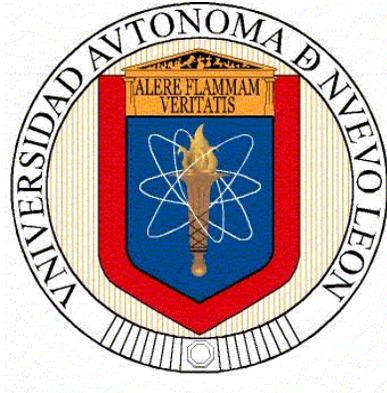


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



TESIS

**TEORÍAS EFECTIVAS PARA ESTUDIAR LAS TRANSICIONES
DE FASE EN LA CROMODINÁMICA CUÁNTICA**

PRESENTADA POR

JONATHAN RINCÓN SAUCEDO

**PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA**

AGOSTO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TEORÍAS EFECTIVAS PARA ESTUDIAR LAS TRANSICIONES DE FASE EN LA
CROMODINÁMICA CUÁNTICA

POR

JONATHAN RINCÓN SAUCEDO

Como requisito parcial para obtener el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA

Agosto, 2024

TEORÍAS EFECTIVAS PARA ESTUDIAR LAS TRANSICIONES DE FASE EN LA
CROMODINÁMICA CUÁNTICA

Comité de Tesis

Dr. José Rubén Morones Ibarra
Presidente

Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Secretario

Dr. Omar González Amezcua
Vocal 1

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Vocal 2

Dr. Edgar Martínez Guerra
Vocal 3

Dr. Carlos Luna Criado
Coordinador de Posgrado en Ingeniería Física

Dedicatoria

Querida esposa e hijos,

Esta dedicatoria está llena de gratitud y amor hacia ustedes, mi mayor fuente de inspiración y apoyo. Su presencia en mi vida ha sido fundamental para lograr este objetivo y salir adelante en toda circunstancia.

A ti Wendy, mi amada esposa, quiero agradecerte por tu inmenso amor, paciencia y comprensión. Tu apoyo incondicional y tus palabras de aliento han sido un impulso constante para mí durante este viaje académico. Gracias por creer en mí y por ser mi roca en los momentos de duda. A nuestros hijos, son la luz de mi vida. Su sonrisa y alegría contagiosa me han motivado a esforzarme cada día. A medida que crecen, espero ser un modelo a seguir y un ejemplo de perseverancia y dedicación para ustedes.

A mi madre Blanca Nelly y padre José Eduardo, que han sido una pieza fundamental en mi educación física, mental y emocional. Sin su paciencia, consejo, sabiduría y amor jamás hubiera desarrollado mi potencial y no podría haber llegado hasta aquí el día de hoy.

A mi familia, en general, les agradezco de corazón por su inquebrantable apoyo y aliento a lo largo de mi carrera académica. Sus palabras de aliento, comprensión y amor han sido un pilar fundamental en cada paso que he dado. Su respaldo incondicional me ha dado la fuerza para superar obstáculos y alcanzar mis metas.

A mi asesor, el Dr. José Rubén Morones Ibarra, quiero expresar mi profundo agradecimiento. Tus años de enseñanza, sabiduría y guía han sido invaluable para mi crecimiento profesional y personal. Su apoyo constante y sus invaluable consejos han sido fundamentales en el desarrollo de este trabajo.

Esta dedicatoria es un pequeño reconocimiento a cada uno de ustedes por su influencia positiva en mi vida y en este logro. Sin su amor, apoyo y aliento, este trabajo no hubiera sido posible.

Con todo mi amor y gratitud,

Jonathan Rincón Saucedo

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que contribuyeron de manera significativa al desarrollo y culminación de mi tesis doctoral. Sus apoyos invaluable fueron fundamentales para alcanzar este logro académico.

Quisiera expresar mi profunda gratitud al Dr. Rubén Morones, mi asesor de tesis, por su guía experta y apoyo incondicional a lo largo de mi estancia doctoral. Su amplio conocimiento y pasión por la física han sido una fuente constante de inspiración y motivación a lo largo de los años. Agradezco sinceramente su dedicación y compromiso con mi formación académica.

También quisiera agradecer a mi comité de evaluación de tesis, el Dr. Francisco Javier Almaguer, Dr. Francisco Flores Baez, Dr. Omar Gonzalez Amezcua y el Dr. Edgar Martínez Guerra. Agradezco profundamente el tiempo y esfuerzo que invirtieron en revisar y evaluar mi trabajo. Sus comentarios y sugerencias fueron invaluable para mejorar la calidad de mi tesis.

No puedo dejar de mencionar a mi esposa, mi hija y mi familia, quienes han sido un pilar fundamental en mi vida. Su apoyo emocional, moral y económico ha sido invaluable en cada etapa de mi camino académico. Gracias por estar a mi lado, por brindarme su amor y comprensión, y por creer en mí incluso cuando las dificultades parecían insuperables.

Asimismo, deseo expresar mi agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por financiar mi beca de doctorado. Su respaldo económico me permitió sustentarme durante mi estancia doctoral y concentrarme en mis estudios sin preocupaciones financieras. Estoy profundamente agradecido por esta oportunidad.

Finalmente, quiero agradecer a todos aquellos que, de una forma u otra, han contribuido a mi formación académica y personal. A mis amigos, compañeros de laboratorio y profesores, gracias por su amistad, por los debates y las ideas compartidas, y por enriquecer mi experiencia académica.

A todas estas personas e instituciones, les estoy sinceramente agradecido. Sus apoyos y contribuciones han sido invaluable en mi camino hacia la culminación de esta tesis doctoral.

Prefacio

En la naturaleza, existen cuatro fuerzas fundamentales: la gravedad, el electromagnetismo, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. Cada una de estas fuerzas describe un aspecto fundamental del universo y abarca todos los fenómenos que la física ha logrado descubrir hasta ahora. Para cada una de estas fuerzas, existe una teoría específica que nos permite describir y predecir los eventos que ocurren en cada tipo de interacción.

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría encargada de describir el comportamiento de los quarks dentro de los nucleones y de sus partículas de interacción, los gluones. En otras palabras, la QCD es la teoría que explica las interacciones asociadas a la fuerza nuclear fuerte, la cual actúa a distancias extremadamente pequeñas, del orden de los femtómetros (10^{-15} metros), y energías muy altas, típicamente en el rango de los GeV (Gigaelectronvoltios). A pesar de los grandes avances que la física ha logrado en todas sus distintas ramas, todavía existen muchas preguntas sin respuesta sobre el comportamiento de la materia a estas escalas.

El diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) se considera uno de los mejores enfoques para analizar el comportamiento de los quarks bajo condiciones extremas de temperatura y densidad. Estas condiciones son fundamentales para comprender fenómenos exóticos, como el interior de una estrella de neutrones o las condiciones que prevalecieron en los primeros instantes del Big Bang. Sin embargo, las teorías que utilizan las ecuaciones de la QCD con potenciales químicos diferentes de cero, como la Lattice QCD (LQCD), aún no pueden explicar adecuadamente estos comportamientos.

Dado este desafío, se ha planteado un nuevo enfoque que permite obtener información mediante alteraciones en la lagrangiana. En estos modelos, se trabaja con una lagrangiana efectiva, lo que implica emplear una descripción simplificada pero que captura los aspectos relevantes del sistema. Uno de los ejemplos de estas teorías efectivas es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, el cual se puede extender incluyendo el efecto de loop de Polyakov.

Estas teorías efectivas representan los primeros pasos hacia una interpretación más precisa del diagrama de fases de la QCD. A través de ellas, se busca describir las propiedades peculiares que poseen los quarks, como la libertad asintótica y el confinamiento, y así poder comprender mejor los fenómenos observados en condiciones extremas de temperatura y densidad.

Los modelos efectivos, a pesar de sus limitaciones, ofrecen una aproximación inicial y prometedora para comprender procesos físicos reales. La conexión entre estos modelos efectivos y la Cromodinámica Cuántica (QCD) se logra a través de observables medibles en sistemas controlados. Uno de los observables relevantes es el Critical End Point (CEP), que corresponde a un punto en el diagrama de fases donde ocurre un cambio en la transición de fase, lo cual puede llevar a la aparición de partículas extrañas.

La existencia y ubicación del CEP es de gran importancia, ya que su detección y caracterización proporcionarían una validación crucial para los modelos efectivos. Por lo tanto, nuestro trabajo se centra en presentar, describir y desarrollar estos modelos efectivos con el objetivo de avanzar en la dirección correcta hacia una mejor comprensión de la física de partículas. Al estudiar y analizar estos modelos, esperamos contribuir al avance científico y proporcionar una base sólida para futuras investigaciones en este campo.

Índice general

1. Introducción	14
2. Teoría Cuántica de Campos	18
2.1. Relatividad especial	18
2.1.1. Transformaciones de Lorentz	19
2.2. Ecuación de Klein-Gordon	24
2.3. Ecuación de Dirac	26
3. Cromodinámica Cuántica	29
3.1. El lagrangiano de QCD	29
3.2. Simetrías	30
3.2.1. Teorema de Noether	33
3.2.2. Simetría quiral	37
3.2.3. Simetría de isospín	38
3.2.4. Rompimiento espontáneo de simetría	39
3.3. Transiciones de fase	41
4. Modelos efectivos para QCD	44
4.1. Modelo de Nambu-Jona-Lasinio	44
4.2. Modelo NJL en el vacío	45
4.3. Modelo NJL a temperatura y densidad finita	48
4.4. Modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio	52
4.5. Esquemas de Regularización	61
4.5.1. Corte UV tridimensional	62
4.6. Esquemas de corte	62
4.7. Volumen finito	64
4.7.1. Volumen finito con geometría esférica	64

4.7.2. Volumen finito con geometría cúbica	66
4.8. Susceptibilidad	67
5. Resultados	69
5.1. Parámetros	69
5.2. Modelo NJL con $m_0 = 0$	69
5.3. Modelo NJL con $m_0 \neq 0$	71
5.4. Modelo PNJL para volumen finito con $m_0 = 0$ y $\mu = 0$	72
5.5. Suceptibilidades para volumen finito con $m_0 = 0$ y $\mu = 0$	75
5.6. Modelo PNJL para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu = 0$	76
5.6.1. Suceptibilidades para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu = 0$	77
5.7. Modelo PNJL para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$	78
5.7.1. Suceptibilidades para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$	80
5.8. Diagramas de fase modelo PNJL para volumen finito	82
5.9. Modelo PNJL (corte suave) para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu = 0$	84
5.9.1. Potencial polinomial vs logarítmico para $\mu = 0$	86
5.10. Modelo PNJL (corte suave) para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$	88
5.11. Susceptibilidades modelo PNJL (corte suave) para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$	89
5.12. Diagrama de fases modelo PNJL (corte suave) para volumen finito	90
5.12.1. Diagrama de fases potencial polinomial vs logarítmico	91
6. Conclusión	93

Índice de tablas

4.1. Parámetros para el potencial polinomial en el modelo PNJL.	57
4.2. Parámetros para el potencial logarítmico en el modelo PNJL.	57
4.3. Criterio de la segunda derivada de una función para el potencial termodinámico.	67
5.1. Masa constitutiva en el límite quiral usando el modelo PNJL con volumen finito para diferentes tamaños y geometrías.	74
5.2. Temperatura quiral T_{ch} para $\mu = 0$ en el modelo PNJL en un volumen finito, para diferentes tamaños de volumen y geometrías en el límite quiral $m_0 = 0$	75
5.3. Masa constitutiva para $m_0 = 5,5$ MeV usando el modelo PNJL con volumen finito, para diferentes tamaños y geometrías.	77
5.4. Temperatura quiral T_{ch} para $\mu = 0$ en el modelo PNJL en un volumen finito, para diferentes tamaños de volumen y geometrías para $m_0 = 5,5$ MeV	77
5.5. CEP para el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE. Izquierda, esfera de radio R con condiciones Dirichlet. Centro, para condiciones de Neumann. Derecha, para un cubo de longitud L	83
5.6. Masa constitutiva para $m_0 = 5,5$ MeV utilizando el modelo PNJL en un volumen finito, para diferentes tamaños y geometrías.	86
5.7. CEP para el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE. Izquierda, cubo de longitud L . Centro, para una esfera de radio R con condiciones de Dirichlet. Derecha, para una esfera con condiciones de Neumann.	91
5.8. CEP para el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE para un potencial polinomial y logarítmico.	92
6.1. CEP para el modelo PNJL y PNJL (corte suave).	94

Índice de figuras

1.1. Representación del diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica [22]	15
2.1. Dos sistemas de referencia con eje x-x' común y ejes y-y' y z-z' paralelos.	19
2.2. Representación del cono de luz	20
3.1. Gráfica $V(q)$	40
3.2. Gráfica $V(q)$	41
3.3. Clasificación de las transiciones de fase	42
4.1. Representación de la aproximación de campo medio	47
5.1. Diagrama de fases para el modelo NJL con $m_0 = 0$ MeV.	70
5.2. Diagrama de fases para el modelo NJL con $m_0 = 5,5$ MeV.	71
5.3. Susceptibilidad quiral máxima vs μ para el modelo NJL con $m_0 = 5,5$ MeV.	71
5.4. Comparación del comportamiento del parámetro de orden en función de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE en formas esférica y cúbica con diferentes volúmenes y $m_0 = 0$ MeV.	73
5.5. Susceptibilidades para el modelo PNJL y la aproximación MRE_D de volumen finito en el límite quiral y $\mu = 0$	75
5.6. Comparación del comportamiento del parámetro de orden en función de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE en formas esférica y cúbica con diferentes volúmenes y $m_0 = 5,5$ MeV.	76
5.7. Izquierda, parámetros de orden en función de la temperatura a $\mu = 0$. Derecha, susceptibilidad quiral y susceptibilidad media del loop de Polyakov $\bar{\chi}_{\Phi\Phi}$. Arriba, modelo PNJL con aproximación MRE_D para una esfera de $R = 38$ fm. Centro, PNJL para una esfera de $R = 6$ fm con MRE_N . Abajo, un cubo de $L = 13$ fm.	78
5.8. PNJL con aproximación MRE_D para una esfera de $R = 38$ f. Parámetros de orden en función de la temperatura para distintos valores de potencial químico, $\mu = 300, 326$ y 336 MeV. Izquierda, condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Derecha, loop de Polyakov.	79

5.9. PNJL con aproximación MRE_N para una esfera de $R = 6$ f. Parámetros de orden en función de la temperatura para diferentes valores del potencial químico, $\mu = 300, 327$ y 337 MeV. Izquierda, condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Derecha, loop de Polyakov.	79
5.10. PNJL con aproximación MRE para un cubo de $L = 13$ f. Parámetros de orden en función de la temperatura para distintos valores de potencial químico, $\mu = 300, 325$ y 335 MeV. Izquierda, condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Derecha, loop de Polyakov.	80
5.11. Susceptibilidad quiral máxima para cada valor de μ . Modelo PNJL con volumen finito utilizando la aproximación MRE para un cubo de longitud L	80
5.12. Susceptibilidad quiral en el plano $T - \mu$ para esferas MRE_D y MRE_N y un cubo MRE de $R = 38, 20$ y $L = 13$ fm en el modelo PNJL para un volumen finito con aproximación MRE. . .	81
5.13. Diagrama de fases del modelo PNJL en un volumen finito para esfera con MRE_D (izquierda), MRE_N (derecha) y cubo (abajo) con diferentes tamaños de volumen.	82
5.14. Condensado quiral y loop de Polyakov como funciones de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE (potencial polinómico) en formas esférica y cúbica con diferentes volúmenes y $m_0 = 5,5$ MeV.	85
5.15. Condensado quiral y loop de Polyakov en función de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE para potencial polinómico y logarítmico. Para un cubo con $L = 12$ fm (arriba). Para una esfera con condiciones Dirichlet $R = 37$ fm (centro) y esfera con condición Neumann $R = 3$ fm (abajo) y $m_0 = 5,5$ MeV.	87
5.16. Variación del condensado para diferentes valores del potencial químico para una geometría cúbica y esférica con aproximación MRE (potencial polinómico).	88
5.17. Susceptibilidad quiral máxima frente al potencial químico para el modelo PNJL con aproximación MRE para un cubo y una esfera (condiciones de Dirichlet y Neumann).	89
5.18. Diagrama de fases del modelo PNJL en un volumen finito con aproximación MRE para diferentes tamaños y geometrías.	90
5.19. Diagrama de fases del modelo PNJL en un volumen finito con aproximación MRE para diferentes tamaños y geometrías con potencial polinomial y logarítmico.	91
6.1. Valores iniciales del programa.	95
6.2. Definición del potencial termodinámico.	96
6.3. Derivada del potencial termodinámico respecto a la masa constitutiva de los quarks.	96
6.4. Derivada del potencial termodinámico respecto al parámetro Φ	97
6.5. Derivada del potencial termodinámico respecto al parámetro Φ^*	97
6.6. Ecuaciones de gap resueltas por FindRoot.	98
6.7. Matriz de susceptibilidades y cálculo para los valores del diagrama de fases.	98

Lista de Abreviaturas

Abreviatura	Significado
QCD	Quantum Chromodynamics
CEP	Critical End Point
LQCD	Lattice Quantum Chromodynamics
NJL	Nambu-Jona-Lasinio
PNJL	Polykov Nambu-Jona-Lasinio
T	temperatura, energía cinética
μ	Potencial químico
LHC	Large Hadron Collider
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider
QFT	Quantum Field Theory
u	quark up
d	quark down/ diferencial total
c	quark charm/ velocidad de la luz
s	quark strange
t	quark top/ tiempo
b	quark bottom
N	número de quarks
N_c	número de color
N_f	número de sabor
SU	Special Unitary
x, x_μ, x_i	coordenadas, coordenadas de Minkowski, coordenadas de espaciales
$g, g_{\mu\nu}$	constante de acoplamiento, tensor métrico
$\delta, \delta_\alpha^\nu$	cambio infinitesimal, delta de Kronecker
∇, ∇^2	gradiente, Laplaciano
\square	operador D'Alembertiano
E, E_p	energía relativista
p	momento
∂_μ	diferencial parcial
\hbar	constante reducida de Planck
i	unidad imaginaria
m, m_p, m_n	masa, masa protón, masa neutrón
m_0	masa corriente
M	masa constitutiva
J^μ	corriente de probabilidad
H	Hamiltoniano
I	matriz identidad
β	inverso de la temperatura
γ	matriz de Dirac
ψ, ψ^*	campo de quarks, campos de quarks conjugado

Abreviatura	Significado
$G, G_{\mu\nu}^a$	constante de acoplamiento efectivo, campo gluónico
D_μ, D^μ	derivada covariante, derivada contra variante
A_μ^a	campos de gauge
λ^a	matrices de Gell-Mann
U	matriz unitaria
\mathcal{L}	lagrangiana
$Q(t)$	carga de Neother
P_L, P_R	proyector izquierdo, proyector derecho
V	energía potencial, volúmen
q	coordenada generalizada, quark
k, k_β	constante de oscilador armónico, constante de Boltzmann
Z	función de partición
<i>diag</i>	diagonal de la matriz
<i>Tr</i>	traza de la matriz
A	axial
MFA	Mean Field Approximation
π	mesón auxiliar
σ	mesón auxiliar, matrices de Pauli
τ, τ^a	tiempo imaginario, matrices de Pauli
w_n	frecuencias de Matsubara
Ω	potencial termodinámico
$L(\vec{x})$	línea de Polyakov
\mathcal{U}	potencial de Polyakov
Φ	loop de Polyakov
e	función exponencial, electrón
UV	ultravioleta
IR	infrarrojo
Λ	parámetro de corte
MRE	Multiple Reflection Expansion
MRE_D	Multiple Reflection Expansion with Dirichlet conditions
MRE_N	Multiple Reflection Expansion with Neumann conditions
ρ_{MRE}	densidad de estados
L	longitud de cubo
R	radio de esfera
χ, χ_{MM}	susceptibilidad, susceptibilidad quiral
T_c	temperatura critica
TCP	Tricritical Point
MeV	megaelectronvolt
GeV	Gigaelectronvolt
fm	femtómetro

Resumen

Se estudian los efectos de volumen finito y las variaciones en el esquema de regularización en el diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en el plano $T - \mu$. Para este propósito, se emplean los modelos efectivos de Nambu-Jona-Lasinio, así como su extensión que incorpora el loop de Polyakov. En particular, se realiza un análisis comparativo en el marco SU(2), considerando diferentes geometrías, tamaños de volumen, potenciales de Polyakov y esquemas de regularización de las integrales. El objetivo es examinar cómo estos cambios afectan el diagrama de fases de la QCD.

Los resultados obtenidos revelan que las coordenadas del Critical End Point (CEP) varían en función de estas consideraciones, lo que implica modificaciones en los diagramas de fases correspondientes. Se observa que el CEP, que marca un cambio en la transición de fase, se ve influenciado por el tamaño del volumen, el potencial de Polyakov y el esquema de regularización utilizado. Estos hallazgos proporcionan una mayor comprensión de la QCD en el plano $T - \mu$, destacando la importancia de tener en cuenta los efectos del volumen finito y las elecciones del esquema de regularización en el estudio del diagrama de fases. Además, los resultados obtenidos contribuyen a la caracterización y comprensión de los fenómenos que ocurren en la QCD en condiciones extremas de temperatura y densidad.

Abstract

The finite volume effects and the variations in the regularization scheme in the Quantum Chromodynamics (QCD) phase diagram in the $T - \mu$ plane are studied. For this purpose, the effective Nambu-Jona-Lasinio models, as well as its extension incorporating the Polyakov loop, are employed. In particular, a comparative analysis is performed in the SU(2) framework, considering different geometries, volume sizes, Polyakov potentials and regularization schemes of the integrals. The objective is to examine how these changes affect the QCD phase diagram.

The results obtained reveal that the Critical End Point (CEP) coordinates vary as a function of these considerations, which implies modifications in the corresponding phase diagrams. It is observed that the CEP, which marks a change in the phase transition, is influenced by the volume size, the Polyakov potential and the regularization scheme used. These findings provide further insight into QCD in the $T - \mu$ plane, highlighting the importance of taking into account finite volume effects and regularization scheme choices in the study of the phase diagram. Furthermore, the results obtained contribute to the characterization and understanding of the phenomena occurring in QCD under extreme temperature and density conditions.

Capítulo 1

Introducción

Gracias al modelo estándar de partículas fundamentales, sabemos que todo lo que nos rodea está formado por 2 tipos de partículas: fermiones y bosones. Los fermiones son los bloques fundamentales del universo, divididos en 'quarks' y 'leptones'; estos conforman toda la materia física que nos rodea. En cambio, los bosones son las partículas de interacción entre las fuerzas fundamentales y la materia [1, 2].

En la actualidad, la descripción teórica para el comportamiento de las partículas subatómicas conocidas como "quarks" se estudia en la cromodinámica cuántica (QCD: Quantum Chromodynamics). Esta teoría de campos de gauge nos permite conocer la interacción fuerte entre quarks mediada por los portadores de la carga de color llamados gluones [3, 4, 5].

Según la QCD, cuando la materia compuesta por quarks (bariones y mesones) se somete a condiciones extremas de temperatura y/o densidad, ocurre una transición de fase que conlleva a un nuevo estado de la materia. Por tanto, podemos decir que existen dos estados o fases las cuales podemos analizar: la primera, en donde tenemos a los quarks y gluones confinados, la cual presenta una simetría quirial rota llamada "fase hadrónica"; y una segunda fase, en donde tenemos a las partículas desconfiadas y con simetría quirial restaurada, la cual se conoce generalmente como "plasma de quarks y gluones" (QGP) [6, 7, 8]. Los ejemplos más comunes en donde se cree que ha existido el QGP son en los primeros instantes del Big Bang, debido a las altísimas temperaturas que presentaba el universo en sus primeras etapas; otra opción son los objetos muy compactos como el núcleo de las estrellas de neutrones debido a su alta densidad [9, 10].

Para estudiar este tipo de transición existen varias alternativas: la primera consiste en resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discretizado, este enfoque se denomina Lattice QCD (LQCD). Sin embargo, es importante destacar que este enfoque solo es viable cuando se considera un potencial químico cero ($\mu = 0$) [11, 12, 13]. Otra opción consiste en utilizar modelos efectivos, donde al incorporar ciertas simetrías podemos obtener un lagrangiano efectivo que describe el sistema, el cual podemos resolver teóricamente.

Uno de los modelos efectivos más empleados para estudiar este tipo de propiedades es el propuesto por Nambu y Jona-Lasinio (NJL) en 1961 [14, 15, 16, 17]. Además, su extensión, el modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), ha sido ampliamente utilizado. Este modelo busca incluir la propiedad de confinamiento mediante el uso de un potencial efectivo [18, 19, 20, 21].

Bajo estos modelos efectivos, las transiciones antes mencionadas se representan mediante un diagrama de fases en el plano formado por la temperatura (T) y el potencial químico (μ) Fig. 1.1

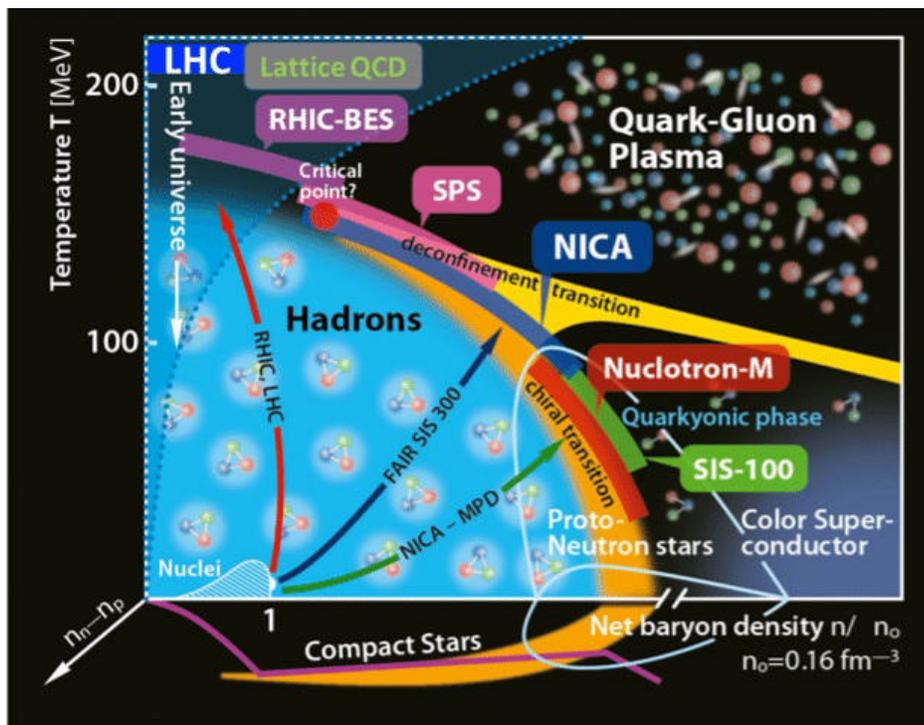


Figura 1.1: Representación del diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica [22]

De acuerdo a esta representación, cuando tenemos condiciones de baja temperatura y densidad, existe una región en donde tenemos nuestra "fase hadrónica". Conforme aumentamos estas variables, vemos cómo nuestro sistema evoluciona a un nuevo estado "fase QGP", en donde ocurre el desconfinamiento de los quarks (liberación de color). Además, se postula que dentro de la región que divide las 2 fases, podría existir un punto crítico, el cual indica la posible aparición de una transición de fase de primer orden. Este punto crítico, conocido como *Critical End Point* (CEP), representa una coordenada en el espacio de parámetros (temperatura, potencial químico) en el diagrama de fases [23, 24, 25].

El estudio del diagrama de fases, la ubicación del CEP y las propiedades del QGP, son el principal objetivo de grandes experimentos que se llevan a cabo mediante colisionadores de iones pesados, por ejemplo, el *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) y el *Large Hadron Collider* (LHC) [26, 27].

Una de las primeras ideas al estudiar QCD son las propiedades de 'sabor' y 'color', el sabor está representado por los 6 tipos diferentes de quarks: up, down, charm, strange, top, bottom (u,d,c,s,t,b) y estos a su vez pueden tener 3 diferentes tipos de carga de color: Rojo, azul y verde. La carga de color es un número cuántico de los quarks y gluones que está relacionada con su interacción fuerte.

La QCD es una teoría cuántica de campos (QFT: Quantum Field Theory) de gauge no abeliana con simetría $SU(3)$ en donde $N_c = 3$, es el número de colores y $N_f = 6$, es el número de sabores [28, 44]. Dentro del marco de la QCD existen aspectos muy importantes que enunciaremos a continuación.

Libertad asintótica

Cuando tenemos distancias muy cortas o momentos grandes la constante de acoplamiento decrece, por tanto, los quarks se comportan dentro de los hadrones como si no interaccionaran entre ellos, como

si fueran partículas libres. Para poder entender este comportamiento generalmente se compara con las propiedades de apantallamiento magnético del vacío, ya que los gluones son partículas cargadas con espín 1. Estos gluones se comportan como dipolos magnéticos de color permanente que se alinean paralelos a un campo externo. Por tanto, la QCD es asintóticamente libre porque el anti apantallamiento de los gluones supera el apantallamiento debido a los quarks. Esto lo podemos observar mediante la función β de una teoría de gauge no Abelianas [30]:

$$\beta(\alpha) = \mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \frac{\alpha^2}{\pi} b_1 + \frac{\alpha^3}{\pi} b_2 + \dots \quad (1.1)$$

donde $\alpha = g^2/4\pi$, para el caso de QCD SU(3) tendremos que $b_1 = -11/2 + N_F/3$. La ecuación 1.1 tiene como consecuencia que podemos tener 16 tripletes de quarks antes de perder la libertad asintótica [31].

Confinamiento

Experimentalmente nunca se han visto quarks libres en la naturaleza. Este hecho fenomenológico se incorpora a la teoría y está representado en la hipótesis del confinamiento de color. Al observar las otras fuerzas fundamentales como la gravedad, la interacción débil y la electromagnética su intensidad disminuye conforme aumentamos la distancia entre las partículas, por otro lado en la interacción fuerte esta fuerza aumenta conforme intentamos separar a los quarks. La forma de manejar este fenómeno es que para distancias grandes o bajos momentos el acoplamiento efectivo se hace muy fuerte por lo que al intentar separar los quarks se requiere tanta energía que esta es capaz de formar un par quark-antiquark, creando así una nueva partícula [32, 33].

Simetría quiral (aproximada)

La simetría quiral en QCD se refiere a la invariancia de la teoría ante una transformación de quiralidad independiente del sabor (invariante bajo la transformación global $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ [34]. La quiralidad de un quark se refiere a la proyección del espín del quark sobre su momento lineal, si la proyección es paralela, se dice que el quark es diestro, mientras que si es antiparalela, se dice que el quark es zurdo. Esta simetría quiral se dice que es aproximada debido a que los quarks tienen masa diferente de cero.

Rompimiento espontáneo de la simetría quiral

La ruptura espontánea de la simetría quiral es un fenómeno que ocurre cuando una teoría que tiene simetría quiral a nivel Lagrangiano, pierde esta simetría en su vacío o estado de menor energía, es decir, el vacío puede no ser invariante ante una transformación de un grupo de simetría incluso si la lagrangiana lo es [34]. En la QCD debido a que los quarks tienen masa muy pequeña a comparación de los hadrones se cree que este término de masa extra se obtiene mediante un proceso conocido como 'masa dinámicamente generada' debido a la condensación de los quarks.

Para poder analizar estas propiedades podemos recurrir a teorías en el régimen no perturbativo como los modelos efectivos para tratar de explicar estos fenómenos mediante el uso de parámetros de orden que nos brinden información acerca del comportamiento de los quarks a diferentes condiciones. Por tanto, la tesis está organizada de forma que el lector pueda comprender paso a paso el proceso de formar una

Lagrangiana efectiva hasta la interpretación del diagrama de fases. En el capítulo 2 se presentan las bases teóricas y matemáticas de la teoría cuántica de campos, así como los conceptos de simetría y rompimiento espontáneo de simetría. En el capítulo 3 veremos los aspectos fundamentales de la QCD y las diferentes transiciones de fase que existen en este campo. En el capítulo 4 introduciremos los diferentes tipos de modelos efectivos para QCD en especial nos concentraremos en el modelo de Nambu-Jona Lasinio (NJL) con temperatura y potencial químico finitos y mediante un parámetro extra (loop de Polyakov) que se utiliza para explicar el confinamiento se crea el modelo llamado Polyakov Nambu-Jona-Lasinio (PNJL). En el capítulo 5 veremos los resultados que se encontrarán para ambos modelos, los diagramas de fase y para el condensado quiral, así como la existencia o ausencia del CEP.

Capítulo 2

Teoría Cuántica de Campos

Cuando hablamos de una teoría cuántica de campos (QFT: Quantum Field Theory) nos referimos a una teoría que debe satisfacer a la relatividad especial y la mecánica cuántica [35, 36]. Partiendo de esta premisa primero analizaremos el conjunto de ecuaciones y postulados que debe cumplir cada una de estas teorías.

2.1. Relatividad especial

La teoría de la relatividad especial, propuesta por Albert Einstein en 1905, se compone de una serie de ideas que suponen un gran desafío para nuestra visión cotidiana de la realidad. Conceptos como la contracción del espacio y la dilatación del tiempo son fundamentales para describir los procesos en los cuales las velocidades de las partículas se acercan a la velocidad de la luz.

Comenzaremos definiendo los 2 postulados fundamentales en los que se basa la relatividad especial [37].

1. Las leyes de la física tienen la misma forma matemática en todos los marcos de referencia inerciales.
2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, es decir, es una constante universal cuyo valor es $c \approx 300,000 \frac{km}{s}$.

El primer postulado, también llamado principio de relatividad, nos indica que no importa el sistema que se estudie, todos los observadores en cualquier marco de referencia inercial deben obtener el mismo resultado. Esto puede recordarnos al principio de relatividad galileano, con la diferencia de que Einstein no solo pensaba en la mecánica de Newton, sino también en un principio válido para la electrodinámica, la óptica y cualquier tipo de fenómeno físico. El segundo postulado podría parecernos muy sencillo e incluso obvio para muchas personas, pero tiene consecuencias incompatibles con las ideas de Newton. Siguiendo las palabras del matemático y físico Banesh Hoffmann:

Cada uno de estos principios parece inofensivo e incluso evidente. Sin embargo, juntos forman una combinación explosiva destinada a sacudir hasta los fundamentos de la ciencia [38].

Y para trabajar con estas ideas, es necesario un formalismo matemático que implemente estas correcciones a las ideas clásicas. Nuestro primer paso para lograr esto será introducir las transformaciones de Lorentz.

