, con esto se podría revisar la validez en la mecánica ondulatoria de Heisenberg.

Se inicia de la ecuación de Klein-Gordon; esta permitirá exponer las primeras características de una teoría relativista; al reformular la ecuación de Heisenberg de tal manera que respete la ecuación de la energía relativista resultará lo siguiente:

$$(\square + \mu^2)\psi = 0 \quad (86)$$

Donde el operador \square es tomado como:

$$\square = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (87)$$

Siendo ∇ el gradiente; tenemos entonces en el operador \square conocido como el D' Alembertiano; una generalización de la divergencia, por esto; se le suele llamar 4-divergencia a este operador.

En general la ecuación anterior que se suele de notar por \square tiene una forma muy similar a la ecuación de continuidad; de hecho algunos libros lo definen sin el signo menos.

La expresión de Klein-Gordon presenta un gran primer paso en la construcción de la teoría relativista de la mecánica cuántica; sin embargo no es del todo correcta; sus problemas emergen de que involucra segundas derivadas³; por lo cual un intento de resolver estos problemas pasa por escribir la ecuación de manera similar pero sin involucrar segundas derivadas.

Podría sospecharse desde primera instancia que una derivada no puede ser representada correctamente por un número; esto debido a la inconsistencia de que las derivadas cambian punto a punto mientras que los números son constantes; es por ello que se revisa la ecuación siguiente:

$$(i\gamma^\mu - m)\psi = 0 \quad (88)$$

Esto hace gala de exhibir algún tipo de factorización, en efecto lo es, pero se agrega el factor de la tal gama.

4.15.2 El cálculo de g

El cálculo de la razón giromagnética se fundamentará no en la cuántica más clásica, si no en las teorías perturbativas, para ello será necesario revisar el desarrollo de este documento.

³Revise las referencias, como Landau o Sakurai sobre a que se entiende con problemas

4.16 La teoría cuántica de campos

Recoordinándose el tratamiento propuesto por Planck sobre la radiación del cuerpo negro; considerando que su explicación mediante la cuantización resulta correcta, de acuerdo con los experimentos; y que su interpretación es considerar que el intercambio es mediante una superposición de osciladores armónicos; esta idea puede (y debe) ser extendida mediante los OP+ y OP- a campos.

Primero, y con " Toda onda se puede someter a descomposición espectral", es decir, se puede presentar como una superposición de ondas monocromáticas" [L.9].

Supóngase que se tiene un campo, este campo puede expresarse como una combinación lineal de ciertos vectores base, generalmente en física se parte del espacio de posiciones, esto si bien útil no lo es del todo en los estudios relativistas, mediante Fourier y sus transformadas partiremos a una representación en el espacio de momentos. Esto será la parte fundamental que nos permitirá ir revisando cada una de las interacciones.

4.16.1 Fourier y la descomposición espectral

En el lenguaje del álgebra lineal; puede verse a las series de Fourier como vectores; donde cada coeficiente tiene el significado de ser la proyección del vector en específico proyectado en cada uno de los vectores base; en este concepto la base del espacio de Fourier es infinita pero numerables, dicho de otra manera y que servirá al los propósitos de este trabajo; se tienen "saltos discretos" entre cada elemento de la base.

Retomando el análisis de Fourier, ha de obtenerse una representación en un espacio que tiene como vectores base a las funciones senos y coseno de diferente frecuencias, las cuales se tienen en pares (una vez en la función seno, y otra ocasión en la función coseno), Los EM pueden en principio tener cualquier frecuencia, mientras que los vectores base en el espacio de Fourier no; aún más, las frecuencias que se presentarán en los vectores base dependerán del intervalo en donde requerimos expandir a la función; por lo cual, si es deseado expandir el campo en todo el universo, la frecuencia de los vectores base tenderá a cero; se revolverá este problema suponiendo cuando sea necesario, que la región de interés será en algún cubo de dimensiones L, serán dictadas condiciones de frontera de tales regiones de espacio, y se supondrá periodicidad en cada cubo adyacente; de ser expuesto explícitamente esto. El hecho de tener como base a senos y cosenos nos brinda alta libertad; esta libertad viene por poder utilizar una serie de Fourier en su forma compleja [L.11] y tendrá la forma siguiente:

Sea $f(x)$ una función suficientemente suave para que sus integrales existan en una región [L,L]; entonces:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n\pi x/L)} \quad (89)$$

Donde C_n es un coeficiente numérico y se calcula recordando la ortogonalidad de la base del espacio de Fourier.

Se puede; y resultará útil separar en 2 partes la suma anterior, esto será:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n e^{i(n\pi x/L)} + C_n^* e^{-i(n\pi x/L)}) \quad (90)$$

Uno de los intentos para llegar a una cuantización adecuada es la denominada cuantización canónica; esto es proponer que los campos cumplan de alguna manera los mismos conmutadores entre el operador x y el operador p^4 ; sin embargo aquí se tiene un campo distribuido a lo largo de todo el espacio; tendremos entonces un operador de posición y de momento para cada punto del espacio; el espacio está conformado por distancias no discretas entre punto y punto ⁵ esto conlleva que se tendrá un continuo, esto es; se tendrá un conjunto no numerable. No será expuesta la idea de resolver esta situación. Téngase entonces como sigue:

Sea Φ un campo que depende de la posición y del tiempo; denótese esto por $\Phi(x^\mu)$ tómesese al mismo campo como la coordenada de posición; de Hamilton, utilícese a la par que el momento conjugado será:

$$\pi(x^\mu) = \frac{\partial \Phi(x^\mu)}{\partial x} \quad (91)$$

Hecho esto; será dicho que los campos cumplen las relaciones de conmutación que conocemos entre \hat{x} y \hat{p} ; considérese entonces que tenemos alguna cantidad M de campos; impondremos que se cumple lo siguiente:

$$[\phi_r, \phi_w] = 0, [\pi_r, \pi_w] = 0, [\phi_i, \pi_j] = i\hbar\delta_i^j \quad (92)$$

Una última aclaración es el hecho de que; en la teoría que está siendo desarrollada las relaciones de conmutación serán para los campos y sus momentos conjugados π ; la posición; el tiempo tendrán la naturaleza de un parámetro. A la par, será propuesto que los coeficientes en la expansión de Fourier tendrán la naturaleza de ser operadores; una vez hecho esto se estará pasando a una cuantización del campo en particular

4.16.2 El campo electromagnético, su cuantización

Conseguida la expansión con la cual se puede discretizar algún campo a voluntad, esto es; puede visualizarse un campo como la suma de las diversas frecuencias que son entregadas por la expansión en Fourier, nótese que esto no es cuantizar; está siendo interpretado a una onda como la superposición de diversas ondas, por ello es que preferimos el uso de la palabra discretizar.

