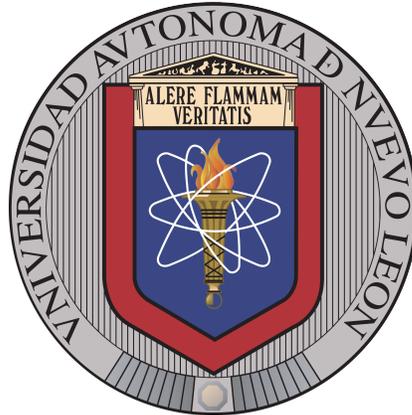


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



DISEÑO DE ALGORITMOS DE SUPER-TWISTING
DE BAJO COSTO CONVERGENTES EN TIEMPO
PREDEFINIDO Y SUS APLICACIONES

POR

LIC. RAMÓN LÓPEZ CORONADO

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JULIO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



DISEÑO DE ALGORITMOS DE SUPER-TWISTING
DE BAJO COSTO CONVERGENTES EN TIEMPO
PREDEFINIDO Y SUS APLICACIONES

POR

LIC. RAMÓN LÓPEZ CORONADO

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JULIO 2024

Dedicado a mi familia, profesores y amigos por su gran apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres Ramón y Dolores por su apoyo durante todo el recorrido de mi vida académica, por estar siempre presentes y ser mis principales mentores para formarme como la persona que soy ahora. A mis hermanas Mónica Sofía y Rebeca Denisse por su alegría y cariño que me inspira a seguir siempre adelante.

Le doy gracias al Dr. Mikhail Basin por su guía, dedicación, constante asesoramiento, paciencia y todo el conocimiento que me ha transmitido. A los miembros de mi comité por sus consejos y observaciones, así como a mis profesores en general que me formaron profesionalmente.

A mi mejor amigo Mario Tapia, mis compañeros y amigos de la licenciatura y maestría.

Por último agradezco el respaldo de la Universidad Autónoma de Nuevo León, la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y al CONAHCyT por el apoyo económico otorgado.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | iv |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación | 1 |
| 1.2. Antecedentes | 4 |
| 1.3. Aportaciones | 10 |
| 1.4. Organización de la tesis | 10 |
| 2. Marco Teórico | 12 |
| 2.1. Descripciones matemáticas | 12 |
| 2.1.1. Concepto de estado | 12 |
| 2.1.2. Sistemas lineales y no lineales | 13 |
| 2.1.3. Punto de equilibrio y estabilidad | 16 |
| 2.2. Algoritmos de control | 17 |
| 2.2.1. Control de Modos Deslizantes | 18 |
| 2.2.2. Control de Super-Twisting | 20 |

| | |
|--|-----------|
| 2.3. Tiempos de convergencia | 21 |
| 2.4. Sistema para simulaciones (PMSM) | 23 |
| 3. Diseño de algoritmos de Super-Twisting Convergentes en Tiempo Predefinido | 31 |
| 3.1. Planteamiento del problema | 31 |
| 3.2. Diseño del algoritmo | 32 |
| 3.3. Estabilización en tiempo predefinido sin disturbios | 34 |
| 3.3.1. Ejemplo de aplicación | 35 |
| 3.3.2. Simulación | 35 |
| 3.4. Estabilización en tiempo predefinido con perturbaciones deterministas | 40 |
| 3.4.1. Ejemplo de aplicación | 41 |
| 3.4.2. Simulación | 42 |
| 3.5. Estabilización en tiempo predefinido con perturbaciones deterministas y ruido estocástico | 47 |
| 3.5.1. Ejemplo de Aplicación | 48 |
| 3.5.2. Simulación | 50 |
| 4. Conclusión | 56 |
| 4.1. Conclusiones | 56 |
| 4.2. Estado actual | 56 |
| 4.3. Perspectiva a futuro | 57 |

Bibliografía

58

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 1.1. Entrada de control para PMSM | 7 |
| 2.1. Circuito eléctrico con capacitores y una resistencia | 13 |
| 2.2. Estructura básica de un PMSM | 25 |
| 2.3. Diagrama físico para PMSM | 27 |
| 2.4. Diagrama vectorial de campo orientado | 30 |
| 3.1. Convergencia de estados de (3.13) al origen para las entradas u_1 , u_2 , y u_3 . $\omega_0 = 25$ | 37 |
| 3.2. Convergencia de estados de (3.13) al origen para las entradas u_1 , u_2 , y u_3 . $\omega_0 = 100$ | 37 |
| 3.3. Convergencia de estados de (3.13) al origen para las entradas u_1 , u_2 , y u_3 . $\omega_0 = 500$ | 38 |
| 3.4. Historial de entradas de control para $\omega_0 = 25$ | 38 |
| 3.5. Historial de entradas de control para $\omega_0 = 100$ | 39 |
| 3.6. Historial de entradas de control para $\omega_0 = 500$ | 39 |

| | |
|--|----|
| 3.7. Convergencia de los estados del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 43 |
| 3.8. Convergencia de las salidas del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 44 |
| 3.9. Convergencia de los estados del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 200$ y $y_0 = 50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 44 |
| 3.10. Convergencia de las salidas del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 200$ y $y_0 = 50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 45 |
| 3.11. Historial de las entradas de control para $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ | 46 |
| 3.12. Historial de las entradas de control para $\omega_0 = 200$ y $y_0 = 50$ | 46 |
| 3.13. Convergencia de los estados del sistema (3.29) usando condiciones iniciales $\omega_0 = 50$ y $y_0 = -100$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 50 |
| 3.14. Convergencia de las salidas del sistema (3.29) con condiciones iniciales $\omega_0 = 50$ y $y_0 = -100$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 51 |
| 3.15. Convergencia de los estados del sistema (3.29) usando condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 51 |
| 3.16. Convergencia de las salidas del sistema (3.29) con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 52 |
| 3.17. Convergencia de los estados del sistema (3.29) usando las condiciones iniciales $\omega_0 = 500$ y $y_0 = 50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 52 |
| 3.18. Convergencia de las salidas del sistema (3.29) al origen en promedio cuadrático con condiciones iniciales $\omega_0 = 500$ y $y_0 = 50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 | 53 |

-
- 3.19. Historial de tiempo de las entradas de control para $\omega_0 = 50$ y $y_0 = -100$ 54
- 3.20. Historial de tiempo de las entradas de control para $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$. 54
- 3.21. Historial de tiempo de las entradas de control para $\omega_0 = 500$ y $y_0 = 50$. 55

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| 3.1. Tiempos de convergencia sin perturbaciones | 36 |
| 3.2. Tiempos de convergencia para sistema con perturbaciones deterministas | 43 |
| 3.3. Tiempos de convergencia para sistema con disturbios deterministas y ruido estocástico | 49 |

RESUMEN

Este trabajo presenta el diseño de algoritmos de Super-Twisting de bajo costo convergentes en tiempo predefinido, siendo una extensión del algoritmo de Super-Twisting convergente en tiempo fijo, para sistemas dinámicos libres de disturbios, sujetos a perturbaciones deterministas acotadas y sujetos a perturbaciones deterministas acotadas junto con ruidos estocásticos. Para ilustrar los resultados se realizaron simulaciones en matlab aplicándose dichos algoritmos a un motor síncrono de imanes permanentes y además, estos son comparados con algoritmos previos de la literatura de algoritmos de convergencia en tiempo predefinido.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

A lo largo de la historia los seres humanos han desarrollado herramientas tecnológicas para mejorar sus estilos de vida. Estas herramientas deben cumplir objetivos específicos en el día a día y algunas han evolucionado a sistemas que resuelven no una sino múltiples tareas. Piénsese en el hogar, para una tarde calurosa de verano o una noche fría en invierno se necesita un sistema que regule la temperatura para brindar comodidad a sus residentes [1]. Es evidente que hoy día, todo lo que hacemos y nuestra forma de vida ya tiene la intervención de estos sistemas. En el área de ingeniería se tienen los sistemas de control, que buscan gobernar el comportamiento de sistemas dinámicos por medio de ciertas técnicas y metodología específica desarrollada en la teoría de control. Los sistemas de control se pueden encontrar en abundancia, como el control de calidad de manufactura, líneas de ensamblado automático, control de maquinaria de trabajo, tecnología espacial y sistemas de armamento, control computacional, sistemas de energía, sistemas de transporte, robótica, sistemas microelectromecánicos (MEMS), nanotecnología, y muchos más.

Dentro de los sistemas de control se hace uso de algoritmos de convergencia para estabilizar los estados de un sistema dinámico en puntos de operación específicos

dados. Una parte importante a considerar respecto al uso de estos algoritmos recae en su sensibilidad ante perturbaciones externas que puedan afectar el comportamiento de los mismos o incluso resultar en daños a los sistemas y/o sus componentes. Para ello se hace uso de controladores robustos que muestran esta deseada insensibilidad ante disturbios.

Por otro lado, algunos sistemas físicos, además de ser afectados por perturbaciones también están restringidos en el tiempo para funcionar correctamente, lo que muestra la necesidad de tener controladores que logren cumplir su objetivo de estabilizar un estado en un punto dado en el tiempo preciso y/o menor tiempo posible. Por ello tenemos en la literatura algunos controles robustos de convergencia en tiempo finito y tiempo fijo como lo son los controladores de modos deslizantes (SMC) y sus derivados de orden superior “High Order Sliding Mode’s” (HOSM’s) como el algoritmo de super-twisting.

La diferencia entre estos tipos de convergencia radica en su dependencia de las condiciones iniciales. Se puede ilustrar esta diferenciación de una forma muy simple: Si hubiese un vehículo con una velocidad inicial dada y queremos detenerlo totalmente, aplicamos los frenos de una forma completamente uniforme hasta detenerlo y el tiempo en el que esto se consigue depende de la velocidad inicial del vehículo, de modo que una velocidad mayor resulta en un tiempo de convergencia al cero también mayor y a una velocidad menor le corresponde menor tiempo hasta detenerse. Esto puede considerarse un ejemplo de convergencia en tiempo finito; por otro lado, si podemos ajustar los frenos o la intensidad con la que estos actúan se puede lograr que el vehículo se detenga siempre al mismo tiempo sin importar su velocidad inicial y esto corresponde a la convergencia en tiempo fijo.

En la industria energética por ejemplo, el nivel de potencia en un reactor nuclear, es normalmente el tema de mayor interés en el control de las centrales nucleares [2]. Se ha utilizado el control de modos deslizantes para realizar seguimiento al perfil de potencia térmica de referencia en [3]. En [4] se hace uso del algoritmo de super-

twisting para controlar la potencia del núcleo tomando en cuenta los efectos de concentración de xenón, mientras que en [5] se hace uso de un observador de control deslizante de orden superior para estimar la reactividad del xenón y samario en un reactor de agua a presión. En el artículo [6] se trata el problema del funcionamiento de un reactor basado en los requerimientos de energía (load following) y se hace implementación de un algoritmo de Twisting adaptativo para gobernar sobre la inestabilidad del núcleo producido por las oscilaciones del xenón. También se puede mencionar la implementación de algoritmos de super-twisting como una vía para mejorar la robustez gracias a la estimación exacta de los parámetros en un tiempo definido y atenuando las perturbaciones y el chattering [7].

En cuanto a investigación de convergencia en tiempo finito podemos destacar el uso de un algoritmo de super-twisting modificado (multivariable y adaptativo) en un robot anfibio [8] que provee mayor robustez al sistema y disminuye tiempos de convergencia. En [9] por ejemplo, se presenta una alternativa al SMC convencional haciendo uso de un control de modos deslizantes integral (ISMC) compuesto de dos partes: la parte nominal que es continua y una parte discontinua para mitigar los disturbios e incertidumbres del modelo. Esta parte discontinua es reemplazada por un control de super-twisting gracias a su propiedad de observación de disturbios.

La funcionalidad de un algoritmo que lleva a los estados del sistema en un tiempo fijo máximo ha sido probada en diversos artículos como en [10], donde se usa un sistema del péndulo invertido en un carro. El diseño consiste en estabilizar el péndulo que ha sido desplazado del punto de equilibrio, usando el movimiento del vehículo. En [11] se hace uso de funciones implícitas de Lyapunov para diseñar observadores que converjan en tiempo fijo. Por otro lado en [12] se diseñan diferenciadores en tiempo real usando como observador el STA convergente en tiempo fijo.

Aplicaciones de estos algoritmos existen no solo para sistemas dinámicos no autónomos (con dependencia del tiempo explícito en sus ecuaciones dinámicas) sino también en sistemas autónomos como lo son los motores síncronos de imanes permanentes

(PMSM), sistemas robóticos con muchos grados de libertad o incluso en sistemas de guiado de misiles [13]. Ahora bien, teniendo algoritmos que logran convergencia en tiempo finito y en tiempo fijo, podemos cuestionarnos si existe otro tipo de convergencia y la respuesta es si. Esta vía presenta a los algoritmos de convergencia en tiempo predefinido donde se establece este tiempo de convergencia de manera predeterminada.

El objetivo de este trabajo de investigación es presentar un análisis de algoritmos de convergencia en tiempo predefinido partiendo del algoritmo de super-twisting y modificándolo para después aplicarlo en un sistema dinámico haciendo énfasis en la reducción de las magnitudes de control.

1.2 ANTECEDENTES

De acuerdo a los autores en [14] existen 5 generaciones de controladores de modos deslizantes:

- Primera generación: Control de modos deslizantes de primer orden. Su teoría se estableció en 1980 con un procedimiento de dos pasos para su diseño: diseñar la superficie de deslizamiento y proponer un control discontinuo que asegure el modo de deslizamiento.
- Segunda generación: Los modos deslizantes de segundo orden, como el algoritmo de twisting y algoritmos terminales.
- Tercera generación: El algoritmo de super-twisting.
- Cuarta generación: Controladores de modos deslizantes de orden arbitrario como los controladores “anidados”
- Quinta generación: Controladores de modos deslizantes continuos de orden arbitrario.

Cada generación presenta ventajas y desventajas respecto al resto y esto a llevado a que se desarrollen trabajos sobre estos diferentes tipos de controles hasta la actualidad. Algunas investigaciones se han concentrado en realizar diversas modificaciones para los algoritmos existentes.

Considerando la gran cantidad de modificaciones para el algoritmo de Super Twisting se ha encontrado que algunas, específicamente enfocadas a la convergencia en tiempo fijo, muestran un margen muy grande con respecto al tiempo esperado de convergencia en comparación con el tiempo real calculado en simulaciones. Estos resultados inspiran a desarrollar nuevos algoritmos menos “conservadores” (menor margen en tiempo).

En el trabajo [15] por ejemplo, se muestran algoritmos alternativos a los propuestos en [16] y luego de estimar los tiempos de convergencia estos se comparan y resultan en una mejora importante en la precisión del tiempo de convergencia fijo calculado contra el tiempo real de convergencia en la simulación. Esto se logra, quitando ciertos términos que habían sido considerados en [16].

Este resultado es piedra angular para nuestro razonamiento en la formulación de las modificaciones que se propondrán al algoritmo de super-twisting en el capítulo 3. Se han hecho avances de investigación notables en el diseño de algoritmos de tiempo predefinido. En [17] se considera la convergencia en un tiempo predefinido t_f que dependa de parámetros de control. Dentro del desarrollo hecho en [18] se considera un sistema dinámico de segundo orden definiendo su estabilidad en tiempo predefinido como una extensión a la estabilidad en tiempo fijo, nombrando T_f como el tiempo real fijo en el que el sistema se estabiliza. Se hace uso de una función de transformación no singular para introducir a las ecuaciones dinámicas la dependencia explícita del tiempo de convergencia. El problema es que la función utilizada no es suave (en términos matemáticos) dando paso a singularidades.

En [19] se plantea una metodología para estabilizar los estados de un sistema no lineal estableciendo un tiempo para ello y usando una función que diverge a ∞ una

vez que el tiempo de simulación t se aproxima a el tiempo establecido T , siendo t_0 el tiempo inicial:

$$\mu(t - t_0) = \frac{T}{T + t_0 - t}, \quad t \in [t_0, t_0 + T) \quad (1.1)$$

Con esta función variante en el tiempo se reescala el estado del sistema definiendo una nueva variable de estado:

$$\omega(t) = \mu(t - t_0)x(t) \quad (1.2)$$

Luego de las simulaciones se explica que el precio para la convergencia en el tiempo dictado es el aumento de la ganancia cuando t se aproxima a T . Además, los resultados se restringen a perturbaciones ligadas, cosa que no resuelve por completo el problema de la permanencia de las mismas, requiriendo una ganancia infinita. Otra investigación que hace uso de esta transformación es [20] aplicado con observadores en sistemas lineales que están en la forma canónica del observador.