2.1.1. Transformaciones de Lorentz

Supongamos que al tiempo $t = 0$, los orígenes de dos marcos de referencia inerciales O y O' coinciden y que O' se desplaza (solo en el eje X) a una velocidad constante \vec{v} con respecto a O , como se muestra en la Figura 2.1

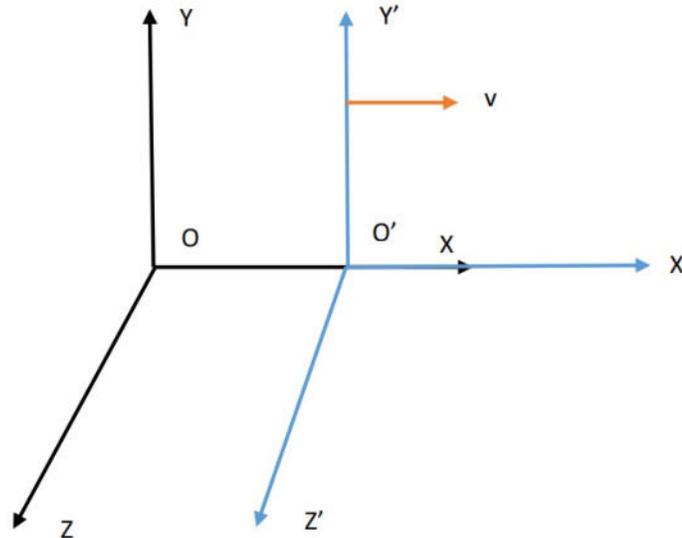


Figura 2.1: Dos sistemas de referencia con eje $x-x'$ común y ejes $y-y'$ y $z-z'$ paralelos.

Si en el momento $t = 0$ los orígenes coinciden y en el mismo instante una señal luminosa se genera en ambos orígenes $O = O'$, la cual se propaga como una onda esférica, entonces el frente de onda debe satisfacer

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (2.1)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (2.2)$$

al ser la velocidad de la luz constante implica que

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (2.3)$$

al tener el mismo origen sabemos que $y' = y$, $z' = z$ y $x' \neq x$, entonces $t' \neq t$. Podemos generalizar el movimiento de O' respecto a O en cualquier dirección, y la ecuación anterior debe cumplirse. Por tanto, la expresión $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ debe ser un invariante ante las transformaciones que nos relacionen ambos sistemas de referencia.

Ahora lo que haremos será definir la 'distancia' al origen de un punto en este espacio (x, y, z, ct) como

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.4)$$

Podemos decir que el intervalo de distancia s^2 es invariante ante las transformaciones de coordenadas que desplacen uno con respecto a otro con velocidad \vec{v} . En la teoría de la relatividad especial, un principio fundamental es que ciertas cantidades físicas deben permanecer constantes bajo transformaciones de coordenadas entre diferentes sistemas de referencia inerciales. El intervalo de distancia s^2 es una de esas cantidades invariables.

Cuando dos observadores se mueven uno con respecto al otro, el valor del intervalo de distancia s^2 entre dos eventos en el espacio-tiempo permanece inalterado, independientemente de la velocidad relativa entre los observadores. Esto significa que, sin importar cómo se muevan los observadores, el valor de s^2 siempre será el mismo.

Por lo tanto, en el contexto de esta tesis, estamos utilizando el intervalo de distancia s^2 como un invariante para describir la geometría del espacio-tiempo en la relatividad especial. Es decir, s^2 proporciona una medida objetiva y constante de la separación entre eventos en el espacio-tiempo, independientemente del marco de referencia desde el cual se realice la observación.

El espacio 4-dimensional (ct, x, y, z) , comúnmente conocido como espacio de Minkowski, es fundamental en la teoría de la relatividad especial. En este espacio, cada punto se denomina un *evento*, que representa una posición en el espacio-tiempo en un instante particular. La ecuación anterior define un cono de luz, que describe las trayectorias posibles de eventos que están conectados por la luz en el espacio-tiempo.

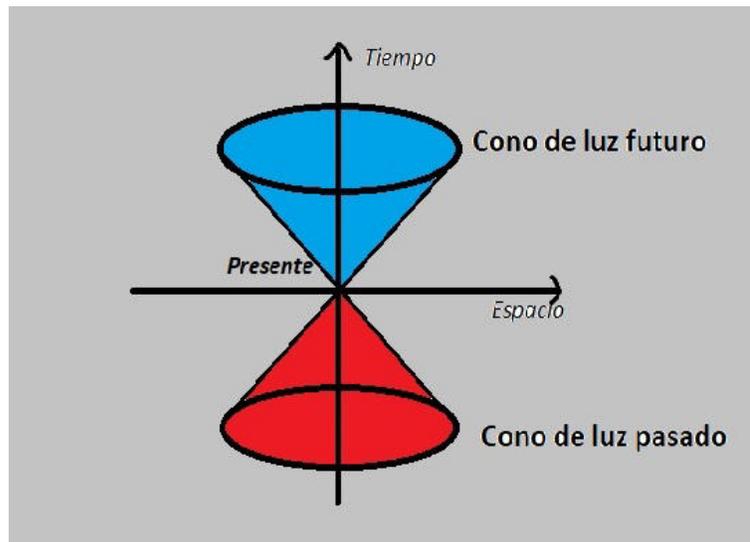


Figura 2.2: Representación del cono de luz

Este cono de luz presenta una estructura similar a un cono tridimensional, pero extendiéndose ahora en cuatro dimensiones (Figura 2.2) tres espaciales y una temporal. El cono de luz divide el espacio-tiempo en tres regiones:

1. La región del cono de luz futuro (azul) la cual contiene todos los eventos que pueden ser alcanzados desde el evento de referencia en un futuro, por medio de una señal que se propague a la velocidad de la luz.

2. El cono de luz pasado (rojo) el cual contiene todos los eventos que que pueden influir en el evento de referencia en su pasado, propagandose a la velocidad de la luz.
3. La región fuera de ambos conos (gris) los eventos en esta región exterior no pueden influir causativamente en el evento de referencia.

Además la 'distancia' o intervalo espacio-temporal s^2 es una medida de separación entre dos eventos. Si ($s^2 > 0$) los eventos están fuera del cono, si ($s^2 < 0$) los eventos está dentro del cono y para ($s^2 = 0$) los eventos están en el límite del cono de luz.

Tomando todo esto en cuenta entonces definimos una transformación de Lorentz como aquella que deja invariante la distancia s definida en un espacio-tiempo 4-dimensional, donde un punto se determina como (ct, x, y, z) y $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Ahora introduciremos una nueva notación de superíndices para facilitar los calculos, en donde las coordenadas espaciales y temporales las representaremos como

$$ct = x^0, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3 \quad (2.5)$$

con está nueva notación podemos escribir ahora $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Adoptando la convención de suma sobre índices repetidos y definiendo el tensor métrico para el espacio como $g_{\mu\nu}$, cuyos elementos se representan en forma matricial [39]

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.6)$$

Para convertir un tensor con índice superior a uno con índice inferior o viceversa necesitamos contraerlo mediante el tensor métrico. Definiendo un vector covariante (x_μ) y un vector contravariante (x^μ) como

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \quad (2.7)$$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (2.8)$$

la regla de transformación sería

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \iff x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.9)$$

podemos definir la ecuación (2.4) como

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.10)$$

sean dos puntos $x_1^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y $x_2^\mu = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, podemos definir su distancia o intervalo de longitud como

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (2.11)$$

o en forma diferencial

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.12)$$

Recordando la definición de una transformación de Lorentz, sabemos que el elemento de longitud debe permanecer invariante, es decir

$$ds^2 = d\bar{s}^2 \quad (2.13)$$

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \quad (2.14)$$

Ahora definamos la transformación de coordenadas como

$$\bar{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (2.15)$$

donde Λ_ν^μ son las componentes de una matriz que no depende de x^μ (transformación lineal) y adoptamos la convención de suma para índices repetidos. De esta manera, el diferencial lo podemos expresar

$$d\bar{x}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.16)$$

Esta es la regla de transformación para las componentes del vector desplazamiento $d\bar{x}^\mu$ en el espacio-tiempo, la cual podemos comprobar a través de la transformación lineal (2.15)

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \Lambda_\nu^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\alpha} = \Lambda_\nu^\mu \delta_\alpha^\nu = \Lambda_\alpha^\mu \quad (2.17)$$

$$\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.18)$$

donde δ_α^ν es la delta de Kronecker cuyo valor es $\delta_\alpha^\nu = \begin{cases} 1, & \nu = \alpha \\ 0, & \nu \neq \alpha \end{cases}$.

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.16) obtenemos la regla de transformación para las componentes del vector de posición x^μ en el espacio-tiempo.

$$\bar{x}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \quad (2.19)$$

Teniendo en cuenta que en la teoría especial de la relatividad la condición de que la longitud del intervalo de preserva y usando la definición del vector posición x^μ obtenemos

$$ds^2 = d\bar{s}^2 \rightarrow g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \quad (2.20)$$

$$g_{\mu\nu}d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta = g_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu dx^\alpha dx^\beta \quad (2.21)$$

en donde

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \\ &= \Lambda_\alpha^\mu g_{\mu\nu} \Lambda_\beta^\nu \\ &= \Lambda_\alpha^{T\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_\beta^\nu \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por tanto, el requisito que deben satisfacer las transformaciones de Lorentz, descritas por Λ_ν^μ para que se conserve la longitud en el espacio-tiempo es

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.23)$$

Las matrices que cumplen con la ecuación anterior se les conoce como matrices de Lorentz y las transformaciones asociadas a ellas se les llaman transformaciones de Lorentz. Ahora, definimos un vector contravariante $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ como un conjunto de cuatro componentes que se transforman de la misma manera que las componentes del vector posición x^μ .

$$\bar{A}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu = \Lambda_\nu^\mu A^\nu \quad (2.24)$$

Para ver como se transforman los vectores covariantes consideremos la transformación del operador gradiente $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, donde introduciremos la función escalar $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$, usando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rightarrow \bar{\partial}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \partial_\alpha \quad (2.26)$$

Esta ecuación es la regla de transformación para los vectores covariantes. Un vector de Lorentz covariante A_μ , se transforma como

$$\bar{A}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} A_\alpha \quad (2.27)$$

usando esta misma transformación podemos deducir que el producto interior (escalar) de dos vectores también es un invariante de Lorentz:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu B_\mu \quad (2.28)$$

Con todo esto en cuenta podemos reescribir el operador gradiente como [35]

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (2.29)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (2.30)$$

Por tanto, para obtener el operador diferencial de segundo orden que sea invariante de Lorentz, debemos operar las ecuaciones (2.29) y (2.30)

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.31)$$

La ecuación anterior se le conoce como el operador D'Alembertiano y será nuestro primer paso para poder describir una teoría cuántica relativista.

2.2. Ecuación de Klein-Gordon

Una vez establecidos los principios que una teoría debe seguir para cumplir con las normas de la relatividad especial, ahora podemos abordar cómo se comporta una ecuación análoga relativista a la ecuación de Schrödinger para una sola partícula. El enfoque más simple consiste en introducir la expresión de energía relativista [39]

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.32)$$

para introducir las ideas de la mecánica cuántica debemos hacer la sustitución de los operadores de energía y momento:

$$E \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (2.33)$$

Una teoría cuántica se construye al asociar operadores a las variables dinámicas del sistema, es decir, cantidades físicas que se pueden medir en un laboratorio. El aspecto relativista proviene de la invariancia ante las transformaciones de Lorentz, lo cual se logra construyendo cuadvectores y una ecuación con carácter tensorial. Siguiendo esto, la ecuación de Schrödinger relativista puede ser expresada como:

$$-\hbar \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4 \right) \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.34)$$

usando unidades naturales, que corresponde a la simplificación ($\hbar = c = 1$) y ordenando los terminos obtenemos

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) = \left(-\nabla^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.35)$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = m^2 \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.36)$$

Recordando (2.31) resulta finalmente en la conocida ecuación de Klein-Gordon [35, 40]

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (2.37)$$

A pesar de ser una de las primeras ecuaciones cuánticas relativistas, en sus inicios no fue ampliamente aceptada por la comunidad científica debido a las dificultades asociadas a su interpretación. Una de sus principales dificultades es que podemos notar que la ecuación (2.37) está descrita por segundas derivadas en el espacio-tiempo, lo que no se puede interpretar directamente como una evolución temporal y presenta probabilidades de densidad negativas.

Para ver esto tomemos el complejo conjugado de la ecuación de Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi^*$, ahora multiplicamos (2.37) por $-i\phi^*$ y la conjugada por $-i\phi$, obtenemos

$$-i\phi^*(\square + m^2)\phi = 0 \quad (2.38)$$

$$-i\phi(\square + m^2)\phi^* = 0 \quad (2.39)$$

restando las ecuaciones (2.38) y (2.39) resulta

$$-i\phi^*\square\phi + i\phi\square\phi^* = 0 \quad (2.40)$$

$$-i(\phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^*) = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_\mu[-i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)] = 0 \quad (2.42)$$

si definimos la corriente de probabilidad como $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ tenemos

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \quad (2.43)$$

a partir de lo anterior podemos expresar la ecuación de continuidad como

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.44)$$

Al querer asociar estas cantidades como corrientes y densidades de probabilidad (como en el caso de la ecuación de Schrödinger) vemos que $J^0 = \rho$ contiene derivadas temporales de ϕ , como consecuencia ρ no es una cantidad definida positiva.

$$\rho = i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) \quad (2.45)$$

Por lo que no podemos asociarle una densidad de probabilidad. Además otro de sus principales problemas es que permite soluciones de energía negativa $E = \pm(\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$. Estos inconvenientes ocasionaron que la ecuación de Klein-Gordon fuera desechada por un tiempo, hasta que su interpretación como una ecuación que describe una función de onda ϕ se cambió por una ecuación que describe un campo, lo cual permite describir correctamente a las partículas con espín cero, como el bosón de Higgs.

2.3. Ecuación de Dirac

La ecuación de Klein-Gordon presentó desafíos significativos en los primeros desarrollos de la teoría cuántica relativista. Uno de los problemas más prominentes fue la presencia de soluciones con energía negativa, que contradecían la interpretación física convencional de la energía en mecánica cuántica.

Paul Dirac jugó un papel crucial al reformular la teoría para reconciliar estas dificultades. Su trabajo en el desarrollo de la teoría cuántica de campos estableció las bases para una comprensión más profunda de las partículas elementales y sus interacciones. En esta sección, exploraremos cómo Dirac obtuvo una solución covariante de la ecuación de onda para superar estos problemas inherentes a la ecuación de Klein-Gordon. Los dos principales desafíos que se deben abordar son:

1. El cuadrado de la energía-momento que permite soluciones de energía negativa ($E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$).
2. La segunda derivada en el tiempo de la ecuación de Klein-Gordon que nos deja con densidades de corriente negativas.

Para que un estado solo esté definido por sus condiciones iniciales debe tener una ecuación de primer orden en el tiempo

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (2.46)$$

y que para que también tenga la característica que sea un invariante relativista, las coordenadas espaciales deben ser de primer orden. Por tanto, una ecuación de onda que contenga derivadas de primer orden en el espacio y tiempo se puede obtener mediante un Hamiltoniano lineal propuesto por Dirac el cual actúa como operador de una función de onda $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (2.47)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ y β son operadores hermitianos que deben ser determinados. Por tanto, reemplazando lo anterior en la ecuación (2.46) y tomando en cuenta que $E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ y $\mathbf{p} = -i \nabla$, obtenemos la ecuación de onda de Dirac

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (2.48)$$

Si lo anterior es válido, entonces debe cumplir que sea covariante de Lorentz y debe ser consistente con la ecuación de energía-momento $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$

$$\begin{aligned} H^2 &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) \\ &= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_i \alpha_i \beta m p_i + \sum_j \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2 \\ &= \sum_{i=j} \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \sum_i \alpha_i p_i \beta m + \sum_j \alpha_j p_j \beta m + \beta^2 m^2 \\ &= \sum_i \alpha_i^2 p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

debido a la condición que debe satisfacer la ecuación anterior

$$H^2\psi = (\mathbf{p}^2 + m^2)\psi \quad (2.50)$$

encontramos que los coeficientes α y β deben cumplir con las relaciones

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) = \delta_{ij} \quad (2.52)$$

$$\sum_i (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2\beta + \beta\alpha_2 = 0 \\ \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

donde I es la matriz unidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Una de las convenciones más utilizadas para poder resolver lo anterior es usar las conocidas matrices de Pauli. Debido a que el operador E debe tener eigenvalores reales y ser hermitiano, entonces nuestros coeficientes α y β también, por lo que una combinación lineal de las matrices de Pauli puede ser solución:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

donde definimos las matrices de Pauli como

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Por tanto, los coeficientes para la ecuación de onda de Dirac están representados por

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

y nuestra función de onda serán vectores columna de cuatro componentes $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ generalmente

llamado espinor de Dirac. Si ponemos lo anterior en notación covariante, podemos introducir las matrices gamma (γ^μ) y nuestras soluciones para los coeficientes podemos representarlas de la siguiente manera

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Al sustituir en la ecuación inicial (2.46) obtenemos

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m \right) \psi = 0 \quad (2.59)$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi = 0 \quad (2.60)$$

La ecuación (2.60) es conocida como la ecuación de Dirac [41, 42], esta ecuación cuántica relativista describe la dinámica de las partículas con espín 1/2.

Capítulo 3

Cromodinámica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría de gauge no abeliana que proporciona una descripción fundamental de las interacciones fuertes, que son responsables de mantener unidas a las partículas subatómicas conocidas como hadrones, como los mesones y los bariones [43, 44, 45]. La QCD se basa en la premisa de que los hadrones están compuestos por quarks, que son partículas elementales con diferentes cargas de color. El color en la QCD no debe confundirse con el concepto tradicional. Aquí, el color es una propiedad de carga fundamental asociada a la interacción fuerte. En lugar de los tres colores primarios clásicos, la QCD considera tres cargas de color fundamentales: rojo, azul y verde. Estas cargas de color pueden combinarse de diversas maneras para formar estados con carga de color neutra, que es lo que observamos como partículas hadrónicas estables.

La interacción fuerte es mediada por partículas llamadas gluones, que también tienen carga de color. Los gluones son los portadores de la interacción fuerte y se mantienen en constante interacción con los quarks. A diferencia de las interacciones electromagnéticas o débiles, donde los bosones mediadores son neutros, los gluones transportan y cambian la carga de color, lo que hace que la teoría de la QCD sea altamente compleja y desafiante de estudiar.

3.1. El lagrangiano de QCD

Para describir las interacciones en la Cromodinámica Cuántica, es necesario comenzar con la densidad lagrangiana de la teoría. La densidad lagrangiana de la QCD se compone de varias partes que representan las distintas interacciones y propiedades de los quarks y los gluones.

La densidad lagrangiana de la QCD se puede escribir como [46, 47]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Donde $\psi = (u, d, s, \dots)^T$ es el campo de quarks con N_c colores y N_f sabores, $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ es la matriz formada por las masas corrientes de los quarks y γ^μ son las matrices de Dirac. La derivada covariante D_μ que representa la interacción entre los quarks y los gluones que podemos escribir como

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a \quad (3.2)$$

Incluye los campos de gauge A_μ^a con $a = 1, 2, \dots, 8$, acopla los sectores fermiónico y gluónico, g es la constante de acoplamiento fuerte y λ^a representa las matrices generadoras del grupo de color SU(3) conocidas como las matrices de Gell-Mann. Por último, el tensor de campo gluónico responsable de la autointeracción entre los campos de gauge. $G_{\mu\nu}^a$ se define como

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.3)$$

Una propiedad destacada del Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica es su invariancia de color, que preserva las simetrías del grupo SU(3). Esto implica que las ecuaciones de la QCD mantienen las simetrías de color, lo que conduce a la formación de partículas compuestas. La densidad lagrangiana de la QCD incorpora las características de la teoría de gauge no abeliana, donde los gluones, además de los quarks, también portan carga de color y se auto-interactúan, generando así una teoría altamente compleja y no lineal.

A partir de esta densidad lagrangiana, es posible derivar las ecuaciones de movimiento y explorar las interacciones entre quarks y gluones. Esto nos permite entender la formación y el comportamiento de los hadrones, así como el origen de las interacciones fuertes. Además, la QCD exhibe propiedades fundamentales cruciales, como la libertad asintótica, el confinamiento de color y la simetría quiral.

Esta última propiedad, aunque no se manifiesta exactamente en la naturaleza debido a las masas diferentes de los quarks, es fundamental para comprender las simetrías en la física de partículas. La violación de la simetría quiral conduce a la generación de masas de quarks y al surgimiento de las partículas de materia ordinaria.

3.2. Simetrías

Cuando hablamos de simetrías en una teoría, nos referimos a la invariancia (no cambio) de un objeto ante una transformación. En la física, buscamos describir los fenómenos naturales utilizando herramientas matemáticas. Sin embargo, en muchos casos, los eventos que ocurren dependen de múltiples variables que no pueden ser controladas o descritas de manera exacta. Por esta razón, la tarea de un físico es encontrar las restricciones o limitaciones que se pueden aplicar a un problema y que permitan simplificarlo de manera adecuada. Las simetrías pueden ser de dos tipos: locales y globales [48, 49].

Las simetrías locales dependen de las coordenadas espacio-temporales. Esto significa que las transformaciones asociadas a estas simetrías pueden variar en cada punto del espacio-tiempo. Por otro lado, las simetrías globales son independientes de las coordenadas y son las mismas en todos los puntos del espacio-tiempo. Las transformaciones asociadas a estas simetrías no varían de un lugar a otro. Un ejemplo común de simetría global es la simetría de rotación, donde un sistema físico se mantiene invariante bajo rotaciones en el espacio.

La formulación lagrangiana desempeña un papel fundamental en las teorías de campos, ya que permite representar las cantidades observables en términos de campos y combinaciones entre ellos. Los campos que aparecen en la lagrangiana pertenecen a una representación de un grupo de simetría interna y las transformaciones, asociadas a estas simetrías internas, no tienen impacto en las cantidades físicas. Por lo tanto, las leyes fundamentales de la física deben ser invariantes bajo estas transformaciones. Además, existen simetrías externas relacionadas con la invariancia de las cantidades físicas bajo transformaciones de traslación y de Lorentz, que son fundamentales en la física y están asociadas a los principios de la

relatividad y la homogeneidad del espacio-tiempo.

Para entender mejor cómo estas simetrías actúan, consideremos un ejemplo sencillo en el contexto de la mecánica cuántica. Sabemos que en la mecánica cuántica, la información física de un sistema está contenida en la función de estado $|\psi\rangle$, y esta información se obtiene a través de los valores esperados de las variables dinámicas [50, 51].

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (3.4)$$

Para que la ecuación anterior tenga sentido se requiere que el estado $|\psi\rangle$ esté normalizado

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (3.5)$$

En el caso de una simetría interna, consideremos un operador de simetría U que actúa sobre el estado cuántico $|\psi\rangle$. Si el sistema conserva esta simetría interna, esto significa que el estado transformado $U|\psi\rangle$ representa el mismo estado físico. En otras palabras, las cantidades físicas y los valores esperados de las variables dinámicas no se ven afectados por la transformación interna.

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (3.6)$$

$$\langle \psi | = \langle \psi' | U^\dagger \quad (3.7)$$

al multiplicar ambas ecuaciones (3.6) y (3.7) obtenemos

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle \quad (3.8)$$

Ahora para que no se altere la norma del estado con la transformación pedimos que $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$. Para que lo anterior se cumpla se requiere

$$U^\dagger U = I \quad (3.9)$$

donde U es el operador de simetría y U^\dagger es el operador adjunto de U .

La condición $U^\dagger U = I$, asegura que el producto de la transformación y su adjunto sea igual a la identidad, lo que preserva la norma del estado. Esta condición es necesaria para que la transformación sea unitaria. Los operadores unitarios son fundamentales en la mecánica cuántica, ya que preservan la probabilidad y la norma de los estados cuánticos. Cuando se aplica un operador unitario a un estado, se obtiene un nuevo estado que representa la misma información física, pero expresada en una base diferente.

También requerimos que los valores esperados de un operador que represente una cantidad física \hat{A} sean invariantes ante la transformación U .

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{A}' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger \hat{A}' U | \psi \rangle \quad (3.10)$$

De esta forma, podemos concluir que los operadores de la mecánica cuántica se transforman de acuerdo con la relación $U^\dagger \hat{A}' U = \hat{A}$. Esto implica que los operadores deben transformarse de manera unitaria bajo la acción de las simetrías, preservando así los valores esperados y las propiedades físicas.

En mecánica cuántica un sistema queda determinado por el operador Hamiltoniano (H). Definimos una transformación de simetría como aquella que deja invariante el hamiltoniano. Tenemos entonces que U es una transformación de simetría si cumple la ecuación 3.11.

$$H' = U H U^\dagger = H \quad (3.11)$$

Esta condición implica que el operador Hamiltoniano, que describe la energía total y las propiedades del sistema, no se modifica bajo la transformación de simetría [52]. En otras palabras, la simetría representa una propiedad del sistema que se mantiene inalterada durante la transformación. La invariancia del Hamiltoniano bajo una transformación de simetría tiene importantes consecuencias físicas. Significa que las leyes de conservación asociadas con esa simetría se mantienen. Por ejemplo, si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación de simetría de carga eléctrica, esto implica la conservación de la carga eléctrica en el sistema.

En muchas teorías físicas, especialmente en teorías de campos, las transformaciones unitarias continuas se pueden expresar utilizando la fórmula general:

$$U = e^{i\alpha G} \quad (3.12)$$

donde α es un parámetro continuo y G es un operador hermitiano, conocido como el generador de la transformación [53]. Esta forma general de las transformaciones unitarias continuas es ampliamente utilizada en teorías como la teoría cuántica de campos y la teoría de grupos de Lie [54].

En el caso de teorías con múltiples componentes en los estados, como teorías con campos vectoriales o fermiones, las transformaciones unitarias se pueden expresar de la siguiente manera:

$$U = e^{i \sum_l \epsilon_l T_l} \quad (3.13)$$

donde ϵ_l son parámetros continuos y T_l son los operadores asociados a los generadores de la transformación. Estos generadores pueden ser matrices, tensores o cualquier otra representación adecuada para los componentes del sistema.

En una transformación infinitesimal

$$U = 1 + i\alpha G \quad (3.14)$$

es una expansión de la función exponencial que vimos anteriormente. Al considerar esto en la ecuación (3.11) obtenemos

$$H' = (1 + i\alpha G)H(1 - i\alpha G) = H$$

$$H + i\alpha GH - i\alpha HG = H'$$

Luego, para que el Hamiltoniano H' sea igual al Hamiltoniano original H , se debe cumplir:

$$i\alpha [G, H] = 0 \quad (3.15)$$

donde $[G, H]$ denota el conmutador entre los operadores G y H . Esta relación implica que el generador G y el Hamiltoniano H deben conmutar, es decir, su conmutador es nulo. Esto significa que G y H tienen un conjunto completo de estados propios comunes, lo que implica que comparten un conjunto de funciones de onda propias comunes. Lo que significa que la cantidad conservada es el generador G .

3.2.1. Teorema de Noether

El teorema de Noether establece que para cada simetría continua de la acción, existe una cantidad conservada asociada [55, 56].

En el marco de la mecánica clásica, la acción de un sistema se describe mediante la integral de la lagrangiana. La acción \mathcal{S} se define como la integral de la lagrangiana \mathcal{L} a lo largo de un intervalo de tiempo desde t_1 hasta t_2 [57]

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (3.16)$$

Donde $q(t)$ representa las coordenadas generalizadas del sistema, $\dot{q}(t)$ son las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, y t es el tiempo. La acción es un principio fundamental en la mecánica clásica, y el principio de mínima acción establece que la trayectoria que sigue un sistema entre dos puntos en el espacio-tiempo es aquella que minimiza la acción. Esto se conoce como el principio de acción mínima o principio de Hamilton.

Las transformaciones de simetría están relacionadas con la invariancia de la acción. Si una determinada transformación deja invariante la acción, se dice que dicha transformación es una simetría del sistema. Si consideramos una transformación infinitesimal de coordenadas $q \rightarrow q' = q + \delta q$, donde δq es una cantidad infinitesimal, y la acción se transforma de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' = \mathcal{S} + \delta\mathcal{S} \quad (3.17)$$

Si la transformación es una simetría del sistema, entonces se cumple que $\delta\mathcal{S} = 0$, es decir, la variación de la acción es nula bajo la transformación. Esto implica que la acción es invariante ante dicha transformación.

La invariancia de la acción bajo una transformación de simetría implica importantes consecuencias físicas. En primer lugar, se puede utilizar el principio de mínima acción para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema. Si la acción es invariante bajo una transformación, las ecuaciones de movimiento derivadas a partir de la acción también serán invariantes bajo esa transformación.

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (3.18)$$

Al requerir que la variación de la acción sea nula para cualquier δq , se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son las ecuaciones de movimiento de un sistema en el marco de la mecánica clásica.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (3.19)$$

Estas ecuaciones de movimiento describen cómo evoluciona el sistema en el tiempo. A través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden determinar las trayectorias seguidas por las coordenadas generalizadas del sistema y son válidas para cualquier sistema descrito por una lagrangiana \mathcal{L} y son independientes de las transformaciones de simetría del sistema. Sin embargo, si la lagrangiana posee una cierta simetría, es posible que se puedan obtener leyes de conservación asociadas a esa simetría mediante el teorema de Noether.

Cuando tratamos con un medio continuo, en lugar de un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad, la descripción se realiza a través de campos. En este caso, el sistema se describe por un campo $\phi(t, \mathbf{x})$, donde t es el tiempo y \mathbf{x} es la posición en el espacio tridimensional.

La dinámica del campo se describe mediante una lagrangiana, que es una densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, donde ∂_μ representa las derivadas parciales con respecto a las coordenadas espacio-temporales. La densidad lagrangiana \mathcal{L} puede involucrar términos cinéticos y de interacción, y puede ser una función arbitraria del campo ϕ y sus derivadas. La acción correspondiente al campo se define como la integral de la densidad lagrangiana en el espacio-tiempo:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (3.20)$$

Donde $d^4x = dt, d^3x$ representa la medida de integración en el espacio-tiempo. Similar al caso de la mecánica clásica, la variación de la acción con respecto al campo ϕ y sus derivadas da lugar a las ecuaciones de movimiento del campo.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Una transformación de simetría deja invariante la lagrangiana \mathcal{L} . Por tanto, sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ y consideremos una transformación del campo $\mathcal{L}'(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x)$. Donde x (en esta notación simplificada) representa un punto en el espacio-tiempo.

$$\delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \quad (3.22)$$

en donde $\delta \mathcal{L} = 0$, para ser una transformación de simetría

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi + \delta \phi, \partial_\mu \phi + \delta \partial_\mu \phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \quad (3.23)$$

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \quad (3.24)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) = 0 \quad (3.25)$$

puesto que ϕ satisface las ecuaciones de movimiento tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (3.26)$$

sustituimos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$ en la ecuación anterior y obtenemos

$$\left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) = 0 \quad (3.27)$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = 0 \quad (3.28)$$

Definimos $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi$ definida como la corriente de Noether, por tanto obtenemos la ecuación de continuidad o de conservación [58, 59]

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (3.29)$$

Al desaparecer los campos haciendo las coordenadas espaciales tender a infinito, se obtiene una ley de conservación global para la carga mediante la integral de J^0

$$\partial_0 J^0 + \partial_l J^l = 0 \quad (3.30)$$

$$\int_V \partial_0 J^0 d^3 \mathbf{x} + \int_V \partial_l J^l d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (3.31)$$

Usando el teorema de la divergencia (el cual establece una relación entre el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada y la divergencia del campo en el interior de esa superficie.) $\int_V \partial_l J^l d^3 \mathbf{x} = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = 0$, y considerando una superficie lo suficientemente grande podemos volver esta integral cero, por lo que nos resulta

$$\partial_0 \int J^0 d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (3.32)$$

lo que resulta en una cantidad que es constante en el tiempo

$$Q(t) = \int J^0 d^3 \mathbf{x} = cte \quad (3.33)$$

A esta ecuación se le conoce como la carga de Noether y lo que nos dice es que la carga se conserva

$$\frac{d}{dt} Q(t) = 0 \quad (3.34)$$

Esta carga de Noether es una cantidad física conservada asociada con la simetría del sistema. La presencia de una carga de Noether implica que existe una cantidad que se conserva a lo largo del tiempo, lo que refleja la invariancia del sistema bajo la transformación de simetría

En el caso particular de la lagrangiana de Dirac que describe la dinámica de fermiones en donde consi-

deramos a estas partículas sin masa obtenemos

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (3.35)$$

Donde ψ es el campo fermiónico, $\bar{\psi}$ es su conjugado de Dirac, γ^μ son las matrices de Dirac y ∂_μ es la derivada covariante en el espacio-tiempo. En esta notación, las matrices de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación $\gamma^\mu, \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}$, donde $g^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo.

Para obtener la ecuación de conservación asociada con la invariancia de la lagrangiana de Dirac bajo transformaciones locales de fase, consideremos una transformación local infinitesimal del campo fermiónico:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\psi(x) \quad (3.36)$$

donde $\alpha(x)$ es un parámetro infinitesimal dependiente de las coordenadas del espacio-tiempo. La transformación de $\bar{\psi}$ bajo esta transformación es:

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) + i\alpha(x)\bar{\psi}(x) \quad (3.37)$$

La variación de la lagrangiana bajo esta transformación es

$$\delta\mathcal{L} = i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (3.38)$$

Simplificando, tenemos

$$\delta\mathcal{L} = i\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (3.39)$$

Para que la transformación sea una simetría del sistema, necesitamos que $\delta\mathcal{L} = 0$. Por lo tanto, la condición para la invariancia de la lagrangiana bajo la transformación local de fase es:

$$i\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0 \quad (3.40)$$

Esta condición debe ser válida para cualquier elección del parámetro $\alpha(x)$. Para satisfacer esto, el término que multiplica a $\alpha(x)$ debe ser nulo para cada $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ en la lagrangiana. Esto nos lleva a la ecuación de conservación:

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (3.41)$$

Lo que se conoce como corriente de Noether vectorial

$$J_\nu^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (3.42)$$

Esta ecuación de conservación está asociada con la invariancia de la lagrangiana de Dirac sin masa bajo transformaciones locales de fase del campo fermiónico. Si ahora consideramos la transformación $\bar{\psi}' = (1 + i\alpha(x)\gamma_5)\bar{\psi}$, entonces obtenemos la corriente axial

$$J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad (3.43)$$

3.2.2. Simetría quiral

La simetría quiral es una propiedad que está relacionada con la invariancia de la ecuación de Dirac sin masa bajo transformaciones locales de fase independientes para los campos fermiónicos izquierdos y derechos. En este contexto, los campos fermiónicos se dividen en componentes izquierdas y derechas, y las transformaciones de fase quiral actúan independientemente sobre estas componentes.

Para demostrar la simetría quiral consideremos la lagrangiana de Dirac para fermiones sin masa

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (3.44)$$

Ahora, definimos los proyectores quirales izquierdo y derecho como [61, 62]

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad (3.45)$$

donde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ es la matriz de quiralidad. Estos proyectores separan las componentes izquierda y derecha de los campos fermiónicos. La acción de estos proyectores sobre el campo fermiónico se define [60]

$$\psi_L = P_L\psi, \quad \psi_R = P_R\psi \quad (3.46)$$

Podemos expresar $\psi = \psi_L + \psi_R$ y $\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R$, reemplazando en la lagrangiana obtenemos

$$\mathcal{L} = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_L + \psi_R) \quad (3.47)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (3.48)$$

Se puede demostrar que $\bar{\psi}_L = \bar{\psi}P_R$ y $\bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_L$ y con estas consideraciones obtenemos que los terminos cruzados son cero

$$\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \quad (3.49)$$

Por tanto, tenemos que la lagrangiana de Dirac para fermiones sin masa separada por estados de helicidad es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (3.50)$$

Esto puede aplicarse de manera análoga a la lagrangiana de QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (3.51)$$

$$\mathcal{L}_{QCD} = (\bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (3.52)$$

en donde el primer término de la lagrangiana correspondiente de la descripción de los quarks es un invariante ante las transformaciones globales del grupo $U(2)_R \times U(2)_L = SU(2)_R \times U(1)_R \times SU(2)_L \times U(1)_L$. La simetría quiral implica que existen dos tipos de fermiones derechos e izquierdos (ψ_R y ψ_L). Y en una teoría de partículas con masas diferentes de cero, la quiralidad o simetría quiral, es aproximada debido a la masa diferente de cero de los quarks, y la asociamos con la paridad o la helicidad.

