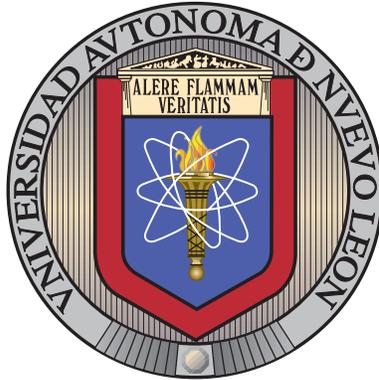


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



OPERADORES DE KNAPP-STEIN PARA $O(n + 1, 1)$ Y
APLICACIONES PARA FÍSICA RELATIVISTA

POR

SAO LEIJA FLORES

EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



OPERADORES DE KNAPP-STEIN PARA $O(n + 1, 1)$ Y
APLICACIONES PARA FÍSICA RELATIVISTA

POR

SAN LEIJA FLORES

EN OPCIÓN AL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Operadores de Knapp-Stein para $O(n + 1, 1)$ y aplicaciones para física relativista”, realizada por el alumno Sao Leija Flores, con número de matrícula 1733511, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. Raúl Gómez Muñoz

Dr. Lilia Alanis López
Revisor

Dr. Gerardo Palafox Castillo
Revisor

Vo. Bo.

Coordinador del Posgrado en Ciencias con
Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, -/-/2024

Operadores de Knapp-Stein para $O(n+1,1)$ y aplicaciones para física relativista

por

Sao Leija Flores

Una tesis presentada en cumplimiento
de los requisitos para el grado de
Maestría en Ciencias
con Orientación en Matemáticas

Posgrado de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Nuevo León

Fecha defensa de tesis: -/-/-

La disertación es aprobada por los siguientes miembros del Comité Final:

ITESM, Dr. Raúl Gomez Muñoz, Matemáticas

ITESM, Dr. Lilia Alanis Lopez, Matemáticas

UANL FCFM, Dr. Gerardo Palafox Castillo, Matematicas

Operadores de Knapp-Stein para $O(n+1,1)$ y aplicaciones para física relativista

Sao Leija Flores

Resumen

Este trabajo parte de la acción del grupo de Lie $PGL_2(\mathbb{R})$ sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con estructura de variedad diferenciable, para generalizar estos conceptos al grupo $O(n+1,1)$, enfocándose en la acción del grupo en un subespacio X del espacio proyectivo de dimensión $n+1$. En si, el trabajo preliminar es analizar la representación de $PGL_2(\mathbb{R})$ en un espacio de funciones L^2 y cómo esta acción induce un haz lineal sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$; se busca identificar secciones del haz lineal y funcionales lineales en el espacio dual que sean invariantes bajo la acción de ciertos subgrupos de $PGL_2(\mathbb{R})$. Este esfuerzo es análogo a determinar qué secciones y funcionales se anulan bajo la acción de la representación del álgebra de Lie $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{R})$ de dichos generadores de los subgrupos, con un interés en restringir nuestro problema a las funciones de Schwartz. Mediante un enfoque que incluye cálculo integral y análisis en diferentes cartas coordenadas, se exploran estas invariantes. La investigación profundiza y abstrae estos hallazgos a través de la topología algebraica, en particular, el álgebra homológica y la cohomología, para proporcionar una reinterpretación teórica más amplia de las soluciones concretas. Al extender este marco al estudio de $O(n+1,1)$, no solo amplía el alcance de los resultados iniciales sino que también se sitúa en la intersección de la teoría de grupos de Lie, la geometría diferencial y la topología algebraica, abriendo nuevas observaciones y resultados, en física relativista.

Agradecimientos

Al Dr. Raúl, por su paciencia y perseverancia para apoyarme en este proyecto

Motivación

Dado un grupo de Lie reductivo G con subgrupo compacto maximal K , Harish-Chandra describió la descomposición espectral del espacio $L^2(G/K)$ en términos de las representaciones esféricas de G . En el caso en que $G = O(n+1, 1)$ con $K = O(n+1) \times O(1)$, el espacio G/K corresponde a los espacios temporaloides de Relatividad Especial. En este caso, las representaciones esféricas corresponden a:

$$I_\nu = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ son suaves, } f(pg) = \sigma_\nu(p)f(g), p \in P, g \in G\}$$

donde dado ν complejo definimos:

$$\sigma_\nu(m(B)\alpha(a)n(x)) = |a|^{\nu+n/2}$$

La acción de $O(n+1, 1)$ en I_ν , esta dada por:

$$(\pi(g) \cdot f)(x) := f(x \cdot g) \quad \text{con } x, g \in O(n+1, 1)$$

Una parte importante en el estudio de la descomposición espectral, de $L^2(G/K)$ esta dada por el analisis de los operadores de Knapp-Stein, que son ciertos operadores de entrelazamiento:

$$KS(\nu) : I_\nu \rightarrow I_{-\nu}$$

Estos operadores se pueden describir en terminos del funcional de Jacquet, mediante la formula:

$$(KS(\nu)f)(g) = J_\nu(\pi(g)f)$$

Remarcamos que $J_\nu \in (I'_\nu)^{MN}$.

En esta tesis, daremos una descripción completa del espacio $(I'_\nu)^{MN}$, incluyendo el operador de Jacquet, utilizando tecnicas de Algebra Homologica. Este resultado generaliza los resultados obtenidos por Gomez-Speh para el caso $PGL_2(\mathbb{R}) \simeq SO(2, 1)$.

Ademas abordar este problema proviene de la creciente importancia de la teoría de representaciones en el estudio de grupos de Lie, específicamente en el análisis de estructuras algebraicas que surgen en la geometría diferencial. En particular, la relación entre las representaciones del grupo $O(n+1, 1)$ y sus subgrupos plantea nuevas preguntas en la teoría de invariantes, con aplicaciones en física teórica y geometría. Este trabajo intenta aportar un nuevo enfoque a la clasificación de subgrupos y la acción de estos sobre espacios proyectivos y Haces vectoriales sobre los mismos, lo cual paralelamente busca identificar invariantes y también podría facilitar el estudio de otras variedades diferenciables mas complejas.

Objetivo y metodología

El objetivo principal de este trabajo es encontrar las **secciones invariantes** de un haz vectorial, estudiando la acción de un grupo sobre dicho haz. Para lograr esto, nos enfocamos en funciones de rápido decrecimiento y además en identificar específicamente **dónde el problema tiene solución** al hacer uso de herramientas de **Álgebra Homológica** aplicadas al espacio donde actúan las álgebras de Lie. Este enfoque proporciona una estructura algebraica que facilita la clasificación y caracterización de las secciones invariantes bajo la acción del grupo. El uso de álgebra homológica es clave en este contexto, ya que ofrece un marco robusto y abstracto para identificar y calcular los invariantes dentro de la estructura del haz vectorial.

Antecedentes

En el trabajo de Gomez-Speh [1], se analiza un problema similar, al que consideramos en esta tesis, para el grupo $PGL_2(\mathbb{R}) \simeq SO(2, 1)$. Así que se puede considerar este trabajo como una generalización de los resultados mencionados.

Índice de Símbolos

1.	Ilustración de la proyección estereográfica	21
2.	Relación entre las distintas parametrizaciones locales	22
3.	Carta coordenada	22
4.	Cambios de coordenadas	23
5.	Plano Tangente a la superficie	24
6.	Haz Tangente de la esfera	25
7.	Haz Tangente en M	27
8.	Un campo vectorial en M	28
9.	Haz normal sobre la esfera.	31
10.	Representación del espacio proyectivo.	41
11.	Cartas coordenadas \mathbb{P}_0^1 y \mathbb{P}_1^1	42
12.	Ilustración de la construcción del isomorfismo.	43
13.	Ilustración de un grupo de Lie.	48
14.	Ilustración de los campos vectoriales para definir la derivada de Lie.	55
15.	Ilustración de una función de Schwarz.	60
16.	Ilustración del camino de la extensión de un elemento abstracto.	65
1.1.	Ilustración de la función obtenida.	90
2.1.	Ilustración de una función h	95
2.2.	Ilustración del camino de la extensión de un elemento abstracto.	97
3.1.	Obstrucciones y singularidades del problema.	103
4.1.	Obstrucciones y singularidades del problema.	120
4.2.	Obstrucciones y singularidades de la extensión analítica.	121

Índice general

0. Preliminares	1
0.1. Conceptos básicos de teoría de conjuntos	1
0.1.1. Clases de equivalencia	2
0.1.2. Funciones	3
0.2. Teoría de grupos	5
0.2.1. Representaciones de grupos	9
0.2.2. Dual de un espacio vectorial	14
0.2.3. Álgebra tensorial	16
0.3. Geometría Diferencial	19
0.3.1. Variedades diferenciales	22
0.3.2. Haces Vectoriales	29
0.3.3. Variedades riemannianas y pseudoriemannianas	33
0.3.4. Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	40
0.3.5. La esfera celeste como subespacio de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	43
0.3.6. Grupos y álgebras de Lie	48
0.4. Álgebra Homologica	57
0.4.1. Sucesiones exactas de espacios vectoriales	62
0.4.2. Homología y Cohomología de una sucesión exacta	65
1. Introducción	84
1.1. El grupo proyectivo $PGL_2(\mathbb{R})$ y su acción natural en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$	84
1.2. Construcción de un haz lineal \mathcal{L}_ν sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y la acción de $PGL_2(\mathbb{R})$ sobre el mismo.	86
1.3. Secciones invariantes de $\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$ ante el álgebra de Lie $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{R})$	90
2. Problemas y contradicciones con las secciones invariantes en $\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$	95
2.1. Condiciones aparentemente suficientes para las secciones invariantes	95
2.2. Comprensión de $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$ con una sucesión exacta corta	97
3. Solución al problema con Álgebra Homologica en $PGL_2(\mathbb{R})$	99
3.1. Homología y Cohomología en $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$	99
3.2. Extensión meromorfa de las distribuciones en ν	101
3.3. Análisis de las obstrucciones y singularidades en $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$	103

4. Generalización del problema al caso de $O(n+1,1)$	108
4.1. $PGL_2(\mathbb{R})$ y $SO(2,1)$ son isomorfos	108
4.2. Construcción de un haz vectorial $\tilde{\mathcal{L}}_\nu$ sobre Y	112
4.3. Secciones invariantes de $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$ ante el álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n+1,1)$	114
4.4. Comprensión de $\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$ con una sucesión exacta corta	116
4.5. Homología y Cohomología en $\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$	118
4.6. Extensión meromorfa de las distribuciones en ν	120
4.7. Análisis de las obstrucciones y singularidades en $\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$	122

Capítulo 0

Preliminares

Uno de los elementos más destacados de las matemáticas desde el siglo XX hasta hoy, ha sido el reconocimiento del potencial inherente a los métodos abstractos. Este hecho dio el surgimiento de una gran colección de nuevos resultados y problemas, dando paso a la exploración de dominios matemáticos anteriormente inexplorados. Los avances recientes no solo han enriquecido nuestro conocimiento matemático, sino que también han ofrecido perspectivas nuevas y, junto a ellas, pruebas innovadoras de teoremas clásicos. La simplificación de problemas complejos a sus componentes fundamentales, da una nueva visión de cuestiones y resultados que antes se consideraban aislados. Esto ha construido puentes entre áreas matemáticas que antiguamente no se creía estuvieran conectadas o relacionadas. Por ello siempre es necesario, el hacer un énfasis a una gran cantidad de colecciones de definiciones y teoremas, para que las verdades de nuevos problemas, sean cuestiones triviales.

0.1. Conceptos básicos de teoría de conjuntos

Definición 0.1.1. Un **conjunto** es una colección de elementos sin repetición. Se puede describir listando sus elementos o mediante una propiedad que los caracterice. Por ejemplo, el conjunto A puede definirse como:

$$A = \{x \mid x \text{ satisface una propiedad } P\}.$$

Definición 0.1.2. Dado un conjunto A , se dice que B es un **subconjunto** de A si todo elemento de B es también elemento de A , y se denota $B \subseteq A$.

Definición 0.1.3. El **conjunto vacío**, denotado por \emptyset , es el conjunto que no contiene ningún elemento, es decir, $\emptyset = \{\}$.

Definición 0.1.4. La **unión** de dos conjuntos A y B , escrita $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos, esto es:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Definición 0.1.5. La **intersección** de dos conjuntos A y B , escrita $A \cap B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente, dado por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Definición 0.1.6. La **diferencia** de dos conjuntos A y B , escrita $A \setminus B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no a B , expresado como:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Definición 0.1.7. Dado un conjunto universal U y un subconjunto A de U , el **complemento** de A en U , denotado A^c , es el conjunto de elementos que no pertenecen a A , es decir:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Definición 0.1.8. El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B , denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B , es decir:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Es directo notar, que todas las definiciones anteriores se pueden generalizar para una cantidad numerable de conjuntos operando entre sí, para ello revisar [2]

0.1.1. Clases de equivalencia

En matemáticas, una *relación de equivalencia* es una relación binaria que generaliza la noción de igualdad. La construcción de cocientes es una aplicación significativa de las relaciones de equivalencia. Por ejemplo, en teoría de grupos, el grupo cociente se forma al dividir un grupo por uno de sus subgrupos normales, lo cual resulta en un nuevo grupo. En espacios vectoriales, podemos construir espacios cocientes similares a partir de subespacios.

Esto permite una comprensión más profunda de la estructura y la simetría de estos espacios. En álgebra homológica, las relaciones de equivalencia juegan un rol crucial en la definición de la homología, donde los cocientes nos permiten medir la diferencia entre los elementos de un espacio topológico, proporcionando información valiosa que no podríamos ver de otra manera. Así, la relación de equivalencia no solo es fundamental por sí misma, sino también como una herramienta que posibilita la definición de invariantes algebraicos y topológicos en la matemática avanzada.

Definición 0.1.9 (Relación de Equivalencia). Una **relación de equivalencia** sobre un conjunto A es una relación binaria \sim para la cual se cumplen las siguientes propiedades para todos los elementos $a, b, c \in A$:

1. **Reflexividad:** $a \sim a$.
2. **Simetría:** Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$.
3. **Transitividad:** Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

Estas propiedades se denominan reflexividad, simetría y transitividad, respectivamente.

La noción de clase de equivalencia es una herramienta poderosa surge naturalmente de una relación de equivalencia.

Definición 0.1.10. Dada una relación de equivalencia \sim en un conjunto A , la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ se define como el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a , es decir:

$$[a] = \{x \in A \mid a \sim x\}.$$

Estas clases de equivalencia tienen la propiedad distintiva de que cada elemento de A pertenece a una y solo una clase de equivalencia, lo que significa que las clases de equivalencia particionan A en conjuntos disjuntos.

A partir de estas particiones, es posible construir el conjunto cociente de A por la relación de equivalencia, denotado como A/\sim , que es el conjunto de todas las clases de equivalencia de A . Este conjunto cociente retiene información estructural sobre el conjunto original A y la relación de equivalencia aplicada. En teoría de grupos, por ejemplo, las clases de equivalencia se utilizan justamente para formar los grupos cociente, que son fundamentales para comprender la estructura de los grupos y sus morfismos. De manera similar, en el ámbito de los espacios vectoriales, las clases de equivalencia conducen a la construcción de espacios vectoriales cociente, proporcionando una manera de *factorizar* estructuras por subestructuras y explorar propiedades dimensionales y de subespacios. Lo cual podemos formalizarlo con el siguiente teorema importante de la teoría de conjuntos:

Teorema 0.1.1. *Las distintas clases de equivalencia de una relación de equivalencia sobre A nos proporcionan una descomposición de A como una unión de subconjuntos mutuamente ajenos. Recíprocamente, dada una descomposición de A como unión de subconjuntos mutuamente ajenos y no vacíos, podemos definir una relación de equivalencia sobre A para que estos subconjuntos sean las distintas clases de equivalencia.*

0.1.2. Funciones

Las funciones son fundamentales en matemáticas, particularmente en el estudio de estructuras como grupos y variedades. Una función bien definida permite modelar relaciones matemáticas precisas entre conjuntos, crucial para entender morfismos e isomorfismos.

Definición 0.1.11. Dado dos conjuntos A y B , una **función** de A a B , denotada por $f : A \rightarrow B$, es una regla que asigna a cada elemento x en el conjunto A exactamente un elemento y en el conjunto B . El elemento y es llamado la **imagen** de x bajo f , y se denota por $f(x)$, es decir:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Describir las interacciones entre estructuras algebraicas es algo que solo puede ser caracterizado por las funciones, ya que estas facilitan la comprensión de cómo se conservan o modifican las propiedades estructurales bajo ciertas transformaciones.

Por ello, también es necesario definir lo que son las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas ya que es esencial para avanzar hacia teoremas clásicos que profundizan en la teoría de funciones y estructuras.

Definición 0.1.12. Una **función inyectiva** de un conjunto A a un conjunto B , denotada $f : A \rightarrow B$, es tal que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$ para todo $x, y \in A$. Esto significa que elementos diferentes en A tienen imágenes diferentes en B .

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Definición 0.1.13. Una **función sobreyectiva** de un conjunto A a un conjunto B , denotada $f : A \rightarrow B$, es tal que para cada elemento $b \in B$, existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Esto asegura que todos los elementos de B son imagen de al menos un elemento de A .

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

Definición 0.1.14. Una **función biyectiva** de un conjunto A a un conjunto B , denotada $f : A \rightarrow B$, es inyectiva y sobreyectiva.

En el proceso de desarrollo y formulación de definiciones matemáticas, se podría concluir tempranamente que una base teórica sólida asegura que cualquier modelo algebraico funcione sin contratiempos. Sin embargo, la realidad es a menudo contraria a esta expectativa. Al enriquecer y profundizar en la construcción de una teoría, no solo emergen soluciones sino que también se hacen evidentes algunos problemas específicos.

Ejemplo 1. *En el caso de las funciones, la función logaritmo, definida en los reales como $f(x) = \log(x)$ para $x > 0$, presenta interesantes desafíos al ser extendida a los números complejos. En los reales, el logaritmo de un número negativo no está definido. Sin embargo, en el campo de los números complejos, cualquier número complejo puede tener un logaritmo, pero este se convierte en una función multivaluada.*

Considere un número complejo $z = re^{i\theta}$, donde r es el módulo y θ el argumento del número. El logaritmo complejo de z puede definirse como:

$$\ln(z) = \log(r) + i(\theta + 2\pi k)$$

*donde k es cualquier número entero. Esto indica que existen infinitos valores posibles para el logaritmo de un número complejo, dependiendo del valor de k . Esta característica de ser multivaluada es un resultado directo de la periodicidad de la función exponencial en los complejos y se denomina la **ramificación** del logaritmo. La gestión de esta ramificación es crucial para el uso adecuado del logaritmo en contextos más generales, pero a su vez, su construcción es un poco complicada.*

El hecho que mencionáramos el ejemplo anterior, es por que gran parte del tema investigado en la tesis, es abordar cuando si y en donde, podemos extender una función a un dominio más grande que el que originalmente se planteo.

Ahora se hará mención a unos resultados importantes, útiles para el estudio de objetos globales a partir de su estructura local, y viceversa, para su demostración se puede consultar [3]. En pocas palabras, habla de existencia un conjunto de funciones que pueden partir una función global en funciones locales, conservando sus propiedades, y viceversa, a partir de un conjuntos de funciones locales, podemos asegurar la existencia de una función global.

Teorema 0.1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y sea Θ un recubrimiento abierto de A . Entonces existe una colección Φ de funciones φ de la clase C^∞ definidas en un conjunto abierto que contiene a A , con las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in A$ se tiene $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.
2. Para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto V que contiene a x tal que todas, excepto un número finito de las $\varphi \in \Phi$, son 0 en V .
3. Para cada $x \in A$ se tiene $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ (en virtud de (2), para cada x esta suma es finita en un conjunto abierto que contiene a x).
4. Para cada $\varphi \in \Phi$ existe un conjunto abierto U en Θ tal que $\varphi = 0$ al exterior de un conjunto cerrado contenido en U .

(Una colección Φ que satisfaga las condiciones (1) a (3) se denomina *partición de la unidad para A con funciones C^∞* . Si Φ satisface también (4), se dice que es *subordinada al recubrimiento Θ*).

Teorema 0.1.3. Si A es acotado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, y $\{x : f \text{ es discontinua en } x\}$ tiene medida 0, entonces la siguiente suma converge:

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$$

0.2. Teoría de grupos

Un grupo es un conjunto de elementos acompañados de una operación que combina cualquier par de elementos para formar un tercer elemento del mismo conjunto, cumpliendo con ciertas propiedades:

Definición 0.2.1. Un **grupo** es una estructura algebraica compuesta por un conjunto G no vacío y una operación binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$, que satisface las siguientes propiedades:

- **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in G$, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Elemento neutro:** Existe un elemento $e \in G$ tal que para todo $a \in G$, se cumple que $e \cdot a = a \cdot e = a$.
- **Elemento inverso:** Para cada elemento $a \in G$, existe un elemento $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$, donde e es el elemento neutro.

Definición 0.2.2. Si además la operación binaria es conmutativa, es decir, $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in G$, entonces el grupo se denomina **grupo abeliano**.

Definición 0.2.3. Un **espacio vectorial** V sobre un campo \mathbb{F} es un conjunto no vacío junto con dos operaciones que satisfacen los siguientes axiomas:

- **Adición de vectores:** Existe una operación $+$: $V \times V \rightarrow V$ tal que $(V, +)$ es un grupo abeliano.

- **Multiplicación por un escalar:** Existe una operación $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ que satisface las siguientes propiedades:
 - **Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición de vectores:** Para todos $a \in \mathbb{F}$ y $u, v \in V$, se cumple que $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$.
 - **Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición de escalares:** Para todos $a, b \in \mathbb{F}$ y $v \in V$, se cumple que $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.
 - **Asociatividad de la multiplicación por escalar:** Para todos $a, b \in \mathbb{F}$ y $v \in V$, se cumple que $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$.
 - **Elemento neutro de la multiplicación por escalar:** Para todo $v \in V$, se cumple que $1 \cdot v = v$, donde 1 es el elemento identidad en \mathbb{F} .

Podríamos enunciar una gran cantidad de definiciones y teoremas importantes de esta rama de las matemáticas, pero eso puede consultarse en [2] y [4], en cambio solo daremos los resultados mas relevantes y útiles para este trabajo.

Teorema 0.2.1. *Si G es un grupo, entonces:*

- a) *el elemento identidad de G es único;*
- b) *todo $a \in G$ tiene un inverso único en G ;*
- c) *para todo $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$;*
- d) *para $a, b \in G$, $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.*

Definición 0.2.4. Un **subgrupo** H de un grupo G es un subconjunto de este que, por sí mismo, también es un grupo bajo la misma operación del grupo original.

Definición 0.2.5. Sea G un grupo y H un subgrupo de G . La **clase lateral derecha** de H en G asociada a un elemento g de G se define como el conjunto Hg dado por:

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

Este conjunto contiene todos los productos de elementos de H con g , donde la multiplicación se realiza en el orden especificado (primero h y luego g). Similarmente se puede definir la clase lateral izquierda.

También podemos notar que Hg es una clase de equivalencia $[g]$ de g en G , y por tanto, el conjunto de clases laterales constituyen una descomposición de G . Aunado a lo anterior, podemos construir nuevos grupos a partir de sus propios subgrupos, que serán relevantes para nuestros cálculos:

Definición 0.2.6. Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G (esto es, H es un subgrupo tal que $gH = Hg$ para todo g en G). El **grupo cociente** de G por H , denotado G/H , se define como el conjunto de todas las clases laterales derechas de H en G con la operación:

$$(Ha) \cdot (Hb) = Hab$$

El grupo cociente G/H encapsula la estructura de G que queda después de *colapsar* H al elemento identidad en las clases de equivalencia. Cabe de aclarar que también podemos

construir cocientes de grupos que no formen un grupo, pero si una estructura de clases de equivalencia.

Observación. Cuando hacemos algún grupo cociente, la operación está bien definida debido a la normalidad de H , podemos verlo ya que:

- Si $G \rightarrow G/H$ donde H es normal, entonces:

$$g \mapsto [g] = gH$$

Ahora, si $[g] = [e]$ entonces:

$$gH = eH \iff g \in H$$

Si un elemento g está en H , entonces $[g]$ consiste únicamente de los elementos de H :

$$[g] = H$$

- En general:

$$[g_1] = [g_2] \iff g_1H = g_2H$$

entonces:

$$H = g_1^{-1}g_2H \implies g_1^{-1}g_2 \in H$$

Por lo tanto, dos elementos g_1, g_2 son equivalentes si difieren por un elemento de H :

$$g_1^{-1}g_2 \in H$$

Se observa que los elementos de G/H cuando H es normal, siendo de la forma $[g] : G/H$, son todos menos los de H , ya que si nos referimos a estos elementos como las clases $[g] = gH$ y no como en sí a las clases laterales, sino a las clases de equivalencia $[g]$:

- A manera visual se ve como:

$$\frac{G}{H} = \{[e], [g_1], \dots, [g_n]\}$$

donde todo elemento representante de la clase de equivalencia no pertenece a H , más que e , ya que $[e] = eH = H$.

Definición 0.2.7. Un **morfismo de grupos** (también llamado homomorfismo de grupos) es una función entre dos grupos que respeta la estructura de grupo. Matemáticamente, un morfismo de grupos f de un grupo G a un grupo H se define de la siguiente manera:

- $f : G \rightarrow H$ es un morfismo si $\forall a, b \in G$, se cumple que $f(ab) = f(a)f(b)$

Esto significa que la imagen bajo f del producto de dos elementos en G es igual al producto de las imágenes de esos elementos en H . Esto preserva la operación de grupo.

Teorema 0.2.2. Si ϕ es un morfismo de G en H , entonces:

1. $\phi(e) = e_H$, el elemento identidad de H ;
2. $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ para todo $x \in G$.

En pocas palabras, la relevancia de este teorema recae en la relación de los elementos identidad de G y H .

La siguiente definición parecería un primer salto de abstracción, ya que con ello, podremos hablar de relaciones mas fuertes entre grupos, aunque mas adelante observaremos que esta construcción es una idea muy sencilla de comprender.

Definición 0.2.8. Si ϕ es un morfismo de G en H , el **núcleo de ϕ** , K_ϕ , se define por

$$K_\phi = \{x \in G \mid \phi(x) = e_H, \text{ donde } e_H \text{ es el elemento identidad de } H\}.$$

Definición 0.2.9. Un **isomorfismo de grupos** es un tipo de morfismo de grupos que, además, tiene la propiedad de ser biyectivo, es decir, es inyectivo (uno-a-uno) y sobreyectivo (sobre). En términos matemáticos, un isomorfismo de grupos entre dos grupos G y H se define de la siguiente manera:

- Un morfismo de grupos $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo si:
 1. **Inyectividad:** $f(a) = f(b)$ implica $a = b$ para todos $a, b \in G$.
 2. **Sobreyectividad:** Para cada elemento $h \in H$, existe un $g \in G$ tal que $f(g) = h$.

Si existe un isomorfismo entre dos grupos, decimos que los grupos son **isomorfos**, lo que indica que tienen la misma estructura de grupo y cantidad de elementos, aunque los mismos y las operaciones puedan parecer diferentes superficialmente. En notación, esto se denota como $G \cong H$. Esto refleja que, estructuralmente, G y H son indistinguibles desde el punto de vista de la teoría de grupos.

Entonces, por lo siguiente fue importante mencionar al núcleo de un morfismo.

Teorema 0.2.3. *Un morfismo ϕ de G sobre H con núcleo K_ϕ es un isomorfismo de G en H si y sólo si $K_\phi = \{e\}$.*

Teorema 0.2.4. *Si ϕ es un morfismo de G sobre H de núcleo K , entonces K es un subgrupo normal de G .*

Observamos que, a partir de las relaciones entre un morfismo y su núcleo, podemos concluir cuestiones que no son triviales, como la cantidad de elementos entre dos grupos, aparentemente distintos. Aunque parezca poco trivial el teorema anterior, podemos explicarlo de manera sencilla ya que, sabemos que el elemento identidad de un grupo es único, y en el contexto de morfismos de grupos, este también está relacionado siempre con el elemento identidad del otro grupo. ¿Pero que podemos deducir si no es el único elemento relacionado con la identidad por medio de ese morfismo?, la respuesta a esta pregunta está dada por los siguientes teoremas:

Teorema 0.2.5. *Si ϕ es un morfismo de G sobre H de núcleo K , entonces K es un subgrupo normal de G .*

Teorema 0.2.6. *Sea ϕ un morfismo de G sobre H con núcleo K . Entonces $G/K \cong H$.*

En pocas palabras, al *remover* el núcleo del grupo G , resulta de un nuevo grupo, isomorfo a H , lo cual resulta particularmente interesante, ya que esto es una forma en la cual podemos *factorizar* grupos, y que lo resultante siga manteniendo la estructura algebraica intacta. También podemos pensarlo como una medida de que tanto un morfismo se aleja de ser isomorfismo.

0.2.1. Representaciones de grupos

La teoría de representaciones de grupos es una rama fundamental de la teoría de grupos que encuentra aplicaciones en diversas áreas de la matemática y la física, incluyendo álgebra, geometría, teoría de números y mecánica cuántica. Para entender su importancia, es útil comenzar con algunas definiciones básicas. Mencionaremos un conjunto importante, que a su vez, tiene estructura de grupo, con lo cual podemos ver la verdadera fuerza y aplicaciones que tiene la definición de morfismo de grupos:

Definición 0.2.10. Si V es un conjunto no vacío, entonces $\text{Aut}(V)$ es el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de V sobre sí mismo.

Entonces podemos hablar del siguiente morfismo:

Definición 0.2.11. Definimos la acción de un grupo G sobre el conjunto de automorfismos de un conjunto V como el morfismo de:

$$\phi : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$$

En notación, $G \curvearrowright V$. Es un morfismo de grupos.

Si suponemos que V es un espacio vectorial, la importancia de lo anterior, es traducir problemas abstractos de teoría de grupos en problemas más concretos y manejables de álgebra lineal. Al representar elementos de un grupo como matrices y las operaciones de grupo como multiplicación de matrices, se facilita el análisis y la resolución de problemas en una variedad de contextos matemáticos y físicos. Similarmente, podemos resolver problemas de álgebra lineal utilizando los resultados abstractos de teoría de grupos. El siguiente teorema engloba lo anterior mencionado:

Teorema 0.2.7. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de acciones de un grupo G en un espacio vectorial V y el conjunto de morfismos de G en $\text{Aut}(V)$.*

Ejemplo 2. *El grupo unitario $U(1)$ es el grupo de todas las matrices unitarias de 1×1 con entradas complejas. Consideremos la circunferencia unitaria en el origen del plano complejo, descrita por $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. El grupo de rotaciones de esta circunferencia es isomorfo al grupo unitario $U(1)$, que puede ser descrito por el morfismo ϕ como $\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$. Cada elemento de este grupo corresponde a una rotación del plano complejo alrededor del origen (Para más información del grupo unitario se puede consultar en [5]).*

Con el ejemplo anterior, podemos ver que para cada valor del ángulo, corresponde a un elemento del grupo unitario, y por la propia definición del arco de una circunferencia unitaria ¿También podríamos decir que hay una correspondencia entre los elementos del grupo y los puntos de la circunferencia?, la respuesta es sí, solo que habría que ajustar unos detalles, y naturalmente surgirá tal biyección.

En el contexto de la teoría de grupos, el estabilizador de un punto bajo una acción de grupo es el conjunto de elementos del grupo que dejan el punto fijo. En este caso, estamos considerando la acción del grupo de rotaciones sobre la circunferencia unitaria.

Supongamos que tenemos un punto específico en la circunferencia, digamos $z_0 \in S^1$. El estabilizador de z_0 bajo la acción del grupo de rotaciones es el conjunto de todas las rotaciones que dejan z_0 fijo. Formalmente, el estabilizador de z_0 es:

$$\text{Stab}_{U(1)}(z_0) = \{g \in U(1) \mid \phi(g) \cdot z_0 = e^{i\theta} \cdot z_0 = z_0\}$$

Para encontrar el elemento específico que es el estabilizador de z_0 , observamos que para cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$e^{i\theta} \cdot z_0 = z_0 \implies e^{i\theta} = 1$$

La única rotación que deja z_0 fijo para cualquier $z_0 \in S^1$ es la rotación por $\theta = 0$. Por lo tanto, el estabilizador de cualquier punto en la circunferencia unitaria bajo la acción del grupo de rotaciones es el elemento identidad del grupo de rotaciones, que es la rotación por 0 grados, o $e^{i \cdot 0} = 1$. Ahora, evidentemente, el estabilizador, con la operación del grupo, resulta ser un subgrupo, por lo cual:

Teorema 0.2.8. *Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto V . Para cada $x \in V$, el estabilizador de x en G , denotado $\text{Stab}(x)_G$, es un subgrupo de G . Es decir,*

$$\text{Stab}(x)_G = \{g \in G \mid \phi(g) \cdot x = x\}$$

es un subgrupo de G .

Ahora tomemos ese mismo punto específico, pero bajo la acción de todo el grupo, obtendríamos en esencia toda la circunferencia, formalmente:

Definición 0.2.12. Si G actúa en V , se tiene una relación de equivalencia en V :

$$x \sim y \text{ si existe } g \in G \text{ tal que } \phi(g)x = y$$

Las clases de equivalencia de esta relación se llaman las **órbitas de la acción** de G en V , la órbita de $x \in V$ se denota por:

$$\text{Orb}_G(x) = \{\phi(g)x : x \in V, g \in G\}$$

por lo cual es evidente que $U(1) \cong S^1$, por el Teorema 0.2.6. Seguidamente, podemos enunciar uno de los teoremas más importantes de el presente trabajo y desde mi punto de vista, más importantes de la teoría de grupos:

Teorema 0.2.9. *Si G actúa en V , entonces para cada $x \in V$ se tiene que:*

$$\text{Orb}_G(x) \cong \frac{G}{\text{Stab}(x)_G}$$

como un isomorfismo de conjuntos. Cabe de recalcar que la notación enuncia una estructura cociente, pero no necesariamente un grupo cociente, aunque independiente de ambos casos, el teorema sigue siendo válido. Si se quiere profundizar en la demostración de este teorema, puede referirse a [4].