Uno de los intentos primeros y que será útil para el fin último de este trabajo será pasar de la discretización a la cuantización del campo electromagnético, esto es volver a la teoría una teoría de naturaleza cuántica, esto es explicar su dinámica por medio de operadores; partamos primero a la discretización del campo electromagnético.

Sea Φ un campo EM; entonces este cumplirá las ecuaciones de Maxwell, si es supuesto que se está en el vacío, tomarán la siguiente forma [L.5]:

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (93)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (94)$$

⁴Existen otros tipos de cuantización

⁵En principio no existe razón por la cual suponer que los desplazamientos no puedan tener cualquier medida, por pequeña que sea; esta idea, sin embargo, es errada y nos llevará inevitablemente a infinitos en la teoría

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (95)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial B}{\partial t} \quad (96)$$

Se tendrá entonces que el campo magnético B es un campo vectorial solenoidal, de esto se concluye que B es expresable como un rotacional de un campo A; esto es:

$$B = \nabla \times A \quad (97)$$

A la par de la ecuación del rotacional de B, y conforme esta última definición, se puede escribir a E como sigue:

$$E = -\nabla\phi + \mu_0\varepsilon_0\nabla \times A \quad (98)$$

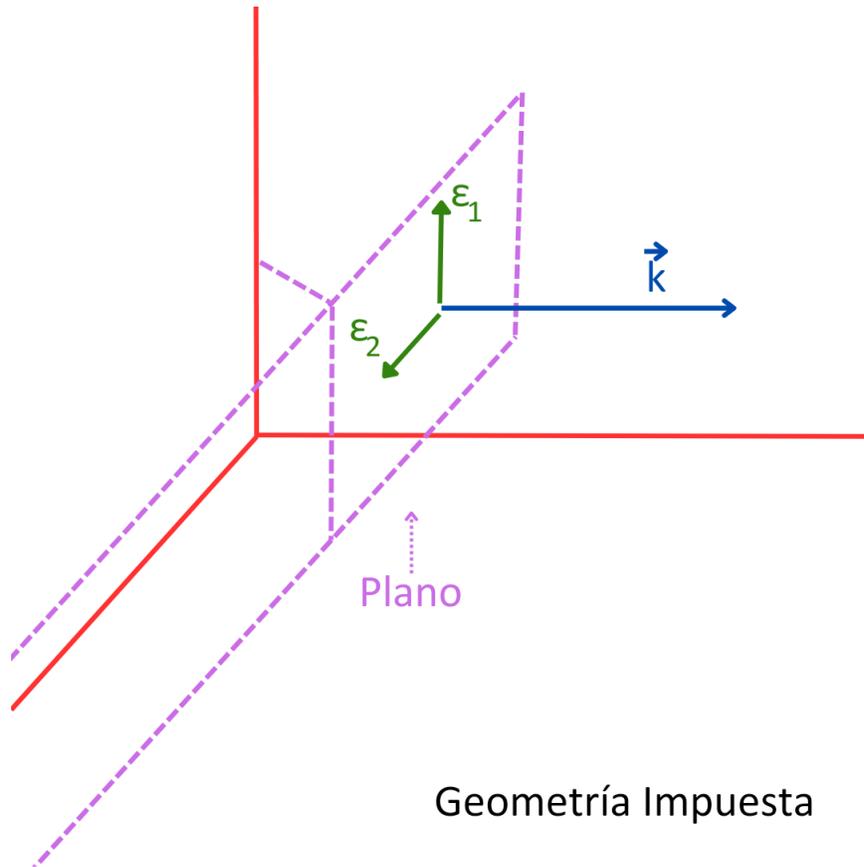
Donde a A y a ϕ se les conoce como el vector potencial magnético y el potencial eléctrico.

Estas ecuaciones sugieren la existencia de simetrías internas en la teoría, debido a que, por ejemplo; de agregar al vector A un gradiente de alguna función $f(x,t)$ no se tendrán cambios en la estructura de B; similarmente, de agregar la derivada temporal de la misma función al potencial eléctrico, de la expresión de E, se obtendrá que este mismo quedará inalterado [L.10].

Acorde a esto; es posible encontrar una expresión tal que:

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (99)$$

Lo anterior implica una característica relevante; la cual, una vez más puede relacionarse con la primer primer motivante de las ondas polarizadas al inicio de este trabajo; insértese una imagen a continuación.



Geometría Impuesta

Figure 11: Ortogonalidad entre \vec{k} y los vectores de polarización

Es tenido entonces que la onda tiene polarización en un plano; el cual es perpendicular a la dirección de propagación. Expresese los vectores de polarización como combinaciones lineales de la base de Fourier.

Una de las principales características distintivas entre las teorías clásicas y la teoría cuántica es el tratamiento de lo entendido por posición y momento; mientras que en las teorías clásicas éstas son observables "directamente", en la teoría cuántica son relacionadas con operadores y con ello a sus diversos conmutadores.

Las relaciones fundamentales sobre las que se basan las diversas conmutaciones es con el conmutador del operador posición y el conmutador del operador momento; además de las relaciones de conmutación entre ambos.

Ha sido supuesto que se trabaja en el vacío, con lo cual es correcto hablar del conocido como campo de radiación libre; el cual suele abreviarse como campo de radiación; de la mecánica cuántica sabemos que tenido su hamiltoniano podemos construir las evoluciones temporales, impónganse, una vez discretizado el campo su cuantización por medio de que se cumplen los conmutadores canónicos.

