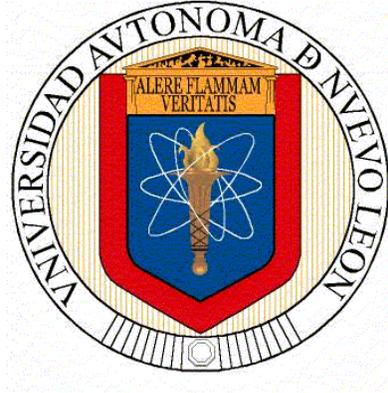


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS USANDO PROCESOS DIFUSIVOS

PRESENTADA POR
JULIO CÉSAR MARTÍNEZ SÁNCHEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

NOVIEMBRE 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO



OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS USANDO
PROCESOS DIFUSIVOS

POR

JULIO CÉSAR MARTÍNEZ SÁNCHEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “**Optimización de portafolios usando procesos difusivos**”, realizada por el alumno Martínez Sánchez Julio César, con número de matrícula 1991614, sea aceptado para su defensa como opción al grado de Doctor en Ciencias con orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. José Arturo Berrones Santos

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez

Dra. María Esther Grimaldo Reyna

Dr. Francisco Hernández Cabrera

Dr. Jonás Velasco Álvarez

San Nicolás de los Garza, Nuevo León,

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Introducción	3
1.2. Antecedentes	4
1.3. Descripción del problema	6
1.4. Estado del arte	6
1.5. Objetivos	10
1.6. Estructura de la tesis	10
2. Marco teórico	12
2.1. Modelo de media-varianza	12
2.1.1. Rendimiento	13
2.1.2. Caminata aleatoria	17
2.1.3. Efectos de la diversificación	18
2.1.4. Portafolio óptimo	19
2.1.5. Portafolio de mínima varianza	21
2.1.6. Evaluación del riesgo	25
2.2. Modelo I: Modelo difusivo	27
2.2.1. Definición	27

ÍNDICE GENERAL

2.2.2. Caminata aleatoria simple	29
2.2.3. Movimiento Browniano	30
2.2.4. Procesos Brownianos correlacionados	34
2.2.5. Definición de proceso de difusión	34
2.2.6. Movimiento Browniano Geométrico	36
2.2.7. Procesos Brownianos geométricos correlacionados	40
2.2.8. Estimación de parámetros	43
2.3. Modelo II: Decaimiento exponencial en las covarianzas	45
2.3.1. Decaimiento exponencial en las covarianzas	47
2.3.2. Modelo	47
3. Metodología	50
3.1. Materiales	50
3.1.1. Modelo I	50
3.1.2. Modelo II	51
3.2. Método	52
3.2.1. Modelo I	52
3.2.2. Modelo II	57
4. Resultados	60
4.1. Modelo I	60
4.2. Modelo II	62
5. Conclusiones y trabajo futuro	77
Referencias	78

ÍNDICE GENERAL

A. Tablas	87
A.1. Modelo I	87
A.2. ModeloII	91

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me han apoyado durante la realización de este trabajo. En primer lugar, agradezco a mi director de tesis, Dr. José Arturo Berrones Santos, de igual manera, agradezco a mi codirector de tesis, Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez, por su constante apoyo, sus aportaciones críticas, su disposición y sobre todo paciencia para resolver cualquier duda durante el desarrollo de este trabajo.

Gracias a la Dra. Maria Esther Grimaldo Reyna, al Dr. Francisco Hernández Cabrera y al Dr. Jonás Velasco Álvarez por aceptar ser parte del comité evaluador de este trabajo, por sus aportaciones, comentarios y sugerencias.

Gracias al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por el apoyo económico para mis estudios de doctorado, a la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), y al Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas (PCOM) por haberme brindado la oportunidad de continuar preparándome, por brindarme las facilidades y un área de trabajo durante mis estudios de posgrado.

No puedo dejar de agradecer a mis compañeros del posgrado, quienes me acompañaron durante este proceso. Sus conocimientos, apoyo, y las muchas conversaciones que compartimos fueron una fuente invaluable de motivación e inspiración.

ÍNDICE GENERAL

Finalmente, un agradecimiento especial a mis padres, quienes siempre han estado ahí, brindándome paciencia y apoyo incondicional.

¡Gracias a todos!

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

La aversión al riesgo es una de las características más fundamentales del comportamiento humano. A pesar de su importancia muy poco se ha abordado la cuestión: ¿de dónde procede la aversión al riesgo? Los biólogos y ecologistas han documentado la aversión al riesgo en especies animales, a menudo en el comportamiento de búsqueda de alimentos. Por otro lado, la aversión al riesgo se ha estudiado desde una perspectiva neuronal, en la que se ha descubierto que la actividad de una región específica del cerebro se correlaciona con el comportamiento de aversión al riesgo ([Ruixun et al., 2014](#)).

En general los seres humanos apesar de tener aversión al riesgo, en ocasiones optan por invertir en activos con riesgo únicamente si sus rendimientos esperados son significativamente mayores que los de los activos sin riesgo, y es precisamente éste punto el cual dio origen a la teoría de la selección de inversiones. En 1952, un economista llamado Harry Markowitz publicó un trabajo titulado "Selección de portafolios", un trabajo que contenía un tratado que transformó el panorama sobre la gestión de inversiones, el cual le valdría el premio Nobel de economía en el año 1990 junto con Merton H. Miller y William F. Sharpe por sus teorías sobre la evaluación del riesgo y rendimiento en el mercado de valores, la valoración de las acciones, y los bonos de las empresas, respectivamente.

1.2. Antecedentes

El trabajo de Markowitz sobre el manejo del riesgo en la selección de portafolios juega un papel importante en el ámbito financiero toda vez que hoy en día es uno de los pilares en la teoría moderna de inversiones. Antes de su trabajo, los activos se analizaban individualmente para construir un portafolio. Markowitz propuso que los portafolios se seleccionaran en función de una evaluación global (en lugar de individual) de la relación riesgo-rendimiento. Un supuesto importante de su modelo es que los inversores tienen aversión al riesgo, lo que significa que, dados dos portafolios que ofrecen el mismo rendimiento esperado, los inversores elegirán el menos riesgoso. Los inversores sólo asumirán un mayor riesgo si les compensa un mayor rendimiento esperado. Siguiendo este supuesto, Markowitz formuló el problema de portafolios como el de encontrar la ponderación de los activos que minimiza el riesgo. En su modelo, el riesgo se mide mediante la varianza de los rendimientos. El modelo de Markowitz permite seleccionar un portafolio de mínimo riesgo. Cuando se representa la desviación estándar frente al rendimiento esperado, el conjunto de portafolios forman la frontera eficiente. La frontera eficiente representa el equilibrio entre el riesgo y el rendimiento esperado al que se enfrenta un inversor al seleccionar un portafolio. La mayor parte de la frontera eficiente representa portafolios bien diversificadas. Esto se debe a que la diversificación es un poderoso medio para lograr la reducción del riesgo.

1.2. Antecedentes

El trabajo de Markowitz fue uno de los primeros que enfatizó en el aspecto de optimización en problemas relacionados con la gestión del riesgo. En su forma tradicional, el modelo de MV de Markowitz puede enunciarse como un problema de minimización del riesgo expresado por la varianza.

Aunque el enfoque original de Markowitz se sigue utilizando ampliamente en la actualidad, se ha reconocido que tanto la varianza como medida de riesgo no siempre produce estimaciones adecuadas de la exposición al riesgo. Ello debido, por un lado, a que la varianza es muy sensible a los datos de entrada, un ligero cambio de los rendimientos esperados conducirá a un arreglo diferente en la asignación de activos. Durante las últimas décadas,

1.2. Antecedentes

muchos estudiosos han propuesto diferentes puntos de vista con el fin de proporcionar un modelo más preciso y estable para asignar los activos.

[Chen and Chan \(1991\)](#) desarrollaron un método para estimar la semivarianza como una medida de riesgo alternativa. La idea de la semivarianza se basa en considerar un dominio parcial, es decir, dividir la varianza en términos de desviaciones por debajo, y por encima de la media, y elegir la desviación por debajo de la media como la medida de riesgo, ya que cuando los rendimientos de los activos son asimétricos, la varianza se convierte en una medida de riesgo poco razonable ([Huang, 2012](#)). Además, cuando la dimensión de la matriz es grande la matriz de covarianza muestral tiene unas propiedades indeseables, para abordar este problema se han propuesto varias alternativas como los factores de [Fama and French \(1993\)](#), el modelo de índice único de [Sharpe \(1963\)](#), entre otros. [Bickel Peter \(1963\)](#) proponen regularizar la matriz de covarianza de p variables estimada a partir de n observaciones, mediante el establecimiento de un umbral, ya que muchos resultados en teoría de matrices aleatorias muestran que la matriz de covarianza empírica para muestras de tamaño n de una distribución gaussiana de p variables no es un buen estimador de la covarianza poblacional si p es grande.

Parte de las críticas se deben también a que la varianza penaliza por igual las "ganancias" y las "pérdidas" ([Krokhmal and Uryasev, 2011](#)). En la literatura podemos encontrar muchos trabajos que han atacado dicho problema, por ejemplo [Pandolfo \(2019\)](#) propuso el uso de una estimación no paramétrica para obtener estimaciones robustas de la media y la matriz de covarianza de los rendimientos. Bajo dicho enfoque el autor mostró que la distribución de los rendimientos es menos sensible a los cambios.

Por otro lado, el trabajo de [Engle \(1982\)](#) sobre los modelos de Heteroskedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH) y [Bollerslev \(1986\)](#) sobre los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH), y los casos multivariados: [Bauwens and Rombouts \(2006\)](#), [Bollerslev \(1990\)](#), [Engle \(2002\)](#), [Engle and Kroner \(1995\)](#), han demostrado que la variabilidad de los rendimientos no es constante en el tiempo, como se supone en el modelo modelo MV, sino que depende de él.

Por otro lado, en la literatura podemos encontrar muchas aplicaciones sobre movimiento Browniano geométrico, por ejemplo, [A.S. Postali \(2006\)](#) presentan un análisis cuantitativo

1.3. Descripción del problema

de la trayectoria del precio del petróleo utilizando un GBM para modelar sus movimientos en presencia de rupturas estructurales con buena aproximación, [Gao \(2008\)](#) propusieron un proceso de riesgo perturbado compuesto por un movimiento Browniano Geométrico con ecuaciones integro-diferenciales derivadas con condiciones de contorno. [Ladde G.S. \(2009\)](#) emplearon el modelo clásico para desarrollar modelos lineales estocásticos modificados utilizando las técnicas estadísticas básicas asociadas a los datos dados para el precio de las acciones considerando diferentes procesos de partición de datos sin saltos. En la selección de carteras, los procesos derivados del movimiento browniano se han utilizado con frecuencia, por ejemplo, [Noh Eun-Jung \(2011\)](#) formulan un problema de optimización de carteras para el mercado Black-Scholes con volatilidad estocástica y tipo de interés estocástico según procesos de difusión de Markov ergódicos. Debido a que a veces los precios de las acciones presentan cambios bruscos, o saltos, [Yiling \(2020\)](#) propone un método de optimización de la ecuación diferencial estocástica de difusión de un portafolio de valores basada en ecuaciones diferenciales estocásticas con saltos debido a que los saltos pueden describir mejor el comportamiento del mercado. [Mariani Francesca \(2018\)](#) formulan la optimización de un portafolio en un mercado con fricción como un problema de control estocástico con funciones de utilidad de aversión al riesgo absoluto hiperbólicas bajo una forma funcional específica inspirada en la dinámica óptima de Merton .

1.3. Descripción del problema

1.4. Estado del arte

En el modelo propuesto por [Markowitz \(1952\)](#), el rendimiento de los activos financieros están representados por variables aleatorias. En el modelo se hace la suposición de que el rendimiento de los activos sólo depende de la media y la varianza en la determinación de los pesos o ponderaciones óptimos. Otra suposición que se hace es la de versión al riesgo, significa que un inversor al invertir en un portafolio de n activos desea minimizar su varianza, o riesgo, por lo que en el modelo la función objetivo a minimizar es la varianza. Desde sus inicios el modelo de media varianza ha dado lugar a muchas investigaciones

1.4. Estado del arte

desde el punto de vista de optimización la maximización de los rendimientos controlando el riesgo del portafolio, la minimización del riesgo cuando el inversor es adverso al riesgo, y el caso en el que se desea un equilibrio entre los dos puntos anteriores, maximizar los rendimientos, y al mismo tiempo, minimizar el riesgo. En las siguientes líneas se describen algunos trabajos desarrollados con relación a la minimización del riesgo o varianza.

La minimización de la varianza desde una perspectiva de optimización consiste en la distribución del capital entre n activos, sin embargo, en ocasiones resulta de cierto interés conocer la distribución de las proporciones invertidas en n activos que conforman el portafolio. Bajo el supuesto de una distribución normal, [Okhrin and Schmid \(2006\)](#) derivaron la función de densidad multivariante del portafolio de mínima varianza, además discuten los pesos óptimos del portafolio concluyendo que la sensibilidad de la matriz de covarianzas es sustancial en la determinación de los pesos. [Gabriel and Christoph \(2010\)](#) et. al. proponen estimadores para el modelo de media-varianza bajo el supuesto de que las series de rendimientos son independientes e idénticamente distribuidos. Para el estudio emplearon 7 índices bursátiles ; Estados Unidos, Reino Unido, Alemania, Francia, Italia, Canadá y Japón, de septiembre de 1970 hasta agosto de 2009. Los resultados obtenidos muestran una reducción en la varianza de los rendimientos del portafolio fuera de datos de muestra en comparación con el estimador tradicional. [Taras et al. \(2017\)](#) analizan el portafolio de mínima varianza con un enfoque Bayesiano bajo la suposición de que la distribución condicional de los rendimientos logarítmicos siguen una distribución normal. Empleando distribuciones apriori con respecto al vector de rendimientos y la matriz de covarianzas derivan la distribución a posteriori de los pesos del portafolio de mínima varianza.

[Yang et al. \(2015\)](#) desarrollaron un estimador para la matriz de covarianzas considerando datos atípicos (outliers), debido a que en ocasiones los datos financieros contienen outliers, bajo el criterio de minimización del riesgo. Empleando resultados de teoría de matrices aleatorias para minimizar el riesgo del portafolio encontraron que su estimador mejora el modelo estándar, fue provado con datos reales y simulados. [Bodnar et al. \(2021\)](#) estimaron el portafolio de mínima varianza en un caso de alta dimensión mediante la teoría de matrices aleatorias. Para el estudio se consideraron los rendimientos diarios de los activos que componen el S&P500, para el periodo de abril de 1999 a marzo de 2020. Al estudiar el comportamiento de portafolios de alta y baja dimensión encontraron una

1.4. Estado del arte

mejora significativa empleando la teoría de matrices aleatorias con respecto al modelo de media-varianza.

Markowitz sugirió la semivarianza como medida de riesgo, pero seleccionó la varianza por su familiaridad y facilidad de cálculo. En ocasiones suele ser de importancia estimar el riesgo a la baja, o la amenaza de fracaso de un portafolio, en esos casos la semivarianza juega un papel importante. [Hogan and Warren \(2021\)](#) señalaron la ventaja de utilizar el criterio de media-semivarianza en la selección de portafolio frente al modelo de MV, además de mostrar que el modelo de semivarianza es computacionalmente tratable. [Eric and B.Lindenberg \(1977\)](#) extendieron la semivarianza al marco de momentos parciales inferiores, desarrollaron un modelo de valoración de activos utilizando momentos parciales, dicho modelo no requiere la suposición de una distribución para las series de rendimientos. [Nantell and Price \(1979\)](#) calcularon la varianza y la semivarianza mediante la distribución de los rendimientos del portafolio y encontraron una mejora en los rendimientos del portafolio con semivarianza considerando un determinado nivel de riesgo.

En la década de los 80's comenzó el desarrollo de los modelos de heteroscedasticidad condicional autoregresivos [Engle \(1982\)](#), el caso generalizado [Bollerslev \(1986\)](#), modelos que buscaban modelar la variabilidad de los rendimientos dado que observaciones empíricas mostraban que la varianza no era constante en el tiempo. Posteriormente los modelos univariados anteriores se extendieron al caso multivariado [Bauwens and Rombouts \(2006\)](#), [Bollerslev \(1990\)](#), [Engle and Kroner \(1995\)](#), en donde se tiene una matriz de covarianzas condicional que varía en el tiempo, después en 2002 se estableció una nueva familia de modelos con correlaciones dinámicas [Engle \(2002\)](#). Específicamente el desarrollo de los modelos multivariados abrió una puerta de aplicación al modelo de media-varianza.

[Rachael et al. \(2017\)](#) evalúan el rendimiento del portafolio de mínima varianza y el portafolio igualmente ponderado considerando una matriz de correlación condicional, derivado de los resultados muestran que la correlación condicional es más importante que la varianza condicional en el rendimiento del portafolio. Los resultados también muestran que el rebalanceo frecuente de los activos no ayuda a mejorar el rendimiento del portafolio. El estudio consistió en 7 bases de datos para formar los portafolios, con diversos tamaños de muestras y periodos, encontrando que cuatro de los siete casos considerados presen-

1.4. Estado del arte

taron una menor volatilidad considerando el modelo de correlación dinámica. Vrontos et al. (2003) Ioannis D. et al. (2003) propusieron un nuevo método para el modelo GARCH multivariado con covarianza variable en el tiempo, en el cual se garantiza que la matriz de covarianza sea positiva definida, y el número de parámetros del método era relativamente pequeño, lo que podía aplicarse fácilmente al modelo de datos de alta dimensión. Ledoit et al. (2003) Ledoit and Michael (2003) propusieron un nuevo método para estimar la matriz de covarianza variable en el tiempo en el marco del modelo GARCH multivariado . el cual puede tratar problemas de gran escala además de generar una matriz de covarianza condicional semidefinida positiva.

El valor en riesgo VaR es un método que se emplea con el objeto de medir una posible pérdida que se podría sufrir sobre un intervalo de tiempo dado un nivel de confianza. Dicho método se adaptó al modelo de media varianza, para obtener un modelo que minimize el VaR. Goldfarb e Iyengar (2003) Goldfarb and Garud (2003) consideraron el problema de selección portafolios bajo es esquema del VaR asumiendo el supuesto de una distribución normal, y donde el objetivo era combatir sistemáticamente la sensibilidad del portafolio óptimo. Ghaoui et al. (2003) Ghaoui et al. (2003) estudiaron el problema de selección de portafolios con el peor caso del VaR cuando se conocía parte de la información....

Mayoral et al. (2022) proponen el uso de redes de cobertura en la minimización del riesgo del portafolio, la propuesta consiste en una red en la que los activos financieros son nodos y los enlaces entre ellos correlaciones, los portafolios formados provienen de acciones individuales y 200 activos de mayor capitalización del mercado estadounidense (NYSE, NASDAQ y AMEX). Los resultados obtenidos muestran que la estrategia propuesta supera al modelo de media-varianza.

El modelo de Markowitz no toma en cuenta los costos que conlleva la compra-venta de un activo financiero, los costos de transacción, los cuales pueden ser representativos en la medida en que la cantidad de activos sea considerable, o bien sean recurrentes las transacciones. Pogue (1970) describió por primera vez el problema de portafolio de inversión considerando costos de transacción. Davis and Norman (1990) exploraron el problema de selección de portafolios bajo costos de transacción proporcionales. Morton and R. (1995) estudiaron la selección de portafolios con costos de transacción fijos,

1.5. Objetivos

respectivamente. [Yoshimoto \(1996\)](#) asumió primero que el coste de transacción era una función, y luego obtuvo el portafolio óptimo. [Xue et al. \(2006\)](#) mediante el modelo de media-varianza desarrollaron un modelo con costes de transacción cóncavos con el objeto de capturar condiciones reales del mercado. Por su parte [Peng \(2015\)](#) estudiaron la optimización de portafolio con costes de transacción cuadráticos. [Wang and Liu \(2013\)](#) estudiaron el problema de selección de portafolios multiperíodo con costes de transacción fijos y proporcionales, y resolvieron el problema mediante programación dinámica.

El modelo de Markowitz es un modelo estático en el que los inversores sólo pueden tomar decisiones de inversión al principio del periodo de inversión y esperar hasta el final del mismo. A partir de ahí, el modelo de MV se amplió posteriormente al caso multiperíodo. [Samuelson \(1969\)](#) propuso un modelo de inversión multiperíodo a tiempo discreto el cual generaliza el modelo de MV de un periodo. [Wu and Li. \(2011\)](#) estudiaron el modelo de media-varianza a tiempo discreto con cambio de régimen de Markov...

1.5. Objetivos

1. Establecer una formulación del modelo de media varianza basada en un proceso de difusión (movimiento Browniano geométrico).
2. Establecer una formulación del modelo de media varianza basada en el decaimiento exponencial de las covarianzas.
3. Realizar experimentación para varios conjuntos de activos e intervalos de tiempo.
4. Evaluar el desempeño de los modelos.

1.6. Estructura de la tesis

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 2.1 se da una introducción al modelo de media-varianza, comenzando por definir el rendimiento de un portafolio, su valor esperado, y varianza, posteriormente se

1.6. Estructura de la tesis

introducen diversas formulaciones que pueden implementarse dependiendo de los supuestos que se asuman. Además, aborda la solución para el caso de restricciones de igualdad, y una breve descripción para el caso de restricciones de desigualdad. Y finalmente la métrica empleada para la evaluación del desempeño de los rendimientos del portafolio.

En la sección 2.2 se define el movimiento Browniano geométrico, comenzando por definir qué es un proceso estocástico, el movimiento Browniano estándar (proceso de Wiener), posteriormente la definición de un proceso de difusión. En la última sección se abordan propiedades del movimiento Browniano geométrico, para un proceso, y posteriormente para dos procesos correlacionados, lo cual servirá de base para aplicarlo al modelo de media-varianza.

En el capítulo 3 se aborda la metodología empleada, desde el conjunto de datos empleados para la experimentación, los periodos, algoritmos empleados para la estimación, y en general la experimentación. También se describe el método empleado para el desarrollo de la experimentación.

En el capítulo 4 se describen los resultados obtenidos de la experimentación comparando los resultados con el modelo estándar, el modelo de media-varianza.

Finalmente, en el capítulo 5 se dan conclusiones y recomendaciones generales.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Modelo de media-varianza

En la presente sección se introducirá el modelo estándar de portafolios, el modelo de media-varianza, el cual responde a dos cuestiones importantes que se plantea todo inversor: ¿en qué invertir? y ¿cuánto invertir?, lo cual permitirá la óptima distribución del capital, y con un mínimo riesgo.

Antes de comenzar la descripción del problema es preciso abordar algunos supuestos. En primer lugar, se hace la suposición de que los inversores tienen aversión al riesgo, lo que significa que los inversores sólo aceptarán asumir un mayor riesgo si se les ofrece un mayor rendimiento esperado. En segundo lugar, el modelo supone que la decisión de inversión se basará únicamente en la información del riesgo y del rendimiento.

El modelo de media-varianza (MV), introducido por [Markowitz \(1952\)](#), es considerado una de las estrategias más populares de selección de portafolios, en donde las ponderaciones de un portafolio óptimo se obtienen minimizando la varianza del portafolio suponiendo que el inversor es averso al riesgo. El modelo de media-varianza es un clásico paradigma en finanzas por la eficiente distribución del capital entre activos con riesgo dadas las estimaciones del rendimiento esperado y de las covarianzas de un conjunto de activos. El modelo de MV supone que, para un determinado nivel de riesgo (varianza), un inversor

2.1. Modelo de media-varianza

racional seleccionará el portafolio con la mayor rentabilidad esperada. Por otro lado, para un nivel de rendimiento esperado, un inversor racional seleccionará el portafolio con el menor riesgo. En otras palabras, se dice que un portafolio es óptimo si no hay ningún otro que tenga el mismo riesgo con un mayor rendimiento esperado, y no hay ningún portafolio que tenga el mismo rendimiento esperado con un riesgo menor.

El modelo de MV es denominado así ya que toma los dos primeros momentos de una distribución para caracterizar el portafolio de inversión. El primer momento corresponde a la media y el segundo momento corresponde a la varianza.

El enfoque del modelo de MV comienza por asumir que un inversor tiene en la actualidad una determinada suma de dinero para invertir. Al final del período de retención (la duración de la inversión), el inversor venderá los activos financieros que se compraron al principio del período. Al principio del horizonte de tiempo, el inversor debe hacer una decisión sobre la cantidad, de cada activo, que se debe comprar y mantenerla hasta el final del período.

Antes de discutir el modelo, vamos a definir algunos conceptos importantes del modelo.

2.1.1. Rendimiento

Definición 2.1 *Rendimiento simple*

Sea P_t el precio de un instrumento financiero al tiempo t , el rendimiento simple r_t se define como

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (2.1)$$

El rendimiento neto puede considerarse como la tasa de relativa. Sobre la base de los rendimientos al tiempo t , la agregación de los rendimientos diarios a lo largo del periodo T se expresa como

$$r_T = \frac{P_T}{P_0} - 1 = \frac{P_T}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_1}{P_0} - 1 \quad (2.2)$$

Definición 2.2 *Rendimiento logarítmico*

2.1. Modelo de media-varianza

Sea P_t el precio de un instrumento financiero al tiempo t , el rendimiento logarítmico r_t se definen como

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) \quad (2.3)$$

Una de las ventajas de utilizar los rendimientos logarítmicos es la simplicidad de los retornos multiperiodo. El rendimiento total durante el periodo desde el tiempo $t - 1$ hasta el tiempo t viene dado por la suma de los rendimientos logarítmicos de un periodo, en lugar del producto como en el caso de los rendimientos simples.

$$r_T = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \dots + \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \sum_{t=1}^T r_t \quad (2.4)$$

En el modelo de media-varianza los rendimientos son variables aleatorias, y por tanto, es preciso definir algunos conceptos relacionados con las variables aleatorias como lo es el valor esperado, la varianza y la covarianza.