Observación. Dependiendo del contexto que estemos trabajando, en este caso, dependiendo de si tu grupo es normal, si no lo es, hay que tener cuidado con la notación, a la hora de hacer uso de este teorema, donde lo importante es notar si actúas por la derecha o por la izquierda, en pocas palabras:

$$G \curvearrowright V \quad \text{es transitivo,} \quad P = \text{Stab}(x_0)$$

$$G/P \cong V \quad g \mapsto g \cdot x_0$$

$$V \curvearrowleft G \quad \text{es transitivo,} \quad P = \text{Stab}(x_0)$$

$$P \backslash G \cong V \quad g \mapsto x_0 \cdot g$$

La importancia de ese teorema recae, en que podemos dotar de ciertos aspectos topológicos a los grupos o cocientes de los mismos, como por ejemplo, conexidad, compacidad, si es métrico o no, etc., propiedades que a priori no podríamos notar por la alta abstracción de los grupos. También se tiene que tener considerado el espacio vectorial donde estemos trabajando, ya que de ello depende, que propiedades topológicas podamos ver del grupo, por lo cual definimos lo siguiente:

Teorema 0.2.10. Si G es un grupo y V es un espacio vectorial, una representación de G en V es un morfismo $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Sabemos que hay espacios vectoriales isomorfos, entonces podemos preguntarnos que sucede con las representaciones de algún grupo en esos espacios vectoriales, ¿Estarán relacionadas de alguna manera o serán equivalentes?:

Ejemplo 3. Consideremos el grupo de rotaciones en el plano, $G = SO(2)$, que puede ser representado de dos maneras diferentes:

Usando senos y cosenos, la matriz de rotación por un ángulo θ en el plano euclidiano \mathbb{R}^2 es:

$$R_{\text{trig}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Usando exponenciales complejas, la rotación por un ángulo θ en el plano complejo \mathbb{C} :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Definimos el siguiente isomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x + iy$$

El isomorfismo inverso $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define por:

$$f^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix}$$

Para demostrar la equivalencia, verificamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ R_{\text{trig}}(\theta) \downarrow & & \downarrow e^{i\theta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

Esto implica que:

$$f(R_{\text{trig}}(\theta) \cdot \mathbf{v}) = e^{i\theta} \cdot f(\mathbf{v})$$

Para cualquier vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$R_{\text{trig}}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

Aplicando f ,

$$f \left(\begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \right) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Por otro lado, aplicando $e^{i\theta}$ a $f(\mathbf{v})$,

$$e^{i\theta} \cdot (x + iy) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Esto confirma que:

$$f \left(R_{\text{trig}}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = e^{i\theta} \cdot f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

Por lo tanto, f es un isomorfismo que muestra que las dos representaciones son equivalentes.

Entonces, el ejemplo anterior, concuerda con definir lo siguiente:

Definición 0.2.13. Dada dos representaciones de un grupo G en un espacio vectorial V y V' respectivamente:

$$\phi : G \rightarrow \operatorname{Aut}(V) \quad \text{y} \quad \phi' : G \rightarrow \operatorname{Aut}(V')$$

diremos que son equivalentes o isomorfas, si existe un isomorfismo:

$$f : V \rightarrow V'$$

tal que $\forall g \in G$:

$$f \circ \phi(g) = \phi'(g) \circ f$$

es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \phi(g) \downarrow & & \downarrow \phi'(g) \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

Ahora en adelante enunciaremos una gran cantidad de grupos que serán útiles para el desarrollo del trabajo:

Definición 0.2.14. El grupo lineal general real de dimensión n :

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

Definición 0.2.15. Una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $A^T A = I$ se llamará ortogonal. Al conjunto de matrices que cumplen eso se llaman ortogonales, y se denota por:

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$$

el grupo ortogonal de dimensión n .

Definición 0.2.16. Una matriz $A \in O(n)$ es propia si y sólo si $\det(A) = 1$. El conjunto de matrices ortogonales propias se llama grupo especial ortogonal de dimensión n y se denota por:

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

Definición 0.2.17. El grupo lineal especial real de dimensión n :

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

Definición 0.2.18. El grupo ortocónico asociado al espacio de Minkowski de dimensión $n + 1$ con métrica G :

$$O(n, 1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T G A = G\}$$

Definición 0.2.19. Al subgrupo de $O(n, 1)$ de matrices propias, llamado grupo especial ortocónico asociado al espacio de Minkowski con métrica G :

$$SO(n, 1) = \{A \in O(n, 1) \mid \det(A) = 1\}$$

Definición 0.2.20. Tenemos la siguiente relación de equivalencia en $GL(n, \mathbb{R})$:

$$\{A \sim B \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid A = \lambda B\}$$

Las clases de equivalencia de esta relación forman un grupo bajo la multiplicación de matrices llamado $PGL(n, \mathbb{R}) = PGL_n(\mathbb{R})$.

0.2.2. Dual de un espacio vectorial

En la teoría de grupos, una **representación** de un grupo G en un espacio vectorial V es un morfismo de grupos $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$, donde $\text{Aut}(V)$ denota el grupo de automorfismos de V . Este concepto permite estudiar las propiedades algebraicas de G mediante las transformaciones lineales en V , proporcionando una forma concreta de analizar las simetrías y las acciones de G . Cuando analizamos estas representaciones, encontramos que las transformaciones lineales juegan un papel fundamental en la estructura de los espacios vectoriales. En este contexto, es natural considerar no solo el espacio vectorial V , sino también su espacio dual.

Definición 0.2.21. El **espacio dual** V^* de un espacio vectorial V sobre un campo \mathbb{F} se define como el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en \mathbb{F} . Es decir,

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Cada elemento de V^* se llama **funcional lineal**.

El espacio dual V^* es también un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , con las operaciones definidas punto a punto: para $f, g \in V^*$ y $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \text{y} \quad (\alpha f)(v) = \alpha f(v) \quad \text{para todo } v \in V.$$

La introducción del espacio dual es motivada por la necesidad de analizar y comprender mejor las transformaciones lineales y las representaciones de grupos. Al estudiar los funcionales lineales, obtenemos una perspectiva más rica y profunda de la estructura interna del espacio vectorial y de cómo los grupos actúan sobre él.

Ejemplo 4. Consideremos el espacio vectorial V de todas las funciones diferenciables $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Un ejemplo de un funcional lineal en el espacio dual V^* es un funcional que toma una función f y la integra en el intervalo $[a, b]$ después de aplicarle un operador diferencial.

Definimos el funcional lineal $\Lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\Lambda(f) = \int_a^b f'(x) dx$$

donde f' denota la derivada de f .

Para verificar que Λ es un funcional lineal, debemos mostrar que satisface las propiedades de linealidad:

1. **Adición:** Sea $f, g \in V$, entonces:

$$\begin{aligned} \Lambda(f + g) &= \int_a^b (f + g)'(x) dx \\ &= \int_a^b (f'(x) + g'(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x) dx + \int_a^b g'(x) dx \\ &= \Lambda(f) + \Lambda(g) \end{aligned}$$

2. **Multiplicación por un escalar:** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in V$, entonces:

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha f) &= \int_a^b (\alpha f)'(x) dx \\ &= \int_a^b \alpha f'(x) dx \\ &= \alpha \int_a^b f'(x) dx \\ &= \alpha \Lambda(f)\end{aligned}$$

Por lo tanto, Λ es un funcional lineal en el espacio dual V^* .

Este funcional tiene una interpretación clara en términos de cálculo: integra la derivada de una función sobre un intervalo dado, lo que, por el teorema fundamental del cálculo, da la diferencia de los valores de la función en los extremos del intervalo:

$$\Lambda(f) = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Otra manera de ver concretamente funcionales lineales en el contexto de cálculo y álgebra lineal, es al analizar el cambio de una función a través de la derivada direccional, mezclando así operaciones entre elementos de espacios vectoriales con elementos de sus duales:

Ejemplo 5. Dada una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, la derivada direccional de f en la dirección de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ en \mathbf{p} se define como:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Esta derivada direccional mide la tasa de cambio de f en la dirección de \mathbf{v} . Si f es diferenciable, esta tasa de cambio se puede expresar usando el gradiente de f , denotado por ∇f :

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$$

donde $\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \right)$ y el producto punto ayuda a representar la suma de las derivadas parciales.

Para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, el gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ es un vector en \mathbb{R}^n en el que actúa un funcional lineal, ya que al hacer el producto punto, este nos entrega un número real.

Ejemplo 6. Similarmente, el diferencial de una función f , denotado df , es un ejemplo de funcional lineal (una 1-forma diferencial, mas adelante se definirá formalmente), ya que, para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $df(\mathbf{p})$ es un funcional lineal definido por:

$$df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$$

para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Podríamos seguir dando una gran cantidad de ejemplos, pero con lo anterior debería ser suficiente para hacernos ver que hace falta construir espacios donde interactúan en conjunto operadores diferenciales con funcionales lineales. Para una introducción mas formal e intuitiva de las formas diferenciales, se puede ver en [3] y [6].

0.2.3. Álgebra tensorial

Los tensores generalizan los conceptos de vectores y matrices, son fundamentales para formalizar las formas diferenciales y los operadores en matemática como anteriormente observamos, por ello daremos las definiciones y teoremas de esta herramienta.

Definición 0.2.22. Si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , indicamos por V^k el producto de k factores $V \times \cdots \times V$. Una función $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina multilinear si para cada $1 \leq i \leq k$ se tiene

$$T(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + bT(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $v_1, \dots, v_k, w_i \in V$.

Definición 0.2.23. Una función multilinear $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **tensor de orden k** en V (o simplemente k -tensor) y el conjunto de todos los tensores de orden k , que se indica por $\mathcal{T}^k(V)$, será un espacio vectorial sobre \mathbb{R} si para $S, T \in \mathcal{T}^k(V)$ y $a \in \mathbb{R}$ se define

$$(S + T)(v_1, \dots, v_k) = S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k),$$

$$(aS)(v_1, \dots, v_k) = a \cdot S(v_1, \dots, v_k).$$

Definición 0.2.24. Hay también una operación que conecta los diversos espacios $\mathcal{T}^k(V)$. Si $S \in \mathcal{T}^k(V)$ y $T \in \mathcal{T}^l(V)$, se define el **producto tensorial** $S \otimes T \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ por

$$(S \otimes T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Teorema 0.2.11. *El producto tensorial cumple con las siguientes propiedades:*

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T,$$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2,$$

$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T),$$

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

Viendo el camino que llevamos, es natural observar que las propiedades de espacios vectoriales, están en analogía directa con los tensores. Por conveniencia se definirá $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ como una especie de producto interno entre un espacio vectorial V y su dual para así poder dotar de una base a V^* :

Teorema 0.2.12. *Sea v_1, \dots, v_n una base de V , y sea $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base dual, $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Entonces el conjunto de todos los productos tensoriales de k factores*

$$\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$$

es una base para $\mathcal{T}^k(V)$, que además tiene dimensión n^k .

Ejemplo 7. Para construir la matriz de la métrica euclidiana, evaluamos el tensor métrico en los vectores base. Dado que la métrica euclidiana es simplemente el producto interno, tenemos:

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

En la base canónica del espacio euclidiano, el producto interno de los vectores base es el delta de Kronecker:

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Esto nos da la matriz métrica:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En forma de matriz:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para verificar, consideremos los vectores $\mathbf{u} = (u^1, u^2) = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (v^1, v^2) = (4, 1)$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} u^i v^j$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= g_{11}u^1v^1 + g_{12}u^1v^2 + g_{21}u^2v^1 + g_{22}u^2v^2 \\ &= (1)(2)(4) + (0)(2)(1) + (0)(3)(4) + (1)(3)(1) \\ &= 8 + 0 + 0 + 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Esto confirma que la métrica euclidiana definida como una matriz de tensor produce el mismo resultado que el cálculo del producto interno usual.

Definición 0.2.25. Un tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$ se dice **alternante** si cambia de signo cada vez que se intercambian dos de sus argumentos:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

El conjunto de todos los tensores alternantes de orden k en V se denota por $\Lambda^k(V)$.

Definición 0.2.26. El operador de alternación Alt en un tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$ se define como la aplicación que convierte un tensor en antisimétrico. Formalmente, para un tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$, la alternación $\text{Alt}(T)$ se define por:

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

donde S_k es el grupo simétrico de permutaciones de $\{1, \dots, k\}$ y $\text{sgn}(\sigma)$ es la paridad de la permutación σ .

Ejemplo 8. Consideremos primero un tensor antisimétrico representado por una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que A es una matriz antisimétrica porque $A^T = -A$.
Ahora, consideremos un tensor que no es antisimétrico:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Para antisimetrizar el tensor B , aplicamos el operador de alternación Alt :

$$\text{Alt}(B) = \frac{1}{2}(B - B^T)$$

Primero, calculamos la transpuesta de B :

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Luego, restamos B^T de B :

$$B - B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ para obtener la matriz antisimétrica:

$$\text{Alt}(B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz antisimétrica construida a partir de la matriz no antisimétrica B es:

$$\text{Alt}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 0.2.13. Las propiedades de el operador Alt :

1. Si $T \in \mathcal{T}^k(V)$, entonces $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$.
2. Si $\omega \in \Lambda^k(V)$, entonces $\text{Alt}(\omega) = \omega$.
3. Si $T \in \mathcal{T}^k(V)$, entonces $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$.

Definición 0.2.27. El **producto cuña** (\wedge) de dos tensores alternantes $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$ se define como:

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}),$$

donde Alt denota la alternación del tensor.

Teorema 0.2.14. *Las siguientes propiedades del producto cuña son:*

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta,$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2,$$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta),$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

Teorema 0.2.15. *El conjunto de todos los*

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

es una base para $\Lambda^k(V)$, que por tanto tiene dimensión

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por lo general, consideraremos principalmente el caso del producto tensorial sobre un solo espacio vectorial V , o sobre su espacio dual V^* , o sobre productos cartesianos de ambos. Usaremos la siguiente terminología:

Definición 0.2.28. Un *tensor de tipo (k, l)* en un espacio vectorial V es una transformación multilineal $T : V^k \times V^{*l} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos al conjunto de tensores de tipo (k, l) por $\mathcal{T}_l^k(V^*)$.

Para una visión mas formal de estos temas, puede referirse a [3].

0.3. Geometría Diferencial

La geometría diferencial es una rama fundamental de las matemáticas que se enfoca en el estudio de las propiedades geométricas de los objetos utilizando las nociones de cálculo vectorial [6]. Esta disciplina es crucial porque permite comprender las características globales de los objetos de manera local, mediante el uso de cambios de coordenadas. A lo largo de este tema, sera motivado con resultados y definiciones, mas aterrizadas dentro de dimensiones $n \leq 3$, que se pueden observar visualmente, para despues abstraerlo a dimensiones arbitrarias.

Definición 0.3.1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie topológica* si y sólo si para cualquier punto $p \in S$ existe una vecindad (relativa) de p en S y un homeomorfismo $\varphi : \Omega \rightarrow U$ de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U . La pareja (U, φ) se llamará una *parametrización* para la superficie S alrededor del punto p .

Si una región Ω tiene coordenadas (x^1, x^2, x^3) con respecto de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ y las funciones coordenadas de una transformación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ son (f_1, f_2, f_3) , entonces la derivada parcial (de primer orden) de f_i con respecto de x^j , $i, j = 1, 2, 3$, denotada por $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$, está dada por

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(p + te_j) - f_i(p)}{t}$$

Suponiendo que estas derivadas parciales existen en una región Ω , podemos considerar las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Si éstas existen, podemos considerar las derivadas parciales de orden 3, etcétera.

Definición 0.3.2. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Entonces

1. f es de clase C^0 en $p \in \Omega$ si y sólo si f es continua en p .
2. Si $r \in \mathbb{N}$, decimos que f es de clase C^r en p si y sólo si existen todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r en p , y además éstas son continuas en p .
3. f es diferenciable o de clase C^∞ en p si y sólo si f es de clase C^r en p para toda $r \in \mathbb{N}$.

Observación. En toda esta obra utilizaremos la palabra *diferenciable* como sinónimo de C^∞ . Ésta es una práctica común en geometría, ahorrando así las discusiones sobre la clase de diferenciabilidad necesaria para uno u otro resultado. Como trabajaremos con superficies bien comportadas para motivar las generalizaciones, entonces:

Definición 0.3.3. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie diferenciable* si y sólo si para cada punto $p \in S$ existe una vecindad U de p en S y un difeomorfismo $\varphi : \Omega \rightarrow U$ de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U .

Al analizar pequeñas porciones del mismo con coordenadas locales, es posible extrapolar información sobre la estructura global del objeto, lo que facilita el estudio de formas complejas y sus propiedades intrínsecas, como lo hemos estado construyendo anteriormente, podemos verlo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9. La esfera $S^2(\mathbb{R})$ en \mathbb{R}^3 se define como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Las coordenadas estereográficas son un método para parametrizar la esfera S^2 excluyendo un punto. Existen dos cartas principales S_0^2 y S_1^2 : la carta polar norte y la carta polar sur. La proyección estereográfica desde el polo norte $(0, 0, R)$ se define excluyendo este punto. Para un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ en S_0^2 , las coordenadas estereográficas (u_0, v_0) se obtienen proyectando P en el plano $z_0 = 0$:

$$(u_0, v_0) = \psi_0(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{Rx_0}{R - z_0}, \frac{Ry_0}{R - z_0} \right), \quad z_0 \neq R$$

La parametrización inversa de estas coordenadas en términos de (u_0, v_0) es:

$$\varphi_0(u_0, v_0) = \left(\frac{2R^2 u_0}{(u_0)^2 + (v_0)^2 + R^2}, \frac{2R^2 v_0}{(u_0)^2 + (v_0)^2 + R^2}, \frac{R((u_0)^2 + (v_0)^2 - R^2)}{(u_0)^2 + (v_0)^2 + R^2} \right)$$

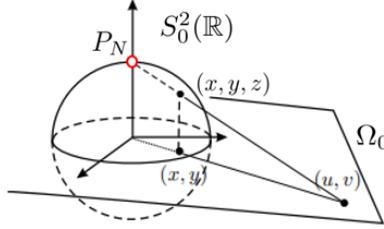


Figura 1: Ilustración de la proyección estereográfica

Similarmente la proyección estereográfica desde el polo sur $(0, 0, -R)$ se define excluyendo este punto. Para un punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ en S_1^2 , las coordenadas estereográficas (u_1, v_1) se obtienen proyectando P en el plano $z_1 = 0$:

$$(u_1, v_1) = \psi_1(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{Rx_1}{R + z_1}, \frac{Ry_1}{R + z_1} \right), \quad z_1 \neq -R$$

La parametrización inversa de estas coordenadas en términos de (u_1, v_1) es:

$$\varphi_1(u_1, v_1) = \left(\frac{2R^2 u_1}{(u_1)^2 + (v_1)^2 + R^2}, \frac{2R^2 v_1}{(u_1)^2 + (v_1)^2 + R^2}, \frac{R(R^2 - ((u_1)^2 + (v_1)^2))}{(u_1)^2 + (v_1)^2 + R^2} \right)$$

También podemos ver el comportamiento de tales funciones, en la intersección, donde ambas coinciden en puntos de la esfera:

La composición de ψ_1 con φ_0 nos da la siguiente relación, con $u_0, v_0 \neq 0$

$$(\psi_1 \circ \varphi_0)(u_0, v_0) = \left(\frac{R^2 u_0}{(u_0)^2 + (v_0)^2}, \frac{R^2 v_0}{(u_0)^2 + (v_0)^2} \right) = (u_1, v_1)$$

similarmente la composición de ψ_0 con φ_1 , con $u_1, v_1 \neq 0$:

$$(\psi_0 \circ \varphi_1)(u_1, v_1) = \left(\frac{R^2 u_1}{(u_1)^2 + (v_1)^2}, \frac{R^2 v_1}{(u_1)^2 + (v_1)^2} \right) = (u_0, v_0)$$

La proyección estereográfica es una herramienta poderosa en la geometría diferencial, que permite la construcción de un atlas para la esfera que en notación es $S^2(\mathbb{R})$. Con una proyección desde el polo norte S_0^2 y otra desde el polo sur S_1^2 , se obtienen dos cartas que juntas cubren la esfera en su totalidad. Cada carta representa la esfera menos un punto, el polo opuesto al centro de proyección, y juntas proporcionan un atlas completo que describe la estructura diferenciable de $S^2(\mathbb{R})$, por lo que $S^2(\mathbb{R}) = S_0^2(\mathbb{R}) \cup S_1^2(\mathbb{R})$

Es interesante notar en el caso de S_0^2 , con el sistema coordenado (x_0, y_0, z_0) y el sistema coordenado (u_0, v_0) bajo la función ψ , son equivalentes, en ambos los puntos singulares, siguen existiendo, pero con una representación distinta. Aunado cuando trabajamos en la intersección $S_0^2(\mathbb{R}) \cap S_1^2(\mathbb{R})$, sigue apareciendo este comportamiento, esto nos debería hacer ver que hay algo mas abstracto del cual todo lo anterior, son representaciones locales del mismo, todo esto se podrá formalizar con la teoría de variedades diferenciales, aunado a ver el comportamiento de las funciones a lo largo de cada una las imágenes de las parametrizaciones.

$$\begin{array}{ccc}
 S_0^2(\mathbb{R}) & \begin{array}{c} \xleftarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_0} \end{array} & S_1^2(\mathbb{R}) \\
 \begin{array}{c} \uparrow \varphi_0 \\ \downarrow \varphi_0^{-1} \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \psi_1^{-1} \\ \downarrow \psi_1 \end{array} \\
 \Omega_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1 \circ \varphi_0} \\ \xleftarrow{\varphi_0 \circ \psi_1} \end{array} & \Omega_1
 \end{array}$$

Figura 2: Relación entre las distintas parametrizaciones locales

0.3.1. Variedades diferenciales

Primero impondremos la condición de que estos objetos sean parecidos a algún \mathbb{R}^n , por lo menos desde el punto de vista topológico.

Definición 0.3.4. Sea n un entero no negativo. Un **espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n** es un espacio topológico de Hausdorff M tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n . Si $U \subset M$ es abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{R}^n , la pareja (U, φ) se llama **carta de coordenadas**.

Observemos que el entero n de la definición está fijo. Si M es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , diremos que n es la **dimensión** de la variedad M y escribiremos $n = \dim M$; también usaremos la notación M^n .

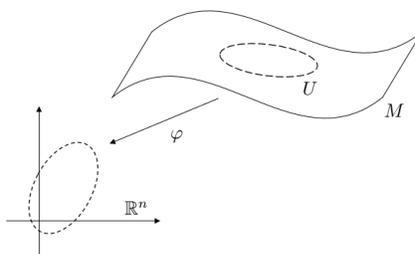


Figura 3: Carta coordenada

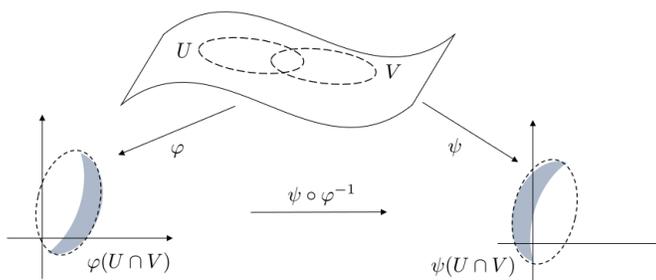


Figura 4: Cambios de coordenadas

Puesto que cada una de las transformaciones $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, podemos reformular la definición en términos de las transformaciones inversas $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$, por lo general llamadas **parametrizaciones** como anteriormente vimos.

Observemos también que un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n hereda de manera automática las propiedades locales de la topología de \mathbb{R}^n ; por ejemplo, la compacidad local y la conexidad local, entre otras, lo cual resulta muy conveniente.

Ahora aunado a lo visto en el ejemplo anterior podemos considerar una pareja de cartas (U, φ) , (V, ψ) cuyos dominios se traslapen; es decir, tales que $U \cap V \neq \emptyset$. En este caso podemos construir las transformaciones $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$, cuyo dominio y codominio están dados por abiertos de \mathbb{R}^n . Llamaremos a éstas **transformaciones de cambio de coordenadas**. La idea general consiste en imponer una condición sobre estos cambios de coordenadas. En nuestro contexto, donde utilizaremos de manera fundamental el concepto de diferenciabilidad, es natural imponer una condición del tipo siguiente.

Definición 0.3.5. Se dice que dos cartas (U, φ) , (V, ψ) son C^k **compatibles**, $k = 0, 1, \dots, \infty$, si y sólo si las transformaciones de cambio de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son de clase C^k .

Coleccionaremos ahora una familia de cartas compatibles que cubran a nuestra variedad.

Definición 0.3.6. Sea M^n un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

1. Un **atlas** \mathcal{A} de clase C^k en M^n es una colección de cartas cuyos dominios cubren a M^n y cualesquiera dos de ellas son C^k compatibles.
2. Una **estructura diferenciable** es un atlas maximal \mathcal{A} , en el sentido de que si la carta (U, φ) es C^k compatible con todas las cartas de \mathcal{A} , entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Por lo cual, es natural que el concepto de superficie diferenciable se pueda abstraer de la siguiente forma:

Definición 0.3.7. Sea n un entero no negativo. Una **variedad diferenciable** de dimensión n y clase C^k es una pareja (M^n, \mathcal{A}) , donde M^n es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n con base numerable y \mathcal{A} es una estructura diferenciable de clase C^k en M^n .

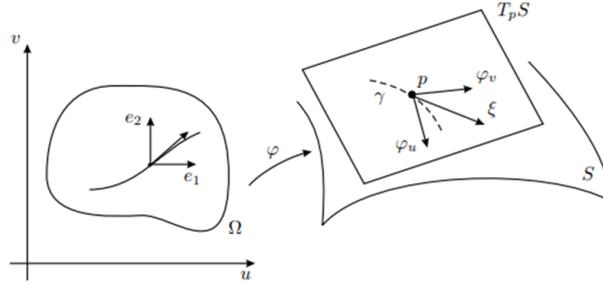


Figura 5: Plano Tangente a la superficie

Ahora podemos hablar acerca de los espacios tangentes, estos son fundamentales en el estudio de superficies porque proporcionan una manera precisa de entender cómo se comporta una superficie en un entorno infinitesimal alrededor de cada uno de sus puntos. Mientras que la superficie en sí misma puede ser curvada y compleja, su espacio tangente en un punto dado es un plano vectorial que captura la dirección y la tasa de cambio de la superficie en ese punto. Esto permite la aplicación de herramientas y conceptos del cálculo diferencial, facilitando el análisis de propiedades locales de la superficie, como la curvatura y la orientación, y es esencial ver como podemos encajar tales cuestiones, en este entorno mas abstracto de la geometria diferencial.

Recordemos por [6], sea $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ la parametrización local de alguna superficie diferenciable S . La matriz asociada a $D\varphi_q$ tiene entonces la forma:

$$D\varphi_q = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix},$$

donde, por ejemplo, x_u denota la parcial de x con respecto de u .

Sabemos también que los vectores columna de esta matriz son las imágenes de los vectores $\{e_1, e_2\}$ de la base canónica de \mathbb{R}^2 . Denotamos estos vectores como φ_u, φ_v :

$$D\varphi_q(e_1) = (x_u, y_u, z_u) = \varphi_u,$$

$$D\varphi_q(e_2) = (x_v, y_v, z_v) = \varphi_v.$$

Sabemos que S es una superficie diferenciable y $\varphi : \Omega \rightarrow S$ una parametrización de S . Por lo cual dada una curva $\gamma : J \rightarrow S$, se tiene que existe una función $\beta : J \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma(t) = \varphi(\beta(t))$ con $\beta(t) = (u(t), v(t))$ entonces:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t)) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\dot{v}(t) = \varphi_u\dot{u}(t) + \varphi_v\dot{v}(t)$$

por lo cual:

$$\dot{\gamma}(0) = \xi = \varphi_u\dot{u}(0) + \varphi_v\dot{v}(0)$$

Por el momento, podemos distinguir entre un punto de \mathbb{R}^3 y un vector *anclado* en el punto. Pensando de esta forma, el conjunto de vectores anclados en p será el *espacio*

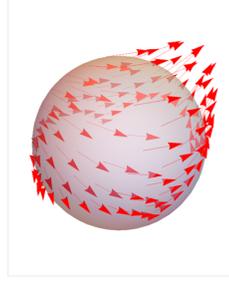


Figura 6: Haz Tangente de la esfera

tangente a \mathbb{R}^3 en el punto mencionado, denotaremos este conjunto por $T_p\mathbb{R}^3$. De esa manera, cualquier vector anclado a la superficie, siempre es escrito como combinación lineal de los vectores φ_u, φ_v , entonces, resulta natural definir:

Definición 0.3.8. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 y $p \in S$. El conjunto de vectores anclados en p dado por

$$\{\xi \in T_p\mathbb{R}^3 \mid \text{existe } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \text{ con } \gamma(0) = p \text{ y } \dot{\gamma}(0) = \xi\}$$

se llama el espacio tangente a S en p , y se le denota por T_pS .

Ejemplo 10. *Los vectores tangentes base de la esfera en coordenadas estereográficas son:*

- Para $\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}$:

$$\left(\frac{2R^2(R^2 - u_0^2 + v_0^2)}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^2}, -\frac{4R^2u_0v_0}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^2}, \frac{4R^3u_0}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^2} \right)$$

- Para $\frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0}$:

$$\left(-\frac{4R^2u_0v_0}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^2}, \frac{2R^2(R^2 + u_0^2 - v_0^2)}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^2}, \frac{4R^3v_0}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^2} \right)$$

Podemos observar que gráficamente el haz tangente se podría ver como en la figura 6:

De acuerdo a esto, tenemos que tratar de buscar la manera de abstraer la idea de espacio tangente, sin necesidad de un espacio ambiente de 3 dimensiones. Recordemos que en el ejemplo 6 anterior, consideremos una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$. La derivada direccional de f en la dirección de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ en p se define como:

$$D_{\mathbf{v}}f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\mathbf{v}) - f(p)}{t}$$

Esta derivada direccional mide la tasa de cambio de f en la dirección de \mathbf{v} . Si f es diferenciable, esta tasa de cambio se puede expresar usando el gradiente de f , denotado por ∇f :

$$D_{\mathbf{v}}f(p) = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v}$$

donde

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

y el producto punto ayuda a representar la suma de las derivadas parciales.

$$D_{\mathbf{v}}f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i$$

Entonces, si v fuera un vector tangente, tenemos que, desde el punto de vista operadores, parece ser que este es uno de ellos, más precisamente, vemos que:

$$v(f) := \langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n D_i f(p) v_i.$$

Por lo cual estamos capturando información muy importante y relevante de la geometría de una superficie abstracta, sin depender de un espacio ambiente e independiente de la carta coordenada, entonces podemos enunciar las siguiente definiciones:

Definición 0.3.9. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Consideremos el conjunto de funciones diferenciables al menos en una vecindad de p . Definimos una relación en este conjunto: $f \sim_p g$ si y sólo si $f \equiv g$ en alguna vecindad de p . Es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia. Sea $G_p M$ el conjunto de estas clases de equivalencia de funciones.

Por lo cual suena natural pensar que estos vectores que buscamos generalizar, deben de alguna forma satisfacer las reglas de Leibniz de derivacion:

Definición 0.3.10. Sean M una variedad y $p \in M$. Un *vector tangente* a M en p es un operador lineal $v : G_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

El *espacio tangente* a M en p es el conjunto $T_p M$ de vectores tangentes a M en p .

Y entonces tenemos los siguientes teoremas (pueden consultarse su demostración en [5] y [7]):

Teorema 0.3.1. *El conjunto de operadores lineales v en p tienen la estructura de un espacio vectorial real.*

Una vez que $T_p M$ tiene estructura de espacio vectorial, tiene sentido preguntarse acerca de su dimensión.

Definición 0.3.11. Consideremos una carta (U, φ) con $p \in U$ y sean u_i las funciones de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n . Escribimos $x_i = u_i \circ \varphi$ y definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

donde $\partial/\partial u_i$ denota la derivada parcial de una función con respecto de la i -ésima variable en \mathbb{R}^n .

Estos operadores diferenciales, deberían de ser la opción mas natural de elección para una base de nuestro espacio vectorial $T_p M$, por lo cual tenemos el siguiente teorema:

Teorema 0.3.2. Sean M^n una variedad diferenciable, $p \in M$. Sea (U, φ) una carta con $p \in U$ y $x_i = u_i \circ \varphi$ como antes. Entonces

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

para todo $v \in T_p M$.

Además, es interesante notar lo evidente, el conjunto de tales objetos tiene la misma dimensión:

Teorema 0.3.3. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Entonces $T_p M$ es un espacio vectorial de la misma dimensión que M .

Pero mas importante, es que la unión de estos espacios, tiene estructura de variedad diferenciable:

Definición 0.3.12. Dada una variedad M^n , el haz tangente a M es la unión de los espacios tangentes a M en cada punto de M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$



Figura 7: Haz Tangente en M .

Teorema 0.3.4. El haz tangente TM es una variedad y $\dim TM = 2n$.

Para realizar los cambios de coordenadas a los vectores debe ser como:

Definición 0.3.13. Sean M, N variedades y $f \in C^\infty(M, N)$. Definimos la diferencial (pushforward) $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ de f en un punto $p \in M$ como

$$f_{*p}(v)(g) = v(g \circ f)$$

donde $v \in T_p M$, $g \in G_{f(p)} N$. Aquí, g corresponde a una función de N a \mathbb{R} , bien definida en el punto $f(p)$.