Respecto a la implementación de estos conceptos de tiempo fijo y preescrito en el STA tenemos que en [21] se hace uso de la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{-\eta(e^x - 1)}{e^x(t_f - t)} & \forall t \in [t_0, t_f) \\ 0 & \forall t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (1.3)$$

Con $\eta \in \mathbb{R}^n$ como parámetro y t_f como el tiempo de estabilización (convergencia). Este tiempo no está ligado a las condiciones iniciales del sistema ni a otros parámetros internos del mismo. La solución para (1.3) es:

$$x = \ln(C(t_f - t)^\eta + 1) \quad (1.4)$$

La constante de integración puede ser obtenida de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y toma el valor de $C = \frac{(e^{x_0} - 1)}{(t_f - t_0)^\eta}$. La idea detrás del uso de esta ecuación diferencial es que x y \dot{x} tienden a cero cuando t se aproxima a t_f .

Nótese que en este caso, el único parámetro que se puede variar para exigir la convergencia será η dando una forma más simple en comparación con otros modelos en los

que la estabilidad depende de las variables del sistema y su elección, introduciendo el concepto de “estabilidad de libre albedrío” (free-will).

Después, en [22] y [23] se hace uso de esta ley de control corrigiendo un detalle en el cual si el estado x es negativo y crece, considerando $\eta > 1$ se tiene que la solución diverge de forma exponencial, volviendo el control muy grande para valores iniciales de x grandes y negativos. La corrección es agregar a la parte exponencial el valor absoluto del estado

$$\dot{x}(t) = -\eta \frac{e^{|x|} - 1}{e^{|x|}(t_f - t)} \quad (1.5)$$

En ambos artículos se hace uso de simulaciones con el PMSM como sistema debido a su importante papel en aplicaciones industriales y tecnológicas. Por su parte [23] amplía el sistema a una de escala completa 4D. Además se agrega a las ecuaciones dinámicas perturbaciones deterministas del tipo acotadas puesto que la implementación de robustez al STA propuesto en [21] es vital debido a la influencia que tiene la incertidumbre de algunos componentes de este motor en su funcionamiento o directamente perturbaciones externas.

Las simulaciones en [22] muestran que el comportamiento del control usando condiciones iniciales de $x(0) = -100$ es aceptable en práctica en comparación con las presentadas en [21], véase Fig 1.1.

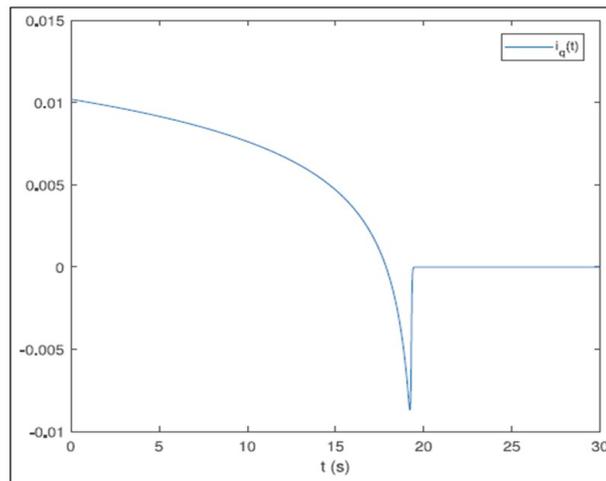


FIGURA 1.1: Entrada de control obtenida en [22] para PMSM haciendo uso de (1.5).

Otra cosa a destacar de ambos artículos es el uso de ruido estocástico, característica utilizada comúnmente en el modelado de perturbaciones para sistemas eléctricos. En [23] se hace uso de observadores suponiendo que solo algunas variables del sistema son medibles y el resto desconocidas, para compensar el ruido blanco.

La investigación realizada en [24] considera el siguiente sistema estocástico:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) + \xi(t) + \sigma(t, x(t))dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t > t_0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

y toma el concepto de entrada de control variante en el tiempo para dar la siguiente definición de convergencia en tiempo predefinido: El sistema (1.6) se llama convergente al origen en tiempo predefinido si cumple las siguientes condiciones,

1. Presenta estabilidad en el origen para un tiempo fijo (con cualquier condición inicial). Esto es, existe un tiempo $T_{\max} > 0$ tal que $x(t) = 0$ para todo $t > T_{\max}$
2. Si T_{\max} puede elegirse arbitrariamente, y además...
3. existe un tiempo $T_f \leq T_{\max}$ que represente el tiempo real para lograr la estabilidad del sistema y éste puede ser asignado como parámetro en la entrada de control.

El diseño del control consiste en usar un término extra en el STA para estabilidad en tiempo fijo. Este término toma la siguiente forma:

$$u(t) = \begin{cases} -\eta \frac{x(t)}{(t_f - t)}, & t_0 \leq t < t_f \\ 0 & t_f \leq t \end{cases} \quad (1.7)$$

La primera prueba se realiza sin la presencia de perturbaciones (como es usual al probar nuevos algoritmos) obteniendo resultados estables y con un grado de precisión elevado. Gracias a la dependencia lineal del control $u(t)$ con respecto al estado no existe el crecimiento exponencial presente en [21]. Así mismo la magnitud máxima del

control es alcanzada justo en el momento inicial t_0 y es igual a $|u(t)| = \eta \frac{|x_0|}{(t_f - t)}$ dando una entrada de control lineal, variante en el tiempo y de bajo costo. Es evidente que la mayor preocupación de este modelo es la presencia de la singularidad justo en $t = t_f$ pero solo por construcción del sistema de control, el estado converge antes de llegar al tiempo establecido.

Para el estudio de los casos con perturbaciones acotadas por una constante L se dispersan las dudas acerca de la singularidad mencionada debido a que los tiempos de convergencia son mucho menores a los preescritos.

Otro ejemplo de la implementación de un algoritmo similar es presentado en [25]. Es propuesta una modificación al STA convencional, en donde el primer término es reemplazado por una función $\sigma(x, t)$ con dependencia explícita del tiempo. donde

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} \frac{n}{(t_r + t_0) - t} x_1 & t \in [t_0, t_0 + t_r) \\ k_1 \text{sign}(x_1), & t \in [t_r + t_0, \infty) \end{cases} \quad (1.8)$$

y así, producir el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = -\sigma(x, t) + y(t) \quad (1.9)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha \text{sign}(x(t)) + \xi \quad (1.10)$$

Posteriormente, la modificación es aplicada al sistema de un péndulo amortiguado y haciendo uso de observadores, se obtienen resultados limitados ya que en la presencia de perturbaciones, la convergencia depende de la elección “adecuada” de los parámetros del sistema, cosa que en práctica no siempre es posible.

Uno de los objetivos de la modificación es simplificar lo más posible el algoritmo clásico, es decir, evitar la aparición de términos adicionales como el presente en [24], e inspirados con esta idea y la presentada en [15] es natural proponer leyes de control que sean modificaciones al STA continuo y de convergencia en tiempo fijo.

1.3 APORTACIONES

Las contribuciones de esta tesis son

- Dos algoritmos de super-twisting de bajo costo convergentes en tiempo predefinido para cada uno de los tres casos considerados: sistema sin perturbaciones, sistema con disturbios deterministas y sistema con disturbios deterministas y ruido estocástico
- En cada caso se presentan simulaciones de un ejemplo de aplicación (en un PMSM) y se compara con resultados de algoritmos previos
- Los resultados presentados en esta investigación están en proceso de revisión en Franklin Open Journal.

1.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Este trabajo está organizado en cuatro capítulos. El capítulo 1 incluye las secciones de motivación donde exponemos la justificación de nuestro trabajo, la sección de antecedentes donde presentamos las aportaciones clave y principales que han hecho posible nuestro actual análisis y propuesta, la sección de contribuciones donde aclaramos lo conseguido al realizar esta investigación y por último la sección de organización.

El capítulo 2 correspondiente al marco teórico se divide en cuatro secciones. La primera aborda la descripción matemática de los sistemas físicos por medio de conceptos como estado, ecuaciones dinámicas y puntos de equilibrio y estabilidad. La siguiente sección trata de conceptos como los algoritmos de control y una descripción de dos algoritmos en concreto, el control de modos deslizantes y el control de super-twisting. Después se dan las definiciones de tipos de convergencia, en particular la convergencia de tiempo finito, tiempo fijo y finalmente de tiempo predefinido.

Por último, se hace un tratamiento matemático para un sistema físico particular, un motor síncrono de imanes permanentes, para llegar a la ecuación que usaremos en el siguiente capítulo.

El capítulo 3, con 5 secciones, plantea el problema a tratar, se da el desarrollo y análisis para diseñar el nuevo algoritmo propuesto y en las siguientes tres secciones se trata la estabilización de un sistema escalar bajo tres consideraciones diferentes: sin perturbaciones, con disturbios deterministas y con disturbios deterministas y ruidos estocásticos; así mismo, en cada uno de estas secciones se realiza la aplicación de los algoritmos diseñados en un modelo escalar de PMSM y se presentan resultados de simulaciones pertinentes.

Por último, con tres secciones, el capítulo 4 presenta las conclusiones, el estado actual de la investigación y la perspectiva a futuro.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 DESCRIPCIONES MATEMÁTICAS

2.1.1 CONCEPTO DE ESTADO

Los estados de un sistema son la menor cantidad de información necesaria para entender el comportamiento futuro del sistema a partir de ellos. Por ejemplo, en un sistema dinámico de una partícula moviéndose en el espacio, los estados que lo describen son su posición y su velocidad pues conociéndolos, se puede determinar en que posición se encontrará en instantes de tiempo posteriores, aún y cuando se le aplique o no una fuerza externa (un tipo de control).

El uso del concepto de estado es de vital importancia para la teoría de control moderna pues en ésta se estudia el comportamiento interno de los sistemas. En contraste con la teoría clásica, el conocimiento de estos estados que influyen en la evolución temporal del sistema ayuda a solventar problemas como la interacción entre múltiples variables, la no linealidad y en general sistemas más complejos [26].

Si bien en un sistema físico hay limitados componentes o elementos, la elección de variables de estado no siempre resulta única, derivando en un análisis distinto de-

pendiendo de cada variable considerada. Así mismo, esta elección no requiere de una estricta interpretación física, por ejemplo, considerar un cociente de magnitudes como velocidad y fuerza en algún sistema dinámico puede resultar en la simplificación del problema en lugar de considerar ambas magnitudes por separado como dos variables de estado distintas. Por lo tanto, siempre y cuando el sistema pueda ser descrito, controlable y/u observable, la elección de estados tiende a ser arbitraria.

2.1.1.1 EJEMPLO DE ELECCIÓN DE ESTADOS

En el circuito eléctrico presente en la figura 2.1, se pueden usar los voltajes en las capacitancias como los estados del sistema x_1 , x_2 y x_3 [27], sin embargo también pueden usarse solo dos de ellos ya que haciendo análisis de mallas con leyes de Kirchhoff, se puede igualar la suma de voltajes de la malla derecha a cero y de ahí, se puede despejar uno de los voltajes para dejarlo en función de los otros dos.

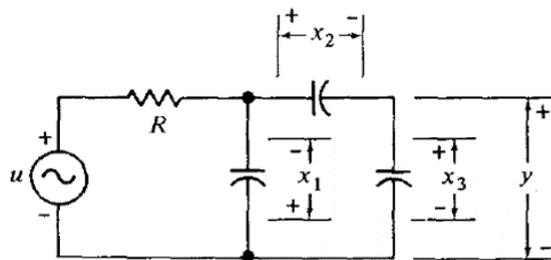


FIGURA 2.1: Circuito eléctrico con capacitores y una resistencia

2.1.2 SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

Si pretendemos entender, conocer y controlar sistemas físicos es de suma importancia saber describirlos por medio de un lenguaje lógico como lo son las matemáticas y a través de ellas se pueden representar estos sistemas en ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, desigualdades, etc. En este sentido, cada sistema físico se

puede clasificar en uno de dos tipos de sistemas: sistemas lineales y sistemas no lineales.

El estudio de los sistemas lineales está estrechamente relacionado con el campo del álgebra lineal y busca, por medio de esta rama de las matemáticas desarrollar técnicas de control así como estudiar las propiedades intrínsecas de los sistemas físicos. Existen dos enfoques o tipos de descripción: La descripción de tipo entrada salida o también conocida como descripción externa y la descripción por variables de estado, por ecuaciones dinámicas o descripción interna. Por un lado la descripción de entrada-salida hace uso de la función de transferencia, obtenida de aplicar la transformada de Laplace a la función de respuesta al impulso (como responde el sistema al aplicar un pulso de control).

En pocas palabras, en teoría de sistemas lineales, bajo ciertas suposiciones como la misma linealidad, causalidad o invarianza en el tiempo, se puede determinar una relación entre la salida correspondiente a un sistema y el control aplicado. Si bien esta descripción parece simple y resulta útil en muchos casos, los sistemas complejos suelen presentar elementos no considerados en esta teoría que pueden provocar su fallo. La gran desventaja de este enfoque es la “caja negra” que simboliza el trabajar con estas funciones de transferencia.

Para la descripción de variable de estado no solo es necesario conocer la entrada y salida, sino construir un conjunto de ecuaciones que relacionen ambas junto al estado del sistema llamadas ecuaciones dinámicas. Comúnmente se trabaja con ecuaciones del tipo diferenciales por concepto histórico: la segunda ley de Newton, la ley de transferencia de calor, las ecuaciones de Maxwell, etc. son todas ecuaciones diferenciales.

Una ecuación dinámica lineal tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Eu(t) \tag{2.2}$$

Donde A, B, C, D son matrices que representan operadores aplicandose al control y estados, y es el vector de las salidas del sistema y x es el vector de estados. Los operadores quedan definidos segun las características del sistema fisico a estudiar. La ecuación (2.1) se conoce como ecuación de estado mientras que la ecuación (2.2) es la ecuación de salida.

Claro está, que la linealización del sistema es clave para poder aplicar el método y encontrar la ecuación dinámica partiendo del conjunto de ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del sistema, así sea la segunda ley de Newton en sistemas mecánicos o leyes de Kirchhoff en redes eléctricas, entre otras.

Cuando esta linearización no es posible debido a las características del sistema o a la pérdida de precisión que la linearización provoca el sistema debe estudiarse como no lineal:

$$\dot{x}(t) = f(x, t, u) \quad (2.3)$$

$$y(t) = h(x, t, u) \quad (2.4)$$

De nuevo la ecuación (2.3) es conocida como la ecuación de estado y la ecuación (2.4) como la ecuación de salida, donde ahora, las funciones f y h son funciones no lineales del estado x , el tiempo t y la entrada de control u , como lo pueden ser exponenciales, funciones trigonométricas, polinomios de grado mayor o igual a dos, etc. Otro concepto importante es el de sistema autónomo, denominación que se le da a un sistema dinámico que no depende del tiempo (también conocido como invariante en el tiempo). De lo contrario, los sistemas son llamados no autónomos o variantes en el tiempo.

Por último un tema interesante acerca de los sistemas no lineales son los fenómenos no lineales esenciales [28], que solo ocurren en la presencia de la no linealidad. Ejemplos de estos fenómenos son: el escape en tiempo finito, equilibrios aislados múltiples, ciclos límites, oscilaciones subarmónicas, armónicas o casi periódicas, el fenómeno de caos e incluso múltiples modos de comportamiento. El fenómeno de equilibrios múltiples mencionado nos plantea la pregunta ¿Qué es un equilibrio?

2.1.3 PUNTO DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

Al usar la ecuación de estado surge un nuevo concepto: punto de equilibrio. Un punto $x = x^*$ en el espacio es llamado punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x, t)$ (ecuación de estado no forzada) si este cumple la propiedad de que si el estado del sistema coincide con este punto, este estado permanecerá en x^* en todo tiempo futuro. Para sistemas autónomos, los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{2.5}$$

Un punto de equilibrio puede ser aislado (no hay otros puntos de equilibrio en su vecindad) o puede haber un continuo de puntos de equilibrio, por ejemplo, si al igualar $f(x)$ a cero, encontramos la ecuación de una recta, una circunferencia, etc.