Definición 2.3 Valor esperado

El valor esperado de una variable aleatoria puede interpretarse como un promedio ponderado de los posibles valores de la variable aleatoria X , y se define como

$$E[X] = \sum_x xp(x) \quad (2.5)$$

si X es una variable aleatoria discreta, y

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.6)$$

si X es una variable aleatoria continua.

Una propiedad útil es el valor esperado de una variable aleatoria por una constante, que equivale a la constante multiplicada por el valor esperado de la variable aleatoria, es decir, $E[aX] = aE[X]$.

2.1. Modelo de media-varianza

Definición 2.4 Covarianza

Sean X y Y dos variables aleatorias, la covarianza entre X y Y se define como

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (2.7)$$

cuanto X y Y son la misma variable aleatoria, la covarianza representa la varianza, es decir $\text{Var}(X)$, entonces, la varianza es un caso particular de la covarianza.

Definición 2.5 Rendimiento del portafolio

Sea r_{it} el rendimiento del i -ésimo activo al tiempo t , que en adelante se denotará simplemente como r_i , el rendimiento del portafolio r_p se define como

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad (2.8)$$

donde w_i son valores constantes que representan la proporción de la inversión del i -ésimo activo.

El valor esperado, y la varianza de los rendimientos de un portafolio se expresan de la siguiente manera:

$$E[r_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] \quad (2.9)$$

$$\text{Var}(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \text{var}(r_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \text{cov}(r_i, r_j) \quad (2.10)$$

2.1. Modelo de media-varianza

Para verificar Eq(2.9) dado que w_i son valores constantes, entonces

$$\begin{aligned} E[r_p] &= E\left[\sum_{t=1}^n w_t r_t\right] \\ &= \sum_{t=1}^n w_t E[r_t] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para el caso de la varianza del portafolio $Var(r_p) = Var(\sum_{i=1}^n w_i r_i)$, y dado que la covarianza es un caso general de la varianza, entonces

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^n w_i r_i\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^n w_i r_i, \sum_{j=1}^n w_j r_j\right) \\ &= w_i w_j Cov\left(\sum_{i=1}^n r_i, \sum_{j=1}^n r_j\right) \\ &= w_i w_j \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(r_i, r_j) \\ &= w_i^2 \sum_{i=1}^n Cov(r_i, r_i) + w_i w_j \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq 1}^n Cov(r_i, r_j) \\ &= w_i^2 \sum_{i=1}^n Var(r_i) + w_i w_j \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq 1}^n Cov(r_i, r_j) \end{aligned}$$

Si r_i , para $i = 1, \dots, n$, son variables aleatorias independientes, entonces, de la ecuación anterior se tiene

$$Var\left(\sum_{i=1}^n r_i\right) = w_i^2 \sum_{i=1}^n Var(r_i) \quad (2.12)$$

En el modelo de media-varianza los estimadores para el valor esperado, y covarianza del rendimiento del portafolio son:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_{it} \quad (2.13)$$

2.1. Modelo de media-varianza

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \hat{\mu}_i)(r_{jt} - \hat{\mu}_j) \quad (2.14)$$

2.1.2. Caminata aleatoria

Los precios de activos financieros juegan un papel crucial, por ello un conocimiento de su comportamiento es de gran importancia. Un aspecto que no se debe pasar por alto es su naturaleza aleatoria, y lo que rápidamente viene a la mente es la hipótesis del paseo aleatorio. La hipótesis o teoría del paseo aleatorio establece que los cambios en los precios de las acciones son independientes entre sí y tienen la misma distribución, y presupone que el movimiento o tendencia del precio de una acción en el pasado no puede utilizarse para predecir su movimiento futuro, en general, se asume que los precios de las acciones siguen un paseo aleatorio. Se hacen dos suposiciones sobre el paseo aleatorio:

- Los rendimientos logarítmicos se distribuyen normalmente.
- Los rendimientos son independientes.

Dado que la suma de variables aleatorias normales también es normal, la normalidad de los rendimientos logarítmicos de un solo período implicará la normalidad de los rendimientos logarítmicos de varios períodos. Investigar las distribuciones marginales de numerosas series de rendimientos logarítmicos muestra que la densidad de los rendimientos tiene forma de campana, y esto es de alguna manera similar a la de las densidades normales. Sin embargo, las colas de las distribuciones de los rendimientos logarítmicos son colas pesadas en comparación con las de una distribución normal. Las distribuciones de colas pesadas juegan un papel fundamental en las finanzas, ya que los rendimientos de las acciones y otros cambios en los precios de mercado suelen tener colas pesadas. Esto significa que la ocurrencia de valores extremos es más probable de lo que se predeciría.

2.1. Modelo de media-varianza

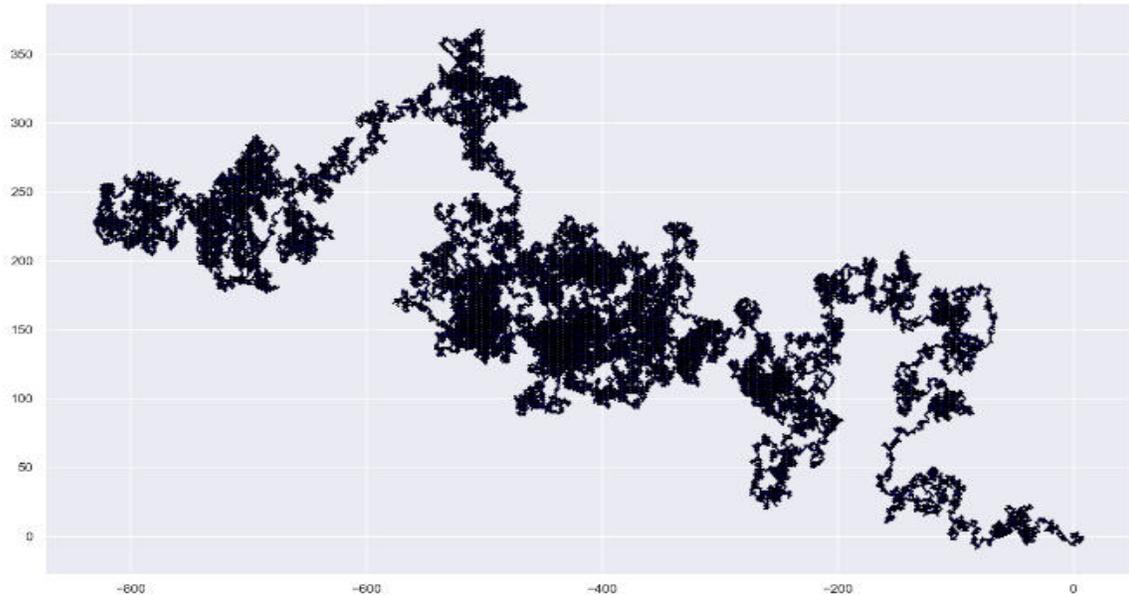


Figura 2.1: Trayectoria de una caminata aleatoria en dos dimensiones

2.1.3. Efectos de la diversificación

Por diversificación debe entenderse como la colocación de recursos en activos financieros con características diversas, para esparcir el riesgo, y así lograr reducirlo. En las siguientes líneas se va a tratar de explicar, mediante un ejemplo sencillo sobre el efecto de la diversificación, el cual puede consultarse de forma en [Prigent \(2007\)](#). Considérese el caso de activos independientes, lo cual quiere decir que la matriz de varianzas y covarianzas es una matriz diagonal que puede expresarse como

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 \quad (2.15)$$

Ahora, si se considera la misma ponderación para cada activo, es decir $w_i = 1/n$ se tiene que

2.1. Modelo de media-varianza

2.1.4. Portafolio óptimo

Una pregunta natural es ¿cómo seleccionar un portafolio óptimo?. Existen varias alternativas para formular el modelo de MV, y las tres más comunes son: la formulación de maximización del rendimiento esperado, la formulación de minimización del riesgo, y la formulación de aversión al riesgo. Dichas formulaciones son diferentes ya que tienen funciones objetivo distintas, pero por otro lado, son equivalentes debido a la misma frontera eficiente que se crea utilizando la rentabilidad esperada y la varianza del portafolio de forma similar.

Definición 2.6 *Maximización del rendimiento del portafolio*

La formulación biobjetivo implica la maximización del rendimiento esperado del portafolio, y al mismo tiempo, la minimización de la varianza del portafolio. Por lo tanto, el problema de optimización se plantea de la siguiente manera.

$$\text{maximizar} \quad E[r_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] \quad (2.16)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma_0^2 \quad (2.17)$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (2.18)$$

$$w_i \geq 0 \quad (2.19)$$

donde σ_0^2 representa el nivel de riesgo deseado.

Definición 2.7 *Maximización del rendimiento y minimización de la varianza del portafolio*

La formulación de maximización del rendimiento esperado se aplica cuando la inversión tiene que mantener un nivel de riesgo determinado. Por lo tanto, el problema de optimización se define de tal manera que se mantenga un riesgo determinado

2.1. Modelo de media-varianza

$$\text{maximizar} \quad E[r_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] \quad (2.20)$$

$$\text{minimizar} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2.21)$$

$$\text{sujeto a} \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (2.22)$$

$$w_i \geq 0 \quad (2.23)$$

donde σ_0^2 representa el nivel de riesgo deseado.

Definición 2.8 Minimización de la varianza del portafolio

La formulación de minimización del riesgo es útil para la inversión que requiere una cartera de varianza mínima. En el presente trabajo se empleará dicha formulación la cual puede definirse como

$$\text{minimizar} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2.24)$$

$$\text{sujeto a} \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (2.25)$$

$$w_i \geq 0 \quad (2.26)$$

donde $0 \leq w_i \leq 1$. Cabe mencionar que el objetivo es minimizar la varianza del portafolio, por lo que en ocasiones modelo MV se le conoce como modelo de mínima varianza Eq(2.72). La restricción de Eq (2.73) indica, en cierto modo, que la suma de todos lo que se invierte debe ser igual del capital disponible. La restricción de Eq(2.76) permite que no existan ventas en corto, es decir, que no existan pesos negativos, ya que eso implicaría que en vez de invertir cierto peso en una acción, el inversor tendría que tomar prestado un título financiero o acción, con la intención de venderlo posteriormente a un mayor precio y así obtener una ganancia.

La formulación de la aversión al riesgo se basa en la consideración de la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo del portafolio mediante la introducción de un coeficiente

2.1. Modelo de media-varianza

de aversión al riesgo α . Este coeficiente también se denomina índice de aversión al riesgo de Arrow-Pratt, su formulación se expresa de la siguiente manera

Definición 2.9 *Mínimización del índice de Arrow-Pratt*

$$\text{minimizar} \quad \left(\sum_{i=1}^n w_i E[r_i] \right) - \alpha \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \right) \quad (2.27)$$

$$\text{sujeto a} \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (2.28)$$

$$w_i \geq 0 \quad (2.29)$$

2.1.5. Portafolio de mínima varianza

El método de Lagrange es utilizado para optimizar una función bajo un cierto número de restricciones de igualdad, es decir

$$\begin{aligned} \text{maximizar/minimizar} \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{sujeto a} \quad & g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ & g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para resolver este problema de optimización con restricciones, considérese la función

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x) \quad (2.31)$$

la cual es llamada la función de Lagrange, donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es denominado el vector de multiplicadores de Lagrange, con $x = (x_1, \dots, x_n)'$ y $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$. $F(x, \lambda)$ puede ser escrita como:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (2.32)$$

2.1. Modelo de media-varianza

Donde las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \quad (2.34)$$

El gradiente de $F(x, \lambda)$ con respecto a x y λ será denotado por $\nabla_{x, \lambda} F(x, \lambda)$, el cual es el siguiente vector fila:

$$\nabla_{x, \lambda} F(x, \lambda) = (\nabla_x F(x, \lambda), \nabla_\lambda F(x, \lambda)) \quad (2.35)$$

Dado que el gradiente de $F(x, \lambda)$ con respecto a x y a λ corresponde a las derivadas parciales con respectos a x y a λ , respectivamente, entonces de 2.33 y 2.34 se tiene que

$$\nabla_x F(x, \lambda) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, \lambda), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, \lambda) \right) = \nabla f(x) + (\nabla g(x))^t \lambda \quad (2.36)$$

$$\nabla_\lambda F(x, \lambda) = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x, \lambda), \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_n}(x, \lambda) \right) = g(x) \quad (2.37)$$

donde

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \lambda), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x, \lambda) \right] \quad (2.38)$$

2.1. Modelo de media-varianza

y

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

De 2.35 a 2.39 se concluye que

$$\nabla_{x,\lambda} F(x, y) = (\nabla f(x) + (\nabla g(x))^t, \lambda g(x)) \quad (2.40)$$

En el método de multiplicadores de Lagrange los puntos extremos de las restricciones x_0 es encontrado identificando los puntos críticos de Lagrange $F(x, \lambda)$.

Portafolio de mínima varianza

Para el caso en donde se busca obtener el portafolio de mínima varianza el problema a resolver para el caso de una restricción de igualdad es el siguiente

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a} \quad &w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

La función de Lagrange es

$$F(w, \lambda) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (2.42)$$

es decir

$$\begin{aligned} F(w, \lambda) &= w_1^2 \sigma_1^2 + \dots + w_n^2 \sigma_n^2 + 2(w_1 w_2 \sigma_{12} + \dots + w_{n-1} w_n \sigma_{n-1,n}) + \\ &\lambda (w_1 + \dots + w_n - 1) \end{aligned}$$

2.1. Modelo de media-varianza

derivando parcialmente con respecto a w_1, w_2, \dots , y λ , se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{12} + \dots + 2w_n\sigma_{1n} + \lambda &= 0 \\
 2w_1\sigma_{12} + 2w_2\sigma_2^2 + \dots + 2w_n\sigma_{2n} + \lambda &= 0 \\
 &\vdots = \vdots \\
 2w_1\sigma_{1n} + 2w_2\sigma_{2n} + \dots + 2w_n\sigma_n^2 + \lambda &= 0 \\
 w_1 + w_2 + \dots + w_n &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{1n} & 2\sigma_{2n} & \dots & 2\sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde Σ corresponde a la matriz de covarianzas, \mathbf{e}^T la transpuesta de vector de unos de dimensión, $\mathbf{0}$ el vector de ceros y \mathbf{w} el vector de pesos, lo cual equivale al sistema

$$2\Sigma\mathbf{w} + \mathbf{e}\lambda = 0 \quad (2.43)$$

$$\mathbf{e}^T\mathbf{w} = 1 \quad (2.44)$$

Cuya solución viene dada por la siguiente expresión.

$$2\Sigma\mathbf{w} + \mathbf{e}\lambda = 0 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{e}^T\mathbf{w} = 1 \quad (2.46)$$

2.1. Modelo de media-varianza

de 2.45

$$\begin{aligned}2\Sigma\mathbf{w} &= -\mathbf{e}\lambda \\ \mathbf{w} &= -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\mathbf{e}\lambda\end{aligned}$$

sustituyendo el valor de \mathbf{w} en 2.46

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^T\left(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\mathbf{e}\lambda\right) &= 1 \\ \mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}\lambda &= -2 \\ \lambda &= -\frac{2}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de λ en 2.45

$$\begin{aligned}2\Sigma\mathbf{w} + \mathbf{e}\left(-\frac{2}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}\right) &= 0 \\ 2\Sigma\mathbf{w} &= 2\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}} \quad (2.47)$$

Para el caso de restricciones de desigualdad existen diversos algoritmos para resolver el problema, por ejemplo el algoritmo de programación cuadrática de GoldFarb (1983) utiliza la factorización de Cholesky, y la descomposición \mathbf{QR} , donde \mathbf{Q} es una matriz ortogonal y \mathbf{R} una matriz triangular superior, para formar un algoritmo dual el cual permite resolver problemas de programación no lineales.

2.1.6. Evaluación del riesgo

Cada inversor está dispuesto a asumir una determinada cantidad de riesgo para obtener un nivel de rendimiento esperado. Dado que la rentabilidad se compensa con el riesgo, los inversores tienen que equilibrar la compensación entre rentabilidad y riesgo. Existen

2.1. Modelo de media-varianza

varias métricas que permiten evaluar el rendimiento de la inversión. En general, cuanto más altas sean estas medidas de rendimiento, más interesante, en términos de inversión, es el portafolio. La más común y utilizada es el cociente o razón de Sharpe [Sharpe \(1963\)](#), que se calcula dividiendo la diferencia entre la rentabilidad esperada menos un activo libre de riesgo r_f entre la desviación estándar del portafolio. Se denota mediante la siguiente expresión

$$SR = \frac{E(r_p - r_f)}{\sqrt{Var(r_p)}} \quad (2.48)$$

El cociente de Sharpe es igual al exceso en el rendimiento medio dividido por la medida del riesgo total. En algunos casos, también se supone que existe un activo sin riesgo (r_f), como un bono del Estado, que presenta una varianza nula y una rentabilidad relativamente baja. El inversor puede comprobar si el exceso de rendimiento medio del portafolio ($E(r_p) - r_f$) es suficiente para compensar un riesgo mayor que el del portafolio de mercado. El cociente de Treynor es otra medida muy utilizada que se obtiene dividiendo el exceso de rendimiento por la beta del portafolio, usualmente la beta se estima mediante un modelo de regresión. En este estudio consideramos el cociente de Sharpe como medida de rendimiento, con un activo libre de riesgo igual a cero.

2.2. Modelo I: Modelo difusivo



Figura 2.2: Portafolio de mínima varianza

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

Antes de definir el movimiento Browniano, se definirá el concepto de procesos estocástico.

2.2.1. Definición

Definición 2.10 *Proceso estocástico*

Supongamos que con cada elemento s de un espacio muestral S de algún experimento aleatorio E , asociamos una función $X(t,s)$, donde t pertenece a $T \subset \mathbb{R}$. Al conjunto $\{X(t,s), t \in T\}$ se le llama proceso estocástico (o procesos aleatorio).

Usualmente el parámetro del proceso T se interpreta como el tiempo, entonces se dice que $X(t)$ representa el estado del proceso al tiempo t . El espacio de estados S representa los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria al tiempo t . Si el índice T es

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

contable, entonces, se dice que es un proceso a tiempo discreto, y si T es continuo se dice que es un proceso a tiempo continuo.

Cuando se trabaja con secuencias o familias de variables aleatorias, se aplican diferentes nociones de convergencia.

Para la función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos la convergencia para todo $\omega \in \Omega$ sin considerar aquellos eventos que son, de hecho, despreciables (es decir, con probabilidad cero). Esto nos lleva a la definición de **convergencia casi segura**.

Definición 2.6. Convergencia casi segura Sea $(X_n : n \in \mathbb{N})$ una secuencia de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria en el triple de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Decimos que $X_n \rightarrow X$ casi seguramente si $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$.

La noción de **convergencia en probabilidad** da una condición sobre la probabilidad de eventos cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición 2.7. Convergencia en probabilidad Una secuencia (X_n) de variables aleatorias en (Ω, \mathcal{F}, P) se dice que converge en probabilidad a una variable aleatoria X si para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0. \quad (2.2)$$

En la convergencia en probabilidad, consideramos la probabilidad de que $X_n - X$ esté al menos a una distancia ε del límite, mientras que para la convergencia casi segura consideramos toda la cola de la secuencia $(X_n)_{n \geq k}$. La implicación es que la convergencia casi segura es más fuerte que la convergencia en probabilidad.

Definición 2.8. Convergencia en distribución Una secuencia (X_n) de variables aleatorias con valores en E se dice que converge en distribución a una variable aleatoria X si, para una función acotada y continua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

2.2.2. Caminata aleatoria simple

Una caminata aleatoria simple discreta simétrica puede construirse lanzando repetidamente una moneda justa. Se asigna una probabilidad p al evento H (cara) y $q = 1 - p$ a la probabilidad del evento T (cruz), ambas iguales a $\frac{1}{2}$. Consideramos una secuencia infinita de lanzamientos con ω_n denotando el resultado del n -ésimo lanzamiento. Definimos

$$X_j = 1 \text{ si } \omega_j = H$$

y

$$X_j = -1 \text{ si } \omega_j = T,$$

y definimos

$$M_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

El proceso M_k , $k = 1, 2, \dots$, es una caminata aleatoria simétrica. Sea M_k , $k = 1, 2, \dots$, una caminata aleatoria simétrica. El **movimiento Browniano** se obtiene como el límite de la caminata aleatoria escalada

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Por otro lado, una realización o trayectoria se define como un posible camino que puede tomar la variable aleatoria en t . En la Figura 2.5 se representa una trayectoria del movimiento Browniano, en donde para cada t fija tenemos una variable aleatoria.

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

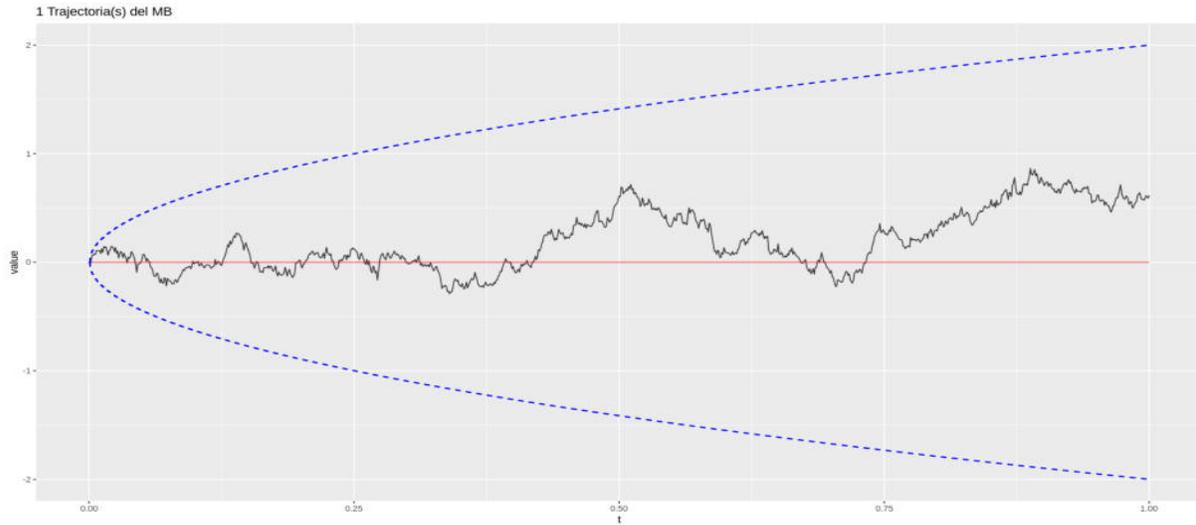


Figura 2.3: Trayectoria de un movimiento Browniano

Bajo ciertas condiciones cuando T es continuo y el espacio de estados S también lo es, a dicho proceso se le conoce como proceso de difusión. El movimiento Browniano es precisamente un proceso de difusión.

2.2.3. Movimiento Browniano

En 1827, el botánico escocés [Robert Brown \(1828\)](#) descubrió el movimiento Browniano tras examinar el polen de una planta suspendida en líquido bajo la lente de un microscopio. Observó que las diminutas partículas expulsadas del grano de polen mostraban un movimiento irregular continuo. En 1900, el matemático francés [Louis Bachelier \(1964\)](#) consideró el movimiento Browniano como un modelo para las acciones de la bolsa de París, definiendo matemáticamente el movimiento Browniano. Las leyes que rigen el movimiento Browniano fueron establecidas por [Albert Einstein \(1905\)](#). [Norbert Wiener \(1923\)](#) formalizó matemáticamente el movimiento Browniano, y es por esta razón que el movimiento Browniano también se conoce como el proceso de Wiener.

Lo que Einstein mostró, fue que la posición x de una partícula al tiempo t , descrita por

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

la ecuación de calor, y que tiene como solución

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

corresponde a la distribución normal, es decir que $f(x, t) \sim N(0, t)$.

Definición 2.11 *Movimiento Browniano*

Un procesos estocástico a tiempo continuo y espacio de estados continuo $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano estándar (proceso de Wiener), si satisface las siguientes propiedades:

- $W(0) = 0$.
- (Distribución normal) Para $t > 0$, $W(t)$ tiene distribución normal con media cero y varianza t .
- (Incrementos estacionarios) Para $s, t > 0$, $W(t + s) - W(s)$ tiene la misma distribución que $W(t)$. Esto es

$$\begin{aligned} P(W(t + s) - W(s) \leq z) &= P(W(t) \leq z) \\ &= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx, \quad \text{para } -\infty < z < \infty \end{aligned}$$

- (Incrementos independientes) Si $0 \leq q < r \leq s < t$, entonces $W(t) - W(s)$ y $W(r) - W(q)$ son variables independientes.
- (Trayectorias continuas).

$W(t)$ (es muy común denotarlo también como W_t) denota el proceso de Wiener, también denominado movimiento Browniano, que es un tipo de proceso estocástico de Markov. El proceso de Markov es especialmente fundamental en las finanzas, principalmente debido a que el valor futuro únicamente depende del valor actual, y los datos históricos son irrelevantes, es decir, la probabilidad de cualquier estado futuro no depende de los estados pasados, sino sólo del estado presente, lo que es especialmente importante cuando se

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

utilizan series sin memoria. De las propiedades del proceso de Wiener se desprende que el cambio medio es igual a cero y la varianza del cambio es igual al intervalo de tiempo considerado. Los puntos dos y tres de la definición de Movimiento Browniano especifican la función de distribución del proceso de Wiener que es gaussiano. Una implicación inmediata de segundo punto es que el proceso de Wiener tiene incrementos estacionarios ya que la distribución de $W(s + t) - W(s)$ depende sólo de t .