Observación. Sean M^n, N^m variedades diferenciables, $f \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$ y $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas con $p \in U, f(p) \in V$. Si u_1, \dots, u_n son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^n , con $x_i = u_i \circ \varphi$, y por otro lado, v_1, \dots, v_m son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^m y $y_j = v_j \circ \psi$, entonces

$$f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j \circ f) = \frac{\partial}{\partial u_i} (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Por el Teorema 0.3.2,

$$f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_i} (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)}.$$

Es decir, la matriz de f_{*p} con respecto de las bases

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^n \quad \text{y} \quad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} \right\}_{j=1}^m$$

es precisamente la matriz derivada $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$. Lo cual de acuerdo a nuestra generalización era de esperar, ya que por la construcción anterior, al ver la imagen de los vectores base, bajo la aplicación de la matriz derivada de una parametrización de alguna superficie.

Para finalizar presentaremos los conceptos básicos de la teoría de campos vectoriales definidos en una variedad. Un campo vectorial X en una variedad M es una transformación que asocia a cada punto p de M un vector tangente $X(p) \in T_p M$.

Definición 0.3.14. Sea M una variedad diferenciable, TM su haz tangente y $\pi : TM \rightarrow M$ la transformación de proyección $\pi(v) = p$, si $v \in T_p M$. Un *campo vectorial en M* es una transformación $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ es la identidad en M ; en otras palabras, $X(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$.

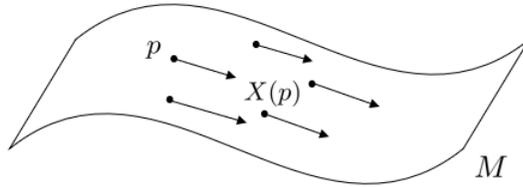


Figura 8: Un campo vectorial en M .

Dada una carta (U, φ) de una vecindad $U \subset M$, si u_i son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^n y $x_i = u_i \circ \varphi$, los teoremas anteriores implican que X tiene la expresión

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X(x_i)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad p \in U.$$

Los campos vectoriales son esenciales porque proporcionan un método para estudiar el comportamiento dinámico y la estructura de las variedades. Estos describen movimientos a lo largo de la variedad y aseguran la existencia y unicidad de curvas integrales que pasan por cualquier punto dado, por lo cual resulta conveniente, ya que sin necesidad de un espacio ambiente, o alguna carta coordenada, estos se presentan de manera natural en la variedad, para un entendimiento más profundo de tales aseveraciones se puede consultar en [7], por conveniencia siempre consideraremos campos vectoriales bien comportados, entonces:

Definición 0.3.15. Si un campo vectorial $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable, denotaremos al conjunto de campos vectoriales diferenciables en M mediante $\mathfrak{X}(M)$.

Ahora, para poder abstraer la idea de curvas ancladas a un sistema de vectores tangentes, tenemos:

Definición 0.3.16. Sean M una variedad diferenciable y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferenciable. Definimos el *vector tangente* a la curva en $\alpha(t)$ por

$$\alpha'(t) = \alpha_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t.$$

Por lo cual enunciamos el teorema siguiente que habla de la existencia de curvas dado algún campo vectorial:

Teorema 0.3.5. Sea M^n una variedad diferenciable y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. Dados $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ una única solución a la ecuación diferencial

$$x' = X(x)$$

que satisface $\alpha(t_0) = p$.

2. Para cada $x \in U$, sea $J(x)$ el intervalo maximal donde está definida una solución a $x' = X(x)$, que escribiremos como $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, con $\varphi(0, x) = x$. Entonces el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in U, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \rightarrow U$ es de clase C^1 . Entonces el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in M, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \rightarrow M$ es diferenciable.
3. Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$, $s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

0.3.2. Hazes Vectoriales

Desde el punto de vista de la geometría diferencial, existen campos vectoriales que, aunque no son tangentes, resultan ser igualmente interesantes y útiles. Mientras que los campos tangentes nos permiten estudiar la estructura intrínseca de una variedad, los campos vectoriales, como el haz normal (perpendicular al tangente), nos ofrecen una perspectiva sobre las direcciones y comportamientos externos a la variedad. Estos campos pueden

generar curvas integrales y dinámicas que enriquecen nuestro entendimiento de la variedad en su contexto ambiental, formalizándolo con un teorema muy similar al 0.3.5

La consideración de estos campos no tangentes abre nuevas vías para explorar interacciones geométricas más complejas y proporciona herramientas adicionales para resolver problemas donde las direcciones tangentes por sí solas no son suficientes.

En lo siguiente daremos las definiciones formales para la construcción de estos nuevos objetos, ya que por el **Teorema 0.3.4** se observa que como el Haz tangente es una variedad, la intuición nos dice estos nuevos Hazes Vectoriales también deben ser variedades, y tenemos que encontrar las relaciones que existen con la variedad donde originalmente nacieron:

Definición 0.3.17. Sean B y E espacios topológicos y $\pi : E \rightarrow B$ una transformación continua y suprayectiva sobre B . Denotamos por ξ a la pareja (E, π) .

1. Una *carta de haz vectorial (real)* de rango n para ξ es una pareja (U, φ) , donde U es un subconjunto abierto de B y $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

2. Dos cartas de haz vectorial (U, φ) y (V, ψ) para ξ son compatibles si y sólo si $\psi_p \circ \varphi_p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal para cada $p \in U \cap V$.
3. Un *atlas de haz vectorial* \mathcal{A} para ξ es una colección de cartas de haz vectorial cuyos dominios cubren a B , tales que cualesquiera dos de ellas son compatibles.
4. Una *estructura de haz vectorial* para ξ es un atlas de haz vectorial maximal. Cuando ξ tenga una estructura de haz vectorial, abreviaremos diciendo que ξ es un *haz vectorial*.
5. Un haz vectorial ξ es *diferenciable* si y sólo si E y B son variedades diferenciables, $\pi : E \rightarrow B$ es diferenciable y las cartas de haz vectorial son difeomorfismos.
6. En este contexto, B , E y π son la *base*, E el *espacio total* y $\pi : E \rightarrow B$ la *proyección* del haz, respectivamente. Además, si $p \in B$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ es la *fibra* del haz en p .

Con la parametrización estereográfica de la esfera es muy facil mostrar un ejemplo de haz vectorial:

Ejemplo 11. *El producto cruz de los dos vectores tangentes nos da el vector normal (figura 9) a la superficie en el punto parametrizado. El vector normal es perpendicular al*

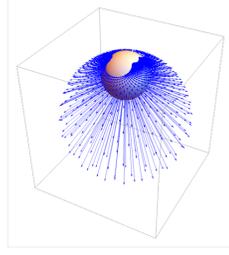


Figura 9: Haz normal sobre la esfera.

plano tangente, en dicho punto y puede ser usado para definir el espacio normal, que es ortogonal al espacio tangente. El producto cruz de los vectores tangentes es:

$$\left(\frac{-8R^5 u_0}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^3}, \frac{-8R^5 v_0}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^3}, \frac{4R^4(R^2 - u_0^2 - v_0^2)}{(R^2 + u_0^2 + v_0^2)^3} \right)$$

El lector puede ver que con este ejemplo y gracias a los cambios de coordenadas sujetos a la parametrización de la superficie, es fácil ver los 5 puntos anteriormente definidos para un haz vectorial.

Definición 0.3.18. En particular, si M es una variedad diferenciable de dimensión m y $\xi = TM$, el haz $\xi^* = T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ se llama haz cotangente de M , donde:

$$T_p^*M = \{\alpha : T_pM \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es lineal}\}.$$

Observación. Si f es una función en p , definimos $df_p \in T_p^*M$ mediante $df_p(v) = v(f)$. En particular, si (U, φ) es una carta con $p \in U$ y $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, por el teorema 0.2.12:

$$dx_p^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = D_j(x_i \circ \varphi^{-1}) = \delta_{ij}$$

y así dx_p^1, \dots, dx_p^m es la base de T_p^*M dual a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p.$$

Ahora buscaremos entender cómo cambian estos elementos duales bajo un cambio de coordenadas.

Consideremos un cambio de coordenadas a un nuevo sistema (y_1, \dots, y_m) . Las relaciones entre las coordenadas están dadas por las funciones de transición:

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_m) \quad \text{y} \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_m).$$

Los vectores base en el nuevo sistema de coordenadas se relacionan con los del sistema antiguo mediante (utilizando el convenio de sumación de Einstein):

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Para encontrar cómo se transforman los vectores duales bajo este cambio de coordenadas, consideremos la base dual. Sea $\{dy^1, \dots, dy^m\}$ la base dual en el nuevo sistema de coordenadas. Sabemos que:

$$dy^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = \delta_j^i.$$

Sustituyendo la expresión del vector base en las nuevas coordenadas, obtenemos:

$$dy^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = dy^i \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Utilizando la linealidad, esto se convierte en:

$$dy^i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial x_k}{\partial y_j} dy^i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Dado que $dy^i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$, tenemos:

$$\delta_j^i = \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Por lo tanto, la transformación de los vectores duales bajo el cambio de coordenadas es:

$$dx^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy^j.$$

Esto muestra cómo se transforman los coeficientes de los vectores duales, bajo un cambio de coordenadas utilizando la relación entre las derivadas parciales de las funciones de transición, utilizando los resultados construidos para variedades diferenciales, por lo cual formalmente, dando una serie de definiciones:

Definición 0.3.19. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial sobre B .

1. Una *sección* de ξ es una transformación continua $s : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}$.
2. Si $B = M$ es una variedad diferenciable y el haz ξ es diferenciable, $\Gamma(\xi)$ denotará al conjunto de secciones diferenciables del haz.
3. Un *campo vectorial* en M es un elemento de $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ y una *1-forma* en M es un elemento de $\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$.

Por lo cual recordando la definición 0.2.28:

Definición 0.3.20. Sea M una variedad diferenciable. Denotamos por $\mathcal{T}_l^k(M)$ al haz

$$\underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_k \otimes \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_l.$$

Un elemento de $\Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ es un *tensor de tipo k, l* . Si $k = l = 0$, entonces $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$. Finalmente, denotaremos

$$\mathcal{T}_0^k(M) = \mathcal{T}^k(M) \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_l^0(M) = \mathcal{T}_l(M).$$

Definición 0.3.21. Sean M, N variedades y $f : M \rightarrow N$ diferenciable. Definimos la transformación (pullback) $f^* : \bigcup_k \Gamma(\mathcal{T}^k(N)) \rightarrow \bigcup_k \Gamma(\mathcal{T}^k(M))$ de la manera siguiente:

- Si $k = 0$, entonces $f^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$ está dada por $f^*g = g \circ f$.
- Si $k > 0$, entonces $f^* : \Gamma(\mathcal{T}^k(N)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}^k(M))$ está dada por

$$(f^*T)_p = (f_*p)^*(T_{f(p)}).$$

Observación. En forma explícita, f^*T tiene la siguiente expresión:

$$(f^*T)_p(v_1, \dots, v_k) = T_{f(p)}(f_*p(v_1), \dots, f_*p(v_k)).$$

Donde es evidentemente lo que buscábamos formalizar. Ya que efectivamente las definiciones de campos vectoriales y sus duales respectivamente, son equivalentes y menos generales, a elementos de secciones de haces vectoriales.

Ahora definiremos las formas diferenciales, los objetos que integraremos más adelante.

Definición 0.3.22. Sean M una variedad diferenciable y $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial diferenciable sobre M . Definimos

$$\Lambda^k E = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k E_p, \quad \Omega^k(E) = \Gamma(\Lambda^k E).$$

Un elemento de $\Omega^k(M) = \Omega^k(T^*M)$ es una k -forma diferencial en M .

Para un entendimiento mas profundo se puede buscar en [7].

0.3.3. Variedades riemannianas y pseudoriemannianas

El tratamiento que daremos para la construcción de lo que es un variedad riemanniana lo haremos motivado por la intuición física del espacio-tiempo definido por Albert Einstein y Hermann Minkowski.

A principios del siglo XX se tuvo una gran revolución científica con la Teoría de la Relatividad Especial o en siglas TRE, ya que esta dotaba de un nuevo modelo, de cómo se comporta el universo a macro escala, en marcos de referencia inerciales, con ello también se obtuvo una nueva definición de espacio ambiente en física, donde ya se descartaba que el universo era descrito por 3 dimensiones espaciales, si no en realidad por 4 dimensiones, 3 espaciales y una temporal, lo cual conllevó también a crear un nuevo modelo del espacio mismo, que se le definió como espacio-tiempo.

Para hablar e incursionar en este nuevo modelo, el espacio-tiempo, haremos uso de la TRE y como con ella se llega a la intuición de que el universo por sí mismo es de 4 dimensiones. En el transcurso de la construcción del espacio-tiempo, se evitará hablar del contexto histórico y otras implicaciones que tiene sobre la física la TRE, para así no perder rigor matemático; Al lector interesado puede leer en [8].

Comenzaremos por mostrar las transformaciones de Lorentz, en concreto los boost de Lorentz, que son una herramienta que ayuda a modelar transformaciones entre distintos

marcos de referencia inerciales de manera compacta. Las coordenadas espacio-temporales se denotan por convención para esta construcción, por el arreglo vertical de 4 componentes, con unidades de longitud, $(ct, x^1, x^2, x^3)^T$ donde c es la velocidad de la luz en el vacío, comúnmente la combinación ct es denotada por x^0 . Entonces resulta útil escribir las coordenadas espacio-temporales por $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$. Aceptemos por ahora que se utilice el nombre de coordenadas espacio-temporales ya que más adelante se dará la razón del nombre. En general al Universo (espacio-tiempo) sera escrito como una variedad M_0 y a cada uno de sus sistemas coordenados $S, S',$ etc. Por lo cual, para esta construcción se utiliza:

Definición 0.3.23. Boost de Lorentz

De primera instancia, las transformaciones de Lorentz y por consecuencia la TRE, se obtienen a partir de los siguientes postulados:

1. Todas las leyes físicas de la naturaleza y las ecuaciones que las describen tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales admisibles.
2. La luz en todos los marcos de referencia inerciales (en el vacío) se mueve con la misma rapidez.
3. El espacio es homogéneo, isotrópico y continuo.

El boost de Lorentz, para un marco de referencia S' que se mueve a velocidad constante $v > 0$ en una dirección (puede generalizarse a cualquier dirección del espacio, pero para nuestros requerimientos no es necesario), con respecto a un marco de referencia S en reposo, nuestro marco de referencia preferencial. En pocas palabras deseamos conocer la percepción de un observador en S' acerca de las posiciones de las partículas en su espacio ambiente, con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde las constantes asociadas vienen dadas por expresiones de la forma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

En forma compacta podemos expresarlas como:

$$x'^\mu = Bx^\mu \quad \text{donde} \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Siempre se comienzan con definición de que el espacio y el tiempo se mezclan en un ente continuo llamado espacio-tiempo, únicamente observando la ecuación (1):

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

Donde el tiempo que se mide en el marco de referencia S' , está explícitamente relacionado con las coordenadas espaciales y temporales de S , lo cual no necesariamente es erróneo, pero se puede llegar a esta definición de una manera más formalizada. Retrocederemos un poco, sabemos que las transformaciones de Galileo son un caso especial de los boost de Lorentz para marcos de referencia inerciales con velocidad relativa mucho menor a la de la luz ($\gamma \approx 1$), lo cual podemos comprobar, si se exige $x^0 = x'^0$ (que el tiempo sea el mismo para ambos marcos de referencia o también dicho como universalidad del tiempo), además de expandir como serie de Taylor la expresión de la coordenada espacial para el marco de referencia S' , obtenemos:

$$x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \approx x^1 - \beta x^0 + \frac{1}{2}\beta^2 x^1 + \mathcal{O}(\beta^3)$$

Dado que son marcos de referencia inerciales con velocidad relativa mucho menor a la de la luz, podemos $\beta^n \rightarrow 0$ para $n > 1$, entonces se puede considerar que, bajo ciertas correcciones relativistas, las transformaciones de galileo son un caso especial de los boost de Lorentz, que, de manera contraria a los boost de Lorentz, solo satisface el postulado 1 y 3 para ciertos casos concretos, que mencionaremos.

Definición 0.3.24. Transformaciones de Galileo

Podemos entonces trabajar con las transformaciones de Galileo, mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^1 &= x^1 - \beta x^0 = x^1 - vt \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{3}$$

En forma compacta podemos expresarlas como:

$$x'^\mu = Gx^\mu \quad \text{donde} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

De igual manera que en los boost de Lorentz, con las transformaciones de Galileo deseamos conocer la percepción de un observador en S' acerca de las posiciones de las partículas en su espacio ambiente. Entonces de primaria instancia observando (3) podemos intuir que la noción de distancia en el espacio, debe ser una cantidad invariante para cualquier observador, independiente del marco de referencia inercial, el cual se menciona en el 3 postulado de la TRE; *el espacio es homogéneo, isotrópico y continuo*. Lo cual en formalismo matemático sería una isometría:

Definición 0.3.25. Isometría

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama *isometría* si para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple que:

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (5)$$

Donde el módulo de un elemento en \mathbb{R}^n está definido por la distancia euclídea, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, para $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ y $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ tuplas de números reales, entonces:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2} \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} \quad (7)$$

Entonces, dados los postulados, la transformación galileana debe mantener invariante la distancia euclídea, lo cual podemos comprobar directamente.

Teorema 0.3.6. *La transformación lineal $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una isometría si $(\Delta x^0)^2 = (\Delta x'^0)^2 = 0$ (la universalidad del tiempo) y $\Delta x \in \mathbb{R}^4$, con las coordenadas espaciotemporales, tal que:*

$$\|G(\Delta x)\| = \|\Delta x\| \quad (8)$$

Notemos que la cantidad, que definiremos como intervalo:

$$\|\Delta x\|^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 \quad (9)$$

Es idénticamente al teorema de Pitágoras dado que $(\Delta x^0)^2 = (\Delta x'^0)^2 = 0$, por lo tanto, podemos decir que en el espacio euclidiano medir la posición de una partícula en distintos marcos de referencia inerciales por medio de una transformación de Galileo, el “evento” de la medición de la posición de la partícula, es invariante (en la TRE la definición de evento es necesaria, ya que un evento como lo es un accidente, la caída de una hoja, etc., ocurre en un lugar del espacio y un instante en el tiempo, por ello es conveniente que cuando nos referimos a momentos en el espacio, digamos que es un evento) entonces un evento como lo es medir la posición de una partícula, al menos en el espacio euclidiano debe ser siempre igual, invariante independiente del marco de referencia S, S', S'' , etc. Expresado formalmente:

$$\|\Delta x\|^2 = \|G(\Delta x)\|^2 = \Delta s^2 = (\Delta s')^2 \quad (10)$$

A su vez, si utilizamos elementos diferenciales, el intervalo se puede expresar como:

$$ds^2 = (ds')^2 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (dx'^i)^2 \quad (11)$$

También recordemos que al menos en física clásica, el tener la posición de una partícula en un instante determinado del tiempo, nos puede entregar información relevante de la

partícula, como su velocidad, momento, etc. Entonces podemos decir que, si nosotros podemos medir la posición de una partícula, al menos en el espacio euclidiano, ese evento se debe mantener invariante, y por consecuencia también el intervalo, independiente del marco de referencia, así extendiendo el postulado de Galileo y reafirmar que el espacio es homogéneo, isotrópico y continuo.

Volvamos entonces a la TRE, y notemos algo, si nosotros proponemos lo siguiente:

Conjetura. La transformación lineal $\mathbb{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una isometría si $(\Delta x^0)^2 = (\Delta x'^0)^2 = 0$ (la universalidad del tiempo) y $\Delta x \in \mathbb{R}^4$, con las coordenadas espaciotemporales, tal que:

$$\|\mathbb{B}(\Delta x)\| = \|\Delta x\| \quad (12)$$

Inmediatamente no se cumple que $ds^2 = (ds')^2$, aun si quitamos la exigencia de universalidad del tiempo, obtenemos que $ds^2 \neq (ds')^2$, lo cual puede parecer una contradicción, pues sabemos que los boost de Lorentz son una herramienta más general para obtener la misma física ante cualquier marco de referencia, y obvio deberíamos concluir que *el espacio es homogéneo, isotrópico y continuo*. Entonces hagamos otra conjetura, ¿qué tal si nuestra noción del espacio es errónea?, pues nosotros estamos tratando de medir la posición de una partícula, en el espacio euclídeo y este en realidad no es euclidiano. Entonces debería de existir la forma correcta de medir en nuestro espacio, si intentamos formalizar el hecho anterior:

Recordemos que si $x \in \mathbb{R}^4$, entonces el módulo de x se puede escribir como:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = (x^T \delta_{ij} x) \quad (13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ entonces } \delta_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq j \text{ entonces } \delta_{ij} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Donde el producto interno asociado al espacio vectorial \mathbb{R}^4 es el producto interno euclídeo $\langle x, x \rangle$ que a su vez está asociada a una métrica, donde δ_{ij} es la métrica euclidiana de \mathbb{R}^3 inducida en un espacio vectorial \mathbb{R}^4 .

Entonces si nosotros cambiamos la métrica euclidiana por alguna otra métrica tal que, se cumpla:

$$\|\mathbb{B}(\Delta x)\| = \|\Delta x\| \quad (15)$$

De primera instancia cambiaría por completa nuestra noción de espacio, y además tendríamos que asegurar que \mathbb{R}^4 con esa métrica inducida η_{ij} (y a su vez con ese producto interno), y sus elementos forman un espacio vectorial, entonces definimos:

Definición 0.3.26. A la métrica η_{ij} inducida a \mathbb{R}^4 se le llama *métrica de Minkowsky*, y al espacio tetradimensional con esta métrica se le llamará espacio de Minkowsky, que se puede escribir como $\mathcal{M}_0 = (\mathbb{R}^4, \eta_{ij})$ o \mathbb{R}_1^4 . Para $\Delta x \in \mathcal{M}_0$, entonces:

$$\|\Delta x\|^2 = ((\Delta x)^T \eta_{ij} (\Delta x)) = \langle \Delta x, \Delta x \rangle_\eta \quad (16)$$

Al producto interno asociado a ese espacio se le define como \langle , \rangle_η , donde η_{ij} tiene la forma:

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Observemos que, aplicando el boost de Lorentz y mediante manipulaciones algebraicas podemos obtener:

$$\Delta s'^2 = (\Delta x'^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x'^i)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x'^1)^2 - \sum_{i=2}^3 (\Delta x'^i)^2$$

Como:

$$\Delta x'^1 = \gamma(-\beta\Delta x^0 + \Delta x^1) = \gamma(-v\Delta t + \Delta x^1)$$

$$\Delta x'^0 = c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x^1)$$

Entonces, desarrollando y como $\sum_{i=2}^3 (\Delta x'^i)^2 = \sum_{i=2}^3 (\Delta x^i)^2$, debido a que el boost de Lorentz es en una sola dirección:

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= c^2(\gamma(c\Delta t - \beta\Delta x^1))^2 - (\gamma(-v\Delta t + \Delta x^1))^2 - \sum_{i=2}^3 (\Delta x^i)^2 \\ \Delta s'^2 &= (\Delta t)^2(c^2\gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2}) - \left(\gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) (\Delta x^1)^2 - \sum_{i=2}^3 (\Delta x^i)^2 \\ \Delta s'^2 &= (c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x^1)^2) - \sum_{i=2}^3 (\Delta x^i)^2 = (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 = \Delta s^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\Delta s'^2 = \|\mathbb{B}(\Delta x)\|^2 = \Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 \quad (18)$$

Que era lo que esperábamos. Entonces, bajo la métrica η_{ij} el intervalo $\Delta s'^2$ se mantiene invariante, observemos que necesariamente, para un evento en \mathcal{M}_0 , las coordenadas espaciales y temporales, están explícitamente relacionadas, eso solo puede significar que la noción de espacio tridimensional espacial es obsoleta para nuestro espacio tetradimensional de Minkowski a la hora de hacer mediciones de este. Y entonces podemos decir que el espacio ambiente donde se desarrolla toda la física es un espacio tetradimensional donde la coordenada temporal y espacial se mezclan (y ya no solo de forma paramétrica como lo era en la noción de espacio tridimensional a la hora de definir la posición de una partícula). Y entonces el tejido que sustenta la dinámica del universo es el espacio-tiempo o espacio de Minkowski \mathcal{M}_0 .

De acuerdo a toda la construcción anterior, entonces podemos hablar de manera general, de lo que es un espacio con un métrica distinta a la euclídea:

Definición 0.3.27. Una *variedad riemanniana* (M, g) es una pareja donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica riemanniana. Dada una carta (U, φ) de modo que $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, los coeficientes de la métrica g_{ij} en cada $p \in M$ están dados por

$$g_{ij}(p) = g(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p.$$

Además de la relación entre dos métricas en distintos espacios:

Definición 0.3.28. Una *isometría* entre dos variedades riemannianas (M, g) y (N, h) es un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ que preserva la métrica riemanniana; es decir, para cada $p \in M$ y $v, w \in T_p M$ se tiene

$$g(p)(v, w) = h(f(p))(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Dos variedades riemannianas son *isométricas* si y sólo si existe una isometría entre ellas.

También es de aclarar que por (18), el producto interno asociado a la métrica, no es definido positivo, por lo cual:

Definición 0.3.29. Una *variedad pseudo-riemanniana* (M, g) es una pareja donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica pseudo-riemanniana. La métrica g es una forma bilineal simétrica no degenerada que no necesariamente es positiva definida, lo que significa que puede tener tanto signos positivos como negativos en su forma cuadrática asociada. Esta métrica g puede ser de tipo (p, q) donde p y q representan el número de signos positivos y negativos, respectivamente, en la forma cuadrática.

$$g_{ij}(p) = g(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p.$$

Una *isometría* entre dos variedades pseudo-riemannianas (M, g) y (N, h) es un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ que preserva la métrica pseudo-riemanniana; es decir, para cada $p \in M$ y $v, w \in T_p M$ se tiene

$$g(p)(v, w) = h(f(p))(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Dos variedades pseudo-riemannianas son *isométricas* si y sólo si existe una isometría entre ellas.

Resulta que la métrica riemanniana es la generalización de la primera forma fundamental de una superficie diferenciable, esto se puede profundizar en [9], ya que por las propiedades de linealidad y de la regla de Leibniz presentadas en los vectores base anteriormente construidas, son características de cierto tipo de operaciones que definiremos a continuación:

Definición 0.3.30. Sean S una superficie diferenciable y $p \in S$. Una operación D que aplica una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en p en un número real $D(f)_p$ se llama una *derivación* en p si se satisface lo siguiente:

1. Es lineal; es decir, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y f, g son dos funciones suaves, entonces

$$D(\lambda f + \mu g)_p = \lambda D(f)_p + \mu D(g)_p$$

2. D satisface la regla de Leibniz

$$D(fg)_p = f(p)D(g)_p + D(f)_p g(p)$$

Es evidente que la operación de derivada direccional es una derivación en p . Más aún, el siguiente resultado prueba que cada derivación en p es precisamente la derivada direccional en la dirección de un vector tangente, lo cual dota de sentido la naturaleza de los vectores base:

Definición 0.3.31. Si D es una derivación en $p \in S$, entonces existe un único vector $\xi \in T_p S$ tal que para toda función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en p se cumple

$$D(f)_p = \xi(f)_p.$$

existe una biyección entre los operadores derivada y los vectores del espacio tangente.

Por lo cual, podemos calcular la métrica en superficies encajas en dimensiones inferiores:

Ejemplo 12. De acuerdo al ejemplo 10 con $R = 1$, tenemos que la métrica riemanniana con respecto a esa base es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{16}{(u_0^2 + v_0^2 + 4)^2} & 0 \\ 0 & \frac{16}{(u_0^2 + v_0^2 + 4)^2} \end{pmatrix}$$

La primera forma fundamental y la métrica riemanniana son cruciales para hacer cálculos precisos en superficies o variedades abstractas. La métrica riemanniana proporciona una manera de medir distancias y ángulos en cualquier variedad diferenciable, generalizando conceptos de geometría euclidiana. La primera forma fundamental es una métrica específica para superficies encajadas en el espacio tridimensional euclídeo, permitiendo calcular longitudes, áreas y curvaturas.

0.3.4. Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Vamos a explorar el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, lo cual nos ayudará a comprender de manera más natural su estructura de variedad diferenciable utilizando coordenadas homogéneas. Este enfoque facilita la construcción y comprensión de conceptos avanzados como los grupos de Lie G y las álgebras de Lie \mathfrak{g} .

Además, este espacio será fundamental para el trabajo en nuestra tesis, permitiendo ver la representación de los grupos de Lie G en este espacio e indagar en las propiedades invariantes del mismo ante la acción del grupo. La combinación de estas herramientas nos permitirá abordar problemas complejos con una base sólida y estructurada, facilitando tanto la teoría como las aplicaciones prácticas en nuestras investigaciones.

Definición 0.3.32. El **espacio proyectivo** consiste de el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 . Formalmente, un punto en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es una clase de equivalencia de ternas ordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, bajo la relación de equivalencia $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta relación de equivalencia significa que dos puntos en \mathbb{R}^3 representan el mismo punto en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si y solo si uno se puede obtener del otro multiplicando ambos componentes por un escalar no nulo.

Concretamente, un punto en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es un punto en el espacio proyectivo definido por las coordenadas homogéneas $[x : y : z]$. Si dos puntos $[x_1 : y_1 : z_1] = [x_2 : y_2 : z_2]$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$. Esta representación facilita el manejo de conceptos como la relación entre puntos en el espacio proyectivo y líneas en el espacio euclideo.

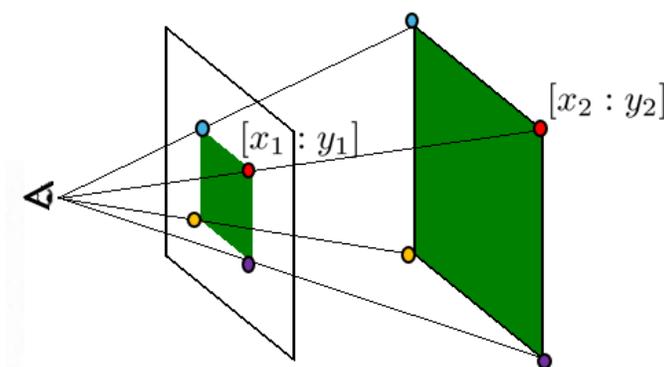


Figura 10: Representación del espacio proyectivo.

Por ahora nos restringiremos a la línea proyectiva, lo cual es simplemente limitarnos a 2 dimensiones, con la relación de equivalencia. Para dotar a la línea proyectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de una estructura de superficie diferenciable, se introducen dos cartas que la cubren. Estas cartas permiten describir localmente a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ utilizando coordenadas de \mathbb{R} .

Cartas:

- La primera carta, \mathbb{P}_0^1 , cubre todos los puntos $[x : y]$ con $x \neq 0$. Se define una función $\phi_0 : \mathbb{P}_0^1 \rightarrow \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}$ por $\phi_0([x : y]) = \phi_0([1 : y/x]) = y/x = x_0$, que asigna a cada punto de \mathbb{P}_0^1 un valor en Ω_0 . La inversa $\phi_0^{-1} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{P}_0^1$, con $\phi_0^{-1}(x_0) = [1 : x_0]$.
- La segunda carta, \mathbb{P}_1^1 , cubre todos los puntos $[x : y]$ con $y \neq 0$. Se define una función $\phi_1 : \mathbb{P}_1^1 \rightarrow \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}$ por $\phi_1([x : y]) = \phi_1([x/y : 1]) = x/y = x_1$, asignando a cada punto de \mathbb{P}_1^1 un valor en Ω_1 . La inversa $\phi_1^{-1} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{P}_1^1$, con $\phi_1^{-1}(x_1) = [x_1 : 1]$.

Cambio de coordenadas: El cambio de coordenadas entre \mathbb{P}_0^1 y \mathbb{P}_1^1 se da por las funciones de transición:

$$\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_0$$

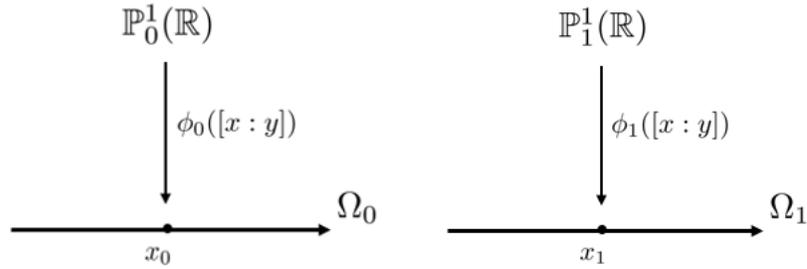


Figura 11: Cartas coordenadas \mathbb{P}_0^1 y \mathbb{P}_1^1 .

- Explícitamente: si $\phi_0([x : y]) = \frac{y}{x} = x_0$ entonces:

$$\phi_0 \circ \phi_1^{-1}(x_1) = \phi_0([x_1 : 1]) = \phi_0\left([1 : \frac{1}{x_1}]\right) = \frac{1}{x_1} = x_0, \text{ con } x_1 \neq 0.$$

También de manera inversa:

$$\phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1$$

- Similarmente $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(x_0) = 1/x_0 = x_1$, con $x_0 \neq 0$.

Observación. Esta construcción siempre sera usada para dotar de estructura de variedad diferenciable al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Debido a que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es abstracto, resulta difícil imaginar su espacio ambiente de manera ilustrativa. Sin embargo, afortunadamente, la línea proyectiva es isomorfa a la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1(\mathbb{R})$, lo cual facilita la visualización y comprensión de ciertos conceptos. Este isomorfismo nos permite utilizar la circunferencia unitaria como una herramienta ilustrativa y práctica para realizar cálculos y verificaciones en el espacio proyectivo, aprovechando su estructura más familiar y tangible para nuestros propósitos.