Antes de introducir estabilidad debemos mencionar un criterio de existencia local y unicidad para la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$:

TEOREMA 2.1 *Sea $f(t, x)$ continua a pedazos en t y satisface la condición de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \tag{2.6}$$

$\forall x, y \in B = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \leq r, \forall t \in [t_0, t_1]\}$. Entonces, existe algún $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$

Aquí la constante positiva L se conoce como constante de Lipschitz, además, suelen emplearse los términos “localmente Lipschitz” y “globalmente Lipschitz”. De forma resumida, una función es localmente Lipschitz sobre un dominio $D \subset R^n$ si cada punto dentro de ese dominio tiene una vecindad de puntos tal que f satisface la condición de Lipschitz en esta vecindad con cierta constante L_0 , esta constante sin embargo, depende de x de modo que va cambiando conforme nos movamos en el plano; por otro lado, se dice que f es Lipschitz en un conjunto W si la constante de Lipschitz es la misma L en todos los puntos dentro de W y por último, f es globalmente Lipschitz si W coincide con R^n .

Con esto podemos pasar a definir estabilidad. Consideremos un sistema autónomo $f(x)$ donde $f : D \rightarrow R^n$ es un mapa localmente Lipschitz de un dominio $D \subset R^n$ a R^n . sin perder generalidad, decimos que $\bar{x} = 0$ es un punto de equilibrio de $f(x)$ ya que si $\bar{x} \neq 0$ solo haría falta hacer un cambio de variables de tipo $y = x - \bar{x}$ para que el nuevo punto de equilibrio sea cero.

DEFINICIÓN 2.2 *El punto de equilibrio $x = 0$ de $f(x)$ es*

- *estable si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *inestable, si no es estable*
- *asintóticamente estable si es estable y δ puede ser seleccionada tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

2.2 ALGORITMOS DE CONTROL

Dentro de las ecuaciones dinámicas, la aparición del control u nos lleva a preguntarnos ¿Qué forma deberá tener este control si quiero llevar un estado de un punto inicial a un punto de equilibrio? Para eso existen diversos algoritmos de control. En el capítulo anterior se ha mencionado acerca de diferentes algoritmos de control como lo son el twisting y control de modos deslizantes y en este capítulo abordamos los conceptos de estado, ecuaciones dinámicas y punto de equilibrio. En conjunto con estas ecuaciones, un algoritmo de control participa como entrada en la ecuación dinámica. Normalmente este control cuenta con una parte nominal y una parte compensativa. La parte nominal es la encargada de regular el comportamiento de la ecuación diferencial homogénea asociada (esto es, sin disturbios) mientras que en la parte compensativa se filtran algunas señales presentes en el sistema que en si mismas no están involucradas en el proceso de transición de estados.

Así, las leyes de control convergentes buscan llevar a los estados de un sistema a un punto de estabilidad. Es importante aclarar que el concepto de converger (llegar) a un punto es relevante si dicho punto proporciona estabilidad al sistema, es decir, es un punto de equilibrio estable, de lo contrario no tendría sentido definir convergencia a puntos de equilibrio inestables.

2.2.1 CONTROL DE MODOS DESLIZANTES

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, un problema recurrente a la hora de diseñar algoritmos es la capacidad de estos para mantenerse robustos frente a disturbios o incertidumbres. La técnica de control de modos deslizantes SMC es uno de estos métodos robustos. El diseño de este controlador consiste en dos etapas: seleccionar una superficie tal que el movimiento dentro de dicha superficie tiene propiedades deseadas y después se selecciona el vector de control u tal que las trayectorias de los estados lleguen a la superficie en tiempo finito y se mantengan en ella [29].

Primero introducimos una dinámica compensada deseada para un sistema de segundo orden de tipo:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = x_{10} \qquad (2.7)$$

$$\dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) \qquad x_2(2) = x_{20} \qquad (2.8)$$

con f siendo una perturbación acotada $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0$. Un buen candidato para esta dinámica es la ecuación diferencial homogénea invariante en el tiempo:

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0 \qquad c > 0 \qquad (2.9)$$

La solución de esta ecuación es

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-ct} \qquad (2.10)$$

y debido a que $\dot{x}_1 = x_2$

$$x_2(t) = -cx_1(0)e^{-ct} \qquad (2.11)$$

Así que cuando $t \rightarrow \infty$ tanto x_1 como x_2 tienden a cero, entonces, estos estados convergen al cero asintóticamente. Ahora, se introduce una variable en el espacio de estados:

$$\sigma(x) = x_2 + cx_1 \quad c > 0 \quad (2.12)$$

Para conseguir estabilidad asintótica al origen en la presencia de una perturbación acotada f debemos llevar a la variable $\sigma(x)$ al cero en tiempo finito por medio de la entrada $u(t)$. Tenemos

$$\dot{\sigma} = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad (2.13)$$

Haciendo uso de los criterios de estabilidad de Lyapunov se obtiene que esta u debe tener la forma

$$u = -cx_2 - \rho \text{sign}(\sigma) \quad (2.14)$$

donde $\rho > L$ y la función $\text{sign}(x)$ es una función discontinua que se define de la siguiente forma

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

La entrada de control (2.14) lleva a la variable $\sigma(x)$ (también conocida como variable de deslizamiento) al cero en tiempo finito. Los retratos de fase del sistema muestran un fenómeno conocido como fase de “llegada” (reaching phase) en donde las variables de estado llegan a la superficie de deslizamiento $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$ y otro llamado fase de deslizamiento (sliding phase) donde la trayectoria del estado se mueve al origen dentro de la superficie de deslizamiento [30].

En el modo de deslizamiento ocurre un fenómeno de movimiento en “zig zag” con amplitud pequeña y frecuencia alta. En un modo deslizante ideal la amplitud tiende a cero y la frecuencia a infinito. Este efecto es conocido como “chattering”. El fenómeno de chattering involucra problemas reales en sistemas físicos (como el quemado de componentes electrónicos) y es debido a esto que resulta de interés estudiar y encontrar formas de disminuir este efecto. En [31], por ejemplo, se analiza el chattering en un sistema de super-twisting convergente en tiempo fijo y en [32]

se proponen métodos para la supresión de este fenómeno como usar un observador asintótico, ganancia dependiente del estado o el método de ganancia dependiente del control equivalente. Algunos otros métodos para disminuir el chattering son desarrollar modificaciones al SMC convencional o hacer uso de algoritmos de control de modos deslizantes de orden superior como el mismo algoritmo de super-twisting.

2.2.2 CONTROL DE SUPER-TWISTING

El control de Super-Twisting, introducido por primera vez en [33] como un algoritmo de modos deslizantes de segundo orden tiene la forma de:

$$\dot{x}(t) = -\lambda|x(t)|^{1/2}sign(x(t)) + y(t) \quad (2.16)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha sign(x(t)) + \xi(t) \quad (2.17)$$

En este algoritmo $x(t)$ representa el estado del sistema, $y(t)$ la salida del mismo, λ, α son ganancias y ξ una perturbación acotada. Las propiedades más importantes de este control de modos deslizantes de segundo orden (muchas literaturas se refieren al STA de esta forma), son que la entrada de control es continua gracias al uso de la raíz cuadrada del módulo del estado en el primer término de (2.16), perturbaciones acotadas son mitigadas y sobre todo, el estado converge a la superficie deslizante (usado como punto de equilibrio) en un tiempo finito [34].

Esta característica se ve influenciada por la elección de la ganancia λ de modo que una λ grande reduce el tiempo de convergencia hasta cierto límite. Por otro lado, manipular dichas ganancias impacta directamente en la entrada de control de modo que una convergencia a la superficie de deslizamiento en un tiempo corto requiera de una magnitud de control muy alta.

Se han realizado modificaciones a este algoritmo para asegurar no solo la convergencia en tiempo finito, sino también en tiempo fijo y últimadamente en tiempo predefinido. El desarrollo analítico ha estado acompañado de simulaciones en donde

se aplican estos algoritmos para comparar los tiempos de convergencia y la estabilidad del sistema.

El uso del algoritmo se puede extender hasta su implementación en sistemas con perturbaciones estocásticas (ruido blanco) [35] o con sistemas vectoriales bajo una cadena de integradores en los que el control real actúa hasta el último estado del sistema y entra como control virtual a través del resto de estados, [36].

Otra de las ventajas del STA es que el grado relativo de la superficie deslizante es de orden dos pudiéndose aplicar el control al estado y a su derivada, llevando ambos a la convergencia en tiempo finito.

Podemos mencionar también que este algoritmo fue diseñado en orden de reducir el efecto de chattering presente en el control de modos deslizantes.

2.3 TIEMPOS DE CONVERGENCIA

Con los diferentes algoritmos de control es necesario dar las definiciones pertinentes respecto a los tiempos de convergencia que suelen usar estos algoritmos. Primero se define el sistema de control multivariable

$$\dot{x}_n(t) = u(t) + \zeta(t), \quad x_n(t_0) = x_{n0} \quad (2.18)$$

donde $x(t)$ es un estado del sistema, $u(t)$ es una entrada de control escalar y ζ es una perturbación que satisface condiciones de Lipschitz.

DEFINICIÓN 2.3 (CONVERGENCIA EN TIEMPO FINITO) *El sistema de control (2.18) es llamado globalmente convergente al origen en tiempo finito, si para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un tiempo $T(x_0)$ tal que el estado del sistema $x(t) = 0$, para todo $t \geq T$ [15] Notése la dependencia de T con respecto a la condición inicial x_0*

Algunos trabajos pioneros en convergencia de tiempo finito son [37], [38] donde se hace uso de un control adaptativo que identifica una superficie en el espacio de estados por medio de rotar un hiperplano cambiante (“switching hyperplane”) en sistemas de segundo y tercer orden respectivamente, [39] hace uso del nombre “terminal sliding mode” para describir el control de modos deslizantes que logra esta convergencia en tiempo finito en lugar de convergencia exponencial por medio del ajuste de los parámetros del control, en [40] se desarrolla una técnica de control de modo deslizante multi-entrada/multi-salida (MIMO) para su aplicación en manipuladores robóticos y [41, 42] presentan estimaciones de tiempos de convergencia mediante expresiones analíticas.

Para la convergencia en tiempo fijo, tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.4 (CONVERGENCIA EN TIEMPO FIJO) *El sistema de control (2.18) es llamado convergente al origen en tiempo fijo si existe un tiempo T tal que el estado del sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es cero, $x(t) = 0$, para todo $t \geq T$, iniciando desde cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ [15]*

El estudio y uso de algoritmos de convergencia en tiempo fijo ha sido ampliamente documentado [43, 44, 45, 46, 47, 48], así como también se han estimado los tiempos de convergencia en diversos trabajos, entre ellos [15, 49].

Ahora sobre la convergencia en tiempo predefinido, considere un sistema escalar

$$\dot{x}(t) = u(t) + \zeta(t) + \sigma(t, x(t))dW(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.19)$$

donde lo nuevo es el tercer término del lado derecho de la ecuación: $W(t)$ es un proceso de Wiener definido en un espacio de probabilidad completo (Ω, F, P) . Aquí, Ω es el espacio muestral, F es un σ -álgebra con una filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$, y P una medida de probabilidad. Se consideran los siguientes casos [22]:

1. El sistema (2.19) está sujeto solo a disturbios deterministas satisfaciendo condiciones de Lipschitz, que es, $\sigma(t, x(t)) = 0$.

Definición 1. El sistema (2.19) es llamado convergente en tiempo-predefinido al origen, si:

- a. Es convergente al origen en tiempo-fijo, es decir, para cualquier condición inicial del estado $x(0)$ existe una constante positiva $T_{\text{máx}} > 0$, independiente de x_0 , tal que $x(t) = 0$ para todo $t \geq T_{\text{máx}}$.
 - b. $T_{\text{máx}}$ es independiente de cualquier condición inicial y distribuidos deterministas y puede ser seleccionado libre y explícitamente como un parámetro de la entrada de control
 - c. $T_{\text{máx}} \geq T_f$, donde T_f es el tiempo de convergencia real.
2. El sistema (2.19) está sujeto a perturbaciones deterministas satisfaciendo condiciones de Lipschitz y un ruido blanco estocástico Gaussiano, usando, $\sigma(t, x(t)) \neq 0$.

Definición 2. El sistema (2.19) es llamado convergente al origen en tiempo predefinido en ρ -mean (sentido- ρ), si:

- a. Este es convergente al origen en tiempo fijo en sentido- ρ , para cualquier condición inicial del estado x_0 existe una constante positiva $T_{\text{máx}} > 0$, independiente de x_0 , tal que $E[x(t)]^\rho = 0$, para todo $t \geq T_{\text{max}}$.
- b. $T_{\text{máx}}$ es independiente de cualquier condición inicial, disturbios deterministas, y ruido estocástico y puede ser asignado libre y explícitamente como un parámetro de la entrada de control.
- c. $T_{\text{máx}} \geq T_f$, donde T_f es el tiempo de convergencia real.

2.4 SISTEMA PARA SIMULACIONES (PMSM)

Para realizar nuestras simulaciones en el próximo capítulo usaremos como sistema físico de prueba el Motor Síncrono de Imanes Permanentes (PMSM). Gracias a su alta eficiencia y alta densidad de potencia, el PMSM es la opción ideal para áreas

como la aeronáutica, el desarrollo de vehículos eléctricos, aplicaciones industriales, electrodomésticos, entre otros. Si bien muchas de las aplicaciones pueden resultar en proyectos a futuro, al día de hoy las desventajas del PMSM influyen directamente en su aplicación [50].

Algunas de estas desventajas son:

- El costo del sistema de accionamiento (drive system) requerido en el PMSM es relativamente mayor que el empleado en motores de inducción magnética. A priori, el motor puede ser empleado en tareas que requieran alta eficiencia y donde el costo no sea un impedimento pero, en la práctica es preferible optimizar los costos en cualquier proceso industrial. Así es necesario mejorar el diseño de los accionadores en el PMSM para reducir este costo
- Problema de desmagnetización irreversible. Si el PMSM trabaja a temperaturas extremas (muy altas o muy bajas) ocurre este fenómeno. De igual forma, si el motor sufre una subida de corriente espontánea o vibraciones mecánicas severas también ocurrirá esta desmagnetización causando un declive en el rendimiento del motor o incluso su incapacidad para operar normalmente.

Si abordamos el problema del sistema de accionamiento (drive system), el cual funciona para controlar parámetros como velocidad, torque o incluso dirección del rotor, podemos encontrar solución diseñando controladores que reduzcan sus costos de operación. Con esto partimos para diseñar el algoritmo a trabajar.

Primero debemos encontrar las ecuaciones dinámicas representativas del sistema dentro de la teoría de control vectorial y para ello desarrollamos el siguiente análisis. El tipo de PMSM a considerar será un motor de tres fases.

En cada una de esas fases habrá una corriente que puede ser controlada. El modelo matemático inicial será considerar cada fase como ejes que forman un sistema coordenado. El funcionamiento básico del motor radica en la variación de las corrientes sobre cada eje (fase) y como éstos varían sus campos magnéticos produciendo torque

sobre el campo magnético del rotor que cuenta con imanes permanentes. El problema de este planteamiento consiste en que no es posible obtener un torque máximo debido a que la posición del campo magnético del estator no forma un ángulo de 90° con el campo del rotor, así que se aborda el siguiente razonamiento.

Realizamos un cambio de coordenadas para trabajar sobre dos ejes “artificiales” específicos: el eje “q” y el eje “d”. El eje d también conocido como eje directo de corriente estará en dirección del campo magnético del rotor mientras que el eje q (también conocido de cuadratura) estará en dirección del torque.