3.2.3. Simetría de isospín

Cuando nos adentramos en el mundo subatómico se observa que ante la interacción nuclear fuerte, los protones y neutrones son indistinguibles a esto se le conoce como simetría de isospín [63]. Esto nos recuerda que los electrones son indistinguibles ante la interacción electromagnética, pero se distinguen cuando interactúan con un campo magnético. En este último caso, los electrones se separan en dos tipos: con espín hacia arriba $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y con espín hacia abajo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ambos estados pueden ser escritos mediante un doblete

$$\chi = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

De manera similar, los protones y neutrones también pueden ser considerados como dos estados diferentes del nucleón $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$. Estos estados son indistinguibles ante la fuerza fuerte pero son distinguibles ante la interacción electromagnética. Por esta razón, representamos a los nucleones como estados dobletes $\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$, llamados estados de isospín.

La lagrangiana para estos nucleones, la escribimos como la suma de dos lagrangianas de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_p (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_p + \bar{\psi}_n (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_n - m_p \bar{\psi} \psi - m_n \bar{\psi} \psi \quad (3.54)$$

Si asumimos simetría de isospín entonces podemos hacer $m_p = m_n = m$, introduciendo el producto directo de matrices como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) \times I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu \partial_\mu \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

podemos escribir la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_p & \bar{\psi}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\psi}_p & \bar{\psi}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

introducimos la notación simplificada $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ y $\hat{m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$. Con esto podemos regresar a la forma que conocemos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\psi \quad (3.57)$$

Lo que nos interesa es las simetrías de esta lagrangiana y probaremos que es invariante ante rotaciones en el espacio de isospín dadas por

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left(\frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\psi \approx \left(1 + \frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\psi \quad (3.58)$$

Los generadores de esta rotación son los operadores de espín $\bar{s} = \frac{1}{2}\bar{\tau}$, donde $\bar{\tau}$ son las matrices de Pauli.

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger}\gamma_0 = \left(\exp\left(\frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\psi\right)^{\dagger}\gamma_0 = \psi^{\dagger}\exp\left(-\frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\gamma_0 \quad (3.59)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\exp\left(-\frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right) \approx \bar{\psi}\left(1 - \frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right) \quad (3.60)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.58) y (3.60) en la lagrangiana tenemos

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\psi' = \bar{\psi}\left[\left(1 - \frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\left(1 + \frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\right]\psi \quad (3.61)$$

Al desarrollar los terminos y considerar solo las componentes lineales obtenemos

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\psi - \frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\psi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\frac{1}{2}i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\psi \quad (3.62)$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\psi = \mathcal{L} \quad (3.63)$$

Por lo tanto, la lagrangiana es invariante bajo las transformaciones de isospín infinitesimales. Para esta transformación la corriente conservada es

$$\vec{J}_\mu = \bar{\psi}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_\mu\psi \quad (3.64)$$

A esta corriente se le llama corriente de isospín.

3.2.4. Rompimiento espontáneo de simetría

En las últimas décadas, la teoría cuántica de campos y el modelo estándar han proporcionado un marco sólido para describir la diversidad de partículas y fuerzas que constituyen la materia y la energía del universo. Sin embargo, a medida que la ciencia avanza y se profundiza más en las propiedades fundamentales de estas partículas, surgen preguntas que sugieren la existencia de mecanismos aún más sutiles y complejos que rigen sus interacciones. Uno de estos fenómenos es el rompimiento espontáneo de simetría.

La simetría, como hemos visto anteriormente, se ha revelado como una guía invaluable en la comprensión de los procesos físicos. La simetría quiral y la simetría de isospin, proporcionan una base sólida para entender cómo las partículas y sus interacciones exhiben ciertas propiedades predecibles. Sin embargo,

a medida que profundizamos en nuestro análisis de las partículas y campos cuánticos, nos encontramos con situaciones en las que las soluciones más estables de un sistema no coinciden con los valores iniciales de simetría. En otras palabras, las ecuaciones que describen la dinámica de las partículas sugieren una simetría que no se manifiesta en el estado de menor energía del sistema [64, 65]. Este fenómeno aparentemente paradójico, conocido como *ruptura espontánea de simetría*, ha demostrado ser esencial para explicar una serie de observaciones experimentales y para dotar de masa a ciertas partículas que de otra manera serían consideradas como completamente masivas.

Para adentrarnos en la comprensión del concepto de rompimiento espontáneo de simetría, consideremos un problema particularmente ilustrativo: el oscilador armónico. En este contexto, la lagrangiana que gobierna el sistema se presenta como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}mw^2q^2 - \frac{\lambda}{4}q^4 \quad (3.65)$$

El término de energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ y el término del potencial $V = \frac{1}{2}mw^2q^2 + \frac{\lambda}{4}q^4$. Observando la estructura de esta lagrangiana, podemos apreciar una simetría notable: la invariancia ante la transformación $q \rightarrow -q$. Esta característica sugiere una simetría ante la inversión de la coordenada, que en el caso unidimensional del oscilador armónico se traduce en la invariancia de paridad.

La paridad, en un contexto tridimensional, es una transformación espacial que invierte las coordenadas cartesianas (x, y, z) a $(-x, -y, -z)$. En el caso unidimensional de nuestro oscilador armónico, esta transformación se simplifica a $q \rightarrow -q$. Dado que la lagrangiana mantiene su forma bajo esta transformación, podemos afirmar que el sistema conserva la paridad. En otras palabras, si el sistema comienza con una configuración inicial que satisface ciertas propiedades de paridad, su evolución en el tiempo no debe perturbar esta característica.

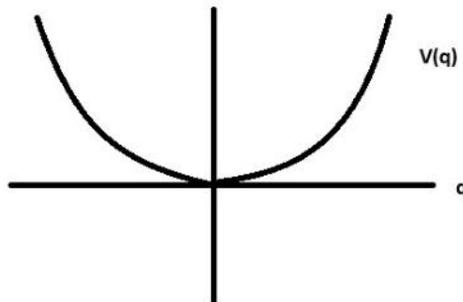


Figura 3.1: Gráfica $V(q)$

Para visualizar este concepto, podemos examinar el potencial asociado al oscilador armónico, representado gráficamente en la Figura 3.1. Esta representación gráfica nos permite apreciar cómo las elecciones de λ y k dan forma al potencial y delinear diferentes escenarios. Cuando $\lambda > 0$ y $k > 0$, el potencial exhibe una simetría en torno al eje vertical, reflejando la invariancia de paridad. No obstante, esta simetría puede verse alterada al considerar un escenario en el que $\lambda > 0$, pero $k < 0$. En este caso, el potencial adopta una forma distinta, dada por la expresión.

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + \frac{\lambda}{4}q^4 \quad (3.66)$$

Los valores críticos del potencial, obtenidos al derivar la ecuación $V(q)$ respecto a q e igualar a cero, dan lugar a soluciones reales cuando $k < 0$.

$$kq + \lambda q^3 = 0 \rightarrow q(k + \lambda q^2) = 0$$

cuyas soluciones son

$$q = 0; \quad q = \pm \sqrt{-\frac{k}{\lambda}} \quad (3.67)$$

Sin embargo, para valores de $k > 0$ tenemos dos estados $\nu = \sqrt{-\frac{k}{\lambda}}$ como se muestra en la Figura 3.2

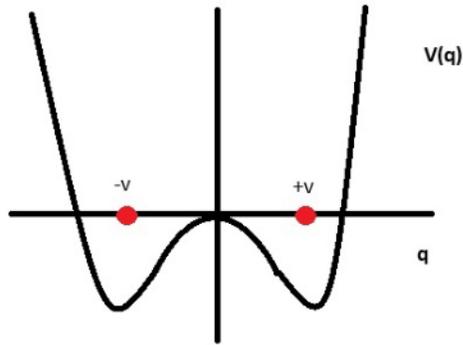


Figura 3.2: Gráfica $V(q)$

Al estado de mínima energía (estado base) en teoría cuántica de campos lo llamamos "vacío". Usando esta terminología decimos que el vacío es degenerado, es decir, hay dos estados distintos $+\nu$ y $-\nu$ con el mismo valor de energía. El vacío sigue siendo simétrico ya que ambos son igualmente probables. En TCC, las partículas son excitaciones del vacío y se generan mediante la expansión en serie alrededor del vacío. En el momento que seleccionamos uno de los dos mínimos para realizar la expansión decimos que se rompe espontáneamente la simetría. Si por ejemplo, seleccionamos $q = +\nu$ para realizar la expansión, encontramos que la lagrangiana \mathcal{L} sigue siendo simétrica ante $q \rightarrow -q$, pero el vacío no lo es.

3.3. Transiciones de fase

Al hablar sobre las propiedades termodinámicas de un sistema, podemos mencionar las fases por las cuales puede pasar un sistema clásico. En términos generales, una fase puede ser definida como un estado de la materia en el cual las propiedades físicas macroscópicas de la sustancia son uniformes a una escala de tamaño considerable. Estas fases están determinadas en su mayoría por funciones que dependen de factores como la temperatura y la presión. Un diagrama de fases es una herramienta fundamental para visualizar y comprender cómo las fases de una sustancia cambian en relación con la temperatura y la presión. Estos diagramas son representaciones gráficas que trazan las distintas fases de una sustancia en función de las condiciones termodinámicas. En un diagrama de fases típico, las coordenadas horizontales suelen representar la temperatura, mientras que las coordenadas verticales representan la presión. Sin embargo, en lugar de temperatura y presión, los diagramas de fases en el estudio de la QCD a menudo

utilizan coordenadas como la densidad de bariónica (número de bariones por unidad de volumen) y la temperatura [66]. Estas coordenadas son más relevantes para describir el comportamiento de la materia en condiciones extremas.

Las líneas que dividen las regiones en un diagrama de fases indican las condiciones en las cuales dos fases diferentes pueden coexistir en equilibrio. Por ejemplo, en el diagrama de fases de agua, la línea que separa la fase líquida y la fase sólida representa las condiciones de temperatura y presión en las cuales el hielo y el agua líquida pueden coexistir en equilibrio. Además de las líneas de separación de fases, los puntos donde convergen las líneas, llamados puntos críticos, son de particular importancia. En el punto crítico, las propiedades entre las fases líquida y gaseosa se vuelven indistinguibles, y la distinción entre las dos fases desaparece gradualmente. A este tipo de cambios se le conoce como una transición de fase.

Una transición de fase puede definirse como un fenómeno que implica cambios notables en las propiedades físicas de una sustancia a medida que cruza las líneas de separación de fases o alcanza puntos críticos en un diagrama de fases. Algunos de estos cambios bruscos, en las propiedades termodinámicas se distinguen por la aparición de singularidades en las funciones que representan las cantidades físicas. Para lograr una descripción precisa de la evolución de una transición de fase, se emplea un parámetro de orden que mide el nivel de ordenamiento de los elementos microscópicos que componen la fase macroscópica.

La primera clasificación de las transiciones de fase fue propuesta por P. Ehrenfest en 1933 cuya base estaba descrita mediante el potencial termodinámico [67, 68, 69]. Según Ehrenfest, las transiciones de fase se dividen en dos categorías: de primer orden y de segundo orden. Una transición de primer orden, también conocida como transición de fase discontinua, se caracteriza por cambios abruptos en las propiedades termodinámicas y la aparición de discontinuidades en derivadas de las variables de estado en función de las condiciones termodinámicas. En contraste, una transición de segundo orden, o transición de fase continua, se produce sin discontinuidades en las derivadas de las variables termodinámicas, y está marcada por la divergencia de ciertas cantidades físicas cerca del punto crítico. Si no existen discontinuidades en alguna de las derivadas se define una zona difusa llamada crossover que se interpreta como la coexistencia de diferentes fases (ver Figura 3.3). Siguiendo el esquema de Ehrenfest, se hace referencia a transiciones de fase de orden superior al segundo. En estos casos, el orden de la transición sería equivalente al orden de la derivada en la que se produce la discontinuidad.

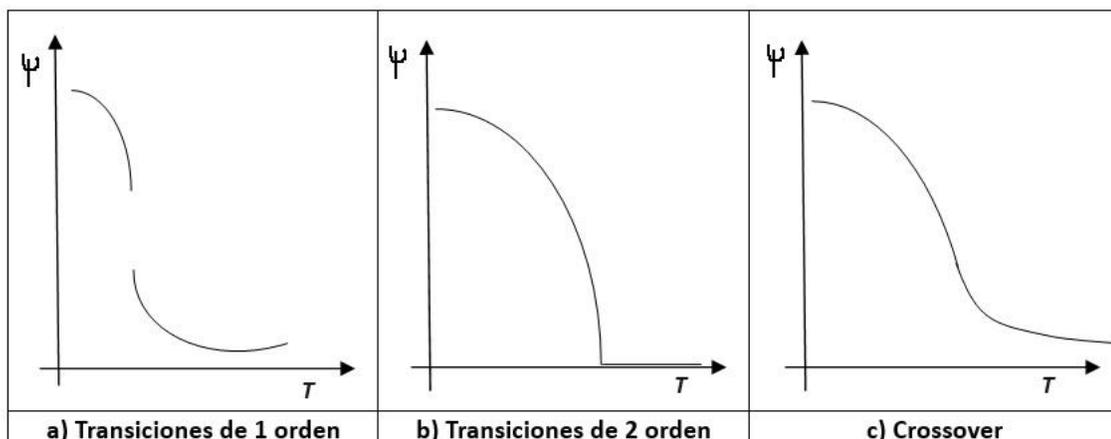


Figura 3.3: Clasificación de las transiciones de fase

Las transiciones de fase de acuerdo con Ehrenfest son una aproximación válida en muchas situaciones, pero no siempre son suficientes para describir todas las transiciones de fase de manera completa. Esta

clasificación puede ser insuficiente para describir ciertas transiciones de fase más complejas y sutiles que involucran cambios en propiedades que no se capturan únicamente mediante derivadas de órdenes superiores. Por ejemplo, las transiciones de fase en sistemas críticos cerca del punto crítico a menudo no pueden ser completamente caracterizadas solo por las discontinuidades en las derivadas de las propiedades termodinámicas. En lugar de eso, estas transiciones críticas pueden exhibir comportamientos universales que se manifiestan a través de divergencias en ciertas cantidades físicas.

Capítulo 4

Modelos efectivos para QCD

Cuando queremos proporcionar información acerca del diagrama de fases de la QCD, podríamos pensar que LQCD nos brindaría todas las respuestas, puesto que es la teoría fundamental que parte de principios básicos que observamos en la naturaleza. Sin embargo, LQCD tiene una gran desventaja, y es que debido a la complejidad de la teoría, la limitante radica en que no podemos utilizar una densidad de quarks diferente de cero ($\mu \neq 0$) a menos que se realicen aproximaciones numéricas [12, 25]. Este potencial químico está estrechamente relacionado con la cantidad de quarks y antiquarks que tenemos en nuestro sistema. De manera que, para poder resolver este problema, se proponen modelos que incorporen las simetrías más importantes y la capacidad para resolver la lagrangiana con temperatura y potencial químico finitos.

Estos modelos se denominan 'efectivos' y dependen de varios parámetros que deben ajustarse para empatar con lo que ya se conoce de la teoría fundamental (LQCD), como el comportamiento del diagrama de fases a potencial químico cero ($\mu = 0$) y lo que se ha medido experimentalmente, como la masa del pión. Dentro del marco de los modelos efectivos hay muchas propuestas, por ejemplo:

Modelo de sigma: Se basa en una teoría de campos no lineales que describen la dinámica de los mesones ligeros (piones) y nucleones en la QCD, cuya idea se basa en que los mesones pueden ser descritos mediante fluctuaciones de los campos quark-antiquark y cuando estas fluctuaciones se acoplan entre sí, dan lugar a la interacción fuerte [70, 71].

Modelo de hadrones resonantes: Este modelo se basa en una descripción de la materia en términos de hadrones y partículas resonantes que emergen de la interacción entre los quarks y los gluones en la QCD [72].

Modelo de bolsa: Describe los quarks confinados en un volumen finito de espacio, como si estuvieran dentro de una bolsa de energía constante que generalmente se asocia con el campo de gluones que rodea a los quarks [73].

4.1. Modelo de Nambu-Jona-Lasinio

Aunque cada uno de estas teorías efectivas tiene sus ventajas y desventajas en la forma de interpretar la interacción fuerte, para este trabajo nos concentraremos en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) y su extensión con el loop de Polyakov. El modelo NJL fue originalmente introducido en 1961 por Yoichiro Nambu

y Giovanni Jona-Lasinio en su trabajo "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity"[14, 74], para describir un sistema de nucleones fuertemente interactuantes en el cual los mismos adquieren su masa mediante el mecanismo de ruptura espontánea de simetría. Las ventajas de utilizar el modelo NJL es que incorpora las simetrías globales más importantes (como la simetría de sabor), así como un mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría y la posibilidad de estudiar el comportamiento del condensado de quarks a temperatura y potencial químico finitos.

A pesar de todos estos beneficios también tenemos varios inconvenientes o desventajas. Una de las más notables es que esta teoría no incluye la propiedad del confinamiento, aunque esto podemos arreglarlos incluyendo un nuevo parámetro conocido como el loop de Polyakov (como veremos en el siguiente apartado). Otra desventaja muy importante es que al tratarse de un modelo en el que los quarks interactúan de manera puntual esto vuelve a la teoría no renormalizable, lo que se traduce matemáticamente como integrales divergentes dentro del modelo, por tanto debemos hacer uso de métodos de regularización para limitar las integrales.

4.2. Modelo NJL en el vacío

Para estudiar cualquier problema en la teoría cuántica de campos es necesario realizar una serie de pasos para conocer el comportamiento de alguna cantidad termodinámica. Para obtener la lagrangiana como en muchos problemas de mecánica cuántica una lagrangiana en QCD puede expresarse como una lagrangiana base o fundamental más una lagrangiana que incluye la parte de la interacción de las partículas con su medio

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{interaccion} \quad (4.1)$$

Para estudiar las interacciones de los quarks usaremos la función de partición Z . Para esto utilizaremos la notación dada por [75], en donde definimos la función de partición como

$$Z = \int [D\bar{\psi}] [D\psi] e^{i \int d^4 \mathbf{x} \mathcal{L}} \quad (4.2)$$

Por tanto, sustituyendo la ecuación anterior obtenemos

$$Z = \int [D\bar{\psi}] [D\psi] \left[e^{i \int d^4 \mathbf{x} \mathcal{L}_0} \right] \left[e^{i \int d^4 \mathbf{x} \mathcal{L}_{interaccion}} \right] \quad (4.3)$$

En el caso de partículas fermionicas tenemos que la lagrangiana \mathcal{L}_0 esta definida por la ecuación de Dirac:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_0) \psi \quad (4.4)$$

Donde $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_u, m_d)$ es la masa corriente de los quarks causante de romper explicitamente la simetría. Con esto, la función de partición de los fermiones la podemos expresar como:

$$Z = \int [D\bar{\psi}] [D\psi] \left[e^{i \int (\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi) d^4 \mathbf{x}} \right] \left[e^{i \int d^4 \mathbf{x} \mathcal{L}_{interaccion}} \right] \quad (4.5)$$

Lo siguiente será utilizar el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) para estudiar el comportamiento de dos quarks ligeros a temperatura y potencial químico finitos. El modelo NJL lo introduciremos mediante una lagrangiana efectiva de fermiones relativistas cuya interacción entre los fermiones se realiza de manera local, es decir, los fermiones interactúan entre sí en el mismo punto de espacio y tiempo. Para este trabajo únicamente se utilizarán dos sabores de quarks (u, d) y se asume simetría de isospín, por lo que consideramos que los quarks tienen la misma masa $m_u = m_d = m_0$.

La lagrangiana de interacción en el modelo NJL con $N_f = 2$ y $N_c = 3$ está descrita por [14, 15]:

$$\mathcal{L}_{interaccion} = \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^a\psi)^2] \quad (4.6)$$

Donde G es la constante de acoplamiento efectivo, $\boldsymbol{\tau}^a$ son las matrices de Pauli y γ_5 es una matriz de Dirac. La integración sobre los campos de los quarks se realiza a través de la bosonización de la Lagrangiana, donde podemos expresarla en terminos de campos de mesones auxiliares $\sigma = G\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ y $\vec{\pi} = \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi$. De esta manera no solo podemos resolver la integral si no que da como resultado una teoría efectiva de mesones interactuantes, de acuerdo con la transformación de Hubbard-Stratonovich obtenemos [76]:

$$\begin{aligned} & \exp\left\{i \int \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^a\psi)^2] d^4\mathbf{x}\right\} \rightarrow \\ & \int D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp\left\{i \int \left[-\frac{1}{2G}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi\right] d^4\mathbf{x}\right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sustituyendo lo anterior en nuestra función de partición tenemos

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp\left\{i \int d^4\mathbf{x} \left[\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - \hat{m}_0 + \sigma(x) + i\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x))\psi(x) - \frac{(\sigma(x))^2 + (\boldsymbol{\pi}(x))^2}{2G}\right]\right\} \quad (4.8)$$

Resolver lo anterior es muy complicado, por lo cual se trabaja en lo que se conoce como aproximación de campo medio (*MFA: Mean Field Approximation*). La cual consiste en suponer que hay un campo de fondo $\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ sobre el cual realizaremos una expansión en series de Taylor alrededor del vacío (Figura 4.1). Las partículas interactúan con este campo promedio e introducimos que el vacío es el estado de menor energía.

En terminos simples, debido a la gran complejidad de analizar la interacción de cada quark individualmente, lo más sencillo es suponer que el conjunto de todos los quarks generan un campo de fondo (campo promedio) con el cual los quarks pueden interactuar. Esta consideración nos permite manipular la función de partición hacia una versión más simplificada, por tanto, realizando MFA [77] alrededor del vacío obtenemos la aproximación dada en la ecuación (4.1)

$$\langle(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2\rangle \approx -\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle^2 + 2\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle\bar{\psi}\Gamma\psi \quad (4.9)$$

Para nuestro caso particular $\Gamma = 1$.

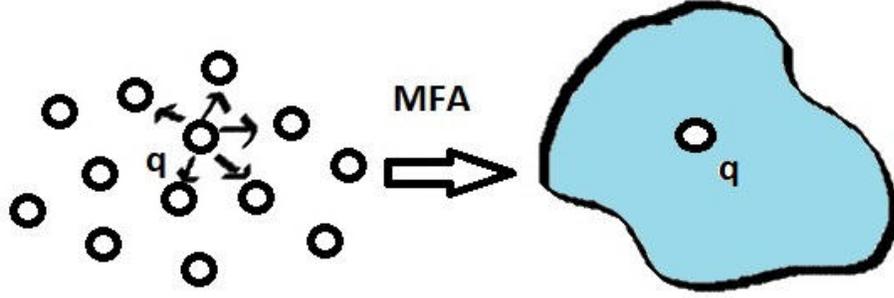


Figura 4.1: Representación de la aproximación de campo medio

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 = 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \quad (4.10)$$

Por tanto, la lagrangiana del modelo NJL puede simplificarse

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_0 + G\langle \bar{\psi}\psi \rangle)\psi - \frac{G}{2}\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \quad (4.11)$$

Como vemos se ha creado un nuevo término que surge de la interacción de los quarks con el campo de fondo (condensado). En esta aproximación los campos se reemplazan por sus correspondientes valores de expectación. El campo σ tiene un valor esperado diferente de cero en el vacío (esto se debe al rompimiento espontáneo de la simetría quiral), para obtener el campo escalar físico se realiza un corrimiento del campo $\sigma' = \sigma + \sigma_0$, de forma que podemos definir el inverso del propagador de los quarks como

$$S^{-1}(x, y) = \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - M + \sigma'(x) + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right] \delta^{(4)}(x - y)$$

Y nuestra nueva función de partición es

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp\left\{ i \int d^4\mathbf{x} \left[\bar{\psi}(x)S^{-1}\psi(x) - \frac{(\sigma(x))^2 + (\boldsymbol{\pi}(x))^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.12)$$

donde el valor del pseudoescalar $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$ es cero para sistemas con simetrías de isospín [78].

Debido a que por definición la integral de un funcional representa la amplitud cuántica de la transición de un sistema de quarks [79]. Podemos expresar la integral sobre los campos como

$$\int D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{ i \int d^4\mathbf{x} d^4\mathbf{y} \bar{\psi}(x)S^{-1}\psi(y) \right\} = \det[S^{-1}] \quad (4.13)$$

Este determinante podemos resolverlo mediante una identidad dada por: $\det[A] = \exp\{Tr(\ln A)\}$ lo que significa que podemos expresar este determinante como la traza del logaritmo del propagador.

$$\det[S^{-1}] = \exp\{Tr(\ln [S^{-1}])\} = \exp\left\{ i \int -iTr(\ln S^{-1})_{x,x} d^4\mathbf{x} \right\} \quad (4.14)$$

La traza se soluciona tomando los índices de sabor y color, de esta manera obtenemos los factores

$N_f = 2$ y $N_c = 3$ que necesitamos para dos quarks y tres colores. Por tanto, nuestra función de partición toma la forma

$$Z = \int D\sigma' \exp\left\{i \int d^4x \left[-iN_c N_f \text{Tr}_{Dirac} (S^{-1}(x, y))_{x=y} - \frac{(\sigma'(x))^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.15)$$

Aquí Tr_{Dirac} es la traza sobre los índices de Dirac y la masa constitutiva creada por el medio se obtiene mediante la condición

$$N_c N_f \text{Tr}_{Dirac} S - \frac{\sigma'(x)}{G} \Big|_{\sigma'(x)=0} = 0 \quad (4.16)$$

S es el propagador sin índices de sabor y color. De esta manera podemos ver que la ecuación de gap en el modelo NJL esta dada por

$$M - m_0 = -G \langle \bar{\psi} \psi \rangle \rightarrow M = m_0 - \sigma \quad (4.17)$$

Donde al término $\sigma = G \langle \bar{\psi} \psi \rangle$ se le conoce como masa dinámicamente generada y está masa la podemos asociar con la autoenergía de los quarks debido a la interacción con el condensado en la aproximación MRE, esto se debe a que el modelo NJL no incluye la propiedad de confinamiento [80]. Sustituyendo el propagador de Dirac obtenemos

$$S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\gamma^\mu p_\mu - M} \quad (4.18)$$

finalmente obtenemos nuestra ecuación de gap en el vacío

$$\frac{M - m_0}{G} = 4iN_c N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2} \quad (4.19)$$

4.3. Modelo NJL a temperatura y densidad finita

Nuestro resultado anterior resulta muy interesante para conocer el comportamiento de los quarks y el condensado cuando no hay temperatura ni potencial químico. Para poder construir el diagrama de fases debemos saber como se comportan nuestro modelo al variar estos parámetros. Sabemos que cuando tenemos una temperatura y densidad bariónica baja, la simetría quiral está rota, mientras que al elevar dichos valores se espera que la simetría quiral se restaure.

A potencial químico finito μ la función de partición esta representada por [81]

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left[i \int d^4x (H - \mu N) \right] \quad (4.20)$$

Donde H es el hamiltoniano y $N = \psi^\dagger \psi = \psi \bar{\psi}^0 \psi$ corresponde al número de quarks (recordemos que el potencial químico esta fuertemente ligado a la cantidad de quarks y antiquarks que tenemos en nuestro sistema). Realizando estas consideraciones y sustituyendo la lagrangiana que obtuvimos considerando MFA obtenemos

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma \exp\left\{i \int d^4\mathbf{x} \left[\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m_0 + \sigma)\psi - \frac{\sigma^2}{2G} - \bar{\psi}\mu\gamma^0\psi \right] \right\} \quad (4.21)$$

Recordemos que la derivada covariante la podemos separar en las derivadas espaciales y temporales como $i\partial_\mu = i\partial_t - i\nabla$, para poder aplicar el operador de momento $p_0, \mathbf{p} = i\partial_t, -i\nabla$.

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma \exp\left\{i \int dt \int d^3\mathbf{x} \left[\bar{\psi}(\gamma_0(p_0 - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma))\psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.22)$$

Una herramienta matemática muy utilizada para simplificar el cálculo de ciertas cantidades físicas en sistemas cuánticos y termodinámicos se conoce como formalismo del tiempo imaginario. En general, la presencia de temperaturas y densidades finitas hace que las interacciones entre las partículas sea muy compleja y difícil de poder describir correctamente.

La idea de utilizar este formalismo es llevar nuestro problema a un espacio euclidiano en donde el tiempo real es reemplazado por un 'tiempo imaginario' que se trata matematicamente como una variable espacial. Realizamos una rotación de Wick en donde consideramos $t \rightarrow \tau = it, t = -i\tau$ y en el marco teórico de Matsubara introducimos la temperatura mediante la sustitución de la cuarta componente del momento:

$$i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow -T \sum_{-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + \mu, \mathbf{p}) \quad (4.23)$$

Bajo este marco $p_0 \rightarrow ip_0 = \omega_n, p_0 = -i\omega_n$, estas son las frecuencias de Matsubara que se definen como: $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ para los quarks [82, 83]. Entonces nuestra función de partición resulta

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma \exp\left\{ \int_0^\beta dt \int d^3\mathbf{x} \left[\bar{\psi}(\gamma_0(-i\omega_n - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma))\psi - \frac{\sigma^2}{2G} \right] \right\} \quad (4.24)$$

Llevamos ahora nuestro sistema al espacio de momentos en donde calculamos la transformada de Fourier de los campos

$$\psi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{-ip_\mu x^\mu} \psi(p^\mu), \quad \bar{\psi}(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{ip_\mu x^\mu} \bar{\psi}(p^\mu) \quad (4.25)$$

en este marco nuestra función de partición se modifica de la siguiente manera

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma \exp\left\{ \frac{1}{V} \sum_{n'} \sum_{\mathbf{p}'} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \int_0^\beta \int d^3\mathbf{x} \left[\exp\left\{ -i[\tau(\omega_{n'} - \omega_n) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}] \right\} \bar{\psi}[\gamma_0(-i\omega_n - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma)]\psi \right] \exp\left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \frac{\sigma^2}{2G} \right\} \right\} \quad (4.26)$$

La solución de la integral en el tiempo imaginario viene dada por

$$\int_0^\beta e^{-2i\pi T\tau(n' - n)} d\tau = \begin{cases} \beta & : n' = n \\ 0 & : n' \neq n \end{cases} \quad (4.27)$$

Dado que la parte espacial es una integral de Fourier en tres dimensiones, podemos escribir la expo-

nencial compleja como el producto de tres integrales de Fourier unidimensionales

$$\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(p'_x-p_x)x} \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i(p'_y-p_y)y} \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(p'_z-p_z)z} \right] \quad (4.28)$$

Cada una de estas integrales unidimensionales es una transformada de Fourier, y la transformada de Fourier de una función delta de Dirac es una función exponencial. Por lo tanto, cada integral se reduce a una función delta de Dirac en el espacio de momento correspondiente

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(p'_x-p_x)x} \right] = 2\pi\delta(p_x - p'_x) \quad (4.29)$$

Entonces, la integral tridimensional se convierte en el producto de tres funciones delta de Dirac

$$\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} = [2\pi\delta(p_x - p'_x)] [2\pi\delta(p_y - p'_y)] [2\pi\delta(p_z - p'_z)] = [2\pi\delta(p_x - p'_x)]^3 \quad (4.30)$$

Vemos que las integrales resultantes en el formalismo de tiempo imaginario son relativamente sencillas de resolver, por lo que este cambio de espacio nos brinda una forma teorica mucho más fácil de realizar los calculos. Ahora al considerar un cubo de arista L con origen en el centro y transformando la integral podemos expresar la función generadora también llamada función de partición como

$$Z = \exp\left\{ \frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right\} \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left\{ \beta \sum_n \sum_{\mathbf{p}} [\bar{\psi} [\gamma_0(-i\omega_n - \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m - \sigma)] \psi] \right\} \quad (4.31)$$

Donde a potencial químico finito, el propagador inverso de Dirac está definido como:

$$D^{-1} = -i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma_0 \mu + M \quad (4.32)$$

Recordemos que $M = m - \sigma$, es la masa constitutiva de los quarks. Si diagonalizamos la matriz resultante del propagador inverso de Dirac, y usamos la relación relativista de energía momento $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + M^2$ obtendremos:

$$Z = \exp\left\{ \frac{-\beta V \sigma^2}{2G} \right\} \prod_n \prod_{\mathbf{p}} \beta^4 [E_p^2 - (i\omega_n + \mu)^2]^2 \quad (4.33)$$

Para llegar a la expresión de la función de partición para el modelo NJL a temperatura y potencial químico finitos, primero partimos de la expresión del potencial termodinámico por unidad de volumen:

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln Z(T, \mu) \quad (4.34)$$

donde $\beta = \frac{1}{T}$ (unidades naturales) y $Z(T, \mu)$ es la función de partición del sistema, usando la ecuación (4.33) podemos expresar el nuevo potencial como

$$\Omega = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{T}{V} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left[\frac{E_p^2 + (\omega_n - i\mu)^2}{T^2} \right]^2 \quad (4.35)$$

dato que ω_n representa todos los múltiplos impares de πT desde menos infinito a infinito, la suma sobre todas las n debe ser invariante bajo $\omega_{-n} = -\omega_n$. Desarrollando la expresión tenemos,

$$\Omega = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{T}{V} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln \left\{ \left[\frac{(E_p - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] \left[\frac{(E_p + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] \right\} \quad (4.36)$$

Usando la relación de Matsubara

$$\sum_n \ln \left[\frac{\alpha^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] = \frac{\alpha}{T} + 2 \ln \left[1 + \exp\left(-\frac{\alpha}{T}\right) \right] \quad (4.37)$$

Y considerando la traza realizada sobre los índices de color y sabor, llegamos a la expresión final para el potencial termodinámico para el modelo NJL a temperatura y potencial químico finitos [84, 85]

$$\Omega(T, \mu) = \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + T \ln [Z^+(E_p)] + T \ln [Z^-(E_p)] \right\} \quad (4.38)$$

donde $Z^\pm(E_p) = 1 + e^{-\beta(E_p \mp \mu)}$ corresponden a las funciones de partición de los fermiones, la energía relativista viene dada por $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ y el límite quiral lo obtenemos cuando hacemos $m_0 = 0$.

La ecuación de gap podemos encontrarla minimizando el potencial termodinámico lo que nos dará información sobre el valor de σ como función de los parámetros T y μ .