Teorema 0.3.7. $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^1(\mathbb{R})$

La línea proyectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1(\mathbb{R})$ son isomorfas como variedades.

Observación. Las formulas del isomorfismo, es simplemente el caso de la proyección estereográfica en 2 dimensiones del ejemplo 9.

Podemos enunciar las siguientes propiedades topológicas, que ahora podemos dotar a las variedades abstractas $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, recordando también el ejemplo 2:

- **Esfera $\mathbb{S}^2(\mathbb{R})$:**

- Conexa.
- Compacta.

- **Circunferencia $\mathbb{S}^1(\mathbb{R})$:**

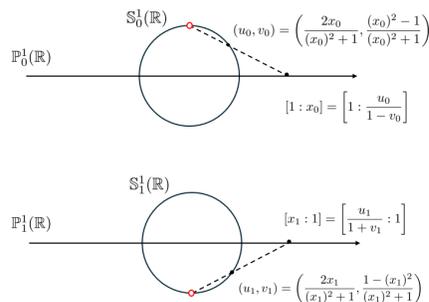


Figura 12: Ilustración de la construcción del isomorfismo.

- Conexa.
- Compacta.
- Isomorfa a la línea proyectiva.

▪ **Línea Proyectiva** $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

- Conexa.
- Compacta.
- Isomorfa a la circunferencia $\mathbb{S}^1(\mathbb{R})$.

Afortunadamente, a lo largo de todo este trabajo, usaremos una gran cantidad de isomorfismos, para poder concluir resultados importantes de espacios abstractos de dimensión arbitraria, que son mas fáciles de trabajar en variedades bien conocidas, como lo es la esfera $\mathbb{S}^n(\mathbb{R})$.

0.3.5. La esfera celeste como subespacio de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

La esfera celeste es una representación idealizada de la bóveda celeste, donde se proyectan las posiciones de los astros. Desde el punto de vista del espacio proyectivo, podemos considerar la esfera celeste como el conjunto de puntos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ya que es lo mismo desde el punto de vista de el cono luz, definido en relatividad especial (puede referirse a [8]), además que incluye todos los posibles puntos de vista desde el infinito. Esta perspectiva nos permite utilizar herramientas geométricas y algebraicas del espacio proyectivo para analizar y describir de manera precisa las relaciones y posiciones aparentes de los cuerpos celestes en el cielo.

La relación con las transformaciones de Lorentz radica en que estas transformaciones, fundamentales en la teoría de la relatividad, preservan la estructura del espacio-tiempo de Minkowski, que desde cierto punto de vista, es un modelo proyectivo. En este contexto, las transformaciones de Lorentz pueden interpretarse como cambios de coordenadas en el espacio proyectivo que conservan las propiedades fundamentales de la esfera celeste, facilitando así la comprensión de fenómenos físicos como la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud en términos de geometría proyectiva. Esta relación es crucial para el análisis de eventos y trayectorias de objetos en movimiento relativo en el universo,

además de poder abstraer ideas concretas, en problemas mas generales de matemáticas. Para ello comenzamos con la generalizaciones del espacio proyectivo:

Definición 0.3.33. El espacio proyectivo consiste en el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^{n+1} . Formalmente, un punto en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una clase de equivalencia de $(n+1)$ -tuplas ordenadas $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, bajo la relación de equivalencia $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta relación de equivalencia significa que dos puntos en \mathbb{R}^{n+1} representan el mismo punto en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si y solo si uno se puede obtener del otro multiplicando todos sus componentes por un escalar no nulo.

Concretamente, un punto en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un punto en el espacio proyectivo definido por las coordenadas homogéneas $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Si dos puntos $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [y_0 : y_1 : \dots : y_n]$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ son equivalentes si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(x_0, x_1, \dots, x_n) = \lambda(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Esta representación facilita el manejo de conceptos como la relación entre puntos en el espacio proyectivo y líneas en el espacio euclidiano.

La forma de construir la esfera celeste, es viendo el grupo $O(n+1, 1)$ bajo la convención de métrica $(1, \dots, 1, -1)$, este se define como el conjunto de todas las matrices A de tamaño $(n+2) \times (n+2)$ que satisfacen la condición:

$$A^T I_{n+1,1} A = I_{n+1,1},$$

donde A^T denota la transposición de A , y $I_{n+1,1}$ es la matriz de la forma cuadrática de signatura $(n+1, 1)$ bajo la convención, representada como:

$$I_{n+1,1} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1).$$

Esto implica que el grupo $O(n+1, 1)$ preserva la forma cuadrática:

$$q(x) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

donde x_0, x_1, \dots, x_{n+1} son componentes de vectores en \mathbb{R}^{n+2} .

Lo anterior podemos verlo desde otro punto de vista. Tenemos el siguiente subespacio en $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$, la esfera celeste:

$$X = \{[x_0 : \dots : x_{n+1}] \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$$

Observación. Si $x_{n+1} = 0$ entonces

$$x_0^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

por tanto, obtenemos una ambigüedad (una contradicción):

$$x_0 = \dots = x_n = 0$$

Se sigue que $x_{n+1} \neq 0$

Además definimos la siguiente función, que nos dota de un sistema coordenado:

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$[x_0 : \dots : x_{n+1}] = \left[\frac{x_0}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} : 1 \right] \mapsto \left[\frac{x_0}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right]$$

ya que, podemos observar:

$$\left(\frac{x_0}{x_{n+1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)^2 = \frac{x_0^2 + \dots + x_n^2}{(x_{n+1})^2} = 1$$

Por lo cual:

$$X \simeq \mathbb{S}^n$$

También recordemos que evidentemente si $G := O(n+1, 1)$, entonces:

Si $g \in G$ y $x = [x_0 : \dots : x_{n+1}]^T \in X$ obtenemos

$$g^T I_{n+1,1} g = I_{n+1,1}$$

Además:

$$(gx)^T I_{n+1,1} (gx) = x^T g^T I_{n+1,1} g x = x^T I_{n+1,1} x = x_0^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0$$

Observación. Consideramos el caso especial del grupo $O(3, 1)$, que es relevante en el contexto de la relatividad especial, donde $n = 2$. Bajo la convención de métrica $(1, 1, 1, -1)$, este grupo se define como el conjunto de todas las matrices A de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$A^T \eta A = \eta,$$

donde A^T denota la transposición de A , y η es la matriz de la forma cuadrática de signatura $(3, 1)$, dada por

$$\eta = \text{diag}(1, 1, 1, -1).$$

Esto implica que el grupo $O(3, 1)$ preserva la forma cuadrática

$$q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$$

donde x_0, x_1, x_2, x_3 son componentes de vectores en \mathbb{R}^4 , representando tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal.

Para el caso de $n = 2$, la matriz η es explícitamente como:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Consideremos la métrica de Minkowski $\eta = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ y una matriz de cambio de base C dada por:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

El objetivo es calcular la transformación $C^T \eta C$. El cálculo se desarrolla como sigue:

1. La matriz transpuesta de C , denotada C^T , es

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2. El producto $(C^T) \cdot (\eta)$ da como resultado una matriz intermedia, que luego es multiplicada por C para obtener el resultado final:

$$C^T \eta C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

Este resultado muestra la matriz resultante después del cambio de base, el cual por conveniencia nos servirá para nuestros cálculos.

Observación. El hecho de utilizar este convenio, por ejemplo para $n = 1$, es que al cambiar de base a un elemento de $O(2, 1)$, calculando $C^T A C$ como sigue:

$$C^T A C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(x) & 0 & \sinh(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(x) & 0 & \cosh(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Simplificando esta expresión, utilizando las identidades de las funciones hiperbólicas, obtenemos la matriz diagonal:

$$C^T A C = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

Esta matriz diagonalizada indica que la matriz A se ha transformado en una forma mas sencilla para realizar cálculos.

Trabajar en la base donde aparece la métrica J resulta conveniente, por lo cual, entonces generalizaremos tal espacio para dimensión n :

Si definimos:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por lo cual si:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C J C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = I_{n+1,1}$$

entonces:

$$CJC^t = I_{n+1,1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por ello definimos:

$$Y := \{[y_0 : \cdots : y_{n+1}] \mid 2y_0y_{n+1} + \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0\}.$$

Además si $y = [y_0 : \cdots : y_{n+1}]^T \in Y$:

$$(gy)^T J(gy) = y^T g^T Jgy = y^T Jy = 2y_0y_{n+1} + \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

Observación. Es evidente que al ser solo un cambio de base tenemos el siguiente isomorfismo de variedades:

$$X \simeq Y \simeq \mathbb{S}^n$$

Por lo cual obtenemos el siguiente sistema de cartas coordenadas para Y , si $y_0 \neq 0$:

$$[y_0 : \cdots : y_{n+1}] = [1 : \cdots : \frac{y_{n+1}}{y_0}]$$

Entonces, definimos (por conveniencia, no confundir con el sistema coordenado de X):

$$[1 : \cdots : \frac{y_{n+1}}{y_0}] \mapsto [\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_0}] = [x_1, \dots, x_{n+1}]$$

Reescribiendo:

$$2\frac{y_{n+1}}{y_0} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{y_0} = 2x_{n+1} + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

Obteniendo:

$$X_0 := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid x_{n+1} = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\}. \quad (19)$$

Sin embargo, podemos prescindir de la coordenada x_{n+1} , debido a que esa siempre es fija (se dice que la variedad es libre), por lo cual reescribiendo nuestro espacio como simplemente:

$$X_0 := \{[x_1, \dots, x_n] \}. \quad (20)$$

Similarmente si $y_{n+1} \neq 0$:

$$Z_\infty := \{[z_1, \dots, z_n] \}. \quad (21)$$

Por lo cual, dotamos de estructura de variedad diferenciable a Y , esta sera de ayuda para cálculos posteriores.

0.3.6. Grupos y álgebras de Lie

Una forma natural de hablar de los grupos de Lie G es observar cómo actúa un grupo en el espacio natural M donde se define. Por ejemplo, cuando un grupo de Lie actúa suavemente sobre una variedad diferenciable, las propiedades geométricas de la variedad se transfieren al grupo, dotándolo de una estructura diferenciable. El enfoque que utilizaremos, nos ayudara a comprender mejor la relación entre un objeto nuevo llamado álgebra de Lie y la geometría en el contexto de los grupos de Lie.

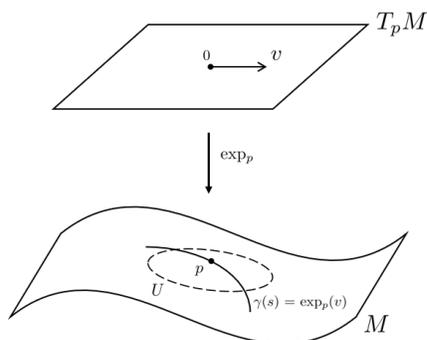


Figura 13: Ilustración de un grupo de Lie.

Para dotar de una estructura de variedad diferenciable a un grupo G , podemos pensar en mapear elementos del grupo mediante curvas parametrizadas. Es decir, consideramos una curva $\gamma(s)$ en G que pasa por la identidad e del grupo cuando $s = 0$, por conveniencia, esta parametrización sera por medio de la exponencial. Al observar los vectores tangentes de esta curva en cada punto, podemos estudiar cómo se comportan los elementos de G bajo las operaciones del grupo.

Esta perspectiva nos permite ver cómo el espacio donde actúa el grupo, induce de manera natural la estructura de variedad diferenciable al grupo G .

Ahora entonces podemos hablar acerca de, si:

$$g = \exp(sA) \in O(3, 1) = G$$

donde:

$$A \in \mathfrak{o}(3, 1) = T_e M$$

entonces por conveniencia, dada la base que anteriormente elegimos:

$$g^T J g = J$$

donde:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora entonces al fijarnos en los vectores tangentes, de su espacio tangente $T_e G$, que llamaremos a este espacio el **álgebra de Lie de $O(3, 1)$** :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{ds} (g^T J g) \right|_{s=0} &= \left. \frac{dJ}{ds} \right|_{s=0} = 0 \\
\left. \frac{d}{ds} (\exp(sA)^T J \exp(sA)) \right|_{s=0} &= \left. \frac{d}{ds} (\exp(sA^T) J \exp(sA)) \right|_{s=0} \\
&= (A^T \exp(sA^T) J \exp(sA) + \exp(sA^T) J \exp(sA) A) \Big|_{s=0} \\
&= A^T J + J A = 0
\end{aligned}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

por lo cual

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^t J + J A = \begin{pmatrix} 2a_{41} & a_{21} + a_{42} & a_{31} + a_{43} & a_{11} + a_{44} \\ a_{42} + a_{21} & 2a_{22} & a_{32} + a_{23} & a_{12} + a_{24} \\ a_{43} + a_{31} & a_{23} + a_{32} & 2a_{33} & a_{13} + a_{34} \\ a_{44} + a_{11} & a_{24} + a_{12} & a_{34} + a_{13} & 2a_{14} \end{pmatrix} = 0$$

Lo cual a su vez significa que:

$$a_{41} = a_{22} = a_{33} = a_{14} = 0$$

y por lo tanto

$$B^t \equiv A^t J = -J A \equiv -B$$

donde

$$B^t = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{21} & a_{31} & a_{11} \\ a_{42} & a_{22} & a_{32} & a_{12} \\ a_{43} & a_{23} & a_{33} & a_{13} \\ a_{44} & a_{24} & a_{34} & a_{14} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} = -J A = -B$$

Entonces resulta que los elementos de $\mathfrak{o}(3, 1)$ se definen como:

$$\mathfrak{o}(3, 1) = \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^t J + J A = 0\}$$

Obs. Si vemos a detalle, cada elemento de $\mathfrak{o}(3, 1)$ se ve como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & -a_{11} \end{pmatrix}$$

donde, por lo anterior, tenemos que:

$$a_{21} + a_{42} = 0$$

$$a_{31} + a_{43} = 0$$

$$a_{32} + a_{23} = 0$$

$$a_{11} + a_{44} = 0$$

$$a_{24} + a_{12} = 0$$

$$a_{34} + a_{13} = 0$$

Por lo tanto A debe tener la forma:

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} & 0 \\ -a_{42} & 0 & a_{23} & -a_{22} \\ -a_{43} & a_{32} & 0 & -a_{13} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & -a_{11} \end{pmatrix}$$

entonces notamos que, la matriz A se puede descomponer como:

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid B \in O(2), \quad B^t + B = 0 \right\}$$

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\tilde{\mathfrak{n}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -z^t & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Observación. En si, obtenemos la descomposición de Gelfand-Naimark:

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

definimos:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

Ahora podemos exponenciar esos elementos para poder trabajar en $O(3,1)$. (Redefiniremos algunas notaciones por conveniencia):

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^a & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-a} \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{R} \right\} \equiv \left\{ \alpha(a) = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & (a)^{-1} \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid B \in O(2) \right\} \equiv \left\{ m(B) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid B \in O(2) \right\}$$

$$N = \left\{ n(x) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & -\frac{1}{2}\|x\|^2 \\ 0 & I_2 & -x^t \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid \text{donde } x^t \in \mathbb{R}^2, x = (x_0, x_1) \right\}$$

$$\tilde{N} = \left\{ \tilde{n}(z) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -z^t & I_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\|z\|^2 & z & 1 \end{array} \right) \mid \text{donde } z^t \in \mathbb{R}^2, z = (z_0, z_1) \right\}$$

Y definimos:

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación. La descomposición de un grupo en elementos que corresponden a operaciones geométricas simples, como reflexiones, rotaciones y escalados, tiene profundas implicaciones en teoría de grupos y álgebra lineal. Esta descomposición típicamente incluye:

- Matrices triangulares superiores, que encapsulan escalados y traslaciones a lo largo de ejes definidos.
- Matrices triangulares inferiores, que representan operaciones análogas a las matrices triangulares superiores pero en la dirección opuesta.
- Matrices diagonales, que representan escalados uniformes a lo largo de todos los ejes.
- Matrices de reflexión, que representan simetrías a través de subespacios.
- Un elemento ortogonal, que corresponde a rotaciones y reflexiones y preserva la norma de los vectores.

Por ello, se definió w_0 , para completar la descomposición del grupo, este elemento corresponde a las matrices de reflexión.

Consideramos actuar con el grupo G por la derecha a los elementos de Y , por conveniencia. Como $O(3, 1)$ en la base correspondiente actúa sobre Y :

Si $v_0 = [0 : 0 : 0 : 1] \in Y$, entonces

$$v_0\tilde{n}(z) = [-\frac{1}{2}\|z\|^2 : z : 1]$$

$$v_0w_0n(x) = [1 : x : -\frac{1}{2}\|x\|^2]$$

Observación. Por lo tanto la acción de ambos elementos, es transitiva, en cada una de las cartas coordenadas, respectivamente de Y (por las ecuaciones (20) y (21)). Además:

$$v_0n(x) = v_0$$

$$v_0m(B) = v_0$$

$$v_0\alpha(a) = v_0$$

Por lo cual, el estabilizador de v_0 es $stab(v_0) = P = m\alpha n$

$$P = m\alpha n = \begin{pmatrix} a & xa & -\frac{1}{2}a\|x\|^2 \\ 0 & B & -Bx^t \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

En general $v_0m\alpha n = v_0P = v_0$. Por lo cual encontramos el estabilizador,

$$Stab(v_0) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mid A \in O(3, 1) \right\} = P$$

Y entonces por el teorema de la órbita-estabilizador, actuando con el grupo por la derecha:

$$Y \simeq X \simeq Stab(v_0) \backslash O(3, 1) = P \backslash O(3, 1) \quad (22)$$

Además:

$$v_0\tilde{n}(z) = [-\frac{1}{2}\|z\|^2 : z : 1]$$

por lo cual si $-\frac{1}{2}\|z\|^2 \neq 0$, entonces:

$$= [1 : \frac{-2z}{\|z\|^2} : \frac{-2}{\|z\|^2}]$$

entonces

$$[1 : x : -\frac{1}{2}\|x\|^2] = [1 : \frac{-2z}{\|z\|^2} : \frac{-2}{\|z\|^2}]$$

por lo cual, obtenemos dos relaciones:

$$v_0 \tilde{n}(z) = v_0 w_0 n(x)$$

y

$$x = \frac{-2z}{\|z\|^2} \quad (23)$$

Observación. Debido a (20), se puede explicar por que obtuvimos la relación entre la acción del grupo de los elementos triangulares superiores, con la acción de los elementos triangulares inferiores, ya que hicimos uso del espacio proyectivo con la estructura cociente, en si, podemos verlo como:

$$O(3, 1) = \bar{N}P \cup NwP$$

Por lo que si:

$$Y \simeq X \simeq \text{Stab}(v_0) \setminus O(3, 1) = P \setminus O(3, 1)$$

Entonces, tenemos las siguientes relaciones:

$$N \cong X_0 \quad \text{y} \quad \bar{N} \cong Z_\infty$$

$$n(x) \mapsto v_0 w_0 n(x) \quad \text{y} \quad \bar{n}(z) \mapsto v_0 \bar{n}(z)$$

Por lo cual siguiendo con lo buscado, tenemos que $\exists p \in P$:

$$\tilde{n}(z) = p w_0 n(x)$$

Por tanto $p = \tilde{n}(z)(n(x))^{-1}(w_0)^{-1} = \tilde{n}(z)n(-x)w_0$, lo cual es:

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\|x\|^2 & -x & 1 \\ 0 & B(x) & \frac{2x^t}{\|x\|^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\|x\|^2} \end{pmatrix}$$

donde $B(x)$ es:

$$B(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2 - x_0^2}{\|x\|^2} & \frac{-2x_1 x_0}{\|x\|^2} \\ \frac{-2x_1 x_0}{\|x\|^2} & \frac{x_0^2 - x_1^2}{\|x\|^2} \end{pmatrix}$$

Observación. La estructura de variedad diferenciable en este grupo, viene dada por el como están relacionados los elementos del grupo y la acción de estos mismos, además dada la representación del grupo, el conjunto $M(m, n)$ de matrices $m \times n$ con entradas reales se puede identificar con \mathbb{R}^{mn} . Esta identificación determina una estructura diferenciable en $M(m, n)$. Cuando $m = n$, escribiremos $M(n, n) = M(n)$.

Aunado a que, aparecen naturalmente después de actuar con el grupo, el cambio de coordenadas entre cada una de las cartas de la estructura de variedad diferenciable Y . Es interesante notar que la acción de los subgrupos es transitiva en cada una de las cartas coordenadas de Y respectivamente, ya que si tenemos el espacio Y con estructura

de variedad diferenciable donde actúa naturalmente, es de esperarse, que este grupo se "divida" para actuar en cada una de estas cartas de manera diferente, con sus respectivos "cambios de coordenadas" entre los elementos del grupo, dados por los elementos del estabilizador, dependiendo de la carta coordenadas de Y . De manera formal:

Definición 0.3.34. Un grupo (G, \cdot) es un *grupo de Lie* si y sólo si G es una variedad diferenciable y la transformación $\mu : G \times G \rightarrow G$ dada por $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es diferenciable.

Observación. La definición anterior es de esa manera, ya que es una manera sencilla de compactificar la definición de grupo, sin necesidad de nombrar todas las propiedades que debe cumplir el mismo.

Para poder definir formalmente lo que es el álgebra de Lie \mathfrak{g} , una manera sencilla de hacerlo, es por medio de ver como afecta la estructura del grupo G , al actuar consigo mismo, específicamente por la derecha (puede ser por la izquierda, ambas construcciones son equivalentes) a los elementos del álgebra dado el mapeo exponencial:

Dado $\tilde{A} \in N$ y $A \in \mathfrak{n}$, como elemento del espacio tangente de $O(3, 1)$, y un elemento $g \in O(3, 1)$ arbitrario, dada la acción por la derecha:

$$g \cdot \tilde{A} = g \exp(A)$$

Sabemos que por la definición de vector tangente de una curva en un variedad, necesitamos de una función auxiliar para su construcción y comportamiento, por lo cual, sea $f \in C^\infty(G)$ una función arbitraria, y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ una curva diferenciable, el *vector tangente* a la curva en $\gamma(s)$ por

$$\gamma'(s) = \gamma_* \left(\frac{d}{ds} \right)_s.$$

Por lo cual:

$$\gamma_* \left(\frac{d}{ds} \right)_s (f(g)) = \left(\frac{d}{ds} \right)_s (f \circ \gamma)(g)$$

Entonces si $\gamma(s) = \exp(sA)$, la acción por la derecha $R_{\tilde{A}}$ a g del grupo:

$$R_{\tilde{A}*} f(g) \equiv R_A f(g) \equiv \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (f \circ (g \exp(sA))) = \left(\frac{d}{ds} \right)_{s=0} (f \circ (\gamma_g(s)))$$

donde:

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Por lo anterior construido sabemos que $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33} \in \mathbb{R}$, $a_{12}^t, a_{32}^t, a_{23}, a_{21} \in \mathbb{R}^2$ y además $a_{22} \in M(2)$, teniendo que:

$$\gamma_g(s) = g \exp(sA) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}I_2 + a_{11}sx & a_{13} - \frac{1}{2}a_{11}s^2xx^T - a_{12}sx^T \\ a_{21} & a_{22}I_2 + a_{21}sx & a_{23} - \frac{1}{2}a_{21}s^2xx^T - a_{22}sx^T \\ a_{31} & a_{32}I_2 + a_{31}sx & a_{33} - \frac{1}{2}a_{31}s^2xx^T - a_{32}sx^T \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces, por la regla de la cadena, y como $M(n)$ es isomorfo a \mathbb{R}^{mn} , cada uno de los coeficientes b_{ij} de la matriz anterior, obtenemos, de manera compacta:

$$R_A = a_{11}x \frac{\partial}{\partial a_{12}} + a_{21}x \frac{\partial}{\partial a_{22}} + a_{31}x \frac{\partial}{\partial a_{32}} - a_{12}x^T \frac{\partial}{\partial a_{13}} - a_{22}x^T \frac{\partial}{\partial a_{23}} - a_{32}x^T \frac{\partial}{\partial a_{33}}$$

Similarmente podemos calcular para elementos de \mathfrak{a} , \mathfrak{m} y $\tilde{\mathfrak{n}}$, los campos vectoriales naturales de $O(3, 1)$. Entonces podemos empezar a definir de manera formal todo lo anterior, para encontrar que relación tienen estos campos vectoriales con los elementos de \mathfrak{g} .

Definición 0.3.35. Sean M variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y φ_t el flujo local de X . Para $f \in C^\infty(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la derivada de Lie R_X por

$$R_X f(p) = X(p)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t)(p), \quad (24)$$

$$R_X Y(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t*}[Y(\varphi_t)])(p). \quad (25)$$

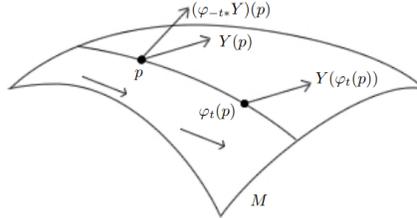


Figura 14: Ilustración de los campos vectoriales para definir la derivada de Lie.

Observación. Para entender mas la expresión (25) podemos verlo de la siguiente manera, por definición de derivada:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t*}Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t*}Y)(p) - (\varphi_{0*}Y)(p)}{t}$$

Observamos que el flujo en $t = 0$ es la identidad:

$$\varphi_{0*} = \text{id}$$

Por lo tanto:

$$(\varphi_{0*}Y)(p) = Y(p)$$

Sustituimos esta identidad en la expresión de la derivada:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t*} Y)(p) - Y(p)}{t}$$

En pocas palabras, ayuda a comprender como actúa un campo vectorial X sobre un campo Y ; además este operador cumple las siguientes propiedades:

Teorema 0.3.8. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Entonces

1. $R_X(fY) = fR_X(Y) + R_X(f)Y$.
2. $(R_X Y)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Teorema 0.3.9 (Identidad de Jacobi). Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Observación. Es interesante ver que estos mismos campos vectoriales $R_A, R_B \in \mathfrak{X}(G)$ comparten la siguiente propiedad, dada la identidad de Jacobi, con los elementos $A, B \in \mathfrak{g}$, donde $[A, B]$ es la operación conmutación usual en el álgebra matricial:

$$R_{[A, B]} = R_A R_B - R_B R_A = [R_A, R_B]$$

Por esta propiedad, existe una relación directa de $T_e G$ con los campos vectoriales generados por la construcción anterior, que llamaremos campos vectoriales invariantes por la derecha X^R , por lo cual parece natural, dar la siguiente definición:

Definición 0.3.36. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} , es un espacio vectorial, con una operación binaria llamada el corchete de Lie de X y Y , que entrega un campo vectorial $[X, Y]$ dado por:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

Además satisface: (Identidad de Jacobi). Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Observación. En este trabajo se utilizar la notación R_X para la derivada de Lie, simplemente por convención, se puede consultar las demostraciones formales en [7].

Definición 0.3.37. Sea G un grupo de Lie y sea \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada, identificada con el espacio tangente en la identidad $T_e G$. El **mapeo exponencial** es una aplicación $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ definida de la siguiente manera:

1. Para cada $A \in \mathfrak{g}$ y su imagen $g = \exp(A) \in G$, consideramos el campo de vectores invariante a la derecha X^R en G , definido por $X^R(g) = R_{g*} = R_A$, donde R_g es la multiplicación a la derecha por g en G , dada la definición de derivada de Lie.

2. La curva integral $\gamma(t)$ de X^R que pasa por la identidad e en G se define como la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t) = X^R(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = e \end{cases}$$

3. El mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ se define como:

$$\exp(X) = \gamma(1)$$

La elección de $t = 1$ se debe a la conveniencia y normalización, simplificando la definición y las propiedades del mapeo exponencial.

0.4. Álgebra Homologica

Como mencionamos en el capítulo de Teoría de grupos, existen varios aspectos interesantes acerca del análisis de la cantidad de elementos de un conjunto con respecto a cualquier otro conjunto, bajo la imagen de alguna función, ya sea inyectiva, sobreyectiva e incluso biyectiva. Las herramientas utilizadas para hacer estos análisis, resultan ser abstractas; a lo largo de este capítulo, se les dará un enfoque más intuitivo y constructivo, para así poder ver el potencial del Álgebra Homologica. Para ello recordemos un par de definiciones, si $f : A \rightarrow B$:

1. Decimos que f es **inyectiva** si $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$.
2. Decimos que f es **sobreyectiva** (sobre) si $\forall b \in B \exists a \in A t.q. f(a) = b$.
3. Decimos que f es **biyectiva** si f es inyectiva y sobreyectiva.

Aunado a las definiciones, daremos la demostración de los siguientes resultados, anteriormente mencionados en **teoría de grupos**, esto es, debido a que la técnica empleada para la obtención de estos mismos, será útil para resultados posteriores de Álgebra homologica:

Teorema. Si $\phi : G \rightarrow H$ es un morfismo, entonces ϕ es inyectiva si y solo si $\text{Ker}\phi = \langle e \rangle$.

Demostración.

Supongamos que ϕ es inyectiva. Sea $x \in \text{Ker}\phi$, entonces

$$\phi(x) = \tilde{e} \Rightarrow \phi(e)$$

Como ϕ es inyectiva, entonces $x = e$, por tanto

$$\text{Ker}\phi = \langle e \rangle$$

Ahora supongamos que $\text{Ker}\phi = \langle e \rangle$. Sean $x_1, x_2 \in G$ tales que:

$$\phi(x_1) = \phi(x_2)$$

$$\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)^{-1} = e$$

$$\phi(x_1) \cdot \phi(x_2^{-1}) = e$$

$$\phi(x_1 \cdot x_2^{-1}) = e$$

es decir, $x_1 \cdot x_2^{-1} \in \text{Ker}\phi = \langle e \rangle$. Por tanto

$$x_1 \cdot x_2^{-1} = e \Rightarrow x_1 = x_2$$

entonces ϕ es inyectiva. □

Teorema. Sea ϕ un morfismo de G sobre \bar{G} con núcleo K , entonces $G/K \cong \bar{G}$.

Demostración. Observemos el siguiente diagrama, recordemos que K es subgrupo normal.

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \pi \downarrow & \searrow \phi & \\ G/K & \xrightarrow{\psi} & \bar{G} \end{array}$$

Definimos a $\psi : G/K \rightarrow \bar{G}$ tal que $g \mapsto \phi(g)$.

- Primero verificaremos que ψ está bien definida:

Sea g_1, g_2 tales que $g_1 = g_2$, es decir, $g_2 = g_1k$ con $k \in K$. Queremos verificar que (En el contexto de G/K):

$$\phi(g_2) = \phi(g_1)$$

Pero sabemos que, por ser morfismo y por la definición de ψ :

$$\phi(g_2) = \phi(g_1k) = \phi(g_1)\phi(k) = \phi(g_1) \cdot e$$

Entonces $\phi(g_2) = \phi(g_1)$. Por lo tanto, ψ es consistente.

- Segundo, verificamos que ψ es un morfismo:

$$\psi(g_1K \cdot g_2K) = \psi(g_1g_2K) = \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

$$\psi(g_1K) \cdot \psi(g_2K) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$$

- Demostramos que ψ sea sobreyectiva:

Sea $\bar{g} \in \bar{G}$, ϕ es suprayectivo (por hipótesis): Por tanto $\exists g \in G$ tal que

$$\phi(g) = \bar{g}$$

Pero entonces

$$\psi(gK) = \phi(g) = \bar{g} \quad \text{por tanto} \quad \psi \text{ es suprayectiva.}$$

- Ahora por último, comprobaremos que sea inyectivo. Supongamos que $gK \in \text{Ker } \psi$, entonces (Por el teorema anterior):

$$\psi(gK) = e \quad \leftarrow \text{esto por def de Kernel}$$

$$\phi(g) = e \quad \leftarrow \text{esto por def de Kernel}$$

Por tanto $g \in \text{Ker } \phi$. Pero entonces $g = e$.

$$gK = K = \text{Ker } \psi$$

Por lo tanto ψ es inyectiva, ya que $K : \text{Ker } \psi$ siempre cumple que:

$$\psi(K) = e$$

En nuestro contexto, K es el "neutro" y es único, entonces, por el teorema anterior, ψ es inyectiva, y por lo tanto, $G/K \cong \bar{G}$. \square

Observación. Además de todo lo que puedo implicar los resultados anteriores, es importante ver la forma de atacar el problema, en pocas palabras, se puede resumir de manera compacta, que para la solución de estos, se necesita:

- Definir correctamente tus funciones entre los distintos conjuntos implicados en el problema.
- Verificar que sean morfismos de grupos.
- Relacionar correctamente las funciones construidas con tus hipótesis planteadas.

Ahora daremos la definición de un tipo de espacio de funciones, que sera útil en el desarrollo de las ideas abstractas de álgebra homologica y propias de este trabajo. En muchos problemas, puedes tener funciones definidas en un subconjunto U y quieres extender estas funciones a todo \mathbb{R} de una manera controlada y viceversa, por ello de su necesidad:

Definición 0.4.1. Definimos el espacio de Schwarz real como:

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \lim_{x \rightarrow \infty} |f^{(m)}(x)|(1+x^2)^n = 0 \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

También definimos unos conjuntos construidos a partir del mismo:

Si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto y $Z = \mathbb{R} - U = U^c$, entonces definimos

$$S(U) = \left\{ f \in S(\mathbb{R}) \mid f^{(m)}(x) = 0 \forall x \in Z \right\}$$

y definimos el cociente como:

$$S_Z(\mathbb{R}) = \frac{S(\mathbb{R})}{S(U)}.$$

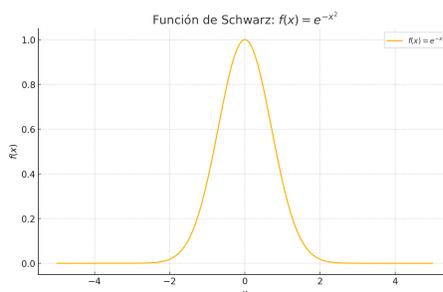


Figura 15: Ilustración de una función de Schwarz.