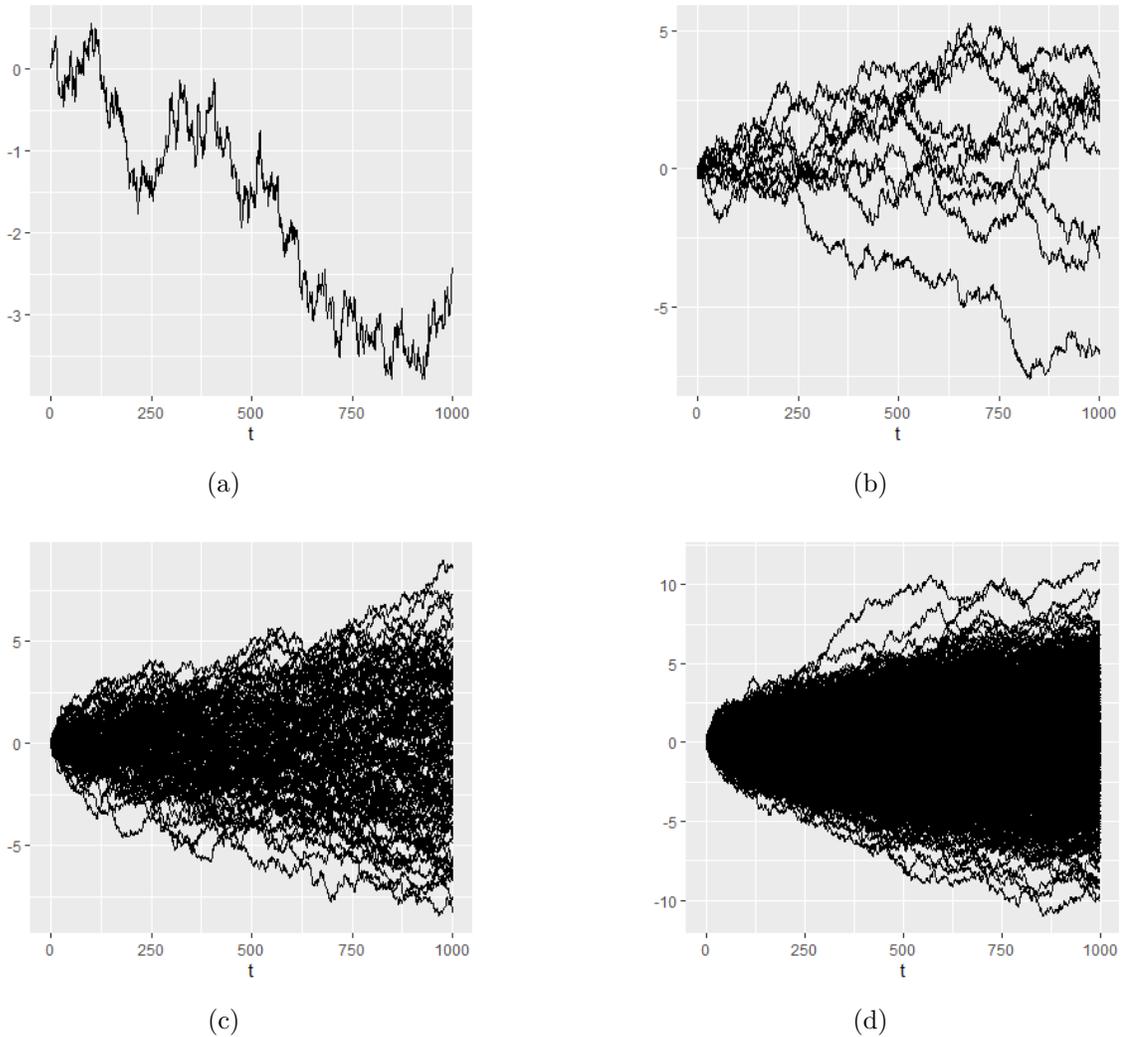


Figura 2.4: Simulación de trayectorias del MB. (a) 1 trayectoria. (b) 10 trayectorias. (c) 100 trayectorias. (d) 1000 trayectorias

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

La función de autocovarianza de W para $s \leq t$ está dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov(W(s), W(t)) &= \mathbb{E}([W(s) - W(0)][W(t) - W(0)]) \\ &= \mathbb{E}([W(s) - W(0)]^2 + [W(s) - W(0)][W(t) - W(s)]) \\ &= s\end{aligned}$$

Se puede verificar que para $t \leq s$ $\mathbb{C}ov(W(s), W(t)) = t$, por lo cual se tiene que

$$\mathbb{C}ov(W(s), W(t)) = \min(s, t), \quad \text{para todo } s, t \geq 0 \quad (2.49)$$

El movimiento Browniano puede ser pensado como el movimiento de una partícula que se difunde aleatoriamente a lo largo de una línea. En cada punto de t , la partícula está normalmente distribuida sobre la línea con la variación t . A medida que t incrementa, la posición de la partícula es más difusa, tal como se muestra en la Figura (2.5) (Dobrow, 2016).

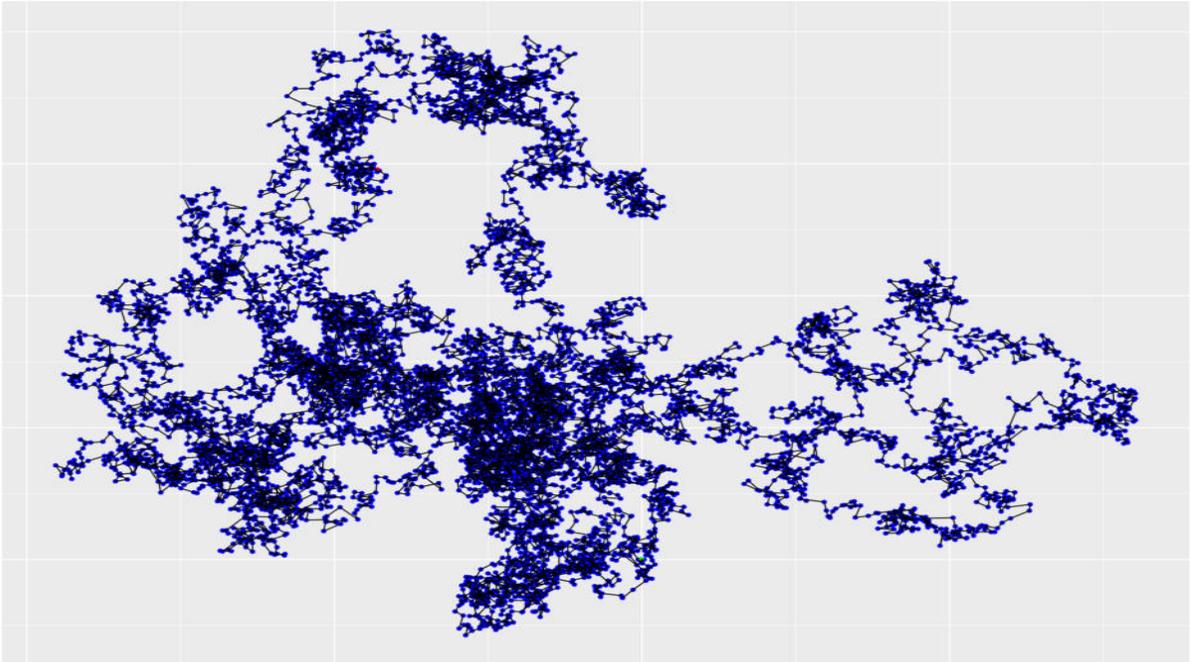


Figura 2.5: Trayectoria de un movimiento Browniano en dos dimensiones

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

2.2.4. Procesos Brownianos correlacionados

Para correlacionar dos procesos que siguen un movimiento Browniano estándar, consideremos el proceso $W^a(t)$, y otro proceso denotado como $W^b(t)$, ambos independientes, entonces para $0 \leq t \leq T$, y $-1 \leq \rho \leq 1$ se define el proceso

$$Z(t) = \rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t) \quad (2.50)$$

donde $Z(t) \sim N(0, t)$, para verificarlo obtenemos el valor esperado

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E\left[\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t)\right] \\ &= \rho E[W^a(t)] + \sqrt{1 - \rho^2} E[W^b(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

y la varianza

$$\begin{aligned} Var(Z(t)) &= Var\left(\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t)\right) \\ &= \rho^2 Var(W^a(t)) + (1 - \rho^2) Var(W^b(t)) \\ &= t \end{aligned}$$

2.2.5. Definición de proceso de difusión

Definición 2.12 *Proceso de difusión*

Un proceso estocástico a tiempo continuo y estado continuo $\{X(t), t > 0\}$, cuyo espacio de estados es un intervalo (a, b) , es un proceso de difusión si satisface

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[|X(t + \epsilon) - X(t)| > \delta | X(t) = x] = 0 \quad (2.51)$$

$\forall \delta > 0$ y $\forall x \in (a, b)$ y si sus parámetros infinitesimales definidos por

$$m(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[X(t + \epsilon) - X(t) | X(t) = x] \quad (2.52)$$

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

y

$$v(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[(X(t+\epsilon) - X(t))^2 | X(t) = x] \quad (2.53)$$

son funciones continuas de x y de t . [Lefebvre \(2007\)](#)

Para verificar que el movimiento Browniano estándar es un proceso de difusión se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(|B(t+\epsilon)| > \delta | B(t) = x) &= \frac{P(|B(t+\epsilon)| > \delta, B(t) = x)}{P(B(t) = x)} \\ &= \frac{P(B(t) = x, |B(t+\epsilon) - B(t)| > \delta - x)}{P(B(t) = x)} \\ &= \frac{P(B(t) = x)P(|B(t+\epsilon) - B(t)| > \delta - x)}{P(B(t) = x)} \\ &= P(|B(t+\epsilon) - B(t)| > \delta - x) \\ &= P(|B(\epsilon)| > \delta - x) \\ &= P(\sqrt{\epsilon}|B(1)| > \delta - x) \\ &= P\left(|B(1)| > \frac{\delta - x}{\sqrt{\epsilon}}\right) \\ &= 2\left(1 - P\left(Z \leq \frac{\delta - x}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right) \end{aligned}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$, la cual puede representarse como (ver [Lefebvre \(2007\)](#))

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) \quad (2.54)$$

donde $\operatorname{erf}(\cdot)$ es la función error, cuya expresión es

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \dots\right) \quad (2.55)$$

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

para $x > 1$ el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon} \left(1 - \Phi \left(\frac{\delta - x}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right) = 0$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon} E[B(t + \epsilon) - B(t) | B(t) = x] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon} E[B(\epsilon)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[(B(t + \epsilon) - B(t))^2 | B(t) = x] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[(B(\epsilon))^2] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{Var}(B(\epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \\ &= 1 \end{aligned}$$

Los parámetros del movimiento Browniano son constantes, por lo que las funciones $m(x, t)$ y $v(x, t)$ también lo son.

2.2.6. Movimiento Browniano Geométrico

Con el descubrimiento fundamental de Bachelier en 1900 de que el precio de un activo riesgoso puede ser descrito por el movimiento Browniano, una nueva área de aplicación nació. Sin embargo, el movimiento Browniano puede asumir valores negativos, propiedad que no es muy deseable para el precio de un activo. [Black and Myron \(1973\)](#) y [Merton \(1973\)](#) Merton sugirieron otro proceso estocástico como un modelo para el precio de un activo. Dicho proceso se conoce con el nombre de movimiento Browniano geométrico.

El movimiento Browniano geométrico es especialmente útil en el estudio de precios de activos financieros porque el proceso en cuestión supone que las variaciones porcentuales

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

son independientes y se distribuyen de forma idéntica a lo largo de periodos de tiempo iguales y no traslapados. A diferencia del movimiento Browniano cuyo término de deriva es constante, el movimiento Browniano geométrico asume que la tasa de rendimiento esperada instantáneamente es constante. Por lo tanto, la suposición de deriva instantánea esperada constante del proceso Browniano estándar se sustituye por la tasa de rendimiento esperada constante en el proceso Browniano geométrico.

Para ejemplificar el modelo consideremos la siguiente aproximación sea $S(t)$ el precio de un activo financiero, supongamos el precio de cierre de una acción observada al tiempo t , en días. Definamos el rendimiento simple como

$$r_t = \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)} \quad (2.56)$$

Un modelo sencillo para describir los rendimientos r_t podría escribirse como

$$r_t = \mu + \epsilon_t \quad (2.57)$$

donde μ representa el rendimiento esperado, y u_t representa variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a. iid) con distribución normal, es decir $N(0, \sigma^2)$. Podríamos pensar en modelar el término aleatorio como $u_t = \sigma\epsilon_t$, lo cual sería razonable, ya que en periodos de alta volatilidad, es frecuente observar un aumento en la varianza. De Eq(2.56) y Eq(2.57) se tiene que

$$S(t) - S(t-1) = \mu S(t-1) + \sigma S(t-1)\epsilon_t \quad (2.58)$$

Dado que el tiempo t es discreto, las diferencias son también discretas. Para extenderlo a un espacio de tiempo continuo $[0, \infty)$, consideremos la partición $0, t_0 < \dots < t_n < \dots$ y

$$S(t_i) - S(t_{i-1}) = \mu S(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \sigma S(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad (2.59)$$

donde $\{W(t) : t \geq 0\}$ representa el movimiento Browniano, y $\Delta t = t_i - t_{i-1}$. Se puede notar que para $\Delta t = 1$ se tiene la expresión de la Eq(2.58). Cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se verificar

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

que el proceso $S(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2.60)$$

Definición 2.13 (Movimiento Browniano Geométrico) *Un proceso estocástico $S(t)$ se dice que sigue un Movimiento Browniano Geométrico (MBG) si satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$dS(t) = c_1 S(t)dt + c_2 S(t)dW(t) \quad (2.61)$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener, c_1 y c_2 son constantes.

Debido a que en general no es fácil obtener soluciones explícitas para estimar las constantes c_1 y c_2 existen muchas técnicas numéricas para resolver este problema [23]. El método de Kessler, que consideramos utilizar en este trabajo, nos permite estimar los parámetros de una ecuación diferencial estocástica a partir de una expansión de Ito-Taylor de orden superior y la aproximación final resulta en una densidad gaussiana condicional densidad, para más referencias ver [M. Lacus \(2008\)](#) Stefano (2008).

Proposición 2.1 (Lema de Itô) *Sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t)$$

y sea $f(x, t)$ una función doblemente diferenciable con variables x y t el lema de Itô establece que

$$df(X(t), t) = \left[\frac{\partial f(X, t)}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial f(X, t)}{\partial x} + \frac{b^2(X, t)}{2} \frac{\partial^2 f(X, t)}{\partial x^2} \right] dt + b(X, t) \frac{\partial f(X, t)}{\partial x} dW(t)$$

Para obtener $f(X, t)$ del movimiento Browniano Geométrico, integramos la Eq(2.61) y obtenemos que $f(X, t) = \ln(S(t))$, entonces aplicamos el lema de Itô

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

$$d\ln S(t) = c_1 dt + c_2 dW(t) - \frac{1}{2}c_2^2 dt$$

solucionando

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \left(c_1 - \frac{c_2^2}{2}\right)t + \sigma W(t)$$

y

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(c_1 - \frac{c_2^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Un modelo que representa un mercado con instrumentos derivados, para los que se quiere determinar los precios fue desarrollado por Black y Scholes (1973). Ese proceso puede representar varias cosas en finanzas, como una posición de cartera en uno o más activos, o el valor de una opción, que está relacionado con el precio del activo, se expresa como

$$e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \tag{2.62}$$

Resolviendo esta ecuación, se llega a una forma teórica cerrada, la fórmula Black-Scholes, para el precio de la opción. Existe otra forma muy elegante de calcular el precio de una opción, que no implica el uso de ecuaciones diferenciales parciales. La idea es partir siempre de un principio de no arbitraje, pero implica cambiar la forma en que se mira el proceso. La condición para que esto ocurra puede enunciarse como el primer teorema fundamental de la valoración de activos.

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

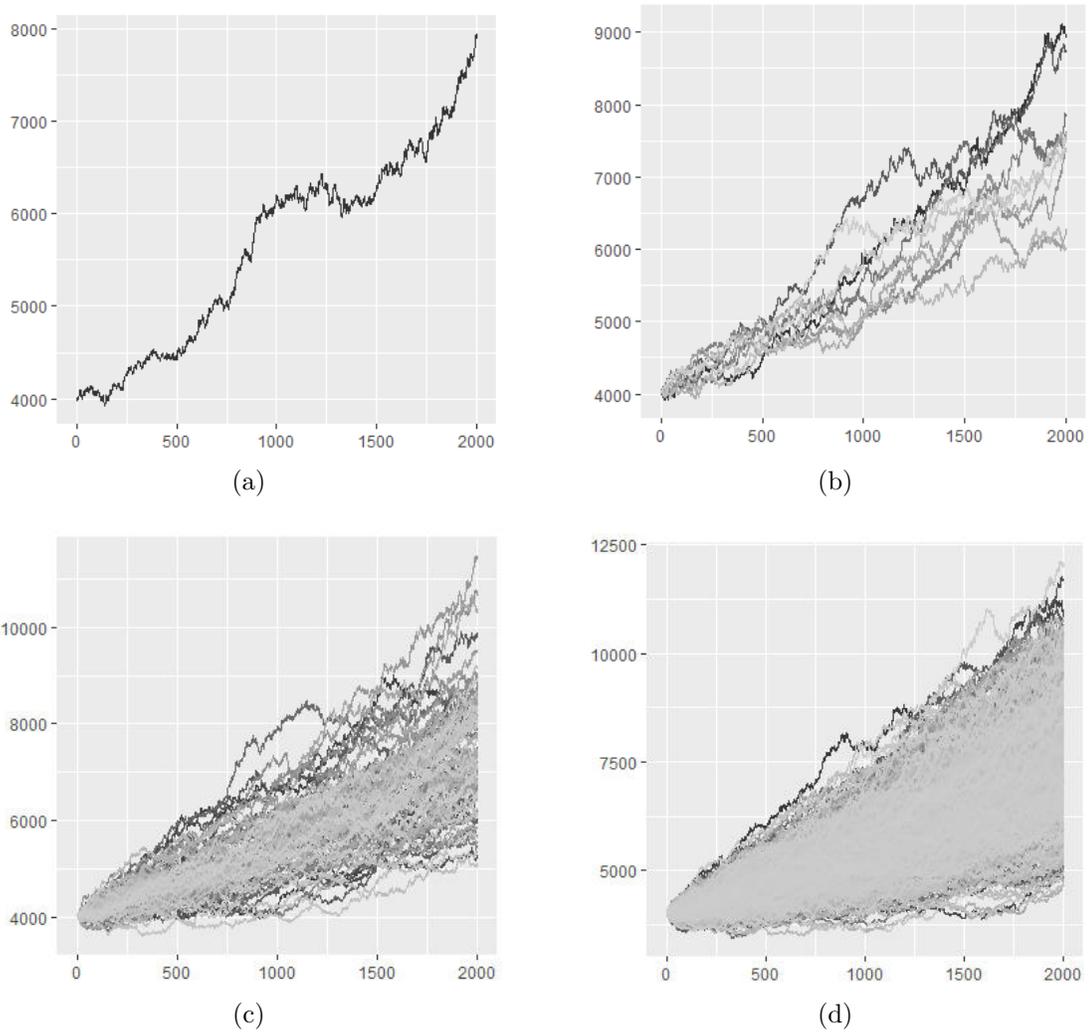


Figura 2.6: Simulación de trayectorias del MBG con $c_1 = 0.625$ y $c_2 = 0.16$ (a) 1 trayectoria. (b) 10 trayectorias. (c) 100 trayectorias. (d) 1000 trayectorias

2.2.7. Procesos Brownianos geométricos correlacionados

Para solucionar el MBG primero se aplicó $u(t, x(t)) = \ln(x)$ y empleando el lema de Itô, se obtuvo la siguiente expresión:

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(c_1 - \frac{c_2^2}{2} \right) t + c_2 W(t) \right) \quad (2.63)$$

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

considerando $r_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$, y los siguientes dos procesos

$$r^a(t) = \left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)t + c_2^a \left(\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t)\right) \quad (2.64)$$

$$r^b(t) = \left(c_1^b - \frac{c_2^{b2}}{2}\right)t + c_2^b W^a(t) \quad (2.65)$$

donde $W^a(t)$ and $W^b(t)$ corresponden a dos procesos de Wiener, con $\rho \in [-1, 1]$ que representa el coeficiente de correlación de los procesos $W^a(t)$ y $W^b(t)$. c_1^a , c_1^b , c_2^{a2} y c_2^{b2} son constantes que tienen que ser estimadas.

La teoría de portafolios se desarrolló para encontrar el portafolio óptimo cuando un inversor se preocupa por las distribuciones de los rendimientos. Se supone que un inversor estima la media y la varianza de los rendimientos de cada activo considerado. Además, es necesario estimar las correlaciones o covarianzas entre todos los pares de activos considerados [Elton \(1997\)](#). Si suponemos que cada serie financiera sigue un MBG y si calculamos sus momentos, obtendríamos valores que no serían constantes en el tiempo.

Considerando lo anterior, las siguientes expresiones obtenidas, para el valor esperado, para los procesos a y b son

De las ecuaciones 2.63, y 2.64, el valor esperado viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r^a(t)] &= E \left[\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2} \right) t + c_2^a \left(\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t) \right) \right] \\ &= \mu_a t, \\ \mathbb{E}[r^b(t)] &= E \left[\left(c_1^b - \frac{c_2^{b2}}{2} \right) t + c_2^b W^a(t) \right] \\ &= \mu_b t \end{aligned}$$

y

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

$$\begin{aligned}
Cov\left(\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t), W^a(t)\right) &= E\left[(\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t))(W^a(t))\right] - \\
&E\left[(\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t))\right] E[W^a(t)] \\
&= E\left[\rho(W^a(t))^2 + \sqrt{1 - \rho^2} W^a(t) W^b(t)\right] \\
&= \rho E\left[(W^a(t))^2\right] + \sqrt{1 - \rho^2} E\left[W^a(t) W^b(t)\right] \\
&= \rho E\left[(W^a(t))^2\right] + \sqrt{1 - \rho^2} E[W^a(t)] E[W^b(t)] \\
&= \rho t
\end{aligned}$$

la varianza

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar[r^a(t)] &= \mathbb{E}[r^a(t)^2] - \mathbb{E}[r^a(t)]^2 \\
&= E\left[\left(\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)t + c_2^a (\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t))\right)^2\right] \\
&- E\left[\left(\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)t + c_2^a (\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t))\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right) c_2^a (\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t)) t\right. \\
&+ \left. \left(c_2^a (\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t))\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)t + c_2^a (\rho W^a(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^b(t))\right)^2\right] \\
&= \left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)^2 t^2 + c_2^{a2} t^2 - \left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2}\right)^2 t^2 \\
&= c_2^{a2} t^2
\end{aligned}$$

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

La covarianza viene dada por

$$\begin{aligned}\text{Cov}[r^a(t), r^b(t)] &= \mathbb{E} \left[\left(\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2} \right) t + c_2^a W^a(t) \right) \left(\left(c_1^b - \frac{c_2^{b2}}{2} \right) t + c_2^b W^b(t) \right) \right] - \\ &\quad \mathbb{E} \left[\left(c_1^a - \frac{c_2^{a2}}{2} \right) t + c_2^a W^a(t) \right] \mathbb{E} \left[\left(c_1^b - \frac{c_2^{b2}}{2} \right) t + c_2^b W^b(t) \right] \\ &= c_1^a c_1^b \mathbb{E}(W_a(t) W_b(t)) \\ &= c_1^a c_1^b \rho t\end{aligned}$$

Tomando en cuenta las estimaciones de la Eq. 18 y Eq. 19 para el modelo de MV se asume que los rendimientos siguen un proceso de difusión, lo cual significa que su varianza aumenta a medida que aumenta t .

2.2.8. Estimación de parámetros

Para estimar parámetros de ecuaciones diferenciales estocásticas existen diversos métodos, por un lado están los métodos que tratan de aproximar las trayectorias de una difusión, y por otro los que tratan de aproximar la probabilidad.

Método de Euler

El método de Euler es utilizado para generar soluciones a ecuaciones diferenciales deterministas. En el caso de ecuaciones diferenciales estocásticas para el proceso $X(t)$, $0 \leq x \leq T$ la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t) \quad (2.66)$$

con valor inicial $X(t_0) = X_0$, y discretización en el intervalo $[0, T]$, $0 < t_0 < \dots < t_N = T$. La aproximación de Euler X satisface el la siguiente expresión

2.2. Modelo I: Modelo difusivo

$$Y(i+1) = Y(i) + a(Y(i), t_i)(t_{i+1} - t_i) + b(Y(i), t_i)(W(i+1) - W(i)) \quad (2.67)$$

para $i = 1, 2, \dots, N - 1$, con $Y_0 = X_0$. Otra aproximación es considerar una interpolación lineal definida como

$$Y(i+1) = Y(i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(Y(i+1) - Y(i)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (2.68)$$

Método de Kessler

Kessler(1997) propuso un método basado en la expansión de Itô -Taylor de orden superior en la aproximación de la densidad condicional. La aproximación consiste en una densidad gaussiana condicional con los parámetros E_x y V_x como sigue:

$$E_x = x + b(x, t)dt + \left(b(x, t)b_x(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)b_{xx}(x, t) \right) \frac{(dt)^2}{2} \quad (2.69)$$

$$V_x = x^2 + \left(2b(x, t)x + \sigma^2(x, t) \right) dt + \left(2b(x, t)(b_x(x)x + b(x, t) + \sigma(x, t)\sigma_x(x, t)) + \sigma^2(x, t)(b_{xx}(x, t)x + 2b_x(x, t) + \sigma^2(x, t) + \sigma(x, t)\sigma_{xx}(x, t)) \right) \frac{(dt)^2}{2}$$

(2.71)

2.3. Modelo II: Decaimiento exponencial en las covarianzas

Crear un portafolio óptimo basado en el modelo de media-varianza requiere una medida de la covarianza entre todos los activos disponibles en el espacio de inversión. Esta matriz de covarianza es el centro de la optimización del rendimiento ajustado por riesgo, pero no se puede observar directamente en el mercado. Por lo tanto, es necesario estimarla sobre datos históricos, lo que, genera dos problemas distintos. Primero, las varianzas de los activos dependen del tiempo, lo que hace que las observaciones antiguas sean menos fiables como estimadores que las actuales. Segundo, la estimación puede contener errores que distorsionarán la optimización posteriormente.