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.39)$$

obtenemos

$$0 = \frac{\sigma}{G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_p + \mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_p - \mu)}} \right\} \quad (4.40)$$

De esta manera podemos encontrar la masa constitutiva M y obtener el comportamiento del condensado de quarks para una variación de la temperatura y el potencial químico. Los terminos que incluyen las funciones exponenciales son las distribuciones de Fermi-Dirac para fermiones y antifermiones:

$$f^\pm(E_p) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_p \mp \mu)}} \quad (4.41)$$

Por ultimo, para poder integrar esta ecuación es necesario asumir cierta simetría para el espacio de momentos. Una de las más sencillas es asumir una simetría esférica donde el diferencial se transforma como

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow 4\pi \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dp p^2}{2\pi^2} \quad (4.42)$$

Considerando lo anterior, la expresión para nuestro condensado en el modelo NJL está dado por:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} [1 - f^+(E_p) - f^-(E_p)] \quad (4.43)$$

4.4. Modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio

El modelo NJL es ampliamente reconocido como un enfoque valioso para estudiar la materia que interactúa fuertemente a temperatura y potencial químico finitos. Sin embargo, presenta una limitación significativa: no tiene en cuenta el fenómeno del confinamiento, una característica crucial de la cromodinámica cuántica (QCD), la teoría que describe la interacción fuerte entre partículas elementales. En el NJL, la interacción entre quarks se modela mediante interacciones puntuales, sin considerar el intercambio de gluones, los portadores de la fuerza fuerte en la QCD.

Esta omisión del efecto de confinamiento es un obstáculo importante, ya que el confinamiento de quarks es una propiedad fundamental de la QCD a bajas energías. Para abordar esta limitación y desarrollar un modelo más completo que capture tanto la dinámica de la ruptura espontánea de simetría como el confinamiento de quarks, se introduce el modelo PNJL (Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio).

El modelo PNJL combina los elementos del modelo NJL con un potencial efectivo que actúa como parámetro de orden, incorporando el efecto del campo de Polyakov para representar la dinámica del campo gluónico en la teoría de gauge cromodinámica cuántica. Esta integración permite identificar el confinamiento de quarks y capturar la dinámica del condensado de quarks en un marco teórico coherente, aprovechando la utilidad del loop de Polyakov como un parámetro de orden para las teorías de gauge a temperaturas no nulas [8, 86, 87].

Para introducir el loop de Polyakov veamos la forma de la lagrangiana en el modelo NJL ecuación (4.11)

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_o] \psi + \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2]$$

En la sección anterior hemos visto como simplificar la lagrangiana mediante la MFA y usando el formalismo de tiempo imaginario, obtuvimos el potencial termodinámico a temperatura y densidad finita. Ahora el acoplamiento entre los quarks y los gluones lo realizaremos mediante un campo gluónico externo A_μ , esté campo será muy pesado y será producido por un quark fijo en el espacio, que producirá un campo estático A_0 .

En todas las teorías de norma (electrodinámica cuántica, la interacción electrodébil y la cromodinámica cuántica), la interacción se introduce mediante la derivada covariante. Por tanto, la interacción entre quarks y gluones, la introducimos mediante

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu \quad (4.44)$$

donde la constante de acoplamiento g , entre quarks y gluones queda absorbida en la definición de A_μ . Por lo que nuestra lagrangiana para los quarks queda modificada de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{q-G} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - iA_\mu) - \hat{m}_o] \psi \quad (4.45)$$

$$\mathcal{L}_{q-G} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_o] \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (4.46)$$

donde $\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$ es la lagrangiana de interacción producida por un quark muy pesado sin dinámica

y donde el campo gluónico A_μ podemos expresarlo como

$$A_\mu = gA_\mu^a \lambda_a / 2 \quad (4.47)$$

donde λ_a son las matrices de Gell-Mann y A_μ^a son los campos de gauge en el espacio de color. Debido a que el campo gluónico lo consideramos como estático el campo gluónico se transforma de la siguiente manera aplicando la rotación de Wick

$$A_\mu = \delta_0^\mu A^0 \rightarrow A_4 = iA^0 \quad (4.48)$$

Para simplificar los cálculos que haremos a continuación podemos introducir una función $L(\vec{x})$ denominada línea de Polyakov

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta A_4(\vec{x}, \tau) d\tau \right] = \exp \left[i\beta A_4 \right] \quad (4.49)$$

$$L^\dagger(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta A_4^*(\vec{x}, \tau) d\tau \right] = \exp \left[-i\beta A_4 \right] \quad (4.50)$$

Esta función indica la contribución del campo gluónico en nuestro sistema que se expresa mediante un potencial de auto interacción $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T)$. Se define el loop de Polyakov como la traza de la función $L(\vec{x})$ [88]

$$\Phi = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \langle L(\vec{x}) \rangle; \quad \Phi^* = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \langle L^\dagger(\vec{x}) \rangle \quad (4.51)$$

Los campos Φ y Φ^* al estar directamente relacionados con el campo gluónico, podemos utilizarlos como parámetros de orden que indican si nuestro sistema ha pasado por una transición de fase, y esta transición podemos entenderla como el confinamiento y el desconfinamiento de color.

Por tanto, cuando estemos a temperaturas bajas $T \rightarrow 0$, los campos serán cero $\Phi, \Phi^* \rightarrow 0$ (fase confinada), pero cuando incrementemos la temperatura $T \rightarrow \infty$, entonces $\Phi, \Phi^* \rightarrow 1$ (fase desconfinada).

Considerando estas modificaciones el modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), se obtiene mediante la lagrangiana [78, 89, 25]:

$$\mathcal{L}_{PNJL} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}_o + \gamma_o \mu] \psi + \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau \psi)^2] - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) \quad (4.52)$$

Nuevamente m_0 representa la masa corriente de los quarks en donde asumimos simetría de isospín, es decir, $m_u = m_d = m_0$. El potencial termodinámico por unidad de volumen se calcula mediante la función de partición Z a través de la expresión $\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln Z$, que describe la contribución de los estados de color del sistema.

$$Z = \int [D\bar{\psi}] [D\psi] \left[e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{PNJL}} \right] \quad (4.53)$$

Sustituyendo nuestra nueva lagrangiana obtenemos

$$Z = \int [D\bar{\psi}] [D\psi] e^{i \int d^4 \mathbf{x} \left\{ \bar{\psi} [i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}_0 + \gamma_0 \mu] \psi + \frac{G}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau}\psi)^2] - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) \right\}} \quad (4.54)$$

aplicando la aproximación de campo medio alrededor del condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ y realizando un procedimiento similar al modelo NJL considerando la contribución del campo gluónico la función de partición se simplifica como

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi D\sigma D\boldsymbol{\pi} \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{x} \left[\bar{\psi}(x) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_0 + \gamma_0 (\mu - igA_4) + \sigma(x) + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right) \psi(x) - \frac{(\sigma(x))^2 + (\boldsymbol{\pi}(x))^2}{2G} - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) \right] \right\} \quad (4.55)$$

De la misma forma el valor esperado para campo escalar σ es diferente de cero, por lo que al aplicar un corrimiento nos genera una masa constitutiva M cuya ecuación de gap es de la misma forma

$$M = m_0 - G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (4.56)$$

donde ahora nuestro propagador inverso lo definimos como

$$S^{-1} = i\gamma^\mu \partial_\mu + \sigma + \gamma_0 (\mu - igA_4) \quad (4.57)$$

Aplicando el formalismo de tiempo imaginario podemos encontrar el potencial termodinámico para el modelo PNJL como [78, 86, 87, 25, 90, 91]

$$\Omega_{PNJL} = \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) + \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E_{\mathbf{p}} + T \left[\ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \cdot e^{(-ig\beta A_4)}) \right] + T \left[\ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)} \cdot e^{(ig\beta A_4)}) \right] \right\} \quad (4.58)$$

podemos sustituir el valor de la matriz para L y L^\dagger y tomando en cuenta que estas matrices son diagonales el valor que resulta de la multiplicación de ambos exponentes es el determinante, por tanto, podemos usar la relación $\det[A] = \exp\{Tr(\ln A)\}$ para obtener nuestro potencial en terminos de la traza de una nueva función Z .

$$\Omega_{PNJL} = \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) + \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E_{\mathbf{p}} + \frac{T}{N_c} Tr_c \ln [Z_{\Phi}^+(E_{\mathbf{p}})] + \frac{T}{N_c} Tr_c \ln [Z_{\Phi}^-(E_{\mathbf{p}})] \right\} \quad (4.59)$$

En donde la función de partición para los fermiones se redefinen como

$$\begin{aligned} Z_{\Phi}^+(E_{\mathbf{p}}) &= 1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \\ Z_{\Phi}^-(E_{\mathbf{p}}) &= 1 + L e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Similar a lo que hicimos con las funciones de distribución de Fermi-Dirac para fermiones en el modelo NJL. Podemos ver que estas funciones dependen de la línea de Polyakov cuyas expresiones son:

$$L(\vec{x}) = \exp[i\beta A_4]; \quad L^\dagger(\vec{x}) = \exp[-i\beta A_4]$$

tomemos la expresión para el campo de Polyakov Φ y realicemos la traza sobre los índices correspondientes

$$\Phi = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \langle L(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c (\exp(i\beta A_4)) = \frac{1}{3} \left(\exp(i\beta(A_4)_{11}) + \exp(i\beta(A_4)_{22}) + \exp(i\beta(A_4)_{33}) \right) \quad (4.61)$$

hagamos lo mismo para el campo Φ^*

$$\Phi^* = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \langle L^\dagger(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c (\exp(-i\beta A_4)) = \frac{1}{3} \left(\exp(-i\beta(A_4)_{11}) + \exp(-i\beta(A_4)_{22}) + \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \right) \quad (4.62)$$

Usando la definición de la línea de Polyakov en la función $Z_\Phi^+(E_p)$ y $Z_\Phi^-(E_p)$ la traza sobre el campo de color es

$$\begin{aligned} \text{Tr}_c \ln \left(Z_\Phi^+(E_p) \right) &= \text{Tr}_c \ln \left(1 + L^\dagger \exp(-\beta(E_p - \mu)) \right) = \ln \left(1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \right) \\ &+ \ln \left(1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{22}) \right) + \ln \left(1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

usando las propiedades de los logaritmos, esta expresión podemos reescribirla como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_c \ln \left(Z_\Phi^+(E_p) \right) &= \ln \left(\left[1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \right] \times \left[1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{22}) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Realizando la expansión de los terminos obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_c \ln \left(Z_\Phi^+(E_p) \right) &= \\ \ln \left(1 + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{22}) \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{33}) + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \right. \\ &+ \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{33}) + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{22}) \\ &\exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{22}) + \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \\ &\left. \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{22}) \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) \cdot \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

ordenando los terminos tenemos

$$\begin{aligned}
Tr_c \ln(Z_{\Phi}^+(E_{\mathbf{p}})) = & \\
& \ln\left(1 + \exp(-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) \cdot \left[\exp(-i\beta(A_4)_{11}) + \exp(-i\beta(A_4)_{22}) + \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \right] \right. \\
& + \exp(-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) \cdot \left[\exp(-i\beta((A_4)_{22} + (A_4)_{33})) + \exp(-i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{33})) + \exp(-i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{22})) \right] \\
& \left. + \exp(-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) \cdot \left[\exp(-i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{22})) + (A_4)_{33} \right] \right) \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Además podemos escribir la matrices L o L^\dagger como matrices diagonales

$$L^\dagger = \begin{pmatrix} \exp(-i\beta\Phi) & & \\ & \exp(-i\beta\Phi') & \\ & & \exp(i\beta(\Phi + \Phi')) \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Lo que significa que podemos representar los terminos que obtuvimos de $(A_4)_{ii}$ como

$$\begin{aligned}
\exp\left(-i\beta\left((A_4)_{22} + (A_4)_{33}\right)\right) &= \exp(i\beta(A_4)_{11}) \\
\exp\left(-i\beta\left((A_4)_{11} + (A_4)_{33}\right)\right) &= \exp(i\beta(A_4)_{22}) \\
\exp\left(-i\beta\left((A_4)_{11} + (A_4)_{22}\right)\right) &= \exp(i\beta(A_4)_{33})
\end{aligned} \quad (4.68)$$

De la ecuación (4.67) podemos ver que $\exp\left(-i\beta\left((A_4)_{11} + (A_4)_{22} + (A_4)_{33}\right)\right) = 1$. Además de acuerdo a la ecuación (4.61) y (4.62) podemos identificar

$$\left[\exp(-i\beta(A_4)_{11}) + \exp(-i\beta(A_4)_{22}) + \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \right] = 3\Phi^* \quad (4.69)$$

$$\left[\exp(i\beta(A_4)_{11}) + \exp(i\beta(A_4)_{22}) + \exp(i\beta(A_4)_{33}) \right] = 3\Phi \quad (4.70)$$

Considerando lo anterior obtenemos finalmente el valor de la traza para las funciones $Z_{\Phi}^+(E_{\mathbf{p}})$ y $Z_{\Phi}^-(E_{\mathbf{p}})$.

$$Tr_c \ln(Z_{\Phi}^+(E_{\mathbf{p}})) = \ln\left(1 + 3\Phi^* \cdot \exp(-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) + 3\Phi \cdot \exp(-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) + \exp(-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu))\right) \quad (4.71)$$

$$Tr_c \ln(Z_{\Phi}^-(E_{\mathbf{p}})) = \ln\left(1 + 3\Phi \cdot \exp(-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)) + 3\Phi^* \cdot \exp(-2\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)) + \exp(-3\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu))\right) \quad (4.72)$$

Por tanto, la ecuación general para el potencial termodinámico en el modelo PNJL obtiene la forma:

$$\begin{aligned} \Omega_{PNJL} = & \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) + \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p \right. \\ & + \frac{T}{N_c} \ln \left(1 + 3\Phi^* \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) + 3\Phi \cdot \exp(-2\beta(E_p - \mu)) + \exp(-3\beta(E_p - \mu)) \right) \\ & \left. + \frac{T}{N_c} \ln \left(1 + 3\Phi \cdot \exp(-\beta(E_p + \mu)) + 3\Phi^* \cdot \exp(-2\beta(E_p + \mu)) + \exp(-3\beta(E_p + \mu)) \right) \right\} \quad (4.73) \end{aligned}$$

En donde \mathcal{U} describe la contribución del campo gluónico en términos de la dinámica del loop de Polyakov [89]. Este potencial asociado a los campos Φ y Φ^* puede ser representado a través de diversas formas, siempre y cuando los resultados que obtengamos estén de acuerdo con lo que ya se conoce de la teoría fundamental LQCD.

Empezaremos con un potencial tipo polinomial de la forma [5, 20, 78].

$$\mathcal{U} = T^4 \left(-\frac{b_2(T)}{2} \Phi \Phi^* - \frac{b_3}{6} (\Phi^3 + \Phi^{*3}) + \frac{b_4}{4} (\Phi \Phi^*)^2 \right) \quad (4.74)$$

donde la función $b_2(T)$ se define de la siguiente manera

$$b_2 = a_0 + a_1 \frac{T_0}{T} + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T} \right) \quad (4.75)$$

los valores de los parámetros para que concuerden con LQCD son [92]

a_0	a_1	a_2	a_3	T_0
6,76	1,95	2,625	-7,44	270 MeV

Tabla 4.1: Parámetros para el potencial polinomial en el modelo PNJL.

El segundo potencial es de tipo "logarítmico" definido como [93]

$$\mathcal{U} = T^4 \left(-\frac{a(T)}{2} \Phi \Phi^* + b(T) \ln [1 - 6\Phi \Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi \Phi^*)^2] \right), \quad (4.76)$$

donde la función $a(T)$ obtiene la forma

$$a(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2, \quad (4.77)$$

$$b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3, \quad (4.78)$$

y los valores de los parámetros correspondientes son [93].

a_0	a_1	a_2	b_3	T_0
3,51	-2,47	15,2	-1,75	270 MeV

Tabla 4.2: Parámetros para el potencial logarítmico en el modelo PNJL.

Una vez elegido el potencial \mathcal{U} podemos minimizar el potencial termodinámico a través de la condición

de equilibrio $\partial\Omega/\partial\sigma = 0$ para obtener la ecuación de gap. Comenzamos observando el potencial termodinámico (4.73) y recordando que

$$M = m_0 - G\langle\bar{\psi}\psi\rangle = m_0 - \sigma \quad (4.79)$$

Es decir, al momento de derivar σ es como si estuviéramos derivando la masa constitutiva M ya que m_0 es una constante.

Veamos cual es el comportamiento al derivar respecto a dicha variable en cada uno de los terminos del potencial termodinámico. Al integrar sobre el momento la derivada con respecto a sigma no afecta la integral.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega_{PNJL}}{\partial\sigma} &= \frac{\partial\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T)}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{\sigma^2}{2G} \right) - 2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\partial E_{\mathbf{p}}}{\partial\sigma} \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial\sigma} \left[\frac{T}{N_c} \ln \left(1 + 3\Phi^* \cdot \exp(-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) + 3\Phi \cdot \exp(-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) + \exp(-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)) \right) \right] \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left[\frac{T}{N_c} \ln \left(1 + 3\Phi \cdot \exp(-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)) + 3\Phi^* \cdot \exp(-2\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)) + \exp(-3\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Si recordamos las distintas formas del potencial \mathcal{U} polinomial y logaritmico ecuaciones (4.74) y (4.76) vemos que éstas no dependen de sigma, por tanto, la derivada es cero.

$$\frac{\partial\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T)}{\partial\sigma} = 0 \quad (4.80)$$

Para el siguiente término es sencillo de calcular ya que la función unicamente depende de σ donde G es constante.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{\sigma^2}{2G} \right) = \frac{\sigma}{G} \quad (4.81)$$

La derivada de la energía relativista la podemos obtener como

$$\frac{\partial E_{\mathbf{p}}}{\partial\sigma} = \frac{\partial E_{\mathbf{p}}}{\partial M} = \frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \right)}{\partial M} = \frac{2M}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} = \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \quad (4.82)$$

Las ultimas dos funciones que dependen del logaritmo podemos derivarlas recordando la definición de la derivada de un logaritmo $\frac{\partial \ln(f(x))}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ y la derivada de un exponencial $e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\sigma} \left[\ln \left(1 + 3\Phi^* \cdot e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + 3\Phi \cdot e^{-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + e^{-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \right) \right] \\ &= \frac{3\Phi^* e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \cdot \left(-\beta \left(\frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \right) \right) + 3\Phi e^{-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \cdot \left(-2\beta \left(\frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \right) \right) + e^{-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \cdot \left(-3\beta \left(\frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \right) \right)}{1 + 3\Phi^* \cdot e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + 3\Phi \cdot e^{-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + e^{-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}} \quad (4.83) \\ &= \frac{\left(-3\beta \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \right) \left[\Phi^* e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + 2\Phi e^{-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + e^{-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} \right]}{1 + 3\Phi^* \cdot e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + 3\Phi \cdot e^{-2\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)} + e^{-3\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}} \end{aligned}$$

y lo mismo para el último término

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\ln \left(1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))} \right) \right] \\
&= \frac{3\Phi e^{-\beta(E_p - \mu)} \cdot \left(-\beta \left(\frac{M}{E_p} \right) \right) + 3\Phi^* e^{-2\beta(E_p - \mu)} \cdot \left(-2\beta \left(\frac{M}{E_p} \right) \right) + e^{-3\beta(E_p - \mu)} \cdot \left(-3\beta \left(\frac{M}{E_p} \right) \right)}{1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \quad (4.84) \\
&= \frac{\left(-3\beta \frac{M}{E_p} \right) \left[\Phi e^{-\beta(E_p - \mu)} + 2\Phi^* e^{-2\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)} \right]}{1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}}
\end{aligned}$$

Por tanto, nuestra ecuación de gap resulta como:

$$\frac{\partial \Omega_{PNJL}}{\partial \sigma} = \frac{\sigma}{G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left[1 - g^{(+)} - g^{(-)} \right] = 0 \quad (4.85)$$

En donde las funciones $g^{(+)}$ y $g^{(-)}$ estan dadas por:

$$g^{(+)} = \frac{\Phi e^{-\beta(E - \mu)} + 2\Phi^* e^{-2\beta(E - \mu)} + e^{-3\beta(E - \mu)}}{1 + 3\Phi e^{-\beta(E - \mu)} + 3\Phi^* e^{-2\beta(E - \mu)} + e^{-3\beta(E - \mu)}} \quad (4.86)$$

$$g^{(-)} = \frac{\Phi^* e^{-\beta(E + \mu)} + 2\Phi e^{-2\beta(E + \mu)} + e^{-3\beta(E + \mu)}}{1 + 3\Phi^* e^{-\beta(E + \mu)} + 3\Phi e^{-2\beta(E + \mu)} + e^{-3\beta(E + \mu)}} \quad (4.87)$$

Pero recordemos que σ no es el único parámetro para el modelo PNJL, imponiendo las condiciones de equilibrio respecto a los parámetros Φ y Φ^* , minimizamos el potencial termodinamico Ω y obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_{PNJL}}{\partial \Phi} &= \frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T)}{\partial \Phi} + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\sigma^2}{2G} \right) - 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\partial E_p}{\partial \Phi} \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\frac{T}{N_c} \ln \left(1 + 3\Phi^* \cdot \exp(-\beta(E_p - \mu)) + 3\Phi \cdot \exp(-2\beta(E_p - \mu)) + \exp(-3\beta(E_p - \mu)) \right) \right] \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\frac{T}{N_c} \ln \left(1 + 3\Phi \cdot \exp(-\beta(E_p + \mu)) + 3\Phi^* \cdot \exp(-2\beta(E_p + \mu)) + \exp(-3\beta(E_p + \mu)) \right) \right] \right\} \quad (4.88)
\end{aligned}$$

El primer término depende del potencial \mathcal{U} que se utilice, por lo que solo la dejaremos expresado. Para el segundo y tercero vemos que las funciones no dependen de los parametros Φ y Φ^* , por lo que su derivada es cero.

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\sigma^2}{2G} \right) = 0; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \Phi} = 0 \quad (4.89)$$

Los terminos que dependen de logaritmo y las exponenciales aplicamos las mismas definiciones para sus derivadas.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\ln \left(1 + 3\Phi^* \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))} \right) \right] \\ &= \frac{3e^{-2\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3\Phi^* \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

y para el último término tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\ln \left(1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))} \right) \right] \\ &= \frac{3e^{-\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Por tanto, nuestra derivada respecto a Φ del potencial termodinámico es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{PNJL}}{\partial \Phi} &= \frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{\partial \Phi} - 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{3e^{-2\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3\Phi^* \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3e^{-\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

Aplicando lo mismo para la derivada de Φ^* obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{PNJL}}{\partial \Phi^*} &= \frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{\partial \Phi^*} - 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{3e^{-\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3\Phi^* \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3e^{-2\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3\Phi \cdot e^{(-\beta(E_p - \mu))} + 3\Phi^* \cdot e^{(-2\beta(E_p - \mu))} + e^{(-3\beta(E_p - \mu))}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

El modelo de PNJL en la QCD requiere la solución de tres ecuaciones de gap correspondientes a cada campo involucrado. Estas ecuaciones, fundamentales para comprender la dinámica de la materia a temperaturas y densidades finitas, deben resolverse de manera simultánea para obtener una descripción precisa del sistema. Para abordar esta tarea, se emplea un enfoque computacional que permite realizar un mapeo exhaustivo de las variables relevantes, tales como la temperatura (T) y el potencial químico (μ). A través de un algoritmo computacional, se exploran las diferentes combinaciones de estas variables para obtener una comprensión completa de los fenómenos físicos en juego. Este enfoque no solo facilita la comprensión teórica del modelo PNJL, sino que también permite realizar predicciones cuantitativas y comparaciones con resultados experimentales o de simulaciones numéricas. Además, el uso de herramientas computacionales ofrece la flexibilidad necesaria para investigar diversas condiciones físicas y explorar el comportamiento del sistema en un amplio rango de parámetros, lo que contribuye significativamente a nuestra comprensión de la física de altas energías y densidades.

4.5. Esquemas de Regularización

Los modelos NJL (Nambu-Jona-Lasinio) y PNJL (Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio) son modelos efectivos en la teoría de la QCD (Cromodinámica Cuántica) que, si bien son valiosos para describir fenómenos de interacción fuerte, presentan una característica importante: su potencial termodinámico se integra sobre todo el espacio de momentos, lo que puede generar problemas significativos debido a la presencia de integrales divergentes. Esta no renormalizabilidad del potencial termodinámico plantea un desafío teórico, ya que para que una teoría física tenga sentido, es esencial que sus cantidades u observables sean finitas. Las divergencias que surgen en estos modelos deben ser tratadas de alguna manera para obtener resultados físicamente significativos.

Tomemos, por ejemplo, el primer término de la ecuación de gap, que es fundamental para comprender la dinámica de la materia en el modelo PNJL. La divergencia asociada con este término debe ser abordada mediante técnicas de regularización y renormalización, que son herramientas estándar en la teoría cuántica de campos. Estos procedimientos nos permiten eliminar las divergencias y obtener resultados finitos y físicamente significativos.

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

Esta integral se evalúa en todo el espacio de momentos.

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow 4\pi \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dp p^2}{2\pi^2}$$

la integral a realizar termina siendo

$$\int_0^\infty \frac{dp p^2}{2\pi^2} \cdot \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \rightarrow \text{diverge}$$

En este sentido, el tratamiento de las divergencias en los modelos NJL y PNJL es crucial para garantizar la consistencia y la validez física de los resultados teóricos obtenidos. Al abordar estas divergencias de manera adecuada, podemos utilizar estos modelos efectivos para estudiar una amplia gama de fenómenos en la física de altas energías y densidades con confianza en la precisión de nuestras predicciones.

Por lo tanto, es necesario utilizar esquemas de regularización para acotar las integrales y obtener valores finitos. En general, un esquema de regularización introduce un parámetro extra (Λ) a la cantidad física que diverge (en nuestro caso Ω) para volverla finita. Aunque la idea es simple, estos esquemas deben respetar ciertas condiciones como la forma y obtención de la ecuación de gap, los resultados ya obtenidos de LQCD para el vacío, etc.

Una de las justificaciones más empleadas para introducir estos esquemas de regularización es que solo los valores bajos del momento son relevantes para nuestro modelo. De hecho la primera parte de nuestros resultados se basan en esta premisa, y como veremos más adelante si queremos utilizar momentos más altos debemos realizar correcciones adicionales en la forma del potencial termodinámico.

4.5.1. Corte UV tridimensional

Un método de regularización para eliminar estas divergencias consiste en añadir un corte Ultravioleta (UV) en los valores del trimomento, es decir, agregamos un límite superior $p^2 = \Lambda^2$. Este método puede preservar la estructura de las ecuaciones de gap, pero esta transformación no es invariante de Lorentz. Sin embargo, esto no es un inconveniente, ya que en el marco de temperatura finita y potencial químico la invariancia de Lorentz se rompe.

Para aplicar el corte UV tridimensional debemos añadir un límite superior a la integral Λ , la regularización de la integral se lleva a cabo mediante [94]

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \theta(\Lambda - \mathbf{p}) \quad (4.94)$$

la función $\theta(\Lambda - \mathbf{p})$ corresponde a la función escalón, la cuál nos ayuda a eliminar la parte de la integral que corresponde a momentos elevados.

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \theta(\Lambda - \mathbf{p}) = \int_0^\Lambda \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (1) + \int_\Lambda^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (0) \quad (4.95)$$

Aplicando la función escalón con esta nueva redefinición podemos eliminar la parte correspondiente a momentos más altos que el corte UV, haciendo que nuestra integral sea convergente. Es importante destacar que hemos elegido este método de regularización para nuestros próximos cálculos, sin embargo, debemos mencionar que existen muchos otros métodos cada uno con sus diferentes ventajas y desventajas tales como: Pauli-Villars (PV) regularización, proper-time (PT) regularización, etc.

4.6. Esquemas de corte

Una vez que hemos elegido el corte UV tridimensional como nuestro método de regularización, nuestro principal interés ahora es cómo este corte afecta a la integral y a nuestros cálculos. En el marco SU(2) del modelo PNJL el potencial termodinámico antes de la aplicación de cualquier corte es

$$\begin{aligned} \Omega_{PNJL} = & \mathcal{U}(\varphi, \varphi^*; T) + \frac{\sigma^2}{4G} - 2N_f N_c \int_0^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \\ & - 2N_f N_c T \int_0^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)} L) \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

Pero ahora si añadimos nuestro esquema de regularización donde todas las integrales en Ω_{PNJL} se integran hasta un corte UV, obtenemos un nuevo potencial que corta la integral para evitar todos los problemas de divergencia. Este potencial se suele llamar 'corte máximo'.

$$\begin{aligned} \Omega_{PNJL}^{max} = & \mathcal{U}(\varphi, \varphi^*; T) + \frac{\sigma^2}{4G} - 12 \int_0^\Lambda \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \\ & - 12 T \int_0^\Lambda \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)} L) \right] \end{aligned} \quad (4.97)$$

Sin embargo, esta última ecuación nos da una descripción termodinámica incompleta ya que no incluye el límite de Stefan-Boltzmann [95]. Nuestra primera propuesta sería modificar los límites de la integral (sólo la segunda parte que es convergente) para cumplir con este límite. A este nuevo potencial lo llamaremos 'corte mínimo' [78].

$$\Omega_{PNJL}^{min} = \mathcal{U}(\varphi, \varphi^*; T) + \frac{\sigma^2}{4G} - 12 \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} - 24 T \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + e^{-\beta E_{\mathbf{p}}}) \right] \quad (4.98)$$

No incluimos el potencial químico en los cálculos del límite de alta temperatura por simplicidad, ya que no afecta a la discusión. La misma idea se aplica al loop de Polyakov, ya que el valor de espectación en el límite de $T \rightarrow \infty$ es $\Phi \rightarrow 1$.

Aunque el potencial de corte mínimo tiene en cuenta los modos de alto momento, esenciales para reproducir el límite de Stefan-Boltzmann de la presión a temperaturas extremadamente altas, nos enfrentamos a ciertas incoherencias que requieren atención. En primer lugar, existe una disparidad en el tratamiento de los términos de la misma integral: mientras que llevamos la integral divergente al límite Λ , extendemos la integral convergente hasta el infinito. Esta disparidad introduce inconsistencias en nuestro análisis. En segundo lugar, al extender la integral hasta el infinito, inadvertidamente incluimos interacciones fermiónicas más allá del corte UV, lo que puede llevar a resultados no físicos.

Para abordar estas preocupaciones, se propone una nueva formulación del potencial, conocida como 'corte suave', presentada por [93]. En esta formulación, se mantiene el corte UV en la integral divergente, pero se introduce una modificación crucial: se fija la energía térmica de los quarks ($\sigma = 0$) para todos los momentos $p > \Lambda$. Esta modificación suaviza el corte, evitando así la inclusión de interacciones fermiónicas no deseadas más allá del límite Λ . Esta estrategia, basada en el 'corte suave', será fundamental en nuestro enfoque para resolver las incoherencias mencionadas y avanzar en nuestra comprensión del sistema.

$$\begin{aligned} \Omega_{PNJL}^{soft} = & \mathcal{U}(\varphi, \varphi^*; T) + \frac{\sigma^2}{4G} - 12 \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \\ & - 12 T \int_0^\Lambda \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)} L) \right] \\ & - 12 T \int_\Lambda^\infty \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}|_{\sigma=0} - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}|_{\sigma=0} + \mu)} L) \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

Esta modificación es crucial, ya que reconoce que la interacción de fermiones a momentos muy altos está desactivada en nuestro segundo término. Esta es la forma adecuada de representar el potencial termodinámico a temperaturas extremadamente altas, donde los modos de alto momento dominan la contribución a la dinámica del sistema. Al desactivar la interacción de fermiones en esta región, evitamos la inclusión de efectos no deseados que podrían distorsionar nuestros resultados. Esta consideración cuidadosa de la física en condiciones extremas es esencial para garantizar la coherencia y la validez de nuestro enfoque, y demuestra la importancia de adoptar una perspectiva precisa y detallada en la modelización de sistemas físicos complejos.

4.7. Volumen finito

Hasta ahora, hemos avanzado significativamente en nuestro estudio al obtener la expresión teórica del potencial termodinámico para los modelos NJL y PNJL. Además, hemos aplicado un esquema de regularización para asegurar la convergencia de las integrales, e incluso hemos logrado una expresión que nos permite considerar los momentos por encima del corte ultravioleta (UV), lo cual es crucial para una descripción precisa en el límite de altas energías.

El siguiente paso en nuestra investigación implica introducir una región del espacio donde este condensado pueda manifestarse. Este tipo de materia exótica solo puede reproducirse en condiciones extremas, como aquellas que se encuentran en laboratorios de alta energía como el LHC (Gran Colisionador de Hadrones). En tales entornos, el condensado ocupa un volumen finito, lo que plantea interesantes desafíos teóricos y prácticos. Este volumen finito puede ser teóricamente considerado con diversas geometrías y tamaños, lo que agrega una dimensión adicional a nuestra comprensión del fenómeno.

Para abordar el efecto del volumen finito, recurrimos a una herramienta en la física de la materia condensada: la aproximación MRE (Multiple Reflection Expansion, por sus siglas en inglés). Esta aproximación nos permite tener en cuenta el efecto del volumen finito al modificar la densidad de estados de las partículas involucradas en el sistema. Al integrar la aproximación MRE en nuestro análisis, no solo estamos expandiendo nuestra comprensión teórica de la materia exótica en condiciones extremas, sino que también estamos dando un paso adelante hacia la aplicación práctica de estos conceptos en la interpretación de datos experimentales y la predicción de fenómenos observables en entornos de laboratorio de alta energía. Este enfoque nos coloca en una posición privilegiada para explorar las propiedades únicas y fascinantes de la materia condensada en el límite de condiciones extremas.

4.7.1. Volumen finito con geometría esférica

Para incorporar un volumen esférico en nuestro análisis y considerar adecuadamente la influencia del tamaño finito del sistema, es necesario redefinir la densidad de estados $\rho = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$ utilizando la aproximación MRE. Esto nos permite restringir nuestro sistema a una esfera de radio R y tener en cuenta tanto los efectos de la limitación espacial como las reflexiones múltiples de las partículas en las fronteras de la esfera.

La expresión final resultante, al realizar este cambio en la densidad de estados, puede representarse como:

$$\int dp \frac{p^2}{2\pi^2} f(T, \mu, \mathbf{p}) \longrightarrow \int_0^\infty dp \rho(p) f(T, \mu, p) \quad (4.100)$$

$$\longrightarrow \int_{\Lambda_{IR}}^{\Lambda_{UV}} dp \rho_{MRE}(p, \alpha, R) f(T, \mu, p), \quad (4.101)$$

Aquí, Λ_{UV} es el corte ultravioleta del tri-momento que actúa como límite superior, mientras que Λ_{IR} representa nuestro corte infrarrojo, resultado de considerar un volumen finito, cuyo valor dependerá del tipo de condiciones impuestas al modelo. Al utilizar la aproximación MRE, podemos expresar la densidad de estados en términos de tres términos distintos: la densidad volumétrica, superficial y de curvatura [96, 97].

$$\rho_{MRE} = \rho_{vol} + \rho_{surf} \cdot f_S + \rho_{curv} \cdot f_C, \quad (4.102)$$

Para un volumen esférico, las densidades de estados volumétrica, superficial y de curvatura están representadas por la ecuación (4.103). Cada una de estas funciones, junto con sus respectivas condiciones de frontera, se detallan en las referencias [97, 98].

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 + \frac{6\pi^2}{pR} f_S + \frac{12\pi^2}{(pR)^2} f_C \right] \quad (4.103)$$

La densidad de estados volumétrica refleja la contribución de las partículas dentro del volumen esférico y se define mediante la distribución de momentos permitidos en el espacio tridimensional restringido por la esfera de radio R . Esta función es esencial para capturar la distribución de momentos de las partículas dentro del volumen confinado y su comportamiento térmico y dinámico.