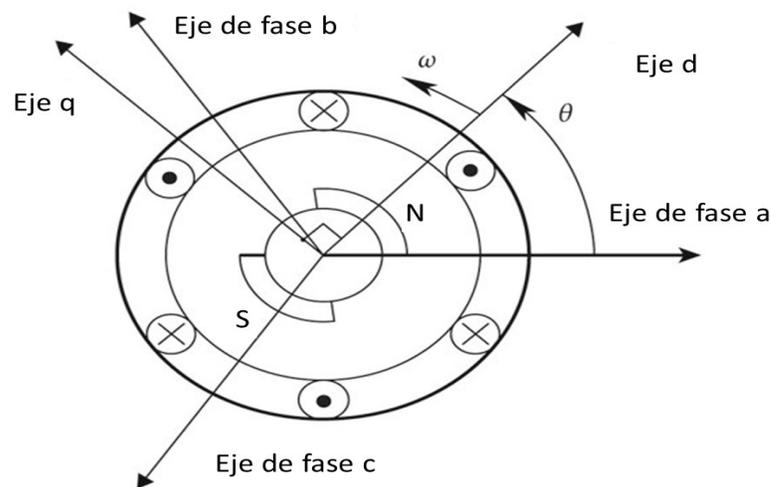


FIGURA 2.2: Estructura básica de un PMSM de tres fases [51]

Usando transformaciones lineales cambiamos del sistema coordenado compuesto por los ejes de las fases “a”, “b” y “c” a estos nuevos ejes d y q. El eje q es perpendicular al eje d y ambos estarán en constante movimiento con el rotor. la velocidad angular del motor ω será también la velocidad de rotación para el nuevo sistema coordenado. Las corrientes de cada fase entran en dirección de sus propios ejes y ahora pueden ser descritas en función de los nuevos ejes coordenados definiendo así corrientes auxiliares sobre los ejes d y q.

La modelación matemática del PMSM es clave para realizar el control vectorial. En un esfuerzo de simplificar el análisis se realizan las siguientes suposiciones:

1. Los devanados del estator para cada una de las tres fases están posicionados de forma simétrica y las propiedades discretas de su estructura misma son ignoradas. Por otro lado, la reacción de la armadura a la fuerza magnetomotriz generada por el devanado del estator en la brecha de aire es senoidal y la fuerza electromotriz inversa inducida también es una onda senoidal.
2. La permeabilidad interna del imán permanente toma el valor de la del aire, y la excitación producida por la fuerza electromotriz en la brecha tiene una distribución sinusoidal
3. La pérdida de hierro, el efecto terminal y el efecto de saturación magnética también son omitidos. La constante de permeabilidad del rotor se considera infinita.
4. El rotor no cuenta con un devanado de amortiguamiento, pues se considera que la temperatura no causa carga en los parámetros del motor

Con estas suposiciones tenemos la siguiente ecuación para el sistema de accionamiento de un PMSM:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \psi_f F(\theta_e) \quad (2.20)$$

donde u_a , u_b , u_c son los voltajes correspondientes a cada fase, i_a , i_b e i_c son sus respectivas corrientes, R es la matriz de resistencia del estator, L es la matriz de inductancia, ψ_f el flujo magnético del imán permanente y θ_e la posición angular del rotor. La matriz de inductancia contiene tanto la inductancia propia y la mutua debido a los tres devanados de las fases, y gracias a que la brecha de aire es uniforme, estas inductancias son constantes e independientes de la posición del rotor. Ahora, basados en la representación de la Fig. 2.3, tenemos la siguiente ecuación de voltaje

para los devanados de las tres fases:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

En donde R_s es la resistencia del devanado del estator, p es el operador diferencial d/dt y ψ_a , ψ_b y ψ_c son las fugas de flujo de las tres fases.

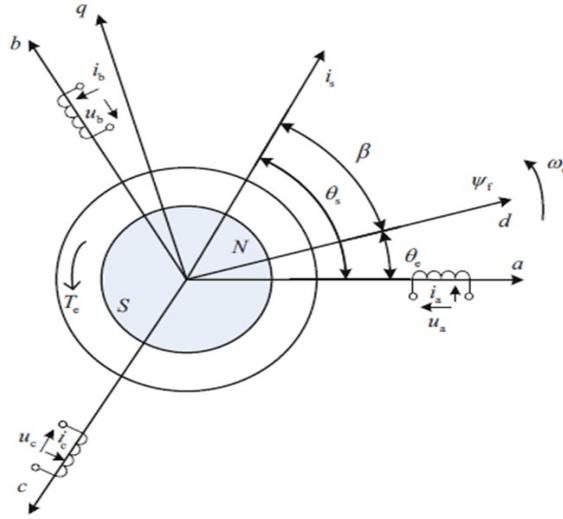


FIGURA 2.3: Modelo físico de un PMSM [50]

Estas fugas de flujo pueden ser representadas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = L_{abc} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \psi_f \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) \\ \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$= \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{fa} \\ \psi_{fb} \\ \psi_{fc} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

donde ψ_{fa} , ψ_{fb} y ψ_{fc} es el flujo del imán permanente atravesando los devanados en a-b-c y ψ_f es el flujo total de dicho imán y las M representan inductancias mutuas entre cada fase. Gracias a las suposiciones hechas tenemos que

$$L_a = L_b = L_c = L_{s\sigma} + L_m \quad (2.24)$$

$$M_{ab} = M_{ba} = M_{ac} = M_{ca} = M_{cb} = M_{bc} = -\frac{1}{2}L_m \quad (2.25)$$

donde $L_{s\sigma}$ será la inductancia propia de cada devanado y L_m la inductancia mutua. Además, considerando $i_a + i_b + i_c = 0$, el primer elemento de la ecuación (2.22) se puede escribir como

$$\psi_a = L_s i_a + \psi_{fa} \quad (2.26)$$

donde $L_s = L_a + 1/2L_m$ es la inductancia síncrona del estator. Igualmente se puede llegar a expresiones equivalentes para el resto de fugas de flujo. El vector de corriente del estator \vec{i}_s se compone de las tres corrientes de cada devanado, el vector de flujo del estator $\vec{\psi}_s$ se puede presentar del flujo total de los tres devanados y el vector de flujo del rotor $\vec{\psi}_f$ se compone de los flujos a través de cada fase.

Tomando la forma vectorial de la ecuación (2.21) y sustituyendo las expresiones del flujo del rotor, flujo del estator e inductancia síncrona tenemos:

$$\vec{u}_s = R_s \vec{i}_s + L_s \frac{d\vec{i}_s}{dt} + \frac{d\vec{\psi}_f}{dt} \quad (2.27)$$

Aplicando las transformaciones lineales pertinentes para el cambio de coordenadas d-q (también conocidas como transformaciones de Park) para los voltajes obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$u_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega L_q i_q \quad (2.28)$$

$$u_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega L_d i_d + \omega \psi_f \quad (2.29)$$

de aquí tenemos que:

$$\frac{di_d}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_d + n_p \omega i_q + \frac{u_d}{L_d} \quad (2.30)$$

$$\frac{di_q}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_q + n_p \omega i_d - \frac{n_p \psi_f}{L_q} + \frac{u_q}{L_q} \quad (2.31)$$

con n_p como el número de pares de polos. Además el torque electromagnético T_e queda definido como

$$T_e = \frac{3}{2} n_p (\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q) \quad (2.32)$$

y también cumple la siguiente ecuación:

$$T_e - F = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (2.33)$$

donde F es el torque de carga, J es el momento de inercia, ω la velocidad angular del rotor y B el coeficiente de fricción viscosa. Al Imponer que $L_d = L_q = L$ para (2.32) y sustituyendo en (2.33) para despejar $\dot{\omega}(t)$ tenemos la ecuación de estado:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_t}{J} i_q - \frac{B}{J} \omega + \zeta \quad (2.34)$$

donde consideramos que el disturbio ζ toma el valor de $-F/J$ y $K_t = (3/2)n_p\psi_f$.

Ya que el control vectorial se basa en la orientación del flujo del rotor. Se puede controlar el torque del PMSM controlando el vector de corriente del estator. Este enfoque puede derivar en resultados igual de eficientes que el control en motores de corriente directa. Esto ha provocado su implementación en accionadores de alto rendimiento.

Ahora que hemos encontrado ecuaciones dinámicas que relacionan el estado del sistema de velocidad angular del rotor con estas componentes de corriente en el sistema coordenado d-q (en un todo, el vector de corriente del estator), solo nos queda hacer una última consideración: hacer $i_d = 0$

Cuando i_d es igual a cero se obtiene el torque máximo como se puede apreciar en (2.32) que el torque solo depende de i_q . Otra forma de entender esto es de la siguiente manera: El torque máximo se obtiene cuando el vector de campo magnético del estator es perpendicular al campo del rotor, y ya que el campo del rotor está en la dirección del eje d y además podemos descomponer el vector del campo del estator en sus componentes sobre d-q, se puede forzar que este sea máximo cuando su componente sobre d es idénticamente cero, esto es $i_d = 0$

Esta consideración también es conocida como control vectorial de campo orientado. La figura 2.4 muestra esta descomposición del vector de campo del estator sobre los ejes d y q.

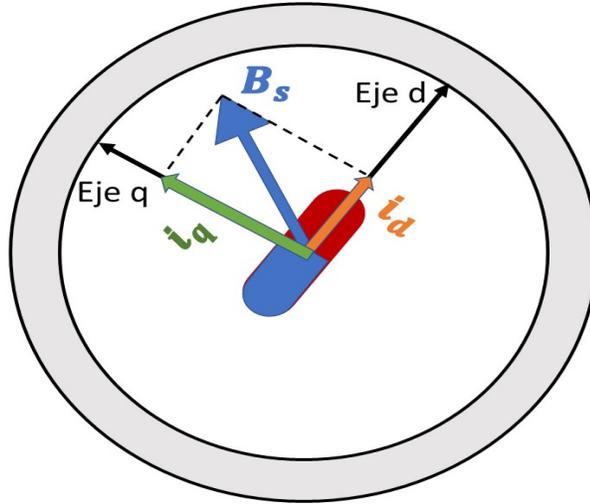


FIGURA 2.4: Diagrama vectorial de campo orientado.

Con esto se llega a la ecuación dinámica:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_t}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega + \zeta \quad \omega(t_0) = \omega_0 \quad (2.35)$$

en donde se introducirá el control a través de $i_q = (J/K_t)(u + (B/J)\omega)$ para que $d\omega/dt = u(t)$ en el caso con $\zeta = 0$.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE ALGORITMOS DE SUPER-TWISTING CONVERGENTES EN TIEMPO PREDEFINIDO

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema escalar

$$\dot{x}(t) = u(t) + \zeta(t) + \sigma(t, x(t))dW(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

donde $x(t) \in R$ es el estado del sistema, $u(t) \in R$ es la entrada de control, $\zeta(t) \in R$ una perturbación determinista que satisface la condición de Lipshchitz

$$\|\zeta(t_1) - \zeta(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|, \quad (3.2)$$

con una constante L , y $W(t)$ es un proceso de Wiener definido en un espacio de probabilidad completo (Ω, F, P) . Aquí, Ω es el espacio muestral, F es un σ -álgebra con una filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$, y P una medida de probabilidad.

Definiciones de convergencia en tiempo-predefinido para el sistema determinista y estocástico (3.1) han sido presentadas en el capítulo anterior.

El objetivo es diseñar una ley de control de bajo costo continua y establecer condiciones bajo las cuales el sistema de lazo cerrado formado por (3.1) y la ley de control $u(t)$ es convergente al origen en tiempo predefinido en cada caso de consideración: libre de perturbaciones, con disturbios deterministas, con disturbios deterministas y ruido estocástico.

3.2 DISEÑO DEL ALGORITMO

Para diseñar tal ley de control, se propone la siguiente entrada:

$$u(t) = -\lambda_2 \frac{|x(t)|^p}{t_f - t} \text{sign}(x(t)), \quad (3.3)$$

donde $\lambda_2 > 0$ y p son parámetros de control y t_f es el tiempo predefinido que será asignado. Hay un total de cuatro casos de p para estudiar: $p < 0$, $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$. Para $p \neq 1$, la solución de la ecuación diferencial resultante es la misma pero las conclusiones en cada caso son diferentes.

a. Si $p = 1$, usando $\zeta = 0$ y $\sigma(t, x(t)) = 0$ en (3.1), la ecuación diferencial resultante se representa como

$$\dot{x}(t) = -\lambda_2 \frac{x(t)}{t_f - t}, \quad (3.4)$$

cuya solución está dada por

$$x(t) = c_1 (t_f - t)^{\lambda_2}, \quad (3.5)$$

donde c_1 es una constante determinada por una condición inicial: $c_1 = \frac{x_0}{(t_f - t_0)^{\lambda_2}}$. Es evidente que, cuando t se acerca a t_f , el estado $x(t)$ se vuelve cero y la entrada de control $u(t)$ también llega al cero si $\lambda_2 > 1$:

$$u(t) = c_1 \frac{(t_f - t)^{\lambda_2}}{(t_f - t)} = c_1 (t_f - t)^{\lambda_2 - 1}. \quad (3.6)$$

b. Si $p \neq 1$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = -\lambda_2 \frac{|x|^p}{t_f - t} \text{sign}(x), \quad (3.7)$$

podemos conseguir dos soluciones dependiendo el signo de x . Si consideramos $x(t) > 0$ la solución está dada como

$$x(t) = [\lambda_2(1-p)\ln|t_f - t| + x_0^{1-p} - \lambda_2(1-p)\ln|t_f|]^{1/1-p}, \quad (3.8)$$

donde x_0 es la condición inicial para el estado.

Consideramos $p < 0$. Si $t \rightarrow t_f$, el primer logaritmo natural en (3.8) diverge a menos infinito y sustituyendo $p < 0$ lleva a un exponente positivo de la expresión completa, lo que concluye con la divergencia del estado $x(t)$. Si $0 < p < 1$, la expresión (3.8) también resulta con exponente positivo y diverge de la misma forma que con $p < 0$.

c. Finalmente, la opción $p > 1$ hace el exponente en (3.8) negativo, $(1/1-p) < 0$, usando $p > 1$, lo cual resulta en la convergencia de $x(t)$ al cero cuando $t \rightarrow t_f$. De momento, usando $x_0 > 0$ y $p = 3/2$, se obtiene la siguiente expresión para el estado del sistema al tiempo t :

$$x(t) = \left[-\frac{\lambda_2}{2}\ln|t_f - t| + x_0^{-1/2} + \frac{\lambda_2}{2}\ln|t_f| \right]^{-2}. \quad (3.9)$$

Es fácil notar que si $t \rightarrow t_f$, el estado $x(t)$ en (3.9) tiende a cero debido al logaritmo natural y su potencia negativa igual a -2 .

Por otra parte, la entrada de control $u(t)$ misma diverge al infinito cuando el tiempo se aproxima a t_f , en vista de (3.3) y (3.9), dado que el término del denominador $t_f - t$ en (3.3) converge al cero más rápido que el término del numerador dado por (3.8). Este problema puede ser resuelto agregando otro término a la entrada de control (3.3), el cual acelere la velocidad de convergencia del estado:

$$\dot{x}(t) = u(t) = -\lambda_1|x|^{1/2}\text{sign}(x) - \lambda_2\frac{|x|^p}{t_f - t}\text{sign}(x). \quad (3.10)$$

Sea (3.10) la nueva entrada de control. Aquí, si $p = 1$, el segundo término se convierte en la entrada de control lineal (3.4), por lo tanto, el estado converge al cero como es mostrado en (3.5). Debido al primer término añadido con $\lambda_1 > 0$, el estado llega al origen más rápido que con un control lineal (3.4), lo cual implica que la entrada

de control (3.10) también permanece finita cuando $t \rightarrow t_f$. Esto habilita aplicar el control (3.10) para problemas de estabilización de un sistema PMSM usando los valores $p = 1$ y $p > 1$ por separado.

3.3 ESTABILIZACIÓN EN TIMEPO PREDEFINIDO SIN DISTURBIOS

Considerando $\zeta = 0$ y $\sigma(t, x(t)) = 0$ (disturbios deterministas y ruidos estocásticos no están presentes) en (3.1), tenemos el siguiente sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = u(t). \quad (3.11)$$

La siguiente entrada de control es propuesta para estabilizar el sistema (3.11) para un tiempo predefinido t_f :

$$u(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 \frac{|x|^{(p)}}{(t_f - t)} \text{sign}(x), & t < t_f, \\ -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 |x|^{(p)} \text{sign}(x), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.12)$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ and $p \geq 1$.

TEOREMA 3.1 *La ley de control (3.12) lleva a los estados del sistema (3.11) y sus derivadas al origen en el tiempo predefinido t_f , y los mantiene ahí para cualquier tiempo $t \geq t_f$.*

Prueba 1 *La prueba del Teorema 3.1 sigue de los argumentos planteados en la sección anterior. De las ecuaciones (3.8), (3.10) sigue que el estado $x(t)$ converge al origen en un tiempo-predefinido t_f junto con la entrada de control $u(t)$, si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 1$, y $p \geq 1$.*

Observación 1 *En la ausencia de perturbaciones y ruidos, no importa que la entrada de control (3.12) continúe siendo aplicada después de $t = t_f$, tomando en*

cuenta que ésta se vuelve cero para todo $t > t_f$ en vista del Teorema 3.1 ; sin embargo, la ley de control (3.12) está escrita de esta forma intencionalmente para volverla uniforme con los casos en donde las perturbaciones y/o ruidos están presentes.