Al seleccionar datos históricos, la suposición de que la volatilidad del mercado y las correlaciones dependen del tiempo hace viable centrarse en horizontes más cortos con frecuencias más altas para estimar los riesgos de los activos. Incorporar volatilidades demasiado antiguas contaminará las estimaciones con datos irrelevantes, según Litterman (2003). El supuesto de la teoría de portafolios de Markowitz sobre la estacionariedad de los rendimientos de los activos es un problema bien conocido. Esto implica que la distribución conjunta de los rendimientos de los activos no cambia con el tiempo. La matriz de covarianza de los rendimientos de los activos se utiliza para determinar cuánto debe elegir un inversor mantener en el contexto de la diversificación cuando se involucra el modelo de Markowitz. Esto crea el portafolio de media-varianza, que determina cuánto riesgo se asume para un rendimiento esperado.

Estimar con precisión una matriz de covarianza es de gran importancia en la optimización de portafolios y cuando se trata de gestión de riesgos. La propuesta inicial de Markowitz era utilizar la matriz de covarianza muestral para la estimación. Sin embargo, investigaciones y estudios posteriores han demostrado que esta no es la mejor técnica o enfoque, ya que funcionan mal fuera de muestra (Jobson y Korkie (1981)). Dado que se asume la estacionariedad de los rendimientos de los activos, una matriz de covarianza muestral no proporciona información significativa sobre cómo invertir, dado un conjunto de posibles cambios en el mercado.

2.3. Modelo II: Decaimiento exponencial en las covarianzas

Según la hipótesis del mercado eficiente (HME), los rendimientos de las inversiones no pueden predecirse más allá de su comportamiento medio y sus fluctuaciones no presentan estructuras temporales y espaciales particulares que puedan utilizarse para obtener rendimientos extraordinarios (F. Fama, 1970). La HME, al menos en su forma débil que considera los precios históricos como la única información relevante, cuenta con un gran número de pruebas empíricas que la respaldan y hoy en día es casi universalmente aceptada como característica de una economía bien desarrollada con mercados avanzados (Paul, 1999). Se han hallado pruebas significativas de que la HME se aleja de la teoría en las economías emergentes y en periodos de inestabilidad económica (Heckens, 2022, Paul, 1999). La previsibilidad de los precios en mercados eficientes a escalas temporales suficientemente cortas o considerando marcos que van más allá de la descripción estocástica tácitamente lineal que implica la HME han sido, por otra parte, ampliamente estudiados (Fischer, 2018, Paul, 1999). En este trabajo nos centramos en la validez práctica de la HME en mercados bien desarrollados durante periodos de recesión a gran escala, en particular la crisis financiera de 2008 y la COVID-19 recesión. Por validez práctica nos referimos a la generación real de beneficios superiores mediante la explotación de posibles desviaciones de la HME en momentos turbulentos como los considerados.

Se utiliza un modelo de predicción de covarianza espacio-temporal que es coherente con los procesos estocásticos lineales y de memoria corta en los que se basa tácitamente la HME, para actualizar mensualmente los coeficientes que entran en la función objetivo de minimización del riesgo del paradigma clásico de Markowitz de media-varianza para la selección de carteras. También se estudian empíricamente las correlaciones reales y se muestra que para los índices bursátiles considerados, la situación en ambos periodos de recesión considerados, las correlaciones entre las opciones muestran una estructura a gran escala. A pesar de ello, el modelo de covarianza predictiva es incapaz de batir al mercado, no mostrando ninguna mejora estadísticamente significativa en el beneficio medio. El estudio también muestra, sin embargo, que a pesar de la solidez de la HME en términos de beneficio medio, durante las crisis las correlaciones emergentes a gran escala conducen a una subestimación significativa del riesgo de las carteras óptimas resultantes si no se tienen en cuenta las correlaciones emergentes. El modelo de covarianza espaciotemporal propuesto es capaz de captar mejor el riesgo real de las carteras y abre la puerta a

2.3. Modelo II: Decaimiento exponencial en las covarianzas

formulaciones estocásticas más generales para modelizar el comportamiento a media escala temporal de los mercados. Aunque existen estudios que analizan las carteras óptimas en el contexto de las crisis recientes, hasta donde sabemos estos otros trabajos se centran en recomendaciones cualitativas (Wang, 2022, Yoshino, 2021), sin un enfoque estadístico completo integrado en un modelo predictivo del riesgo.

2.3.1. Decaimiento exponencial en las covarianzas

Existe amplia evidencia empírica a favor de la Hipótesis del Mercado Eficiente durante periodos de estabilidad económica en escalas temporales medias (diarias a mensuales) (Malkiel, 2013). Por tanto, una forma adecuada de modelizar las fluctuaciones de los mercados es mediante procesos estocásticos lineales estacionarios (Dua and Tuteja, 2021, Kuang Yu Huang, 2009). Este tipo de procesos aleatorios suelen mostrar un decaimiento exponencial en las autocorrelaciones temporales y un decaimiento exponencial de las correlaciones con la distancia en el caso de sistemas espacialmente extendidos, para las autocorrelaciones. Por autocorrelación, nos referimos al grado de asociación (correlación) de una variable aleatoria retardada diferentes periodos, la misma definición se aplica a la autocovarianza, que son distintas de las correlaciones. En las Figuras 2.7, y 2.8 se muestran ejemplos de decaimiento esponencial de las covarianzas entre pares de activos, WMF y KO, y MSFT y APPL, puede notarse que el decaimiento tiende no a cero, pero sí a un valor muy cercano a cero.

2.3.2. Modelo

En este contexto se considerará la covarianza entre dos variables aleatorias. Por lo tanto, se propone una variación del modelo MV que también es coherente con la HME,

2.3. Modelo II: Decaimiento exponencial en las covarianzas

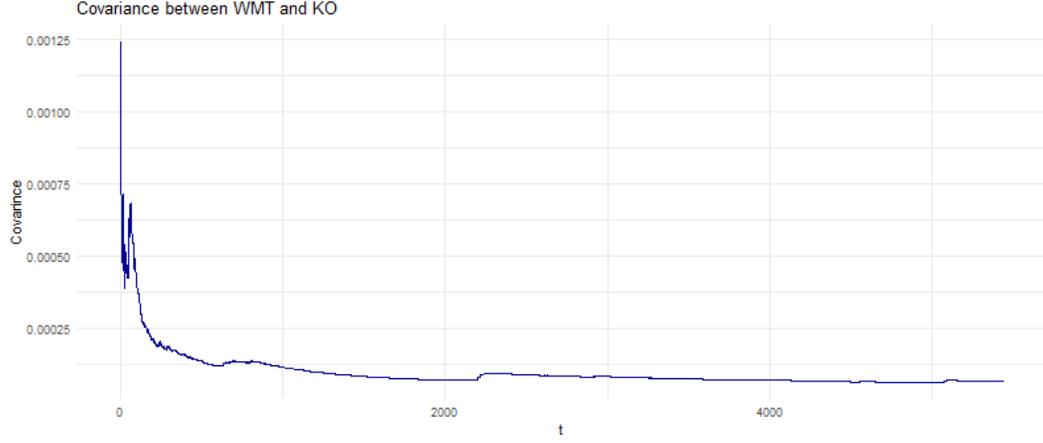


Figura 2.7: Covarianza entre WMF y KO

$$\min \text{Var}(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \alpha_i e^{-\gamma_i t} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \alpha_{ij} e^{-\beta_{ij} |\bar{r}_i - \bar{r}_j|} e^{-\gamma_{ij} t} \quad (2.72)$$

$$s.t. \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (2.73)$$

$$w_i \geq 0 \quad (2.74)$$

$$a \leq w_i \leq b \quad (2.75)$$

$$0 \leq a < b \leq 1$$

Donde el término de la derecha de la Ec.(2.72), por analogía con el modelo MV, mide las fluctuaciones entre dos activos, es decir covarianzas, y cuando $i = j$, se reduce al término de la izquierda, que mide las fluctuaciones individuales, tal como las varianzas. $|\bar{r}_i - \bar{r}_j|$ representa la diferencia media entre dos activos i, j en el momento t . R denota la función para medir la volatilidad. α_{ij} , β_{ij} y γ_{ij} son parámetros que deben estimarse del mismo modo que el modelo MV estándar, w_i representa el peso del activo i -ésimo y a y b son constantes, y t es un valor temporal discreto con $t = 1$ para cualquier período inicial en días. En las aplicaciones financieras reales, los profesionales se ocupan del problema de programación cuadrática estrictamente convexo, para el que existe un mínimo global único si la matriz de coeficientes de la función objetivo es definida positiva (D. Goldfarb, 1983). La definición positiva de la matriz de coeficientes tanto en las covarianzas estimadas como

2.3. Modelo II: Decaimiento exponencial en las covarianzas

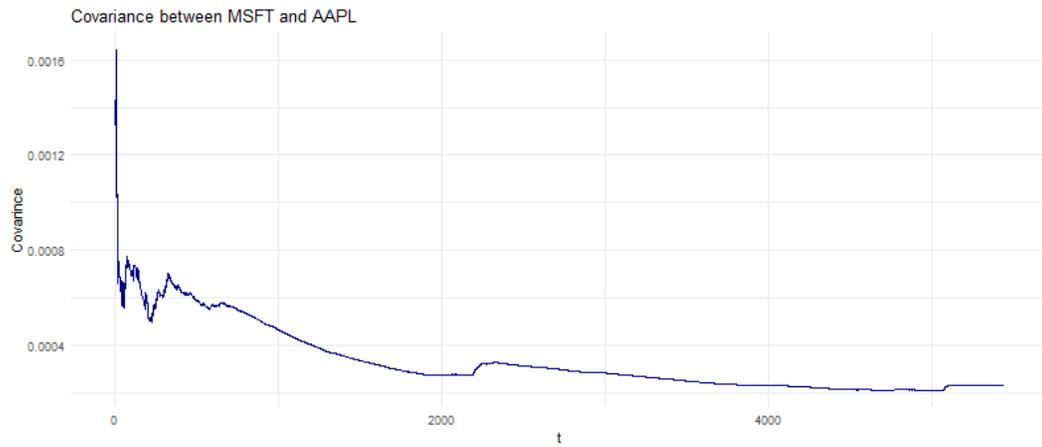


Figura 2.8: Covarianza entre MSFT y APPL

en las predichas por el modelo está asegurada por el método bending transform, discutido en [Ali Nilforooshan \(2020\)](#).

Capítulo 3

Metodología

3.1. Materiales

3.1.1. Modelo I

Para el modelo basado en el movimiento Browniano geométrico se consideró el precio de cierre de activos de evarios índices, los cuales se obtuvieron de yahoo finanzas, se describe a continuación.

- Down Jones : de enero 1990 a diciembre 2020. Los símbolos considerados son: WMT, MRK, INTC, MSFT, MMM, AAPL, VZ, JNJ, KO, PG, UNH, PFE, WBA, CAT, MCD, IBM, NKE, DIS, HD, TRV, RTX, AXP, CVX, JPM, XOM, y BA.
- FTSE100 : de enero de 2008 a diciembre de 2020: RMV.L, AHT.L, EXPN.L, RTO.L, ABF.L, STJ.L, BATS.L, PRU.L, GVC.L, SMIN.L, CPG.L, SPX.L, SSE.L, BA.L, VOD.L, SDR.L, SLA.L, RB.L, TSCO.L, RR.L, y ANTO.L.
- IPC : de enero 2008a diciembre de 2020. MEGACPO.MX, ALSEA.MX, AC.MX, KIMBERA.MX, AMXL.MX, GRUMAB.MX, GCARSOA1.MX. BIMBOA.MX, GCC.MX, OMAB.MX, PINFRA.MX, GMEXICOB.MX, FEMSAUBD.MX, GAPB.MX, ASURB.MX, TELEVISACPO.MX, CEMEXCPO.MX, y GFNORTEO.MX.

3.1. Materiales

- Hang Seng : de enero de 2005 a diciembre de 2020. X1038.HK, X0027.HK, X0003.HK, X1044.HK, X0241.HK, X0002.HK, X0101.HK, X0012.HK, X2628.HK, X0006.HK, X0016.HK, X0267.HK, X0883.HK, X2319.HK, X1093.HK, X0386.HK, y X0669.HK.
- IBOVESPA: de enero de 2005 a diciembre de 2020. RADL3.SA, BBAS3.SA, PETR4.SA, USIM5.SA, LAME4.SA, PETR3.SA, OIBR4.SA, UGPA3.SA, BBDC3.SA, ENBR3.SA, ITSA4.SA, CCRO3.SA, CMIG4.SA, SBSP3.SA, LREN3.SA, y BRKM5.SA.

3.1.2. Modelo II

El modelo se evaluó considerando una muestra de datos históricos de varios activos que componen siete mercados de bursátiles. Para formar cada portafolio el periodo considerado fue de enero de 2000 hasta diciembre de 2020, de los siguientes mercados bursátiles: Dow Jones Industrial Average (DJIA) índice bursátil de las 30 empresas más importantes que cotizan en las bolsas de Estados Unidos, el índice alemán (DAX) que contiene las 30 empresas alemanas más importantes que cotizan en la Bolsa de Frankfurt, el Financial Times Stock Exchange 100 (FTSE100) índice que contiene las 100 empresas que cotizan en la Bolsa de Londres, el Standard and Poor's 500 (S&P500) el índice de las 500 grandes empresas que cotizan en las bolsas de Estados Unidos, la Bolsa de Nueva York (NYSE), la bolsa de la National Association of Securities Dealers Automated Quotations (NASDAQ) y los fondos cotizados (ETF's) del NASDAQ. Las cuatro primeras bolsas se obtuvieron de la API de Yahoo! Finance, y las tres últimas de la API de Alpha Vantage para datos de mercado, en ambos casos a través de bibliotecas disponibles en Python. En las siguientes líneas se muestran las muestras correspondientes a cada mercado bursátil.

- DJIA : WMT, MRK, INTC, MSFT, MMM, AAPL, VZ, JNJ, KO, CSCO, PG, UNH, PFE, WBA, CAT, MCD, IBM, NKE, DIS, HD, TRV, RTX, AXP, CVX, JPM, XOM, BA.
- FTSE100 : AHT.L, RTO.L, ABF.L, STJ.L, BATS.L, SMT.L, PRU.L, SMIN.L, SPX.L, SSE.L, BA.L, VOD.L, SDR.L, TSCO.L, RR.L, ANTO.L.
- DAX : BAS.DE, ALV.DE, BAYN.DE, HEI.DE, DBK.DE, CON.DE, MRK.DE,

3.2. Método

FRE.DE, ADS.DE, DTE.DE, SIE.DE, FME.DE, PUM.DE, RWE.DE, BMW.DE, VOW3.DE.

- S&P500 : ABT, ATVI, ALK, ALB, LNT, AEE, AEP, AXP, AIG, AME, AMGN, APH, AOS, APA, AMAT, ADM, T, AVY, BLL, DUK, EA.
- NASDAQ : FRPH, GAIA, GCBC, HUBG, FITB, FONR, HA, CALM, HSIC, FCCY, FORD, FWRD, FBNC, FMBI, GIF1, GILT, FNLC, FLIC, HIBB, EBAY, HBAN, FMBH, HELE, GSBC, FCAP, FLEX, EMCF, HDSN, HTLF.
- NYSE : AB, ABM, ABT, ADM, AEM, AFG, AIN, AIR, AIT, AJG, ALK, ALX, AON, AVY, BAM, BCE, BEN, BIO, BTI, CAJ, CAL, CDE, CLX, COP.
- NASDAQ (ETFs) : IIF, MCI, JHS, MFL, DSU, MFM, HIX, BSD, HQL, EVN, SWZ, MZA, IIM, NAZ, MIY, CXH, VBF, NUV, VLT, NAC, MIN, MCR, ASA, VPV, EVF, MQT, NUO, VKQ, GUT, KTF.

3.2. Método

3.2.1. Modelo I

Los inversores buscan diversificar los activos a la hora de invertir, pero resulta poco práctico mantener muchos activos, debido a que la cantidad de costos de transacción que hay que pagar elevaría considerablemente el costo total y, la administración de dichos activos puede resultar muy tediosa ([Dietmar., 2005](#)). Un enfoque que podría ser útil consiste en reducir el tamaño del problema, que consiste en seleccionar determinados activos de un universo más amplio ([Tolun Tayali, 2020](#)). Por otro lado la administración de un portafolio implica un proceso secuencial de toma de decisiones a lo largo de múltiples períodos de rebalance ([Park Hyungjun and Dong., 2020](#)).

Para determinar la cantidad a invertir se procedió de la siguiente manera:

- Primero, para un conjunto de n activos de un índice se seleccionaron los $k = 6$ con mayor rendimiento promedio, para el periodo 01-01-2000 al 31-10-2007. siguiente

3.2. Método

pasos consiste en obtener los parámetros para todas las combinaciones de pares de activos, suponiendo que éstos siguen un movimiento Browniano geométrico. Para ello se empleó la librería "*Sim.DiffProc*", disponible en **R** cuya función *fitsde()* permite estimar los parámetros de diversos tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas.

- Posteriormente se emplearon las ecuaciones 2.66 y 2.67 para formar la matriz de covarianzas con los 6 activos considerados.
- Con lo anterior, el paso siguiente consiste en aplicar el optimizador para obtener los pesos óptimos.
- Finalmente emplear los pesos obtenidos para invertirlo durante el año siguiente, es decir, 01 – 01 – 2008 al 31 – 12 – 2008.
- Para el experimento se consideró varios valores de k , que van de 6 hasta 10, por lo que, todos los pasos anteriores se repiten para $k = 7$, hasta $k = 10$ (ver Figura 3.1).
- Por último todos los pasos anteriores se repiten siete veces, para todas las muestras consideradas de cada índice.

En la Figura 3.1, se muestran los intervalos traslapados para la actualización de los pesos, a partir del 01-01-2007 se actualizan los pesos, con 7 años de históricos, los pesos obtenidos se invierten durante el siguiente año a partir del cual se vuelven a estimar los pesos nuevamente, considerando 7 años de históricos, y el mismo proceso continúa de la misma forma, cada año recalculando los pesos, hasta el último periodo, 31-12-2020. Al final se acumulan los rendimientos obtenidos en cada periodo de inversión para obtener los rendimientos del portafolio, y con ellos evaluar su desempeño y obtener los rendimientos acumulados los cuales son un indicativo de lo que diariamente se gana o pierde en términos de rendimiento. El mismo proceso se realizó con el modelo estándar de media-varianza, así también se consideró comparar los resultados considerando un portafolio igualmente ponderado, es decir, que cada activo dentro del portafolio recibe el mismo peso, el cual es fijo para todos los periodos de evaluación.

3.2. Método

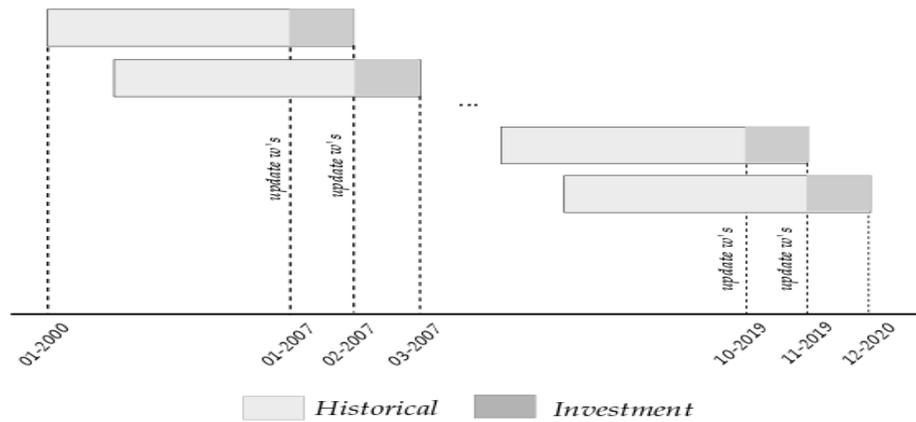


Figura 3.1: Proceso de actualización de los pesos

Prueba de rachas (Run test)

Dada una secuencia ordenada de uno o más tipos de símbolos, se denomina secuencia a una sucesión de uno o más tipos de símbolos que van seguidos y precedidos de un símbolo distinto o de ningún símbolo. Los indicios de falta de aleatoriedad los proporciona cualquier tendencia de los símbolos a mostrar un patrón definido en la secuencia. Tanto el número de secuencias como la longitud de las mismas, que por supuesto están interrelacionadas, deberían reflejar la existencia de algún tipo de patrón. Por lo tanto, la prueba de aleatoriedad puede basarse en cualquiera de los dos criterios o en una combinación de ellos. Muy pocas rachas, una racha de longitud excesiva, etc., pueden utilizarse como criterios estadísticos para rechazar la hipótesis nula de aleatoriedad, ya que estas situaciones deberían darse raramente en una secuencia verdaderamente aleatoria. La alternativa a la aleatoriedad suele ser simplemente la no aleatoriedad. En una prueba basada en el número total de ejecuciones, tanto las ejecuciones escasas como las excesivas sugieren una falta de aleatoriedad (D. Gibbons Jean, 2003).

Un método sencillo para determinar los momentos de R consiste en considerar R como una suma de variables indicadoras de la forma siguiente $n = n_1 + n_2$, donde

3.2. Método

$$R = 1 + I_1 + \dots + I_n \quad (3.1)$$

donde

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k\text{th element} \neq \text{the}(k-1)\text{th element} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.2)$$

entonces

$$\mathbb{E}[R] = 1 + \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} \quad (3.3)$$

$$\text{Var}[R] = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)} \quad (3.4)$$

y la distribución estandarizada de \mathbf{R} es

$$Z = \frac{R - 2n\lambda(1 - \lambda)}{2\sqrt{n}\lambda(1 - \lambda)} \quad (3.5)$$

donde la distribución asintótica cuando n tiende al infinito es tal que $n_1/n \rightarrow \lambda$ and $n_2/n \rightarrow (1 - \lambda)$, se distribuye $N(0; 1)$, para más referencias véase [D. Gibbons Jean \(2003\)](#).

Prueba de autocorrelación serial

A veces es importante probar si los valores de una serie temporal, digamos r_t , son independientes. Podemos decir que existe un patrón de autocorrelación si por ejemplo una serie está correlacionada con sus k rezagos, entonces decimos que están correlacionadas serialmente. Una prueba muy utilizada para comprobar si una serie de valores está correlacionada es el estadístico de Ljung Box, que se basa en la autocorrelación como un conjunto. Supongamos que nos dan m valores autocorrelacionados. Comprobamos la siguiente hipótesis nula conjunta sobre las correlaciones entre los valores

3.2. Método

$$H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_k = 0 \quad (3.6)$$

con estadístico

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{(n-k)} \quad (3.7)$$

donde m corresponde al número de rezagos(lags) bajo prueba, y $\hat{\rho}_k^2$ representa $\hat{C}ov(r_t, r_{t+k})$ para $k = 1, \dots, m$. Para mayor referencia [Pankratz \(1983\)](#).

Prueba de razón de varianzas

Los gráficos de los coeficientes de varianza se han utilizado a menudo en el ámbito financiero. Los coeficientes de varianza como estadísticos de prueba son intuitivamente atractivos y se sabe que tienen propiedades óptimas en determinadas circunstancias. Pero es común elegir los puntos de truncamiento de los lapsos para las pruebas de los cocientes de varianza de forma bastante arbitraria.

Supongamos que r_t tiene raíz unitaria, la razón de varianza para la serie r_t se denota como

$$VR(l) = \frac{Var(r_i - r_{i-1})}{lVar(r_i - r_{i-1})} \quad (3.8)$$

La idea detrás de esta prueba es simple, cuando Δr_t está serialmente no correlacionado, es decir, cuando r_t es un proceso de paseo aleatorio VR(1) es igual a uno en todos los puntos de truncamiento de lag l . Por lo tanto, comparando una estimación consistente de VR(1) con uno, podemos averiguar si Δr_t está serialmente no correlacionado ([Choi, 1999](#)). Formalmente, el estimador de la relación de varianza se denota como

$$\hat{V}R(l) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{T-1} k(i/l) \hat{\rho}(i) \quad (3.9)$$

3.2. Método

donde

$$\hat{\rho}(i) = \frac{\sum_{t=1}^{T-i} \Delta r_t \Delta r_{t+i}}{\sum_{t=1}^T \Delta r_t^2} \quad (3.10)$$

y

$$k(x) = \frac{25}{12\pi^2 x^2} \left[\frac{\sin(6\pi x/5)}{6\pi x/5} - \cos(6\pi x/5) \right] \quad (3.11)$$

El estadístico estandarizado, de acuerdo con [Choi \(1999\)](#), es

$$VR = \sqrt{\frac{T}{l}} \frac{(\hat{V}R(l) - 1)}{\sqrt{2}} \quad (3.12)$$

con VR que se distribuye $N(0, 1)$.

