

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TEOREMA DE MAPEO PARA PLANTILLAS ANALÍTICAS EN  
TEORÍA DE RETROALIMENTACIÓN CUANTITATIVA:  
ESTUDIO EXPLORATORIO

POR

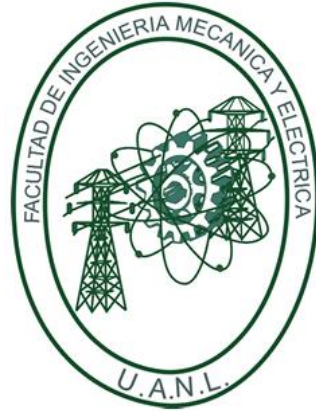
ING. LOAN DANI RODRÍGUEZ HERRERA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN. AGOSTO, 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TEOREMA DE MAPEO PARA PLANTILLAS ANALÍTICAS EN  
TEORÍA DE RETROALIMENTACIÓN CUANTITATIVA:  
ESTUDIO EXPLORATORIO

POR

ING. LOAN DANI RODRÍGUEZ HERRERA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN. AGOSTO, 2024

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Posgrado**

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis "Teorema de mapeo para plantillas analíticas en teoría de realimentación cuantitativa: estudio exploratorio", realizada por el estudiante Loan Dani Rodríguez Herrera, con número de matrícula 2173311, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

**El Comité de Evaluación de Tesis**

Dr. Alberto Cavazos González  
Director

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez  
Co-director

Dra. Griselda Quiroz Compeán  
Revisor

Dr. Miguel Ángel Platas Garza  
Revisor

Dr. Luis Humberto Rodríguez Alfaro  
Revisor

Vo.Bo.

  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado

Institución 190001

Programa 557520

Acta Núm. 4431

Ciudad Universitaria, a 1 de octubre de 2024.

## **AGRADECIMIENTOS**

- Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conahcyt) por su invaluable apoyo durante el desarrollo de mi periodo de estudios, el cual ha sido fundamental para la realización de este proyecto.
- A la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) y a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME), por la formación académica y profesional recibida.
- A mis profesores del posgrado, por su dedicación y paciencia al transmitir sus conocimientos. Gracias por inspirarme a alcanzar nuevas metas y por su invaluable guía en este proceso académico.
- Al Dr. Alberto Cavazos, por su orientación, apoyo y confianza en mi trabajo. Su experiencia y consejos fueron esenciales para llevar a cabo esta tesis.
- A mi familia, por darme el apoyo incondicional que me permitió seguir adelante, especialmente al dejar mi querida Cuba para venir a estudiar en México. Su amor y confianza han sido mi mayor fortaleza.
- A mi novia, por su constante ayuda, apoyo y comprensión en todo momento. Su compañía ha sido fundamental para superar los desafíos de este camino.
- A mis compañeros de estudio, por haberme acompañado y brindado su amistad durante estos años de maestría. Juntos compartimos aprendizajes, risas y desafíos que siempre recordaré con cariño.

## RESUMEN

Este trabajo presenta un estudio sobre la aplicación del Teorema de mapeo en la construcción de plantillas analíticas para sistemas de control robusto con incertidumbres multilineales, en el marco de la Teoría de Retroalimentación Cuantitativa (*QFT*, por sus siglas en inglés). La investigación se enfoca en el diseño de plantillas que, en presencia de incertidumbres, abarquen todas las posibles plantas, evitando que resulten conservadoras y facilitando el diseño de controladores que garanticen la estabilidad y el desempeño robusto en lazo cerrado en sistemas inciertos.

El análisis se estructura en cinco capítulos, se comienza con una revisión de los fundamentos teóricos y métodos tradicionales para la construcción de plantillas en sistemas con incertidumbres. Posteriormente, se introduce el Teorema de mapeo, destacando su capacidad para manejar incertidumbres en polinomios con coeficientes multilineales, y se comparan los métodos a priori y a posteriori para la construcción de plantillas, a partir de sus respectivas ventajas y limitaciones.

A lo largo del documento, se aplican estos métodos en casos de estudio prácticos, incluyendo un motor de corriente continua controlado por armadura, un molino de laminación de acero en caliente y un sistema de suspensión activa de un vehículo. Los resultados obtenidos demuestran la efectividad del Teorema de mapeo para la obtención de plantillas en sistemas con incertidumbre multilineal, validando su utilidad en aplicaciones industriales críticas.