En si, el espacio $S(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones que decrecen rápidamente junto con todas sus derivadas y el espacio $S(U)$ contiene funciones del espacio de Schwartz que se anulan fuera de U , lo cual te permite considerar extensiones suaves y de rápido decrecimiento fuera del mismo.

Al restringir funciones del espacio de $S(\mathbb{R})$ a un subconjunto U , puedes estar interesado en cómo se comportan estas funciones localmente en U . El cociente $S_Z(\mathbb{R})$ puede ser útil en problemas donde necesitas extender funciones definidas en un subespacio a todo el espacio, o restringir funciones de todo el espacio a un subespacio. El cociente te permite tratar funciones que solo en U^c son equivalentes, simplificando el análisis de la función en U .

También por ejemplo, consideremos un problema donde necesitamos estudiar soluciones de una ecuación diferencial en toda la línea real, pero tenemos condiciones especiales, por ejemplo, puntos singulares en un conjunto abierto U . El cociente $S_Z(\mathbb{R})$ te permite agrupar soluciones que son equivalentes fuera de U , simplificando el análisis y permitiéndote concentrarte en el comportamiento global de las soluciones bajo las condiciones de equivalencia en el cociente. Podemos empezar formalizando las relaciones entre los distintos conjuntos, como:

$$S(U) \xrightarrow{i} S(\mathbb{R})$$

Donde i es la inclusión, ya que $S(U) \subset S(\mathbb{R})$, además es claro que i es **inyectiva**. Similarmente, podemos relacionar:

$$S(\mathbb{R}) \xrightarrow{p} S_Z(\mathbb{R}) = \frac{S(\mathbb{R})}{S(U)}.$$

Observación. Recordemos que como estos espacios de funciones, son espacios vectoriales y a su vez, grupos abelianos, p denota una relación directa de un grupo con una

estructura cociente dado un grupo subgrupo normal del mismo, por lo cual, como anteriormente vimos en el capítulo de teoría de grupos, esta función está bien definida, y es **sobreyectiva**, aunado a que por la naturaleza de i por ser **inyectiva**, tenemos $\frac{S(\mathbb{R})}{S(U)}$, entonces evidentemente el elemento neutro de este espacio es $S(U)$, por ser la estructura cociente, por lo cual $\text{im}(i)=\ker(p)$.

Todo lo anterior podemos compactarlo como una **sucesión exacta corta**, esto es una sucesión de la forma:

$$0 \rightarrow S(U) \xrightarrow{i} S(\mathbb{R}) \xrightarrow{p} S_Z(\mathbb{R}) \rightarrow 0$$

Esto significa lo mismo que lo anterior, ya que:

1. $\text{im}(0 \rightarrow S(U))=\ker(i)$
2. $\text{im}(i)=\ker(p)$
3. $\text{im}(p)=\ker(S_Z(\mathbb{R}) \rightarrow 0)$

Es evidente que el punto (1) se cumple debido a que i es inyectiva, y por lo tanto su kernel es 0, similarmente el punto (2) es obvio por todo lo anterior, además como p es sobre, y como $\ker(S_Z(\mathbb{R}) \rightarrow 0)$, es todo $S_Z(\mathbb{R})$, es directo, el punto (3). Todo esto permite transferir información de un espacio a otro y entender mejor sus interacciones de una manera muy compacta, a partir de la teoría de grupos. Por ejemplo, podemos buscar una función en $S_Z(\mathbb{R})$, que sea imagen, de algún elemento de $S(\mathbb{R})$, y por lo cual, restringirla a $S(U)$, y así resolviendo de una manera muy sofisticada, la pregunta de cuando podemos extender una función a un dominio más grande, al originalmente definido.

Observación. Afortunadamente, para nuestro trabajo, hay una manera en la cual, podemos ver de manera concreta elementos del cociente de estos espacios de funciones, dado por el siguiente teorema:

Teorema 0.4.1 (Lema de Borel). *Si $V = S(\mathbb{R})$ ó simplemente un espacio de funciones suaves, entonces:*

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow \mathbb{C}[[x]] \\ f &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

siendo Φ sobreyectiva y por tanto $\mathbb{C}[[x]] \cong V/\ker \Phi$, donde:

$$\begin{aligned} \ker \Phi &= \{f \in V \mid \Phi(f) = 0\} \\ &= \{f \in V \mid f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}\} := U \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathbb{C}[[x]] \cong V/U = W.$$

Podemos seguir intentado aterrizar todo de manera concreta, sin embargo, la abstracción nos ayudara a ver de manera más coherente, la necesidad de construir una teoría de la relación entre los grupos y sus elementos.

0.4.1. Sucesiones exactas de espacios vectoriales

Por lo tanto, podemos definir lo siguiente, de acuerdo a la necesidad vista anteriormente:

Definición 0.4.2. Un complejo de cadena C_* es una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

tal que:

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Notemos que:

$$\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker } \partial_n$$

Definición 0.4.3. Un complejo de cocadena es una sucesión

$$0 \xrightarrow{d_0} C^0 \xrightarrow{d_1} C^1 \xrightarrow{d_2} C^2 \xrightarrow{d_3} \cdots$$

tal que

$$d_{j+1} \circ d_j = 0$$

Notemos que:

$$\text{Im } d_j \subseteq \text{Ker } d_{j+1}$$

Observación. En nuestro contexto de trabajo $\{C_n\}$ y $\{C^j\}$ son espacios vectoriales. Los símbolos de derivadas parciales y diferenciales, son solamente convención, aunque viene motivado por la teoría de formas diferenciales, para tales temas motivados se puede verificar en [7].

Como se observa, estas nuevas definiciones, son la generalización y abstracción de los espacios anteriormente trabajados, de hecho, no se menciona ninguna propiedad de contención entre conjuntos o relación natural alguna entre los elementos de la cadena, solamente se tiene la relación entre las imágenes y kernel de las funciones, esto es muy relevante, ya que significa, que podemos tener espacios isomorfos a los mismos, con los cuales podamos obtener los mismos resultados, en pocas palabras, solo importan las funciones.

Por lo cual partiendo únicamente de las funciones, tenemos el siguiente teorema, que abstrae el caso particular antes mencionado:

Teorema 0.4.2. *Dada una sucesión exacta:*

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \rightarrow 0$$

definimos:

$$\begin{aligned} \bar{p} : \frac{V}{i(U)} &\rightarrow W \\ [v] &\mapsto p(v) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{V}{i(U)} \cong W.$$

Demostración. Primero verificaremos que \bar{p} está bien definida. Supongamos que:

$$[v_1] = [v_2]$$

es decir,

$$v_2 - v_1 \in i(U)$$

es decir, existe un $u \in U$ tal que

$$v_2 - v_1 = i(u)$$

por tanto

$$p(v_2 - v_1) = p(i(u))$$

pero como $i(U) \subseteq \ker p$, entonces

$$p(v_2 - v_1) = 0 \implies p(v_1) = p(v_2)$$

Lo cual concluye que está bien definida \bar{p} . Ahora tenemos que demostrar que \bar{p} es sobreyectiva e inyectiva.

Sea $w \in W$. Como $p : V \rightarrow W$ es sobre, existe $v \in V$ tal que

$$p(v) = w$$

por tanto, por definición,

$$\bar{p}([v]) = p(v) = w$$

entonces \bar{p} es sobre.

Ahora si $[v] \in \ker \bar{p}$. Entonces

$$\bar{p}([v]) = 0$$

$$p(v) = 0$$

como la sucesión es exacta, $\exists u \in U$ tal que

$$i(u) = v$$

por tanto, como $i(u) \in i(U)$

$$[i(u)] = [v] = [0]$$

entonces $\ker \bar{p} = \{0\}$, por tanto, \bar{p} es inyectiva, concluimos que entonces:

$$\frac{V}{i(U)} \cong W.$$

□

Ahora, desde un punto de vista más aterrizado, podríamos aplicar esto, a problemas específicos, como por ejemplo, objetos invariantes ante alguna transformación lineal, más específicamente, transformaciones de un espacio vectorial en sí mismo (rotaciones, traslaciones, reflexiones, operadores diferenciales etc.), a cada uno de los espacios y subespacios

antes construidos.

Supongamos como antes, que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \rightarrow 0$$

Y consideremos una transformación lineal E en si mismo, en cada espacio vectorial y además conmuta con cualquier otro operador lineal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow E & & \downarrow E & & \downarrow E \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Observación. Las sucesiones horizontales, son exactas, pero las sucesiones verticales no, sin embargo, existen ciertos subespacios y cocientes que pueden ser útiles para resultados relevantes acerca de los objetos invariantes, con los cuales podemos describir explícitamente la información entre los mismos, considerando los **grupos de cohomología** asociados a las **sucesiones verticales**:

Como:

$$H^j(C^*) = \frac{\ker d_{j+1}}{\operatorname{im} d_j}, \quad \text{en general}$$

y en particular $E = d_1$, definimos $(A \xrightarrow{E} A) := (E; A)$ por conveniencia, por lo que:

$$H^0(E; A) = \{a \in A \mid Ea = 0\} = A^E \quad (26)$$

$$H^1(E; A) = \frac{A}{EA} = A_E \quad (27)$$

Estos dos grupos de cohomología (definiremos mas adelante), son importantes debido a que con ellos, podremos encontrar una manera de extender elementos invariantes ante E , a todo el espacio. Por lo que, el desarrollo del álgebra homológica, para nuestro caso, es para usarlo como una herramienta realmente útil, para el comportamiento del dominio de objetos invariantes ante alguna transformación. También como anteriormente dijimos, $Ea = 0$ puede representar un problema de ecuaciones diferenciales, vemos aquí, donde es el potencial real de esta teoría, debido a que como mencionamos anteriormente, el cociente $\frac{A}{EA}$ nos ayudara a restringir funciones que difieren en ser **E-invariantes** en A , pero equivalentes en A^c . Podemos verlo y plantearlo de la siguiente manera:

1. Primero tomamos una clase de elementos que son equivalentes en U^c en pocas palabras $w \in W$, además exigimos que sea **E-invariante**, este seria elemento de $H^0(E; W)$.
2. Como p es sobre $\exists v \in V$ un elemento global del cual es imagen del mismo.
3. Entonces, observamos el comportamiento del elemento actuando con el operador E , dado que viene de un elemento global, debe ser $p(Ev) = Ep(v) = Ew = 0$, por lo que $Ev \in \ker p$
4. Concluyendo que como la sucesión es exacta, $\exists u \in U$ tal que $i(u) = Ev$.
5. Además sin perdida de generalidad, podemos observar tal elemento como una clase de equivalencia de elementos que **no son posiblemente E-invariante**, osea $[u] \in H^1(E; U)$, y así obteniendo una manera de como extender elementos en U , a elementos bien comportadas en todo V .

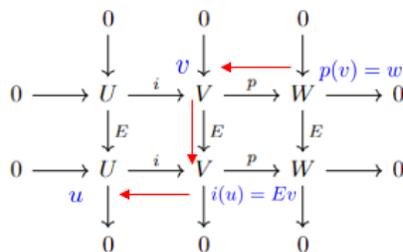


Figura 16: Ilustración del camino de la extensión de un elemento abstracto.

0.4.2. Homología y Cohomología de una sucesión exacta

La homología y cohomología no se limitan a buscar extensiones de funciones, aunque pueden estar relacionadas con esto en algunos contextos por ejemplo, el que hemos estado trabajando, pero en si cuando hablamos de homología y cohomología de espacios vectoriales, nos referimos a herramientas algebraicas que permiten estudiar la estructura de espacios topológicos o algebraicos de manera más profunda junto con las relaciones entre los mismos así como cuando revisamos el comportamiento del espacio ante transformaciones del mismo.

En este trabajo, el contexto de la homologia y cohomologia sera para formalizar todo lo anterior, osea, analizar y buscar una manera que podamos crear una sucesión exacta de espacios vectoriales, con la cual podamos hacer de manera mas abstracta y general las extensiones de funciones, entonces definimos:

Definición 0.4.4. Definimos los grupos de cohomología asociados a C^* como:

$$H^j(C^*) := \frac{\text{Ker } d_{j+1}}{\text{Im } d_j}$$

y similarmente:

Definición 0.4.5. Definimos los grupos de homología asociados a C_* como:

$$H_n(C_*) := \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

Observación. Desde el punto de vista abstracto ambas definiciones son análogas, solamente que tienen una motivación por detrás que puede referirse en [7].

Ahora necesitamos construir una sucesión exacta, que involucre a los elementos invariantes, como anteriormente mencionamos, por lo cual, como $H^0(E; A) \subseteq A$ tendríamos aparentemente la siguiente relación:

$$0 \rightarrow H^0(E; U) \rightarrow H^0(E; V) \rightarrow H^0(E; W) \xrightarrow{d} H^1(E; U) \dots$$

y similarmente, dada la estructura cociente antes definida:

$$\dots H^1(E; U) \rightarrow H^1(E; V) \rightarrow H^1(E; W) \rightarrow 0$$

Observación. Sabemos que estamos interesados en estudiar el espacio V^E . En pocas palabras que se cumpla, idealmente:

$$W^E \simeq V^E / U^E \tag{1}$$

En cuyo caso podemos entender V^E a partir de U^E y W^E , que en principio podrían ser más sencillos de estudiar. Ya que, a manera de un ejemplo concreto, elementos en V^E pudieran corresponder a soluciones a la ecuación:

$$Ev = 0 \quad (\text{Ecuación de Laplace})$$

Y también, si $v_1 \in V$. Podemos considerar la ecuación

$$Ev_0 = v_1 \quad (\text{Ecuación de Poisson}) \tag{2}$$

Donde la ecuación (2) tiene solución si y solo si

$$[v_1] = 0 \in V_E = V/EV$$

$$[v_1] = 0 \text{ si y solo si } v_1 = Ev_0 \text{ para algún } v_0 \in V$$

Sin embargo, (1) no siempre se cumple, entonces:

Pregunta: ¿Bajo qué condiciones se cumple (1)?

Respuesta: (1) se cumple si y solo si $d = 0$, donde

$$V^E \xrightarrow{d} U_E$$

Parece ser, que debería existir una relación entre las dos sucesiones para **completar su exactitud** (aunado al planteamiento anterior), para ello, primero debemos formalizar como es la relación entre cada uno de los grupos de cohomología y entonces desarrollar la relación entre las dos cadenas, por lo debemos tener el siguiente teorema:

Teorema 0.4.3. (Lema de la serpiente) Si la siguiente sucesión es exacta de manera horizontal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow E & & \downarrow E & & \downarrow E \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

entonces, la siguiente sucesión, en cada parte de la cocadena, es exacta:

$$0 \rightarrow H^0(E; U) \xrightarrow{i_*} H^0(E; V) \xrightarrow{p_*} H^0(E; W) \xrightarrow{d} H^1(E; U) \xrightarrow{i_*} H^1(E; V) \xrightarrow{p_*} H^1(E; W) \rightarrow 0$$

donde los operadores conmutan.

Demostración. Se tiene que demostrar que en cada parte de la sucesión, la imagen de cada transformación es igual al kernel de la siguiente transformación, en pocas palabras:

1. $\text{Ker } i_*|_{H^0(E; U)} = \{0\}$
2. $\text{Im } i_*|_{H^0(E; U)} = \text{Ker } p_*|_{H^0(E; V)}$
3. $\text{Im } i_*|_{H^1(E; U)} = \text{Ker } p_*|_{H^1(E; V)}$
4. $\text{Im } p_*|_{H^1(E; V)} = H^1(E; W)$
5. $\text{Im } p_*|_{H^0(E; V)} = \text{Ker } d|_{H^0(E; W)}$
6. $\text{Im } d|_{H^0(E; W)} = \text{Ker } i_*|_{H^1(E; U)}$

Por demostrar 1):

- Como i_* es simplemente la restricción de i en $H^0(E; U)$, si $u \in H^0(E; U)$ entonces sabemos por def. que $Eu = 0$, por tanto:

$$Ei(u) = i(Eu) = 0$$

y entonces $i(u) \in H^0(E; V)$. Entonces definimos:

$$i_* : H^0(E; U) \rightarrow H^0(E; V)$$

Tenemos entonces que i induce una función i_* , por tanto si:

$$i_*(u) = i(u) = 0$$

y como la sucesión $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ es exacta, entonces recordemos que:

$$\text{Ker } i|_{H^0(E; U)} = \text{Ker}(i_*)$$

entonces

$$\text{Ker } i_*|_{H^0(E; U)} = \{0\}$$

Obs. Esto es debido a que restringimos el dominio de $i|_{H^0(E;U)}$

Por demostrar 2):

- Como p_* es simplemente la restricción de p en $H^0(E;V)$, si $v \in \text{Im } i_*|_{H^0(E;U)}$ significa que $\exists u : H^0(E;U) \rightarrow i(u) = i_*(u) = v$, pero recordemos que $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ es exacta, entonces:

$$\text{Im } i = \text{Ker } p$$

Por tanto, para $i(u) = v \in V \Rightarrow p(i(u)) = 0$ y como $i_*(u) = i(u)$ entonces:

$$p(i_*(u)) = 0 \quad \text{y} \quad \text{como} \quad i_* : H^0(E;U) \rightarrow H^0(E;V)$$

entonces

$$p(i_*(u)) = p_*(i_*(u)) = 0$$

por tanto:

$$\text{Im } i_* \subseteq \text{Ker } p_*$$

- Ahora si $v \in \text{Ker } p_*$, entonces:

$$p_*(v) = 0$$

$$p(v) = 0$$

por tanto $v \in \text{Ker } p$, y como $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ es exacta entonces $\exists u \in U \rightarrow i(u) = v$.

Nota: Es necesario demostrar que $u \in H^0(E;U) \Rightarrow Eu = 0$.

Recordemos que $v \in \text{Ker } p_*$, entonces $v \in H^0(E;V)$ por tanto:

$$E(i(u)) = E(v) = i(Eu) = 0$$

Entonces $Eu \in \text{Ker } i$ y como $\text{Ker } i = \{0\}$, entonces $Eu = 0$, por tanto $u \in H^0(E;U)$, entonces $i(u) = i_*(u)$, por lo cual:

$$\text{Ker } p_* \subseteq \text{Im } i_*$$

concluyendo que por la doble contención:

$$\text{Im } i_*|_{H^0(E;U)} = \text{Ker } p_*|_{H^0(E;V)}$$

- **Observación.** Antes de demostrar 3) y 4), habría que ver si i_* y p_* sobre $H^1(E;U)$ y $H^1(E;V)$ respectivamente, están bien definidas:

$$i_* : H^1(E;U) \rightarrow H^1(E;V)$$

$$[u] \mapsto [i(u)]$$

Sean $u_1, u_2 \in U$ tal que

$$[u_1] = [u_2] \in H^1(E;U)$$

Entonces existe $\hat{u} \in EU$ tal que

$$u_2 - u_1 = \hat{u}$$

En otras palabras, existe un $\ddot{u} \in U$ tal que

$$\hat{u} = E\ddot{u} = u_2 - u_1$$

es decir

$$u_2 = u_1 + E\ddot{u}$$

para algún $\ddot{u} \in U$, entonces

$$i(u_2) - i(u_1) = i(E\ddot{u}) = Ei(\ddot{u}) = E\hat{v} \in EV$$

donde $\hat{v} = i(\ddot{u}) \in V$, por tanto:

$$[i(u_2)] - [i(u_1)] = [Ei(\ddot{u})] = [E\hat{v}] = [0]$$

concluyendo que

$$[i(u_2)] = [i(u_1)]$$

Entonces i_* está bien definida.

Nota. Demostrar que p_* está bien definida es el mismo proceso.

Por demostrar 3):

- Si $[v] \in \text{Ker } p_*$ significa que $p_*([v]) = [p(v)] = 0$.

Como $[p(v)] \in H^1(E; W)$ entonces $p(v) \in EW$, por tanto $\exists w \in W \rightarrow Ew = p(v)$ y como p es sobre entonces $\exists \ddot{v} \in V$ tal que $p(\ddot{v}) = w$.

Por tanto si $p(\ddot{v}) = w$ entonces $Ep(\ddot{v}) = p(v)$, lo cual conlleva que:

$$p(v - E\ddot{v}) = 0$$

Es claro que $v - E\ddot{v} \in \text{Ker } p$, y como $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ es exacta $\exists u \in V \rightarrow i(u) = v - E\ddot{v}$, donde $u \in U$. Entonces:

$$[i(u)] = [v - E\ddot{v}] = [v] - [E\ddot{v}]$$

como $[E\ddot{v}] = 0$, es decir

$$[i(u)] = [v] = i_*([u])$$

entonces $[v] \in \text{Im } i_*$, por tanto $\text{Ker } p_* \subseteq \text{Im } i_*$.

- Ahora si $[i(u)] \in \text{Im } i_* = H^1(E; V)$ donde $[u] \in H^1(E; U)$, entonces en ambos casos:

$$i(u) \in \text{Im } i \text{ para algùn } u \in U$$

Recordemos que $\text{Im } i = \text{Ker } p$, por tanto:

$$p(i(u)) = 0$$

por tanto

$$[p(i(u))] = [0] = 0$$

entonces $[i(u)] \in \text{Ker } p_*$, por tanto $\text{Im } i_* \subseteq \text{Ker } p_*$.

Concluyendo que

$$\text{Im } i_* = \text{Ker } p_*$$

Por demostrar 4):

- Si $[w] \in \text{Im } p_*$ significa que $\exists [v] \in H^1(E; V)$:

$$p_*([v]) = [w] \implies p(v) = w + \ddot{w} \quad \text{donde } \ddot{w} \in EW$$

donde $\ddot{w} = E\hat{w}$ para algùn $\hat{w} \in W$. Ahora recordemos que p es sobre, por tanto

$$\forall w \in W \quad \exists v \in V \rightarrow p(v) = w$$

por tanto tenemos $[E\hat{w}] = 0$ y que $p(v) = w \implies [p(v)] = [w]$.

Entonces $p_*([v]) = [p(v)] = [w]$ concluyendo

$$\text{Im } p_* = H^1(E; W).$$

Por demostrar 5):

Primero tenemos que definir la función d :

$$d : H^0(E; W) \longrightarrow H^1(E; U)$$

$$w \longmapsto [u]$$

dada de la siguiente manera:

- Sea $w \in H^0(E; W)$, es decir,

$$w \in W \quad \text{y} \quad Ew = 0$$

Como $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $p(v) = w$.

Por tanto,

$$p(Ev) = Ep(v) = Ew = 0$$

se sigue que existe un único $u \in U$ tal que (esto es, $Ev \in \text{Ker } p \Rightarrow Ev \in \text{Im } i$):

$$i(u) = Ev$$

Definimos entonces, como $u \in U$, entonces sin pérdida de generalidad:

$$d(w) = [u] \in H^1(E; U)$$

Observación. La función d se basa en el planteamiento inicial de como extender funciones en el contexto **E-invariante**.

- Ahora si $w \in \text{Im } p_*$, $\exists v \in H^0(E; V)$ tal que (Vamos a empatar nuestro problema con la definición de d):

$$p_*(v) = w$$

pero como $w \in W$, entonces $p(v) = p_*(v)$, además

$$Ev = 0$$

por ello $Ep(v) = p(Ev) = Ew = 0$, por lo tanto $Ev \in \text{Ker } p$, sabemos que $\text{Ker } p = \text{Im } i$ entonces $\exists u \in U$ tal que:

$$i(u) = Ev = 0$$

y como i es inyectiva entonces (y es una transformación lineal):

$$i(u) = i(0) = 0 \implies u = 0$$

por tanto

$$d(w) = [u] = 0 \implies w \in \text{Ker } d$$

concluyendo que $\text{Im } p_* \subseteq \text{Ker } d$

- Si $w \in \text{Ker } d$ significa que

$$d(w) = [u] = 0$$

por tanto como $[u] = 0$ entonces $u \in EU$, es decir, $\exists \ddot{u} \in U$ tal que:

$$E\ddot{u} = u$$

Ahora, como $w \in H^0(E; W)$ y $w \in W$, tenemos que $\exists v \in V$ tal que:

$$p(v) = w$$

y además $Ep(v) = p(Ev) = Ew = 0$, ya que $w \in H^0(E; W)$.

Ahora, como $u = E\ddot{u}$ y $Ev \in \text{Ker } p$, entonces (ya que $\text{Ker } p = \text{Im } i$):

$$i(u) = Ev$$

$$i(E\ddot{u}) = Ev \implies E(v - i(\ddot{u})) = 0$$

por tanto

$$\ddot{v} = v - i(\ddot{u}) \in H^0(E; V), \text{ entonces :}$$

$$p_*(\ddot{v}) = p(v - i(\ddot{u}))$$

$$= p(v) - p(i(\ddot{u}))$$

Como $p(i(\ddot{u})) = 0$ entonces:

$$p(\ddot{v}) = p(v) = w \in \text{Im } p_*$$

por tanto

$$\text{Ker } d \subseteq \text{Im } p_*$$

concluyendo entonces $\text{Ker } d = \text{Im } p_*$

Por demostrar 6): Recordemos cómo está definida d :

$$d : H^0(E; W) \longrightarrow H^1(E; U)$$

$$w \longmapsto [u]$$

dado de la siguiente manera:

- Sea $w \in H^0(E; W)$, es decir

$$w \in W \quad \text{y} \quad Ew = 0$$

Como $w \in W$, $\exists v \in V$ tal que

$$p(v) = w$$

Por tanto

$$p(Ev) = Ep(v) = Ew = 0$$

Como $p(Ev) = 0 \implies Ev \in \text{Ker } p \implies \text{Ker } p = \text{Im } i \implies Ev = i(u)$ para algún $u \in U$, definimos entonces, como $u \in U$, tenemos

$$d(w) = [u] \in H^1(E; U)$$

- Por tanto, si $[u] \in \text{Im } d \in H^1(E; U)$ significa que $u \in U$, donde por definición de d :

$$i(u) = Ev$$

Por lo cual, por definición de i_* conseguimos que:

$$[i(u)] = i_*([u]) = [Ev] = 0$$

entonces

$$[u] \in \text{Ker } i_*, \quad \text{por lo cual} \quad \text{Im } d \subseteq \text{Ker } i_*$$

- Ahora, si $[u] \in \text{Ker } i_*$, significa que:

$$i_*([u]) = [i(u)] = 0$$

Entonces $i(u) \in Ev$, por lo cual $\exists v \in V$ tal que

$$i(u) = Ev$$

Y como $\text{Im } i = \text{Ker } p$, tenemos que

$$p(i(u)) = p(Ev) = Ep(v) = 0$$

Entonces, como p es sobre, significa que $p(v) = w$, por lo cual $[u] \in \text{Im } d$, concluyendo que

$$\text{Ker } i_* \subseteq \text{Im } d \Rightarrow \text{Im } d = \text{Ker } i_*|_{H^1(E;U)}$$

por lo que, la siguiente sucesión, en cada parte de la cocadena, es exacta:

$$0 \rightarrow H^0(E; U) \xrightarrow{i_*} H^0(E; V) \xrightarrow{p_*} H^0(E; W) \xrightarrow{d} H^1(E; U) \xrightarrow{i_*} H^1(E; V) \xrightarrow{p_*} H^1(E; W) \rightarrow 0$$

□

También podemos tener múltiples transformaciones lineales, cabe de recalcar que esto, es un problema común en física, ya que como sabemos, podemos tener modelos físicos, en los que impliquen rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc. Por lo cual, siempre resulta interesante saber, los elementos que sean invariante ante todas estas transformaciones de manera múltiple:

Teorema 0.4.4. *Tenemos las siguientes sucesiones:*

$$\begin{aligned} A^* &:= 0 \xrightarrow{d_0} A^0 \xrightarrow{d_1} A^1 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_n} A^n \rightarrow 0 \\ B^* &:= 0 \xrightarrow{d_0} B^0 \xrightarrow{d_1} B^1 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_n} B^n \rightarrow 0 \\ C^* &:= 0 \xrightarrow{d_0} C^0 \xrightarrow{d_1} C^1 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_n} C^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde para cada n , la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow A^n \xrightarrow{i} B^n \xrightarrow{p} C^n \rightarrow 0$$

entonces si:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{i} & B^0 & \xrightarrow{p} & C^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 \\
 0 & \longrightarrow & A^1 & \xrightarrow{i} & B^1 & \xrightarrow{p} & C^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow d_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d_n \\
 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{i} & B^n & \xrightarrow{p} & C^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

La siguiente sucesión de grupos de cohomología es exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(A^*) & \xrightarrow{i_*} & H^0(B^*) & \xrightarrow{p_*} & H^0(C^*) \\
 & & & & & & \swarrow d_{0,1} \\
 & & H^1(A^*) & \xrightarrow{i_*} & H^1(B^*) & \xrightarrow{p_*} & H^1(C^*) \\
 & & & & & & \swarrow d_{1,2} \\
 & & & & \dots & & \\
 & & H^n(A^*) & \xrightarrow{i_*} & H^n(B^*) & \xrightarrow{p_*} & H^n(C^*) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \swarrow d_{n-1,n} & &
 \end{array}$$

Demostración. Recordemos que en general

$$H^j(A^*) = \frac{\text{Ker } d_{j+1}}{\text{Im } d_j}$$

Obs. Es claro que para $0 < k < n$ todos los grupos de cohomología son "parecidos". Por tanto es suficiente demostrar que:

1. $\text{Im } i_*|_{H^k(A^*)} = \text{Ker } p_*|_{H^k(B^*)}$
2. $\text{Im } p_*|_{H^k(B^*)} = \text{Ker } d_{k,k+1}|_{H^k(C^*)}$
3. $\text{Im } d_{k,k+1}|_{H^k(C^*)} = \text{Ker } i_*|_{H^{k+1}(A^*)}$

Obs. Implícitamente ya demostramos, por el teorema anterior que:

- $\text{Ker } i_*|_{H^0(A^*)} = (0)$
- $\text{Im } i_*|_{H^0(A^*)} = \text{Ker } p_*|_{H^0(B^*)}$
- $\text{Im } i_*|_{H^n(A^*)} = \text{Ker } p_*|_{H^n(B^*)}$
- $\text{Im } p_*|_{H^n(B^*)} = H^n(C^*)$

Observación. Antes de demostrar 1, 2 y 3, tenemos que ver si i_* y p_* están bien definidas:

- Como en general para $0 \leq k \leq n$

$$H^k(A^*) = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k-1}}$$

son cocientes de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} i_* : H^k(A^*) &\longrightarrow H^k(B^*) \\ [a^k] &\longrightarrow [i(a^k)] \end{aligned}$$

Sean $a_1^k, a_2^k \in A^k$ tal que:

$$[a_1^k] = [a_2^k] \in H^k(A^*)$$

entonces existe:

$$\tilde{a}^k \in \text{Im } d_k(A^{k-1})$$

tal que:

$$a_2^k - a_1^k = \tilde{a}^k$$

En otras palabras, existe un $\hat{a}^{k-1} \in A^{k-1}$ tal que:

$$\tilde{a}^k = d_k(\hat{a}^{k-1}) = a_2^k - a_1^k$$

es decir:

$$a_2^k = a_1^k + d_k(\hat{a}^{k-1})$$

para algún $\hat{a}^{k-1} \in A^{k-1}$, entonces:

$$i(a_2^k) - i(a_1^k) = i(d_k(\hat{a}^{k-1})) = d_k(i(\hat{a}^{k-1})) = d_k(\hat{b}^{k-1})$$

donde $d_k(\hat{b}^{k-1}) \in \text{Im } d_k(B^{k-1})$ y además $\hat{b}^{k-1} := i(\hat{a}^{k-1}) \in B^{k-1}$, por tanto:

$$[i(a_2^k)] - [i(a_1^k)] = [d_k(\hat{b}^{k-1})] = [0]$$

ya que $\{d_k(\hat{b}^{k-1})\} \in H^k(B^*)$, concluyendo que:

$$[i(a_2^k)] = [i(a_1^k)]$$

Entonces i_* está bien definida.

Nota: Demostrar que p_* está bien definida, es el mismo proceso.