Por otro lado, la densidad de estados superficial tiene en cuenta la contribución de las partículas en la superficie de la esfera, donde las condiciones de frontera pueden influir significativamente en el comportamiento de las partículas. Esta función es crucial para comprender cómo las partículas interactúan en la interfaz entre el volumen confinado y el entorno circundante.

Finalmente, la densidad de estados de curvatura considera la contribución de las partículas cerca de la curvatura de la esfera, donde los efectos de la curvatura pueden modificar la distribución de momentos de las partículas. Esta función es relevante para entender cómo la geometría del volumen confinado afecta la dinámica de las partículas y cómo pueden surgir fenómenos físicos únicos debido a la curvatura del espacio.

Las funciones de superficie y curvatura (f_S y f_C) están en función del momento p y del parámetro α .

$$f_S \left(\frac{p}{\alpha} \right) = -\frac{1}{8\pi} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{p}{\alpha} \right] \quad (4.104)$$

$$f_C \left(\frac{p}{\alpha} \right) = \frac{1}{12\pi^2} \left[1 - \frac{3p}{2\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\alpha} \right) \right] \quad (4.105)$$

Las condiciones de Neumann y Dirichlet son impuestas mediante el parámetro α . Para obtener las condiciones tipo Dirichlet volvemos $\alpha \rightarrow \infty$, considerando lo anterior las funciones para la superficie y curvatura obtienen los valores

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_S \left(\frac{p}{\alpha} \right) = -\frac{1}{8\pi} \quad (4.106)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_C \left(\frac{p}{\alpha} \right) = \frac{1}{12\pi^2}, \quad (4.107)$$

Para las condiciones tipo Neumann se establece $\alpha \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_S \left(\frac{p}{\alpha} \right) = 0 \quad (4.108)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_C \left(\frac{p}{\alpha} \right) = -\frac{1}{24\pi^2}. \quad (4.109)$$

Por tanto, sustituyendo estas funciones podemos obtener nuestra densidad de estados para una geometría esférica en la aproximación MRE para condiciones tipo Dirichlet y Neumann:

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{3\pi}{4pR} + \frac{1}{(pR)^2} \right], \quad (4.110)$$

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{1}{2(pR)^2} \right], \quad (4.111)$$

La densidad de estados (4.103) presenta un límite físico intrínseco para los valores de momento, ya que es cuadrática y, por tanto, tiene un rango de valores de momento negativos que no son físicamente aceptables. Esto impone un límite inferior Λ_{IR} en ambas soluciones, Eq (4.110) y Eq (4.111). Este parámetro tiene un valor de $\Lambda_{IR} = 1,8/R$ para las condiciones tipo Dirichlet y $\Lambda_{IR} = (R\sqrt{2})^{-1}$ para las condiciones tipo Neumann.

4.7.2. Volumen finito con geometría cúbica

Como hemos mencionado la densidad de estados en la aproximación MRE puede describirse usando diferentes tipos de geometrías, en la sección anterior hemos podido describir como esta densidad puede modificarse considerando un volumen esférico, pero recordemos que estrictamente hablando no sabemos cual será la forma en la que se presentará el condensado de quarks, por lo que podemos considerar cualquier otra geometría. En esta sección extenderemos esta aproximación a una forma más simple, consideraremos ahora un volumen cúbico con longitud L . Recordando la definición de ρ_{MRE} tenemos

$$\rho_{MRE} = \rho_{vol} + \rho_{surf} + \rho_{curv} \quad (4.112)$$

Lo cual podemos reescribir como

$$\left(\frac{dN}{dp} \right)_{total} = \frac{dN_v}{dp} + \left(\frac{dN_s}{dp} \right) f_S + \left(\frac{dN_c}{dp} \right) f_C \quad (4.113)$$

Nosotros sabemos que $dN_v = V d\mathbf{p}/(2\pi)^3$, usando coordenadas esfericas $d\mathbf{p} = 4\pi p^2 dp$, permitiendonos calcular la densidad de estados volumetrica

$$\rho_{vol} = \frac{1}{V} \frac{dN_v}{dp} = \frac{p^2}{2\pi^2} \quad (4.114)$$

De la misma manera podemos obtener la densidad superficial haciendo $dN_s = A d^2\mathbf{p}/(2\pi)^2$, donde A representa el área de las 6 caras del cubo de longitud L

$$\left(\frac{dN_s}{dp} \right) f_S = \frac{A p}{2\pi} \left(-\frac{1}{8\pi} \right) = -\frac{6L^2 L p}{16L\pi^2} \quad (4.115)$$

En donde hemos tomado $f_S = -\frac{1}{8\pi}$ (Dirichlet). Tomando la densidad de curvatura $f_C = 0$, podemos obtener la densidad de estados en la aproximación MRE para un cubo de longitud L

$$\rho_{MRE} = \frac{p^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{3}{4Lp} \right] \quad (4.116)$$

4.8. Susceptibilidad

La susceptibilidad determina la tasa de cambio del potencial termodinámico bajo la variación de algún parámetro de orden. La susceptibilidad quiral, por su parte, determina la tasa de cambio de la masa constitutiva de los quarks bajo la variación de su masa corriente m_0 [24, 99]

$$\chi_{ch} = \frac{\partial M}{\partial m_0} \quad (4.117)$$

Además, es posible utilizar la susceptibilidad quiral para encontrar transiciones de fase identificando singularidades en ella, dado que está directamente relacionada con la segunda derivada del potencial termodinámico [20, 100]

$$\chi_{ch} = \frac{T}{V} \frac{\partial^2}{\partial m_0^2} \ln Z = - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial m_0^2} \quad (4.118)$$

Así, un cambio muy abrupto en la susceptibilidad quiral nos indica un cambio de fase, ya que la concavidad de la segunda derivada del potencial termodinámico se asocia con la estabilidad de las soluciones de la ecuación de gap (Tabla 4.3). Esta relación entre la estructura de la susceptibilidad quiral y las transiciones de fase nos proporciona una herramienta para identificar y caracterizar diferentes estados de la materia en sistemas cuánticos cromodinámicos.

Segunda derivada	Estabilidad
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} > 0$	Estable
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} < 0$	Inestable
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} = 0$	Singularidad (punto de inflexión)

Tabla 4.3: Criterio de la segunda derivada de una función para el potencial termodinámico.

Recordemos que, según la QCD, la restauración de la simetría quiral ocurre cuando sometemos a nuestro sistema a condiciones extremas de densidad o temperatura, lo que da lugar a un punto (T, μ) en el diagrama de fases. Por lo tanto, nuestro sistema atravesará una transición de fase de simetría quiral rota a una simetría quiral restaurada. En el caso del modelo PNJL, también podemos comparar este punto con la transición del condensado cuando pasa de la fase de confinamiento a la de desconfinamiento.

En el modelo PNJL, el loop de Polyakov sirve como parámetro de orden para la ruptura de la simetría $Z(3)$, mientras que la restauración de la simetría quiral y la simetría $Z(3)$ dependen de la masa del quark constituyente y el loop de Polyakov. Esto se refleja en una matriz que contiene todas las segundas derivadas del potencial termodinámico respecto a estos parámetros

$$C_{MM} = \frac{1}{T\Lambda} \partial_{MM} \Omega \quad , \quad C_{\Phi\Phi} = \frac{1}{T\Lambda^3} \partial_{\Phi\Phi} \Omega \quad , \quad C_{\Phi^*\Phi^*} = \frac{1}{T\Lambda^3} \partial_{\Phi^*\Phi^*} \Omega \quad (4.119)$$

$$C_{M\Phi^*} = C_{\Phi^*M} = \frac{1}{T\Lambda^2} \partial_{M\Phi^*} \Omega \quad (4.120)$$

$$C_{M\Phi} = C_{\Phi M} = \frac{1}{T\Lambda^2} \partial_{M\Phi} \Omega \quad (4.121)$$

$$C_{\Phi\Phi^*} = C_{\Phi^*\Phi} = \frac{1}{T\Lambda^3} \partial_{\Phi\Phi^*} \Omega \quad (4.122)$$

lo que nos genera un matriz de la forma

$$C = \begin{pmatrix} C_{MM} & C_{M\Phi} & C_{M\Phi^*} \\ C_{\Phi M} & C_{\Phi\Phi} & C_{\Phi\Phi^*} \\ C_{\Phi^* M} & C_{\Phi^*\Phi} & C_{\Phi^*\Phi^*} \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

La matriz de susceptibilidad se forma al tomar cada componente de la matriz anterior y obtener su inversa $\chi_{ij} = [C\Lambda^{-1}]_{ij}$, donde i, j son los parámetros de orden $[M, \phi, \phi^*]$.

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{MM} & \chi_{M\Phi} & \chi_{M\Phi^*} \\ \chi_{\Phi M} & \chi_{\Phi\Phi} & \chi_{\Phi\Phi^*} \\ \chi_{\Phi^* M} & \chi_{\Phi^*\Phi} & \chi_{\Phi^*\Phi^*} \end{pmatrix} \quad (4.124)$$

Donde cada una de las componentes está representada por

- χ_{MM} : Susceptibilidad relacionada con la variación de la masa constitutiva de los quarks.
- $\chi_{M\Phi}$ y $\chi_{M\Phi^*}$: Susceptibilidades cruzadas relacionadas con la variación de la masa constitutiva de los quarks y el loop de Polyakov y su conjugado.
- $\chi_{\Phi\Phi}$: Susceptibilidad relacionada con la variación en el loop de Polyakov.
- $\chi_{\Phi\Phi^*}$: Susceptibilidad relacionada con el loop de Polyakov y su conjugado.
- $\chi_{\Phi M}$ y $\chi_{\Phi^* M}$: Susceptibilidades cruzadas relacionadas con la loop de Polyakov y su conjugado con la variación de la masa constitutiva de los quarks.
- $\chi_{\Phi^*\Phi^*}$: Susceptibilidad relacionada con la variación en el loop de Polyakov conjugado.

Esta matriz de susceptibilidad nos proporciona información detallada sobre cómo responden los parámetros de orden del modelo PNJL ante variaciones en sus variables conjugadas, lo que nos permite comprender mejor las transiciones de fase y la dinámica de la simetría quiral en condiciones extremas de temperatura y densidad. Una vez obteniendo el comportamiento de la susceptibilidad en cada punto de nuestro plano $T - \mu$, podemos identificar si existe una divergencia y por lo tanto saber si existe o no un CEP en cada variación volumétrica y en cada modelo que estemos considerando.

Nosotros definimos la susceptibilidad quiral como χ_{MM} . Además una observable asociada al loop de Polyakov definida como la susceptibilidad del loop de Polyakov promedio se define como [99]

$$\bar{\chi}_{\Phi\Phi} = \frac{1}{4} [\chi_{\Phi\Phi} + \chi_{\Phi^*\Phi^*} + 2\chi_{\Phi\Phi^*}] \quad (4.125)$$

Que corresponde a las fluctuaciones de la parte real del loop de Polyakov. Para calcular el punto aproximado en donde ocurre esta transición existen diferentes tipos de criterios. El criterio usado en este trabajo será considerar el ángulo formado por la pendiente entre 2 puntos consecutivos, si este ángulo es mayor a 89 grados entonces consideraremos que hubo un salto lo suficientemente grande para considerar una singularidad lo que equivale a un crecimiento exponencial en la susceptibilidad quiral.

Capítulo 5

Resultados

En el estudio del comportamiento de los quarks en condiciones extremas, nos enfrentamos a una complejidad significativa en el sistema. Sin embargo, mediante modelos simplificados, podemos adentrarnos en el análisis del condensado quiral, el diagrama de fases y la susceptibilidad quiral. Estas herramientas nos proporcionan información que podemos emplear para prever las condiciones aproximadas para la formación de esta materia exótica.

Como hemos observado anteriormente, el mecanismo del rompimiento espontáneo de la simetría quiral es fundamental para comprender la masa de las partículas compuestas por quarks, como los bariones y mesones. En modelos efectivos como el NJL y el PNJL, todos los términos de la lagrangiana son invariantes bajo transformaciones quirales, siempre y cuando la masa corriente sea nula ($m_0 = 0$). Sin embargo, si la masa corriente m_0 no es nula, se dice que la simetría quiral es aproximada. Para iniciar nuestro análisis, nos enfocaremos en examinar el comportamiento del diagrama de fases en el modelo NJL y emplearemos el criterio de la susceptibilidad para identificar el punto crítico (CEP). Todos nuestros resultados han sido cuidadosamente estudiados y presentados para su publicación [101, 102]

5.1. Parámetros

Los valores de los parámetros de regularización utilizados en este estudio son los siguientes: $\Lambda = 651$ MeV y $G = 10,08 \times 10^{-6}$ MeV⁻². Para la masa desnuda de los quarks, empleamos $m_0 = 5,5$ MeV. Además, consideramos las siguientes constantes: la masa del pión, $m_\pi = 139$ MeV, y la constante de decaimiento del pión, $f_\pi = 92,3$ MeV. También se toma en cuenta el valor para el condensado de quarks, $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = 251$ MeV. Estos parámetros y constantes han sido reportados previamente en la literatura por [17, 78]

5.2. Modelo NJL con $m_0 = 0$

Comenzaremos presentando los resultados para el modelo más simple que utilizamos el modelo NJL, cuya lagrangiana está descrita por la ecuación (4.11)

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_0 + G\langle \bar{\psi}\psi \rangle)\psi - \frac{G}{2}\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2$$

Recordemos que al hacer uso de la teoría cuántica de campos a temperatura finita, encontramos que el potencial termodinámico para el modelo NJL esta dado por la ecuación (4.38)

$$\Omega(T, \mu) = \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E_{\mathbf{p}} + T \ln [Z^+(E_{\mathbf{p}})] + T \ln [Z^-(E_{\mathbf{p}})] \right\}$$

Como hemos mencionado anteriormente debemos minimizar el potencial termodinámico para encontrar la ecuación de gap $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0$

$$0 = \frac{\sigma}{G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}} \right\}$$

A partir de la ecuación anterior, sabemos que la masa constitutiva de los quarks ($M = m_0 - \sigma$) es una función de la temperatura y el potencial químico. Por lo tanto, para representar el diagrama de fases, debemos realizar variaciones en estos parámetros. Podemos utilizar un algoritmo basado en el lenguaje *Mathematica* para encontrar las soluciones a la ecuación. Estos valores variarán desde $T = 0$ MeV hasta 300 MeV y $\mu = 0$ MeV hasta 350 MeV.

Empezaremos obteniendo el diagrama de fases para el modelo NJL con una masa corriente $m_0 = 0$ MeV dada por la Figura 5.1.

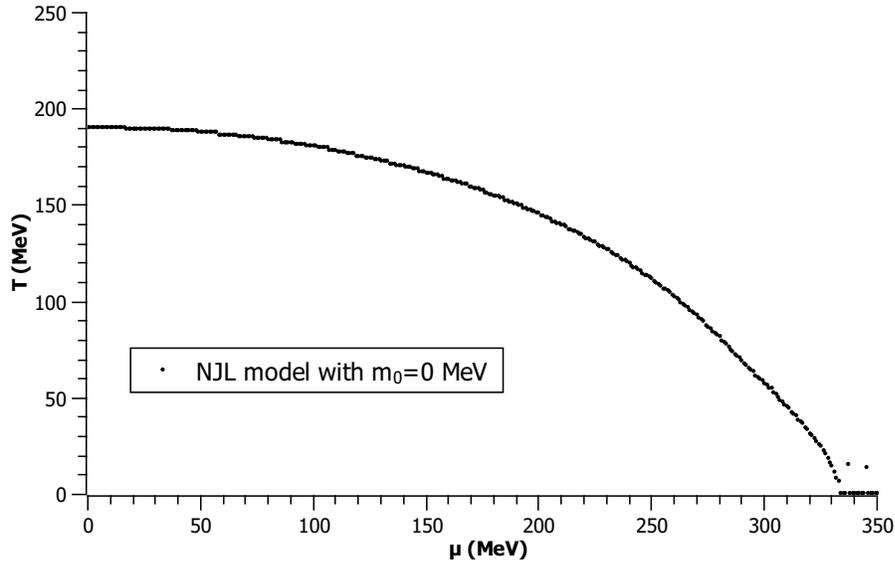


Figura 5.1: Diagrama de fases para el modelo NJL con $m_0 = 0$ MeV.

Al tomar esos valores para la temperatura y el potencial químico, podemos encontrar los puntos donde se alcanzan las máximas susceptibilidades y, al mapearlos, obtenemos el diagrama de fases como se muestra en la gráfica. Dado que en este modelo se asume una masa $m_0 = 0$ MeV, se conserva la simetría quiral.

5.3. Modelo NJL con $m_0 \neq 0$

Podemos realizar el mismo análisis para una lagrangiana que presenta una simetría quiral aproximada, obteniendo ahora el diagrama de fases para el modelo NJL con $m = 5,5$ MeV, como se muestra en la Figura 5.2. A diferencia del caso anterior, observamos que en este diagrama la transición ocurre a una temperatura $T \approx 200$ MeV. Para este sistema, se obtiene una simetría quiral parcial.

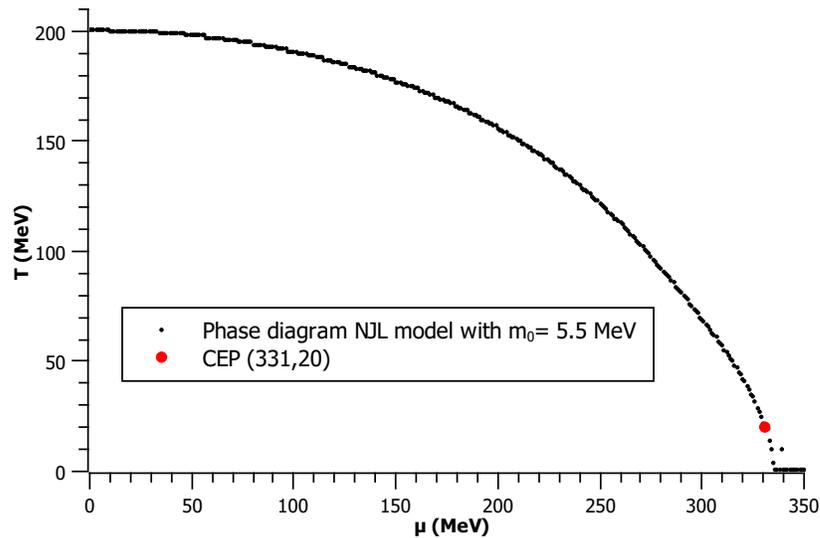


Figura 5.2: Diagrama de fases para el modelo NJL con $m_0 = 5,5$ MeV.

Al graficar las máximas susceptibilidades (Figura 5.3) obtenidas de cada variación en T y μ , podemos observar el comportamiento de este parámetro. Utilizando el criterio mencionado anteriormente, podemos determinar el punto crítico (CEP) para dicho sistema. Encontramos que la transición de fase ocurre en el punto $(331, 20)$, donde $\mu = 331$ MeV y $T = 20$ MeV.

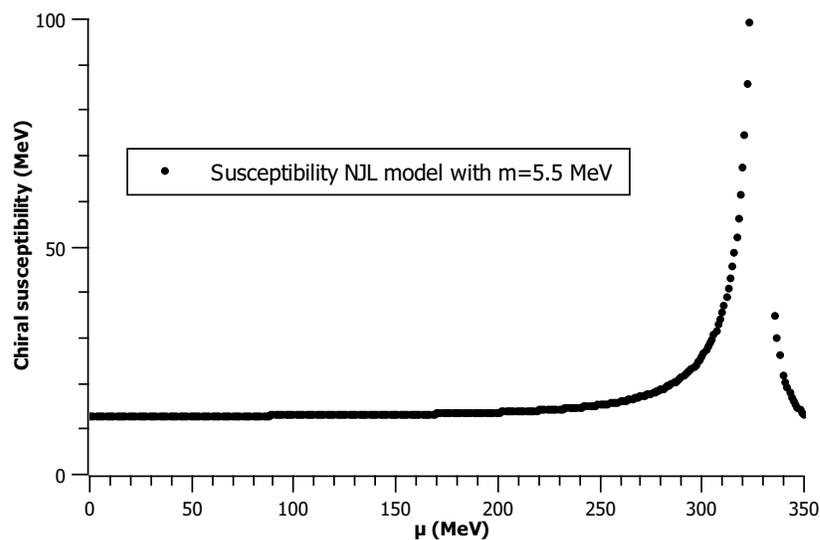


Figura 5.3: Susceptibilidad quiral máxima vs μ para el modelo NJL con $m_0 = 5,5$ MeV.

5.4. Modelo PNJL para volumen finito con $m_0 = 0$ y $\mu = 0$

Comenzamos con el modelo principal de nuestro trabajo, el modelo PNJL (Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio), que es una extensión del modelo NJL en el que se agrega un nuevo parámetro (Φ) que se propone como una solución para describir la propiedad del confinamiento. El potencial termodinámico en el modelo PNJL se describe mediante la ecuación (4.59).

$$\Omega_{PNJL} = \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*; T) + \frac{\sigma^2}{2G} - 2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + \frac{T}{N_c} \text{Tr}_c \ln [Z_{\Phi}^+(E_p)] + \frac{T}{N_c} \text{Tr}_c \ln [Z_{\Phi}^-(E_p)] \right\} \quad (5.1)$$

Al resolver las ecuaciones de gap, que resultan de minimizar el potencial termodinámico, podemos obtener el comportamiento del condensado quiral y el loop de Polyakov para diferentes geometrías y condiciones de volumen finito. En particular, en nuestro trabajo consideramos dos configuraciones llamadas MRE_D y MRE_N .

1. MRE_D se refiere a las condiciones de frontera tipo Dirichlet, donde se fija el valor del campo quiral en los bordes del sistema. Esto implica que el condensado quiral tendrá un comportamiento diferente en el interior en comparación con los bordes.
2. MRE_N se refiere a las condiciones de frontera tipo Neumann, donde se fija el valor de la derivada del campo quiral en los bordes del sistema. Esto implica que el condensado quiral y su derivada tendrán un comportamiento diferente en el interior en comparación con los bordes.

Además, en nuestro primer trabajo, consideramos un potencial de Polyakov (\mathcal{U}) de tipo polinomial. Este tipo de potencial es una simplificación común que se utiliza para describir la contribución del campo de Polyakov en el modelo PNJL. Sin embargo, existen diferentes variantes del potencial de Polyakov que pueden considerar efectos adicionales y fenómenos específicos.

En el límite quiral ($m_0 = 0$) y considerando el caso con $\mu = 0$, las curvas para el condensado quiral y el loop de Polyakov, muestran un comportamiento muy característico como se muestra en la figura 5.4. Las graficas (a y c) representan el condensado quiral para una esfera de radio R con condiciones a la frontera tipo Dirichlet y Neumann respectivamente y la gráfica (e) muestra el condensado quiral para una geometría cúbica con una longitud L . En ambas graficas (a y c) vemos que el tamaño del volumen juega un papel importante para la solución del condensado, mientras que para la gráfica (e) estas diferencias son mínimas, además podemos encontrar la masa constitutiva en el límite quiral para cada geometría con sus diferentes tamaños (Tabla 5.1). Otra característica principal que podemos ver es que todas las gráficas se van a cero para una temperatura suficientemente alta.

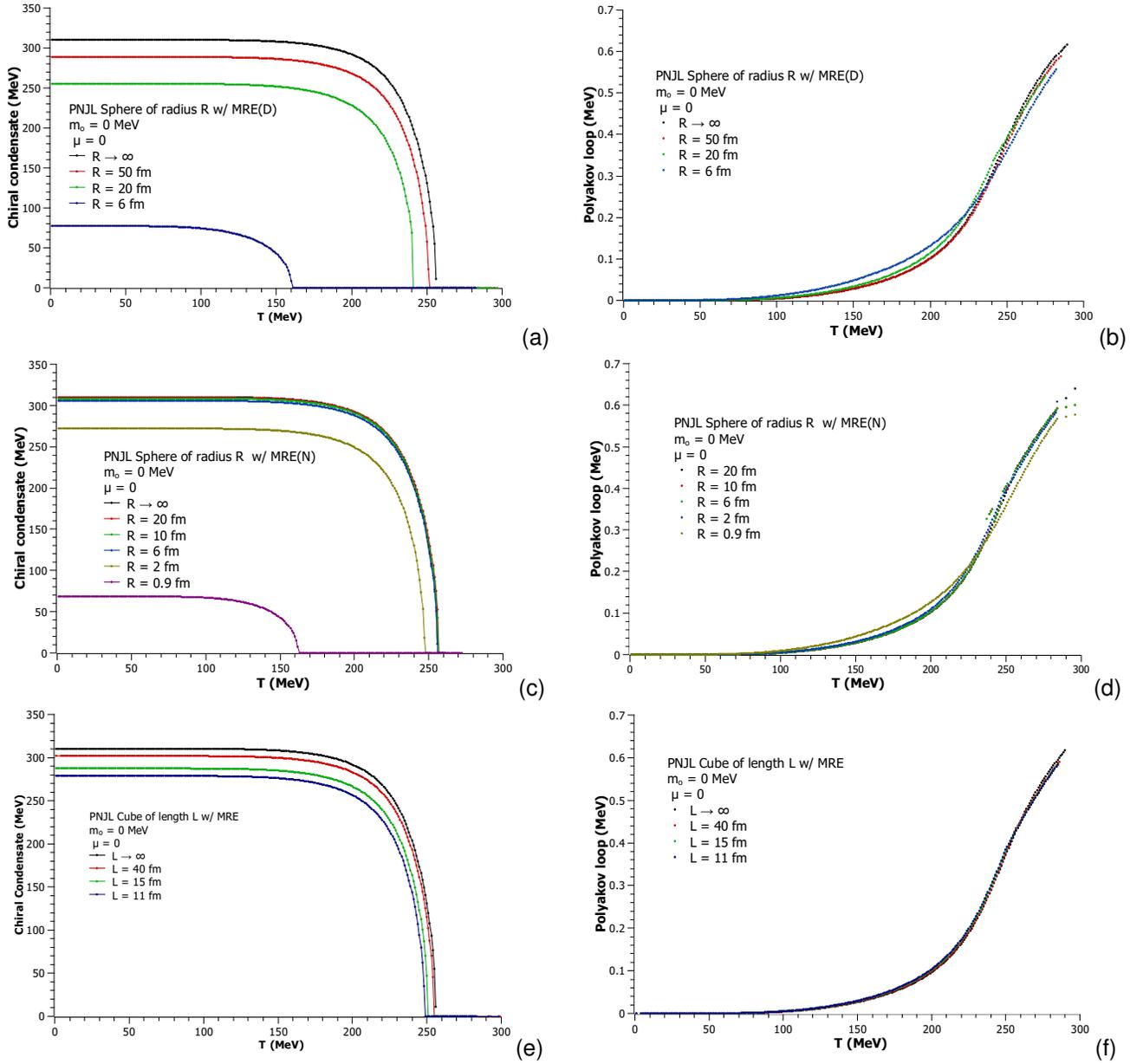


Figura 5.4: Comparación del comportamiento del parámetro de orden en función de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE en formas esférica y cúbica con diferentes volúmenes y $m_0 = 0$ MeV.

Las gráficas (b, d y f) muestran el comportamiento del loop de Polyakov para las diferentes geometrías mencionadas. Podemos observar que el desconfinamiento ocurre a una temperatura similar en todos los casos, alrededor de $T = 150$ MeV. Es importante recordar que cuando hablamos del modelo NJL, no tomamos en cuenta la propiedad del confinamiento. En este modelo, solo podemos hablar de una simetría quiral rota ($\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$) o una simetría quiral restaurada ($\langle \bar{q}q \rangle = 0$).

En cambio, en el modelo PNJL, podemos hablar de una fase hadrónica, donde los quarks están aún confinados en hadrones, y una fase desconfiada, donde se libera el color y se obtiene un plasma de quarks y gluones. Esta transición de fase ocurre cuando el parámetro Φ es diferente de cero, lo que indica la presencia del campo de Polyakov y la ruptura del confinamiento.

En otras palabras, estas gráficas nos muestran el proceso gradual que conlleva a la separación de los hadrones en sus componentes fundamentales. Según este modelo, se necesita alcanzar una temperatura mínima de aproximadamente $T \approx 100$ MeV para que este proceso comience.

A medida que aumentamos la temperatura, el número de hadrones que atraviesan el proceso de desconfiamento aumenta. Esto implica que más y más hadrones se descomponen en sus componentes fundamentales (quarks y gluones) a medida que la temperatura se eleva. Eventualmente, cuando el parámetro Φ se acerca a 1, todos los hadrones se vuelven parte de un plasma de quarks y gluones (QGP), lo que indica la completa desconfiación de los quarks y la pérdida de la estructura hadrónica.

Por lo tanto, el modelo PNJL describe este proceso gradual de desconfiamento a medida que la temperatura aumenta, desde la existencia de hadrones en la fase hadrónica hasta la formación del QGP a temperaturas más altas. La temperatura crítica de desconfiamento marca el inicio de este proceso, y a medida que se supera esa temperatura, cada vez más hadrones participan en la transición hacia el QGP.

PNJL MRE_D Sphere

Constituent mass M	
$m_o = 0$	
R (f)	M (MeV)
50	288.78
20	255.19
10	193.18
6	77.35

PNJL MRE_N Sphere

Constituent mass M	
$m_o = 0$	
R (f)	M (MeV)
20	309.81
10	308.63
6	305.88
2	272.13
0.9	68.40

PNJL MRE Cube

Constituent mass M	
$m_o = 0$	
L (f)	M (MeV)
40	301.74
15	287.30
13	283.68
11	278.69
9	271.39
5	237.63

Tabla 5.1: Masa constitutiva en el límite quiral usando el modelo PNJL con volumen finito para diferentes tamaños y geometrías.

5.5. Susceptibilidades para volumen finito con $m_0 = 0$ y $\mu = 0$

Cuando observamos picos o crecimientos muy abruptos en la susceptibilidad (segunda derivada del potencial termodiámico), esto es un indicativo de un cambio de fase en el modelo. Estos cambios ocurren a una temperatura quiral (T_{ch}) y a una temperatura para el loop de Polyakov promedio (T_d). La Figura 5.5 nos muestra el comportamiento de estas susceptibilidades para el modelo PNJL a volumen finito en el límite quiral $m_0 = 0$ y $\mu = 0$ MeV.

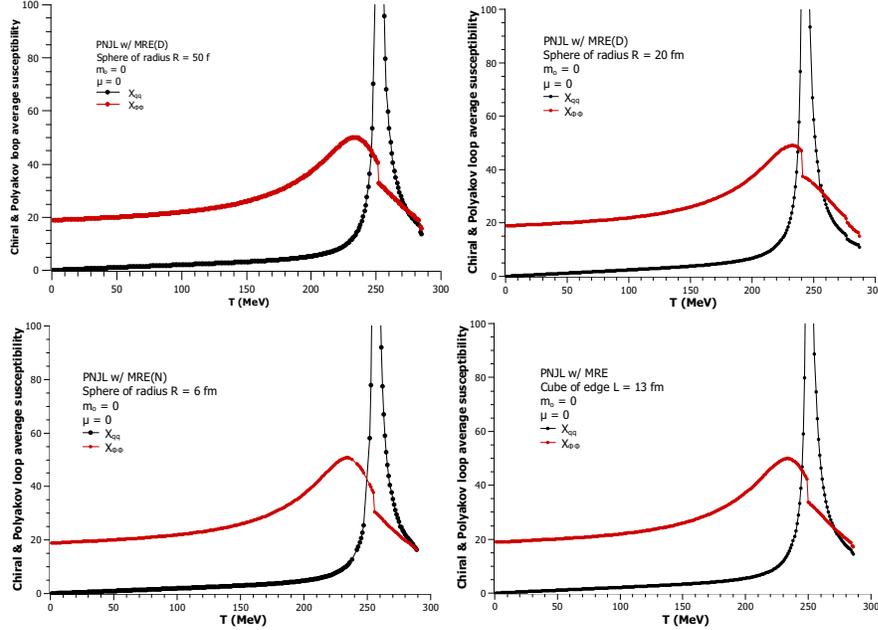


Figura 5.5: Susceptibilidades para el modelo PNJL y la aproximación MRE_D de volumen finito en el límite quiral y $\mu = 0$.

PNJL MRE_D Sphere		PNJL MRE_N Sphere		PNJL MRE Cube	
Chiral Temperature T_{ch}		Chiral Temperature T_{ch}		Chiral Temperature T_{ch}	
$m_0 = 0$		$m_0 = 0$		$m_0 = 0$	
R (f)	T_{ch} (MeV)	R (f)	T_{ch} (MeV)	L (f)	T_{ch} (MeV)
50	251	20	257	40	253
20	242	10	257	15	251
10	223	6	256	13	250
6	161	2	247	11	249
		0.9	163	9	247
				5	237

Tabla 5.2: Temperatura quiral T_{ch} para $\mu = 0$ en el modelo PNJL en un volumen finito, para diferentes tamaños de volumen y geometrías en el límite quiral $m_0 = 0$.

El loop de Polyakov promedio $\bar{\chi}_{\Phi\Phi}$ muestra un máximo valor a una temperatura que es menor a la temperatura quiral T_{ch} para todas las geometrías. Además podemos notar que mientras que la susceptibilidad quiral crece de forma exponencial para estos tamaños de volumen, este comportamiento no ocurre para el loop de Polyakov. En la tabla (5.2) podemos encontrar a que temperatura ocurren estos picos para todas las geometrías y todos los tamaños de volumen.

5.6. Modelo PNJL para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu = 0$

Si ahora tenemos una masa corriente diferente de cero, obtendremos una restauración de la simetría quiral aproximada y lo podemos notar en el comportamiento de la Figura 5.6, ya que el condensado quiral nunca se va a cero debido al valor presente de la masa corriente.