El hamiltoniano del campo de radiación libre es:

$$\nabla \cdot A = 0 \tag{100}$$

Si lo anterior se expande como ya hemos visto anteriormente en este escrito, es que llegaremos a las descomposiciones adecuadas. Para un detalle completo de lo visto en 4.16 se puede recurrir a la primera sección de [L12]

4.17 Teoría de perturbaciones

Debido a la complejidad de las ecuaciones que emergen en las teorías físicas, la resolución de éstas implica métodos no analíticos, esto es; es requerida la teoría de perturbaciones, será explorada en este apartado lo necesario para poder formular los contenidos de ésta. Uno de los ejemplos más sencillos, en el cual una solución exacta es imposible por medios analíticos, es el denominado problema de los 3 cuerpos; cuyo enunciado podría ser:

Teniendo 3 cuerpos interactuantes cada uno con los otros 2 restantes; conocidas las fuerzas, momentos y energías de estos en algún instante ¿cuáles son las trayectorias que estos siguen?

Es lamentable decirlo, pero las trayectorias no pueden ser predecidas, por lo menos no como habría de esperarse ante un problema de expresión tan sencilla; o aún más, de tan cotidiana aparición; esto hace de motivante para la teoría de perturbaciones.

Desarrollemos la teoría introductoria necesaria de la teoría de perturbaciones; esta teoría no nace de las teorías cuánticas, sin embargo es en este contexto que a nosotros nos interesa; entonces en lo subsecuente haremos referencias mezcladas de la matriz S (mejor llamado operado S en su representación matricial) o el operador de evolución temporal de manera intercambiable, esto a pesar de que no son lo mismo, pero desde cierto punto de vista el operador S es una generalización del operador de evolución temporal.

La convergencia de ciertas series no arroja cuestiones como ya se ha visto Fourier, sin embargo en ciertos aspectos es necesario partir de un estudio básico, y poco a poco suponer que interacciones más complicadas se dan de este fenómeno. Un detalle de esto se puede encontrar en [L.15], sin embargo basta en saber que, conforme las características que presenta

4.18 Diagramas de Feynman

Con la teoría desarrollada y los participantes de ella, es posible hacer uso de una de las herramientas más potentes que se tienen en la teoría cuántica de campos; a saber, las reglas y diagramas de Feynman. Es poco hacer énfasis en que estas reglas son realizadas en cálculos perturbativos, es decir; no brindan una certeza más que hasta el orden deseado; aún así existen ciertas constantes a lo largo del uso de estos que permiten utilizarlas sin grandes consecuencias en la electrodinámica cuántica y hasta cierto punto en la interacción de la fuerza fuerte; sin embargo no es aplicable a todo cálculo en el SM. El que no aplique se reduce al hecho de que bajo ciertas condiciones los diagramas de Feynman dan resultados poco ortodoxos; como el hecho de tener que considerar infinitos diagramas, y que cada contribución perturbativa que se tenga en ellos hace que se tenga más peso en el resultado final; es decir se desarrollan al contrario de lo requerido.

De QFT se puede reducir mucho el cálculo mediante los llamados diagramas y reglas de Feynman; no se ha de revisar la deducción de las reglas; mas bien de expresarlas y utilizarlas. Tengamos por ejemplo la siguiente imagen:

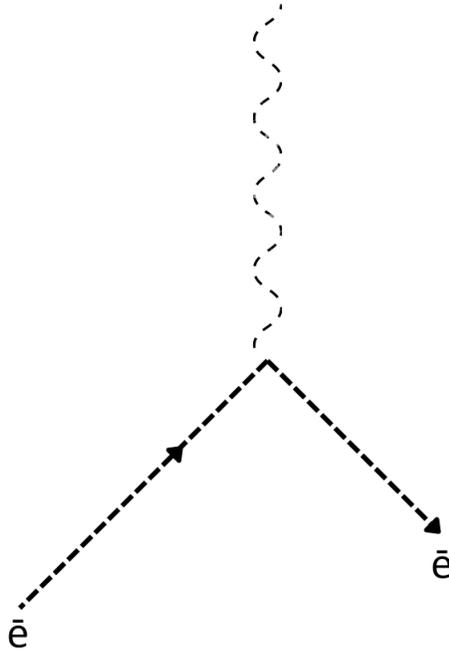


Figure 12: Vértice fundamental

Se le suele denominar a la figura 8 como el vértice fundamental de la electrodinámica y es el medio por el cual habremos de explorar de manera pictórica las interacciones varias, hágase énfasis en detalles. En el diagrama anterior se tiene de manera imaginaria un eje horizontal que mide el paso del tiempo; como participantes se tiene a un electrón y un fotón, es imposible saber si el electrón de la izquierda es el mismo que el de la derecha de la imagen; al final del día las partículas elementales son indistinguibles unas de otras; sería más correcto decir que se tiene interacciones fotón electrón. El electrón está representado por e^- no por la flecha; a la par las flechas no indican una trayectoria física; solo indican una interacción; la línea quebrada indica un fotón, nótese como éste no tiene una flecha.

En las teorías de Feynman, y deducido de la denominada de la representación matricial del operador S , tenemos como sigue:

- 1.- Por cada vértice asignamos el objeto $ie\gamma^\mu$
- 2.- Por cada línea fotónica interna asignamos el objeto $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$
- 3.- Por cada línea fermiónica interna asignamos el objeto $\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}$
- 4.- Para cada línea inicial exterior de Fermión de electrón, asignamos $U_r(p)$

- 5.- Para cada línea inicial exterior de Fermión de electrón asignamos $U_r(\hat{p})$
- 6.- Para cada línea inicial exterior de Fermión de electrón, asignamos $V_r(p)$
- 7.- Para cada línea inicial exterior de Fermión de electrón asignamos $V_r(\hat{p})$
- 8.- Para cada fotón inicial $\epsilon_{r,\alpha}(k)$
- 9.- Para cada fotón final $\epsilon_{r,\alpha}(k)$

10.- Todo se ordena matemáticamente componiendo lo inicial a operar primero, esto es operando en el ket del vacío, hasta llegar al bra del vacío; los operadores no conmutan, de especial importancia es esto entonces.