Observación 2 La entrada de control (3.12) representa dos controles distintos dependiendo el valor de p . Uno utiliza $p = 1$ mientras otro usa $p > 1$.

3.3.1 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Aplicamos el control propuesto para estabilizar un sistema PMSM escalar, retomando el modelo usado en [24], bajo las mismas consideraciones para reducir las ecuaciones dinámicas del PMSM a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_t}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad (3.13)$$

donde ω es la velocidad angular del rotor, J es el momento de inercia, B es el coeficiente de fricción viscosa, $K_t = \frac{3n_p\phi_v}{2}$ con el número de pares de polos n_p y el flujo de enlazamineto del rotor ϕ_v . La entrada de control toma la forma:

$$i_q = \frac{J}{K_t} \left(\frac{B}{J}\omega + u(t) \right), \quad (3.14)$$

con

$$u(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega|^{1/2}\text{sign}(\omega) - \lambda_2\frac{|\omega|^p}{(t_f-t)}\text{sign}(\omega), & t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega|^{1/2}\text{sign}(\omega) - \lambda_2|\omega|^p\text{sign}(\omega), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.15)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ y $p \geq 1$. Nos referiremos a la ley de control que usa $p = 1$ como $u_1(t)$ y el control con $p > 1$ como $u_2(t)$ y a sus correspondientes estados como ω_1 y ω_2 .

3.3.2 SIMULACIÓN

Para las simulaciones, los valores de las constantes en (3.13) son $K_t = 0.7002wb$, $J = 1.74 \times 10^{-4}kgm^2$ y $B = 7.403 \times 10^{-5}N$, tomados de [24], y las ganancias de

control $\lambda_1 = 1.1$, $\lambda_2 = 1.1$ y $t_f = 20$ para ambas u_1 y u_2 . Para la ley de control u_2 , $p = 3/2$. La ley de control usada en [24] está dada por

$$u_3(t) = \begin{cases} -\eta \frac{\omega}{t_f - t}, & t < t_f, \\ 0, & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.16)$$

con $\eta = 2$. Haremos uso de esta ley de control con la intención de comparar gráfica y numéricamente este algoritmo previo con los propuestos en este trabajo. Los tiempos de convergencia correspondientes a las leyes de control $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, son mostrados en la tabla 1 para diferentes condiciones iniciales ω_0 . Las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 presentan las trayectorias para el estado ω correspondientes a las leyes de control $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, para las condiciones iniciales $\omega_0 = 25$, $\omega_0 = 100$ y $\omega_0 = 500$ respectivamente.

| | | | | | | |
|-------------------|-----|------|------|------|------|------|
| $\omega_0[rad/s]$ | 25 | 50 | 80 | 100 | 200 | 500 |
| $t_1[s]$ | 8 | 10.6 | 12.8 | 13.9 | 17.2 | 19.9 |
| $t_2[s]$ | 6.7 | 8 | 8.7 | 9 | 9.9 | 10.5 |
| $t_3[s]$ | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |

TABLA 3.1: Tiempos de convergencia sin perturbaciones

Se pueden observar que las trayectorias de estado en todas estas figuras, correspondientes a las entradas de control u_1 y u_2 , convergen más rápido que para u_3 ; Esto se debe a la presencia del término extra usado en esos controladores contra el único término usado en (3.16). Las magnitudes de control se pueden observar en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 en donde se muestran interesantes los signos de los controles, siendo para u_1 y u_3 positivos y negativo para $p = 3/2$. Aunque la intuición pueda decir que solo u_2 está ejerciéndose de forma correcta (por ser una condición inicial positiva), lo cierto es que los tres controles son en efecto negativos y es la sustitución en la expresión de la corriente i_q en (3.14) y sus diferentes constantes los que vuelven estas corrientes positivas para u_1 y u_3 y negativas para u_2

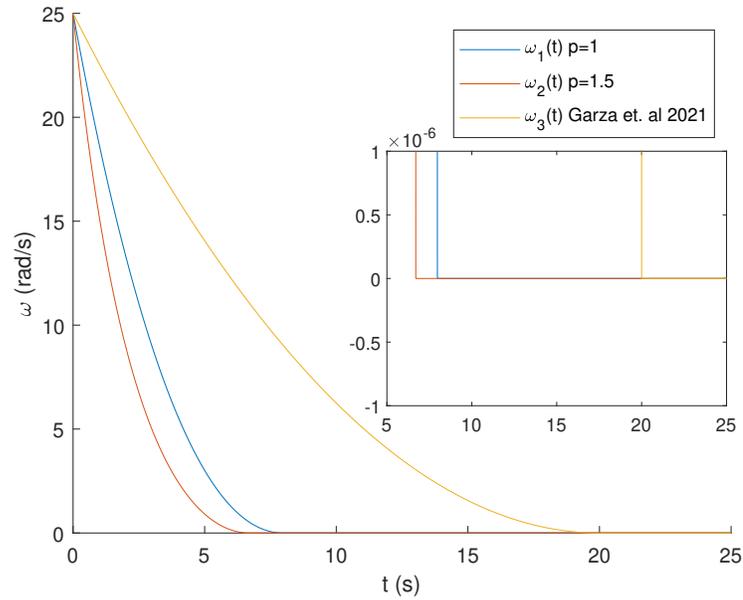


FIGURA 3.1: Convergencia de estados de (3.13) al origen para las entradas u_1 , u_2 , y u_3 . $\omega_0 = 25$

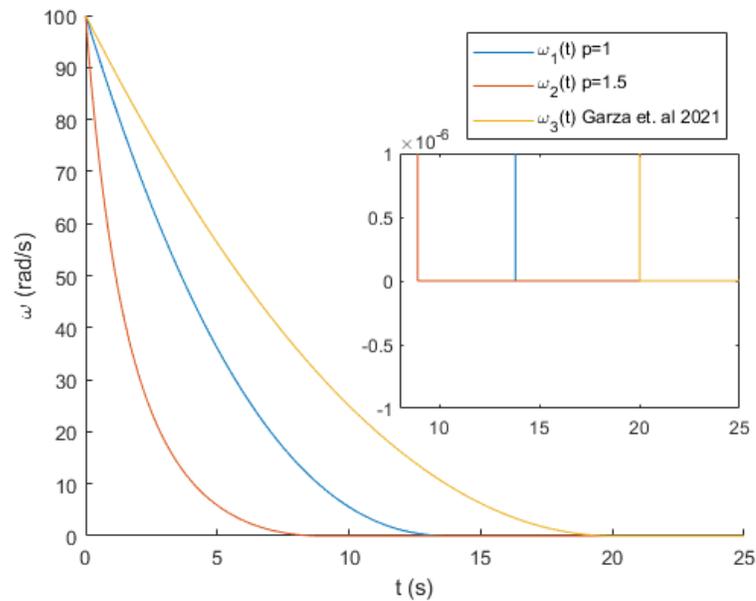


FIGURA 3.2: Convergencia de estados de (3.13) al origen para las entradas u_1 , u_2 , y u_3 . $\omega_0 = 100$

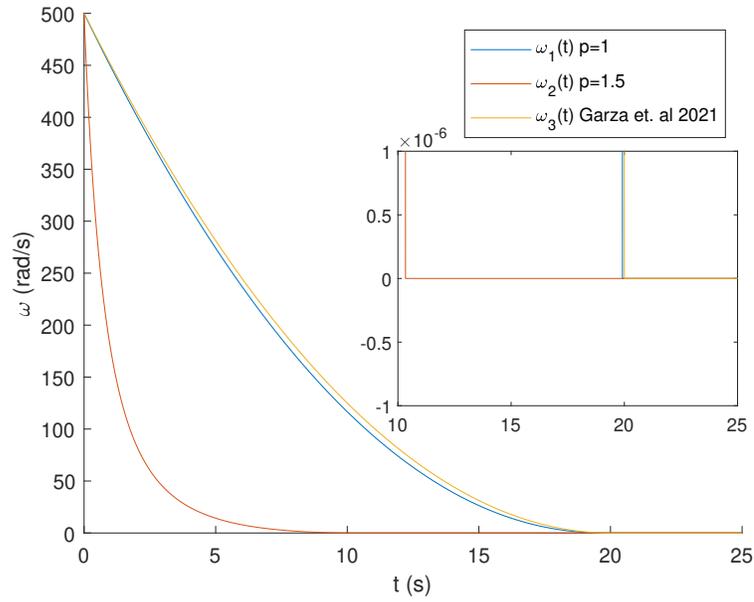


FIGURA 3.3: Convergencia de estados de (3.13) al origen para las entradas u_1 , u_2 , y u_3 . $\omega_0 = 500$

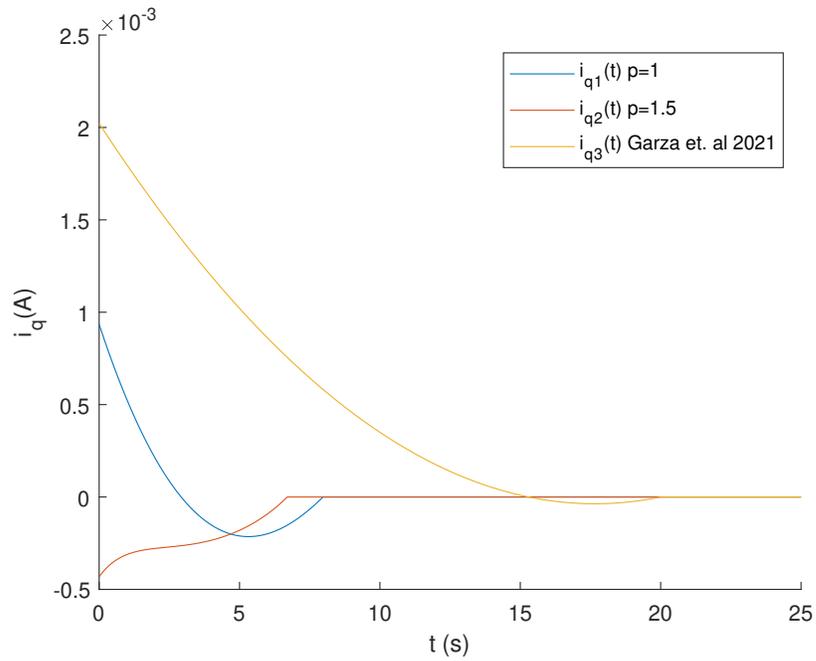


FIGURA 3.4: Historial de entradas de control para $\omega_0 = 25$

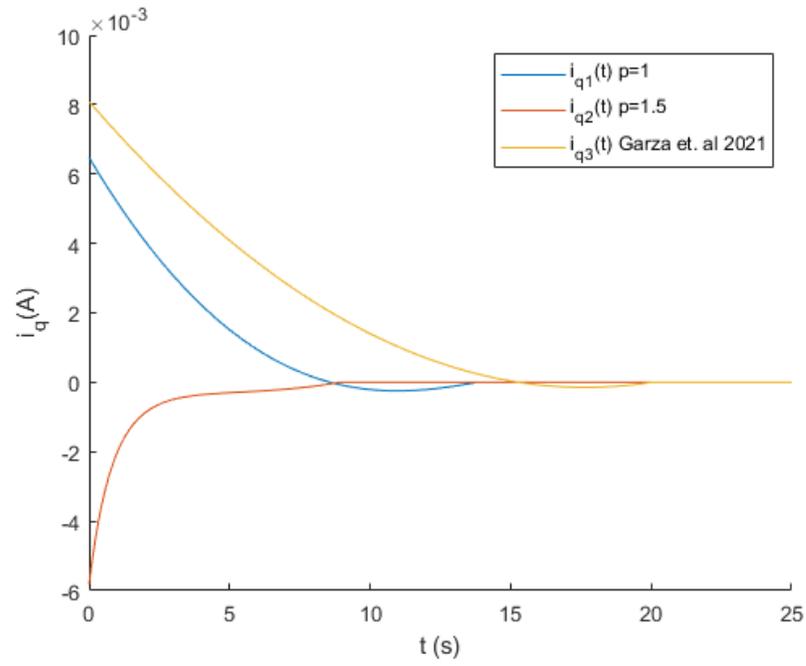


FIGURA 3.5: Historial de entradas de control para $\omega_0 = 100$

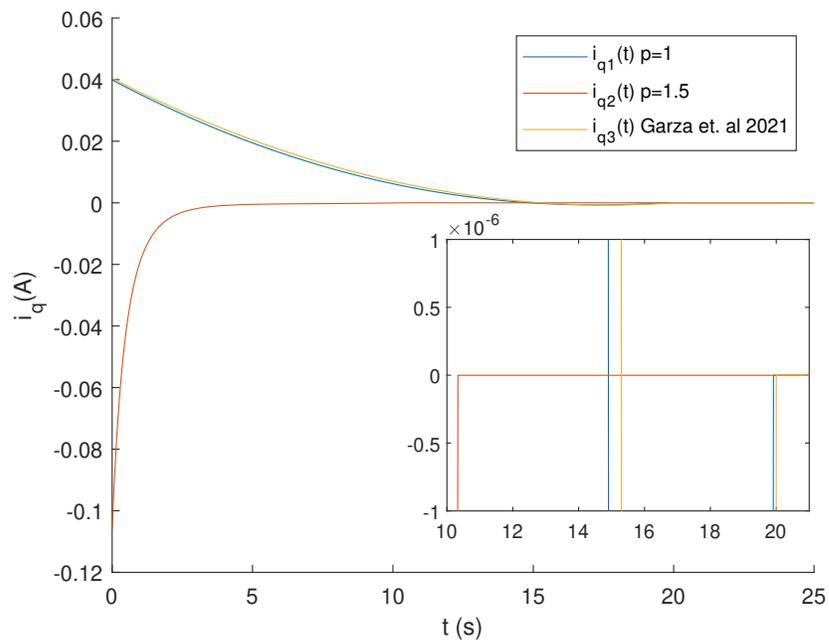


FIGURA 3.6: Historial de entradas de control para $\omega_0 = 500$

3.4 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO CON PERTURBACIONES DETERMINISTAS

En esta sección, diseñamos una ley de control continua que lleva al estado de un sistema escalar afectado por disturbios deterministas acotados y a su derivada al origen en tiempo predefinido

Considerando $\sigma(t, x(t)) = 0$ y $\zeta \neq 0$ en (3.1), tenemos el sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = u(t) + \zeta(t), \quad (3.17)$$

donde la ley de control $u(t)$ está dada por

$$u(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 \frac{|x|^{(p)}}{(t_f - t)} \text{sign}(x) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(x(\tau)) d\tau, & t < t_f \\ -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 |x|^{(p)} \text{sign}(x) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(x(\tau)) d\tau, & t \geq t_f \end{cases} \quad (3.18)$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, $\alpha > 0$ y $p = 1$ o $p > 1$.

TEOREMA 3.2 *La ley de control (3.18) lleva al estado $x(t)$ de (3.17) y su derivada $\dot{x}(t)$ al origen en el tiempo predefinido t_f , los cuales se mantienen ahí para cualquier tiempo $t \geq t_f$, si las siguientes condiciones se cumplen en la presencia de disturbios deterministas $\zeta(t)$ que satisface la condición de Lipshchitz (3.2) con una constante L : $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\alpha > L$.*

El sistema en lazo cerrado resultante entre (3.17) y (3.18) toma la forma

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 \frac{|x|^{(p)}}{(t_f - t)} \text{sign}(x) + y(t), & t < t_f, \\ -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 |x|^{(p)} \text{sign}(x) + y(t), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha \text{sign}(x(t)) + \xi(t), \quad (3.20)$$

donde $\xi(t) = \dot{\zeta}$. Para cualesquier condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$, ambos $x(t)$ y $y(t)$ convergen al cero en un tiempo predefinido t_f .