Finalmente, se concluye que el método a priori garantiza que se obtengan más posibles casos dentro de la plantilla en comparación con el método a posteriori, que es más exhaustivo y requiere un esfuerzo computacional significativo. Las recomendaciones futuras incluyen la validación práctica de las plantillas desarrolladas, a partir de la construcción de controladores, y la mejora de la eficiencia computacional de los métodos presentados.

# ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS Y ANÁLISIS DE SISTEMAS CON INCERTIDUMBRES .....	1
1.1 Planteamiento del problema.....	2
1.2 Justificación .....	2
1.3 Antecedentes .....	3
1.4 Hipótesis .....	6
1.5 Objetivos .....	6
1.6 Organización del trabajo .....	6
CAPÍTULO II: MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE PLANTILLAS PARA SISTEMAS CON INCERTIDUMBRES.....	8
2.1 Tipos de incertidumbre en sistemas de control.....	8
2.1.1 Incertidumbre paramétrica y no paramétrica.....	8
2.1.2 Incertidumbre aditiva.....	9
2.1.3 Incertidumbre multiplicativa .....	9
2.1.4 Incertidumbre estructurada y no estructurada .....	10
2.2 Métodos para construcción de plantillas.....	10
2.2.1 Método de construcción de conjunto de raíces.....	10
2.2.2 Método de construcción de conjuntos de valor .....	12
2.2.3 Teorema de Kharitonov .....	14
2.2.4 Teorema del borde .....	15
2.2.5 Teorema de mapeo.....	16
CAPÍTULO III: TEOREMA DE MAPEO EN POLINOMIOS CON INCERTIDUMBRE MULTILINEAL .....	20
3.1 Fundamentos del Teorema de mapeo .....	20
3.2 Condiciones para aplicación del Teorema de mapeo.....	22
3.3 Construcción de plantillas mediante el Teorema de mapeo.....	22
3.3.1 Método a priori para la construcción de plantillas .....	23
3.3.2 Método a posteriori para la construcción de plantillas.....	24
3.4 Teorema de mapeo para la estabilidad en familia de polinomios. Teorema de exclusión de cero .....	24
3.4.1 Teorema de mapeo en algoritmos de división de dominios .....	26

CAPÍTULO IV: APLICACIÓN DEL TEOREMA DE MAPEO EN UN MODELO DE MOTOR CC PARA LA CONSTRUCCIÓN DE PLANTILLAS .....	31
4.1 Dinámica del motor CC controlado por armadura.....	31
4.2 Aplicación del Teorema de mapeo a los polinomios de la planta de estudio .....	33
4.3 Obtención de plantilla con método a priori .....	36
4.4 Obtención de plantilla con método a posteriori .....	41
4.5 Comparación de las plantillas obtenidas con los métodos a priori y a posteriori ..	43
CAPÍTULO V: APLICACIÓN PRÁCTICA Y RESULTADOS .....	46
5.1 Resultados del Teorema de mapeo para los tres casos de estudio .....	46
5.1.1 Motor CC controlado por armadura .....	46
5.1.2 Molino de laminación de acero en caliente .....	49
5.1.3 Control de suspensión activa de un vehículo .....	52
5.2 Resultados con los métodos a priori y a posteriori en la construcción de plantillas55	
5.2.1 Motor CC controlado por armadura .....	55
5.2.2 Molino de laminación de acero en caliente .....	58
5.2.3 Control de suspensión activa de un vehículo. ....	59
5.3 Análisis comparativo entre los tres casos de estudio .....	60
CONCLUSIONES.....	63
RECOMENDACIONES .....	64
REFERENCIAS .....	65