11.- Se impone la conservación de los 4-momentos en cada vértice.

12.- Cada loop crea una multiplicación por -1

En lo anterior V es el espinor de Dirac para el positrón, mientras que U es el spinor asociado a los electrones.

4.18.1 El cálculo del g en QFT

Las herramientas para ejercer el cálculo de g-2 han sido adquiridas, conforme las teorías desarrolladas y aceptadas en la actualidad; éste será el paso comparativo mayor de nuestra labor. Se comienza planteando sus diagramas de Feynman, esto lo realizaremos como el cálculo inicial del trabajo atendiendo a los puntos de la subsección anterior.

4.18.2 Las contribuciones supersimétricas

La sección presente forma parte del anteproyecto que se buscaría para el doctorado, y sopro plantea los esbozos de aquello que será el inicio de lo planteado.

Todo lo realizado anteriormente tiene certeza de ser una aproximación o considerarse correcto desde su misma teoría; se parte ahora de aceptar lo siguiente, existen diferentes teorías que plantean otras posibilidades como: [6], [7] y [8].

Las partículas supersimétricas existen realmente, por esto; sus contribuciones al momento magnético del muon, deben de ser tomadas en cuenta en los cálculos

Lo anterior forma parte de la hipótesis, los cálculos de esto son parte central del trabajo, esto permitirá que se compararen los resultado experimentales con los obtenidos por otras teorías y con la propia. Vease la siguiente tabla, la cual resume algunas características de algunas partículas supersimétricas:

Véase en la tabla numero 3 que, las masas de las partículas no están determinadas, al momento solo se cuenta con rangos de cuales deberían de ser sus respectivas masas. Las partículas supersimétricas forman un compendio grande, en la tabla anterior solo se muestran algunas.

Table 3: Algunas características de las partículas supersimétricas

Particle	Spin	Mass (GeV/c ²)	Electric charge	Interaction strength
Gluino (\tilde{g})	1/2	> 1.8	0	Strong
Neutralino ($\tilde{\chi}^0$)	1/2	< 1000	0	Weak
Chargino ($\tilde{\chi}^\pm$)	1/2	< 1000	± 1	Weak
Squark (\tilde{q})	0	> 0.5	$\pm 1/3, \pm 2/3$	Strong
Slepton (\tilde{l})	0	< 200	± 1	Weak
Higgsino (\tilde{H})	1/2	< 1000	0	Weak

Ciertas partículas son su propia antipartícula, tales de estas son las llamadas partículas de Majorana; que esto suceda complica aún más la comprobación de las masas de las partículas supersimétricas.

Es a la vez notorio que los spines están completamente determinados, a la par de su carga eléctrica y interacción con las fuerzas elementales.

Muchas partículas supersimétricas son muy energéticas, aún más, al no conocer su masa no tenemos determinado donde debemos de buscarles, esto puede ser una de las razones por las cuales no las podemos detectar de manera sencilla, esto aunado al hecho de que las escalas son grandes.

Table 4: Partículas supersimétricas y su tiempo de vida medio

Partícula	Descripción	Vida media [s]
Gluino	Supercompañero del gluon	2.80e-24
Neutralino	Supercompañero de los bosones de gauge neutrales	2.61e-23
Chargino	Supercompañero de los bosones con carga	4.52e-24
Squark	Supercompañero de los quarks	1.03e-23
Slepton	Supercompañero de los leptones	1.50e-22
Higgsino	Supercompañero del Higg	1.47e-23

Notemos que además de que no contar con una zona definida para buscar a tales partículas, de existir estas tendrían un vida media muy corta, lo cual hace aún más complicado el hecho de encontrarlas.

Suponer ciertas características y hacer estadística, podría acortar el espacio de donde es necesario ir a buscarlas, lo cual brindaría cuestiones como, tener una prueba ya que de incluirse y los cálculos en efecto ser acertados, parecería implicar que la inclusión es necesaria, y de ser necesaria, se podría saber donde buscar.

Metodología para el cálculo

El advenimiento de las teorías cuánticas compatibles con la relatividad, lleva al despliegue de cuántica de campos, Sus predicciones teóricas han tenido concordancia teoría-experimento sin precedentes, como en las mediciones del momento magnético anómalo (mma) del electrón.

Las interacciones en esta teoría están todas expresadas como:

$$\langle p_1 p_2 \dots | S | k_1 k_2 \dots \rangle \quad (101)$$

Las formas de interacción entonces están “codificadas” conforme S, con fin a extraer la parte de interacción podemos definir a una matriz T de la forma que $S=1+iT$

Notemos entonces que la interacción siempre se encuentre en iT

Podemos aplicar cualquiera de los 2 miembros de la igualdad a algún estado de algún sistema, de la conservación del momento, definimos a M de tal forma que se cumpla lo siguiente:

$$\langle p_1 p_2 \dots | iT | k_1 k_2 \dots \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_A k_B \Sigma P_f) \quad (102)$$

Las teorías que subyacen en física cumplen ciertas características, entre ellas ser renormalizables, es decir tener un “cut off” para cierto momento “grande pero finito”, esto pone límite para los términos de interacción en campos escalares, vectoriales y spinoriales, QED es la teoría que trataremos, esta es renormalizable.

El enfoque será tratar a el Hamiltoniano de interacción como una perturbación, despues investigar qué significado tienen los resultados para conectarlo con el objetivo de este trabajo, investigar el mma muon.

El vértice que nos servirá para este proceso es el siguiente:

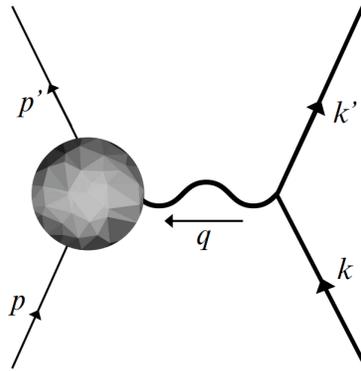


Figure 13: Vértice con interacciones no identificadas

Este diagrama, puede ser analizado como suma de aquello posible, en forma general:

Este diagrama, puede ser analizado como suma de aquello posible, en forma general:

$$iM = ie^2 (\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p)) \frac{1}{q^2} (\bar{u}(k)\gamma_\mu u(k)) \quad (103)$$

En general deberíamos esperar que Γ^μ sea expresión que involucra a los momentos p y p' , matrices gama, además de algunas constantes como “ m ” ó “ e ”; esta lista incluye toda posibilidad debido a que en los diagramas de Feynman estos son los únicos elementos a tomar en cuenta.