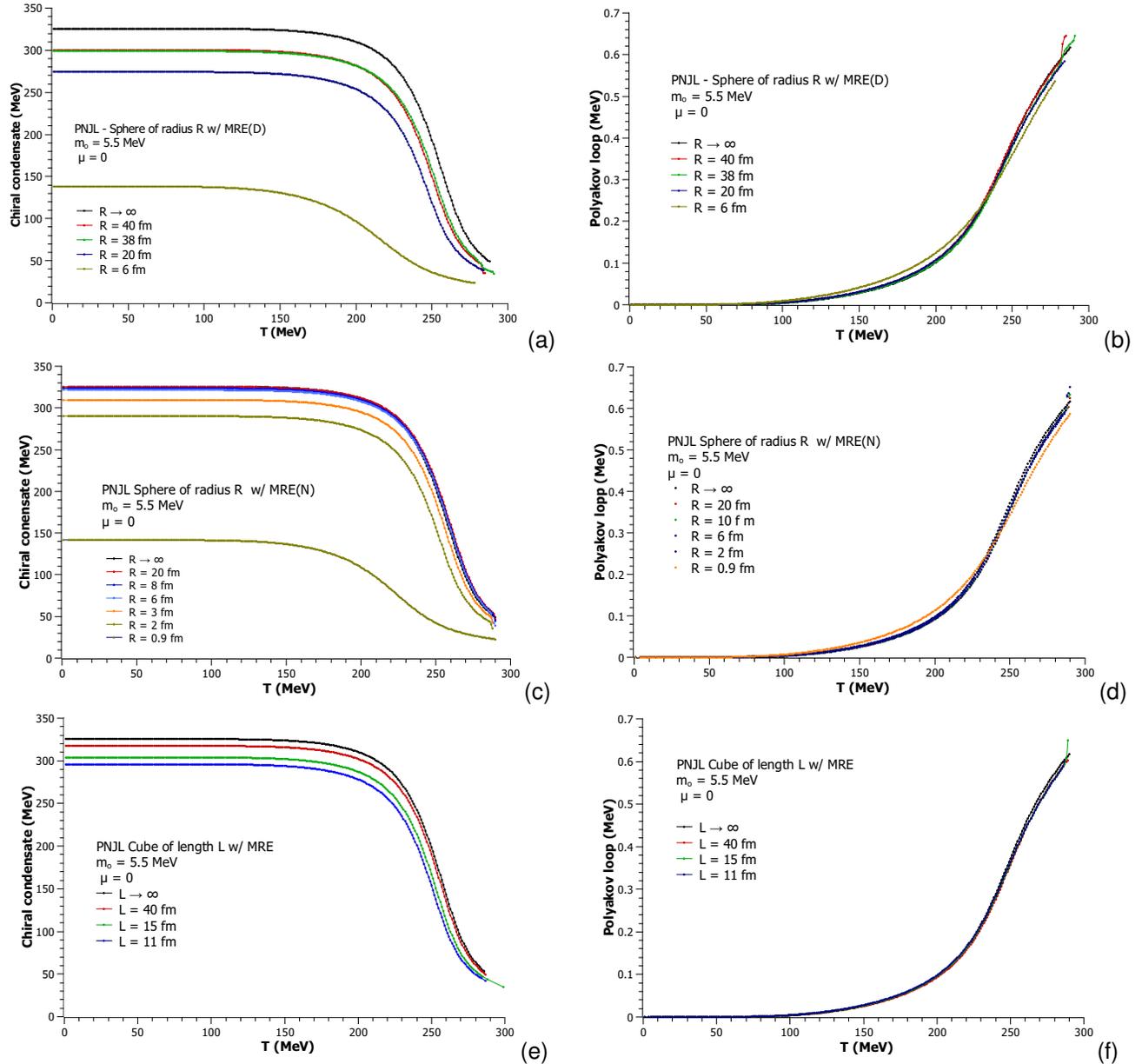


Figura 5.6: Comparación del comportamiento del parámetro de orden en función de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE en formas esférica y cúbica con diferentes volúmenes y $m_0 = 5,5$ MeV.

Similar a la gráfica anterior podemos notar que en un modelo con geometría esférica (a y c), el tamaño del volumen que se considera influye en gran medida el comportamiento del condensado, mientras que para una geometría cúbica (e) la variación en el volumen de la caja no representa alteraciones significativas. Además las gráficas para el loop de Polyakov también son muy similares dando como resultado que el parámetro $\Phi \neq 0$ para temperaturas por encima de $T \approx 150$ MeV. Comparando los resultados que obtuvimos

para ambas gráficas (Tabla 5.1) y (Tabla 5.3) podemos observar que independientemente del tamaño o geometría que se utilice la masa constitutiva es mayor cuando hay una masa corriente $m_0 \neq 0$.

PNJL MRE _D Sphere		PNJL MRE _N Sphere		PNJL MRE Cube	
Constituent mass M		Constituent mass M		Constituent mass M	
$m_o = 5,5$ MeV		$m_o = 5,5$ MeV		$m_o = 5,5$ MeV	
R (f)	M (MeV)	R (f)	M (MeV)	L (f)	M (MeV)
50	305.33	20	325.15	40	317.52
40	300.21	10	324.04	15	303.94
38	298.86	8	323.22	13	300.55
20	274.15	6	321.46	11	295.90
10	219.16	4	316.49	9	289.11
6	138.1	3	309.61	5	258.20
		2	290.12		
		0.9	141.55		

Tabla 5.3: Masa constitutiva para $m_0 = 5,5$ MeV usando el modelo PNJL con volumen finito, para diferentes tamaños y geometrías.

5.6.1. Suceptibilidades para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu = 0$

Nosotros también estamos interesados en conocer como se comportan estas suceptibilidades cuando tenemos $m_0 = 5,5$ MeV y $\mu = 0$. En la Figura 5.7 podemos notar que hemos normalizado el loop de Polyakov para poder apreciar un poco mejor como se comporta en comparación con el condensado quiral (lado izquierdo). Al mismo tiempo podemos ver cuales son los valores de las suceptibilidades para estos sistemas (lado derecho), en donde vemos que la temperatura critica para $\bar{\chi}_{\Phi\Phi}$ es $T_d \approx 234$ MeV. Las temperaturas criticas para χ_{MM} se muestran en la tabla (5.4) para las diferentes geometrías y volúmenes.

PNJL MRE _D Sphere		PNJL MRE _N Sphere		PNJL MRE Cube	
Chiral Temperature T_{ch}		Chiral Temperature T_{ch}		Chiral Temperature T_{ch}	
$m_o = 5,5$ MeV		$m_o = 5,5$ MeV		$m_o = 5,5$ MeV	
R (f)	T_{ch} (MeV)	R (f)	T_{ch} (MeV)	L (f)	T_{ch} (MeV)
50	263	20	269	40	267
40	260	10	269	15	263
38	262	8	269	13	260
20	255	6	268	11	261
10	240	4	267	9	259
6	216	3	265	5	251
		2	260		
		0.9	221		

Tabla 5.4: Temperatura quiral T_{ch} para $\mu = 0$ en el modelo PNJL en un volumen finito, para diferentes tamaños de volumen y geometrías para $m_0 = 5,5$ MeV

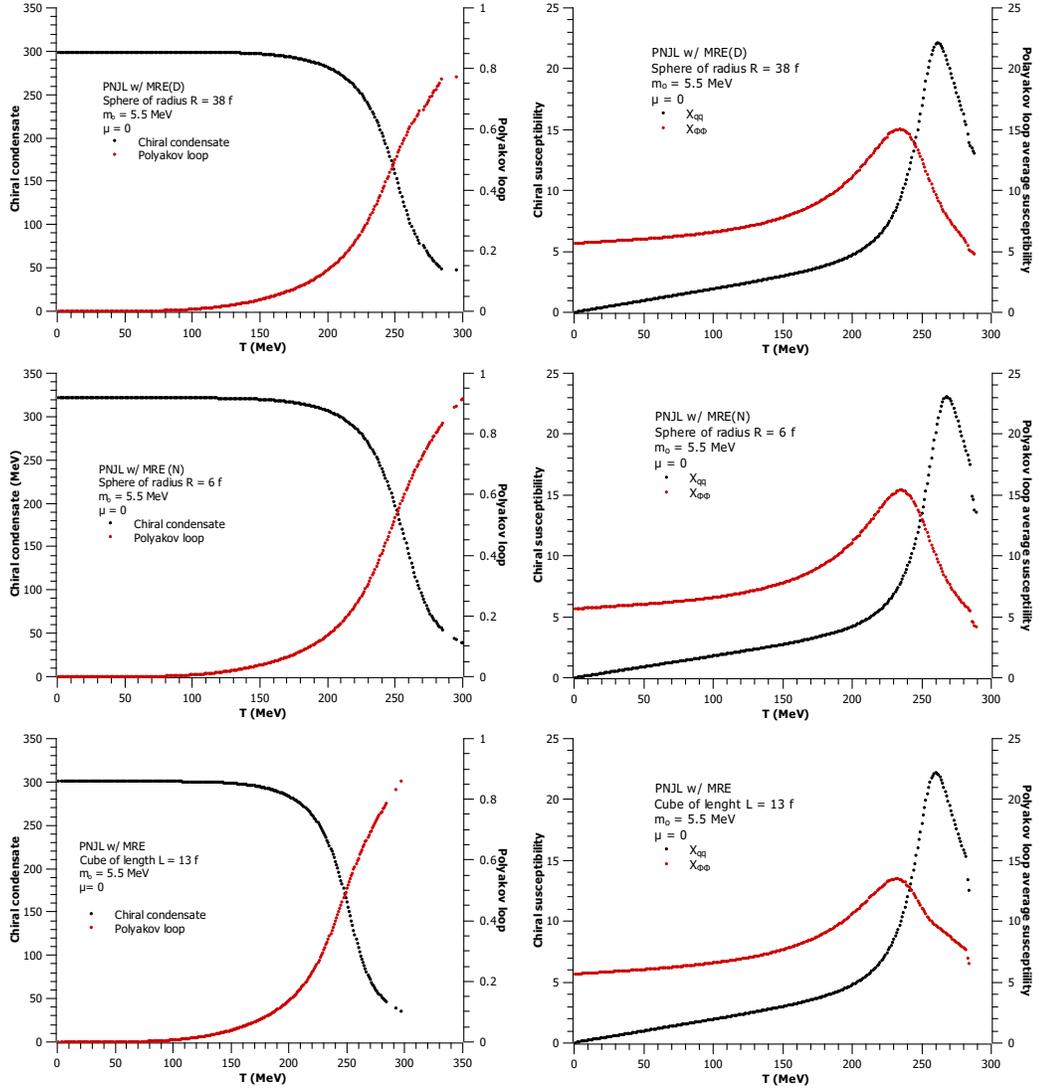


Figura 5.7: Izquierda, parámetros de orden en función de la temperatura a $\mu = 0$. Derecha, susceptibilidad quiral y susceptibilidad media del loop de Polyakov $\overline{\chi}_{\Phi\Phi}$. Arriba, modelo PNJL con aproximación MRE_D para una esfera de $R = 38$ fm. Centro, PNJL para una esfera de $R = 6$ fm con MRE_N. Abajo, un cubo de $L = 13$ fm.

5.7. Modelo PNJL para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$

Cuando trabajamos con modelos efectivos, es importante tener en cuenta que estamos utilizando una aproximación al modelo completo debido a la complejidad de su resolución. Siempre debemos comparar nuestros resultados con lo que se conoce de la LQCD. Es por esta razón que generalmente deseamos estudiar el comportamiento del condensado y los parámetros de orden cuando no hay variación en μ (régimen en el cual LQCD es más confiable y precisa).

Sin embargo, al intentar obtener un diagrama de fases, necesitamos comprender cómo se comporta nuestro sistema al aumentar el potencial químico μ . Esto se debe a que el potencial químico juega un papel crucial en el estudio de la materia densa y en la formación de nuevas fases de la materia. Por lo tanto, es necesario investigar cómo se modifican las propiedades termodinámicas y el comportamiento del condensado a medida que se varía el potencial químico.

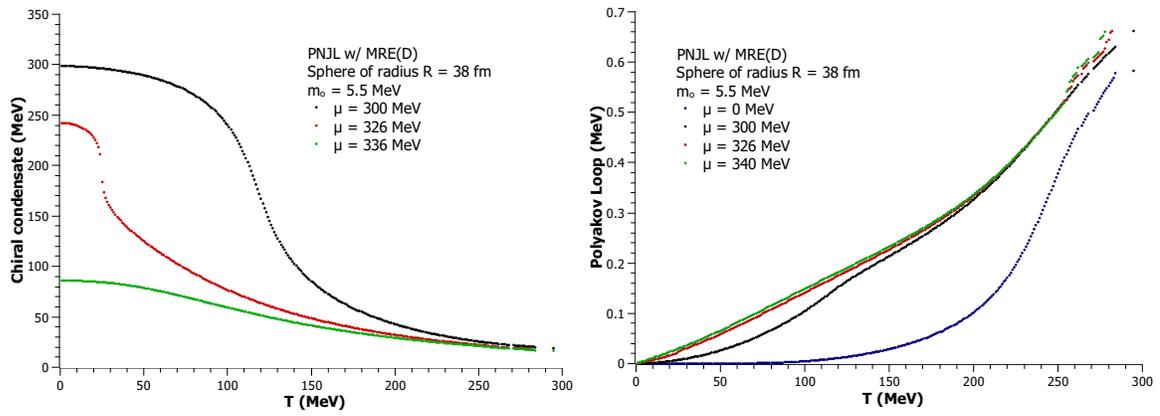


Figura 5.8: PNJL con aproximación MRE_D para una esfera de $R = 38$ f. Parámetros de orden en función de la temperatura para distintos valores de potencial químico, $\mu = 300, 326$ y 336 MeV. Izquierda, condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Derecha, loop de Polyakov.

La Figura 5.8 muestra la variación de los parámetros de orden para diferentes valores de μ en el modelo PNJL con geometría esférica ($R = 38$ fm) y condiciones tipo Dirichlet. En la figura izquierda, podemos observar un comportamiento tipo crossover (línea negra) cuando tenemos un potencial químico $\mu = 300$ MeV. A medida que aumentamos el valor de μ hasta $\mu = 326$ MeV (línea roja), ocurre una caída abrupta y un cambio en el punto de inflexión, lo cual sucede aproximadamente a $T \approx 25$ MeV. Posteriormente, al aumentar aún más el valor de μ a $\mu = 336$ MeV (línea verde), el comportamiento muestra un patrón suave. Este comportamiento es una clara señal de un cambio en el tipo de transición de fase, que se asocia con la existencia y localización del CEP. Las curvas para el loop de Polyakov se muestran en la parte derecha de la figura y podemos ver que mientras mayor sea μ el desconfinamiento ocurre más rápido debido al comportamiento del parámetro Φ .

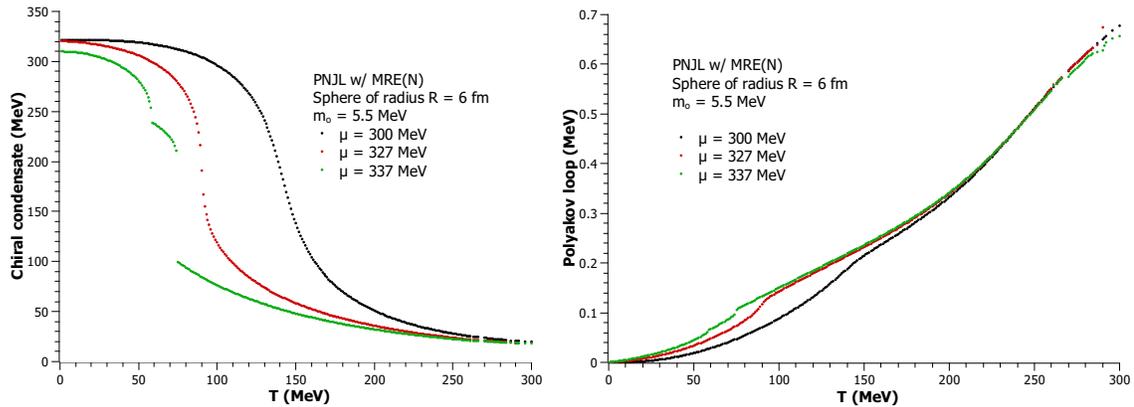


Figura 5.9: PNJL con aproximación MRE_N para una esfera de $R = 6$ f. Parámetros de orden en función de la temperatura para diferentes valores del potencial químico, $\mu = 300, 327$ y 337 MeV. Izquierda, condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Derecha, loop de Polyakov.

Las Figuras 5.9 y 5.10 representan la información de diferentes potenciales μ para una geometría esférica con condiciones tipo Neumann y una geometría cúbica respectivamente. Se muestra un comportamiento similar al visto anteriormente con una ligera diferencia en los valores donde ocurre este cambio abrupto en el parámetro de orden.

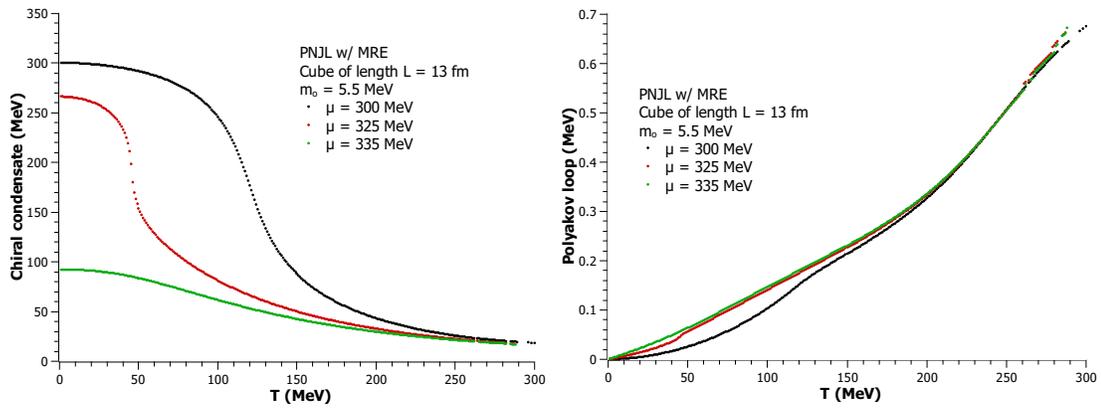


Figura 5.10: PNJL con aproximación MRE para un cubo de $L = 13$ f. Parámetros de orden en función de la temperatura para distintos valores de potencial químico, $\mu = 300, 325$ y 335 MeV. Izquierda, condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. Derecha, loop de Polyakov.

5.7.1. Suceptibilidades para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$

Al observar el comportamiento de la susceptibilidad quiral, es lógico preguntarse si el tamaño del volumen considerado en cada geometría influye en el valor y comportamiento de este parámetro. La respuesta es afirmativa. No solo el aumento del potencial químico puede dar lugar a una transición, sino que el tamaño del volumen también determina este cambio de fase.

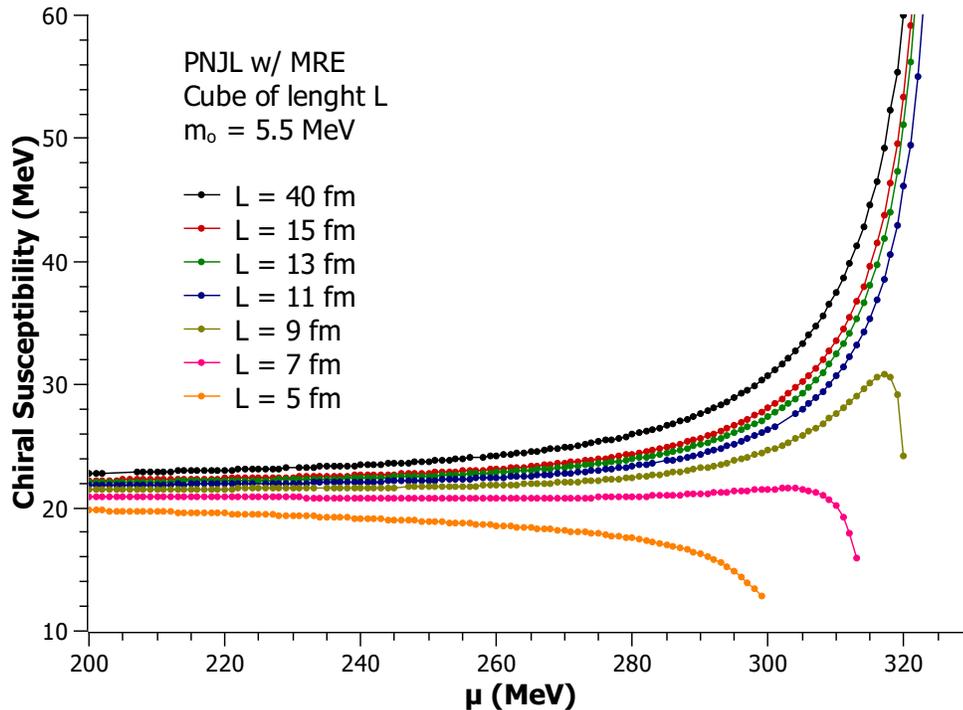


Figura 5.11: Susceptibilidad quiral máxima para cada valor de μ . Modelo PNJL con volumen finito utilizando la aproximación MRE para un cubo de longitud L .

Al realizar las variaciones en el potencial químico y la temperatura, es posible encontrar la susceptibilidad quiral máxima y graficar dicho comportamiento para diferentes tipos de tamaños y geometrías. En la Figura 5.11, se muestra la susceptibilidad quiral máxima para una geometría cúbica con una masa corriente de $m_0 = 5,5$ MeV. Cada curva en la figura corresponde a un tamaño L diferente del volumen.

Al analizar las curvas en la figura, se puede observar un comportamiento asintótico que sugiere la existencia de un punto crítico. Se observa que para tamaños de volumen muy pequeños (L), no se observa dicho comportamiento. Sin embargo, a medida que se aumenta el tamaño del volumen, se observa una tendencia creciente en la susceptibilidad quiral máxima, y aproximadamente para $L = 13$ fm se manifiesta claramente este comportamiento asintótico.

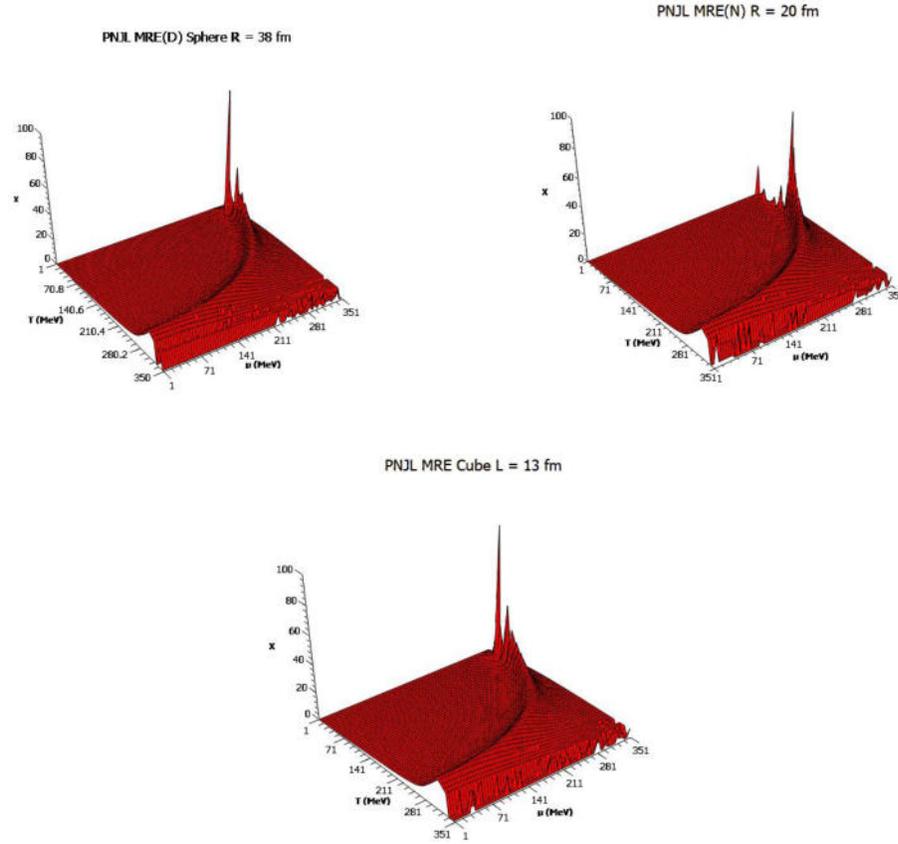


Figura 5.12: Susceptibilidad quiral en el plano $T - \mu$ para esferas MRE_D y MRE_N y un cubo MRE de $R = 38, 20$ y $L = 13$ fm en el modelo PNJL para un volumen finito con aproximación MRE.

Este comportamiento divergente de χ_{MM} puede reflejarse mejor al obtener un plano 3-Dimensional en el cual tomamos los valores de (T, μ, χ_{max}) de cada geometría en donde conocemos que este parámetro aumenta. La Figura 5.12 nos muestra los valores de la susceptibilidad quiral conforme cambiamos los parámetros T y μ , al llegar un cierto valor el parámetro de orden se dispara, dejando un pico que podemos asociar con la ubicación del CEP.

5.8. Diagramas de fase modelo PNJL para volumen finito

La Figura 5.13 muestra el diagrama de fases para diferentes tamaños de una esfera y un cubo. Como referencia, el diagrama de fases de PNJL para un volumen infinito, es decir, sin MRE, se muestra como una curva negra para cada geometría.

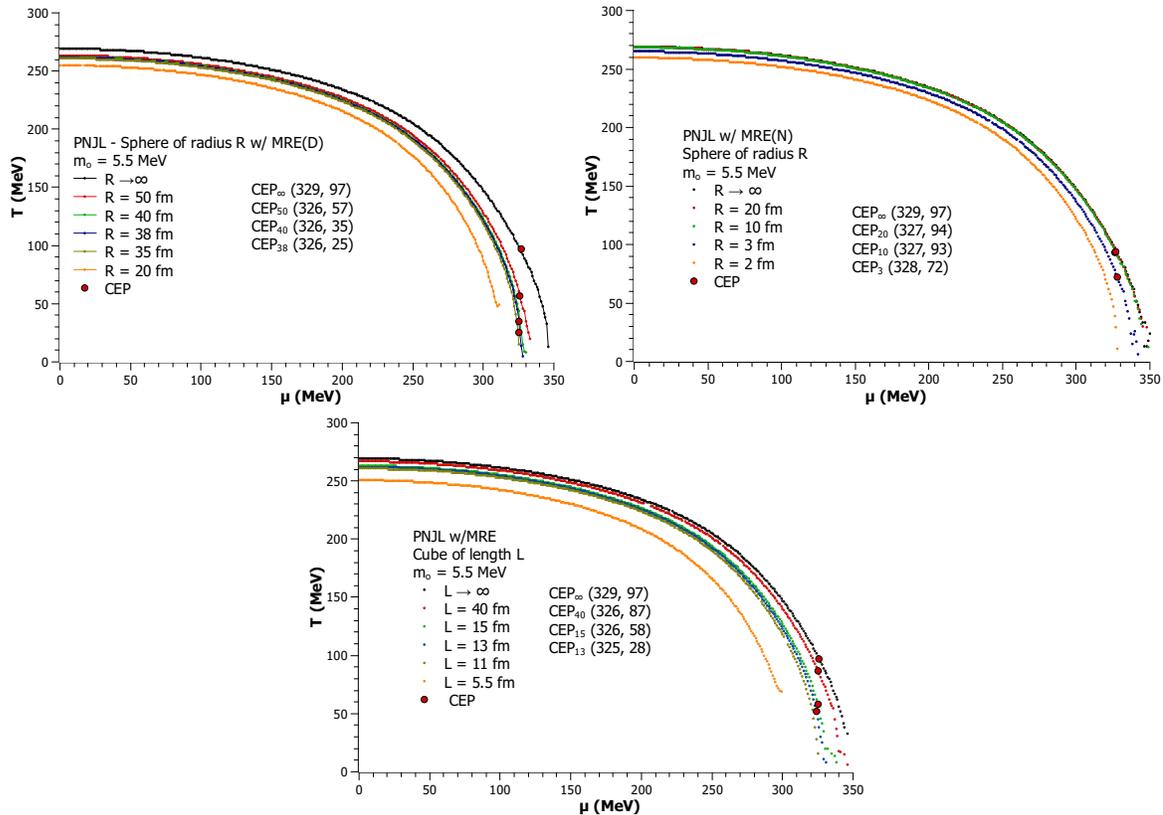


Figura 5.13: Diagrama de fases del modelo PNJL en un volumen finito para esfera con MRE_D (izquierda), MRE_N (derecha) y cubo (abajo) con diferentes tamaños de volumen.

En el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE, se ha observado que a medida que se reduce el tamaño del volumen, es decir, al disminuir el radio o los valores de arista, los valores de la temperatura crítica también disminuyen. Esto significa que se necesita una temperatura menor para alcanzar la transición de fase en un volumen más pequeño. Además, la posición del CEP, también se ve afectada por el tamaño del volumen. A medida que el volumen se reduce, la posición del CEP se desplaza a temperaturas más bajas. Esto significa que la existencia de un CEP se vuelve menos probable en volúmenes más pequeños y, eventualmente, puede desaparecer por completo.

Estos efectos se deben a la influencia del tamaño del volumen en la termodinámica del sistema. En volúmenes finitos, las fluctuaciones térmicas y la presencia de fronteras pueden alterar las propiedades del sistema y modificar las transiciones de fase. Por lo tanto, es importante tener en cuenta el tamaño del volumen cuando se estudia el modelo PNJL en la aproximación MRE, ya que puede afectar significativamente las temperaturas críticas y la existencia del CEP.

En una esfera con condiciones de frontera MRE_D , se ha observado que el CEP desaparece para valores de radio iguales o inferiores a 35 fm. Esto significa que, en una esfera con un radio menor o igual a 35 fm, no se encuentra evidencia de la existencia de un CEP.

Por otro lado, en una esfera con condiciones de frontera MRE_N , se ha encontrado que el CEP está presente para un radio de 3 fm, pero no para radios de 2 fm o inferiores. Esto indica que en una esfera con un radio de 3 fm, se observa un CEP, pero en esferas más pequeñas, el CEP no se encuentra.

En el caso de una geometría cúbica, se ha observado que la curva obtenida apenas muestra sensibilidad al tamaño del volumen. En esta geometría, se ha encontrado que el CEP existe y se muestra para volúmenes grandes, disminuyendo gradualmente a medida que aumenta la temperatura. Sin embargo, el CEP desaparece en un cubo con una longitud de lado de 11 fm.

PNJL MRE_D Sphere		PNJL MRE_N Sphere		PNJL MRE Cube	
R (f)	CEP (μ, T)	R (f)	CEP (μ, T)	L (f)	CEP (μ, T)
$R \gg 1$	(329, 97)	$R \gg 1$	(329, 97)	$L \gg 1$	(329, 97)
50	(326, 57)	20	(327, 94)	40	(326, 87)
40	(326, 35)	10	(327, 93)	15	(326, 58)
38	(326, 25)	8	(327, 92)	13	(325, 28)
< 35	—	6	(327, 90)	< 11	—
		4	(327, 84)		
		3	(328, 72)		
		< 2	—		

Tabla 5.5: CEP para el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE. Izquierda, esfera de radio R con condiciones Dirichlet. Centro, para condiciones de Neumann. Derecha, para un cubo de longitud L .

En resumen, los resultados muestran que la existencia y posición del CEP están influenciados por el tamaño y la geometría del volumen en el modelo PNJL con aproximación MRE. La tabla (5.7) resume y muestra los CEP encontrados para diferentes tamaños de volumen y geometrías.

5.9. Modelo PNJL (corte suave) para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu = 0$

Para nuestro segundo trabajo seguiremos los lineamientos anteriores, es decir, consideraremos un modelo PNJL con volumen finito en la aproximación MRE para una geometría esférica y cúbica. Pero con la diferencia que ahora nuestro potencial termodinámico está dado por la ecuación (4.99).

$$\begin{aligned} \Omega_{PNJL}^{soft} = & \mathcal{U}(\varphi, \varphi^*; T) + \frac{\sigma^2}{4G} - 12 \int_0^\Lambda \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \\ & - 12 T \int_0^\Lambda \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}} + \mu)} L) \right] \\ & - 12 T \int_\Lambda^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}|_{\sigma=0} - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}|_{\sigma=0} + \mu)} L) \right] \end{aligned}$$

El potencial termodinámico utilizado previamente en el modelo PNJL no describe adecuadamente la termodinámica del sistema, ya que no incluye el límite de Stefan-Boltzmann. Al realizar un corte ultravioleta (UV) para eliminar las divergencias, no estamos teniendo en cuenta la contribución de los momentos con valores superiores a Λ en la integral. Por esta razón, hemos modificado nuestro potencial para investigar los cambios que ocurren y determinar si son realmente importantes para tener en cuenta.

Es importante considerar que al tomar en cuenta la integral sobre los momentos más altos que Λ , se obtienen contribuciones adicionales al potencial termodinámico que pueden tener un impacto significativo en la descripción de la termodinámica del sistema. Al incluir correctamente el límite de Stefan-Boltzmann, podemos capturar mejor las propiedades termodinámicas en momentos de alta energía y asegurar una descripción más precisa del sistema.

Por lo tanto, al modificar nuestro potencial, buscamos examinar y comprender los cambios que ocurren en las propiedades termodinámicas del sistema, y evaluar la importancia de tener en cuenta estas contribuciones adicionales en nuestra descripción del modelo PNJL.

En la Figura 5.14, en las subfiguras izquierdas (a, c, e), se muestra el comportamiento del condensado quiral para diferentes tipos de geometría, donde cada línea representa un volumen específico. Comenzamos con un volumen de tamaño pequeño y gradualmente aumentamos el radio o la longitud de cada geometría. También comparamos estos resultados con el caso de un volumen infinito, que se alcanza cuando consideramos una densidad de estados $\rho = \frac{p^2}{2\pi^2}$.

A medida que aumentamos el tamaño del sistema, podemos observar una cierta tendencia en la curva del condensado quiral. En particular, se genera una masa dinámica más grande para bajas temperaturas en sistemas de mayor tamaño.

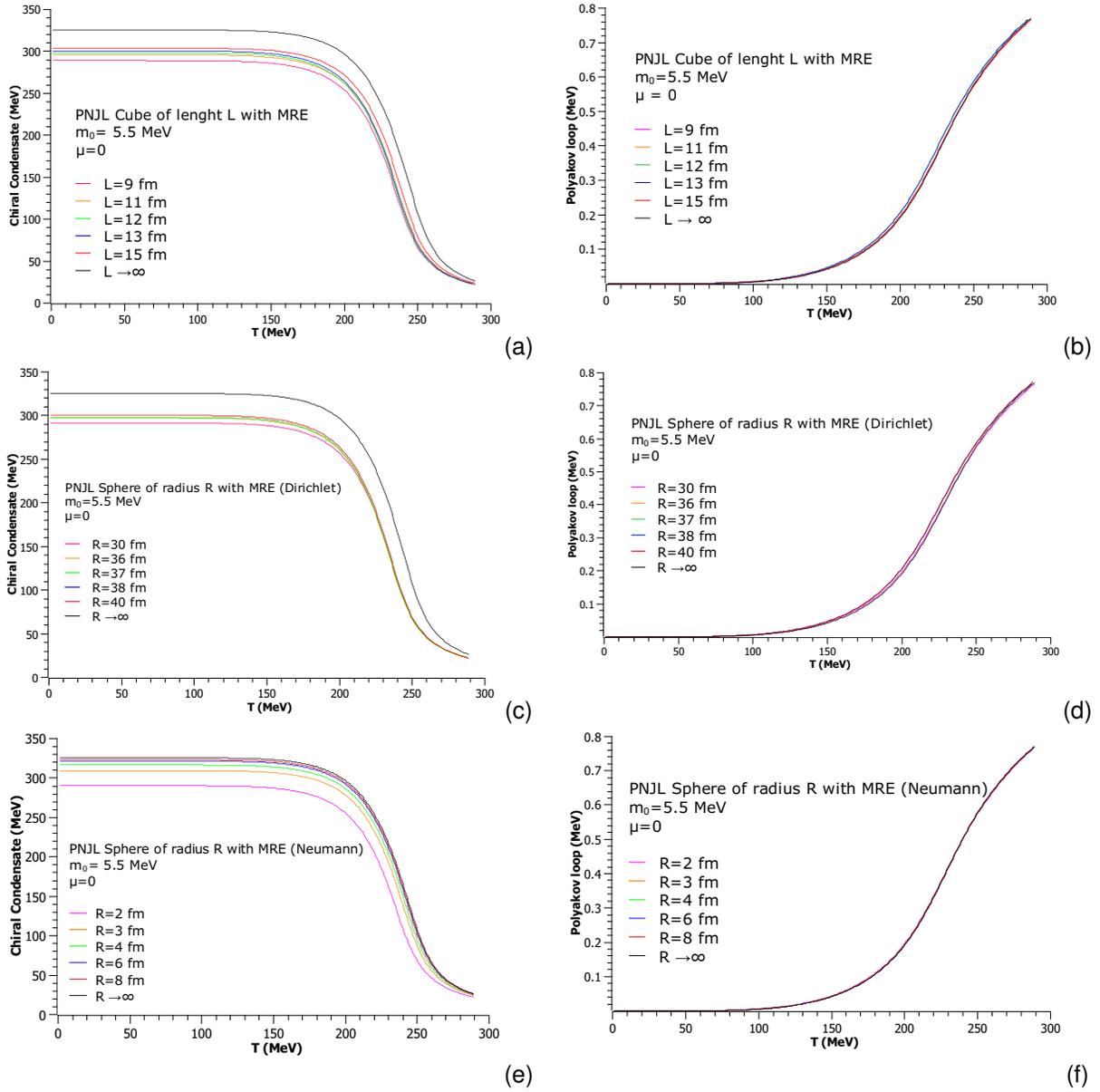


Figura 5.14: Condensado quiral y loop de Polyakov como funciones de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE (potencial polinómico) en formas esférica y cúbica con diferentes volúmenes y $m_0 = 5,5$ MeV.