Para demostrar 1)

- Si $[b^k] \in \text{Ker } p_*$ significa que $p_*([b^k]) = [p(b^k)] = 0$

Como $[p(b^k)] \in H^k(C^*)$, entonces $p(b^k) \in \text{Im } d_k(C^{k-1})$, por tanto $\exists c^{k-1} \in C^{k-1}$ tal que $d_k(c^{k-1}) = p(b^k)$ y como p es sobre entonces $\exists \hat{b}^{k-1} \in B^{k-1}$ tal que $p(\hat{b}^{k-1}) = c^{k-1}$

Por tanto si $p(\hat{b}^{k-1}) = c^{k-1}$ entonces $d_k(p(\hat{b}^{k-1})) = p(b^k)$ lo cual conlleva que:

$$p(b^k - d_k(\hat{b}^{k-1})) = 0$$

Es claro que $b^k - d_k(\hat{b}^{k-1}) \in \text{Ker } p$, y como la sucesión es exacta $\exists i(a^k) \in B^k$ tal que $i(a^k) = b^k - d_k(\hat{b}^{k-1})$, donde $a^k \in A^k$. Entonces

$$\begin{aligned} [i(a^k)] &= [b^k - d_k(\hat{b}^{k-1})] \\ &= [b^k] - [d_k(\hat{b}^{k-1})] \\ &= [b^k] \quad (\text{ya que } [d_k(\hat{b}^{k-1})] = [0]) \\ [i(a^k)] &= [b^k] = i_*([a^k]) \end{aligned}$$

es decir

$$[b^k] \in \text{Im } i_*, \text{ por tanto } \text{Ker } p_*|_{H^k(B^*)} \subseteq \text{Im } i_*|_{H^k(A^*)}$$

- Ahora si $[i(a^k)] \in \text{Im } i_*$ donde $[a^k] \in H^k(A^*)$, entonces en ambos casos:

$$i(a^k) \in \text{Im } i \text{ para algún } a^k \in A^k$$

Recordemos que $\text{Im } i = \text{Ker } p$, por tanto $p(i(a^k)) = 0$

entonces

$$[p(i(a^k))] = [0]$$

esto significa que $[i(a^k)] \in \text{Ker } p_*$, por tanto $\text{Im } i_*|_{H^k(A^*)} \subseteq \text{Ker } p_*|_{H^k(B^*)}$, concluyendo que

$$\text{Im } i_* = \text{Ker } p_*$$

Para demostrar 2)

- Primero tenemos que definir la función $d_{k,k+1}$:

$$\begin{aligned} d_{k,k+1} : H^k(C^*) &\longrightarrow H^{k+1}(A^*) \\ [c^k] &\longrightarrow [a^{k+1}] \end{aligned}$$

dado de la siguiente manera:

Sea $[c^k] \in H^k(C^*)$, es decir,

$$c^k \in C^k \quad \text{y} \quad d_{k+1}(c^k) = 0$$

Como $c^k \in C^k$, existe $b^k \in B^k$ tal que:

$$p(b^k) = c^k$$

Por tanto,

$$p(d_{k+1}(b^k)) = d_{k+1}(p(b^k)) = d_{k+1}(c^k) = 0$$

Se sigue que existe un único $a^{k+1} \in A^{k+1}$, ya que la sucesión es exacta como $d_{k+1}(b^k) \in \text{Ker } p$, entonces:

$$i(a^{k+1}) = d_{k+1}(b^k)$$

Definimos entonces, como $a^{k+1} \in A^{k+1}$, sin pérdida de generalidad:

$$d([c^k]) = [a^{k+1}] \in H^{k+1}(A^*)$$

- Ahora si $[c^k] \in \text{Im } p_*$, $\exists [b^k] \in H^k(B^*)$ tal que (tratamos de empatar con la def. de $d_{k,k+1}$)

$$p_*([b^k]) = [c^k] \implies p(b^k) = c^k$$

ademas

$$d_{k+1}(b^k) = 0 \quad \text{ya que} \quad [b^k] \in H^k(B^*)$$

por ello

$$d_{k+1}(p(b^k)) = p(d_{k+1}(b^k)) = d_{k+1}(c^k) = 0,$$

por tanto $d_{k+1}(b^k) \in \text{Ker } p$, y como $\text{Ker } p = \text{Im } i$, entonces $\exists a^{k+1} \in A^{k+1}$ tal que

$$i(a^{k+1}) = d_{k+1}(b^k) = 0$$

y como i es inyectiva (y es una transformación lineal):

$$i(a^{k+1}) = i(0) = 0 \implies a^{k+1} = 0$$

Por tanto, ya que empata con la def. de $d_{k,k+1}$ tenemos que:

$$d_{k,k+1}([c^k]) = [a^{k+1}] = [0]$$

lo cual significa

$$[c^k] \in \text{Ker } d_{k,k+1} \implies \text{Im } p_* \subseteq \text{Ker } d_{k,k+1}$$

- Ahora si $[c^k] \in \text{Ker } d_{k,k+1}$, significa que

$$d_{k,k+1}([c^k]) = [a^{k+1}] = [0]$$

como $[a^{k+1}] = [0]$, entonces $a^{k+1} \in \text{Im } d_{k+1}(A^k)$, es decir $\exists \hat{a}^k \in A^k$ tal que

$$d_{k+1}(\hat{a}^k) = a^{k+1}$$

ya que

$$H^{k+1}(A^*) = \frac{\text{Ker } d_{k+2}}{\text{Im } d_{k+1}}$$

Ahora como $[c^k] \in H^k(C^*)$, tenemos que $\exists b^k \in B^k$ tal que:

$$p(b^k) = c^k$$

y además

$$d_{k+1}(p(b^k)) = p(d_{k+1}(b^k)) = d_{k+1}(c^k) = 0$$

Ahora como $a^{k+1} = d_{k+1}(\hat{a}^k)$ y $d_{k+1}(b^k) \in \text{Ker } p$, entonces

$$i(a^{k+1}) = d_{k+1}(b^k)$$

$$i(d_{k+1}(\hat{a}^k)) = d_{k+1}(b^k)$$

$$\implies d_{k+1}(b^k - i(\hat{a}^k)) = 0$$

por tanto

$$\hat{b}^k = b^k - i(\hat{a}^k) \in \text{Ker } d_{k+1}|_{B^k}$$

y entonces

$$[\hat{b}^k] \in H^k(B^*) \text{ por lo cual}$$

tenemos que:

$$p_*([\hat{b}^k]) = [p(b^k - i(\hat{a}^k))] = [p(b^k) - p(i(\hat{a}^k))]$$

donde

$$p(i(\hat{a}^k)) = 0$$

entonces

$$p_*([\hat{b}^k]) = [p(b^k)]$$

por tanto

$$\text{Ker } d_{k,k+1} \subseteq \text{Im } p_*, \text{ concluyendo entonces}$$

$$\text{Ker } d_{k,k+1} = \text{Im } p_*$$

Para demostrar 2)

- Recordemos que

$$\begin{aligned} d_{k,k+1} : H^k(C^*) &\longrightarrow H^{k+1}(A^*) \\ [c^k] &\longrightarrow [a^{k+1}] \end{aligned}$$

Si $[a^{k+1}] \in \text{Im } d_{k,k+1}$, significa que $a^{k+1} \in A^{k+1}$ y por la def de $d_{k,k+1}$:

$$i(a^{k+1}) = d_{k+1}(b^k)$$

entonces por la def de i_* , tenemos que

$$[i(a^{k+1})] = i_*([a^{k+1}]) = [d_{k+1}(b^k)] = 0$$

ya que $\text{Im}(i_*) \in H^{k+1}(B^*)$, por lo cual $[a^{k+1}] \in \text{Ker } i_*$, teniendo que:

$$\text{Im } d_{k,k+1} \subseteq \text{Ker } i_*$$

- Ahora si $[a^{k+1}] \in \text{Ker } i_*$, significa que:

$$i_*([a^{k+1}]) = [i(a^{k+1})] = 0$$

entonces $i(a^{k+1}) \in d_{k+1}(B^k)$, por lo cual $\exists b^k \in B^k$ tal que

$$i(a^{k+1}) = d_{k+1}(b^k)$$

y como $\text{Im } i = \text{Ker } p$, tenemos que:

$$p(i(a^{k+1})) = p(d_{k+1}(b^k)) = d_{k+1}(p(b^k)) = 0$$

y como p es sobre, significa que

$$p(b^k) = c^k \implies [p(b^k)] = [c^k]$$

entonces $[a^{k+1}] \in \text{Im } d_{k,k+1}$ y $\text{Ker } i_* \subseteq \text{Im } d_{k,k+1}$, concluyendo:

$$\text{Im } d_{k,k+1}|_{H^k(C^*)} = \text{Ker } i_*|_{H^{k+1}(A^*)}$$

Así mismo terminando la demostración que la sucesión de grupos de cohomología es exacta.

□

Observación. Podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Como se comporta el espacio dual de cada espacio anteriormente trabajado?, para ello supongamos como antes, que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \rightarrow 0$$

Entonces siguiendo la definición de un espacio dual, es directo que la sucesión de espacios duales es exacta:

$$0 \rightarrow W' \xrightarrow{p^*} V' \xrightarrow{i^*} U' \rightarrow 0$$

Por ejemplo, para demostrar que p^* es inyectiva Sea $\lambda \in W'$ tal que

$$p^* \lambda = 0$$

Entonces, para todo $v \in V$ tenemos que

$$(p^* \lambda)v = 0$$

es decir $\lambda(pv) = 0$. Pero p es sobreyectiva. Por tanto:

Para todo $w \in W$, existe un $v \in V$ tal que $w = pv$. Por tanto

$$\lambda w = \lambda pv = 0$$

Como $\lambda w = 0$ para todo $w \in W$ concluimos que $\lambda = 0$. De esta misma manera, podemos demostrar que i^* es sobreyectiva.

Observación. Por lo cual, incluyendo el teorema de Hahn-Banach [10], cualquier resultado hecho de homología y cohomología, es valido incluso para los duales a los espacios

que hemos estado trabajando. Esto es importante, ya que si por ejemplo, estamos trabajando con ecuaciones diferenciales, estudiar su espacio de soluciones es igual a estudiar el espacio dual de funcionales (distribuciones).

Para ver un poco mas a detalle el uso que le daremos de homologia y cohomologia en los espacios duales, valdrá la pena ver los siguientes espacios, y resultados (de acuerdo a lo anterior visto):

$$\tilde{U} = EU = \{Eu \mid u \in U\}$$

$$U_E = \frac{U}{\tilde{U}}$$

Entonces podemos definir:

$$\left\{ \lambda : U \rightarrow \mathbb{C} \mid \lambda(\tilde{u}) = 0 \forall \tilde{u} \in \tilde{U} \right\} = [U']^E$$

$$\left\{ \tilde{\lambda} : \frac{U}{\tilde{U}} \rightarrow \mathbb{C} \right\} = [U_E]'$$

Observación. En un principio, los elementos de $[U']^E$ y $[U_E]'$ podrían parecer muy distintos, sin embargo:

Si observamos a detalle en $[U']^E$, sean $u_1, u_2 \in U$ decimos que

$$u_1 \sim u_2$$

Si $\lambda(u_1) = \lambda(u_2)$ para todo $\lambda \in [U']^E$ donde $E\lambda = 0$, es decir,

$$\lambda(u_1 - u_2) = 0$$

Por otro lado sean $u_1, u_2 \in U$, si los vemos desde el punto de vista de U_E , tenemos que:

$$[u_1] = [u_2]$$

entonces

$$u_2 = u_1 + E\tilde{u}$$

por tanto para $\lambda \in [U']^E$

$$\lambda(u_2) = \lambda(u_1) + \lambda(E\tilde{u})$$

$$\lambda(u_2) = \lambda(u_1)$$

es decir,

$$u_1 \sim u_2$$

Resulta interesante ver que es menos ambiguo trabajar con $\lambda \in [U']^E$ que en U_E , por lo que debería haber una conexión entre $[U']^E$ y $[U_E]'$, este hecho es importante, ya que

además es una forma de poder trabajar con clases de equivalencia de manera mas concreta y menos abstracta, por lo cual:

Teorema 0.4.5. *En el contexto de espacios vectoriales y sus duales, tenemos que:*

$$[U']^E \cong [U_E]'$$

Demostración. Definimos:

$$\Phi : [U_E]' \longrightarrow [U']^E$$

$$\Psi : [U']^E \longrightarrow [U_E]'$$

por las siguientes fórmulas:

$$\Phi(\tilde{\lambda})(u) := \tilde{\lambda}([u])$$

$$\Psi(\lambda)([u]) := \lambda(u)$$

Verificamos que ambas funciones están bien definidas:

- Para Φ , dado $\tilde{\lambda} \in [U_E]'$, notemos que (por definición):

$$\begin{aligned} [E\Phi(\tilde{\lambda})](u) &= \Phi(\tilde{\lambda})(-Eu) \\ &= -\Phi(\tilde{\lambda})(Eu) \\ &= -\tilde{\lambda}([Eu]) \\ &= -\tilde{\lambda}([0]) = 0 \quad (\text{Por ser funcional lineal}). \end{aligned}$$

Como u era arbitrario, concluimos que $\Phi(\tilde{\lambda}) \in [U']^E$.

- Similarmente para Ψ , dado $\lambda \in [U']^E$, sabemos que si $[u_1] = [u_2]$ entonces:

$$u_2 = u_1 + \tilde{u}, \quad \text{con} \quad \tilde{u} \in EU = \tilde{U}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \lambda(u_2) &= \lambda(u_1) + \lambda(\tilde{u}) \\ &= \lambda(u_1) + \lambda(E\tilde{w}) \quad \text{con} \quad \tilde{w} \in U \\ &= \lambda(u_1) + (-E\lambda)(\tilde{w}) \\ &= \lambda(u_1) \end{aligned}$$

Es claro entonces, que ambas funciones están bien definidas. Ahora solo queda verificar que son inversas una de la otra:

$$\begin{aligned} [\Psi \circ \Phi](\tilde{\lambda})([u]) &= \Psi(\Phi(\tilde{\lambda}))([u]) \\ &= \Phi(\tilde{\lambda})(u) \\ &= \tilde{\lambda}([u]) \end{aligned}$$

Como $[u] \in U_E$ era arbitrario, entonces:

$$[\Psi \circ \Phi](\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} = \text{Id}(\tilde{\lambda})$$

Como $\tilde{\lambda} \in (U_E)'$ era arbitrario, concluimos que

$$\Psi \circ \Phi = \text{Id}.$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} [\Phi \circ \Psi](\lambda)(u) &= \Phi(\Psi(\lambda))(u) \\ &= \Psi(\lambda)([u]) \\ &= \lambda(u) \end{aligned}$$

Donde $u \in U$ era arbitrario, concluimos que

$$[\Phi \circ \Psi](\lambda) = \text{Id}(\lambda)$$

y como $\lambda \in (U')^E$ era arbitrario, concluimos que

$$\Phi \circ \Psi = \text{Id}.$$

□

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis de manera previa, exploraremos la estructura y propiedades del grupo proyectivo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ y sus subgrupos, como en [11], enfocándonos en su acción natural sobre el espacio proyectivo considerado como una variedad diferenciable, recordando todo lo anteriormente construido y definido.

1.1. El grupo proyectivo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ y su acción natural en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

El espacio proyectivo, recordemos que dotado de su estructura diferenciable, se descompone en cartas locales, esto permite un análisis detallado de la acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$. Uno de los aspectos más destacados de esta acción es su transitividad. Esta propiedad es fundamental, ya que garantiza que el grupo actúa de manera efectiva sobre todo el espacio proyectivo.

Tenemos entonces a $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ y subgrupos del mismo:

$$M = \left\{ m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \{\mathbb{R} - 0\} = \mathbb{R}^* \right\}$$

$$N = \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bar{N} = \left\{ \bar{n}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

donde $P = MN \subset G$, se llama el grupo parabólico. Además definimos:

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y entonces es natural que:

$$P \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \quad \text{por} \quad g \mapsto [0 : 1]g$$

Es claro que me entrega este isomorfismo, todo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ya que:

$$[0 : 1] \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [0 : 1] \quad y \quad [0 : 1]w_0n(x) = [1 : x]$$

$$[0 : 1] \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [0 : 1] \quad y \quad [0 : 1]\bar{n}(y) = [y : 1]$$

Ahora dado lo anterior, podemos encontrar una relación entre los distintos subgrupos, supongamos que $y \neq 0$ y $x = \frac{1}{y}$ sea el cambio de coordenadas en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, de \mathbb{P}_0^1 a \mathbb{P}_1^1 , entonces, por las propiedades de las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$[0 : 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = [y : 1] = \left[\frac{1}{x} : 1 \right] = [1 : x] = [0 : 1]\bar{n}(y)$$

Similarmente se observa:

$$[0 : 1]w_0n(x) = [0 : 1] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [1 : x]$$

Entonces

$$[0 : 1]\bar{n}(y) = [0 : 1]w_0n(x)$$

Por lo tanto, bajo la relación de equivalencia en la estructura cociente $P \backslash \text{PGL}_2(\mathbb{R})$, tenemos $[\bar{n}(y)] = [w_0n(x)]$, sabemos entonces que:

$$\bar{n}(y) = p w_0n(x) \quad \text{para } p \in P = MN \subset \text{PGL}_2(\mathbb{R})$$

Intuimos que como $p \in P$, entonces esta diferencia debe ser de la forma

$$p = m(a)n(b) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Entonces desarrollando (aplicando propiedades del proyectivo a conveniencia):

$$\begin{aligned} p &= \bar{n}(y)(n(x))^{-1}(w_0)^{-1} \\ &= \bar{n}(1/x)n(-x)w_0^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_0 = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} x^2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p &= \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = m(x^2)n(1/x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\bar{n}(1/x) = m(x^2)n(1/x)w_0n(x).$$

Lo cual era lo que buscábamos.

1.2. Construcción de un haz lineal \mathcal{L}_ν sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y la acción de $PGL_2(\mathbb{R})$ sobre el mismo.

Sera crucial observar cómo el grupo $PGL_2(\mathbb{R})$ actúa sobre un espacio de funciones, denotado por I_ν , ya que la acción natural del grupo sobre el espacio proyectivo, en paralelo con una acción distinta en este espacio de funciones, induce la estructura de un haz vectorial también llamado haz lineal sobre el espacio proyectivo. Además, esta construcción introduce transformaciones naturales entre las cartas coordenadas del haz lineal, que están inducidas por la acción del grupo en el espacio proyectivo antes observada:

Entonces, definimos el siguiente espacio vectorial de funciones:

$$I_\nu = \{f : PGL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ son suaves, } f(pg) = \sigma_\nu(p)f(g), p \in P, g \in PGL_2(\mathbb{R})\}$$

donde dada ν complejo definimos:

$$\sigma_\nu(m(\lambda)n(x)) = |\lambda|^{\nu+1/2}$$

Y entonces dado $G = PGL_2(\mathbb{R})$ definimos la acción $G \curvearrowright I_\nu$ como:

$$[\pi(g)f](x) := f(xg) \quad x, g \in PGL_2(\mathbb{R})$$

Similarmente definimos la acción π^* en el dual $G \curvearrowright I_\nu^*$, para $\lambda \in I_\nu^*$ de manera natural, para ello antes, definimos:

Definición 1.2.1. Sea G un grupo que actúa sobre dos espacios X, Y , tal que si $G \curvearrowright X, G \curvearrowright Y$ y $\Phi : X \rightarrow Y$, entonces decimos que Φ es G -equivariante si:

$$\Phi(gx) = g\Phi(x).$$

Definición 1.2.2. Si $G \curvearrowright Y$, se dice que la acción es trivial, si:

$$g \cdot y = y.$$

Observación. En este trabajo, se utilizara la acción trivial y que Φ es G -equivariante, tal que:

Si $\Phi : (\lambda, v) \mapsto \lambda(v)$ entonces:

$$\Phi(g\lambda, gv) = g\Phi(\lambda, v) = \Phi(\lambda, v)$$

Sea $w = gv$, entonces $v = g^{-1}w$ por tanto

$$\Phi(g\lambda, w) = \Phi(\lambda, g^{-1}w)$$

Por ello:

$$[g \cdot \lambda](w) = \lambda(g^{-1}w)$$

Asi definiendo que:

$$[\pi^*(g)\lambda](f) := \lambda((\pi(g))^{-1}f)$$

Recordemos que $[w_0n(x)]$ y $[\bar{n}(y)]$ nos ayudaba a mapear cada una de las cartas coordenadas, respectivamente, entonces será conveniente definir las siguientes funciones, para poder describir I_ν como **secciones** desde el punto de vista de geometría diferencial (*haces lineales*):

- Dado $f \in I_\nu$, definimos convenientemente, dado los subgrupos anteriores:

$$[T^0f](x_0) := f(w_0n(x_0))$$

$$[T^1f](x_1) := f(\bar{n}(x_1))$$

Observación. Automáticamente o naturalmente se definen los cambios de coordenadas, dada la estructura de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

- Si $x_1 \neq 0$ y si tomamos $x_0 = \frac{1}{x_1}$, entonces:

$$[T^\infty f](x_1) := f\left(\bar{n}\left(\frac{1}{x_0}\right)\right) = f\left(m(x_0^2)n\left(\frac{1}{x_0}\right)w_0n(x_0)\right)$$

Aplicando la definición de I_ν , encontramos los cambios de coordenadas entre las dos funciones antes definidas:

$$T^\infty f\left(\frac{1}{x_0}\right) = |x_0|^{2\nu+1/2} \cdot T^0 f(x_0)$$

Por lo tanto desarrollando en ambos casos, obtenemos:

$$T^\infty f(x_1) = |x_0|^{2\nu+1} \cdot T^0 f(x_0) \tag{1.1}$$

$$T^0 f(x_0) = |x_1|^{2\nu+1} \cdot T^\infty f(x_1) \tag{1.2}$$

Entonces podemos definir formalmente el haz lineal $\mathcal{L}_\nu = (\mathbf{L}, \pi)$, donde:

$$\mathbf{L} = U_0 \cup U_1 / \sim$$

$$\pi : \mathbf{L} \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ como } \pi([p], y) = [p] \text{ (dependiendo el caso)}$$

donde la relación de equivalencia, es simplemente cuando $\tilde{p} \in U_1 \cap U_2$, y su correspondiente atlas:

$$U_0 = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}\} \cong \mathbb{P}_0^1 \times \mathbb{C}$$

$$U_1 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}\} \cong \mathbb{P}_1^1 \times \mathbb{C}$$

los cambios de coordenadas entre las dos distintas cartas vienen definidos por 1.1 y 1.2, aunado a los cambios de coordenadas naturales del espacio proyectivo.

Observación. Sea $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$ como antes y notemos el comportamiento ante la acción del subgrupo $n(x)$:

$$G \curvearrowright \mathcal{L}_\nu \quad \text{donde} \quad (\pi(g)f)(x) := f(xg)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_0(x_0) &= (x_0, T^0 f(x_0)) \quad \text{en} \quad \Gamma(U_0, \mathcal{L}_\nu) \\ &\Rightarrow T^0 (\pi(n(z))f)(x_0) = f(w_0 n(x_0) n(z)) \\ &= f \left(w_0 \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = f(w_0 n(x_0 + z)) \\ &= f(w_0 n(x_0 + z)) = T^0 f(x_0 + z) \end{aligned}$$

Entonces, notamos que la acción de G sobre \mathcal{L}_ν es simplemente una traslación, lo cual resulta interesante, ya que la acción del mismo subgrupo $n(x)$ sobre el espacio proyectivo, como anteriormente vimos, también es una traslación, por lo cual, independientemente de la representación del grupo, el comportamiento de la acción siempre debe ser equivalente, de hecho, este comportamiento es aun mas interesante al verlo ante cambios de coordenadas, ya que:

La acción del grupo pero sobre la otra carta en $\sigma_1(x_1)$, si $x_1 = 1/x_0$:

$$\begin{aligned} T^\infty (\pi(n(z))f)(x_1) &= |x_0|^{2\nu+1} \cdot T^0 (\pi(n(z))f)(x_0) \\ &= |x_0|^{2\nu+1} \cdot T^0 f(x_0 + z) \\ &= |x_0|^{2\nu+1} \cdot |x_0 + z|^{-(2\nu+1)} \cdot T^\infty f \left(\frac{1}{x_0 + z} \right) \\ &= |1 + x_1 z|^{-(2\nu+1)} \cdot T^\infty f \left(\frac{x_1}{1 + z x_1} \right) \end{aligned}$$

Recordemos que cuando se trabaja ante cambios de coordenadas, estamos en la intersección $U_0 \cap U_1$, por lo que, los **infinitos** en U_1 , corresponden a puntos en el origen de U_0 , y viceversa, todo esto es debido a la geometría heredada de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, entonces si $\Rightarrow 1 + z x_1 = 0 \Rightarrow x_0 = -z$

Como:

$$\begin{aligned} &|1 + x_1 z|^{-(2\nu+1)} \cdot T^\infty f \left(\frac{x_1}{1 + z x_1} \right) \\ &= |x_0|^{2\nu+1} \cdot T^\infty f(x_0 + z) \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$= |z|^{2\nu+1} \cdot T^0 f(0)$$

Lo cual era lo esperado, aunado a lo anterior, esto lo podemos ver aun mas claro con el siguiente ejemplo, como $PGL_2(\mathbb{R})$ es un grupo creado a partir de $GL_2(\mathbb{R})$, muchas de sus propiedades y subgrupos, se pueden usar, en este caso la descomposición de $SL_2(\mathbb{R})$, formalmente llamada descomposición de Iwasawa:

Ejemplo 13. Sea:

$$K = \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Entonces

$$G = PK \quad y \quad P \cap K = \langle e \rangle$$

Definimos, por conveniencia, el vector esférico: $f_\theta : I_\nu$ como el único elemento tal que:

$$f_\theta(k(\theta)) = 1 \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}$$

Observación: En si esta descomposición, dice que cualquier elementos del $SL_2(\mathbb{R})$, se puede descomponer como un escalamiento, una traslación y una rotación (como anteriormente se había mencionado), por lo que:

$$w_0 n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x_0 \end{pmatrix} = pk(\theta) = m(\lambda)n(y)k(\theta)$$

Por lo tanto, en el cociente $P \backslash PGL_2(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$[0 : 1] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x_0 \end{pmatrix} = [0 : 1] \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$[1 : x_0] = [\sin \theta : \cos \theta]$$

Por lo cual utilizando las propiedades las coordenadas homogéneas:

$$\implies x_0 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \implies (x_0)^2 + 1 = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\implies \sin^2 \theta = \frac{1}{x_0^2 + 1} \implies \sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}}$$

Similarmente como: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\implies \cos \theta = \pm \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}}$$

Tomando la raíz positiva (como trabajamos en el proyectivo es el mismo elemento):

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}} \quad , \quad \cos \theta = \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}}$$

Observamos que:

$$w_0 n(x_0) (k(\theta))^{-1} = m(\lambda) n(y)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_0 \\ 0 & 1+x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & y\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por las propiedades de $PGL_2(\mathbb{R})$, podemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x_0^2} & -\frac{x_0}{1+x_0^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & y\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \lambda = \frac{1}{1+x_0^2}$$

Por lo cual por la definición de I_ν :

$$T^0 f_\theta(x_0) = f_\theta(w_0 n(x_0)) = f_\theta(m(\lambda) n(y) k(\theta)) = \left(\sqrt{1+x_0^2} \right)^{-(2\nu+1)}$$

Similarmente con el cambio de coordenadas:

$$T^\infty f_\theta(x_1) = \left(\sqrt{1+x_1^2} \right)^{-(2\nu+1)}$$

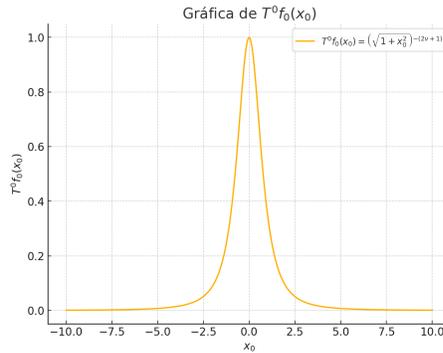


Figura 1.1: Ilustración de la función obtenida.

Es directo observar, que las propiedades antes obtenidas de manera general, aplican a este caso concreto.

1.3. Secciones invariantes de $\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$ ante el álgebra de Lie $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{R})$

Nuestro interés principal radica en identificar las secciones del haz lineal que permanecen invariantes bajo la acción del grupo $PGL_2(\mathbb{R})$. Este problema se puede reformular

elegantemente en términos del álgebra de Lie asociada al grupo, buscando aquellos elementos del haz que se anulan bajo la acción de los operadores diferenciales correspondientes, de esta manera, este análisis conduce al estudio del espacio de soluciones de estos operadores diferenciales).

De igual manera, esto se vería como:

$$\text{si } n(z)\sigma = \sigma \Leftrightarrow \frac{d}{dz}n(z)\sigma = \frac{d}{dz}\sigma \stackrel{!}{=} 0$$

Observación. Notaremos que con estas ideas, lo más razonable sería pensar esto como un operador de $\mathfrak{pgl}_2(\mathbb{R})$, sobre la acción del grupo:

Recordemos que por ser un grupo de Lie:

$$E = \left. \frac{d}{dz}n(z) \right|_{z=0} = \left. \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{z=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, el operador $E \in \mathfrak{pgl}_2(\mathbb{R})$, representado sobre la primera carta U_0 debe tener la forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dz}T^0 f(x_0 + z) \right|_{z=0} &= T^0 f'(x_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0} T^0 f(x_0) \end{aligned}$$

Entonces, la representación de E :

$$E_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$$

Similarmente, este operador sobre la otra carta, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\pi(z)T^\infty f(x_1)) &= \frac{d}{dz} (|x_0|^{2\nu+1} (\pi(z)T^0 f(x_0))) \\ &= |x_0|^{2\nu+1} \frac{\partial}{\partial x_0} T^0 f(x_0) \end{aligned}$$

Realizando cambio de coordenadas, si $x_0 = \frac{1}{x_1}$:

$$= |x_1|^{-2\nu+1} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_1} (|x_1|^{2\nu+1} T^\infty f(x_1))$$

Desarrollando:

$$= -x_1 \left(2\nu + 1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) T^\infty f(x_1)$$

Por lo cual en U_1 , E toma la siguiente representación:

$$E_1 = -x_1 \left(2\nu + 1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

Entonces, para estudiar que secciones son invariantes ante E , resulta conveniente estudiarlo, desde el punto de vista de los funcionales lineales, en pocas palabras el espacio dual. En analogía de la acción de $PGL_2(\mathbb{R})$ en I_ν , buscaremos los funcionales en I_ν^* tal que, $n(z)\lambda = \lambda \quad \forall z \in \mathbb{R}$ ó $E \cdot \lambda = 0$, esto mismo en otras palabras:

Sea I_ν como antes definido, entonces el dual I_ν^* bajo ciertas restricciones:

$$[I_\nu^*]^N = \{\lambda : I_\nu \longrightarrow \mathbb{C} \mid n(z)\lambda = \lambda \quad \forall z \in \mathbb{R}\}$$

ó equivalentemente

$$[I_\nu^*]^E = \{\lambda : I_\nu \longrightarrow \mathbb{C} \mid E \cdot \lambda = 0\}$$

donde:

$$[n(z)\lambda](f) \implies \lambda(n(z)^{-1}f) = \lambda(n(-z)f)$$

entonces, tienen que satisfacer:

$$\begin{aligned} [E\lambda](f) &= \left. \frac{d}{dz}(n(z)\lambda)(f) \right|_{z=0} \\ &= \left. \frac{d}{dz}\lambda(n(-z)f) \right|_{z=0} = -\lambda(Ef) \\ [E\lambda](f) &= -\lambda(Ef) \end{aligned}$$

Sera difícil, a primera vista, imaginar que forma tendrán los funcionales lineales, sin embargo, una primera solución fácil a este problema, es motivado por la delta de Dirac, ya que tienen propiedades que son vistas en mucho tipo de funcionales utilizados:

Definición 1.3.1. Sea $\delta_e \in V^*$ donde $V^* = I_\nu^*$ mediante:

$$\delta_e f := f(e)$$

Entonces podemos ver que:

$$\begin{aligned} [\pi^*(n(z))\delta_e](f) &= \delta_e(\pi(n(z))^{-1}f) \\ &= [\pi(n(z))^{-1}f](e) \\ &= f(e \cdot n(z)^{-1}) = f(n(-z) \cdot e) \\ &= f(e) \\ &= \delta_e(f) \end{aligned}$$

Lo cual resulta interesante, ya que obtenemos resultados muy esperados a los utilizados regularmente en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Observación. Podría parecer ser fácil buscar los funcionales que son solución a nuestro problema, sin embargo, no lo es, para enfocar y facilitar aún más nuestro estudio, restringiremos nuestra atención al espacio de funciones de **Schwarz reales**, que son particularmente relevantes en este contexto por sus propiedades analíticas y su comportamiento

bajo transformaciones del grupo. Además de que obtendremos **funcionales acotados**, y además las funciones de Schwarz, encajan más con el comportamiento global de las secciones en $\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$, por la geometría heredada de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, por lo que definimos:

Definición 1.3.2. El espacio de las distribuciones templadas en \mathbb{R} como:

$$S^*(\mathbb{R}) = [S(\mathbb{R})]^*$$

El espacio de las distribuciones templadas en U como:

$$S^*(U) = [S(U)]^*$$

Y el espacio de las distribuciones templadas en \mathbb{R} con soporte en Z como:

$$S_Z^*(\mathbb{R}) = [S_Z(\mathbb{R})]^*$$

Observación. Por lo cual desde ahora, todo nuestro problema, está basado únicamente en funciones de Schwarz, entonces, tenemos el siguiente teorema **altamente no-trivial**:

Teorema 1.3.1. Si $T : [S(\mathbb{R})]^*$, y D es la derivada con respecto a su coordenada, tal que:

$$DT = 0$$

entonces si $k \in \mathbb{R}$:

$$T = kT_1$$

es decir:

$$T(f) = k \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x) dx$$

En pocas palabras, los funcionales que necesitamos son únicos y estos tienen la forma de la "delta de Dirac".

Por lo que, supongamos que $f \in \Gamma(U_0, \mathcal{L}_\nu)$ es de Schwarz, entonces:

$$J_\nu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} T^0 f(x_0) dx_0$$

además sabemos que con respecto a la primer carta U_0 , por el teorema anterior, E debe satisfacer que:

$$J_\nu(Ef) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T^0 f(x_0)}{\partial x_0} dx_0 = 0$$

Ahora su comportamiento, al realizar un cambio de coordenadas, tenemos que:

$$x_0 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow dx_0 = -\frac{1}{x_1^2} dx_1,$$

entonces:

$$J_\nu(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x_1|^{2\nu+1}}{x_1^2} T^\infty f(x_1) dx_1$$

$$J_\nu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu-1} T^\infty f(x_1) dx_1$$

A primera vista, si $Re(2\nu - 1) < 0$, entonces tendremos problemas, pero es claro que si $Re(\nu) \gg 0$, entonces $J_\nu(f)$ esta bien definida, por tanto para ese caso, cuando $J_\nu(Ef) = 0$? en el sistema coordenadas U_1 , para ello:

$$\begin{aligned} J_\nu(Ef) &= - \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu-1} \left(x_1 \left(2\nu + 1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right) f(x_1) dx_1 \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu} (2\nu + 1) \operatorname{sgn}(x_1) f(x_1) dx_1 - \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu+1} \operatorname{sgn}(x_1) f'(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$= - [|x_1|^{2\nu+1} \operatorname{sgn}(x_1) f(x_1)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu+1} \operatorname{sgn}(x_1) f'(x_1) dx_1 - \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu+1} \operatorname{sgn}(x_1) f'(x_1) dx_1$$

Por propiedad de la función $\operatorname{sgn}(x_1)$:

$$= - [|x_1|^{2\nu+1} \operatorname{sgn}(x_1) f(x_1)]_{-\infty}^{\infty} = [|x_1|^{2\nu+1} f(x_1)]_{-\infty}^0 - [|x_1|^{2\nu+1} f(x_1)]_0^{\infty} = 0$$

Lo cual era lo esperado, ya que desde el punto de vista del teorema anterior, este valor, es independiente del sistema coordenado utilizado. Por lo tanto, restringiendo el problema fuera de la singularidad, buscamos un $\lambda \in [\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)]^*$ global tal que:

1. $E\lambda = 0$
2. $\lambda(\sigma) = J_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu-1} g_1(x_1) dx_1$ si $\sigma \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{L}_\nu)$

donde $\lambda(\sigma)$ esté bien definida, ya que en si, nos interesa que independientemente de los cambios de coordenadas, funcione adecuadamente, por ello se trabaja en la intersección.