3.2.2. Modelo II

En concreto, para evaluar el modelo se procede como sigue:

- Dados n activos, obtenemos las rentabilidades tal y como describimos en la revisión del modelo.
- Para un activo i , se calcula la media de r_i en el momento t , tomando en cada valor de t la media de los valores pasados hasta t , en días. Por ejemplo: para $t = 10$, ($t = 1$ indica la fecha de inicio, por ejemplo 04-01-2000, hasta la última fecha del periodo, es decir 31-12-2002.) la rentabilidad será la media de los diez valores pasados, lo mismo para el activo j , entonces obtenemos $|\bar{r}_i - \bar{r}_j|$, el proceso continúa de la misma forma para $t = 11$ hasta cubrir todos los datos de cada periodo histórico. El proceso se repite n veces, donde n denota el número de activos seleccionados para formar la cartera, hasta que se forma una matriz como la mostrada en la Fig.3.2.
- Del mismo modo, se forma una matriz para $Cov(r_i, r_j)$ en el momento t . Para calcular la matriz de varianzas y covarianzas, consideramos el punto de partida en $t = 10$.

3.2. Método

- Para cada par i , y j , los valores de los parámetros se obtienen ajustando el modelo $\alpha_{ij} \exp\{-\beta_{ij} |\bar{r}_i - \bar{r}_j|\} \exp\{-\gamma_{ijt}\}$, donde la variable de respuesta es $Cov(r_i, r_j)$ en al tiempo t .
- Al final tendremos una matriz en tres dimensiones, donde las dos primeras representan los valores predichos de las covarianzas y la tercera representa el tiempo t . Por ejemplo, para el periodo 2002:2004, se toma la matriz hasta el último periodo de enero para realizar la optimización y encontrar los pesos óptimos, se invierten estas proporciones hasta el último periodo de febrero, cuando se vuelve a tomar la última matriz de ese periodo y se realiza la optimización y se invierte en los pesos óptimos encontrados, y así sucesivamente hasta el último día de 2004. Como vemos, una vez estimados los valores de los parámetros, se pueden utilizar para estimar la cantidad a invertir (w 's) como es habitual en el modelo MV e invertir dichas cantidades en el siguiente periodo. Antes del proceso de optimización, se seleccionan k activos, de un total de n , con la mayor rentabilidad esperada.
- El experimento se realiza primero seleccionando $k = 6$ valores en cada periodo de reequilibrio, cada mes, luego se repite con $k = 7$, hasta $k = 10$.
- Todos los pasos anteriores se repiten para cada una de las 7 carteras consideradas en el experimento.
- Todos los pasos anteriores se repiten para cada una de las bolsas consideradas.

3.2. Método

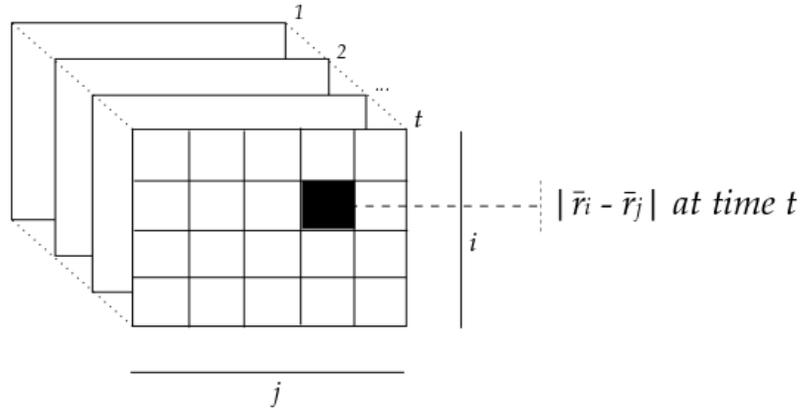


Figura 3.2: $|\bar{r}_i - \bar{r}_j|$

Para el análisis se utilizó R, un lenguaje de programación para la computación estadística (Team., 2021). Librerías estándar como dplyr, para la manipulación de datos (Wickham H. and Müller., 2018). Tidyverse una colección de paquetes para la ciencia de datos (et al., 2019), y para visualizar los resultados se utilizó ggplot2 (Hadley., 2016). El optimizador utilizado fue quadprog (Turlach, 2019), este paquete contiene rutinas para resolver problemas de programación cuadrática, e implementa el método dual de D. Goldfarb (1983). Esta implementación utiliza las factorizaciones Cholesky y QR, y aprovecha el hecho de que el mínimo no restringido de la función objetivo puede utilizarse como punto de partida, y el punto factible encontrado suele ser óptimo.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Modelo I

Considerando un nivel de significación del 5 %, los resultados de la prueba RV indican que se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es superior a 1.64, luego concluimos que las series están correlacionadas positivamente. La prueba VR (Cuadro A.1, del anexo) que contiene valores con (*) significa que se rechaza la hipótesis nula y, en consecuencia, hay pruebas en contra de la forma débil de la HME, por ejemplo, el mercado de valores: MRK, APPL, JNJ, KO, UNH, PFE, CAT, IBM, NKE, HD, y RTX, del índice Down Jones, indican que no hay pruebas contra la forma débil de la HME.

Ahora bien, teniendo en cuenta la prueba de rachas (Cuadro A.1, del anexo), considerando una significancia del 5 %, nos llevan a rechazar la hipótesis nula de aleatoriedad y, en consecuencia, existe una prueba en contra de la forma débil de la HME, por ejemplo, a partir del índice Down Jones: WMT, MSFT, MMM, VZ, WBA, IBM, TRV, AXP, CVX y XOM, indican que existe evidencia en contra de la forma débil de la HME porque sus estadísticos son significativos y tienden a rechazar la hipótesis nula de aleatoriedad. En este caso, la falta de aleatoriedad significa que existe la posibilidad sistemática de obtener rendimientos extraordinarios. Para analizar con más detalle la aleatoriedad de las series de rendimientos utilizamos la prueba de Ljung-Box. El estadístico Q bajo la hipótesis nula de que todos los coeficientes de autocorrelación conjuntos son iguales a cero puede

4.1. Modelo I

rechazarse con un nivel de significación del 5%. Si los rendimientos históricos están correlacionados serialmente, se infiere que pueden utilizarse para predecir rendimientos futuros y, en consecuencia, no se cumple la forma débil de la HME. En el Cuadro A.2 y el Cuadro A.3 (apéndice), podemos observar que las autocorrelaciones en el retardo 1 son negativas para todos los activos considerados, aunque no son significativas para los retardos 5 ó 10, por lo que no podemos deducir que se cumpla la forma débil de la HME.

Resumiendo lo anterior, ningún activo cumple la forma débil de la HME, algunos lo hacen en forma parcial. En la práctica, como resultado de la aplicación de los tests para probar la forma débil de la HME, podemos obtener conclusiones que apoyan la hipótesis del mercado eficiente con algunos tests, mientras que con otros, obtenemos conclusiones opuestas.

Cuando analizamos los portafolios formados encontramos cuestiones importantes a tener en cuenta. En primer lugar, con una estrategia adecuada podemos obtener rentabilidades positivas. En segundo lugar, al comparar las rentabilidades de las carteras de ambas estrategias (MV y MV-GBM) para cada índice en cada periodo de rebalanceo, y el número de activos seleccionados en dicho periodo, no se encontró ninguna diferencia significativa, lo que indica que ambas estrategias son igualmente efectivas. La Figura 2 muestra un resumen de lo expresado anteriormente, las etiquetas de las columnas indican el índice en cuestión, mientras que las etiquetas de las filas indican el periodo de reequilibrio (24, 36, y 48 meses), y como medida, para cada estrategia (MV, MV-GBM), las medias obtenidas seleccionando los $k = 6 : 10$ activos con mayor rentabilidad en cada periodo de reequilibrio, en esta las Figuras 4.1, 4.2 podemos observar que todos los box-plots se traslapan, lo cual nos indica una posible no diferencia en los promedios de los rendimientos.

Al no observar diferencias significativas en los promedios sobre los rendimientos, se procedió a aplicar la prueba F para comparar igualdad de varianzas, sin embargo, tampoco se encontraron diferencias significativas (Cuadro 4.1), considerando un nivel de significancia del 5% un $p\text{-value} < 0.05$, nos lleva a rechazar la hipótesis nula de igualdad de varianzas.

4.2. Modelo II

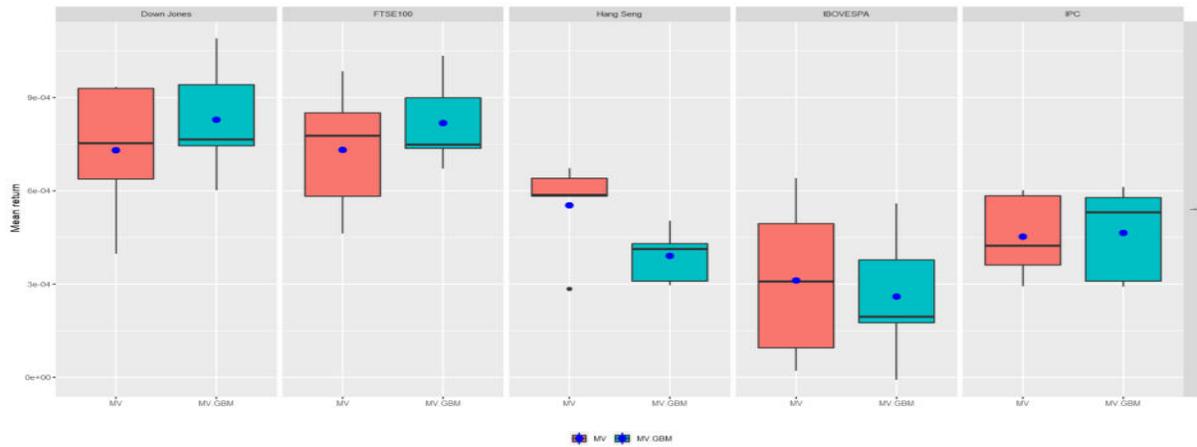


Figura 4.1: Box plot de la media de los retornos para todos los índices. Un mes de predicción de covarianzas.

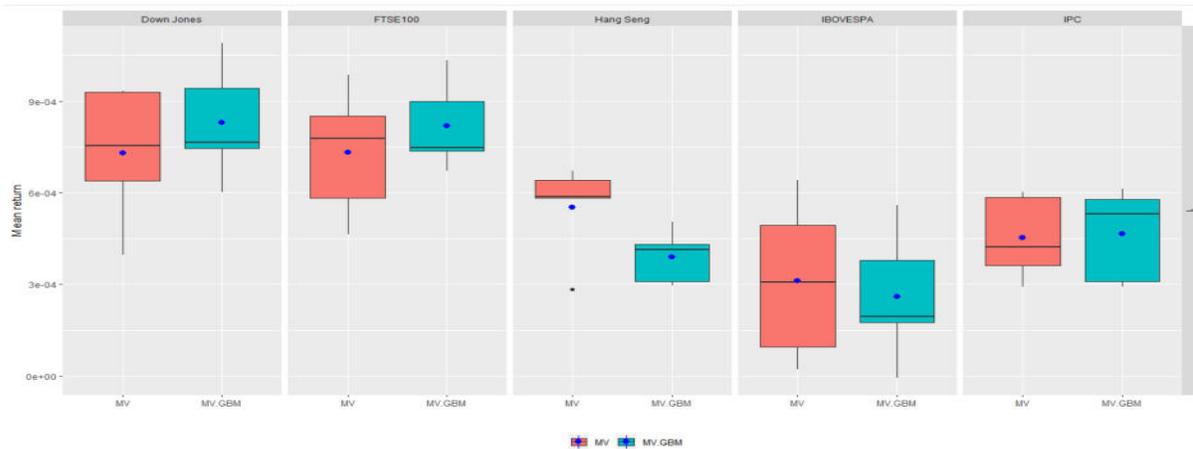


Figura 4.2: Box plot de la media de los retornos para todos los índices.)

4.2. Modelo II

En la experimentación se consideraron 7 índices, con una muestra total de 163 activos distribuidos en cada índice tal y como se muestra en la Tabla 4.1.

La Tabla 4.2 resume el número de valores, los periodos, el total de datos históricos y el total de datos de transacciones para cada periodo y para cada uno de los seis índices considerados.

4.2. Modelo II

Index	Selected	Mod 1	Mod 2	F test	P-value
Down Jones	6	MV	MV.GBM	0.03	0.87
Down Jones	7	MV	MV.GBM	0.00	0.99
Down Jones	8	MV	MV.GBM	0.00	0.99
Down Jones	9	MV	MV.GBM	0.04	0.85
Down Jones	10	MV	MV.GBM	0.12	0.72
FTSE 100	6	MV	MV.GBM	0.00	0.97
FTSE 100	7	MV	MV.GBM	0.00	0.97
FTSE 100	8	MV	MV.GBM	0.03	0.86
FTSE 100	9	MV	MV.GBM	0.00	0.96
FTSE 100	10	MV	MV.GBM	0.07	0.79
IPC	6	MV	MV.GBM	0.00	0.99
IPC	7	MV	MV.GBM	0.00	0.99
IPC	8	MV	MV.GBM	0.03	0.87
IPC	9	MV	MV.GBM	0.01	0.91
IPC	10	MV	MV.GBM	0.00	0.98
Hang Seng	6	MV	MV.GBM	0.02	0.88
Hang Seng	7	MV	MV.GBM	0.04	0.85
Hang Seng	8	MV	MV.GBM	0.14	0.71
Hang Seng	9	MV	MV.GBM	0.33	0.57
Hang Seng	10	MV	MV.GBM	0.08	0.78
IBOVESPA	6	MV	MV.GBM	0.01	0.93
IBOVESPA	7	MV	MV.GBM	0.01	0.94
IBOVESPA	8	MV	MV.GBM	0.01	0.90
IBOVESPA	9	MV	MV.GBM	0.03	0.86
IBOVESPA	10	MV	MV.GBM	0.02	0.89

Cuadro 4.1: Prueba F para probar igualdad de varianzas

Los periodos históricos considerados para el experimento son los siguientes:

- A1: 2002-2004: el periodo histórico va de 2000 a 2001.
- A2: 2007-2009: el periodo histórico va de 2005 a 2006.
- B1: 2013-2015: el periodo histórico va de 2011 a 2012.
- B2: 2018-2020: el periodo histórico va de 2016 a 2017.

4.2. Modelo II

Índice	No. Activos	Periodo	Total datos (historico)	Total datos (transacciones)
DJIA	27	2002-2004	500	756
DJIA	27	2007-2009	503	756
DJIA	27	2013-2015	502	756
DJIA	27	2018-2020	503	756
FTSE100	16	2002-2004	513	770
FTSE100	16	2007-2009	508	754
FTSE100	16	2013-2015	503	753
FTSE100	16	2018-2020	505	760
DAX	16	2002-2004	504	770
DAX	16	2007-2009	513	721
DAX	16	2013-2015	509	758
DAX	16	2018-2020	510	757
S&P500	21	2002-2004	500	756
S&P500	21	2007-2009	503	756
S&P500	21	2013-2015	502	756
S&P500	21	2018-2020	503	756
NYSE	24	2002-2004	500	756
NYSE	24	2007-2009	503	756
NYSE	24	2013-2015	502	756
NYSE	24	2018-2020	503	756
NASDAQ	29	2002-2004	500	756
NASDAQ	29	2007-2009	503	756
NASDAQ	29	2013-2015	502	756
NASDAQ	29	2018-2020	503	756
NASDAQ (ETFs)	30	2002-2004	500	756
NASDAQ (ETFs)	30	2007-2009	503	756
NASDAQ (ETFs)	30	2013-2015	502	756
NASDAQ (ETFs)	30	2018-2020	503	756

Cuadro 4.2: Descripción del conjunto de datos

En el siguiente gráfico se muestra la distribución riesgo-rendimiento, de los 163 activos considerados en el experimento.

Para probar el modelo se han considerado los datos históricos de los rendimientos diarios de las acciones de los índices Dow Jones Industrial Average (DJIA), SP 500, NASDAQ, NASDAQ-ETF, DAX y NYSE para los periodos A1: 2002 a 2004, A2: 2007 a 2009, B1: 2013 a 2015 y B2: 2018 a 2020. Los periodos A1 y B1 pueden interpretarse como periodos

4.2. Modelo II

seguirse, por tanto, es el estudio de posibles definiciones de "distancia" en términos de las cuales pueda construirse una analogía completa con las correlaciones utilizadas para caracterizar sistemas físicos espacialmente extendidos y, de este modo, llegar a comprender la naturaleza precisa de las estructuras emergentes a gran escala observadas durante las crisis financieras. También es interesante observar que, para los periodos de "calma", algunos de los índices considerados muestran una estructura de correlaciones sustancialmente mayor en el intervalo 2013-2015 que en el periodo 2002-2004. Si esto es indicativo de una recuperación no plena de la crisis de 2008 y si el comportamiento temporal de las correlaciones "espaciales" puede utilizarse para predecir crisis financieras a gran escala son otras cuestiones dignas de investigación que abren nuestros resultados. En este trabajo, sin embargo, nos interesa la cuestión de la posibilidad de explotar las correlaciones emergentes para obtener beneficios más allá de las expectativas de la HME. Esto se hace en el marco clásico de la selección de carteras de media-varianza.

4.2. Modelo II

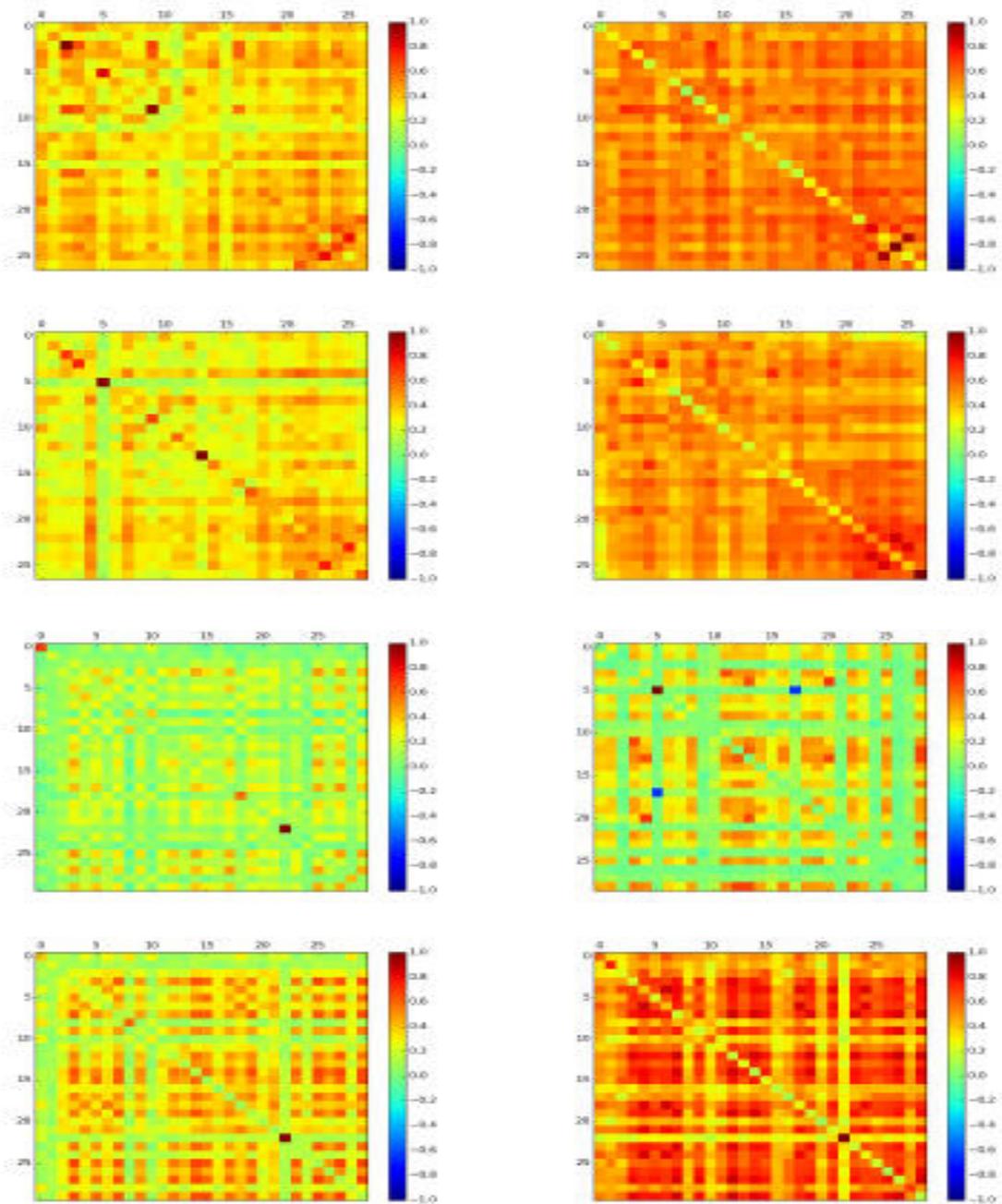


Figura 4.4: Diagramas de intensidad para las correlaciones de (de izquierda a derecha, de arriba abajo) el índice DJ para los periodos temporales 2002-2004, 2007-2009, 2013-2015, 2018-2020 y NASDAQ-ETF para el mismo conjunto de periodos. Los términos diagonales son las varianzas de cada valor individual en relación con la varianza total del índice.

4.2. Modelo II

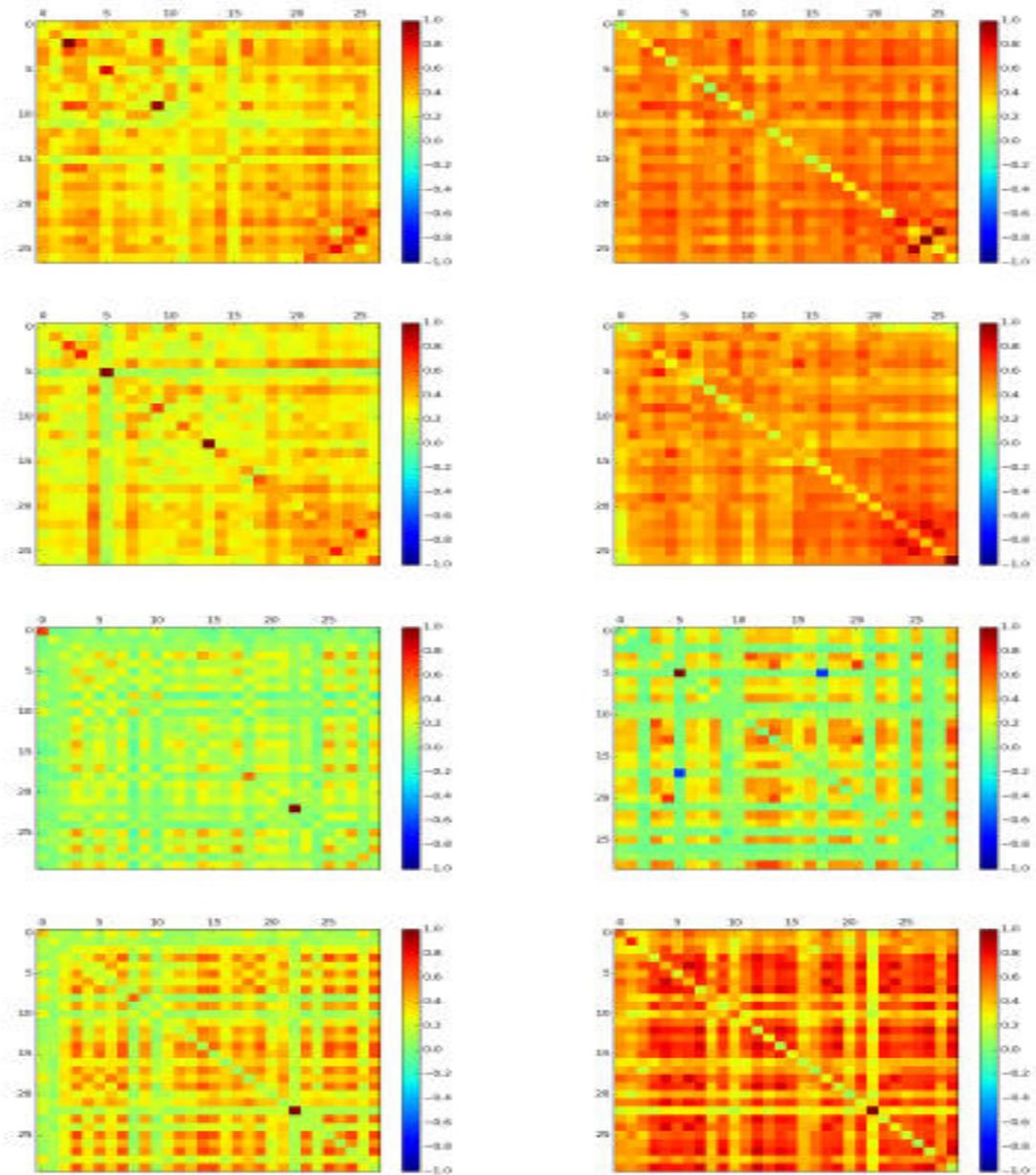


Figura 4.5: Diagramas de intensidad de las matrices de correlación (con varianza ponderada) de los índices (de izquierda a derecha, de arriba abajo) DJIA 2002-2004, DJIA 2007-2009, FTSE100 2002-2004, FTSE100 2007-2009, DAX 2002-2004, DAX 2007-2009, SP500 2002-2004, SP500 2007-2009, DJIA 2013-2015, DJIA 2018-2020, FTSE100 2013-2015, FTSE100 2018-2020, DAX 2013-2015, DAX 2018-2020, SP500 2013-2015 y SP500 2018-2020. Las varianzas ponderadas en las diagonales son las varianzas de cada valor individual en relación con la varianza total del índice