Estos resultados indican que el tamaño del volumen puede tener un impacto significativo en la generación de masa y en el comportamiento del condensado quiral. A medida que aumentamos el volumen, el sistema tiene más grados de libertad y la interacción entre los quarks y los gluones se ve influenciada. Esto puede conducir a una mayor generación de masa y una mayor ruptura de la simetría quiral a bajas temperaturas.

PNJL MRE Cube		PNJL MRE _D Sphere		PNJL MRE _N Sphere	
Constituent mass M		Constituent mass M		Constituent mass M	
	$m_o = 5,5 \text{ MeV}$		$m_o = 5,5 \text{ MeV}$		$m_o = 5,5 \text{ MeV}$
L (f)	M (MeV)	R (f)	M (MeV)	R (f)	M (MeV)
15	303.94	40	300.21	8	323.22
13	300.55	38	298.86	6	321.46
12	298.42	37	298.12	4	316.49
11	295.90	36	297.35	3	309.61
9	289.11	30	291.61	2	290.12

Tabla 5.6: Masa constitutiva para $m_o = 5,5 \text{ MeV}$ utilizando el modelo PNJL en un volumen finito, para diferentes tamaños y geometrías.

En el panel derecho de la Figura 5.14, subfiguras (b, d, f), se muestra el comportamiento del loop de Polyakov para las mismas consideraciones de geometría y volumen finito. En el modelo PNJL, valores diferentes de cero en el loop de Polyakov implican el proceso de desconfinamiento, es decir, la liberación de los quarks y gluones. Además, se observa que la restauración de la simetría quiral ocurre casi simultáneamente con la transición de confinamiento/desconfinamiento. Esto significa que la simetría quiral y el confinamiento están estrechamente relacionados y pueden ocurrir en un rango similar de temperaturas y potenciales químicos.

La tabla (5.6) resume los valores del condensado quiral para las diferentes geometrías y tamaños de volumen considerados en el estudio. Es importante destacar que estos resultados específicos dependen de los detalles del modelo PNJL utilizado, incluyendo los parámetros y las aproximaciones realizadas. Sin embargo, la observación general de la relación entre el loop de Polyakov, la simetría quiral y el confinamiento es consistente con las expectativas físicas y puede proporcionar información importante sobre las transiciones de fase y las propiedades termodinámicas en el modelo PNJL en diferentes geometrías y volúmenes.

5.9.1. Potencial polinomial vs logarítmico para $\mu = 0$

Como mencionamos anteriormente, el comportamiento del condensado quiral y del loop de Polyakov está determinado por el potencial $\mathcal{U}(\varphi, \varphi^*; T)$ utilizado en nuestro modelo. Para investigar esto, hemos realizado una modificación en el potencial polinomial y lo hemos reemplazado por un potencial logarítmico. A continuación, llevamos a cabo el mismo procedimiento para observar los cambios en las gráficas.

Al utilizar un potencial logarítmico en lugar de uno polinomial, se espera que se produzcan modificaciones en las propiedades termodinámicas y en el comportamiento de los parámetros de orden. El potencial logarítmico puede tener efectos diferentes en la generación de masa y en la ruptura de la simetría quiral en comparación con el potencial polinómico.

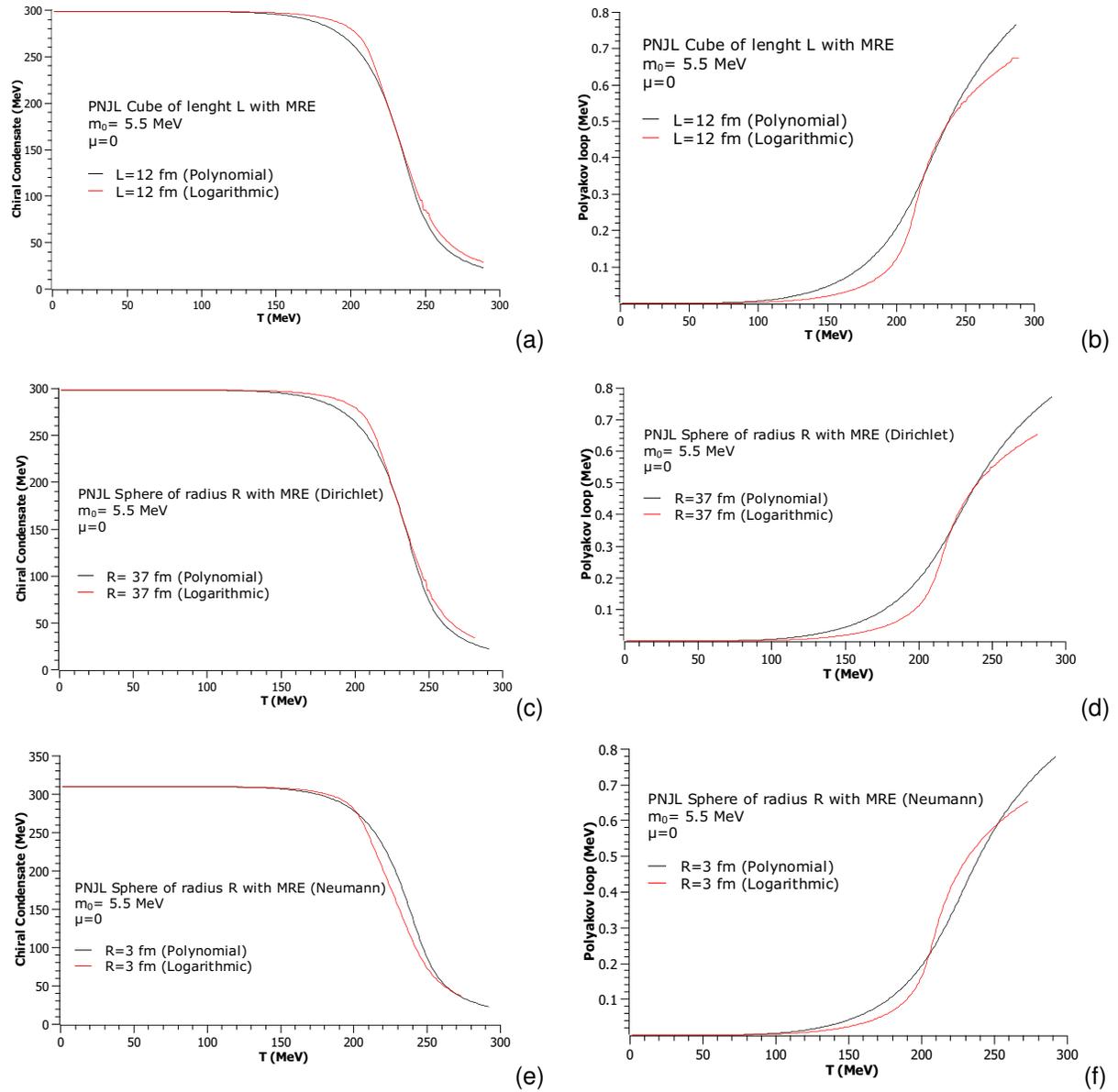


Figura 5.15: Condensado quiral y loop de Polyakov en función de la temperatura para el modelo PNJL con aproximación MRE para potencial polinómico y logarítmico. Para un cubo con $L = 12$ fm (arriba). Para una esfera con condiciones Dirichlet $R = 37$ fm (centro) y esfera con condición Neumann $R = 3$ fm (abajo) y $m_0 = 5,5$ MeV.

De la Figura 5.15, en las gráficas (a, c), podemos observar las curvas correspondientes al condensado quiral para el caso del cubo y la esfera con condiciones de Dirichlet, utilizando tanto el potencial polinómico como el potencial logarítmico. Al comparar estas curvas, notamos que para el potencial logarítmico se requieren temperaturas ligeramente más altas para que el condensado quiral disminuya en comparación con el potencial polinómico. Por otro lado, en la gráfica (e) correspondiente a la esfera con condiciones de Neumann, observamos un comportamiento completamente opuesto. En este caso, se necesitan temperaturas más bajas para que el condensado quiral disminuya cuando se utiliza el potencial logarítmico en comparación con el potencial polinómico.

Estos resultados indican que la elección del potencial utilizado en el modelo PNJL tiene un impacto significativo en el comportamiento del condensado quiral. El potencial logarítmico y el potencial polinómico

pueden tener efectos opuestos en las transiciones de fase y en la restauración de la simetría quiral, lo cual se evidencia en los diferentes comportamientos observados para las diferentes geometrías y condiciones de frontera. En el lado derecho de la Figura 5.15, en las gráficas (b, d), se representa el comportamiento del loop de Polyakov. Se observa un patrón similar al del condensado quiral en las geometrías del cubo y la esfera con condiciones de Dirichlet. En este caso, cuando se utiliza el potencial logarítmico, se requieren temperaturas más altas para que el parámetro Φ aumente en comparación con el potencial polinomial. Sin embargo, para las condiciones de Neumann, se observa un comportamiento diferente. En este caso, cuando se utiliza el potencial logarítmico, el parámetro Φ muestra un crecimiento rápido para temperaturas entre $T \approx 200 - 250$ MeV.

Estos resultados indican que el potencial utilizado en el modelo PNJL también afecta el comportamiento del loop de Polyakov. El potencial logarítmico puede inducir un crecimiento más rápido del parámetro Φ en ciertas condiciones, como las condiciones de Neumann, en comparación con el potencial polinomial.

5.10. Modelo PNJL (corte suave) para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$

En la Figura 5.16, se presentan las variaciones del parámetro de orden en función de la temperatura para diferentes potenciales químicos. En el panel izquierdo, se muestra el comportamiento del condensado quiral para diferentes potenciales químicos en una geometría cúbica (a) y una geometría esférica (c), considerando un volumen pequeño con un tamaño de $L = 9$ fm en el caso de la geometría cúbica y un radio de $R = 30$ fm en el caso de la geometría esférica. Por otro lado, en el panel derecho se considera un volumen mayor para ambas geometrías, con un tamaño de $L = 15$ fm en la geometría cúbica (b) y un radio de $R = 40$ fm en la geometría esférica (d).

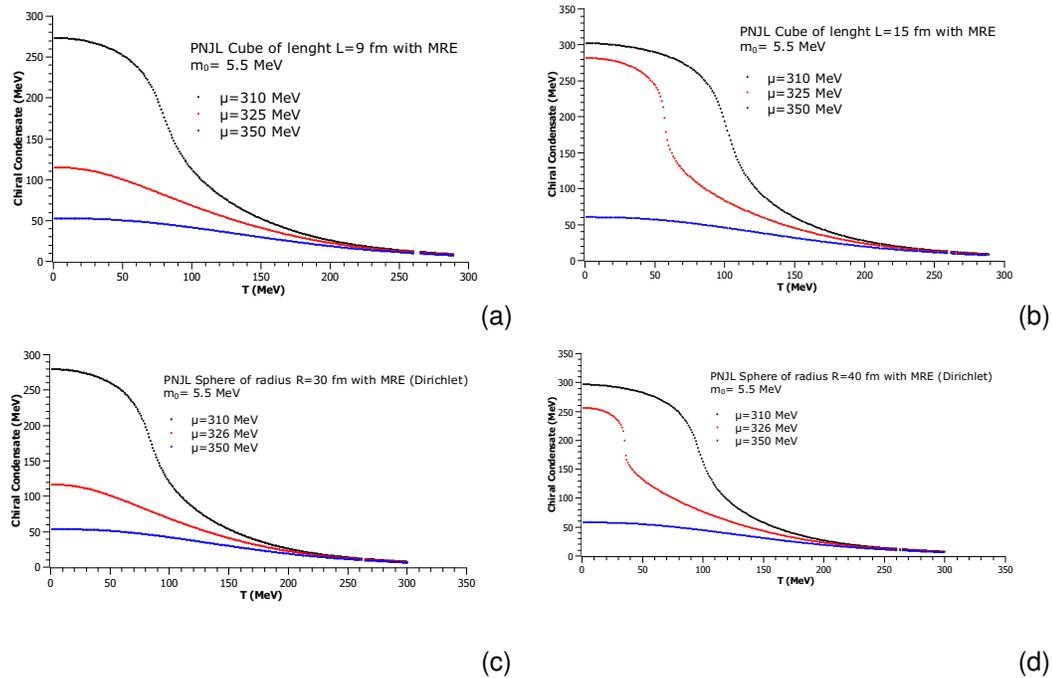


Figura 5.16: Variación del condensado para diferentes valores del potencial químico para una geometría cúbica y esférica con aproximación MRE (potencial polinómico).

Estas gráficas permiten visualizar cómo varía el condensado quiral en función de la temperatura para diferentes valores de potencial químico. El potencial químico controla la densidad de quarks en el sistema y, por lo tanto, puede tener un impacto en la formación del condensado quiral. Al considerar diferentes geometrías y volúmenes, también se pueden observar posibles efectos del tamaño del sistema en las transiciones de fase y en el comportamiento del condensado quiral. También se observa que para volúmenes pequeños, las gráficas del condensado quiral presentan un comportamiento suave y continuo. Esto significa que no se observan cambios drásticos en el condensado quiral a medida que varía la temperatura y el potencial químico. Por otro lado, para volúmenes mayores, se observan visibles gaps en las gráficas del condensado quiral, especialmente para un potencial químico de $\mu \approx 325$ MeV. Estos gaps indican que no se puede asegurar la continuidad del condensado quiral en esas regiones de temperatura.

Además, se puede observar una caída abrupta en las gráficas del condensado quiral cerca de temperaturas específicas. En el caso del cubo, esta caída abrupta ocurre alrededor de $T \approx 57$ MeV, mientras que en el caso de la esfera, ocurre alrededor de $T \approx 35$ MeV. Estos cambios drásticos en el condensado quiral son un claro indicio de un cambio en el tipo de transición de fase que se asocia con la existencia del CEP.

5.11. Susceptibilidades modelo PNJL (corte suave) para volumen finito con $m_0 = 5,5$ y $\mu \neq 0$

Las susceptibilidades desempeñan un papel importante en la determinación de las propiedades termodinámicas y las transiciones de fase en el modelo PNJL. En particular, la susceptibilidad quiral es relevante para comprender el comportamiento de la masa constitutiva ante variaciones en la masa corriente. Encontrar singularidades en la susceptibilidad quiral nos proporciona información sobre la naturaleza de las transiciones de fase y puede ser un indicio de la existencia de un punto crítico.

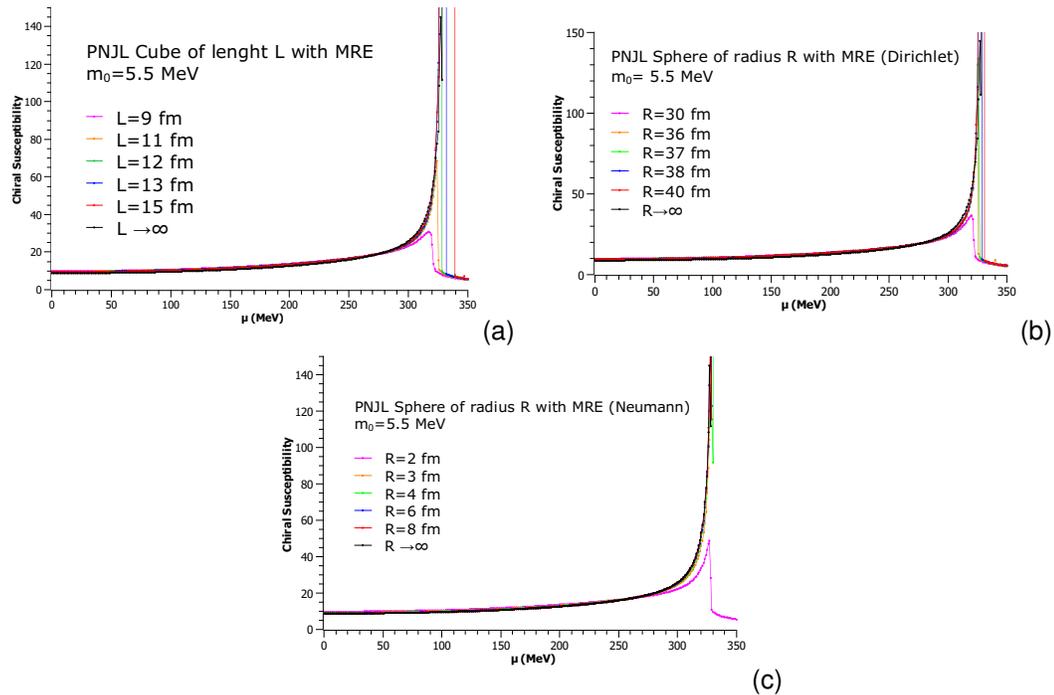


Figura 5.17: Susceptibilidad quiral máxima frente al potencial químico para el modelo PNJL con aproximación MRE para un cubo y una esfera (condiciones de Dirichlet y Neumann).

Al estudiar el comportamiento de la susceptibilidad quiral máxima, como se muestra en la Figura 5.17, al variar el potencial químico y el tamaño del volumen para cada geometría, se puede observar una tendencia asintótica a medida que se aumenta el tamaño del sistema.

Este comportamiento nos permite introducir ciertos criterios para determinar la existencia del CEP, mediante los cuales podemos identificar el tamaño del volumen que permite a cada geometría tener una transición de fase. Numéricamente, una forma muy sencilla de encontrar el punto en el que cambia la naturaleza de la transición de fase, por ejemplo, de un crossover a una de primer orden, es calcular el ángulo que forman dos puntos consecutivos con respecto al eje horizontal, siempre y cuando su pendiente supere un ángulo de 89° (este método es el mismo utilizado en el primer trabajo).

5.12. Diagrama de fases modelo PNJL (corte suave) para volumen finito

Para hallar el diagrama de fases tomaremos el llamado criterio local, que toma el valor máximo relativo de la susceptibilidad en cada iteración de la temperatura y el potencial químico. Así, si la susceptibilidad tiene una asíntota vertical, obtenemos una transición de fase de primer orden. Utilizando el criterio de localización del CEP antes mencionado, podemos representar la coordenada en el plano $T - \mu$ (Figura 5.18).

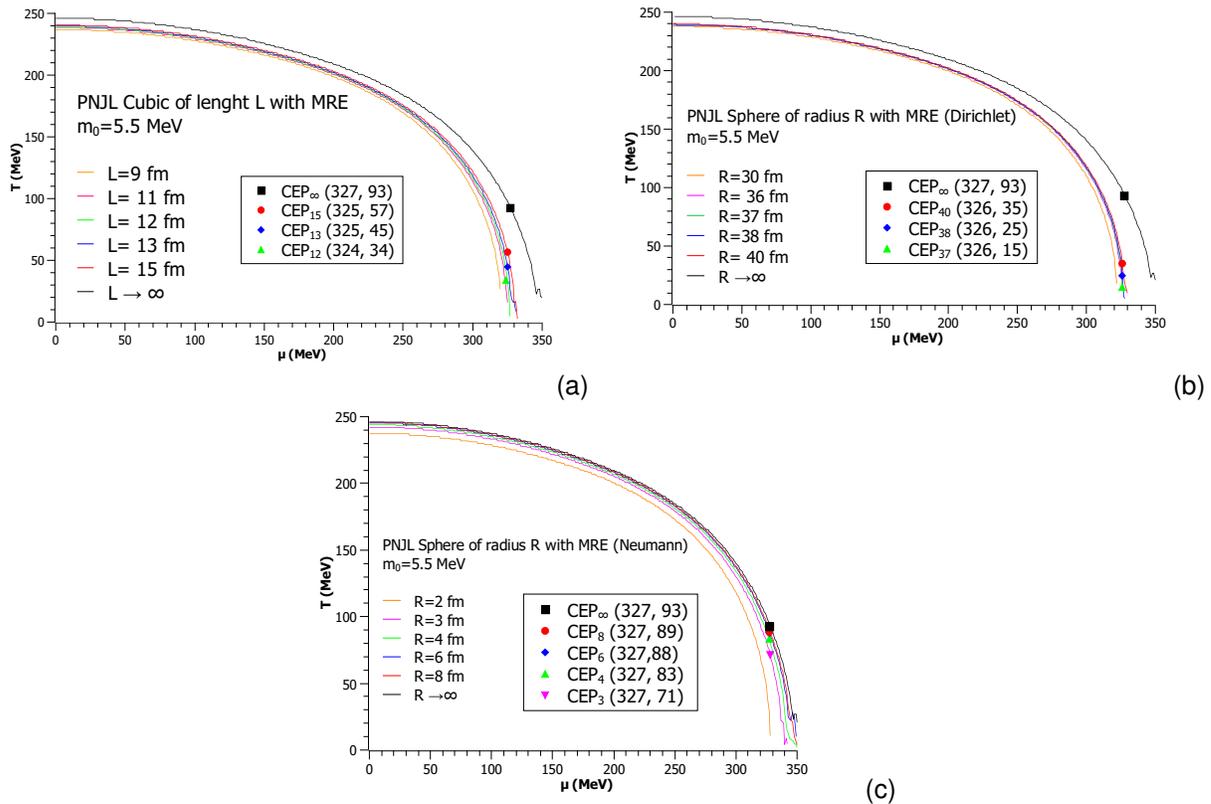


Figura 5.18: Diagrama de fases del modelo PNJL en un volumen finito con aproximación MRE para diferentes tamaños y geometrías.

Analizando los diagramas de fase de cada geometría podemos ver que dependiendo del tamaño del volumen se produce un cambio notorio en la línea de fase. A medida que aumentamos el tamaño del radio de la esfera o el lado del cubo, la temperatura crítica aumenta. Nuevamente la aparición del CEP varía en cada geometría. En la geometría cúbica, la primera transición de fase y la aparición del CEP ocurren alrededor de $L = 12$ fm, con la ubicación del CEP en las coordenadas (324, 34) en el diagrama de fase.

En la geometría esférica con condiciones de tipo Dirichlet, la primera aparición del CEP se da para un radio de $R = 37$ fm, con la ubicación en las coordenadas (326, 15) en el diagrama de fase. Por otro lado, en la geometría esférica con condiciones de tipo Neumann, el primer CEP se localiza para volúmenes muy pequeños, específicamente para un radio de $R = 3$ fm. La ubicación de este CEP se encuentra en las coordenadas (327, 71) en el diagrama de fase.

PNJL MRE Cube	
L (f)	CEP (μ, T)
$L \gg 1$	(327, 93)
15	(325, 57)
13	(325, 45)
12	(324, 34)
< 11	—

PNJL MRE _D Sphere	
R (f)	CEP (μ, T)
$R \gg 1$	(327, 93)
40	(326, 35)
38	(326, 25)
37	(326, 15)
< 36	—

PNJL MRE _N	
R (f)	CEP (μ, T)
$L \gg 1$	(327, 93)
8	(327, 89)
6	(327, 88)
4	(327, 83)
3	(327, 71)
< 2	—

Tabla 5.7: CEP para el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE. Izquierda, cubo de longitud L . Centro, para una esfera de radio R con condiciones de Dirichlet. Derecha, para una esfera con condiciones de Neumann.

5.12.1. Diagrama de fases potencial polinomial vs logarítmico

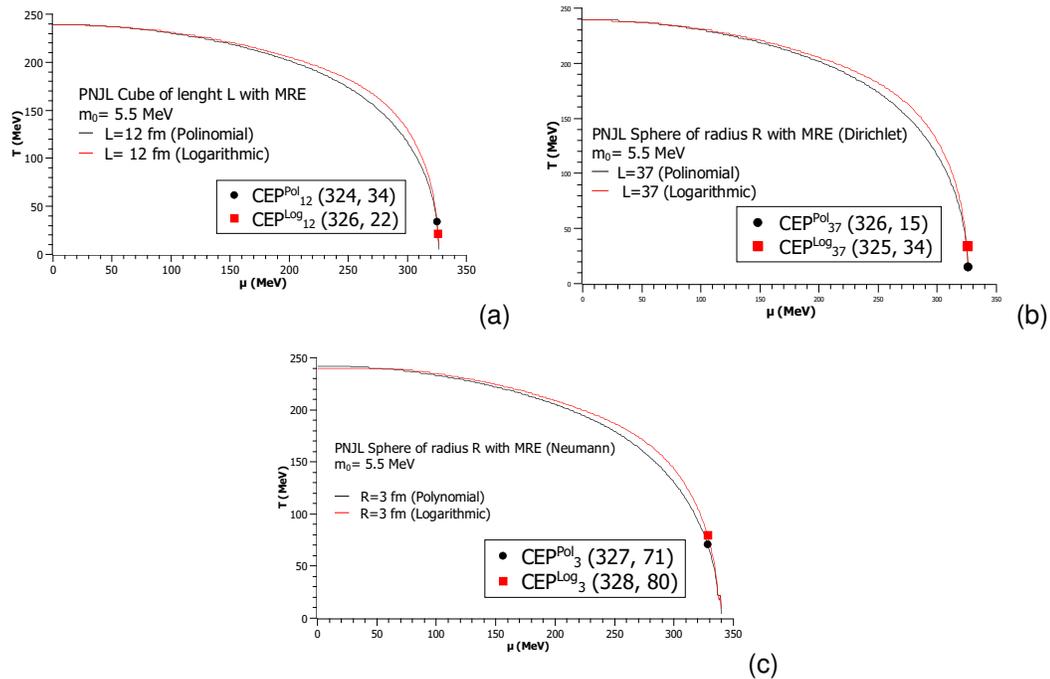


Figura 5.19: Diagrama de fases del modelo PNJL en un volumen finito con aproximación MRE para diferentes tamaños y geometrías con potencial polinomial y logarítmico.

En la Figura 5.19 se comparan los diagramas de fase para diferentes geometrías, utilizando el tamaño de volumen donde se localizó por primera vez el CEP. Se observa que para la geometría esférica, tanto con condiciones de Dirichlet como de Neumann, utilizando el potencial polinomial, el CEP se encuentra a temperaturas más bajas en comparación con el potencial logarítmico. En cambio, para la geometría cúbica ocurre lo contrario, ya que se requieren temperaturas más altas para encontrar el CEP.

Estos resultados se resumen en la Tabla 5.8, donde se muestra que, a diferencia de la temperatura, el potencial químico se mantiene casi constante para todas las geometrías y tamaños alrededor de $\mu \approx 326$ MeV.

PNJL MRE Cube		
\mathcal{U}	L (f)	CEP (μ, T)
Polynomial	12	(324, 34)
Logarithmic	12	(326, 22)

PNJL MRE _D Sphere		
\mathcal{U}	R (f)	CEP (μ, T)
Polynomial	37	(326, 15)
Logarithmic	37	(325, 34)

PNJL MRE _N		
\mathcal{U}	R (f)	CEP (μ, T)
Polynomial	3	(327, 71)
Logarithmic	3	(327, 80)

Tabla 5.8: CEP para el modelo PNJL en un volumen finito utilizando la aproximación MRE para un potencial polinomial y logarítmico.

Estos hallazgos sugieren que el potencial químico puede desempeñar un papel importante en la determinación de las transiciones de fase y la ubicación del CEP en diferentes geometrías y tamaños de volumen. Además, la elección del potencial (polinomial o logarítmico) puede tener un impacto significativo en las propiedades termodinámicas y las transiciones de fase en el modelo PNJL.

Capítulo 6

Conclusión

El análisis del diagrama de fases de la cromodinámica cuántica (QCD) es uno de los enfoques más utilizados para comprender el comportamiento de los quarks en condiciones extremas. En esta tesis, se llevó a cabo un estudio de los modelos efectivos de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) y su extensión con el loop de Polyakov (PNJL). El trabajo se dividió en tres partes principales.

En primer lugar, se investigó el comportamiento del diagrama de fases en el modelo NJL, donde no se consideraron restricciones adicionales más allá de las propias del modelo. Se examinaron las propiedades termodinámicas y las transiciones de fase en función de los parámetros del modelo, como la temperatura y el potencial químico. En segundo lugar, se introdujo el modelo PNJL, que es una extensión del modelo NJL que incorpora el efecto del loop de Polyakov. Se estudió cómo la presencia del campo de Polyakov afecta al diagrama de fases y a las propiedades termodinámicas del sistema. Se investigaron los efectos del potencial de Polyakov y se compararon los resultados con los del modelo NJL. En la tercera parte, se realizó una modificación en la integral del potencial termodinámico del modelo PNJL, aplicando una condición final para eliminar las divergencias en la integral. Se analizaron los efectos de esta modificación en el diagrama de fases y se compararon los resultados con los obtenidos previamente.

A través de este estudio se buscó comprender y caracterizar las propiedades termodinámicas y las transiciones de fase en sistemas de materia de quarks y gluones utilizando modelos efectivos. Los resultados obtenidos proporcionan información importante sobre el comportamiento de los quarks en condiciones extremas y contribuyen al entendimiento de la QCD en regímenes no perturbativos.

El modelo PNJL en $SU(2)$ es un modelo efectivo ampliamente utilizado en la cromodinámica cuántica (QCD) para describir el comportamiento de un sistema de partículas que interactúan a través de la fuerza fuerte. En este modelo, se aplicaron tres consideraciones importantes para mejorar la descripción del sistema. En primer lugar, se tuvieron en cuenta los efectos del volumen finito utilizando la aproximación MRE. Esta aproximación tiene en cuenta las restricciones impuestas por el tamaño finito del sistema y permite obtener resultados más realistas para sistemas confinados en volúmenes limitados.

En segundo lugar, se utilizó un esquema de regularización de corte suave. Este enfoque es utilizado para eliminar las divergencias presentes en los cálculos teóricos y garantizar resultados finitos y físicamente significativos. La regularización de corte suave permite controlar de manera adecuada las divergencias y obtener resultados más precisos y confiables.

Por último, se consideraron dos potenciales de loop de Polyakov diferentes: uno polinomial y otro logarítmico. Estos potenciales describen la contribución del campo de Polyakov, que es responsable del

fenómeno de confinamiento en la QCD. La elección del potencial puede tener un impacto significativo en las propiedades termodinámicas y las transiciones de fase del sistema.

Hemos considerado dos tipos diferentes de geometrías que modifican la densidad de estados, geometría cúbica y esférica (sujetas a condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann). La masa corriente de los quarks se fijó en $m_0 = 5,5$ MeV. Se introdujo el esquema de regularización 'corte suave' para que nuestro modelo pueda respetar el límite de Stefan- Boltzmann, mediante la división de la integral convergente donde para momentos mayores que el cutoff UV tridimensional ya no se tienen en cuenta las interacciones fermiónicas. Con estas consideraciones nos centramos en estudiar el comportamiento del condensado quiral así como los diagramas de fase y usando un criterio específico obtuvimos las coordenadas del CEP.

Para el modelo NJL sin ningún tipo de restricción, se encontró que el CEP aparece en la coordenada (331, 20). Para el modelo PNJL y PNJL (corte suave) se muestra en la Tabla (6.1).

Modelo	Esfera MRE_D	CEP (T, μ)	Esfera MRE_N	CEP (T, μ)	Cubo	CEP (T, μ)
PNJL	$R = 38$ fm	(326, 25)	$R = 3$ fm	(328, 72)	$L = 13$ fm	(325, 28)
PNJL (corte suave)	$R = 37$ fm	(326, 15)	$R = 3$ fm	(327, 71)	$L = 12$ fm	(324, 34)

Tabla 6.1: CEP para el modelo PNJL y PNJL (corte suave).

Se encontró que para una geometría cúbica el CEP no aparece hasta un tamaño de $L = 12$ fm, para una geometría esférica se encuentra un primer radio a $R = 37$ fm para condiciones de contorno tipo Dirichlet y $R = 3$ fm para condiciones de contorno tipo Neumann.

Esto es interesante ya que teniendo en cuenta la regularización de corte suave el modelo parece ser un poco más preciso que sólo teniendo en cuenta el corte UV. Una vez localizado el tamaño en el que aparece por primera vez el CEP en cada geometría, podemos ver cómo cambia este punto dependiendo ahora del tamaño. Se encontró que para los dos tipos de geometrías el CEP siempre se encuentra en $\mu \approx 326$ MeV. Por otro lado, las temperaturas aumentan a medida que ampliamos nuestro volumen siendo el límite (327, 93), cuando consideramos un volumen infinito.

Por último, en el tamaño del volumen donde apareció por primera vez el CEP en cada geometría, se compararon los potenciales de bucle de Polyakov polinomial y logarítmico. Observamos que dependiendo del potencial que elijamos cambia la localización del CEP. Encontramos que para una geometría esférica (condiciones de Dirichlet y Neumann) se necesitan temperaturas más altas para localizar el CEP con un potencial logarítmico. En cambio para una geometría cúbica ocurre lo contrario, utilizando un potencial logarítmico la presencia del CEP requiere temperaturas más bajas que en un potencial polinomial.

Apéndice A

Modelo numérico

En este apéndice, detallaremos los cálculos numéricos realizados para desarrollar la presente tesis. La ejecución de este trabajo demandó un extenso período de tiempo y esfuerzo, así como la colaboración de distintas partes, incluido el Dr. Rubén Morones y sus estudiantes. Es importante destacar que todos los programas, archivos y gráficas obtenidos fueron el resultado de un esfuerzo conjunto entre todas las partes involucradas.

Los cálculos numéricos se llevaron a cabo utilizando el software "Mathematica". Para brindar una visión general, analizaremos el programa para el modelo PNJL con geometría cúbica y un potencial de Polyakov polinómico con aproximación MRE, utilizando un potencial termodinámico de corte suave. Comenzaremos introduciendo las constantes y variables necesarias Fig 6.1

```
Λ = 651; (*Este es el cutoff del UV*)
G = 5.04 * 10-6;
nc = 3; (*es el número de color*)
ns = 2; (*es el sabor*)
m0 = 5.5; (*masa de los quarks*)
a0 = 6.75;
a1 = -1.95;
a2 = 2.625;
a3 = -7.44;
b3 = 0.75;
b4 = 7.5;
temp0 = 270;
L =  $\frac{12}{197.4}$ ;
ΔIR =  $\frac{3}{4 + L}$ ;
b2[temp_] := a0 + a1 *  $\left(\frac{\text{temp0}}{\text{temp}}\right)$  + a2 *  $\left(\frac{\text{temp0}}{\text{temp}}\right)^2$  + a3 *  $\left(\frac{\text{temp0}}{\text{temp}}\right)^3$ ;
```

Figura 6.1: Valores iniciales del programa.

Ahora definimos el potencial termodinámico para nuestro modelo, teniendo en cuenta la partición de la integral para momentos antes y después del corte UV (Fig 6.2). Esto nos permite considerar el límite de Stefan-Boltzmann y capturar adecuadamente las contribuciones de alta energía.