Observación. De manera mas general, esto se puede formalizar con particiones de la unidad, si:

$$\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$$

entonces existen $\rho_0, \rho_1 \in C^\infty(U, \mathcal{L}_\nu)$, que forman una partición de la unidad subordinada, tal que, $\rho_0 + \rho_1 = 1$ donde $\rho_0 \cdot \sigma \in \Gamma(U_0, \mathcal{L}_\nu)$ y $\rho_1 \cdot \sigma \in \Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$, entonces:

$$\rho_0 \cdot \sigma + \rho_1 \cdot \sigma = \sigma$$

Por lo cual buscamos un $\lambda \in [\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)]^*$, que satisface (1) y (2), además tiene la forma:

$$\lambda(\sigma) = \lambda(\rho_0 \cdot \sigma) + \lambda(\rho_1 \cdot \sigma)$$

Observación. Existe una estructura algebraica moderna, llamada gavilla, la cual también es una manera aun mas abstracta de generalizar lo anterior.

Capítulo 2

Problemas y contradicciones con las secciones invariantes en $\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)$

2.1. Condiciones aparentemente suficientes para las secciones invariantes

¿Realmente son suficientes las condiciones anteriormente impuestas? tal que, si $\lambda \in [\Gamma(U, \mathcal{L}_\nu)]^*$:

1. $E\lambda = 0$
2. $\lambda(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{2\nu-1} g_1(x_1) dx_1$ si $\sigma \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{L}_\nu)$

Observación. Tenemos el siguiente ejemplo si $\nu = -1$, y sea $h \in S(\mathbb{R})$ tal que $h \equiv 1$ en una región alrededor de $x_1 = 0$.

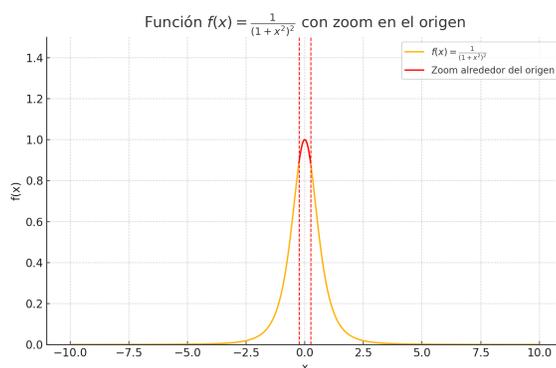


Figura 2.1: Ilustración de una función h .

Esta función auxiliar nos ayudará a ver una contradicción en las condiciones antes impuestas (1) y (2). Además, sea $g_1(x_1) := x_1 h(x_1) \implies g_1(x_1) \in S(\mathbb{R})$ y por lo tanto

existe una sección σ , tal que $\sigma(x_1) = (x_1, x_1 h(x_1))$. Esta sección debería encaja con la definición antes impuesta sobre $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$, aparentemente, todo debería tener "sentido". Viendo que:

$$\begin{aligned} Eg_1(x_1) &= -x_1 \left(2v + 1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) g_1(x_1) \quad \text{como } v = -1 \\ &= -x_1 \left(-1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) x_1 h(x_1) \\ &= \left(x_1 - x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) x_1 h(x_1) \\ &= -x_1^3 h'(x_1) \end{aligned}$$

Observación. Como $h'(x_1) \equiv 0$ alrededor del origen, por definición de la misma, tenemos que encaja $Eg_1(x_1)$ con la definición de $S(\mathbb{R})$. Por lo cual, se deben satisfacer (1) y (2), inmediatamente, pero:

$$\begin{aligned} \lambda(Eg_1(x_1)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{-3} (-x_1)^3 h'(x_1) dx_1 \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(x_1) h'(x_1) dx_1 \\ &= - \int_0^{\infty} h'(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^0 h'(x_1) dx_1 = - [h(x_1)]_{x_1=0}^{x_1 \rightarrow \infty} + [h(x_1)]_{x_1=-\infty}^{x_1 \rightarrow 0} \\ &= -(0 - 1) + (1 - 0) = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto es una **contradicción** ya que:

$$\lambda(Eg_1(x_1)) = 2 \neq 0$$

Observación. ¿Qué significa el error-contradicción anterior?

Supongamos lo siguiente, si la condición (1) y (2) fueran ciertas, significa que las distribuciones en $[\Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{L}_\nu)]^*$ se pueden extender a todo $S(\mathbb{R})$, lo cual también nos dice que existe una distribución λ global. Pero, realmente por el ejemplo anterior, **no se puede** a todo $S(\mathbb{R})$. Nuestra siguiente tarea será observar y encontrar en qué subconjunto de $S(\mathbb{R})$ podemos extender la existencia de la distribución de λ . Además un recordatorio, nuestra solución falla a la hora de hacer el cambio de coordenadas, por que en U_0 , si funciona adecuadamente, pero al realizar los cambios de coordenadas hacia U_1 , es donde surgen los problemas, por ello, el subconjunto a encontrar donde esto no suceda, sera un subconjunto de U_1 .

2.2. Comprensión de $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$ con una sucesión exacta corta

Finalmente, aplicaremos herramientas del álgebra homológica para estudiar estos invariantes, proporcionando una caracterización detallada de las secciones invariantes y su relación con la estructura algebraica del grupo y su álgebra de Lie. Este enfoque nos permite profundizar en la comprensión de la interacción entre la geometría del espacio proyectivo, la teoría de Lie y las técnicas modernas del álgebra homológica, para ello **valdría la pena recapitular los preliminares**, ya que vamos a romper el espacio $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$, en subconjuntos mas sencillos de entender, dados por la definición de las funciones Schwarz:

$$\begin{aligned} V &\longleftrightarrow S(\mathbb{R}) = \Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu) \\ U &\longleftrightarrow S(\tilde{U}) \\ W &\longleftrightarrow S_Z(\mathbb{R}) = \frac{V}{U} \end{aligned}$$

Observación. Solamente se utilizo \tilde{U} por un pequeño abuso de notación, evidentemente, es la misma definición, solo que se cambio ese símbolo.

Recordemos que todas relaciones y propiedades, entre lo anterior, podemos compactarlo como una **sucesión exacta corta**, esto es una sucesión de la forma:

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \rightarrow 0$$

Similarmente, la sucesión de espacios duales es exacta:

$$0 \rightarrow W' \xrightarrow{p^*} V' \xrightarrow{i^*} U' \rightarrow 0$$

Nuestro objetivo, es **encontrar donde están nuestros elementos invariantes**, por lo que, consideremos E , y recordemos que:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow E & & \downarrow E & & \downarrow E \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{p} & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow i(u) = Ev & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Figura 2.2: Ilustración del camino de la extensión de un elemento abstracto.

1. Primero tomamos una clase de elementos que son equivalentes en U^c en pocas palabras $w \in W$, además exigimos que sea **E-invariante**, este seria elemento de $H^0(E; W)$.
2. Como p es sobre $\exists v \in V$ un elemento global del cual es imagen del mismo.

3. Entonces, observamos el comportamiento del elemento actuando con el operador E , dado que viene de un elemento global, debe ser $p(Ev) = Ep(v) = Ew = 0$, por lo que $Ev \in \ker p$
4. Concluyendo que como la sucesión es exacta, $\exists u \in U$ tal que $i(u) = Ev$.
5. Además sin pérdida de generalidad, podemos observar tal elemento como una clase de equivalencia de elementos que **no son posiblemente E-invariante**, osea $[u] \in H^1(E; U)$, y así obteniendo una manera de como extender elementos en U , a elementos bien comportadas en todo V .

Entonces, recordemos por el lema de Borel:

$$W \cong \mathbb{C}[[x]] = \tilde{W}$$

$$[f(x)] \mapsto \bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces si $E = -x(2\nu + 1 + x \frac{\partial}{\partial x})$ tenemos que:

$$-E\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2\nu + 1 + n) x^{n+1} \stackrel{!}{=} 0$$

Igualamos abruptamente a 0, por las funciones que queremos identificar, entonces:

1. Si $(2\nu + 1 + n) \neq 0 \Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow \bar{W}^E = \langle 0 \rangle$
2. Si $(2\nu + 1 + n) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bar{W}^E = \langle x^n \rangle$

En otras palabras por (2) y recordando la función auxiliar $h(x)$, el espacio W^E es generado por $\langle [x^n h(x)] \rangle$, por tanto $x^n h(x) \in V$ donde $-Ef(x) = x^{n+2} h'(x)$, es claro que $g(x) = -Ef(x) \in U$ por definición.

Por lo cual si $\mu \in U'$, entonces, recordando que E conmuta:

$$\langle \mu, Ef(x) \rangle = \langle E\mu, f(x) \rangle = -\mu(Ef(x))$$

donde:

$$-\mu(Ef(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu+1} x^{n+2} h'(x) dx = 1 - (-1)^n$$

Por tanto:

- Si n es par: $-\mu(Ef(x)) = 0$
- Si n es impar: $-\mu(Ef(x)) = 2$

Observación. Donde nuestro problema no tiene solución se denominan **obstrucciones**, es una definición mas fuerte que singularidad o polo. Esto puede ser visto mas detallado con homología, además ayuda demostrar la unicidad de la solución.

Capítulo 3

Solución al problema con Álgebra Homologica en $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$

3.1. Homología y Cohomología en $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$

Si recordamos la sucesión exacta anterior, entonces la homología de tal sucesión:

$$0 \rightarrow H_1(E; U) \xrightarrow{i_*} H_1(E; V) \xrightarrow{p_*} H_1(E; W) \xrightarrow{\partial} H_0(E; U) \xrightarrow{i_*} H_0(E; V) \xrightarrow{p_*} H_0(E; W) \rightarrow 0$$

Y los grupos de cohomología de los espacios duales:

$$0 \rightarrow H^0(E; W') \xrightarrow{p^*} H^0(E; V') \xrightarrow{i^*} H^0(E; U') \xrightarrow{d} H^1(E; W') \xrightarrow{p^*} H^1(E; V') \xrightarrow{i^*} H^1(E; U') \rightarrow 0$$

Observación. Lo que nos gustaría específicamente, sería los elementos del kernel en la siguiente parte de la cocadena:

$$\dots \rightarrow H^0(E; U') \xrightarrow{d} H^1(E; W') \rightarrow \dots$$

Entonces, revisando a detalle, si:

$$\begin{aligned} d : H^0(E; U') &\longrightarrow H^1(E; W') \\ \mu &\longmapsto [s] \end{aligned}$$

Significa que:

$$\begin{aligned} \mu \in H^0(E; U') &\text{ es decir} \\ \mu \in U' \quad \text{y} \quad (E\mu)(f) &= 0 \quad \forall f \in U \\ \text{Como } \mu \in U', \exists \lambda \in V' &\text{ tal que} \\ i^*(\lambda) &= \mu \end{aligned}$$

Por tanto;

$$i^*(E\lambda) = Ei^*(\lambda) = E\mu = 0$$

entonces como la sucesión dual es exacta:

$$\exists s \in W' \text{ tal que}$$

$$p^*(s) = E\lambda$$

definiendo, entonces

$$d(\mu) = [s] \in H^1(E; W') = W'/EW'$$

Por lo cual si:

$$d\mu \in H^1(E; W) \text{ buscamos, para algún } g(x) \in H_1(E; W)$$

$$\Phi : H^1(E; W') \longrightarrow (H_1(E; W))'$$

$$d\mu \longmapsto s$$

donde

$$\Phi(d\mu)(g(x)) = s(g(x))$$

A su vez esto nos induce el siguiente isomorfismo:

Teorema 3.1.1. *Sea*

$$\Phi : H^1(E; W') \longrightarrow (H_1(E; W))'$$

$$[s] = d\mu \longmapsto s$$

y

$$\Psi : (H_1(E; W))' \longrightarrow H^1(E; W')$$

$$s \longmapsto [s]$$

Se induce el siguiente isomorfismo:

$$H^1(E; W') \cong (H_1(E; W))'.$$

Demostración. Si resolvemos el problema dual a este, en pocas palabras:

$$\Phi^* : W^E \longrightarrow [(W')_E]'$$

y

$$\Psi^* : [(W')_E]' \longrightarrow W^E$$

y como $[\tilde{W}']^E \cong [\tilde{W}_E]'$ donde $\tilde{W} = W'$, por el teorema 0.4.5, tenemos que:

$$H^1(E; W') \cong (H_1(E; W))'.$$

Nota. Recordemos que dualizar mantiene los isomorfismos. □

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \Phi(d\mu)([g(x)]) &:= s([g(x)]) \\
 &= s(p(g(x))) \\
 &= [p^*(s)](g(x)) \\
 &= [E\lambda](g(x)) \\
 &= -\lambda(E(g(x)))
 \end{aligned}$$

y con ello, si $\lambda(E(g(x))) = 0$ significa que

$$\Phi(d(\mu))([g(x)]) = 0$$

y como $[W']_E \cong [W^E]'$, entonces:

$$d(\mu) = 0$$

Por tanto, $\mu \in \ker d$ entonces $\exists \lambda \in H^0(E, V')$ tal que $i^*(\lambda) = \mu$. Entonces, logramos saber cuándo sí y cuándo no puedo extender mis distribuciones, y cumplir todas las condiciones impuestas, además demuestra la unicidad de la solución. ■

3.2. Extensión meromorfa de las distribuciones en ν

Dado todo el contexto anterior que tenemos:

Si $\operatorname{Re}(\nu) \gg 0$ y $f(x) \in U$ entonces para $\mu \in (U')^E$, con $k \in \mathbb{R}$:

$$J_\nu(f(x)) = \mu(f(x)) = k \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} f(x) dx$$

Observación. ¿Cómo sabemos que la distribución funciona incluso en 0?

Tenemos que específicamente la expresión $|x|^{2\nu-1}$ es simplemente polinomio, por lo cual:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{mx^{m-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = 0$$

ya que $h'(x) \equiv 0$ alrededor del 0.

Entonces podemos suponer que $\exists \lambda \in (V')^E$ que $\lambda|_U = \mu$, por tanto, para $\lambda \in (V')^E$ y $g(x) \in V$, tenemos:

$$\lambda(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} g(x) dx$$

Si:

$$E_1 = x \left(2\nu + 1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

notemos que:

$$\lambda(Eg(x)) = 0 \quad \forall g(x) \in V$$

De antemano, sabemos que para funciones de la forma:

$$g_k(x) = x^k h(x)$$

donde $h \equiv 1$ en una vecindad alrededor del 0.

Donde:

$$\lambda(Eg_k(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} [Eg_k(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} [(2\nu + 1 + k)x^{k+1}h(x) + x^{k+2}h'(x)] dx$$

entonces como

$$\lambda(Eg_k(x)) \stackrel{!}{=} 0 \implies \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} [Eg_k(x)] dx = 0$$

Por tanto:

$$-(2\nu + 1 + k) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} x^{k+1} h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} x^{k+2} h'(x) dx$$

$$-(2\nu + 1 + k)\lambda(g_{k+1}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} x^{k+2} h'(x) dx$$

Definimos

$$f_k(x) = x^k h'(x) \implies f_k \in U \quad \text{por tanto:}$$

$$-(2\nu + 1 + k)\lambda(g_{k+1}(x)) = \mu(f_{k+2}(x))$$

$$\lambda(g_{k+1}(x)) = -\frac{\mu(f_{k+2}(x))}{(2\nu + 1 + k)} = J_\nu(g_{k+1}(x))$$

Nota: Lo cual es una extensión meromorfa de λ en todo \mathbb{C} .

$$\text{Sea } \phi_k(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} x^{k+2} h'(x) dx$$

Además podría parecer en un principio que la expresión $2\nu + 1 + k$, debe causar un polo a λ , sin embargo:

Si hacemos el siguiente cambio de variable $2\nu - 1 = -k - 2$, entonces al integrar:

$$\phi_k(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-k-2} x^{k+2} h'(x) dx = -h(0) + (-1)^k h(0) = -1 + (-1)^k$$

Observación. En pocas palabras, los polos se eliminan cuando k es par, el resultado obtenido anteriormente con Algebra homologica, aparece en la extensión meromorfa, una intersección bastante interesante, entre dos ramas de la matematicas.

3.3. Análisis de las obstrucciones y singularidades en $\Gamma(U_1, \mathcal{L}_\nu)$

En la década de 1950, Alexandre Grothendieck expandió el uso del álgebra homológica en la geometría algebraica, aplicando estas ideas en su teoría de haces y cohomología en esquemas. Grothendieck desarrolló herramientas como los funtores derivados y la cohomología de haces, que se volvieron fundamentales para el análisis de obstrucciones en geometría algebraica.

En nuestro problema, la identificación de obstrucciones juega un papel clave, ya que estas se presentan cuando intentamos extender soluciones o construir estructuras coherentes en espacios complicados. El álgebra homológica, además de proporcionar un marco de referencia distinto, al que teníamos de las singularidades, este nos ayuda a asegurar donde **realmente** están las obstrucciones a nuestro problema.

Como vimos anteriormente, por Álgebra homológica, si $(2\nu + 1 + n) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, donde gráficamente, para los valores impares, tenemos obstrucciones:



Figura 3.1: Obstrucciones y singularidades del problema.

Esto es un hecho realmente interesante, ya que lo que estamos viendo por homología y cohomología, es que realmente, para valores $\text{Re}(\nu) \leq 0$ distinto a los impares, no son una obstrucción a nuestro problema, lo cual es un cambio completo de paradigma, porque desde un principio, se observan esos problemas, sin embargo, no lo es, y es por ello el poderío de la homología y cohomología, el problema está con nuestras soluciones, no con el espacio en sí. Ahora con esto, podemos plantear de manera oficial, cuáles son las soluciones a nuestro problema de ecuaciones diferenciales en cada uno de los subespacios.

Para encontrar la base que genera a $[W']^E$, sabemos en un principio que siempre δ_e es solución a nuestro problema, ahora sea ν fijo y sea $n \in \mathbb{N}$ y recordemos que:

$$E\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2\nu + 1 + n)x^{n+1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$2\nu + 1 + n = 0$$

$$2\nu + 1 = -n$$

Sea $f \in \tilde{W}$ arbitraria:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

y notemos que:

$$\begin{aligned} Ex^m &= [2\nu + 1 + m]x^{m+1} \\ &= [m - n]x^{m+1} \end{aligned}$$

si $m \neq n$, entonces:

$$E \frac{x^m}{m - n} = x^{m+1}$$

Buscamos:

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

tal que:

$$Eg(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (m - n) x^{m+1}$$

Sea "lo mas parecido a a_n ", en otras palabras, queremos que:

$$b_m (m - n) = a_{m+1}$$

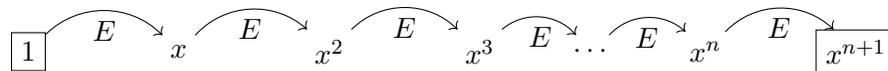
por lo que, sea

$$g(x) = \sum_{m \neq n} \frac{a_{m+1}}{m - n} x^m$$

entonces

$$\begin{aligned} Eg(x) &= \sum_{m \neq n} a_{m+1} x^{m+1} \frac{(m - n)}{(m - n)} \\ &= \sum_{m \neq n} a_{m+1} x^{m+1} \end{aligned}$$

En si lo que estamos viendo, es que el operador E tiene el siguiente comportamiento con cada uno de los monomios:



Sin embargo, existen 2 monomios, los cuales no son imágenes de ninguno, ya que no hay forma de llegar a 1, y ademas como $2\nu + 1 + n = 0$, por lo cual tampoco a x^{n+1} , entonces:

$$f(x) - Eg(x) = a_0 + a_{n+1}x^{n+1}$$

entonces:

$$[f(x) - Eg(x)] = [f(x)] = [a_0 + a_{n+1}x^{n+1}]$$

Esta función auxiliar, nos ayudara a construir los funcionales buscados, por lo que:

$$W_N = \langle [1], [x^{n+1}] \rangle$$

Observación. Este hecho, parece como si el espacio que lo genera, es lo que "sobra" después de hacer el cociente.

Si $\lambda \in (W_N)'$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda([f(x)]) &= \lambda \left(\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right] \right) \\ &= \lambda([a_0 + a_{n+1} x^{n+1}]) \\ &= a_0 \lambda([1]) + a_{n+1} \lambda([x^{n+1}]) \end{aligned}$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in (W_N)'$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda_1(1) &= 1 & \lambda_1(x^{n+1}) &= 0 \\ \lambda_2(1) &= 0 & \lambda_2(x^{n+1}) &= 1 \end{aligned}$$

Observación. Los funcionales anteriores, son relevantes, ya que buscamos que satisfagan las mismas propiedades de la delta de dirac, ya que así aseguraremos que sean **E-invariantes**.

Por lo que, concretamente para una función arbitraria, para n impar, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \delta_0 \right] (f(x)) &= \delta_0 \left[\frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[(n+1)! a_{n+1} + (n+2)! a_{n+2} x + \frac{(n+3)!}{2!} a_{n+3} x^2 + \dots \right]_{x=0} \\ &= a_{n+1} = \lambda_2(f(x)) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$[W']^N = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \left\langle \delta_0, \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \delta_0 \right\rangle$$

Ahora como sabemos que como en $\text{Re}(\nu) = 0$ no es una obstrucción, podemos en general en $[U']^E$, para $\text{Re}(\nu) \geq 0$, encontrar las soluciones, que deben tener la forma:

$$\lambda(f) = J_\nu(f) + \alpha(\nu) \delta_0(f)$$

por conveniencia y facilidad, busquemos un $\lambda \in [U']^E$ tal que utilizando la función auxiliar $f_\theta(k(\theta)) = 1$, tengamos:

$$\lambda(f_\theta) = 0$$

es decir

$$J_\nu(f_\theta) + \alpha(\nu) \cdot 1 = 0$$

Por lo que:

$$\alpha(\nu) = -J_\nu(f_\theta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{1+x^2}\right)^{-(2\nu+1)} dx$$

Primero, utilizamos la simetría de la función para reescribir la integral desde 0 hasta infinito:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{1+x^2}\right)^{-(2\nu+1)} dx = -2 \int_0^{\infty} \left(\sqrt{1+x^2}\right)^{-(2\nu+1)} dx$$

Finalmente, esta es una representación de la función beta:

$$-\beta\left(\frac{1}{2}, \nu\right)$$

Sea entonces:

$$\boxed{K_\nu} = J_\nu - \beta(1/2, \nu)\delta_e$$

Observación. ¿Por que son importantes estas funciones esféricas?, para verlo nombremos los siguientes teoremas.

Teorema 3.3.1. Si $f(0) = 0$, entonces $f(x) = xg(x)$ para alguna función g .

Teorema 3.3.2. Si $f(0) = 0$, y $\nu > -1/2$ entonces la siguiente integral converge:

$$J_\nu(f(x)) = k \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu-1} f(x) dx = k \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\nu} \text{sgn}(x) g(x) dx$$

Ahora supongamos que tomamos una función arbitraria $f(x)$, podemos por conveniencia:

$$f(x) = f(0) \cdot 1 + (f(x) - f(0))$$

entonces por el teorema anterior:

$$f(x) = f(0) \cdot 1 + xg(x)$$

por lo que recordemos que $f_\theta(k(\theta)) = 1$, entonces cuando aplicamos la distribución:

$$K_\nu(f_\theta(x)) = J_\nu(f_\theta(x)) - B\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \delta_0(f_\theta(x)) = B\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right) - B\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right) f_\theta(0) = 0$$

Por tanto para la función arbitraria

$$K_\nu(f(x)) = f(0)K_\nu(f_\theta(x)) + K_\nu(f(x) - f(0)f_\theta(x))$$

$$= K_\nu(xg(x))$$

donde $xg(x) = f(x) - f(0)f_\theta(x)$, por lo cual por el teorema anterior, entonces:

$$K_\nu(f(0)) = 0$$

Observación. En si, ahora para $\nu = 0$, tenemos solución, aunque sea esta trivial, lo importante es saber que existe, y que pudimos obtener en base a resultados abstractos de homología. Concluyendo entonces con el siguiente teorema:

Teorema 3.3.3. *En general la solución de nuestro problema es:*

- Si $\nu = 0$

$$[V']^N = \langle \delta_0, K_\nu \rangle$$

- Si $\nu \neq 0$ y no es un medio entero negativo

$$[V']^N = \langle \delta_0, J_\nu \rangle$$

- Si ν es un entero negativo

$$[V']^N = \langle \delta_0, \lambda_2 \rangle$$

- Si ν es un medio entero negativo

$$[V']^N = \langle \delta_0, \lambda_2, J_\nu \rangle$$

Observación Es importante recordar que este desarrollo y trabajo en el grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ solo representa una parte de la motivación previa de esta tesis. En realidad, la tesis está diseñada para que estos mismos resultados abstractos sean aplicados al grupo $O(n+1, 1)$. De esta manera, los conceptos y técnicas desarrolladas en el contexto de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ proporcionan una base sólida para abordar problemas más generales y complejos relacionados con el grupo $O(n+1, 1)$, ampliando así el alcance y la relevancia de los resultados obtenidos.

Capítulo 4

Generalización del problema al caso de $O(n+1,1)$

Antes de comenzar con la generalización del problema, primero tendremos que plantear, particularmente, el porque podemos generalizar los resultados de $PGL_2(\mathbb{R})$ al grupo $O(2,1)$ aparentemente muy distinto, para ello tendremos que mencionar ciertos aspectos topológicos de ambos grupos y subgrupos de los mismos, y podremos encontrar resultados relevantes para la continuación de la tesis.

4.1. $PGL_2(\mathbb{R})$ y $SO(2,1)$ son isomorfos

Observación. Sabemos efectivamente que $PGL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y que $SO(2,1) \curvearrowright S^1(\mathbb{R})$, entonces ¿podríamos decir que $PGL_2(\mathbb{R}) \cong SO(2,1)$?, ya que $S^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Primero que nada observemos el siguiente espacio:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{A | A \in M_2(\mathbb{R}), \text{Tr}A = 0\}$$

evidentemente

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \text{gen}\{E, H, F\} \cong \mathbb{R}^3$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Observación. Si exponenciamos:

$$\bar{H} = \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{E} = \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} = \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que $\det(\bar{H}) = \det(\bar{E}) = \det(\bar{F}) = 1$, entonces $\bar{H}, \bar{E}, \bar{F} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, donde pertenecen al siguiente grupo:

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M(2, 2) \mid \det(A) = 1\}$$

Entonces "naturalmente", por la formula de Jacobi para la derivada de un determinante (lo que esperábamos):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(A(t)) \Big|_{t=0} &= \text{tr}(\text{adj}(A(0)) \cdot A'(0)) = \text{tr}(\text{adj}(I) \cdot A'(0)) \\ &= \text{tr}(I \cdot A'(0)) = \text{tr}(A'(0)) = \text{tr}(\tilde{A}) = 0 \end{aligned}$$

Ahora por conveniencia escojamos:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \text{span} \left(E, \frac{H}{\sqrt{2}}, F \right)$$

Y definamos una forma bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \longmapsto \text{Tr}(AB)$$

Observación. La matriz de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ asociada a la base $B_1 = (E, \frac{H}{\sqrt{2}}, F)$ está dada por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_1} = \begin{pmatrix} \langle E, E \rangle & \langle E, \frac{H}{\sqrt{2}} \rangle & \langle E, F \rangle \\ \langle \frac{H}{\sqrt{2}}, E \rangle & \langle \frac{H}{\sqrt{2}}, \frac{H}{\sqrt{2}} \rangle & \langle \frac{H}{\sqrt{2}}, F \rangle \\ \langle F, E \rangle & \langle F, \frac{H}{\sqrt{2}} \rangle & \langle F, F \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Similarmente si se escoge la base ortonormal $B_2 = \left(\frac{E+F}{\sqrt{2}}, \frac{H}{\sqrt{2}}, \frac{E-F}{\sqrt{2}} \right)$, tenemos:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora si definimos la siguiente representación de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\rho_0 : GL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$$

$$g \longmapsto \rho_0(g)$$

Con la acción adjunta $\rho_0(g)A = gAg^{-1}$

Si $A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, entonces, por la propiedad de la traza:

$$\begin{aligned} \langle \rho_0(g)A, \rho_0(g)B \rangle &= \text{Tr}(\rho_0(g)A \cdot \rho_0(g)B) \\ &= \text{Tr}(gAg^{-1}gBg^{-1}) = \text{Tr}(gABg^{-1}) \\ &= \text{Tr}(ABgg^{-1}) = \text{Tr}(AB) \end{aligned}$$

Observación. Es evidente que la representación de $GL_2(\mathbb{R})$ en $\text{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ preserva la forma bilineal en la base B_2 , por lo cual a manera de notación podemos nombrar:

$$\rho_0(g) \in O(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$$

Y por la forma bilineal en la base B_i , tenemos es evidente que:

$$O(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \cong \text{SO}(2, 1)$$

Para construir este isomorfismo, por conveniencia:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \text{span}(E, H, F)$$

donde

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad y \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sabemos que si $A \in \text{Im}\rho_0$, entonces por la acción adjunta y debido a que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es de dimensión 3, escribiremos A en términos de la base B_1 :

$$T_{E_1} = AEA^{-1} = \frac{a^2}{ad - bc}E - \frac{ac}{ad - bc}H - \frac{c^2}{ad - bc}F$$

$$T_{E_2} = AHA^{-1} = \frac{-2ab}{ad - bc}E + \frac{ad + bc}{ad - bc}H + \frac{2cd}{ad - bc}F$$

$$T_{E_3} = AFA^{-1} = \frac{-b^2}{ad - bc}E + \frac{bd}{ad - bc}H + \frac{d^2}{ad - bc}F$$

Por tanto, reescribiendo:

$$T_{B_1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad + bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto si $O(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \cong \text{SO}(2, 1)$ con la representación de $GL_2(\mathbb{R})$, ¿podríamos hacer lo mismo con $PGL_2(\mathbb{R})$? Para ello veamos lo siguiente:

Tenemos la siguiente relación de equivalencia en $GL_2(\mathbb{R})$:

$$A \sim B \text{ si y solo si } \exists \lambda \in \mathbb{R}/\{0\} \text{ tal que } A = \lambda B$$

Las clases de equivalencia de esta relación es el grupo $PGL_2(\mathbb{R})$, por tanto definamos:

$$\begin{aligned} \rho : PGL_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \\ [A] &\longmapsto \rho([A]) = \rho_0(A) \end{aligned}$$

Ahora si $[A], [B] \in PGL_2(\mathbb{R})$, es decir $A = \lambda B \Rightarrow AB^{-1} = \lambda I$, por tanto por definición $AB^{-1} \in \lambda I$ (matrices diagonales distintas de 0). Entonces, tenemos que demostrar que ρ esta bien definida:

Supongamos que $[A], [B] \in PGL_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$[A] = [B], \text{ es decir } A = \lambda B \text{ con } \lambda \neq 0$$

entonces:

$$AB^{-1} = \lambda I$$

Es claro que $\lambda I \in GL_2(\mathbb{R})$, por tanto si usamos ρ_0 , tenemos:

$$\rho_0(AB^{-1}) = \rho_0(\lambda I)$$

Y por definición:

$$\rho_0(\lambda I)\bar{A} = \lambda I\bar{A}\lambda^{-1}I$$

para algún $\bar{A} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, entonces es claro que:

$$\lambda I\bar{A}\lambda^{-1}I = \bar{A}$$

por lo cual:

$$\rho_0(\lambda I)\bar{A} = \bar{A} \Rightarrow \rho_0(\lambda I) = I \Rightarrow \lambda I \in \text{Ker } \rho_0$$

concluyendo que:

$$\rho_0(AB^{-1}) = \rho_0(A) \cdot \rho_0(B^{-1}) = \rho_0(A) \cdot \rho_0(B)^{-1} = I \Rightarrow \rho_0(A) = \rho_0(B)$$

entonces ρ_0 induce a ρ , bien definida.

Y entonces $PGL_2(\mathbb{R}) \cong SO(2, 1)$, donde tenemos la siguiente correspondencia:

$$\bar{P} : PGL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$

Por medio de:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad + bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$$

Por lo cual, los resultados anteriores, acerca de la representación de $PGL_2(\mathbb{R})$, son igualmente válidos para $SO(2, 1)$.

Observación. Para la correspondencia inversa, es un poco más complicada el buscar una fórmula, sin embargo, en [12] se demuestra su existencia, además esto es un poco más rápido de atacar, debido a que ambos grupos tienen dos componentes conexas (se puede revisar el resultado en [5]), por ello es que se eligió $SO(2, 1)$ y no $O(2, 1)$.