Prueba 2 La prueba del Teorema 3.2 retoma el Teorema 1 de [52]. Este teorema establece el tiempo fijo de convergencia al origen del estado $x(t)$ y a su derivada junto con la salida $y(t)$ del sistema perturbado determinista (3.17) con una perturbación acotada usando una entrada de control $u(t) = -\lambda_1|x|^{(1/2)}\text{sign}(x) - \lambda_2|x|^{(p)}\text{sign}(x) - \alpha \int_{t_0}^t \text{sign}(x(\tau))d\tau$, donde $\alpha > L$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $p > 1$. El término $-\alpha\text{sign}(x(t))$ suprime el disturbio, mientras $-\lambda_1|x|^{(1/2)}\text{sign}(x)$ provee convergencia en tiempo finito, si la condición $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$ se cumple y persiste. En adición, $-\lambda_2|x|^{(p)}\text{sign}(x)$ asegura la convergencia del estado $x(t)$, su derivada y de la salida $y(t)$ en tiempo fijo. Si el segundo término de la entrada de control es modificado como $-\lambda_2\frac{|x|^{(p)}}{(t_f-t)}\text{sign}(x)$, lo cual asegura convergencia al origen en tiempo predefinido, como se demuestra en las ecuaciones (3.8) y (3.10) para $p = 1$ o $p > 1$, entonces la ley de control (3.18) provee la convergencia al origen del estado del sistema $x(t)$, su derivada y de la salida $y(t)$ de un sistema perturbado determinista (3.17) en un tiempo predefinido t_f .

3.4.1 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para el mismo sistema (3.13) presentado en la sección previa, usamos la siguiente entrada de control $u(t)$ en (3.14):

$$u(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2\frac{|\omega|^{(p)}}{(t_f-t)}\text{sign}(\omega) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(\tau))d\tau, & t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2|\omega|^{(p)}\text{sign}(\omega) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(\tau))d\tau, & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.21)$$

resultando en el sistema de lazo cerrado:

$$\dot{\omega}(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2\frac{|\omega|^{(p)}}{(t_f-t)}\text{sign}(\omega) + y(t), & t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2|\omega|^{(p)}\text{sign}(\omega) + y(t), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha\text{sign}(\omega(t)) + \xi(t). \quad (3.23)$$

3.4.2 SIMULACIÓN

Para las simulaciones, las constantes K_t , J , B permanecen iguales que en la sección precedente. De nuevo, $p = 1$ está representado por $u_1(t)$ y $p = 3/2$ por $u_2(t)$.

El tiempo de convergencia está impuesto como $t_f = 20$. En adición, el disturbio es elegido como $\zeta(t) = y_0 + (1/J)(0.1t + 0.01\cos(t))$, tal que su derivada es $\xi(t) = (1/J)(0.1 - 0.01\sin(t))$. Este disturbio arroja un valor para α de $\alpha = 635 > 633 = L$, lo cual determina una ganancia $\lambda_1 > 32$. De acuerdo con esto, nosotros usamos $\lambda_1 = 51$ y $\lambda_2 = 2$, mientras la ley de control de comparación extraída de [24] usa $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 1$, y $\eta = 2$ en la siguiente entrada:

$$u_3(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2|\omega|^{(3/2)}\text{sign}(\omega) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(\tau))d\tau - \eta\frac{\omega}{t_f-t}, & t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2|\omega|^{(3/2)}\text{sign}(\omega) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(\omega(\tau))d\tau, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (3.24)$$

La Tabla 3.2 muestra los tiempos de simulación correspondientes a cada entrada de control t_1 , t_2 , y t_3 para diferentes condiciones iniciales. Las figuras 3.7 y 3.9 muestran las trayectorias del estado $x(t)$ con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ con $y_0 = -50$ y $\omega_0 = 200$ con $y_0 = 50$ respectivamente, para cada ley de control. Las figuras 3.8 y 3.10 presentan las gráficas de la salida $y(t)$ con sus correspondientes condiciones iniciales.

| $y(t_0) = y_0$ | $\omega(t_0) = \omega_0[rad/s]$ | | | | |
|----------------|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| | 50 | 100 | 200 | 500 | |
| -100 | t_1 | 0.461 | 0.554 | 0.694 | 0.984 |
| | t_2 | 0.457 | 0.532 | 0.655 | 0.845 |
| | t_3 | 0.435 | 0.475 | 0.517 | 0.561 |
| -50 | t_1 | 0.366 | 0.472 | 0.630 | 0.940 |
| | t_2 | 0.361 | 0.457 | 0.585 | 0.780 |
| | t_3 | 0.330 | 0.378 | 0.430 | 0.470 |
| 50 | t_1 | 0.641 | 0.641 | 0.641 | 0.894 |
| | t_2 | 0.641 | 0.641 | 0.641 | 0.720 |
| | t_3 | 0.641 | 0.641 | 0.641 | 0.645 |
| 100 | t_1 | 1.121 | 1.121 | 1.121 | 1.121 |
| | t_2 | 1.121 | 1.121 | 1.121 | 1.121 |
| | t_3 | 1.121 | 1.121 | 1.121 | 1.121 |

TABLA 3.2: Tiempos de convergencia para sistema con perturbaciones deterministas

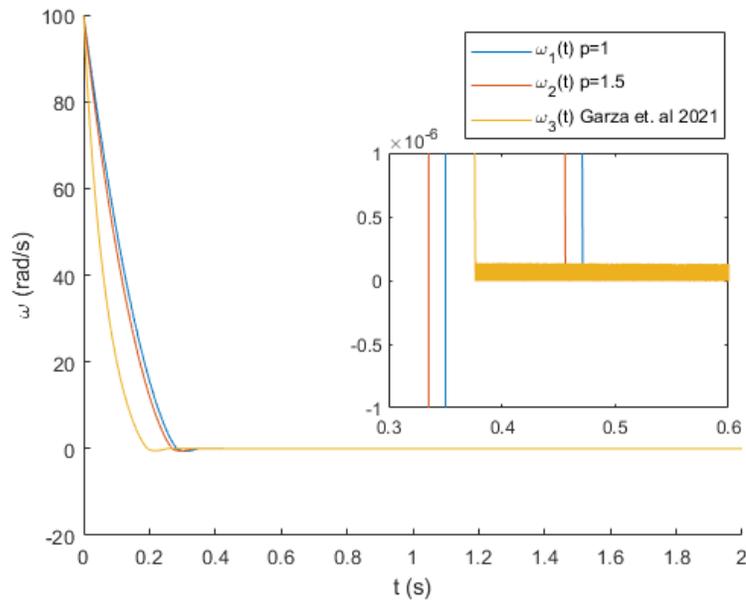


FIGURA 3.7: Convergencia de los estados del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

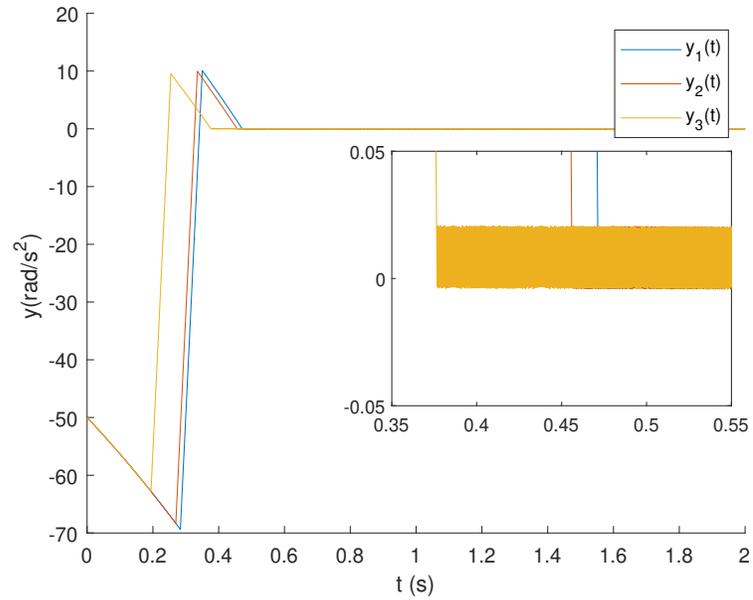


FIGURA 3.8: Convergencia de las salidas del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

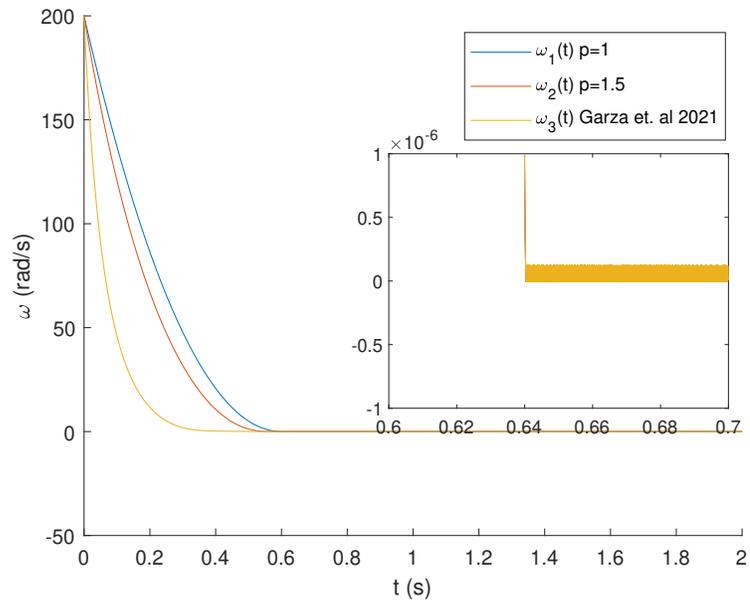


FIGURA 3.9: Convergencia de los estados del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 200$ y $y_0 = 50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

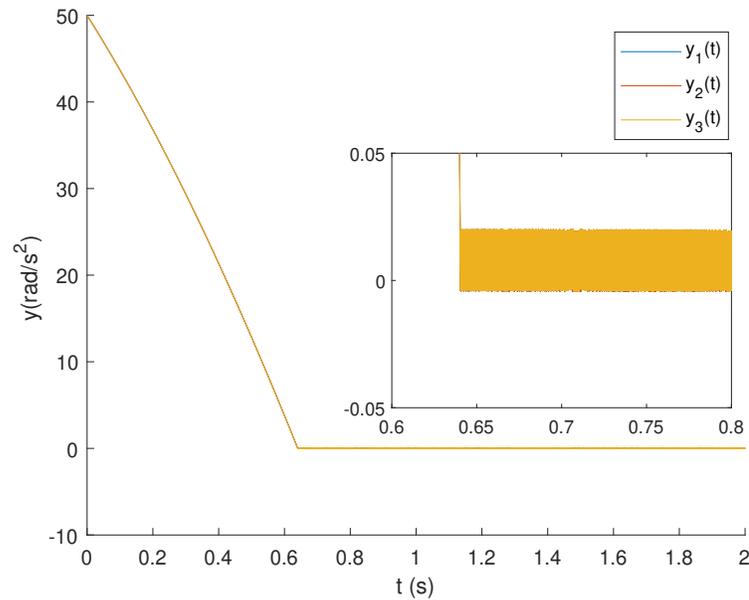


FIGURA 3.10: Convergencia de las salidas del sistema (3.13) con condiciones iniciales $\omega_0 = 200$ y $y_0 = 50$ al origen para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3

Por último, las figuras 3.11 y 3.12 muestran las magnitudes de control para cada algoritmo con las condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ con $y_0 = -50$ y $\omega_0 = 200$ con $y_0 = 50$ respectivamente.

Se puede observar que la trayectoria del estado en las figuras 3.7 y 3.9 correspondiente a la entrada de control u_3 converge al cero más rápido que para aquellas trayectorias usando u_1 y u_2 ; esta propiedad se debe a la aparición del término lineal adicional presente en la entrada de control (3.24), comparado a las otras entradas. Por otro lado, las leyes de control con $p = 1$ y $p = 3/2 > 1$ arrojan menor magnitud de control.

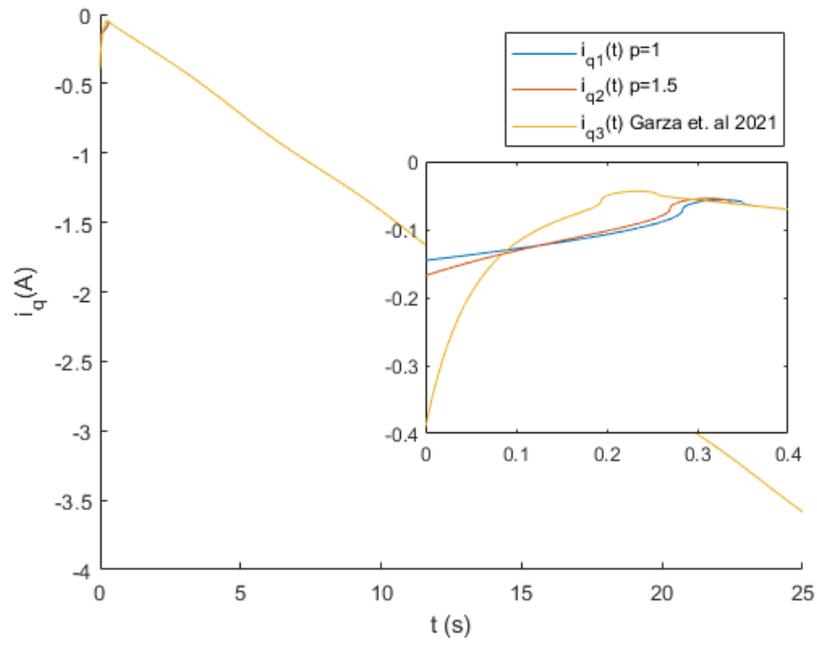


FIGURA 3.11: Historial de las entradas de control para $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$

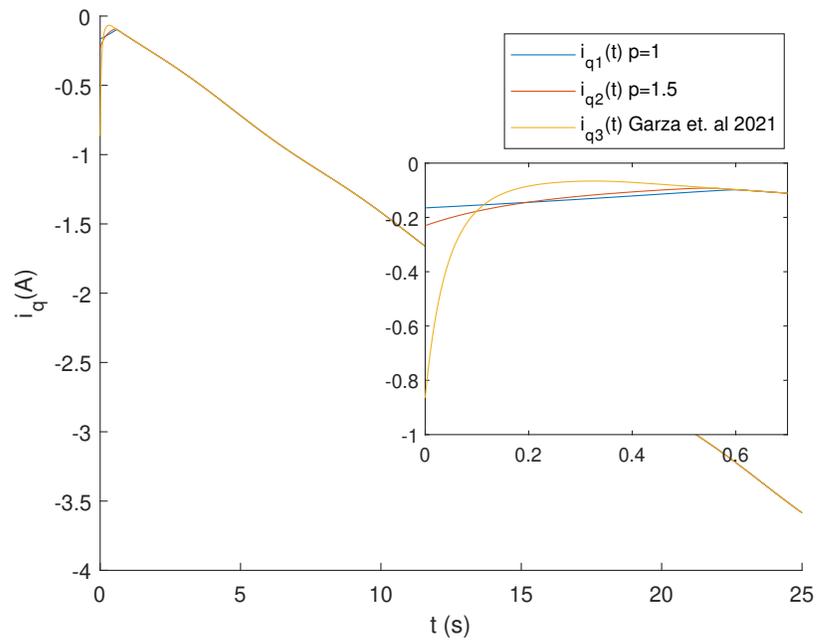


FIGURA 3.12: Historial de las entradas de control para $\omega_0 = 200$ y $y_0 = 50$

3.5 ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO PREDEFINIDO CON PERTURBACIONES DETERMINISTAS Y RUIDO ESTOCÁSTICO

En esta sección, diseñaremos una ley de control continua que lleve el ρ -ésimo momento inicial del estado y el de su derivada al origen para un sistema escalar afectado por disturbios deterministas acotados y ruidos estocásticos en tiempo predefinido.

Considerando $\sigma(t, x(t)) \neq 0$ y $\zeta \neq 0$ en (3.1), nos queda el sistema estocástico escalar:

$$dx(t) = (u(t) + \zeta(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t), \quad (3.25)$$

donde la ley de control $u(t)$ está dada por

$$u(t) = \begin{cases} -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 \frac{|x|^{(p)}}{(t_f - t)} \text{sign}(x) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(x(\tau)) d\tau, & t < t_f, \\ -\lambda_1 |x|^{(1/2)} \text{sign}(x) - \lambda_2 |x|^{(p)} \text{sign}(x) \\ -\alpha \int_0^t \text{sign}(x(\tau)) d\tau, & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.26)$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, $\alpha > 0$ y $p = 1$ o $p > 1$.