4.2. Modelo II

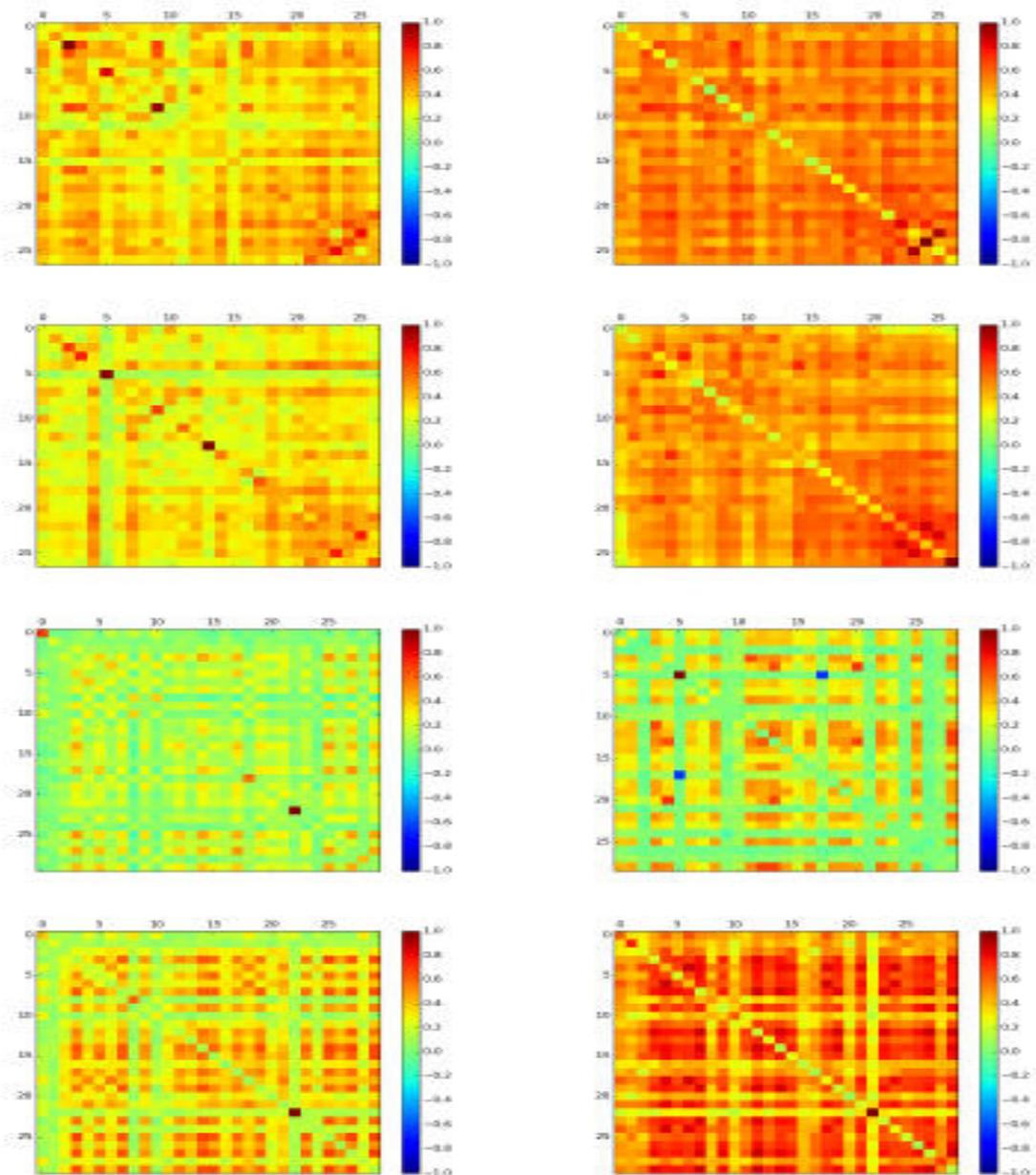


Figura 4.6: Diagramas de intensidad de las matrices de correlación (con varianza ponderada) de los índices (de izquierda a derecha, de arriba abajo) NASDAQ 2002-2004, NASDAQ 2007-2009, NASDAQ 2013-2015, NASDAQ 2018-2020, NYSE 2002-2004, NYSE 2007-2009, NYSE 2013-2015, NYSE 2018-2020, NASDAQ (ETFs) 2002-2004, NASDAQ (ETFs) 2007-2009, NASDAQ (ETFs) 2013-2015 y NASDAQ (ETFs) 2018-2020. Las varianzas ponderadas en las diagonales son las varianzas de cada valor individual en relación con la varianza total del índice.

4.2. Modelo II

En cuanto a las crisis, la primera ocurrió durante 2008, que comenzó en 2007, y el peor momento llegó en septiembre de 2008, la crisis financiera provocó una crisis económica conocida hoy como la Gran Recesión ([Park Hyungjun and Dong., 2015](#)). La segunda corresponde al brote de coronavirus (COVID-19), donde los mercados bursátiles registraron varias ondas de choque a partir de febrero de 2020, mientras que la volatilidad financiera ha seguido aumentando en el contexto de incertidumbre de COVID-19 ([Ingham, 2021](#), [Tiberiu Albuлесcu, 2021](#)). Para efectos prácticos, presentamos los resultados para dos periodos; los rendimientos acumulados de 2002 a 2004, y los rendimientos acumulados de 2007 a 2009, los resultados se resumen en las Figs. 4.7 y 4.8, respectivamente, y para todos los casos las varianzas estimadas (denotadas por var), las covarianzas (cov) y mediante el uso de las covarianzas predichas por la propuesta de modelo MPF espaciotemporal propuesto (exp).

Los box plots muestran los rendimientos medios de los portafolios obtenidos considerando los tres casos y los periodos de las figuras anteriores, los resultados se resumen en las Figs. 4.9 y 4.10

4.2. Modelo II

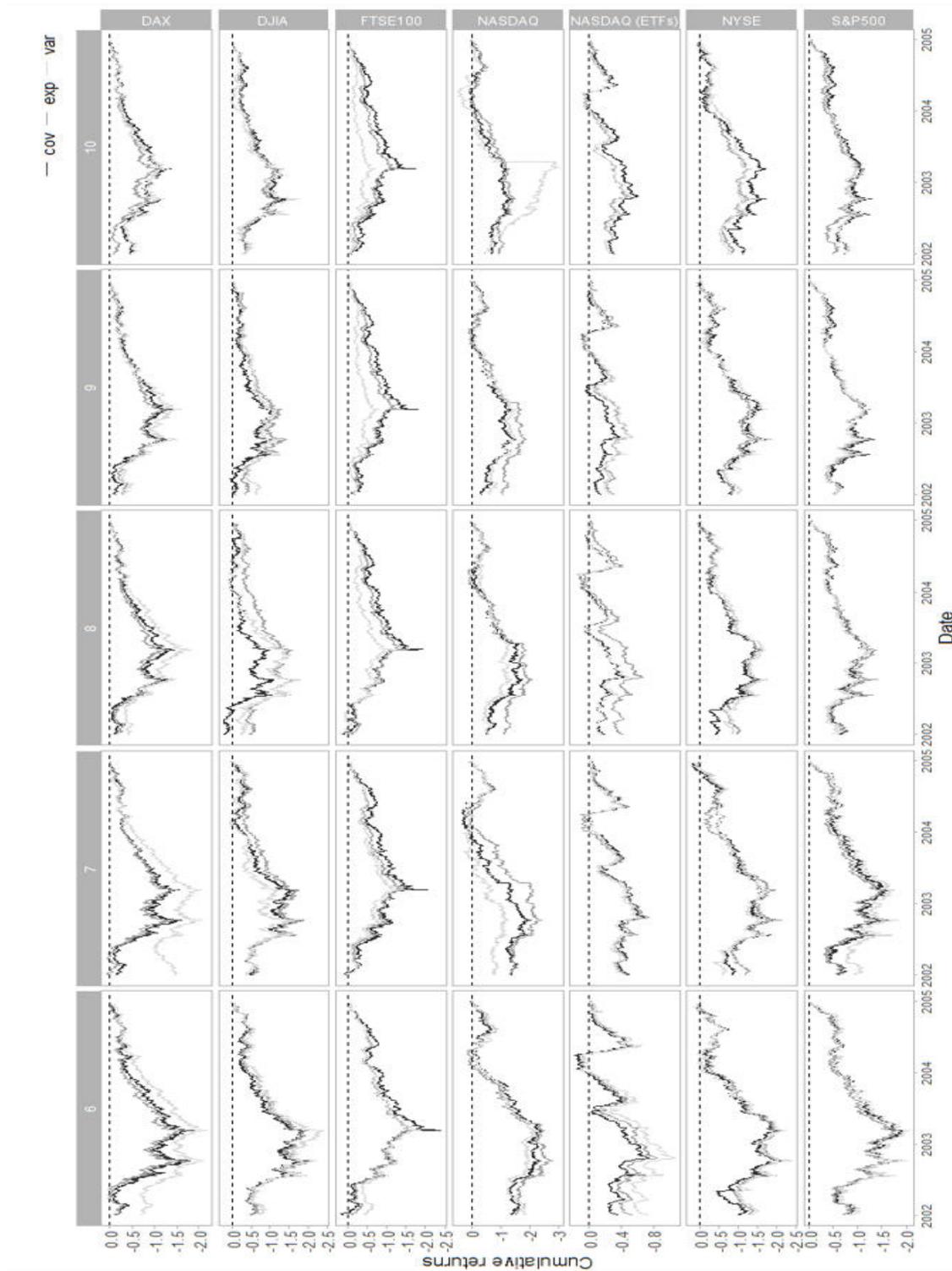


Figura 4.7: Rendimientos acumulados obtenidos para ($k = 6 : 10$) de 2002 a 2004.

4.2. Modelo II

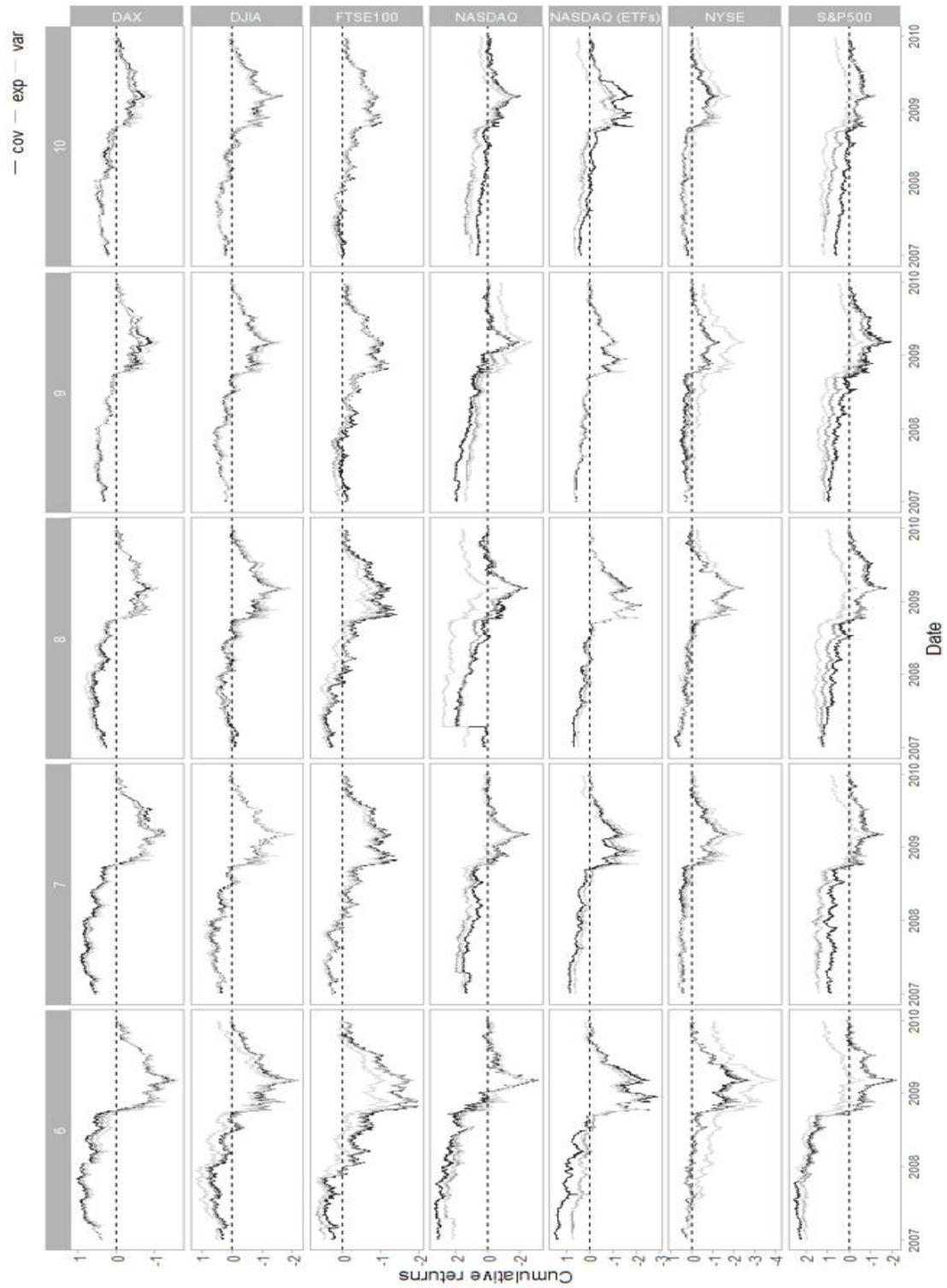


Figura 4.8: Rendimientos acumulados obtenidos para ($k = 6 : 10$) de 2007 a 2009.

4.2. Modelo II

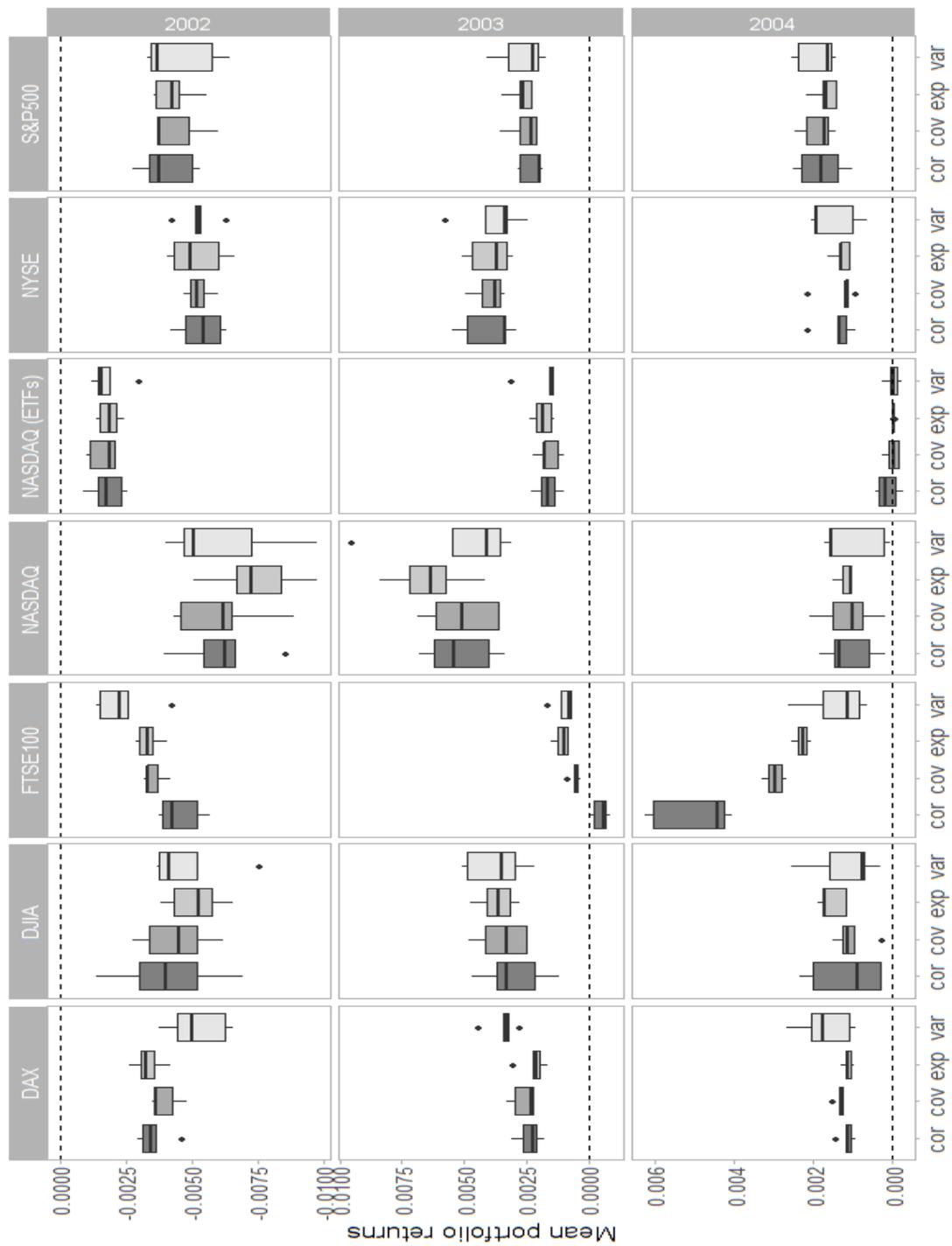


Figura 4.9: Rentabilidad media diaria de la cartera obtenida para cada número de valores seleccionados ($k = 6 : 10$) de 2002 a 2004.

4.2. Modelo II

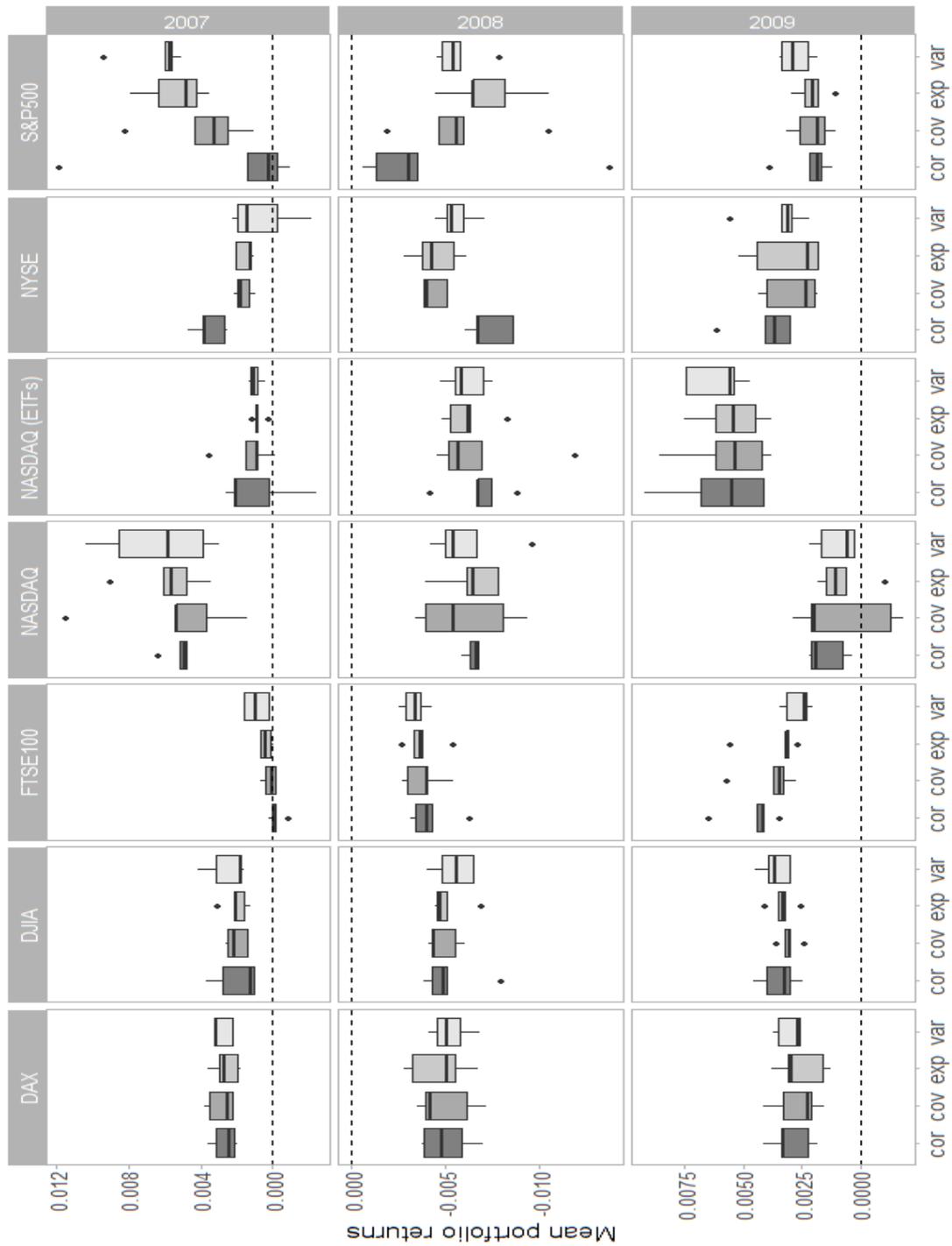


Figura 4.10: Rentabilidad media diaria de la cartera obtenida para cada número de valores seleccionados ($k = 6 : 10$) de 2007 a 2009.

4.2. Modelo II

A efectos comparativos, las varianzas y covarianzas reales de cada uno de los periodos estudiados también se consideran en las especificaciones de los coeficientes para el modelo MV. Se utilizan dos versiones, una en la que las varianzas y covarianzas completas entran en la optimización de MV (denotada por cov) y otra en la que se descartan los términos fuera de diagonal en las matrices de covarianza (denotada por var). Estas evaluaciones adicionales dan portafolios MV óptimas bajo estructuras de varianza y covarianza perfectamente predichas. Resulta que no se detectan diferencias estadísticamente significativas en los rendimientos medios entre las portafolios óptimas de MV calculadas por cada una de las cuatro especificaciones diferentes de coeficientes del modelo MV. En este sentido, la HME parece ser válida porque ni siquiera una previsión perfecta del comportamiento de las interacciones de los activos sirve para obtener un rendimiento superior en términos de rendimientos medios de los portafolios. Este hecho se confirma aún más al considerar la medida de rendimiento más completa de la ratio de Sharpe, que se define como la relación entre el rendimiento medio del portafolio y su desviación típica. Las Tablas 2-5 indican que no hay diferencias estadísticamente significativas en los rendimientos medios de los portafolios entre el modelo MV estimado con datos históricos y el modelo MPF. Para comprobar la diferencia entre los rendimientos medios de las carteras empleamos la prueba t a diferentes niveles de significación, 5 %, 10 % y 15 %.

Sin embargo, la volatilidad de un portafolio óptimo muestra diferencias estadísticamente significativas entre los enfoques de covarianza estimada y prevista en varios casos. Según la práctica habitual de utilizar la varianza del portafolio como una aproximación a su volatilidad (De Santis, 1997), de la Tabla 2 se deduce que los portafolios MPF óptimas tienen menor volatilidad en el 90 % del periodo de crisis A2 y en el 80.7 % de la crisis B2 (Covid-19). Considerando todo el conjunto de periodos temporales, los portafolios MPF presentan menor volatilidad en el 72 % de los casos con diferencias de varianza estadísticamente significativas. Para comprobar la diferencia entre la volatilidad de los portafolios empleamos la prueba F a diferentes niveles de significación, 5 %, 10 % y 15 % (véanse las Tablas 2-5 del Apéndice). De hecho, el modelo predictivo espaciotemporal presenta una proporción sustancialmente mayor de portafolios menos volátiles en todo el conjunto de periodos considerados, independientemente de la significación en las diferencias de varianza. Estos resultados empíricos indican que, aunque las correlaciones emergentes a gran

4.2. Modelo II

escala entre activos no pueden explotarse para obtener rendimientos medios superiores, una predicción adecuada de estas correlaciones puede conducir a portafolios óptimas con menor riesgo, y esto es más evidente en periodos de crisis económica.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En resumen, con respecto al modelo I, con las dos estrategias de inversión formadas podemos concluir que no es tarea fácil encontrar una estrategia que nos permita rendimientos superiores a la dinámica del mercado, tal y como propone la HME. Por otro lado, la hipótesis del mercado eficiente (HME) sugiere que la tarea de predecir los precios futuros basándose en el comportamiento pasado de los activos financieros no puede conseguir rendimientos extraordinarios. Sin embargo, algunos estudios rechazan la HME, argumentando que el mercado de valores no se establece realmente al azar y que las series temporales financieras tienen memoria a largo plazo (Felipe et al., 2018). Teniendo en cuenta el punto anterior, podría valer considerarse la aplicación de métodos de aprendizaje automático para seleccionar las mejores características de los rendimientos de los activos, y tal vez, obtener un mejor rendimiento, son muchos modelos que se han aplicado al respecto, por ejemplo: Long Short Term Memory (LSTM), (Nhi and Xuezhong, 2019, Samer et al., 2018, Thomas and Christopher, 2018, Wuyu et al., 2020, Yilin et al., 2021), random forest (Wei et al., 2019), eXtreme Gradient Boosting (XGBoost) (Wuyu et al., 2020), support vector machine (SVM) (Felipe et al., 2018), así como la optimización en el contexto del Reinforcement Learning (RL) a tiempo continuo (Hyungjun et al., 2020, Mauricio et al., 2019), entre otros.