Podemos argumentar que la corrección al vértice tiene la forma:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C \quad (104)$$

Esto debido a que conforme invariancia de Lorentz debe comportarse como “un vector”, de la misma forma que las matrices gama, luego por esto la corrección será una combinación lineal de la eq propuesta.

Por último, de la conservación del momento y de la eq. de Dirac para la partícula libre, así como de que:

$$q^2 = -2p \cdot p + 2m^2 \quad (105)$$

Hemos llegado a un punto donde no podemos acotar más a nuestra corrección del vértice, sin embargo con:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p) \quad (106)$$

Podemos reducir la expresión del vértice a:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \quad (107)$$

Las dos funciones de q son llamadas factores de forma uno y dos, estos contienen información relevante de la interacción EM, por ello deberían de ser capaces de brindarnos cualidades de las partículas.

La forma de lograr esto consiste en hacer que interactuemos con un objeto sólido, esta es una buena aproximación a un campo clásico, y de hecho evoca también al scattering, de hecho esta es una de las pocas formas que se tiene para estudiar a las partículas fundamentales. Tengamos entonces un campo vectorial estático, tendremos a M como sigue:

$$iM = ie \left[\bar{u}(p') \left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right) u(p) \right] A_i^f(q) \quad (108)$$

Al hacer $q=0$ la expresión entre corchetes deberá de ser cero idénticamente. Aplicando aproximaciones a primer orden, resultará:

$$(2m) \cdot \varepsilon^\dagger \left(\frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^i \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \varepsilon \quad (109)$$

Al ser insertado de nuevo en 128 y simplificando resulta como sigue:

$$iM = -i(2m)e \cdot \varepsilon^\dagger \left(\frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \varepsilon B_t^k(q) \quad (110)$$

Donde:

$$B = -i\varepsilon^{ijk} q^i A_f^j(q) \quad (111)$$

Esto evoca a cuestiones electromagnéticas de la cuántica, de hecho invita a pensarlo como un pozo de potencial. Recordando expresiones útiles:

$$V(x) = -\langle \mu \rangle \cdot B(x) \quad (112)$$

Esto nos deja entonces claro que podemos considerar lo siguiente como el momento magnético:

$$\langle \mu \rangle = \frac{e}{m} (F_1(0) + F_2(0)) \varepsilon' \frac{\sigma}{2} \varepsilon \quad (113)$$

Escribamos la expresión convencional entre spin y el momento magnético:

$$\mu = g \left(\frac{e}{2m} \right) S \quad (114)$$

Dejando como única alternativa lo siguiente:

$$g = 2 [F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0) \quad (115)$$

Vemos que de aquí se obtiene directamente el 2 que Dirac obtuvo, sin embargo también tenemos manifestado que el factor de forma 2 contiene cierta información que da cabida a la investigación que realizo.

Una de las cuestiones que subyace en esta investigación es también el desarrollo de la ciencia física.

Sabemos que, el muon tiene mucha relación con el electrón y el tauon, sin embargo por el momento solo el muon presenta discrepancias considerables a la hora de medir su momento magnético anómalo.

Lo anterior hace creer que existen partículas aún desconocidas, las cuales interactúan con el muón.

Esto abriría la puerta a toda una nueva clase de interacciones, que por el momento no son modeladas conforme nuestros marcos teóricos actuales.

Con lo anterior procedemos al desarrollo de los cálculos en este trabajo.

Cálculo

Partimos a la búsqueda entonces del factor de forma 2, utilizaremos aproximación a segundo orden, el vértice que nos sirve para esto es el siguiente:

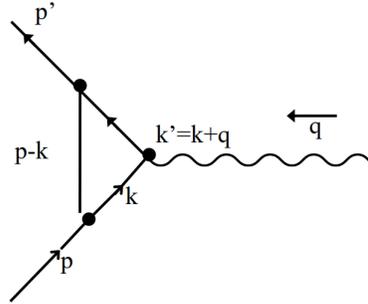


Figure 14: Vértice de interacción con corrección radiativa

La manera de investigar este diagrama y finalmente el cálculo del factor de forma 2 requerirá de:

- 1.- Utilizar las reglas de Feynman.
- 2.- Utilizar los parámetros de Feynman.

Para utilizar las reglas de Feynman requerimos de seccionar el diagrama presentado, esto sucede por medio de secciones del vértice, después asignamos un objeto matemático a cada sección.

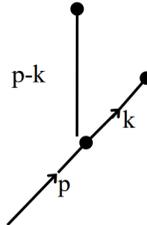


Figure 15: Primera sección del diagrama

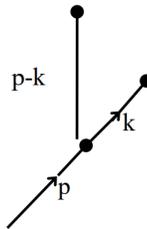


Figure 16: Segunda sección del diagrama

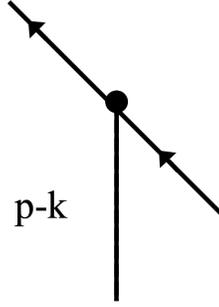


Figure 17: Segunda sección del diagrama

De las reglas de Feynman, que en nuestro caso es la correcta asignación de propagadores de fotones, fermiones y de el intercambio de momentos en los vértice nos queda las siguiente integral a resolver.

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-ig_{\nu\rho}}{(p-k)^2 + i\epsilon} \right) (-ie\gamma^\nu) \left(\frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (-ie\gamma^\mu) \left(\frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (-ie\gamma^\rho) \quad (116)$$

Desarrollando nos queda como sigue:

$$2ie \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{k' \gamma^\mu k' + m^2 \gamma^\mu - 2m[k + k']^\mu}{[(k-p)^2 + i\epsilon][k'^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]} \right) \quad (117)$$

6.1 Parámetros de Feynman

Para poder evaluar la expresión 138 requeriremos de utilizar los denominados parámetros de Feynman, estos tienen la forma general siguiente:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n} \quad (118)$$

Esto nos servirá para poder reexpresar el denominador de la expresión 139, y con ello poder resolver la integral.