TEOREMA 3.3 *La ley de control (3.26) lleva al ρ -ésimo momento inicial $E[x(t)]^\rho$ del estado $x(t)$ del sistema (3.25) y al de su derivada al origen para el tiempo predefinido t_f y los mantiene ahí para cualquier momento $t \geq t_f$, si las siguientes condiciones se mantienen en la presencia de un disturbio determinista $\zeta(t)$ que satisface condiciones de Lipschitz (3.2) con una constante L y un ruido estocástico blanco con difusión $\sigma(x, t) = |x|^r$: $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$, $\lambda_2 > 1$, $p \geq 1$, $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$, and $\frac{3}{2} \leq 2r \leq 1 + p$. El sistema de lazo cerrado resultante entre (3.25) y (3.26) toma la*

forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -\lambda_1|x|^{(1/2)}\text{sign}(x) - \lambda_2\frac{|x|^{(p)}}{(t_f-t)}\text{sign}(x) + \\ y(t) + \sigma(t, x(t))dW(t), & t < t_f, \\ -\lambda_1|x|^{(1/2)}\text{sign}(x) - \lambda_2|x|^{(p)}\text{sign}(x) + \\ y(t) + \sigma(t, x(t))dW(t), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha\text{sign}(x(t)) + \zeta(t), \quad (3.28)$$

donde $\dot{\zeta}(t) = \xi(t)$. Para cualesquier condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$, ambos $x(t)$ y $y(t)$ convergen al cero en sentido ρ en el tiempo predefinido t_f .

Prueba 3 La prueba del Teorema 3.3 retoma los teoremas 1 y 2 de [35], los cuales establecen la convergencia al orgien en sentido ρ en tiempo fijo de parte del estado $x(t)$, su derivada y su salida $y(t)$ en un sistema estocástico perturbado (3.25) usando la entrada de control $u(t) = -\lambda_1|x|^{(1/2)}\text{sign}(x) - \lambda_2|x|^{(p)}\text{sign}(x) - \alpha \int_0^t \text{sign}(x(\tau))d\tau$, si las condiciones $2\lambda_1 > \rho - 1 > 0$, $2\lambda_2 > \rho - 1 > 0$ y $\frac{3}{2} \leq 2r \leq 1 + p$, y $p \geq 1$ junto con $\alpha > L$ $\lambda_1 > \sqrt{2\alpha}$ y $\lambda_2 > 0$ se cumplen. Los primeros dos términos de este control provocan la convergencia en tiempo fijo en sentido ρ para un sistema estocástico no perturbado, mientras $-\alpha\text{sign}(x(t))$ suprime el distrubio determinista. Siguiendo el Teorema 3.2 de este trabajo, la modificación del segundo término como $-\lambda_2\frac{|x|^{(p)}}{(t_f-t)}\text{sign}(x)$ resulta en la convergencia al origen en sentido ρ en tiempo predefinido del estado $x(t)$, su derivada y la salida $y(t)$ de un sistema estocástico perturbado (3.25) para el tiempo asignado t_f .

3.5.1 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considerando el modelo estocástico del PMSM

$$d\omega(t) = \left(\frac{K_t}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega + \zeta(t) \right) dt + \sigma(t, \omega(t))dW \quad (3.29)$$

y la entrada de control (3.21) para $i_q = (J/K_t)(B\omega/J + u(t))$ resulta en el siguiente sistema de lazo cerrado:

$$\dot{\omega}(t) = \begin{cases} -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2\frac{|\omega|^{(p)}}{(t_f-t)}\text{sign}(\omega) + \\ y(t) + \sigma(t, \omega(t))dW(t), & t < t_f, \\ -\lambda_1|\omega|^{(1/2)}\text{sign}(\omega) - \lambda_2|\omega|^{(p)}\text{sign}(\omega) + \\ y(t) + \sigma(t, \omega(t))dW(t), & t \geq t_f, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\dot{y}(t) = -\alpha\text{sign}(\omega(t)) + \xi(t). \quad (3.31)$$

| $y(t_0) = y_0$ | | $\omega(t_0) = \omega_0[\text{rad/s}]$ | | | |
|----------------|-------|--|-------|-------|-------|
| | | 50 | 100 | 200 | 500 |
| -100 | t_1 | 0.509 | 0.572 | 0.571 | 0.932 |
| | t_2 | 0.508 | 0.535 | 0.680 | 0.838 |
| | t_3 | 0.495 | 0.499 | 0.500 | 0.577 |
| -50 | t_1 | 0.388 | 0.475 | 0.628 | 0.882 |
| | t_2 | 0.383 | 0.445 | 0.572 | 0.765 |
| | t_3 | 0.379 | 0.390 | 0.415 | 0.451 |
| 50 | t_1 | 0.641 | 0.641 | 0.641 | 0.850 |
| | t_2 | 0.641 | 0.641 | 0.641 | 0.675 |
| | t_3 | 0.641 | 0.641 | 0.641 | 0.641 |
| 100 | t_1 | 1.121 | 1.121 | 1.121 | 1.121 |
| | t_2 | 1.121 | 1.121 | 1.121 | 1.121 |
| | t_3 | 1.121 | 1.121 | 1.121 | 1.121 |

TABLA 3.3: Tiempos de convergencia para sistema con disturbios deterministas y

ruido estocástico

3.5.2 SIMULACIÓN

Las constantes y el disturbio determinista $\zeta(t)$ permanecen iguales que en la sección previa. Los valores $r = 0.75$ y $\rho = 2$ son asignados para el término de difusión $\sigma(t, \omega(t)) = |\omega(t)|^{0.75}$ en objetivo de lograr convergencia en promedio cuadrático (“mean-square”). Para satisfacer las condiciones del teorema 3.3, $\lambda_1 = 51 > \sqrt{2\alpha} > 0.5$, $\lambda_2 = 2 > 1 > 0.5$, y $p \geq 1$. Igual que antes, $p = 1$ es representado por $u_1(t)$ y $p = 3/2$ por $u_2(t)$. Para la ley de control (3.24) de [24], $\lambda_1 = 50$, $\eta = 2$, y $\lambda_2 = 1$.

Los tiempos de convergencia resultantes de simular con diferentes condiciones iniciales son presentados en la tabla 3.3. Las figuras 3.13, 3.15 y 3.17 muestran las trayectorias del estado para las leyes de control u_1 , u_2 y u_3 , usando $\omega_0 = 50$ con $y_0 = -100$, $\omega_0 = 100$ con $y_0 = -50$ y $\omega_0 = 500$ con $y_0 = 50$ respectivamente.

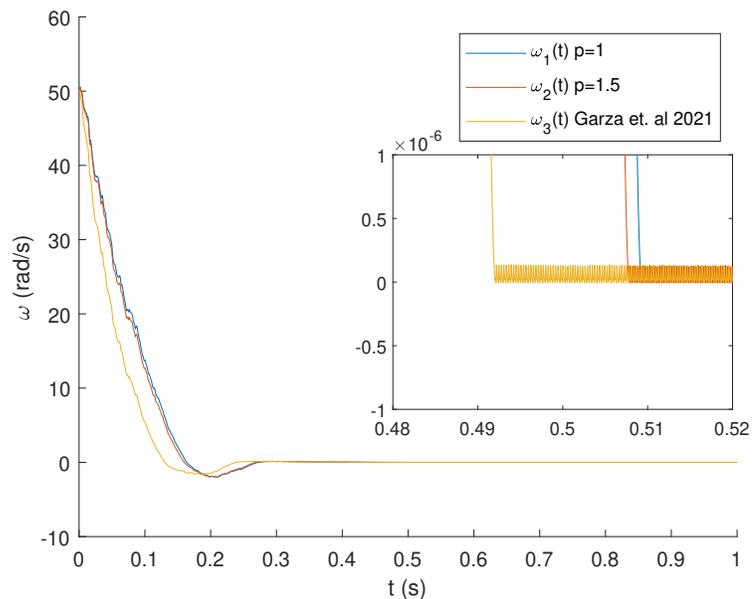


FIGURA 3.13: Convergencia de los estados del sistema (3.29) usando condiciones iniciales $\omega_0 = 50$ y $y_0 = -100$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

Las figuras 3.14, 3.16 y 3.18 muestran las salidas del sistema correspondientes a cada ley de control u_1 , u_2 y u_3 usando las mismas condiciones iniciales: $\omega_0 = 50$ con

$y_0 = -100$, $\omega_0 = 100$ con $y_0 = -50$ y $\omega_0 = 500$ con $y_0 = 50$ respectivamente.

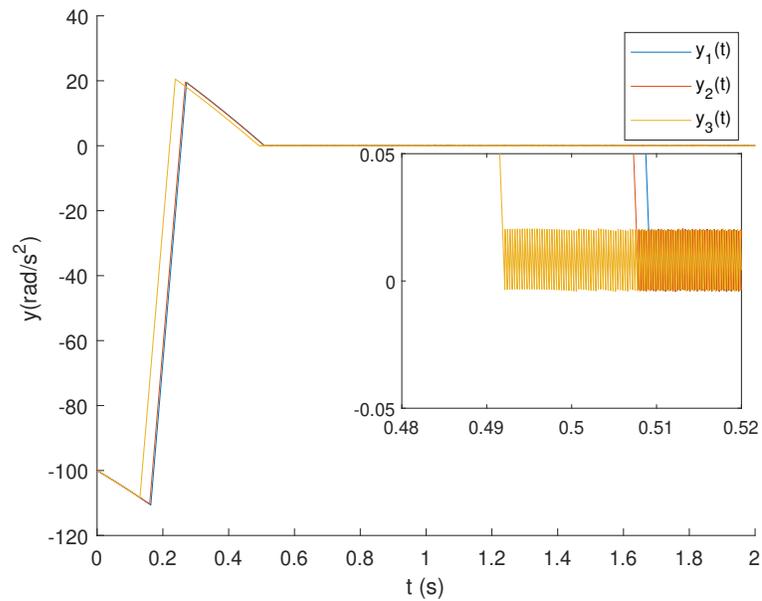


FIGURA 3.14: Convergencia de las salidas del sistema (3.29) con condiciones iniciales $\omega_0 = 50$ y $y_0 = -100$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

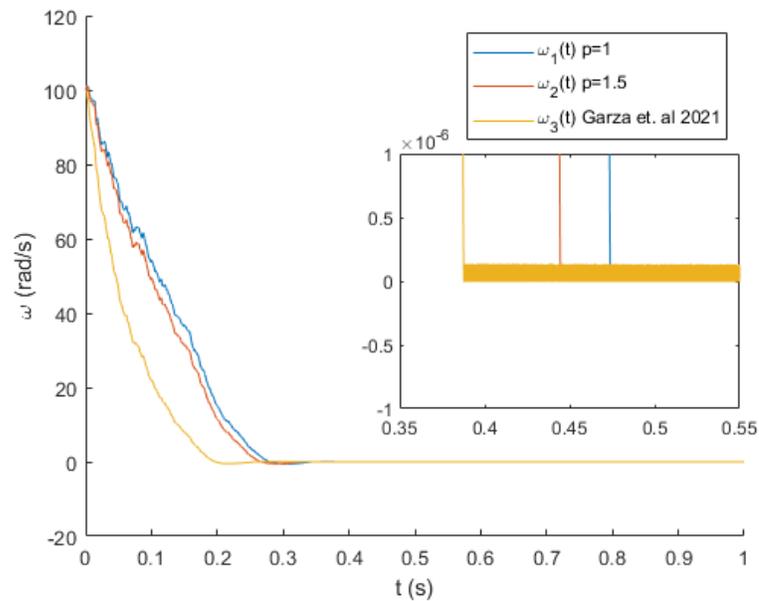


FIGURA 3.15: Convergencia de los estados del sistema (3.29) usando condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

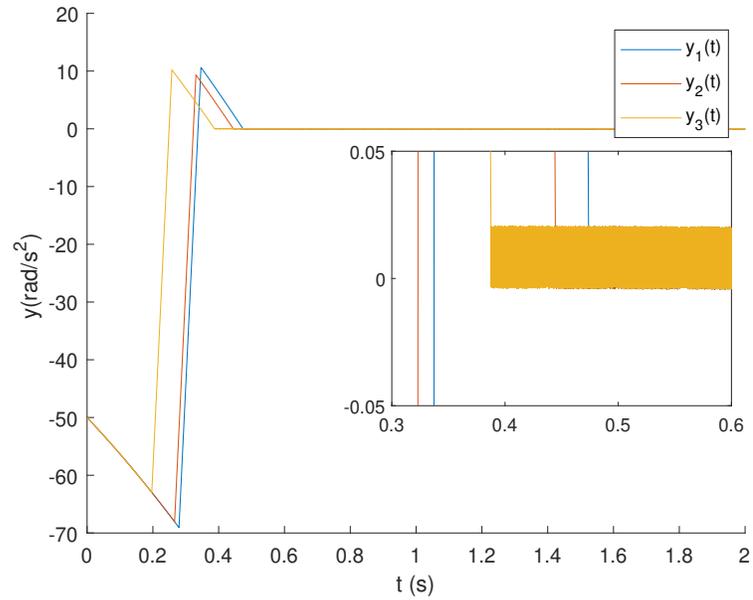


FIGURA 3.16: Convergencia de las salidas del sistema (3.29) con condiciones iniciales $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

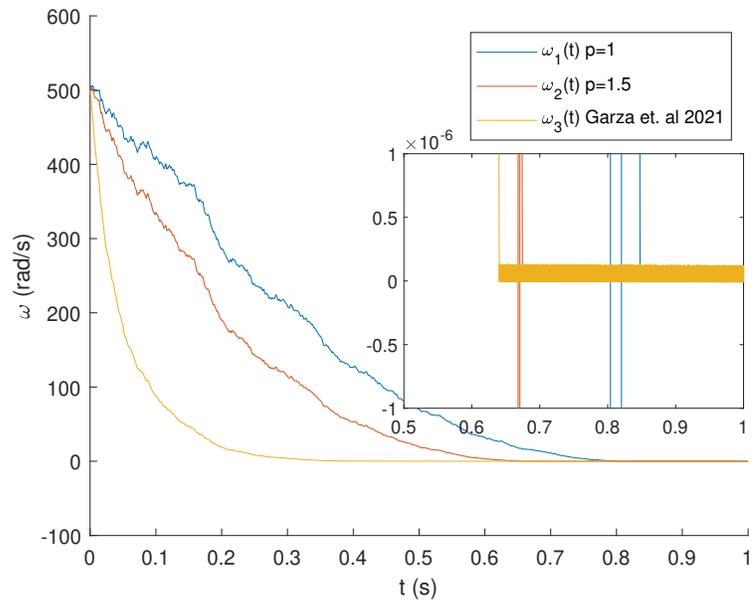


FIGURA 3.17: Convergencia de los estados del sistema (3.29) usando las condiciones iniciales $\omega_0 = 500$ y $y_0 = 50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

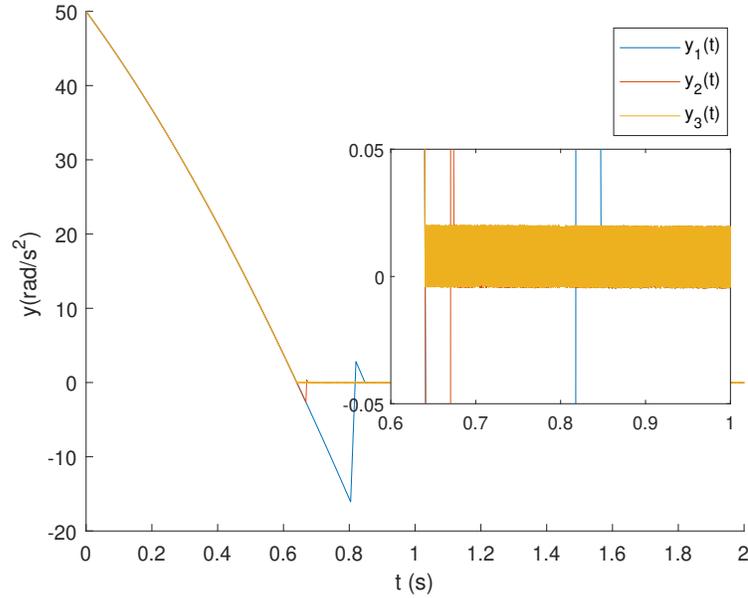


FIGURA 3.18: Convergencia de las salidas del sistema (3.29) al origen en promedio cuadrático con condiciones iniciales $\omega_0 = 500$ y $y_0 = 50$ para las entradas de control u_1 , u_2 , y u_3 .