4.2. Construcción de un haz vectorial $\tilde{\mathcal{L}}_\nu$ sobre Y

Recordemos que definimos en los preliminares la siguiente variedad sobre el proyectivo:

$$Y := \{[y_0 : \cdots : y_{n+1}] \mid 2y_0y_{n+1} + \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0\}.$$

Además si $y = [y_0 : \cdots : y_{n+1}]^T \in Y$:

$$(gy)^T J(gy) = y^T g^T Jgy = y^T Jy = 2y_0y_{n+1} + \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

Observación. Donde teníamos el siguiente isomorfismo:

$$X \simeq Y \simeq \mathbb{S}^n$$

Por lo cual obtuvimos el siguiente sistema de cartas coordenadas para Y , si $y_0 \neq 0$:

$$[y_0 : \cdots : y_{n+1}] = [1 : \cdots : \frac{y_{n+1}}{y_0}]$$

Entonces, definimos (por conveniencia, no confundir con el sistema coordenado de X):

$$[1 : \cdots : \frac{y_{n+1}}{y_0}] \mapsto [\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_0}] = [x_1, \dots, x_{n+1}]$$

Reescribiendo:

$$2\frac{y_{n+1}}{y_0} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{y_0} = 2x_{n+1} + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

Obteniendo:

$$X_0 := \{[x_1, \dots, x_n] \}. \quad (4.1)$$

Similarmente si $y_{n+1} \neq 0$:

$$Z_\infty := \{[z_1, \dots, z_n] \}. \quad (4.2)$$

y los cambios de coordenadas

$$x = \frac{-2z}{\|z\|^2}, \quad z = \frac{-2x}{\|x\|^2} \quad (4.3)$$

Entonces definimos el espacio de funciones donde veremos la representación de $G = O(n+1, 1)$:

$$I_\nu = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ son suaves, } f(pg) = \sigma_\nu(p)f(g), p \in P, g \in G\}$$

donde dada ν complejo definimos:

$$\sigma_\nu(m(B)\alpha(a)n(x)) = |a|^{\nu+n/2}$$

Observación. El termino $n/2$ viene dado por conveniencia de ciertos resultados de espacios de Hilbert al momento de calcular densidades.

Por lo cual, por lo que vimos en los preliminares, recordemos que:

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\|x\|^2 & -x & 1 \\ 0 & B(x) & \frac{2x^t}{\|x\|^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\|x\|^2} \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\sigma_\nu(m(B)\alpha(a)n(x)) = \left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right)^{\nu+n/2}$$

Y la representación de $O(n+1, 1)$ en I_ν :

$$\text{si } g \in O(n+1, 1) \implies (\pi(g) \cdot f)(x) := f(x \cdot g) \quad \text{con } x, g \in O(n+1, 1)$$

Similarmente en el dual:

$$\text{si } g \in O(n+1, 1) \implies (\pi^*(g) \cdot \lambda)(f) := \lambda(\pi(g)^{-1} \cdot f) \quad \text{si } \lambda \in (I_\nu)^*$$

Entonces definimos, dado $f \in I_\nu$:

$$[T^0 f](x) := f(w_0 n(x))$$

$$[T^\infty f](z) := f(\bar{n}(z))$$

Entonces por la definición de I_ν obtenemos:

$$[T^\infty f](z) = \left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right)^{\nu+n/2} \cdot [T^0 f](x) \tag{4.4}$$

y similarmente

$$[T^0 f](x) = \left(\frac{1}{2}\|z\|^2\right)^{\nu+n/2} [T^\infty f](z) \tag{4.5}$$

Entonces podemos definir formalmente el haz vectorial $\mathcal{L}_\nu = (\mathbf{L}, \pi)$, donde:

$$\mathbf{L} = U_0 \cup U_1 / \sim$$

$\pi : L \rightarrow Y$ como $\pi([p], y) = [p]$ (dependiendo el caso)

donde la relación de equivalencia, es simplemente cuando $\tilde{p} \in U_1 \cap U_2$, y su correspondiente atlas:

$$U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}\} \cong X_0 \times \mathbb{C}$$

$$U_1 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}\} \cong Z_\infty \times \mathbb{C}$$

los cambios de coordenadas entre las dos distintas cartas vienen definidos por 4.4 y 4.5, aunado a los cambios de coordenadas naturales del espacio proyectivo.

Observación. A partir de aquí, los cálculos que se realizaran, serán los mismos, solo habrá unas diferencias a la hora de hacer uso de algebra homologica, por lo cual se obviaran ciertos pasos.

4.3. Secciones invariantes de $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$ ante el álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n+1, 1)$

Nuestro interés principal radica en identificar las secciones del haz vectorial que permanecen invariantes bajo la acción del grupo $O(n+1, 1)$, similarmente como en $PGL_2(\mathbb{R})$, este problema se puede reformular elegantemente en términos del álgebra de Lie asociada al grupo.

De igual manera, esto se vería como:

$$si \quad n(z)\sigma = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dz}n(z)\sigma = \frac{d}{dz}\sigma \stackrel{!}{=} 0$$

Por lo que si $E_0 = \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ en U_0 , entonces realizando cambio de coordenadas:

$$E_1 = (\nu + n/2)z + \left(z \cdot z^t - \frac{\|z\|^2}{2} I_n \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Similarmente en el espacio de distribuciones, donde por notación $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n$:

$$si \quad x = \frac{-2z}{\|z\|^2} \implies dx = \left(\frac{2}{\|z\|^2} \right)^n dz$$

Por lo que considerando los cambios de coordenadas en las secciones:

$$\begin{aligned} \int T^0 f(x) dx &= \int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu+n/2} T^\infty f(z) \left(\frac{2}{\|z\|^2} \right)^n dz \\ &= \int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \cdot T^\infty f(z) dz \end{aligned}$$

Entonces, tenemos bajo el operador E en $[\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)]^*$:

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \left[(\nu + n/2)z + \left(z \cdot z^t - \frac{\|z\|^2}{2} I_n \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] T^\infty f(z) dz$$

Observación. En general los teoremas anteriores acerca de distribuciones, se generalizan al caso de dimensión n e igualmente, los limites de integración.

Por lo que si en $[\Gamma(U_0, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)]^*$:

$$\int E_0 T^0 f(x) dx = 0$$

Entonces en $[\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)]^*$ para $Re(\nu) \gg 0$, entonces esta bien definida, por lo cual con E_1 :

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \left[(\nu + n/2)z + \left(z \cdot z^t - \frac{\|z\|^2}{2} I_n \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] T^\infty f(z) dz$$

Desarrollando:

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} (\nu+n/2)z \cdot f(z) dz + \int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} z \cdot z^t \frac{\partial f}{\partial z} dz - \int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Integrando por partes:

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2+1} \frac{\partial f}{\partial z} dz = - \int f(z) (\nu - n/2 + 1) z \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} dz$$

Por lo cual:

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} (2\nu + 1) z \cdot f(z) dz + \int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} z \cdot z^t \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Observación. Agrupando términos, obtenemos una integral parecida al problema en $PGL_2(\mathbb{R})$, lo cual pone en evidencia la relación entre los espacios, dado el isomorfismo anterior:

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \left[z \left(2\nu + 1 + z^t \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] f(z) dz$$

Observación. En general, el operador $z^t \frac{\partial}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial r}$ en coordenadas n -esféricas, lo cual lo podemos ver de manera particular:

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \implies r \cos \theta \left[\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + r \sin \theta \left[\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Por lo cual, simplificando:

$$[r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \frac{\partial}{\partial r} + [\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta] \frac{\partial}{\partial \theta} = r \frac{\partial}{\partial r}$$

Realizando el cambio de coordenada a n -esféricas:

$$\text{si } r = |z| \text{ y } \hat{\theta} = \frac{z}{|z|}, \text{ por lo que } r\hat{\theta} = z$$

entonces:

$$\int \int \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \left[r \cdot \hat{\theta} \left(2\nu + 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] g(r, \theta) r^{n-1} k(\theta) dr d\theta \quad (1)$$

Observación. La función $k(\theta)$ es simplemente la parte angular resultado del jacobiano de cambio de coordenadas n -esfericas.

$$= \int \int \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\nu-n/2} r \cdot \hat{\theta} (2\nu + 1) g(r, \theta) r^{n-1} k(\theta) dr d\theta + \int \int \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\nu-n/2} r^2 \cdot \hat{\theta} \frac{\partial g}{\partial r} r^{n-1} k(\theta) dr d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{\nu-n/2} \int \int r^{2\nu} \hat{\theta} (2\nu + 1) g(r, \theta) k(\theta) dr d\theta + \left(\frac{1}{2} \right)^{\nu-n/2} \int \int r^{2\nu+1} \hat{\theta} \frac{\partial g}{\partial r} k(\theta) dr d\theta$$

Integrando por partes, la segunda integral:

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\nu-n/2} \int \int r^{2\nu+1} \hat{\theta} \frac{\partial g}{\partial r} k(\theta) dr d\theta = - \left(\frac{1}{2} \right)^{\nu-n/2} \int \int r^{2\nu} (2\nu + 1) \hat{\theta} g(r, \theta) k(\theta) dr d\theta$$

Concluyendo entonces:

$$\int \left(\frac{\|z\|^2}{2} \right)^{\nu-n/2} \left[z \left(2\nu + 1 + z^t \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] f(z) dz = 0$$

4.4. Comprensión de $\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$ con una sucesión exacta corta

Ahora, similarmente como en el caso $n = 1$, tenemos contradicciones, por lo que definiremos los siguientes espacios:

$$V = S(\mathbb{R}^n), \quad U = S((\mathbb{R}^n)^*), \quad W = V/U$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

Además, por el lema de Borel podemos:

$$W \cong \mathbb{C}[[z]] \cong \bar{W}$$

Como nos interesa saber qué secciones son N -invariantes y M -invariantes resulta más conveniente primero trabajar con las secciones $[\mathbb{C}[[z]]]^M$, ya que si observamos $m(B)$ donde $B \in O(n)$, es directo que las secciones deben ser funciones del radio "r", de manera explicita, al observar la acción adjunta de m en n :

$$\Rightarrow m(B) \cdot n(x) \cdot m(B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & xB^{-1} & -\frac{1}{2}\|x\|^2 \\ 0 & I_n & -Bx^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = n(xB^{-1})$$

$$\Rightarrow m(B) \cdot \tilde{n}(z) \cdot m(B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Bz^t & I_n & 0 \\ -\frac{1}{2}\|z\|^2 & zB^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \tilde{n}(zB^{-1})$$

Por lo cual al ver la acción de m en n , y en \tilde{n} , pero en I_ν :

$$\begin{aligned} T^0(m(B)f)(x) &= [m(B)f](w_0n(x)) \\ &= f(w_0n(x) \cdot m(B)) \\ &= f(w_0m(B) \cdot m(B^{-1}) \cdot n(x) \cdot m(B)) \\ &= f(w_0m(B) \cdot n(xB)) \\ &= f(m(B)w_0n(xB)) = f(w_0n(xB)) = T^0f(xB) \end{aligned}$$

Análogo en la otra carta:

$$\begin{aligned} T^\infty(m(B)f)(z) &= [m(B)f](\tilde{n}(z)) \\ &= f(\tilde{n}(z) \cdot m(B)) = f(\tilde{n}(zB)) \\ &= T^\infty(f)(zB) \end{aligned}$$

En pocas palabras, actúa de manera estándar, debido a que las funciones que dependen del radio ante rotaciones siempre se mantienen invariantes, además recordemos que:

$$X \simeq Y \simeq \mathbb{S}^n$$

en si estamos trabajando sobre la n -esfera, y entonces:

$$W^M \cong [\mathbb{C}[[z]]]^M \cong \mathbb{C}[[r^2]] = (\bar{W})^M$$

Observación. Por conveniencia suponemos o impondremos que sean funciones de r^2 , aunque eso se puede demostrar formalmente, ya que:

$$r^2 = |z|^2 = \sum_{i=1}^n (z^i)^2$$

En pocas palabras, siguen siendo polinomios y funciones suaves, por lo que resumiendo necesitamos lo siguiente:

- Que nuestras funciones sean radiales:

$$g(z) = \bar{g}(r)$$

- Sean de la forma:

$$g(z) = Ef(z) \quad \text{y} \quad \lambda(g(z)) = 0$$

Afortunadamente, todo el trabajo previo nos ayudará en la busca de la forma específica de las funciones para nuestro problema.

Observación. Al igual que el ejemplo anterior, debemos buscar donde están nuestras obstrucciones, sin embargo para este caso, no resulta tan obvio, sin embargo haciendo uso de álgebra homológica, sera mas fácil.

4.5. Homología y Cohomología en $\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$

En un principio, para poder demostrar donde se encuentran nuestras obstrucciones en el caso de $O(n+1, 1)$, tendríamos que trabajar con el siguiente diagrama, llamado el complejo Chevalley-Eilenberg para algebras de lie, que podría parecer altamente abstracto, para mas detalles técnicos acerca de su utilidad [13] [14]:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U \otimes \Lambda^n \mathfrak{n} & \longrightarrow & V \otimes \Lambda^n \mathfrak{n} & \longrightarrow & W \otimes \Lambda^n \mathfrak{n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U \otimes \Lambda^{n-1} \mathfrak{n} & \longrightarrow & V \otimes \Lambda^{n-1} \mathfrak{n} & \longrightarrow & W \otimes \Lambda^{n-1} \mathfrak{n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U \otimes \Lambda^1 \mathfrak{n} & \longrightarrow & V \otimes \Lambda^1 \mathfrak{n} & \longrightarrow & W \otimes \Lambda^1 \mathfrak{n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Sin embargo como solo estamos trabajando con el álgebra de lie \mathfrak{n} asociada al operador E , y en particular las funciones M-invariantes son dependientes del radio, entonces solos nos interesa lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & (U \otimes \mathfrak{n})^M & \xrightarrow{i} & (V \otimes \mathfrak{n})^M & \xrightarrow{p} & (W \otimes \mathfrak{n})^M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & U^M & \xrightarrow{i} & V^M & \xrightarrow{p} & W^M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

donde $\partial : (A \otimes \mathfrak{n})^M \longrightarrow A^M$, concretamente $(a, X) \longmapsto X(a)$.

Por el lema de borel tenemos que $(\tilde{W} \otimes \mathfrak{n})^M \cong (W \otimes \mathfrak{n})^M$, en si esta es la **única** manera que podremos lograr 'arrastrar' elementos, y buscar las obstrucciones.

Ahora, generalizando a dimensión n , podemos ver que si

$$\alpha_m = r^{2m} \sum_{i=1}^n z_i \otimes E_i \in (\tilde{W} \otimes \mathfrak{n})^M$$

Entonces, desarrollando:

$$\partial \alpha_m = (\nu + m + 1) r^{2(m+1)}$$

donde $(\nu + m + 1) = 0$ para $m \in \mathbb{N}$.

Por lo cual $\partial a_m \in \tilde{W}^M$, entonces los resultados encajan con lo buscado, ya que $\partial \alpha_m$ depende del radio. Ahora, similarmente, si $\beta_m \in (V \otimes \mathfrak{n})^M$ donde:

$$\beta_m = r^{2m} \left[\sum z_i \otimes E_i \right] h(r)$$

Por lo cual:

$$\partial \beta_m = (\nu + m + 1) r^{2m+2} h(r) + \frac{r^{2m+3}}{2} h'(r)$$

Y como $\nu + m + 1 = 0$, entonces:

$$\partial \beta_m = \frac{r^{2m+3}}{2} h'(r)$$

Podemos ver que como $h'(r) = 0$ alrededor del origen, entonces $\partial\beta_m \in U^M$, entonces si $\mu \in (U^M)^*$ podemos ver que:

$$\mu(\partial\beta_m) = \int \left(\frac{|z|^2}{2}\right)^{\nu-n/2} [\partial\beta_m] dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\nu-n/2} \left(\frac{r^{2m+3}}{2} h'(r)\right) r^{n-1} \bar{K}(\theta) dr d\theta$$

Fijando nuestra atención a la integración en r :

$$\int_0^\infty r^{2\nu-n} \cdot r^{2m+3} \cdot h'(r) r^{n-1} dr = \int_0^\infty r^{2\nu+2m+2} \cdot h'(r) dr$$

Como $\nu + m + 1 = 0$, entonces:

$$\int_0^\infty h'(r) dr = h(r) \Big|_0^\infty = 1$$

Lo cual era lo buscado, por lo cual las obstrucciones se encuentran en:

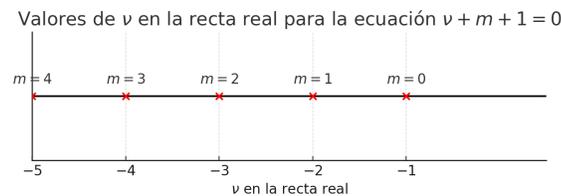


Figura 4.1: Obstrucciones y singularidades del problema.

Es interesante notar nuevamente, que en realidad para $\nu = 0$ no tenemos obstrucciones, demostrando una vez mas el poderio del algebra homologica.

4.6. Extensión meromorfa de las distribuciones en ν

La construcción de la extensión meromorfa, es muy análogo al caso de $PGL_2(\mathbb{R})$, solamente difiere debido a la forma del complejo de Chevalley-Eilenberg, por lo cual:

Si $\text{Re}(\nu) \gg 0$ y $f(x) \in U$ entonces para $\mu \in (U')^E$, con $k \in \mathbb{R}$:

$$\mu(f(x)) = k \int \left(\frac{\|x\|^2}{2}\right)^{\nu-n/2} f(x) dx = J_\nu(f(x))$$

Entonces podemos suponer que $\exists \lambda \in (V')^E$ que $\lambda|_U = \mu$, por tanto, para $\lambda \in (V')^E$ y $g(x) \in V$, tenemos:

$$\lambda(g(x)) = \int \left(\frac{\|x\|^2}{2}\right)^{\nu-n/2} g(x) dx$$

Si nos enfocamos en coordenadas n-esféricas, tenemos que:

$$\int \left(\frac{\|x\|^2}{2}\right)^{\nu-n/2} g(x) dx = \int \int \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\nu-n/2} g(r, \theta) r^{n-1} k(\theta) dr d\theta$$

Al enfocarnos en la parte radial, obtenemos:

$$\int_0^\infty r^{2\nu-n} \cdot r^{n-1} \tilde{f}(r) dr = \int_0^\infty r^{2\nu-1} \tilde{f}(r) dr = \Phi_\nu(\tilde{f}(r))$$

Ahora sea una función arbitraria en $(V \otimes \mathfrak{n})^M$ donde:

$$\beta = \left(\sum z_i \otimes E_i \right) \tilde{f}(r) \in (V \otimes \mathfrak{n})^M$$

Por lo cual $\partial\beta \in V^{ME}$:

$$\partial\beta = (\nu + m + 1)r^2 \tilde{f}(r) + \frac{r^3}{2} \tilde{f}'(r)$$

Por lo cual obtenemos que:

$$\lambda(\partial\beta) = \Phi_\nu(\partial\beta) = 0$$

$$(\nu + m + 1)\Phi_\nu(r^2 \tilde{f}(r)) + \frac{1}{2}\Phi_\nu(r^3 \tilde{f}'(r)) = 0$$

Reescribiendo:

$$(\nu + m + 1)\Phi_{\nu+1}(\tilde{f}(r)) + \frac{1}{2}\Phi_{\nu+3/2}(\tilde{f}'(r)) = 0$$

Por lo que:

$$\Phi_{\nu+1}(\tilde{f}(r)) = \frac{\Phi_{\nu+3/2}(\tilde{f}'(r))}{2(\nu + m + 1)}$$

Entonces la extensión meromorfa:

$$J_\nu(f(x)) = \lambda(f(x)) = \Phi_\nu(\tilde{f}(r)) = \frac{\Phi_{\nu+1/2}(\tilde{f}'(r))}{2(\nu + m)}$$

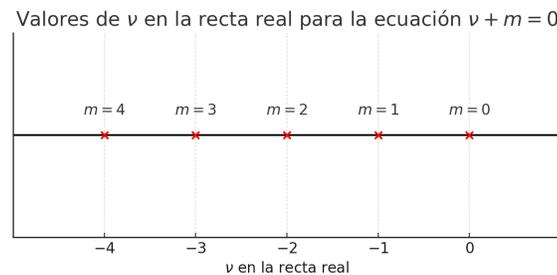


Figura 4.2: Obstrucciones y singularidades de la extensión analítica.

Observación. En pocas palabras, los polos se eliminan cuando $\nu = m = 0$, el resultado obtenido anteriormente con Álgebra homológica, aparece en la extensión meromorfa, una intersección bastante interesante, entre dos ramas de la matemáticas.

4.7. Análisis de las obstrucciones y singularidades en $\Gamma(U_1, \tilde{\mathcal{L}}_\nu)$

Para poder proseguir con el análisis, antes tenemos que buscar nuestra función esférica $f(k(\theta))$, por lo cual fijemos nuestra atención en el caso $n=1$:

Recordemos que para $SL_2(\mathbb{R})$

$$K = \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Por lo que en $O(2, 1)$ podemos sin pérdida de generalidad definir:

$$K_1 = \left\{ k_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Ya que deja invariante a $\text{diag}(1, 1, -1)$ en X , por lo que realizando el cambio de base a Y obtenemos:

$$K_1 = \left\{ k_1(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Entonces por la descomposición de Iwasawa si $G = O(2, 1)$

$$G = PK \quad \text{y} \quad P \cap K = \{e\}$$

Definimos por conveniencia, el vector esférico $f_\theta : I_\nu$ como el único elemento tal que:

$$f_\theta(k_0(\theta)) = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por lo que

$$w_0 n(x) = p k_1(\theta)$$

Entonces en el cociente tenemos que:

$$[1 : x : -\frac{1}{2}|x|^2] = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} : -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} : \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} \right]$$

Utilizando las propiedades de las coordenadas homogéneas obtenemos:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Recordemos que

$$I_\nu = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ son suaves, } f(pg) = \sigma_\nu(p)f(g), p \in P, g \in G\}$$

donde

$$\sigma_\nu(m(B) \cdot \alpha(a) \cdot n(x)) = |a|^{\nu+n/2}$$

por lo que si:

$$w_0 n(x) = p k_1(\theta) = m(B) \cdot \alpha(a) \cdot n(\tilde{x}) \cdot k_1(\theta)$$

nos interesa encontrar "a", por lo cual, recordemos que p en general tiene la forma:

$$p = \begin{pmatrix} a & xa & -\frac{1}{2}a|x|^2 \\ 0 & B & -Bx \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

entonces desarrollando y utilizando ciertas identidades trigonometricas:

$$w_0 n(x) (k_1(\theta))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & x & -\frac{1}{2}|x|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = p$$

Obtenemos que

$$a = -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}\right)^2$$

$$a = -\frac{2}{x^2+2}$$

Como $n = 1$ entonces:

$$T^0 f_\theta(x) = \left(\sqrt{\frac{x^2+2}{2}}\right)^{-(2\nu+1)}$$

Similarmente en la otra carta coordenada:

$$T^\infty f_\theta(z) = \left(\sqrt{\frac{z^2+2}{2}}\right)^{-(2\nu+1)}$$

Ahora en general para dimensión arbitraria en $O(n+1, 1)$, definimos lo siguiente:

$$K_n = \left\{ k_n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

y las matrices de cambio de base a Y:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I_n & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por lo cual, el resultado del producto $C^t \cdot K_n \cdot C$ es:

$$C^t \cdot K_n \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1+\cos\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & I_{n-1} & 0 \\ \frac{-1+\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Ademas recordemos que en general:

$$N(x) \equiv \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & -\frac{1}{2}\|x\|^2 \\ 0 & I_n & -x^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \text{donde } x^t \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \right\}$$

Por tanto, si $v_0 = [0 : 0 : 0 : 1] \in Y$, entonces en el cociente:

$$[1 : x : -\frac{1}{2}\|x\|^2] = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} : -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} : [0]_{1,n-1} : \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} \right]$$

Por lo cual obtenemos que:

$$T^0 f_\theta(x) = \left(\sqrt{\frac{x_1^2 + 2}{2}} \right)^{-(2\nu+n)}$$

Similarmente en la otra carta coordenada:

$$T^\infty f_\theta(z) = \left(\sqrt{\frac{z_1^2 + 2}{2}} \right)^{-(2\nu+n)}$$

Ahora en si tenemos un vector $x = [x_1 : 0 : 0 : \dots : 0]$, con norma $\|x\| = x_1$, entonces podemos considerar rotarlo con $m(B)$, de tal manera que nos entregue un vector \tilde{x} tal que su norma sea igual a $\|\tilde{x}\| = \sqrt{\sum \tilde{x}_i^2}$, esto es posible debido a que solo estamos rotando sobre la esfera, por lo que este valor debe ser igual siempre, entonces, reescribiendo de manera general:

$$T^0 f_\theta(x) = \left(\sqrt{\frac{\|x\|^2 + 2}{2}} \right)^{-(2\nu+n)}$$

Similarmente en la otra carta coordenada:

$$T^\infty f_\theta(z) = \left(\sqrt{\frac{\|z\|^2 + 2}{2}} \right)^{-(2\nu+n)}$$

Ahora similarmente como en $PGL_2(\mathbb{R})$, sabemos que como en $\text{Re}(\nu) = 0$ no es una obstrucción, podemos en general en $[V']^{MN}$, para $\text{Re}(\nu) \geq 0$, encontrar las soluciones, que deben tener la forma:

$$K_\nu(f) = J_\nu(f) + \alpha(\nu)\delta_0(f)$$

por conveniencia y facilidad, buscamos un $K_\nu \in [V']^{MN}$ tal que utilizando la función auxiliar $f_\theta(k(\theta)) = 1$, tengamos:

$$K_\nu(f_\theta) = 0$$

es decir

$$J_\nu(f_\theta) + \alpha(\nu) \cdot 1 = 0$$

Por lo que:

$$\alpha(\nu) = -J_\nu(f_\theta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\|x\|^2 + 2}{2}} \right)^{-(2\nu+n)} dx$$

Primero hacemos cambio de variable a coordenadas n-esfericas:

$$= - \int_{\mathbb{S}^n} \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{r^2 + 2}{2}} \right)^{-(2\nu+n)} r^{n-1} k(\theta) dr d\theta$$

En si, nos fijaremos primero en la parte radial, ya que de ella depende encontrar la relación con la función Beta de Euler.

Transformación de la integral hacia la función beta de Euler

La integral que deseamos transformar es:

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2}}{\sqrt{2}} \right)^{-(2\nu+n)} r^{n-1} dr.$$

Paso 1: Sustitución trigonométrica

Utilizamos la sustitución trigonométrica:

$$r = \sqrt{2} \tan(\theta), \quad dr = \sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta.$$

Con esta sustitución, la raíz dentro del integrando se transforma como:

$$\sqrt{r^2 + 2} = \sqrt{2} \sec(\theta).$$

Paso 2: Reemplazo en la integral

Sustituyendo en la integral original, tenemos:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} \sec(\theta)}{\sqrt{2}} \right)^{-(2\nu+n)} (\sqrt{2} \tan(\theta))^{n-1} \cdot \sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta.$$

Simplificamos el integrando:

$$= 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{-(2\nu+n-2)}(\theta) \tan^{n-1}(\theta) d\theta.$$

Paso 3: Uso de identidades trigonométricas

Utilizando las identidades trigonométricas $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ y $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, reescribimos la integral:

$$I = 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1}(\theta)}{\cos^{n-1}(\theta)} \cdot \frac{1}{\cos^{-2\nu-n+2}(\theta)} d\theta,$$

lo que se simplifica a:

$$I = 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(\theta) \cos^{2\nu-1}(\theta) d\theta.$$

Paso 4: Relación con la función beta de Euler

Esta integral se puede relacionar con la función beta de Euler, la cual está definida como:

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

Para que nuestra integral tenga esta forma, identificamos:

$$2x - 1 = n - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n}{2},$$

y

$$2y - 1 = 2\nu - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \nu.$$

Por lo tanto, la integral se transforma en:

$$I = 2^{\frac{n}{2}-1} B\left(\frac{n}{2}, \nu\right).$$

Finalmente, integrando sobre la \mathbb{S}^n , obtenemos simplemente el volumen de la n-esfera, entonces:

$$\alpha(\nu) = -\frac{\pi^{n/2} 2^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n/2 + 1)} B\left(\frac{n}{2}, \nu\right)$$

Sea entonces:

$$\boxed{K_\nu} = J_\nu - \frac{\pi^{n/2} 2^{\frac{n}{2}-2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \cdot B\left(\frac{n}{2}, \nu\right) \delta_e$$

Ahora para encontrar la base que genera a W_{MN} , es muy parecido al caso de $PGL_2(\mathbb{R})$, ya que solo hay que identificar las secciones que no son imágenes de ∂ , por ello recordemos que si:

$$\alpha_m = r^{2m} \sum_{i=1}^n z_i \otimes E_i \in (\tilde{W} \otimes \mathfrak{n})^M$$

Entonces, desarrollando:

$$\partial\alpha_m = (\nu + m + 1)r^{2(m+1)}$$

donde $(\nu + m + 1) = 0$ para $m \in \mathbb{N}$, entonces es claro que:

$$W_{MN} = \langle [1], [r^{2(m+1)}] \rangle$$

por lo que directamente:

$$[W']^{MN} = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \left\langle \delta_0, \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{\partial^{2n+2} \delta_0}{\partial r^{2n+2}} \right\rangle$$

Por lo cual concluyendo:

Teorema 4.7.1. *En general la solución de nuestro problema en $O(n+1, 1)$ es:*

- Si $\nu = 0$

$$[V']^{MN} = \langle \delta_0, K_\nu \rangle$$

- Si $\nu \neq 0$ y no es una obstrucción

$$[V']^{MN} = \langle \delta_0, J_\nu \rangle$$

- Si ν es una obstrucción

$$[V']^{MN} = \langle \delta_0, \lambda_2 \rangle$$

El enfoque de este trabajo parte de la geometría diferencial para la construcción de un haz vectorial utilizando la acción de un grupo, lo que nos permite estudiar el haz de manera local y extender nuestras conclusiones al ámbito global mediante el uso de álgebra homológica. Esta herramienta ha sido clave para analizar el comportamiento de las secciones y realizar extensiones analíticas. Específicamente, logramos realizar una extensión analítica en el origen, ya que, de acuerdo con los criterios dados por el álgebra homológica, esto era factible en esa región. No obstante, la misma teoría nos indicó la necesidad de detenernos en ciertas áreas, ya que encontramos las obstrucciones que impiden realizar extensiones analíticas en otros puntos del espacio, lo cual proporciona una visión más profunda sobre dónde el problema tiene solución y dónde no.

Este trabajo ofrece una contribución significativa al estudio de la acción de grupos de Lie sobre haces vectoriales, empleando el álgebra homológica para conectar el análisis local con conclusiones globales. Los resultados amplían la teoría de representaciones y proporcionan herramientas clave para entender las obstrucciones en las extensiones analíticas, identificando dónde es posible y dónde no.

El enfoque generalizado desde $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ a $O(n+1, 1)$ introduce nuevas perspectivas en la clasificación de subgrupos y acciones sobre espacios proyectivos. Además, el análisis de operadores diferenciales torcidos y la relación con la teoría de invariantes vinculan este trabajo con desarrollos recientes en cohomología de haces y representaciones.

Conclusiones

En este trabajo logramos calcular los funcionales MN -invariantes, para representaciones esféricas de $O(n + 1, 1)$ utilizando técnicas de Álgebra Homológica.

Para trabajo futuro, debería ser interesante tratar de extender estos resultados para otros grupos de rango real 1, en particular aquellos cuyo subgrupo unipotente sea isomorfo al grupo de Heisenberg. Sin embargo debido a que la estructura del álgebra de Lie es mas complicada , se necesitaran de técnicas de Álgebra Homologica mas sofisticadas, para poder atacar el problema.

Bibliografía

- [1] Raul Gomez y Birgit Speh. “Derived Functors and Intertwining Operators for Principal Series Representations of $SL_2(\mathbb{R})$ ”. En: *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 191 (2016), págs. 137-150. DOI: 10.1007/978-981-10-2636-2_9.
- [2] I. N. Herstein. *Topics in Algebra*. New York: Wiley, 1975.
- [3] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. New York: W. A. Benjamin, 1965. ISBN: 978-0805390216.
- [4] Felipe Zaldívar. *Introducción a la Teoría de Grupos*. México: UNAM, Instituto de Matemáticas, 2018. ISBN: 9786073003148.
- [5] Óscar A. Palmas Velasco y J. Guadalupe Reyes Victoria. *Curso de Geometría Diferencial (Parte 2, Geometría Intrínseca de las Superficies)*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2012. ISBN: 978-607-02-3487-3.
- [6] Claudio Pita Ruiz. *Cálculo Vectorial*. México: Prentice Hall, 1996. ISBN: 978-968-880-529-9.
- [7] Héctor Sánchez Morgado y Oscar A. Palmas Velasco. *Geometría Riemanniana*. México: Prensas de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007. ISBN: 978-970-32-5228-2.
- [8] Saúl Ramos Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*. México: Prensas de Ciencias, 2018. ISBN: 978-607-30-0600-2.
- [9] Óscar A. Palmas Velasco y J. Guadalupe Reyes Victoria. *Curso de Geometría Diferencial (Parte 1. Curvas y Superficies)*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2005. ISBN: 978-970-32-2650-4.
- [10] W. Rudin. *Análisis Real y Complejo*. Madrid, España: McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A., 1988. ISBN: 84-7615-192-6.
- [11] Raul Gomez y Birgit Speh. “Derived Functors and Intertwining Operators for Principal Series Representations of $SL_2(\mathbb{R})$ ”. En: *Lie Theory and Its Applications in Physics*. Ed. por V. Dobrev. Vol. 191. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2016, págs. 137-150. DOI: 10.1007/978-981-10-2636-2_9.
- [12] Marie-France Vignéras. *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1980.
- [13] Shen-Ning Tung. “Lie Algebra Homology and Cohomology”. En: *Unknown Journal Unknown Volume (Unknown Year)*, Unknown Pages. DOI: UnknownDOI.

- [14] Armand Borel y Nolan R. Wallach. *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*. Vol. 67. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1999. ISBN: 0-8218-0851-6.