En nuestro caso podemos hacer que el denominador sea igual a la siguiente expresión:

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(\Sigma x + y + z - 1) \frac{2}{[x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 + (x+y+z)i\epsilon]^3} \quad (119)$$

Demos un poco de atención directa a lo que se encuentra dentro del corchete del denominador, que le podemos llamar D.

$$D = k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 + i\epsilon \quad (120)$$

Hemos utilizado el hecho de que $x+y+z=1$ y que $k' = k+q$.

Si definimos como sigue:

$$l = k + yq - zp \quad (121)$$

$$\Delta = -xyq^2 + (1 - z)^2 m \quad (122)$$

Llegaremos a lo siguiente:

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon \quad (123)$$

El siguiente paso sería expresar el denominador de 17 en términos de nuestra nueva variable l , para ello deberemos de tomar en cuenta varios aspectos con fin a simplificar este trabajo, entre ellos las 2 siguientes eq.:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} = 0 \quad (124)$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4} g^{\mu\nu} l^2}{D^3} \quad (125)$$

Aplicando corrección de vértice, linealización y las 2 últimas ecuaciones llegamos a lo siguiente

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{D^3} \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} l^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right] \quad (126)$$

Una vez más, la integral anterior es compleja, sin embargo muestra ya de manera explícita los factores de forma.

La integral anterior es divergente, aquello que acompaña al factor de forma 1 habrá de diverge en diversos dominios de l , esta situación tiene solución, sin embargo aquí nos concentraremos en el factor de forma 2.

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{D^3} \bar{u}(p') \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) u(p) \quad (127)$$

La integral no puede ser evaluada directamente debido al los signos de la métrica, utilizamos la denominada rotación de Wick, esto consiste en hacer que la parte temporal esté multiplicada por la i , esto lo hacemos para poder utilizar coordenadas esféricas en 4D.

La solución será como sigue, siempre y cuando la magnitud de q al cuadrado sea cero, esto es la no interacción como buscábamos desde el principio quedará como sigue:

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \quad (128)$$

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (129)$$

Tenemos así la contribución a segundo orden al momento magnético, aproximadamente 0.0011614 adimensional, por supuesto.

Exposición de los resultados.

Entonces, para obtener resultados vemos que la primera corrección tiene una igualdad directa con la constante de estructura fina, tal valor ha sido investigado con anterioridad por la comunidad, entonces proponemos obtener el valor de la constante de estructura fina de los experimentos que involucran el momento magnético. Los valores de la constante de estructura fina son como sigue:

Low-Energy QED:

Electron (g-2)	137.035 992 35 (73)
Muon (g-2)	137.035 5 (1 1)

Figure 18: Números de referencia

Experimentos como el anterior han sido realizados desde los 50 en Europa, las primeras no concordancias relevantes fueron registradas en EUA a inicios de siglo, tal experimento ha sido repetido con mayor precisión en el fermi lab; la discrepancia no ha ido más que aumentado. A la par de esto, se han hecho intento de acrecentar el orden de la corrección, actualmente se ha llegado hasta quinto orden.

Notemos como con el electrón la constante de estructura fina es obtenida con mucha mayor precisión que con el muon, Conforme experimentos actuales esta discrepancia no ha hecho más que aumentar.

El hecho de que tal discrepancia aumente conforme los experimentos se vuelven más preciosos, envía la responsabilidad de tal discrepancia a la teoría, esto es, la misma teoría es incapaz de brindar valores de las observables de tal manera que estos concuerden con la realidad, con lo cual las oportunidades de nueva física debido a interacciones que parecen ser no encontradas en el modelo estandar se eneenutra a la vista.

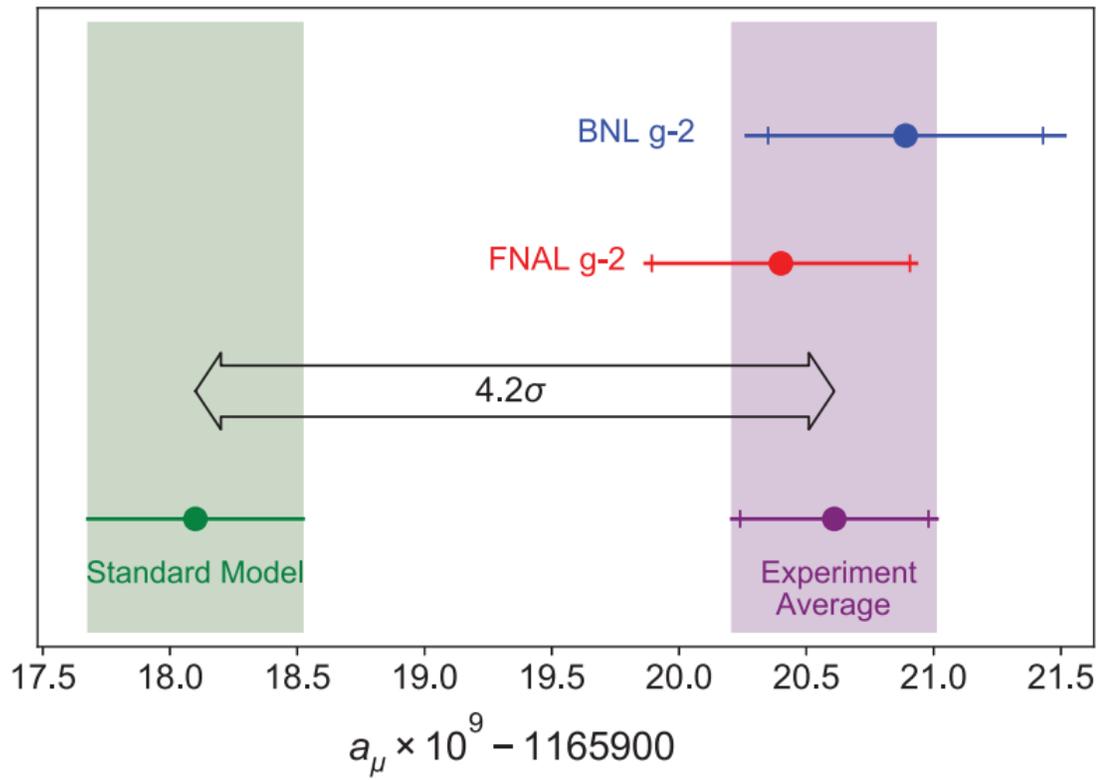


Figure 19: Descripción pictórica de la situación, [32]