Lo siguiente, como se explicó en la sección 4.4, implica utilizar las ecuaciones de gap para cada uno de los parámetros $[M, \Phi, \Phi^*]$. Al obtener estas derivadas, podemos identificar los puntos críticos de la función del potencial termodinámico. Tomemos la derivada con respecto a M de los quarks Figura 6.3

```

Omsre[temp_, mu_, M_, phi1_, phi2_] := temp^4  $\left( -\frac{b2[temp]}{2} + \phi1 + \phi2 - \frac{b3}{6} * (\phi1^3 + \phi2^3) + \frac{b4}{4} * (\phi1 + \phi2)^2 \right) + \frac{(M - mo)^2}{4 + G} -$ 
 $\frac{ns * nc}{\pi^2} * \text{NIntegrate} \left[ p^2 * \left( 1 - \frac{3}{4 + p * L} \right) * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + \frac{temp}{nc} * \text{Log} \left[ 1 + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] \right) + \right.$ 
 $\left. \frac{temp}{nc} * \text{Log} \left[ 1 + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] \right] \right], \{p, \Delta IR, \Lambda\}, \text{Method} \rightarrow \text{"OscillatorySelection"},$ 
 $\text{WorkingPrecision} \rightarrow 15, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 5, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100];$ 

```

(+DEFINICION DE LA OMEGA 2*)
Omsre2[temp_, mu_, M_, phi1_, phi2_] :=
 $\frac{ns * nc}{\pi^2} * \text{NIntegrate} \left[p^2 * \left(1 - \frac{3}{4 + p * L} \right) * \left(\frac{temp}{nc} * \text{Log} \left[1 + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[-\frac{1}{temp} * \left(\sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[-\frac{2}{temp} * \left(\sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + \text{Exp} \left[-\frac{3}{temp} * \left(\sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] \right) + \right.$
 $\left. \frac{temp}{nc} * \text{Log} \left[1 + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[-\frac{1}{temp} * \left(\sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[-\frac{2}{temp} * \left(\sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + \text{Exp} \left[-\frac{3}{temp} * \left(\sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] \right] \right], \{p, \Lambda, \text{Infinity}\},$
 $\text{Method} \rightarrow \text{"OscillatorySelection"}, \text{WorkingPrecision} \rightarrow 15, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 5, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100];$

```


```

Figura 6.2: Definición del potencial termodinámico.

```

(+DERIVADA CON RESPECTO A M*)
ecMR1[M_?NumericQ, phi1_?NumericQ, phi2_?NumericQ] :=
 $\frac{M - mo}{2 * G} - \frac{nc * ns}{\pi^2} * \text{NIntegrate} \left[ p^2 * \left( 1 - \frac{3}{4 + p * L} \right) * \left( \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \right) \right], \{p, \Delta IR, \Lambda\}, \text{Method} \rightarrow \text{"OscillatorySelection"}, \text{WorkingPrecision} \rightarrow 15, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 5, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100] -$ 
 $\frac{nc * ns}{\pi^2} * \text{NIntegrate} \left[ p^2 * \left( 1 - \frac{3}{4 + p * L} \right) * \left( \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \right) * \left( -\frac{\phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + 2 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right]}{1 + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} + mu \right) \right]} \right.$ 
 $\left. - \frac{\phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + 2 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right]}{1 + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + M^2} - mu \right) \right]} \right], \{p, \Delta IR, \Lambda\}, \text{Method} \rightarrow \text{"OscillatorySelection"},$ 
 $\text{WorkingPrecision} \rightarrow 15, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 5, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100] -$ 
 $\frac{nc * ns}{\pi^2} * \text{NIntegrate} \left[ p^2 * \left( 1 - \frac{3}{4 + p * L} \right) * \left( \frac{mo}{\sqrt{p^2 + mo^2}} \right) * \left( -\frac{\phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} + mu \right) \right] + 2 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} + mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} + mu \right) \right]}{1 + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} + mu \right) \right] + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} + mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} + mu \right) \right]} \right.$ 
 $\left. - \frac{\phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} - mu \right) \right] + 2 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} - mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} - mu \right) \right]}{1 + 3 * \phi2 * \text{Exp} \left[ -\frac{1}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} - mu \right) \right] + 3 * \phi1 * \text{Exp} \left[ -\frac{2}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} - mu \right) \right] + \text{Exp} \left[ -\frac{3}{temp} * \left( \sqrt{p^2 + mo^2} - mu \right) \right]} \right], \{p, \Lambda, \text{Infinity}\}, \text{Method} \rightarrow \text{"OscillatorySelection"},$ 

```

Figura 6.3: Derivada del potencial termodinámico respecto a la masa constitutiva de los quarks.

Además de agregar las ecuaciones de gap para los parámetros Φ y Φ^* cuyo código se presenta en las Figuras 6.4 y 6.5

```

eCMRE2[M_?NumericQ, dL_?NumericQ, dQ_?NumericQ] :=
  (temp^A/2) * (-b2(temp) * dL - b3 * dL^2 + b4 * dL + dL^3) -
  (ns + nc) / x^2 * (p^2 * (1 - 3/(4 * p * L)) * temp *
    (Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])]) /
    (1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] +
    1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])])
  (p, dL, A), Method -> "OscillatorySelection", WorkingPrecision -> 15, PrecisionGoal -> 5, MaxRecursion -> 100];

eCMRE2[M_?NumericQ, dL_?NumericQ, dQ_?NumericQ] :=
  (temp^A/2) * (-b2(temp) * dL - b3 * dL^2 + b4 * dL + dL^3) -
  (ns + nc) / x^2 * (p^2 * (1 - 3/(4 * p * L)) * temp *
    (Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])]) /
    (1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] +
    1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])])
  (p, A, Infinity), Method -> "OscillatorySelection", WorkingPrecision -> 15, PrecisionGoal -> 5, MaxRecursion -> 100];

```

Figura 6.4: Derivada del potencial termodinámico respecto al parámetro Φ .

```

(+DERIVADA CON RESPECTO A Phi*)
eCMRE3[M_?NumericQ, dL_?NumericQ, dQ_?NumericQ] :=
  (temp^A/2) * (-b2(temp) * dL - b3 * dL^2 + b4 * dL + dL^3) -
  (nc + ns) / x^2 * (NIntegrate[p^2 * (1 - 3/(4 * p * L)) * temp *
    (Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])]) /
    (1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] +
    1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])])
  (p, dL, A), Method -> "OscillatorySelection", WorkingPrecision -> 15, PrecisionGoal -> 5, MaxRecursion -> 100];

eCMRE3[M_?NumericQ, dL_?NumericQ, dQ_?NumericQ] :=
  (temp^A/2) * (-b2(temp) * dL - b3 * dL^2 + b4 * dL + dL^3) -
  (nc + ns) / x^2 * (NIntegrate[p^2 * (1 - 3/(4 * p * L)) * temp *
    (Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])]) /
    (1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 + nQ])] +
    1 + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + 3 * dL * Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])] + Exp[-dL/temp * (sqrt[p^2 + nL^2 - nQ])])
  (p, A, Infinity), Method -> "OscillatorySelection", WorkingPrecision -> 15, PrecisionGoal -> 5, MaxRecursion -> 100];

```

Figura 6.5: Derivada del potencial termodinámico respecto al parámetro Φ^* .

Una vez que se especifican las ecuaciones de gap y se definen las condiciones iniciales, el comando 'FindRoot' en Mathematica utiliza métodos numéricos para buscar las raíces de estas ecuaciones de manera eficiente. Utiliza técnicas iterativas para ajustar sistemáticamente los valores de las variables M , Φ y Φ^* hasta que las ecuaciones de gap se satisfacen dentro de una tolerancia especificada.

FindRoot puede emplear varios algoritmos numéricos, como el método de Newton-Raphson o el método de bisección, para encontrar las raíces de las ecuaciones. Estos algoritmos ajustan gradualmente los valores de las variables en cada iteración, aproximándose a la solución deseada creando un vector con los resultados numéricos para (M, Φ, Φ^*) .

En el contexto del modelo PNJL, estos valores caracterizan el estado del sistema en diferentes condiciones de temperatura y potencial químico (Figura 6.5). Dichos parámetros se toman en un rango desde $T = 1$ MeV hasta $T = 300$ MeV, y el proceso se realiza para cada valor del potencial químico que a su vez también se modifica desde $\mu = 0$ MeV hasta $\mu = 300$ MeV.

Estos cálculos nos brindan los resultados para el comportamiento del condensado de quarks y del loop de Polyakov. Estos resultados se ilustran en las Figuras 5.4, 5.6 y 5.15, donde podemos observar cómo estos parámetros varían en función de la temperatura y el potencial químico. Estas figuras nos ofrecen una comprensión visual del comportamiento de estos importantes observables en diferentes condiciones termodinámicas.

Para obtener la matriz de susceptibilidades y encontrar el CEP (ver Figura 6.7), utilizamos el criterio del ángulo mencionado anteriormente. Este criterio implica trazar puntos para cada valor máximo de la susceptibilidad y observar cómo evolucionan a medida que aumentamos las variables termodinámicas.

```

μmin = 18; μmax = 299; μinc = 1; Tmin1 = 1; Tmax1 = 289; Tinc = 1;
Solmre[temp_?NumericQ] := FindRoot[{ecMRE1[M, φ1, φ2] = 0, ecMRE2[M, φ1, φ2] = 0, ecMRE3[M, φ1, φ2] = 0}, {{M, 300}, {φ1, 0.001}, {φ2, 0.001}}];
For[μu = μmin, μu ≤ μmax, μu++, solsmre = Monitor[Table[{temp, μu, M, φ1, φ2} /. Solmre[temp], {temp, Tmin1, Tmax1, Tinc}], {μu, temp}];
archmre = FileNameJoin[{"C:\\Users\\jonyf\\Escritorio\\qcd\\INFLUENCE OF CUTOFF\\PNJL MRE INFINITY CUBO\\PNJL MRE INFINITY CUBO L=12 con m=5.5",
"PNJLMREINFINITYcuboL=12m=5.5_mu_" <> ToString[μu]};
PNJLMRE = OpenWrite[archmre];
Write[PNJLMRE, solsmre];
Close[PNJLMRE];

```

Figura 6.6: Ecuaciones de gap resueltas por FindRoot.

```

C3[temp_, mu_, Mm_, φ1m_, φ2m_] :=
Inverse@
(


|                                                                                                                       |     |                                                                                                                       |     |                                                                                                                       |     |                                                                                                                       |     |                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{(\phi_{1,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{2,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{3,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{4,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{5,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ |
| $\frac{(\phi_{1,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{2,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{3,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{4,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{5,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ |
| $\frac{(\phi_{1,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{2,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{3,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{4,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ | $+$ | $\frac{(\phi_{5,m} \text{Dmre}(temp, mu, M, \phi1, \phi2)) / (M + Mm / \phi1 + \phi2m / \phi2 + \phi2m)}{temp^{m+2}}$ |


);
μmin = 300; μmax = 350; μinc = 1;
For[μu = μmin, μu ≤ μmax, μu++, fileN = FileNameJoin[{"C:\\Users\\jonyf\\Escritorio\\qcd\\INFLUENCE OF CUTOFF\\PNJL MRE INFINITY CUBO\\PNJL MRE INFINITY CUBO L=9 con m=5.5 depurados", "PNJLMREINFINITYcuboL=9m=5.5depurados_mu_" <> ToString[μu]};
SuceptareN = Table[ReadList[fileN][[1, n]], {n, 1, Length[ReadList[fileN][[1]]]};
solvareN = Monitor[Table[C3[SuceptareN[[1, 1]], SuceptareN[[1, 2]], SuceptareN[[1, 3]], SuceptareN[[1, 4]], SuceptareN[[1, 5]], {1, 1, Length[ReadList[fileN][[1]]], 1}], {1, M, φ1, φ2}];
fileN6 = FileNameJoin[{"C:\\Users\\jonyf\\Escritorio\\qcd\\INFLUENCE OF CUTOFF\\PNJL MRE INFINITY CUBO\\PNJL MRE INFINITY CUBO L=9 con m=5.5 Inversa", "XmreInfinitycuboL=9m=5.5Inversa_mu_" <> ToString[μu]};
PNJLmreN = OpenWrite[fileN6];
Write[PNJLmreN, solvareN];
Close[PNJLmreN];

```

Figura 6.7: Matriz de susceptibilidades y cálculo para los valores del diagrama de fases.

Específicamente, nos enfocamos en el comportamiento de χ_{MM} , que es la susceptibilidad relacionada con la variación de la masa constitutiva de los quarks. Al estudiar cómo χ_{MM} varía con la temperatura y el potencial químico, podemos identificar los puntos críticos donde ocurren cambios significativos en el sistema. Estos puntos críticos pueden indicar transiciones de fase importantes, como la transición de quarks confinados a quarks desconfiados.

Tras obtener la matriz de susceptibilidades, identificamos los máximos locales de χ_{MM} y trazamos los puntos correspondientes en un diagrama de fases. Al observar cómo estos puntos evolucionan con el aumento de las variables termodinámicas, podemos determinar la ubicación del CEP y comprender mejor las propiedades del sistema en diferentes regiones del diagrama de fases.

Es importante mencionar que esto se realiza para cada potencial de Polyakov (polinomial y logaritmico), para cada geometría de volumen finito (cubo, esfera tipo Dirichlet y Neumann) y para cada tipo de modelo PNJL (corte mínimo, corte suave). Por lo que esto solo es una muestra de los múltiples programas que se desarrollaron.

Publicaciones

- Betancourt, F. J. et al. (2022) “QCD phase diagram in a finite volume in the PNJL model,” *Open Physics*, 20(1), pp. 377–389. doi: 10.1515/phys-2022-0039.
Link: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/phys-2022-0039/html?lang=en>
- Saucedo, J. R. et al. (2023) “Influence of the regularization scheme in the QCD phase diagram in the PNJL model,” *Open Physics*, 21(1). doi: 10.1515/phys-2023-0133.
Link: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/phys-2023-0133/html?lang=en>
- Chavarría-Garza, W. X. et al. (2024) “Measuring the density matrix of quantum-modeled cognitive states”, *Quantum reports*, 6(2), pp. 156–171. doi: 10.3390/quantum6020013.
Link: <https://www.mdpi.com/2624-960X/6/2/13>

Bibliografía

- [1] Gaillard, M. K., Grannis, P. D. y Sciulli, F. J. (1999) “The standard model of particle physics”, *Reviews of modern physics*, 71(2), pp. S96–S111. doi: 10.1103/revmodphys.71.s96.
- [2] Williams, A. G. (2003) “Introduction to the standard model, QCD and the lattice”, *Progress of theoretical physics. Supplement*, 151, pp. 21–31. doi: 10.1143/ptps.151.21.
- [3] Ayala, A. et al. (2011) “QCD phase diagram from finite energy sum rules”, *Physical review*, 84(5). doi: 10.1103/physrevd.84.056004.
- [4] Bazavov, A. et al. (2012) “Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition”, *Physical review*, 85(5). doi: 10.1103/physrevd.85.054503.
- [5] Fukushima, K., Ruggieri, M. y Gatto, R. (2010) “Chiral magnetic effect in the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model”, *Physical review*, 81(11). doi: 10.1103/physrevd.81.114031.
- [6] Cui, Y.-Q. y Pan, Z.-L. (2019) “Studies on proper time regularization and the QCD chiral phase transition”, *Modern Physics Letters A. Particles and Fields, Gravitation, Cosmology, Nuclear Physics*, 34(01), p. 1950003. doi: 10.1142/s0217732319500032.
- [7] He, Y. B. et al. (1996) “Cold strangelets formation with finite size effects in high energy heavy-ion collisions”, *Physical review C: Nuclear physics*, 54(2), pp. 857–865. doi: 10.1103/physrevc.54.857.
- [8] Xu, F. y Huang, M. (2012) “The chiral and deconfinement phase transitions”, *Open Physics*, 10(6). doi: 10.2478/s11534-012-0084-1.
- [9] Costa, P. et al. (2010) “Phase diagram and critical properties within an effective model of QCD: The Nambu–Jona-lasinio model coupled to the Polyakov loop”, *Symmetry*, 2(3), pp. 1338–1374. doi: 10.3390/sym2031338.
- [10] Stephanov, M. A. (2005) “Qcd phase diagram and the critical point”, *International journal of modern physics. A, Particles and fields, gravitation, cosmology*, 20(19), pp. 4387–4392. doi: 10.1142/s0217751x05027965.
- [11] Costa, P., Ruivo, M. C. y de Sousa, C. A. (2008) “Thermodynamics and critical behavior in the Nambu–Jona-Lasinio model of QCD”, *Physical review*, 77(9). doi: 10.1103/physrevd.77.096001.
- [12] Ding, H.-T., Karsch, F. y Mukherjee, S. (2015) “Thermodynamics of strong-interaction matter from lattice QCD”, *International journal of modern physics E*, 24(10), p. 1530007. doi: 10.1142/s0218301315300076.
- [13] Gattringer, C. y Lang, C. B. (2012) *Quantum chromodynamics on the lattice: An introductory presentation*. 2010a ed. Berlín, Alemania: Springer.

- [14] Nambu, Y. y Jona-Lasinio, G. (1961) “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II”, *The Physical review*, 124(1), pp. 246–254. doi: 10.1103/physrev.124.246.
- [15] Zhang, Z., Shi, C. y Zong, H.-S. (2020) “Nambu–Jona-Lasinio model in a sphere”, *Physical review. D.* (2016), 101(4). doi: 10.1103/physrevd.101.043006.
- [16] Jafarov, R. y Rochev, V. (2004) “Mean-field expansion and meson effects in chiral condensate of analytically regularized Nambu-Jona-Lasinio model”, *Open Physics*, 2(2). doi: 10.2478/bf02475637.
- [17] Klevansky, S. P. (1992) “The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics”, *Reviews of modern physics*, 64(3), pp. 649–708. doi: 10.1103/revmodphys.64.649.
- [18] Hell, T. et al. (2010) “Thermodynamics of a three-flavor nonlocal Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model”, *Physical review*, 81(7). doi: 10.1103/physrevd.81.074034.
- [19] Nishimura, H. y Ogilvie, M. C. (2010) “Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model for adjoint fermions with periodic boundary conditions”, *Physical review*, 81(1). doi: 10.1103/physrevd.81.014018.
- [20] Fukushima, K. (2008) “Erratum: Phase diagrams in the three-flavor Nambu–Jona-Lasinio model with the Polyakov loop [*Phys. Rev. D* 77, 114028 (2008)]”, *Physical review*, 78(3). doi: 10.1103/physrevd.78.039902.
- [21] Fu, W.-J., Zhang, Z. y Liu, Y.-X. (2008) “2+1flavor Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model at finite temperature and nonzero chemical potential”, *Physical review*, 77(1). doi: 10.1103/physrevd.77.014006.
- [22] Sahoo, R. y Nayak, T. K. (2021) “Possible early universe signals in proton collisions at the large hadron collider”, *Current science*, 121(11), p. 1403. doi: 10.18520/cs/v121/i11/1403-1408.
- [23] Fujii, H. (2003) “Scalar density fluctuation at critical end point in NJL model,” arXiv [hep-ph]. Available at: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0302167>.
- [24] Morones-Ibarra, J. R. et al. (2017) “Chiral symmetry restoration and the critical end point in QCD”, *Open Physics*, 15(1), pp. 1039–1044. doi: 10.1515/phys-2017-0130.
- [25] Morones-Ibarra, J. R. et al. (2020) “Dependence of the crossover zone on the regularization method in the two-flavor Nambu–Jona-Lasinio model”, *Open Physics*, 18(1), pp. 089–103. doi: 10.1515/phys-2020-0010.
- [26] Cui, Z.-F. et al. (2015) “Progress in vacuum susceptibilities and their applications to the chiral phase transition of QCD”, *Annals of physics*, 358, pp. 172–205. doi: 10.1016/j.aop.2015.03.025.
- [27] Fraga, E. S. et al. (2011) “Finite-size effects and the search for the critical endpoint of QCD”, arXiv [hep-ph]. Available at: <http://arxiv.org/abs/1106.3887>.
- [28] Aitchison, I. and Hey, A. (2013) “Gauge theories in particle physics: A practical introduction,” in *Non-abelian gauge theories: QCD and the electroweak theory*. Boca Ratón, FL, Estados Unidos de América: CRC Press.
- [29] Cvitanović, P., Lauwers, P. G. and Scharbach, P. N. (1981) “Gauge invariance structure of quantum chromodynamics,” *Nuclear physics. B*, 186(1), pp. 165–186. doi: 10.1016/0550-3213(81)90098-5.
- [30] Gross, D. J. (2005) “Nobel Lecture: The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD,” *Reviews of modern physics*, 77(3), pp. 837–849. doi: 10.1103/revmodphys.77.837.

- [31] Gross, D. J. (2004) “Asymptotic freedom and QCD—a historical perspective,” *Nuclear Physics B. Proceedings Supplement*, 135, pp. 193–211. doi: 10.1016/j.nuclphysbps.2004.09.049.
- [32] Greensite, J. (2003) “The confinement problem in lattice gauge theory,” *Progress in particle and nuclear physics*, 51(1), pp. 1–83. doi: 10.1016/s0146-6410(03)90012-3.
- [33] Nishijima, K. (1994) “Confinement of quarks and gluons,” *International journal of modern physics. A, Particles and fields, gravitation, cosmology*, 09(21), pp. 3799–3819. doi: 10.1142/s0217751x94001539.
- [34] Sazdjian, H. (2017) “Introduction to chiral symmetry in QCD,” *EPJ web of conferences*, 137, p. 02001. doi: 10.1051/epjconf/201713702001.
- [35] Ryder, L. H. (2006) “Quantum field theory: A brief introduction,” in *Encyclopedia of Mathematical Physics*. Elsevier, pp. 212–216.
- [36] Srednicki, M. (2012) *Quantum Field Theory* [Internet. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- [37] Stephani, H. (2010) *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- [38] Hoffmann B. *Relativity and its roots*. Dover Publications; 2012.
- [39] Guidry, M. (1991) *Gauge field theories: An introduction with applications*. Nashville, TN, Estados Unidos de América: John Wiley and Sons.
- [40] Gross, F. (2008) *Relativistic quantum mechanics and field theory*. Edited by F. Gross. Nashville, TN, Estados Unidos de América: John Wiley and Sons.
- [41] Yndurain, F. J. (1996) *Relativistic quantum mechanics and introduction to field theory*. Berlín, Alemania: Springer.
- [42] Greiner, W. (2014) *Relativistic quantum mechanics. Wave equations*. Nueva York, NY, Estados Unidos de América: Springer.
- [43] Kondo, K.-I. and Shinohara, T. (2000) “Renormalizable Abelian-projected effective gauge theory derived from Quantum Chromodynamics,” *arXiv [hep-th]*. Available at: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0005125> (Accessed: May 8, 2024).
- [44] Cvitanović, P., Lauwers, P. G. and Scharbach, P. N. (1981) “Gauge invariance structure of quantum chromodynamics,” *Nuclear physics. B*, 186(1), pp. 165–186. doi: 10.1016/0550-3213(81)90098-5.
- [45] Wilczek, F. (1982) “Quantum chromodynamics: The modern theory of the strong interaction,” *Annual review of nuclear and particle science*, 32(1), pp. 177–209. doi: 10.1146/annurev.ns.32.120182.001141.
- [46] Darewych, J. and Duviryak, A. (2013) “Analysis of inter-quark interactions in classical chromodynamics,” *Open Physics*, 11(3), pp. 336–344. doi: 10.2478/s11534-013-0171-y.
- [47] Hatsuda, T. and Kunihiro, T. (1994) “QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian,” *Physics reports*, 247(5–6), pp. 221–367. doi: 10.1016/0370-1573(94)90022-1.
- [48] Mainzer, K. (2005) “Symmetry and complexity in dynamical systems,” *European review* (Chichester, England), 13(S2), pp. 29–48. doi: 10.1017/s1062798705000645.

- [49] Shrock, R. E. (1986) "Lattice gauge-higgs theories with local x global symmetry groups including exact solutions," *Nuclear physics. B*, 278(2), pp. 380–416. doi: 10.1016/0550-3213(86)90219-1.
- [50] Griffiths, D. J. (2005) *Introduction to quantum mechanics: International edition*. Upper Saddle River, NJ, Estados Unidos de América: Pearson.
- [51] Bransden, B. H. and Joachain, C. J. (2000) *Quantum Mechanics*. Londres, Inglaterra: Prentice-Hall.
- [52] De, L. (2007) *Introduccion a la Mecanica Cuantica*. Fondo de Cultura Economica.
- [53] Zettili, N. (2009) *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell.
- [54] Shebeko, A. V. and Shirokov, M. I. (2001) "Unitary transformations in quantum field theory and bound states," arXiv [nucl-th]. Available at: <http://arxiv.org/abs/nucl-th/0102037> (Accessed: May 8, 2024).
- [55] Romero-Maltrana, D. (2015) "Symmetries as by-products of conserved quantities," *Studies in History and Philosophy of Science. Part B. Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 52, pp. 358–368. doi: 10.1016/j.shpsb.2015.10.006.
- [56] Sha, B.-L. (2004) "Noether's theorem: The science of symmetry and the law of conservation," *Journal of public relations research*, 16(4), pp. 391–416. doi: 10.1207/s1532754xjpr16044.
- [57] Halder, A. K., Paliathanasis, A. and Leach, P. G. L. (2018) "Noether's Theorem and Symmetry," arXiv [math-ph]. Available at: <http://arxiv.org/abs/1812.03682> (Accessed: May 8, 2024).
- [58] Nosrati, M. (2019) "On the magnetic current density in the Maxwell equations based on the noether theorem." doi: 10.48550/ARXIV.1911.08880.
- [59] Gordon, T. J. (1984) "Equivalent conserved currents and generalized Noether's theorem," *Annals of physics*, 155(1), pp. 85–107. doi: 10.1016/0003-4916(84)90253-7.
- [60] Liu, Y.-F. and Keller, J. (1996) "A symmetry of massless fields," *Journal of mathematical physics*, 37(9), pp. 4320–4332. doi: 10.1063/1.531657.
- [61] Basar, G., Dunne, G. V. and Kharzeev, D. E. (2010) "Chiral Magnetic Spiral," arXiv [hep-ph]. Available at: <http://arxiv.org/abs/1003.3464> (Accessed: May 8, 2024).
- [62] Faber, M. and Höllwieser, R. (2017) "Chiral symmetry breaking on the lattice," *Progress in particle and nuclear physics*, 97, pp. 312–355. doi: 10.1016/j.pnpnp.2017.08.001.
- [63] Warner, D. D., Bentley, M. A. and Van Isacker, P. (2006) "The role of isospin symmetry in collective nuclear structure," *Nature physics*, 2(5), pp. 311–318. doi: 10.1038/nphys291.
- [64] Beekman, A., Rademaker, L. and van Wezel, J. (2019) "An introduction to spontaneous symmetry breaking," *SciPost Physics Lecture Notes*, (11). doi: 10.21468/scipostphyslectnotes.11
- [65] Kibble, T. W. B. (2015) "Spontaneous symmetry breaking in gauge theories," *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, 373(2032), p. 20140033. doi: 10.1098/rsta.2014.0033.
- [66] Shuryak, E. (2002) "The QCD phase diagram, equation of state, and heavy ion collisions," *Nuclear physics. A*, 702(1–4), pp. 83–95. doi: 10.1016/s0375-9474(02)00691-7.
- [67] Jaeger, G. (1998) "The Ehrenfest classification of phase transitions: Introduction and evolution," *Archive for history of exact sciences*, 53(1), pp. 51–81. doi: 10.1007/s004070050021.

- [68] Hilfer, R. (1993) "Classification theory for phase transitions," *International journal of modern physics b*, 07(26), pp. 4371–4387. doi: 10.1142/s0217979293003711.
- [69] Sauer, T. (2016) "A Look Back at the Ehrenfest Classification. Translation and Commentary of Ehrenfest's 1933 paper introducing the notion of phase transitions of different order," arXiv [physics.hist-ph]. Available at: <http://arxiv.org/abs/1612.03062> (Accessed: May 8, 2024).
- [70] Ayala, A. et al. (2018) "Using the Linear Sigma Model with quarks to describe the QCD phase diagram and to locate the critical end point," *EPJ web of conferences*, 172, p. 08002. doi: 10.1051/epj-conf/201817208002.
- [71] Andrianov, A. A. et al. (1987) "Joint chiral and conformal bosonization in QCD and the linear sigma model," *Physics letters. Part B*, 186(3–4), pp. 401–404. doi: 10.1016/0370-2693(87)90316-9.
- [72] Tawfik, A. (2005) "QCD phase diagram: A comparison of lattice and hadron resonance gas model calculations," *Physical review*, 71(5). doi: 10.1103/physrevd.71.054502.
- [73] Lissia, M. et al. (1993) "Comparison of hadron quark distributions from lattice QCD and the MIT bag model," *Nuclear physics. A*, 555(1), pp. 272–292. doi: 10.1016/0375-9474(93)90323-p.
- [74] Nambu, Y. and Jona-Lasinio, G. (1961) "Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I," *The Physical review*, 122(1), pp. 345–358. doi: 10.1103/physrev.122.345
- [75] Ohnishi, A. (2016) "Approaches to QCD phase diagram; effective models, strong-coupling lattice QCD, and compact stars," *Journal of physics. Conference series*, 668, p. 012004. doi: 10.1088/1742-6596/668/1/012004.
- [76] Hubbard, J. (1959) "Calculation of partition functions," *Physical review letters*, 3(2), pp. 77–78. doi: 10.1103/physrevlett.3.77.
- [77] Andersen, J. O., Naylor, W. R. and Tranberg, A. (2016) "Phase diagram of QCD in a magnetic field," *Reviews of modern physics*, 88(2). doi: 10.1103/revmodphys.88.025001.
- [78] Ratti, C., Thaler, M. A. y Weise, W. (2006) "Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model", *Physical review*, 73(1). doi: 10.1103/physrevd.73.014019.
- [79] Ebert, D., Reinhardt, H. y Volkov, M. K. (1994) "Effective hadron theory of QCD", *Progress in particle and nuclear physics*, 33, pp. 1–120. doi: 10.1016/0146-6410(94)90043-4.
- [80] Blaschke, D. y Ebert, D. (2017) "Variational path-integral approach to back-reactions of composite mesons in the Nambu–Jona-Lasinio model", *Nuclear physics. B*, 921, pp. 753–768. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2017.06.013.
- [81] Ebert, D. et al. (1993) "Mesons and diquarks in a njl model at finite temperature and chemical potential", *International journal of modern physics. A, Particles and fields, gravitation, cosmology*, 08(07), pp. 1295–1312. doi: 10.1142/s0217751x93000539.
- [82] Márquez, F. y Zamora, R. (2017) "Thermo-magnetic nonlocal NJL model in the real and imaginary time formalisms", *International journal of modern physics. A, Particles and fields, gravitation, cosmology*, 32(04), p. 1750027. doi: 10.1142/s0217751x17500270.
- [83] Bang-Rong, Z. (2002) "Propagators for scalar bound states at finite temperature in an NJL model", *Communications in theoretical physics*, 37(3), pp. 303–308. doi: 10.1088/0253-6102/37/3/303.

- [84] Ibarra, J. R. M., Aguirre, A. J. G. y Flores-Baez, F. V. (2019) “Thermodynamic properties of light mesons and phase transition in an extended SU(2) NJL model”, *Modern Physics Letters A. Particles and Fields, Gravitation, Cosmology, Nuclear Physics*, 34(13), p. 1950070. doi: 10.1142/s0217732319500706.
- [85] Zhuang, P., Hüfner, J. y Klevansky, S. P. (1994) “Thermodynamics of a quark-meson plasma in the Nambu-Jona-Lasinio model”, *Nuclear physics. A*, 576(4), pp. 525–552. doi: 10.1016/0375-9474(94)90743-9
- [86] Mukherjee, S., Mustafa, M. G. y Ray, R. (2007) “Thermodynamics of the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model with nonzero baryon and isospin chemical potentials”, *Physical review*, 75(9). doi: 10.1103/physrevd.75.094015.
- [87] Ghosh, S. K. et al. (2006) “Susceptibilities and speed of sound from the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model”, *Physical review*, 73(11). doi: 10.1103/physrevd.73.114007.
- [88] Blanquier, E. (2011) “Standard particles in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model and the Polyakov–NJL model,” *Journal of physics. G, Nuclear and particle physics: an Institute of Physics journal*, 38(10), p. 105003. doi: 10.1088/0954-3899/38/10/105003.
- [89] Abuki, H. et al. (2008) “Chiral crossover, deconfinement, and quarkyonic matter within a Nambu–Jona-Lasinio model with the Polyakov loop”, *Physical review*, 78(3). doi: 10.1103/physrevd.78.034034.
- [90] Valbuena-Ordóñez, E. et al. (2020) “Influence of the effective potential on the crossover width in the two flavor Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model,” *Adv High Energy Phys*, 2020, pp. 1–14.
- [91] Ratti, C. et al. (2007) “Thermodynamics of the PNJL model,” *The European physical journal. C, Particles and fields*, 49(1), pp. 213–217. doi: 10.1140/epjc/s10052-006-0065-x.
- [92] Fukushima, K. and Hidaka, Y. (2007) “Model study of the sign problem in the mean-field approximation,” *Physical review*, 75(3). doi: 10.1103/physrevd.75.036002.
- [93] Rößner, S., Ratti, C. and Weise, W. (2007) “Polyakov loop, diquarks, and the two-flavor phase diagram,” *Physical review*, 75(3). doi: 10.1103/physrevd.75.034007.
- [94] Kohyama, H., Kimura, D. and Inagaki, T. (2015) “Regularization dependence on phase diagram in Nambu–Jona-Lasinio model,” *Nuclear physics. B*, 896, pp. 682–715. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2015.05.015.
- [95] Avancini, S. S. et al. (2021) “Regularizing thermo and magnetic contributions within nonrenormalizable theories,” *Physical review. D* (2016), 103(5). doi: 10.1103/physrevd.103.056009.
- [96] Madsen, J. (1994) “Shell model versus liquid drop model for strangelets,” *Physical review D: Particles and fields*, 50(5), pp. 3328–3331. doi: 10.1103/physrevd.50.3328.
- [97] Kiriya, O. (2005) “Color-superconducting strangelets in the Nambu–Jona-Lasinio model,” *Physical review*, 72(5). doi: 10.1103/physrevd.72.054009.
- [98] Kiriya, O., Kodama, T. and Koide, T. (2006) “Finite-size effects on the QCD phase diagram,” *arXiv [hep-ph]*. Available at: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0602086>.
- [99] Sasaki, C., Friman, B. and Redlich, K. (2007) “Susceptibilities and the phase structure of a chiral model with Polyakov loops,” *Physical review*, 75(7). doi: 10.1103/physrevd.75.074013.

- [100] Karsch, F. and Laermann, E. (1994) "Susceptibilities, the specific heat, and a cumulant in two-flavor QCD," *Physical review D: Particles and fields*, 50(11), pp. 6954–6962. doi: 10.1103/physrevd.50.6954.
- [101] Betancourt, F. J. et al. (2022) "QCD phase diagram in a finite volume in the PNJL model," *Open Physics*, 20(1), pp. 377–389. doi: 10.1515/phys-2022-0039.
- [102] Saucedo, J. R. et al. (2023) "Influence of the regularization scheme in the QCD phase diagram in the PNJL model," *Open Physics*, 21(1). doi: 10.1515/phys-2023-0133.