Finalmente, con respecto al modelo II, los resultados son coherentes con hallazgos recientes según los cuales los mercados pueden caracterizarse estadísticamente como sistemas

5. Conclusiones y trabajo futuro

extendidos con correlaciones de largo alcance y que las crisis financieras muestran anomalías estadísticas que pueden proponerse como precursoras a efectos de previsión de crisis (Heckens, 2022, Mastromatteo, 2011, Scheffer, 2012). Sin embargo, los efectos del ruido sobre la estimación de la covarianza entre opciones durante periodos estables (Laloux, 1999, Plerou, 1999), indican que son posibles otras explicaciones. La validación de estas hipótesis merece un examen mucho más profundo que creemos que puede mejorarse con herramientas construidas a partir de nuestro modelo MPF. Nuestros resultados también indican que los mercados en los últimos periodos de inestabilidad económica no se comportan como simples procesos de paseo aleatorio a escala temporal diaria o mensual. Una configuración más formal basada en la mecánica estadística de los sistemas extendidos es necesaria para desarrollar nuevas mejoras en los modelos de selección de portafolios que aprovechan las correlaciones emergentes y para clarificar las conexiones entre los sistemas financieros, la estimación estadística de la covarianza durante periodos económicos inestables y los fenómenos críticos.

Finalmente, como trabajo futuro queda realizar una experimentación exhaustiva a fin de determinar la existencia o no de patrones que permitan discriminar condiciones en donde el modelo basado en el decaimiento exponencial de las covarianzas presente mayores ventajas que el modelo de media-varianza. Emplear un modelo de aprendizaje máquina para hacer las predicciones.

Referencias

- Louis Bachelier (1964). Theory of speculation, the random character of stock prices, translation of bacheliers 1900 doctoral thesis. *Cambridge: MIT*.
- Albert Einstein (1905). The theory of brownian movement. *Annalen der Physik*, 17:549.
- Ali Nilforooshan, M. (2020). mbend: an r package for bending non-positive-definite symmetric matrices to positive-definite. *BMC Genetics*, 21:1–8.
- A.S. Postali, Fernando, P. P. (2006). Geometric brownian motion and structural breaks in oil prices: A quantitative analysis. *Energy Economics*, 28(4):506–522.
- Bauwens, Luc, L. S. and Rombouts, J. V. (2006). Multivariate garch models: a survey. *Journal of applied econometrics*, 21(1):79–109.
- Bickel Peter, E. L. (1963). Covariance regularization by thresholding. *The Annals of Statistics*, 36(6):2577–2604.
- Black, F. and Myron, S. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- Bodnar, T., Dmytriv, S., Okhrin, Y., Parolya, N., and Schmid, W. (2021). Statistical inference for the eu portfolio in high dimensions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 69(1):1–14.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model. *The review of economics and statistics*, 72(3):498–505.

REFERENCIAS

- Chen, Chia Lin, S. M. and Chan, P. (1991). A method for approximating semivariance in project portfolio analysis. *The Engineering Economist*, 37(1):33–59.
- Choi, I. (1999). Testing the random walk hypothesis for real exchange rates. *Journal of applied econometrics*, 14(3):293—308.
- D. Gibbons Jean, C. S. (2003). *Non parametric statistical inference*. Marcel Dekker, Inc.
- D. Goldfarb, A. I. (1983). A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Mathematical Programming.*, 27:1–33.
- Davis, M. H. A. and Norman, A. R. (1990). Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of Operations Research*, 15(4):676—713.
- De Santis, G. (1997). Stock returns and volatility in emerging financial markets. *Journal of International Money and finance.*, 16:561–579.
- Dietmar., M. (2005). *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Springer.
- Dobrow, R. P. (2016). *Introduction to stochastic processes with R*, volume 1998. John Wiley & Sons, Inc.
- Dua, P. and Tuteja, D. (2021). Regime shifts in the behaviour of international currency and equity markets: A markov-switching analysis. *Journal of Quantitative Economics.*, 36:309–336.
- Elton, Edwin J., G. M. J. (1997). Modern portfolio theory, 1950 to date. *Journal of Banking and Finance*, 21:1743–1759.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):339–350.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom in action. *Journal of the Econometric Society*, 50(4):987–1007.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized arch. *Journal of Econometric theory*, 11(1):122–150.

REFERENCIAS

- Eric, V. S. and B.Lindenberg (1977). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics*, 5(2):189–200.
- et al., W. H. (2019). Welcome to the tidyverse. *Journal of Open Source Software.*, 4:1–6.
- F. Fama, E. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of finance.*, 25:283–417.
- Fama, E. F. and French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1):3–56.
- Felipe, D. P., Nogueira, T., Rodrigo, C., and et al. (2018). Decision-making for financial trading: A fusion approach of machine learning and portfolio selection. *Expert Systems With Applications*, 115:1–29.
- Fischer, T., . K. C. (2018). Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions. *European Journal of Operational Research.*, pages 654–669.
- Gabriel, F. and Christoph, M. (2010). Dominating estimators for minimum-variance portfolios. *Journal of Econometrics*, 159(1):289–302.
- Gao, Heli, Y. C. (2008). A perturbed risk process compounded by a geometric brownian motion with a dividend barrier strategy. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 205(1):454–464.
- Ghaoui, L. E., Maksim, O., and Francois, O. (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. *Operations Research*, 51:543—556.
- Goldfarb, D. and Garud, L. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research*, 28(1):1—38.
- Hadley., W. (2016). ggplot2: Elegant graphics for data analysis. *Springer-Verlag*.
- Heckens, A. J., . G. T. (2022). A new attempt to identify long-term precursors for endogenous financial crises in the market correlation structures. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.*, pages 1–34.
- Hogan, W. W. and Warren, J. M. (2021). Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 9(1):1–11.

REFERENCIAS

- Huang, X. (2012). Mean-variance models for portfolio selection subject to experts' estimations. *Expert Systems with Applications*, 39(5):5887–5893.
- Hyungjun, P., Min, K. S., and Dong, G. C. (2020). An intelligent financial portfolio trading strategy using deep q-learning. *Expert Systems with Applications*, 158(1):2–16.
- Ingham, H. (2021). Covid-19, the great recession and economic recovery: A tale of two crises. *Journal of common market studies.*, 38:1–17.
- Ioannis D., V., Dellaportas, P., and Politis, D. N. (2003). A full-factor multivariate garch model. *The Econometrics Journal*, 6(2):312—334.
- Krokhmal, Pavlo, Z. M. and Uryasev, S. (2011). Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 16:49–66.
- Kuang Yu Huang, Chuen-Jiuan Jane, e. a. (2009). A hybrid model for stock market forecasting and portfolio selection based on arx, grey system and rs theories. *Expert Systems with Applications.*, 36:5387–5392.
- Ladde G.S., W. L. (2009). Development of modified geometric brownian motion models by using stock price data and basic statistics. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, 71(12):e1203–e1208.
- Laloux, L. e. a. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical review letters.*, 83.
- Ledoit, O. and Michael, W. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10(5):603—621.
- Lefebvre, M. (2007). *Applied Stochastic Processes*. Springer.
- M. Lacus, S. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer Series in Statistics.
- Malkiel, B. G. (2013). The efficient market hypothesis and its critics. *Journal of economic perspectives.*, 17:59–82.
- Mariani Francesca, R. M. C. e. (2018). Merton's portfolio problem including market frictions: a closed-form formula supporting the shadow price approach. *European Journal of Operational Research*, 275(3):1178–1189.

REFERENCIAS

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.
- Mastromatteo, I., . M. M. (2011). On the criticality of inferred models. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.*, pages 1–6.
- Mauricio, G.-G., Alin, A. C., and Julio, B. C. (2019). Continuous-time reinforcement learning approach for portfolio management with time penalization. *Expert Systems With Applications*, 129:27–36.
- Mayoral, S., David, M., and Albafazl, Z. (2022). Using a hedging network to minimize portfolio risk. *Finance Research Letters*, 44(102044):1–6.
- Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183.
- Morton, A. J. and R., P. S. (1995). Optimal portfolio management with fixed transaction costs. *Mathematical Finance*, 5(4):337—356.
- Nantell, T. J. and Price, B. (1979). An analytical comparison of variance and semivariance capital market theories. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14(2):221–242.
- Nhi, N. and Xuezhong, N. (2019). Deep learning for decision making and the optimization of socially responsible investments and portfolio. *Expert Systems With Applications*, 124:113097.
- Noh Eun-Jung, K. J.-H. (2011). An optimal portfolio model with stochastic volatility and stochastic interest rate. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 375(2):510–522.
- Norbert Wiener (1923). Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1):131–174.
- Okhrin, Y. and Schmid, W. (2006). Distributional properties of portfolio weights. *Journal of Econometrics*, 134(1):235—256.
- Pandolfo, Giuseppe, I. C. e. a. (2019). Robust mean-variance portfolio through the weighted lp depth function. *Annals of Operations Research*, (292):519–531.
- Pankratz, A. (1983). *Forecasting with univariate Box-Jenkins models: concepts and cases*. John Wiley & Sons.
- Park Hyungjun, K. S. M. and Dong., G. C. (2015). The 2008 crisis: Causes and future direction for the academic research. *Procedia Economics and Finance.*, 27:385–393.

REFERENCIAS

- Park Hyungjun, K. S. M. and Dong., G. C. (2020). An intelligent financial portfolio trading strategy using deep q-learning. *Expert Systems with Applications.*, 158:2–66.
- Paul, W., . B. J. (1999). *Stochastic processes: From Physics to finance*. Springer.
- Peng, Z. (2015). Multi-period possibilistic mean semivariance portfolio selection with cardinality constraints and its algorithm. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research*, 14:239—253.
- Plerou, V., e. a. (1999). Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical review letters.*, 83.
- Pogue, G. A. (1970). An extension of the markowitz portfolio selection model to include variable transactions'costs, short sales, leverage policies and taxes. *The Journal of Finance*, 25(5):1005—1027.
- Prigent, J.-L. (2007). *Portfolio optimization and performance analysis*. CRC Press.
- Rachael, C., Thomas, C., CotterJohn, and Enrique, S. (2017). Asset allocation with correlation: A composite trade-off. *European Journal of Operational Research*, 262(3):1164–1180.
- Robert Brown (1828). On the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine Series*, 21(2):161–173.
- Ruixun, Z., Thomas, J. B., and Andrew, W. L. (2014). The origin of risk aversion. *PNAS*, 11(50):17777–17782.
- Samer, O., Daniel, S., and Mathieu, L. (2018). Adaptive portfolio asset allocation optimization with deep learning. *International Journal on Advances in Intelligent Systems*, 11:25–34.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3):239–246.
- Scheffer, M. e. a. (2012). Anticipating critical transitions. *Journal of International Money and finance.*, 338:345–348.
- Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9(2):277–293.

REFERENCIAS

- Taras, B., Stepan, M., and Yarema, O. (2017). Bayesian estimation of the global minimum variance portfolio. *European Journal of Operational Research*, 256(1):292–307.
- Team., R. C. (2021). R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing*.
- Thomas, F. and Christopher, K. (2018). Deep learning with long short-term memory networks for financialmarket predictions. *European Journal of Operational Research*, 270(2):654–669.
- Tiberiu Albuлесcu, C. (2021). Covid-19 and the united states financial markets’ volatility. *Finance Research Letters.*, 38:1–5.
- Tolun Tayali, S. (2020). A novel backtesting methodology for clustering in mean–variance portfolio optimization. *Knowledge-Based Systems.*, 209:1–22.
- Turlach, B. A. e. a. (2019). Functions to solve quadratic programming problems. *R Foundation for Statistical Computing*.
- Wang, Lu, e. a. (2022). Portfolio optimization of financial commodities with energy futures. *Annals of Operations Research.*, pages 401–439.
- Wang, Z. and Liu, S. (2013). Multi-period mean-variance portfolio selection with fixed and proportional transaction costs. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 9(2):643–657.
- Wei, C., Haoyu, Z., Mukesh, K. M., and Lifan, J. (2019). Mean–variance portfolio optimization using machine learning-based stock price prediction. *Applied Soft Computing Journal*, 100:1–18.
- Wickham H., Romain François, L. H. and Müller., K. (2018). R: A language and environment for statistical computing. *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*.
- Wu, H. and Li., Z. (2011). Multi-period mean-variance portfolio selection with markov regime switching and uncertain time-horizon. *Journal of Systems Science and Complexity*, 24:140–155.
- Wuyu, W., Weizi, L., and et al. (2020). Portfolio formation with preselection using deep learning from long-term financial data. *Expert Systems With Applications*, 143:1–17.

REFERENCIAS

- Xue, H.-G., Xu, C.-X., and Feng, Z.-X. (2006). Mean-variance portfolio optimal problem under concave transaction cost. *Applied Mathematics and Computation*, 174(1):1—12.
- Yang, L., Romain, C., and R., M. M. (2015). A robust statistics approach to minimum variance portfolio optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(24):6684–6697.
- Yilin, M., Ruizhu, H., and Weizhong, W. (2021). Portfolio optimization with return prediction using deep learning and machine learning. *Expert Systems With Applications*, 165:113973.
- Yiling, H. (2020). Portfolio optimization based on jump-diffusion stochastic differential equation. *Alexandria Engineering Journal*, 59(4):2503–2512.
- Yoshimoto, A. (1996). The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 39(1):99—117.
- Yoshino, Naoyuki, e. a. (2021). Covid-19 and optimal portfolio selection for investment in sustainable development goals. *Finance Research Letters.*, 38:1–8.

Apéndice A

Tablas

A.1. Modelo I

A.1 Modelo I

Cuadro A.1: Prueba VR y prueba Rachas (Run test) para las acciones evaluadas.
(*) Nivel de significancia al 5 %.

Index	Stock	VR test	Run test	Index	Stock	VR test	Run test
Down Jones	WMT	-2.8497 *	2.9059 *	IPC	AC.MX	-2.1698 *	0.0313
Down Jones	MRK	-0.8122	0.3586	IPC	KIMBERA.MX	-1.5911	1.252
Down Jones	INTC	-2.6422 *	-0.5199	IPC	AMXL.MX	-1.3558	-0.4184
Down Jones	MSFT	-3.5749 *	2.8825 *	IPC	GRUMAB.MX	-2.7751 *	-0.067
Down Jones	MMM	-3.3679 *	2.2833 *	IPC	GCARSOA1.MX	-3.5865 *	2.6971 *
Down Jones	AAPL	-1.1889	1.2886	IPC	BIMBOA.MX	-4.5159 *	1.6836
Down Jones	VZ	-3.6417 *	1.9732 *	IPC	GCC.MX	-9.5311 *	2.6732 *
Down Jones	JNJ	-0.0195	1.1529	IPC	OMAB.MX	1.1214	0.2517
Down Jones	KO	0.0681	1.3629	IPC	PINFRA.MX	-3.7753 *	0.6278
Down Jones	PG	-3.0726 *	1.7181	IPC	GMEXICOB.MX	0.4801	-1.7621
Down Jones	UNH	0.2434	-0.2261	IPC	FEMSAUBD.MX	-0.0925	-0.1798
Down Jones	PFE	-0.228	0.6523	IPC	GAPB.MX	2.4015 *	-1.3306
Down Jones	WBA	-2.4592 *	2.5663 *	IPC	ASURB.MX	-0.7812	1.0069
Down Jones	CAT	0.1657	-1.9408	IPC	TLEVISACPO.MX	0.1407	-0.5038
Down Jones	MCD	-2.6815 *	1.7859	IPC	CEMEXCPO.MX	1.6978	-0.5262
Down Jones	IBM	-1.8917	1.9668 *	IPC	GFNORTEO.MX	1.0292	-0.6113
Down Jones	NKE	0.1045	0.7686	Hang Seng	X1038.HK	-2.6112 *	3.1112 *
Down Jones	DIS	-3.193 *	0.7459	Hang Seng	X0027.HK	1.0297	0.1594
Down Jones	HD	0.4558	1.1981	Hang Seng	X0003.HK	-1.061	3.2932 *
Down Jones	TRV	-4.0425 *	2.1476 *	Hang Seng	X1044.HK	-0.0596	-1.1067
Down Jones	RTX	-1.8203	1.7489	Hang Seng	X0241.HK	-0.3709	4.6174 *
Down Jones	AXP	-4.1941 *	3.4388 *	Hang Seng	X0002.HK	-5.4294 *	4.2844 *
Down Jones	CVX	-5.3372 *	2.3511 *	Hang Seng	X0101.HK	-1.0479	-0.4725
Down Jones	JPM	-3.3175 *	1.2877	Hang Seng	X0012.HK	1.1791	-2.5567 *
Down Jones	XOM	-7.5343 *	5.1793 *	Hang Seng	X2628.HK	0.5679	-1.2472
Down Jones	BA	3.0253 *	0.0769	Hang Seng	X0006.HK	-1.8624	2.5675 *
FTSE100	RMV.L	-0.2348	0.3146	Hang Seng	X0016.HK	1.2613	-2.7674 *
FTSE100	AHT.L	1.2391	-1.8179	Hang Seng	X0267.HK	7.2231 *	-1.4354
FTSE100	EXP.N.L	-0.686	0.9439	Hang Seng	X0883.HK	1.8392	-2.3077 *
FTSE100	RTO.L	2.1137 *	-0.9439	Hang Seng	X2319.HK	0.604	2.086 *
FTSE100	ABF.L	-2.2129 *	0.874	Hang Seng	X1093.HK	0.1252	0.7075
FTSE100	STJ.L	-1.1928	0.1398	Hang Seng	X0386.HK	0.2298	-2.0555 *
FTSE100	BATS.L	0.1291	0.6992	Hang Seng	X0669.HK	-0.3346	4.3383 *
FTSE100	PRU.L	0.9367	0.1748	IBOVESPA	RADL3.SA	2.2673 *	0.6895
FTSE100	GVC.L	3.9073 *	-3.6175 *	IBOVESPA	BBAS3.SA	0.4351	-1.7607
FTSE100	SMIN.L	0.5924	-1.1187	IBOVESPA	PETR4.SA	-0.7826	-0.0317
FTSE100	CPG.L	0.214	0.0699	IBOVESPA	USIM5.SA	1.6546	-2.4936 *
FTSE100	SPX.L	-3.0818 *	0.7341	IBOVESPA	LAME4.SA	-0.2298	-0.0388
FTSE100	SSE.L	-2.3889 *	3.0832 *	IBOVESPA	PETR3.SA	-0.6208	0.3492
FTSE100	BA.L	-2.6501 *	-1.1886	IBOVESPA	OIBR4.SA	3.267 *	-1.3016
FTSE100	VOD.L	-1.033	1.4633	IBOVESPA	UGPA3.SA	0.0344	0.2298
FTSE100	SDR.L	-1.9874 *	1.0138	IBOVESPA	BBDC3.SA	-0.3604	-0.1073
FTSE100	SLA.L	0.8905	0.2797	IBOVESPA	ENBR3.SA	-4.5013 *	4.0684 *
FTSE100	RB.L	-3.8732 *	1.3238	IBOVESPA	ITSA4.SA	-7.9919 *	1.3636
FTSE100	TSCO.L	0.4619	0.4195	IBOVESPA	CCRO3.SA	-2.6208 *	1.8277
FTSE100	RR.L	0.4306	0.2293	IBOVESPA	CMIG4.SA	-0.0034	0.9345
FTSE100	ANTO.L	-1.9467	2.1189 *	IBOVESPA	SBSP3.SA	-2.5317 *	4.0317 *
IPC	MEGACPO.MX	-0.4883	3.7596 *	IBOVESPA	LREN3.SA	-0.8523	-0.4455
IPC	ALSEA.MX	4.5355 *	-1.8148	IBOVESPA	BRKM5.SA	-0.0139	-2.2257 *

A.1 Modelo I

Cuadro A.2: Estadístico para detectar autocorrelación serial Q (Ljung-Box). (*)
Nivel de significancia al 5%

índice	Stock		1	5	10	índice	Stock		1	5	10
Down Jones	AAPL	Q-Stat	2.501 *	21.829 *	29.786 *	Down Jones	WMT	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	AAPL	p-value	0 *	0 *	0 *	Down Jones	XOM	Q-Stat	68.96 *	89.747 *	96.679 *
Down Jones	AXP	Q-Stat	22.752 *	36.43 *	59.079 *	Down Jones	XOM	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	AXP	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	ABF.L	Q-Stat	4.553 *	16.523 *	23.699 *
Down Jones	BA	Q-Stat	7.185 *	28.515 *	50.689 *	FTSE100	ABF.L	p-value	0 *	0.002 *	0.005 *
Down Jones	BA	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	AHT.L	Q-Stat	5.723 *	14.92 *	39.054 *
Down Jones	CAT	Q-Stat	0.11 *	1.445	9.016	FTSE100	AHT.L	p-value	0 *	0.005 *	0 *
Down Jones	CAT	p-value	0 *	0.836	0.436	FTSE100	ANTO.L	Q-Stat	8.129 *	25.308 *	43.328 *
Down Jones	CVX	Q-Stat	58.544 *	65.959 *	92.939 *	FTSE100	ANTO.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	CVX	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	BA.L	Q-Stat	8.657 *	22.885 *	29.21 *
Down Jones	DIS	Q-Stat	11.219 *	24.127 *	31.552 *	FTSE100	BA.L	p-value	0 *	0 *	0.001 *
Down Jones	DIS	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	BATS.L	Q-Stat	0.007 *	19.542 *	27.594 *
Down Jones	HD	Q-Stat	0.127 *	11.49 *	39.254 *	FTSE100	BATS.L	p-value	0 *	0.001 *	0.001 *
Down Jones	HD	p-value	0 *	0.022 *	0 *	FTSE100	CPG.L	Q-Stat	0.22 *	19.339 *	34.857 *
Down Jones	IBM	Q-Stat	5.677 *	8.126	22.56 *	FTSE100	CPG.L	p-value	0 *	0.001 *	0 *
Down Jones	IBM	p-value	0 *	0.087	0.007 *	FTSE100	EXP.N.L	Q-Stat	2.006 *	15.941 *	34.938 *
Down Jones	INTC	Q-Stat	11.73 *	18.086 *	30.054 *	FTSE100	EXP.N.L	p-value	0 *	0.003 *	0 *
Down Jones	INTC	p-value	0 *	0.001 *	0 *	FTSE100	GVC.L	Q-Stat	11.628 *	22.417 *	25 *
Down Jones	JNJ	Q-Stat	0.598 *	40.288 *	63.823 *	FTSE100	GVC.L	p-value	0 *	0 *	0.003 *
Down Jones	JNJ	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	PRU.L	Q-Stat	0.626 *	51.155 *	92.09 *
Down Jones	JPM	Q-Stat	20.459 *	28.496 *	42.386 *	FTSE100	PRU.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	JPM	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	RB.L	Q-Stat	9.411 *	36.508 *	50.501 *
Down Jones	KO	Q-Stat	0.272 *	9.367	17.723 *	FTSE100	RB.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	KO	p-value	0 *	0.053	0.039 *	FTSE100	RMV.L	Q-Stat	0.467 *	7.742	21.125 *
Down Jones	MCD	Q-Stat	8.207 *	17.798 *	30.282 *	FTSE100	RMV.L	p-value	0 *	0.101	0.012 *
Down Jones	MCD	p-value	0 *	0.001 *	0 *	FTSE100	RR.L	Q-Stat	0.98 *	29.059 *	108.822 *
Down Jones	MMM	Q-Stat	10.166 *	32.309 *	42.586 *	FTSE100	RR.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	MMM	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	RTO.L	Q-Stat	3.833 *	11.094 *	24.381 *
Down Jones	MRK	Q-Stat	1.67 *	9.18	23.227 *	FTSE100	RTO.L	p-value	0 *	0.026 *	0.004 *
Down Jones	MRK	p-value	0 *	0.057	0.006 *	FTSE100	SDR.L	Q-Stat	4.485 *	24.797 *	29.665 *
Down Jones	MSFT	Q-Stat	18.125 *	28.993 *	38.997 *	FTSE100	SDR.L	p-value	0 *	0 *	0.001 *
Down Jones	MSFT	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	SLA.L	Q-Stat	1.203 *	46.238 *	64.733 *
Down Jones	NKE	Q-Stat	0.035 *	13.158 *	24.715 *	FTSE100	SLA.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	NKE	p-value	0 *	0.011 *	0.003 *	FTSE100	SMIN.L	Q-Stat	1.833 *	14.478 *	32.831 *
Down Jones	PFE	Q-Stat	0.026 *	37.999 *	38.992 *	FTSE100	SMIN.L	p-value	0 *	0.006 *	0 *
Down Jones	PFE	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	SPX.L	Q-Stat	19.69 *	26.544 *	31.409 *
Down Jones	PG	Q-Stat	13.291 *	54.282 *	64.195 *	FTSE100	SPX.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	PG	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	SSE.L	Q-Stat	9.174 *	16.856 *	42.813 *
Down Jones	RTX	Q-Stat	5.372 *	20.365 *	61.492 *	FTSE100	SSE.L	p-value	0 *	0.002 *	0 *
Down Jones	RTX	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	STJ.L	Q-Stat	4.967 *	26.341 *	32.835 *
Down Jones	TRV	Q-Stat	53.463 *	66.299 *	81.682 *	FTSE100	STJ.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	TRV	p-value	0 *	0 *	0 *	FTSE100	TSCO.L	Q-Stat	0.301 *	17.025 *	24.25 *
Down Jones	UNH	Q-Stat	0.223 *	5.358	40.821 *	FTSE100	TSCO.L	p-value	0 *	0.002 *	0.004 *
Down Jones	UNH	p-value	0 *	0.252	0 *	FTSE100	VOD.L	Q-Stat	2.124 *	20.732 *	29.975 *
Down Jones	VZ	Q-Stat	15.136 *	33.685 *	46.52 *	FTSE100	VOD.L	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	VZ	p-value	0 *	0 *	0 *	Hang Seng	X0002.HK	Q-Stat	47.919 *	67.327 *	107.752 *
Down Jones	WBA	Q-Stat	11.203 *	21.063 *	24.337 *	Hang Seng	X0002.HK	p-value	0 *	0 *	0 *
Down Jones	WBA	p-value	0 *	0 *	0.004 *	Hang Seng	X0003.HK	Q-Stat	3.159 *	15.476 *	41.136 *
Down Jones	WMT	Q-Stat	6.062 *	40.915 *	61.966 *	Hang Seng	X0003.HK	p-value	0 *	0.004 *	0 *