La imagen anterior muestra comparativas de valores del MMAM teóricas y experimentales, nótese como la desviación estadística se encuentra por arriba de 4, lo cual arroja lo siguiente:

1.- Estadísticamente hablando, los valores se encuentran lejanos por cercano de 4 sigmas, lo cual es estadísticamente relevante.

2.- La discrepancia es considerable, si se hace la comparativa contra los experimentos equivalente para el electrón, lo cual hace aún más el trasladar la responsabilidad a la teoría

Justificación del problema

El conocimiento del mmam dará perspectiva sobre la validez del modelo estándar o a sus posibles reformulaciones [11],[12],[13],[17].

El conocimiento de los constituyentes de la materia implica el conocer sus cualidades; un mejor conocimiento de esto implica el avance de las teorías, lo cual brinda progreso a las aplicaciones posibles.

El estudio exhaustivo de las interacciones de las partículas elementales puede brindar ideas sobre las maneras de brindarles grandes energías; con lo cual muchos procesos pueden ser mejor estudiados.

Diversas aplicaciones pueden ser encontradas en los mismos experimentos [15], ya que el avance de la ciencia suele requerir cantidades cada vez mayores de energía, a la misma vez suele requerir mediciones más precisas[16].

Hipótesis

La inclusión de las contribuciones que generan las partículas supersimétricas en el momento magnético anómalo del muon son capaces de explicar la discrepancia existente entre teoría y experimento.

Objetivo general

Revisar las contribuciones supersimétricas al mmam, comparar los valores obtenidos mediante tal asunción con los valores experimentales y revisar la viabilidad de la supersimetría como explicación de la desviación entre teoría y experimento.

Objetivos específicos

- 1.- Realizar la construcción de la teoría cuántica de campos.
- 2.- Revisar los cálculos del mmam.
- 3.- Programar cálculos para poder ser realizados a órdenes perturbativos.
- 4.- Comparar resultados teóricos del objetivo 3 con los experimentales.
- 5.- Discutir la viabilidad de la supersimetría.
- 6.- Proponer otras alternativas para al resolución de la discrepancia.

Metodología

Para la realización de lo dicho se contará con más de una manera.

Se realizará el cálculo de manera convencional, esto es; cálculos sin computadora, su grado de precisión es mínimo contra metodologías modernas. Su objetivo es la familiaridad con los procesos.

Se realizará una comparativa con los resultados reales y se cotejará como es que en efecto las discrepancias siguen apareciendo en los experimentos más modernos.

Cronología de actividades futuras

Parte de este escrito tiene en su haber el proyecto que se espera se pueda desarrollar en el futuro.

Los planes pasan por comprender mejor las interacciones que no son del tipo EM, y con ello involucrarse de mejor manera en la física de frontera.

La idea de concepción conforme las partículas supersimétricas requiere más tiempo de que una maestría brinda.

Referencias

- [1] Gorringer, T. P., Hertzog, D. W. (2015). Precision Muon Physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*. doi: 10.48550/arXiv.1506.01465.
- [2] Jegerlehner, F. (2009). The anomalous magnetic moment of the muon. *Physics Reports*, 477(1-3), 1-110. doi:10.1016/j.physrep.2009.04.003.
- [3] Keshavarzi, A., Khaw, K. S., Yoshioka, T. (2022). Muon $g-2$: A review. *Nuclear Physics B*, 975, 115675. doi:10.1016/j.nuclphysb.2022.115675.
- [4] Roberts, B. L. (2018). The History of the Muon ($g-2$) Experiments. *SciPost Physics Lecture Notes*, 15. doi: 10.48550/arXiv.1811.06974.
- [5] Abi, B., et al. (2021). Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Physical Review Letters*, 126(14), 141801. doi:10.1103/PhysRevLett.126.141801.
- [6] Paradisi, P., et al. (2022). High-energy frontier of the muon g_2 at a muon collider. *Physical Review D*, 106(11), 115038. doi:10.1103/PhysRevD.106.115038.
- [7] Hernandez, A. E. (2020). Is it possible to explain the muon and electron g_2 in a Z model? *Physical Review D*, 101(11), 115016. doi:10.1103/PhysRevD.101.115016.
- [8] Capolupo, A., et al. (2022). Muon $g-2$ anomaly and non-locality. *Physics Letters B*, 829, 137128. doi:10.1016/j.physletb.2022.137128.
- [9] Malaescu, B. (2022). Theory of Muon $g-2$. *Japan Physical Society Conference Proceedings*, 37, 011003. doi:10.7566/JPSCP.37.011003.
- [10] Aoyama, T. (2019). Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron. *Atoms*, 7(1), 28. doi:10.3390/atoms7010028.
- [11] Masiero, A., Petcov, S., Vitale, L. (2020). New physics at the MUon Experiment at CERN. *Phys. Rev. D*, 102(7), 075013. doi:10.1103/PhysRevD.102.075013.
- [12] Aoyama, T., Asmussen, N., Benayoun, M. et al. (2020). The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Physics Reports*, 887, 1-166. doi:10.1016/j.physrep.2020.07.006.
- [13] Lindner, M., Masiero, A., Profumo, S., Reina, L., Takanishi, Y. (2018). A call for new physics: The muon anomalous magnetic moment and lepton flavor violation. *Physics Reports*, 731, 1-54. doi:10.1016/j.physrep.2018.03.004.
- [14] Athron, Peter, et al. "New physics explanations of a_μ in light of the FNAL muon g_2 measurement." *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 9, 2021, pp. 1-23. doi:10.1007/JHEP09(2021)080.
- [15] Anastasi, A., et al. (2018). The laser control of the muon g_2 experiment at Fermilab. *Journal of Instrumentation*, 13(02), T02009. doi:10.1088/1748-0221/13/02/T02009.