Por último las figuras 3.19, 3.20 y 3.21 muestran la evolución en el tiempo de las entradas de control para sus correspondientes condiciones iniciales $\omega_0 = 50$ con $y_0 = -100$, $\omega_0 = 100$ con $y_0 = -50$ y $\omega_0 = 500$ con $y_0 = 50$. Como en los casos anteriores, las trayectorias del estado en las figuras 3.13, 3.15 y 3.17 correspondiente a la entrada de control u_3 converge más rápido que para aquellos que usan u_1 y u_2 . Las leyes de control con $p = 1$ y $p = 3/2 > 1$ muestran una menor magnitud de control.

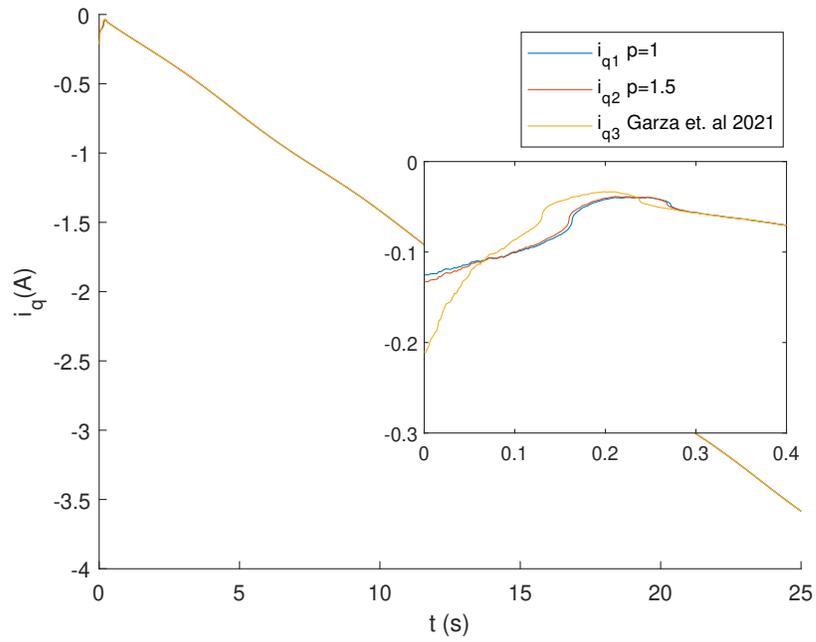


FIGURA 3.19: Historial de tiempo de las entradas de control para $\omega_0 = 50$ y $y_0 = -100$.

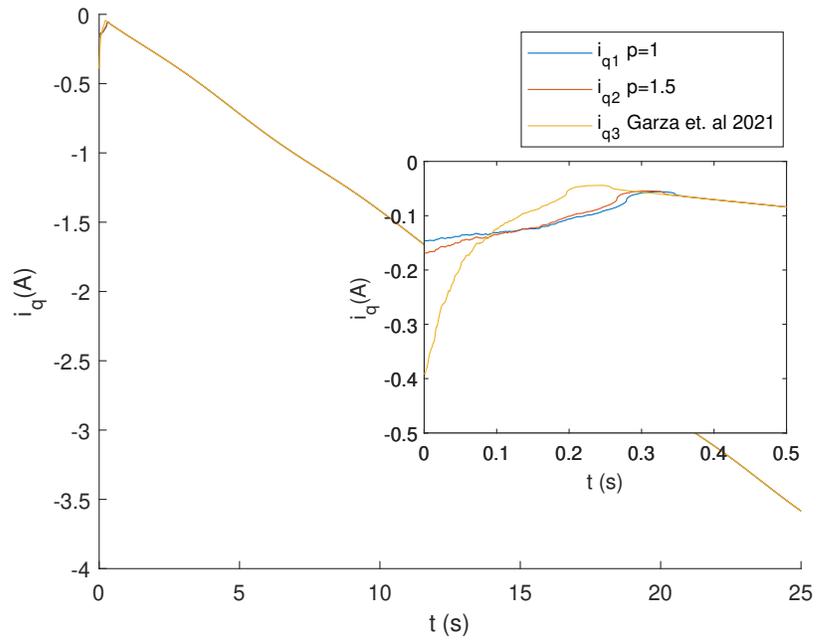


FIGURA 3.20: Historial de tiempo de las entradas de control para $\omega_0 = 100$ y $y_0 = -50$.

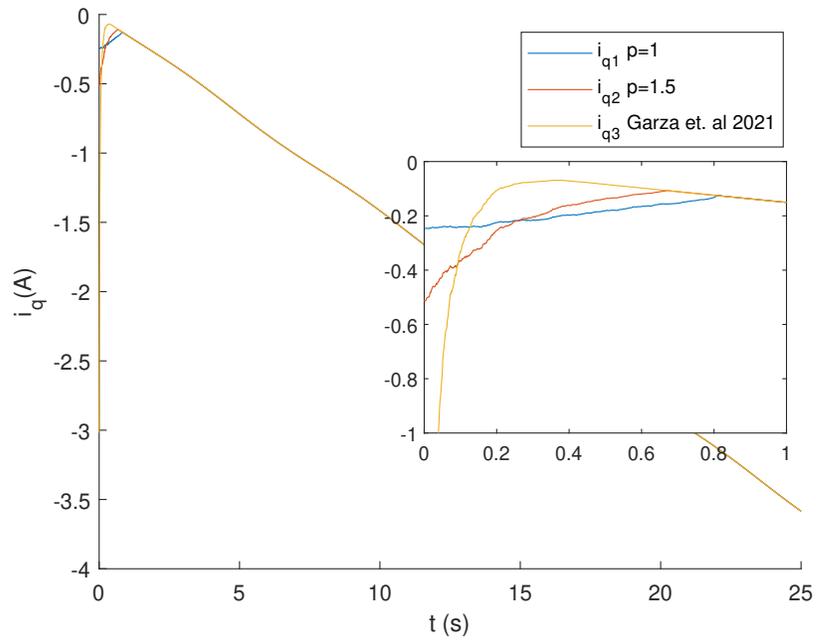


FIGURA 3.21: Historial de tiempo de las entradas de control para $\omega_0 = 500$ y $y_0 = 50$.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIÓN

4.1 CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado algoritmos de control para un sistema escalar de tipo super-twisting de bajo costo convergentes en tiempo predefinido y han sido aplicados a un sistema PMSM en tres casos diferentes: sin perturbaciones, con disturbios deterministas acotados y con disturbios deterministas acotados y ruidos estocásticos. Las leyes de control diseñadas proveen convergencia de los estados del sistema y sus derivadas al origen en tiempo predefinido (20 segundos) y reducen la magnitud de control y energía en comparación a resultados previos, usando un exponente $p > 1$ en el término de super-twisting que asegura la convergencia en tiempo predefinido.

4.2 ESTADO ACTUAL

La investigación en curso está enfocada en el diseño de algoritmos de super-twisting convergentes en tiempo predefinido mediante una modificación del algoritmo de convergencia en tiempo fijo sin la adición de términos extras. El análisis realizado muestra la disminución de magnitudes de control provocado por esta ausencia de términos adicionales.

4.3 PERSPECTIVA A FUTURO

La visión para próximas investigaciones en este tema se encuentran la expansión de los algoritmos para sistemas multivariados con sus respectivos casos libres de perturbaciones y contemplando dichas perturbaciones, usar otros sistemas físicos para las simulaciones correspondientes, proponer observadores de convergencia en tiempo predefinido con la modificación presentada para escenarios en los que no todos los estados del sistema son medibles y su estudio en sistemas con disturbios no acoplados.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] B. C. Kuo. *Sistemas de Control Automático*. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.
- [2] Z. Dong, Z. Cheng, Y. Zhu, X. Huang, Y. Dong, and Z. Zhang. Review on the recent progress in nuclear plant dynamical modeling and control. *Energies*, 16(3), 2023.
- [3] Y. Shtessel. Sliding mode control of the space nuclear reactor system. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34:579–589, 1998.
- [4] G.R Ansarifar and R. Maesam. Second-order sliding-mode control for a pressurized water nuclear reactor considering the xenon concentration feedback. *Nuclear Engineering and Technology*, 47(1):94–101, 2015.
- [5] M.H. Zahedi yeganeh and G.R. Ansarifar. Estimation of the poisons reactivity in the p.w.r nuclear reactors using modified higher order sliding mode observer based on the multi-point nuclear reactor model. *Annals of Nuclear Energy*, 112:158–169, 2018.
- [6] K. Abdulraheem, A. Tolokonsky, and Z. Laidani. Adaptive second-order sliding-mode control for a pressurized water nuclear reactor in load following operation with xenon oscillation suppression. *Nuclear Engineering and Design*, 391, 2022.
- [7] M. Cappelli, B. Castillo–Toledo, and S. Di Gennaro. Nonlinear control of pressurized water reactors with uncertainties estimation via high order sliding mode. *Journal of the Franklin Institute*, 358(2):1308–1326, 2021.

-
- [8] W. Zeng, L. Zheng, M. Chen, Y. Lin, G. Wang, B. Gao, and S. Huang. A generalized multivariable adaptive super-twisting control and observation for amphibious robot. *IEEE Access*, 10:129588–129598, 2022.
- [9] A. Chalanga, S. Kamal, and B. Bandyopadhyay. A new algorithm for continuous sliding mode control with implementation to industrial emulator setup. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20:2194–2204, 2015.
- [10] M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, S. X. Ding, T. Daszenies, and Y. Shtessel. Continuous fixed-time control for cart inverted pendulum stabilization. In *IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 353, pages 5001–5012, 2016.
- [11] F. Lopez-Ramirez, A. E. Polyakov, D. V. Efimov, and W. Perruquetti. Finite-time and fixed-time observers design via implicit lyapunov function. pages 289–294, 2016.
- [12] M. Basin, P. Yu, and Y. Shtessel. Finite- and fixed-time differentiators utilising hosm techniques. *IET Control Theory and Applications*, 11:1144–1152, 2017.
- [13] M. Basin, P. Yu, and Y. Shtessel. Hypersonic missile adaptive sliding mode control using finite- and fixed-time observers. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(1):930–941, 2018.
- [14] L. Fridman, J. A. Moreno, B. Bandyopadhyay, S. Kamal, and A. Chalanga. *Continuous Nested Algorithms : The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers*, pages 5–35. Springer International Publishing, 2015.
- [15] M. Basin, C. B. Panathula, and Y. Shtessel. Multivariable continuous fixed-time second-order sliding mode control: Design and convergence time estimation. *IET Control Theory and Applications*, 11:1104–1111, 2016.
- [16] E. Cruz-Zavala, J. Moreno, and L. Fridman. Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11):2727–2733, 2010.

-
- [17] J. D. Sánchez-Torres, E. N. Sanchez, and A. G. Loukianov. Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes. In *2015 American Control Conference (ACC)*, pages 5842–5846, 2015.
- [18] E. Jiménez-Rodríguez, J. D. Sánchez-Torres, D. Gómez-Gutiérrez, and A. G. Loukianov. Predefined-time tracking of a class of mechanical systems. In *2016 13th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–5, 2016.
- [19] Y. Song, Y. Wang, J. Holloway, and M. Krstic. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, 83:243–251, 2017.
- [20] J. Holloway and M. Krstic. Prescribed-time observers for linear systems in observer canonical form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(9):3905–3912, 2019.
- [21] A. K. Pal, S. Kamal, S. K. Nagar, B. Bandyopadhyay, and L. Fridman. Design of controllers with arbitrary convergence time. *Automatica*, 112:108710, 2020.
- [22] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez. Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 43:3044 – 3054, 2021.
- [23] N. de la Cruz and M. Basin. Predefined-time control of full-scale 4d model of permanent-magnet synchronous motor with deterministic disturbances and stochastic noises. *Actuators*, 10(11):306, 2021.
- [24] A. Garza-Alonso, M. Basin, and P. Rodriguez-Ramirez. Predefined-time stabilization of permanent-magnet synchronous motor system using linear time-varying control input. In *2021 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pages 326–331, 2021.

-
- [25] J. F. Silva and D. A. Santos. A modified super-twisting algorithm with specified settling time. In *2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 1–5, 2022.
- [26] S. Domínguez, P. Campoy, J. M. Sebastián, and A. Jiménez. *Control en el Espacio de Estado*. Pearson Educación, Madrid, 2002.
- [27] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc., USA, 3rd edition, 1998.
- [28] H. K. Khalil. *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [29] V. Utkin, Al. Poznyak, Y. Orlov, and A. Polyakov. Conventional and high order sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 357:10244–10261, 2020.
- [30] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. Springer New York, 2013.
- [31] C. B. Panathula, A. Rosales, Y. Shtessel, and M. Basin. Chattering analysis of uniform fixed-time convergent sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 354(4):1907–1921, 2017.
- [32] H. Lee and V. I. Utkin. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, 31(2):179–188, 2007.
- [33] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [34] V. Utkin. On convergence time and disturbance rejection of super-twisting control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(8):2013–2017, 2013.
- [35] F. Guerra-Avellaneda and M. Basin. Continuous fixed-time convergent control design for stochastic super-twisting system. *Journal of the Franklin Institute*, 357(16):11793–11806, 2020.

-
- [36] Z. Zuo, J. Song, B. Tian, and M. Basin. Robust fixed-time stabilization control of generic linear systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 52(2):759–768, 2022.
- [37] A. S. Zinober. Adaptive relay control of second-order systems. *International Journal of Control*, 21(1):81–98, 1975.
- [38] A. S. Zinober. Analysis of an adaptive third-order relay control system using non-linear switching surface theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 76(3):239–254, 1977.
- [39] X. Yu and Z. Man. Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes. *International Journal of Control*, 64:1165–1176, 1996.
- [40] Z. Man, A. Paplinski, and H. R. Wu. A robust mimo terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:2464–2469, 1995.
- [41] R. Seeber, M. Horn, and L. Fridman. A novel method to estimate the reaching time of the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(12):4301–4308, 2018.
- [42] M. Basin. Finite- and fixed-time convergent algorithms: Design and convergence time estimation. *Annual Reviews in Control*, 48:209–221, 2019.
- [43] C. B. Panathula M. Basin and Y. Shtessel. Adaptive uniform finite-/fixed-time convergent second-order sliding-mode control. *International Journal of Control*, 89(9):1777–1787, 2016.
- [44] M. Basin, P. C. Rodríguez Ramírez, and F. Guerra-Avellaneda. Continuous fixed-time controller design for mechatronic systems with incomplete measurements. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(1):57–67, 2018.
- [45] M. Basin, P. Rodríguez-Ramírez, and V. Ramos-Lopez. Continuous fixed-time convergent controller for permanent-magnet synchronous motor with unbounded perturbations. *Journal of the Franklin Institute*, 357(16):11900–11913, 2020.

-
- [46] E. Moulay, V. Léchappé, E. Bernuau, M. Defoort, and F. Plestan. Fixed-time sliding mode control with mismatched disturbances. *Automatica*, 136:110009, 2021.
- [47] K. Rsetam, Z. Cao, L. Wang, M. Al-Rawi, and Z. Man. Practically robust fixed-time convergent sliding mode control for underactuated aerial flexible jointrobots manipulators. *Drones*, 6(12):428, 2022.
- [48] T. Zeng, X. Ren, and Y. Zhang. Fixed-time sliding mode control and high-gain nonlinearity compensation for dual-motor driving system. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 16(6):4090–4098, 2020.
- [49] R. Aldana-López, D. Gomez-Gutierrez, E. Jiménez-Rodríguez, J. D. Sánchez Torres, and M. Defoort. Enhancing the settling time estimation of a class of fixed-time stable systems. *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 29:4135–4148, 2019.
- [50] G. Wang, G. Zhang, and D. Xu. *Position Sensorless Control Techniques for Permanent Magnet Synchronous Machine Drives*. Springer, Singapore, 2020.
- [51] Z. Fu, C. Liu, S. Ruan, and K. Chen. Design of neutrosophic self-tuning pid controller for ac permanent magnet synchronous motor based on neutrosophic theory. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021:1–14, 2021.
- [52] M. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, and A. Garza. Continuous fixed-time convergent super-twisting algorithm in case of unknown state and disturbance initial conditions. *Asian Journal of Control*, 21(1):323–338, 2019.