A.1 Modelo I

Cuadro A.3: (Continuación). (*) Nivel de Significancia al 5 %

Indice	Stock					Indice					Stock				
	1	5	10	5	10	1	5	10	5	10	1	5	10	5	10
Hang Seng	5.408 *	14.107 *	28.862 *	0.007 *	0.001 *	Q-Stat	0 *	1.308 *	0 *	11.033 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.007 *	0.001 *	0.007 *	0.001 *	p-value	Q-Stat	0 *	1.308 *	11.033 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	4.25 *	13.042 *	21.879 *	0.011 *	0.009 *	Q-Stat	0 *	1.786 *	0 *	12.666 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.011 *	0.009 *	0.011 *	0.009 *	p-value	Q-Stat	0 *	1.786 *	12.666 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	5.829 *	26.393 *	38.516 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	2.345 *	0 *	36.624 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	0 *	2.345 *	36.624 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	8.245 *	36.804 *	71.461 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	6.056 *	0 *	18.442 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	0 *	6.056 *	18.442 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	2.319 *	14.009 *	21.675 *	0.007 *	0.01 *	Q-Stat	0 *	0.007 *	0 *	0.607 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.007 *	0.01 *	0.007 *	0.01 *	p-value	Q-Stat	0 *	0.007 *	0.607 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0.352 *	7.84 *	13.238 *	0.098 *	0.152 *	Q-Stat	0 *	16.524 *	0 *	25.255 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.098 *	0.152 *	0.098 *	0.152 *	p-value	Q-Stat	0 *	16.524 *	25.255 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	63.957 *	104.423 *	129.156 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	2.507 *	0 *	40.754 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	2.507 *	40.754 *	49.577 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0.125 *	25.154 *	34.225 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	54.42 *	0 *	71.838 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	54.42 *	71.838 *	75.778 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	8.122 *	57.81 *	88.193 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	4.503 *	0 *	23.931 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	4.503 *	23.931 *	55.165 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	15.937 *	27.464 *	32.221 *	0.399 *	0.227 *	Q-Stat	0 *	1.537 *	0 *	1.962 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.399 *	0.227 *	0.399 *	0.227 *	p-value	Q-Stat	1.537 *	1.962 *	14.297 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	9.351 *	26.075 *	37.051 *	0.008 *	0.041 *	Q-Stat	0 *	17.919 *	0 *	40.723 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.008 *	0.041 *	0.008 *	0.041 *	p-value	Q-Stat	17.919 *	40.723 *	58.008 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0.098 *	18.566 *	29.094 *	0.001 *	0.001 *	Q-Stat	0 *	20.204 *	0 *	33.82 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.001 *	0.001 *	0.001 *	0.001 *	p-value	Q-Stat	20.204 *	33.82 *	44.693 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0.24 *	4.052 *	11.767 *	0.761 *	0.029 *	Q-Stat	0 *	0.212 *	0 *	17.13 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.761 *	0.029 *	0.761 *	0.029 *	p-value	Q-Stat	0.212 *	17.13 *	26.663 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0.156 *	13.696 *	17.51 *	0.008 *	0.041 *	Q-Stat	0 *	6.875 *	0 *	18.115 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.008 *	0.041 *	0.008 *	0.041 *	p-value	Q-Stat	6.875 *	18.115 *	27.85 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0.707 *	1.865 *	18.614 *	0.761 *	0.029 *	Q-Stat	0 *	17.942 *	0 *	29.354 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
Hang Seng	0 *	0.761 *	0.029 *	0.761 *	0.029 *	p-value	Q-Stat	17.942 *	29.354 *	41.526 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0.528 *	12.999 *	24.26 *	0.011 *	0.004 *	Q-Stat	0 *	308.826 *	0 *	340.263 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0.011 *	0.004 *	0.011 *	0.004 *	p-value	Q-Stat	308.826 *	340.263 *	343.408 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0.941 *	15.593 *	34.511 *	0.004 *	0.004 *	Q-Stat	0 *	10.613 *	0 *	31.485 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0.004 *	0.004 *	0.004 *	0.004 *	p-value	Q-Stat	10.613 *	31.485 *	57.271 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0.07 *	5.447 *	28.24 *	0.244 *	0.001 *	Q-Stat	0 *	8.537 *	0 *	25.691 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0.244 *	0.001 *	0.244 *	0.001 *	p-value	Q-Stat	8.537 *	25.691 *	29.506 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	10.854 *	37.389 *	59.129 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	8.605 *	0 *	19.4 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	8.605 *	19.4 *	44.794 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0.001 *	0.153 *	0.607 *	0.997 *	1 *	Q-Stat	0 *	2.576 *	0 *	44.584 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0.153 *	0.607 *	0.997 *	1 *	p-value	Q-Stat	2.576 *	44.584 *	50.357 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	35.135 *	43.787 *	48.483 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	0.96 *	0 *	11.229 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	0.96 *	11.229 *	30.824 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	1.25.523 *	140.317 *	160.138 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	4.324 *	0 *	6.518 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	4.324 *	6.518 *	8.276 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0.232 *	0.525 *	0.949 *	0.971 *	1 *	Q-Stat	0 *	30.332 *	0 *	46.48 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0.525 *	0.949 *	0.971 *	1 *	p-value	Q-Stat	30.332 *	46.48 *	61.24 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0.206 *	7.27.129 *	727.191 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	0.064 *	0 *	15.478 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0 *	0 *	0 *	0 *	p-value	Q-Stat	0.064 *	15.478 *	32.09 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	1.3.279 *	28.394 *	46.667 *	0 *	0 *	Q-Stat	0 *	0.004 *	0 *	0.004 *	p-value	0 *	0 *	0 *	0 *
IBOVESPA	0 *	0.004 *	0.004 *	0.004 *	0.004 *	p-value	Q-Stat	0.004 *	0.004 *	0.004 *	Q-Stat	0 *	0 *	0 *	0 *

A.2. ModeloII

Cuadro A.4: Período 2002-2004. Estadísticas F de igualdad de varianzas de los rendimientos del portafolio entre el modelo MV y el modelo propuesto. (*) indica que la prueba correspondiente es significativa al nivel de confianza del 5 %, (**) significativa al 10 %, y (***) significativa al 15 %. (1): matriz de covarianza muestral, (2): matriz de covarianza espaciotemporal.

Index	Num. Stocks	Mean (1)	Mean (2)	Std.Dev (1)	Std.Dev. (2)	F Stat.	P-val.	Sharpe Ratio (1)	Sharpe Ratio (2)
DAX	6	0e+00	0e+00	0.0441	0.0432	0.9596	0.5682	-0.0003	-0.0002
DAX	7	0e+00	0e+00	0.0368	0.0358	0.9471	0.4512	0.0000	-0.0001
DAX	8	0e+00	0e+00	0.0303	0.0309	1.0409	0.5785	-0.0001	-0.0001
DAX	9	0e+00	0e+00	0.0300	0.0300	0.9980	0.9778	-0.0002	-0.0002
DAX	10	0e+00	0e+00	0.0331	0.0281	0.7193	0 *	-0.0004	-0.0002
DJIA	6	0e+00	0e+00	0.0579	0.0572	0.9768	0.7477	0.0003	0.0002
DJIA	7	0e+00	0e+00	0.0504	0.0490	0.9443	0.4311	0.0003	0.0003
DJIA	8	0e+00	0e+00	0.0424	0.0404	0.9099	0.1951	0.0003	0.0003
DJIA	9	0e+00	0e+00	0.0384	0.0371	0.9327	0.3392	0.0003	0.0003
DJIA	10	0e+00	0e+00	0.0358	0.0341	0.9062	0.1764	0.0003	0.0003
FTSE100	6	0e+00	0e+00	0.0408	0.0357	0.7680	3e-04 *	-0.0004	-0.0004
FTSE100	7	0e+00	0e+00	0.0401	0.0323	0.6487	0 *	-0.0002	-0.0003
FTSE100	8	0e+00	0e+00	0.0340	0.0273	0.6459	0 *	-0.0005	-0.0005
FTSE100	9	0e+00	0e+00	0.0311	0.0251	0.6523	0 *	-0.0004	-0.0004
FTSE100	10	0e+00	0e+00	0.0302	0.0220	0.5310	0 *	-0.0004	-0.0004
NASDAQ	6	0e+00	0e+00	0.0684	0.0692	1.0250	0.735	0.0003	0.0004
NASDAQ	7	0e+00	0e+00	0.0674	0.0680	1.0181	0.8052	0.0005	0.0005
NASDAQ	8	0e+00	0e+00	0.0480	0.0482	1.0076	0.9169	0.0005	0.0005
NASDAQ	9	0e+00	0e+00	0.0383	0.0390	1.0327	0.6589	0.0002	0.0002
NASDAQ	10	0e+00	0e+00	0.0390	0.0390	0.9979	0.9769	0.0002	0.0002
NASDAQ (ETFs)	6	0e+00	0e+00	0.0223	0.0227	1.0389	0.6001	-0.0012	-0.0012
NASDAQ (ETFs)	7	0e+00	0e+00	0.0239	0.0235	0.9652	0.6268	-0.0009	-0.0009
NASDAQ (ETFs)	8	0e+00	0e+00	0.0152	0.0157	1.0664	0.3778	-0.0009	-0.0009
NASDAQ (ETFs)	9	0e+00	0e+00	0.0126	0.0135	1.1354	0.0815 ***	-0.0009	-0.0010
NASDAQ (ETFs)	10	0e+00	0e+00	0.0169	0.0170	1.0184	0.8021	-0.0008	-0.0008
NYSE	6	0e+00	0e+00	0.0648	0.0649	1.0027	0.9703	0.0002	0.0002
NYSE	7	0e+00	0e+00	0.0493	0.0495	1.0057	0.9376	0.0001	0.0000
NYSE	8	0e+00	0e+00	0.0390	0.0407	1.0895	0.2397	0.0000	0.0000
NYSE	9	0e+00	0e+00	0.0465	0.0436	0.8798	0.0789 ***	0.0000	0.0000
NYSE	10	0e+00	0e+00	0.0508	0.0439	0.7492	1e-04 *	0.0000	0.0000
S&P500	6	0e+00	0e+00	0.0528	0.0524	0.9874	0.8624	0.0002	0.0002
S&P500	7	0e+00	0e+00	0.0466	0.0449	0.9261	0.2922	0.0000	0.0001
S&P500	8	0e+00	0e+00	0.0400	0.0396	0.9786	0.7662	0.0004	0.0003
S&P500	9	0e+00	0e+00	0.0369	0.0356	0.9289	0.3116	0.0001	0.0003
S&P500	10	0e+00	0e+00	0.0384	0.0328	0.7270	0 *	0.0000	0.0002

A.2 ModeloII

Cuadro A.5: Período 2007-2009. Estadísticas F de igualdad de varianzas de los rendimientos del portafolio entre el modelo MV y el modelo propuesto. (*) indica que la prueba correspondiente es significativa al nivel de confianza del 5%, (**) significativa al 10%, y (***) significativa al 15%. (1): matriz de covarianza muestral, (2): matriz de covarianza espaciotemporal.

Index	Num. Stocks	Mean (1)	Mean (2)	Std.Dev (1)	Std.Dev. (2)	F Stat.	P-val.	Sharpe Ratio (1)	Sharpe Ratio (2)
DAX	6	0e+00	0e+00	0.0499	0.0515	1.0656	0.3944	0.0004	0.0004
DAX	7	0e+00	0e+00	0.0477	0.0465	0.9510	0.501	0.0004	0.0005
DAX	8	0e+00	0e+00	0.0341	0.0374	1.2058	0.0122 *	0.0004	0.0004
DAX	9	0e+00	0e+00	0.0338	0.0326	0.9302	0.3324	0.0005	0.0005
DAX	10	0e+00	0e+00	0.0301	0.0305	1.0261	0.7301	0.0004	0.0005
DJIA	6	1e-04	1e-04	0.0795	0.0795	1.0010	0.9888	0.0007	0.0007
DJIA	7	1e-04	1e-04	0.0730	0.0689	0.8910	0.1132 ***	0.0008	0.0008
DJIA	8	0e+00	0e+00	0.0609	0.0599	0.9683	0.6584	0.0007	0.0007
DJIA	9	0e+00	0e+00	0.0529	0.0526	0.9887	0.8765	0.0008	0.0008
DJIA	10	0e+00	0e+00	0.0573	0.0502	0.7677	3e-04 *	0.0007	0.0007
FTSE100	6	0e+00	0e+00	0.0617	0.0524	0.7214	0 *	0.0004	0.0004
FTSE100	7	0e+00	0e+00	0.0527	0.0445	0.7123	0 *	0.0003	0.0003
FTSE100	8	0e+00	0e+00	0.0468	0.0391	0.6970	0 *	0.0003	0.0004
FTSE100	9	0e+00	0e+00	0.0365	0.0330	0.8168	0.0056 *	0.0004	0.0004
FTSE100	10	0e+00	0e+00	0.0351	0.0303	0.7466	1e-04 *	0.0003	0.0004
NASDAQ	6	1e-04	0e+00	0.1734	0.1482	0.7304	0 *	0.0004	0.0003
NASDAQ	7	0e+00	0e+00	0.1018	0.0951	0.8723	0.0609 **	0.0004	0.0004
NASDAQ	8	0e+00	0e+00	0.1078	0.0864	0.6427	0 *	0.0005	0.0005
NASDAQ	9	0e+00	0e+00	0.1044	0.0857	0.6738	0 *	0.0002	0.0002
NASDAQ	10	0e+00	0e+00	0.0628	0.0618	0.9674	0.6493	0.0003	0.0003
NASDAQ (ETFs)	6	0e+00	0e+00	0.0935	0.0774	0.6846	0 *	0.0002	0.0002
NASDAQ (ETFs)	7	0e+00	0e+00	0.0570	0.0564	0.9805	0.7871	0.0000	-0.0001
NASDAQ (ETFs)	8	0e+00	0e+00	0.0590	0.0512	0.7521	1e-04 *	0.0002	0.0001
NASDAQ (ETFs)	9	0e+00	0e+00	0.0461	0.0438	0.9047	0.1695	0.0000	0.0000
NASDAQ (ETFs)	10	0e+00	0e+00	0.0477	0.0426	0.7984	0.002 *	-0.0003	-0.0002
NYSE	6	0e+00	0e+00	0.0852	0.0856	1.0099	0.892	0.0004	0.0004
NYSE	7	0e+00	0e+00	0.0659	0.0655	0.9878	0.8658	0.0004	0.0005
NYSE	8	0e+00	0e+00	0.0740	0.0682	0.8488	0.0246 *	0.0005	0.0005
NYSE	9	0e+00	0e+00	0.0487	0.0544	1.2488	0.0023 *	0.0006	0.0005
NYSE	10	0e+00	0e+00	0.0445	0.0440	0.9792	0.7729	0.0003	0.0004
S&P500	6	1e-04	1e-04	0.1148	0.0854	0.5533	0 *	0.0005	0.0008
S&P500	7	1e-04	1e-04	0.0756	0.0719	0.9044	0.1681	0.0009	0.0009
S&P500	8	0e+00	0e+00	0.0724	0.0643	0.7906	0.0013 *	0.0006	0.0008
S&P500	9	0e+00	0e+00	0.0708	0.0586	0.6844	0 *	0.0005	0.0008
S&P500	10	0e+00	0e+00	0.0478	0.0488	1.0415	0.5772	0.0008	0.0008

A.2 ModeloII

Cuadro A.6: Período 2013-2015. Estadísticas F de igualdad de varianzas de los rendimientos del portafolio entre el modelo MV y el modelo propuesto. (*) indica que la prueba correspondiente es significativa al nivel de confianza del 5 %, (**) significativa al 10 %, y (***) significativa al 15 %. (1): matriz de covarianza muestral, (2): matriz de covarianza espaciotemporal.

Index	Num. Stocks	Mean (1)	Mean (2)	Std.Dev (1)	Std.Dev. (2)	F Stat.	P-val.	Sharpe Ratio (1)	Sharpe Ratio (2)
DAX	6	0e+00	0e+00	0.0382	0.0374	0.9588	0.5636	0.0009	0.0010
DAX	7	0e+00	0e+00	0.0287	0.0297	1.0705	0.349	0.0009	0.0010
DAX	8	0e+00	0e+00	0.0267	0.0279	1.0932	0.2207	0.0010	0.0010
DAX	9	0e+00	0e+00	0.0220	0.0241	1.2020	0.0115 *	0.0011	0.0010
DAX	10	0e+00	0e+00	0.0193	0.0216	1.2527	0.002 *	0.0009	0.0010
DJIA	6	1e-04	1e-04	0.0590	0.0607	1.0579	0.4399	0.0011	0.0011
DJIA	7	1e-04	1e-04	0.0558	0.0539	0.9343	0.3507	0.0010	0.0010
DJIA	8	0e+00	0e+00	0.0429	0.0437	1.0382	0.6071	0.0011	0.0011
DJIA	9	0e+00	0e+00	0.0363	0.0391	1.1576	0.0447 *	0.0012	0.0011
DJIA	10	0e+00	0e+00	0.0280	0.0329	1.3809	0 *	0.0013	0.0012
FTSE100	6	0e+00	0e+00	0.0289	0.0313	1.1716	0.0301 *	0.0004	0.0004
FTSE100	7	0e+00	0e+00	0.0231	0.0274	1.4102	0 *	0.0005	0.0004
FTSE100	8	0e+00	0e+00	0.0195	0.0217	1.2401	0.0032 *	0.0003	0.0005
FTSE100	9	0e+00	0e+00	0.0158	0.0203	1.6521	0 *	0.0005	0.0005
FTSE100	10	0e+00	0e+00	0.0134	0.0180	1.8009	0 *	0.0007	0.0005
NASDAQ	6	0e+00	0e+00	0.0740	0.0672	0.8247	0.0082 *	0.0004	0.0005
NASDAQ	7	0e+00	0e+00	0.0367	0.0378	1.0583	0.4366	-0.0004	0.0001
NASDAQ	8	0e+00	0e+00	0.0733	0.0590	0.6489	0 *	0.0004	0.0004
NASDAQ	9	0e+00	0e+00	0.0524	0.0431	0.6780	0 *	0.0004	0.0005
NASDAQ	10	0e+00	0e+00	0.0352	0.0412	1.3714	0 *	0.0003	0.0005
NASDAQ (ETFs)	6	0e+00	0e+00	0.0342	0.0340	0.9869	0.8564	-0.0002	-0.0001
NASDAQ (ETFs)	7	0e+00	0e+00	0.0237	0.0241	1.0295	0.6895	-0.0001	0.0001
NASDAQ (ETFs)	8	0e+00	0e+00	0.0224	0.0234	1.0909	0.2326	0.0000	0.0000
NASDAQ (ETFs)	9	0e+00	0e+00	0.0209	0.0197	0.8874	0.1011 ***	0.0000	0.0003
NASDAQ (ETFs)	10	0e+00	0e+00	0.0167	0.0179	1.1509	0.0539 **	-0.0003	0.0001
NYSE	6	0e+00	0e+00	0.0405	0.0380	0.8790	0.0768 **	0.0008	0.0010
NYSE	7	0e+00	0e+00	0.0416	0.0312	0.5611	0 *	0.0012	0.0014
NYSE	8	0e+00	0e+00	0.0281	0.0266	0.8992	0.145 ***	0.0015	0.0013
NYSE	9	0e+00	0e+00	0.0335	0.0264	0.6223	0 *	0.0008	0.0010
NYSE	10	0e+00	0e+00	0.0401	0.0252	0.3951	0 *	0.0003	0.0008
S&P500	6	0e+00	0e+00	0.0369	0.0500	1.8381	0 *	0.0012	0.0009
S&P500	7	0e+00	0e+00	0.0574	0.0565	0.9685	0.6609	0.0008	0.0008
S&P500	8	0e+00	0e+00	0.0448	0.0459	1.0514	0.4912	0.0008	0.0008
S&P500	9	0e+00	0e+00	0.0377	0.0397	1.1135	0.1401 ***	0.0008	0.0008
S&P500	10	0e+00	0e+00	0.0360	0.0386	1.1494	0.0561 **	0.0008	0.0008

A.2 ModeloII

Cuadro A.7: Período 2018-2020. Estadísticas F de igualdad de varianzas de los rendimientos del portafolio entre el modelo MV y el modelo propuesto. (*) indica que la prueba correspondiente es significativa al nivel de confianza del 5%, (**) significativa al 10%, y (***) significativa al 15%. (1): matriz de covarianza muestral, (2): matriz de covarianza espaciotemporal.

Index	Num. Stocks	Mean (1)	Mean (2)	Std.Dev (1)	Std.Dev. (2)	F Stat.	P-val.	Sharpe Ratio (1)	Sharpe Ratio (2)
DAX	6	0e+00	0e+00	0.0493	0.0418	0.7179	0 *	0.0004	0.0005
DAX	7	0e+00	0e+00	0.0371	0.0343	0.8546	0.031 *	0.0005	0.0004
DAX	8	0e+00	0e+00	0.0376	0.0314	0.6987	0 *	0.0000	0.0003
DAX	9	0e+00	0e+00	0.0395	0.0297	0.5660	0 *	0.0000	0.0003
DAX	10	0e+00	0e+00	0.0269	0.0251	0.8742	0.0649 **	0.0003	0.0004
DJIA	6	0e+00	0e+00	0.0685	0.0709	1.0712	0.3452	-0.0004	-0.0004
DJIA	7	0e+00	0e+00	0.0559	0.0593	1.1252	0.1056 ***	-0.0003	-0.0004
DJIA	8	0e+00	0e+00	0.0471	0.0516	1.2046	0.0107 *	-0.0006	-0.0005
DJIA	9	0e+00	0e+00	0.0459	0.0466	1.0321	0.6645	-0.0004	-0.0005
DJIA	10	0e+00	0e+00	0.0465	0.0431	0.8581	0.0358 *	-0.0002	-0.0004
FTSE100	6	0e+00	0e+00	0.0434	0.0400	0.8470	0.0223 *	0.0011	0.0012
FTSE100	7	0e+00	0e+00	0.0437	0.0353	0.6539	0 *	0.0007	0.0011
FTSE100	8	0e+00	0e+00	0.0348	0.0298	0.7377	0 *	0.0010	0.0012
FTSE100	9	0e+00	0e+00	0.0367	0.0272	0.5515	0 *	0.0007	0.0011
FTSE100	10	0e+00	0e+00	0.0306	0.0238	0.6034	0 *	0.0007	0.0011
NASDAQ	6	0e+00	0e+00	0.0919	0.0850	0.8548	0.0314 *	0.0002	0.0002
NASDAQ	7	0e+00	0e+00	0.0718	0.0725	1.0185	0.801	0.0002	0.0002
NASDAQ	8	0e+00	0e+00	0.0641	0.0612	0.9120	0.2065	0.0004	0.0003
NASDAQ	9	0e+00	0e+00	0.0616	0.0555	0.8114	0.0042 *	0.0004	0.0003
NASDAQ	10	0e+00	0e+00	0.0535	0.0490	0.8369	0.0146 *	0.0003	0.0001
NASDAQ (ETFs)	6	0e+00	0e+00	0.0533	0.0482	0.8164	0.0054 *	-0.0007	-0.0007
NASDAQ (ETFs)	7	0e+00	0e+00	0.0348	0.0367	1.1158	0.1328 ***	-0.0008	-0.0008
NASDAQ (ETFs)	8	0e+00	0e+00	0.0369	0.0357	0.9320	0.3337	-0.0005	-0.0006
NASDAQ (ETFs)	9	0e+00	0e+00	0.0338	0.0303	0.8014	0.0024 *	-0.0007	-0.0007
NASDAQ (ETFs)	10	0e+00	0e+00	0.0306	0.0288	0.8853	0.0946 **	-0.0009	-0.0007
NYSE	6	0e+00	0e+00	0.0643	0.0665	1.0699	0.3535	-0.0005	-0.0005
NYSE	7	0e+00	0e+00	0.0488	0.0558	1.3081	2e-04 *	-0.0005	-0.0005
NYSE	8	0e+00	0e+00	0.0497	0.0480	0.9323	0.3362	-0.0005	-0.0004
NYSE	9	0e+00	0e+00	0.0500	0.0471	0.8895	0.1081 ***	-0.0002	-0.0004
NYSE	10	0e+00	0e+00	0.0376	0.0397	1.1138	0.1393 ***	-0.0003	-0.0005
S&P500	6	0e+00	0e+00	0.0608	0.0597	0.9641	0.616	-0.0002	-0.0004
S&P500	7	0e+00	0e+00	0.0572	0.0515	0.8105	0.004 *	-0.0002	-0.0004
S&P500	8	0e+00	0e+00	0.0492	0.0446	0.8250	0.0083 *	-0.0004	-0.0005
S&P500	9	0e+00	0e+00	0.0440	0.0393	0.7965	0.0018 *	-0.0005	-0.0004
S&P500	10	0e+00	0e+00	0.0352	0.0348	0.9796	0.7776	-0.0005	-0.0004