- [16] Hertzog, W. D. (2016). Next Generation Muon $g - 2$ Experiments. EPJ Web of Conferences, 118, 01015. doi: 10.1051/epjconf/201611801015.
- [17] Capdevilla, R., Izaguirre, E., Kahn, Y., Krnjaic, G., Tait, T. M. P. (2021). Discovering the physics of $(g-2)$ at future muon colliders. Physical Review D, 103(7), 075028. doi:10.1103/PhysRevD.103.075028.
- [18] Volkov Sergey. (2019). Calculating the five-loop QED contribution to the electron anomalous magnetic moment: Graphs without lepton loops. Phys. Rev. D, 100(9), 096004. doi:10.1103/PhysRevD.100.096004.
- [19] Khépani Raya, et al. "Dyson-Schwinger equations and the muon $g-2$." Suplemento de la Revista Mexicana de Física 3 (2022): 020709. doi: 10.31349/SuplRevMexFis.3.020709.
- [20] Marquard, P., Passera, M., Stöckinger, D., Ueda, T. (2019). $(g_2)_\mu$ at four loops in QED. EPJ Web of Conferences, 218, 01004. doi:10.1051/epjconf/201921801004.
- [21] Marquard, P., et al. (2019). $(g-2)_\mu$ at four loops in QED. EPJ Web of Conferences, 212, 01004. doi:10.1051/epjconf/201921801004.
- [22] Davoudiasl, H., Marciano, W. J. (2013). A tale of two anomalies. Physics Reports, 533(3), 1-35. doi:10.1016/j.physrep.2013.05.004.
- [24] Huang, D., Tang, Y. Wu, YL. (2023) Contributions to the muon $g - 2$ from a three-form field. J. High Energ. Phys, 117 .doi:10.1007/JHEP01(2023)117.
- [25] Kowalska, K., Sessolo, E.M. (2017) Expectations for the muon $g - 2$ in simplified models with dark matter. J. High Energ. Phys. 2017, 112 .doi:10.1007/JHEP09(2017)112.
- [26] Chen, C.-Y., Pospelov, M., Zhong, Y.-M. (2017). Muon beam experiments to probe the dark sector. Physical Review D, 95(11), 115005. doi: 10.1103/PhysRevD.95.115005.
- [27] Sato, Y. (2019) J-PARC Muon $g-2$ /EDM Experiment. JPS. doi:10.7566/JPSCP.33.011110.
- [28] Arcadi G., de Jesus, A. (2022). A 2HDM for the $g-2$ and dark matter. Nuclear Physics B, 982, 115882. doi:10.1016/j.nuclphysb.2022.115882.
- [29] Janish, R., Ramani, H. (2020). Muon $g-2$ and EDM experiments as muonic dark matter detectors. Physical Review D, 102(11-1), 115018. doi:10.1103/PhysRevD.102.115018.
- [30] Athron, P., Fowlie, A., Lu, CT. et al. Hadronic uncertainties versus new physics for the W boson mass and Muon g_2 anomalies. Nat Commun 14, 659 (2023). doi: 10.1038/s41467-023-36366-7.
- [31] Giudice, G.F., Paradisi, P. Passera, M. Testing new physics with the electron $g - 2$. J. High Energ. Phys. 2012, 113 (2012).doi:10.1007/JHEP11(2012)113
- [32] B. Abi, et .al. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. PHYSICAL REVIEW LETTERS 126, 141801 (2021). doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.141801

- [33][L.1] Griffiths, D. J. (2008). Introduction to elementary particles (2nd edition) (3.a ed.). ISBN 978-3527406012
- [34][L.2] Sakurai, J. J., Napolitano, J. (2020). Modern Quantum Mechanics. Cambridge University Press. ISBN 978-1-108-47322-4
- [35][L.3] Halliday, D., Resnick, R., Krane, K. S. (1992b). Physics/Extended Version (Subsequent). John Wiley Sons Inc.
- [36][L.4] Goldstein, H. (1980). Classical Mechanics. Van Haren Publishing. ISBN 0-201-02969-3
- [37][L.5] Griffiths, D. J. (2023). Introduction to Electrodynamics (English Edition) (3.a ed.). ISBN 0-13-805326-X
- [38][L.6] Jackson, J. D. (1998). Classical Electrodynamics. Wiley. ISBN 0-471-30932-X
- [39][L.7] Flores Godoy, J. y Stanley Grossman (2012). Algebra Lineal. Álvaro Obregón, Mexico: Mc Graw-Hill Interamericana Editores.
- [40][L.8] De la Peña, L., de la Peña, L. (1996). Introducción a la mecánica cuántica / Introduction to Quantum Mechanics. Fondo de Cultura Económica, ISBN 978-607-16-0176-6.
- [41][L.9] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1973). Teoría clásica de los campos. Editorial Reverté. ISBN-84-291-4082-4.
- [42][L.10] Aitchison, I. J. R., Hey, A. J. G. (2012). Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED, Fourth Edition. Taylor Francis, ISBN 978-1-4665-1299-3.
- [43][L.11] Eugene B, (1968) Mathematical Physics, First Edition. Adyson-Wesley.
- [44][L.12] Lang, S. (2004) Undergraduate Algebra, third edition, Springer, ISBN 0-387-22025-9.
- [45][L.13] Lang, S. (2004) Linear Algebra, Third edition (corrected printing), Springer, ISBN 0-387 -96412-6.
- [46][L.14] Greiner, W. (1990) Relativistic Quantum Mechanics, Springer, ISBN 978-3-540-50986-8.
- [47][L.15] Greiner, W (1996) Field Quantization, Springer. ISBN 3-540-59179-6
- [48][L.16] M, Carrol, Sean. (2004), Adyson-Weasley. ISBN 0-8053-8732-3
- [49][L.17] P, Michael . (1995), CRC Press. ISBN 978-0201503975