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1: Análisis de estabilidad con Teorema de mapeo y Teorema de exclusión cero para el polinomio definido en 3.1.....	25
Figura 3.2: Envolturas convexas del polinomio del denominador del motor CC. ....	26
Figura 3.3: Plantilla de polinomio característico de la ecuación 3.2 para $\omega = 1$ .....	27
Figura 3.4: Dominio estable obtenido para el polinomio característico de la ecuación 3.2. ....	29
Figura 4.1: Motor CC controlado por armadura. Adaptado de (Garcia-Sanz M. , 2017). ...	32
Figura 4.2: Plantilla compleja del polinomio del numerador (motor CC, $\omega = 500$ ).....	34
Figura 4.3: Envoltura convexa del polinomio $pd$ (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	35
Figura 4.4: Envoltura convexa del polinomio $pd$ y 100000 valores del mismo contenidos en la envoltura convexa (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	36
Figura 4.5: Subplantilla del numerador en el diagrama de Nichols (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	37
Figura 4.6: Subplantilla del denominador en el diagrama de Nichols (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	38
Figura 4.7: Método de adición de plantillas. Adaptado de (Erik Coelingh, 1998).....	39
Figura 4.8: Subplantillas del denominador y del numerador (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	40
Figura 4.9: Adición de las subplantillas del numerador y del denominador (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	40
Figura 4.10: Plantilla construida con método a priori (motor CC, $\omega = 500$ ).....	41
Figura 4.11: Plantilla compleja de la ecuación 4.14 (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	42
Figura 4.12: Plantilla obtenida con el método a posteriori (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	43
Figura 4.13: Plantillas obtenidas a priori y a posteriori (motor CC, $\omega = 500$ ). ....	44
Figura 5.1: Plantilla del polinomio del numerador (motor CC, $\omega = 50$ ).....	47
Figura 5.2: Plantilla del polinomio del denominador (motor CC, $\omega = 50$ ).....	48
Figura 5.3: Plantillas del polinomio del denominador del motor CC para $\omega = 700$ (izquierda) y $\omega = 2000$ (derecha). ....	49
Figura 5.4: Desarrollo de la ecuación del molino de laminación de acero en caliente utilizando MATLAB. ....	50
Figura 5.5: Plantilla del polinomio del numerador (HSM, $\omega = 1$ ).....	51
Figura 5.6: Plantillas complejas del polinomio del denominador del HSM.....	52
Figura 5.7: Plantilla del polinomio del numerador (Vehículo, $\omega = 1$ ).....	54
Figura 5.8: Plantillas del polinomio del denominador del Vehículo.....	54
Figura 5.9: Subplantillas del numerador y denominador (motor CC, $\omega = 50$ ). ....	56



Figura 5.10: Procedimiento de adición de plantillas (motor CC, $\omega = 50$ ). .....	56
Figura 5.11: Plantillas obtenidas (motor CC, $\omega = 50$ ). .....	57
Figura 5.12: Plantillas obtenidas para el motor CC, para $\omega = 700$ (izquierda) y $\omega = 2000$ (derecha). .....	58
Figura 5.13: Plantillas obtenidas para el HSM para diferentes $\omega$ . .....	59
Figura 5.14: Plantillas obtenidas para el HSM para diferentes $\omega$ . .....	60

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1: Valores de parámetros inciertos del motor CC. ....	33
Tabla 5.1: Valores de parámetros inciertos del HSM.....	50
Tabla 5.2: Valores de los parámetros del vehículo.....	53

# CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS Y ANÁLISIS DE SISTEMAS CON INCERTIDUMBRES

El diseño de sistemas de control robusto es una disciplina crucial en la ingeniería, especialmente en aplicaciones complejas donde los sistemas están sujetos a diversas fuentes de incertidumbre. En estos casos, es fundamental emplear técnicas avanzadas de control que no solo garanticen la estabilidad y el rendimiento del sistema, sino que también aborden de manera efectiva las interacciones entre múltiples lazos de control. Entre las metodologías más destacadas para este propósito se encuentran el Control  $H_\infty$ , el Control Predictivo Basado en Modelos (*MPC*, por sus siglas en inglés), las Desigualdades Matriciales Lineales (*LMI*, por sus siglas en inglés) y la Teoría de Retroalimentación Cuantitativa (*QFT*, por sus siglas en inglés), siendo esta última el enfoque principal de este trabajo.

La QFT se consolida como una técnica robusta para el diseño de sistemas de control paramétrico, permitiendo analizar y manejar las compensaciones necesarias para alcanzar el rendimiento deseado en presencia de incertidumbres paramétricas. Tradicionalmente, la técnica QFT emplea el método de malla (*gridding*) para la construcción de las plantillas, el cual no garantiza que se incluyan todas las plantas dentro del conjunto de incertidumbre; sin embargo, esto se logra en el trabajo de (Fu, 1990), quien propuso el Teorema del borde. Este teorema proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia del contorno de una plantilla para una función de transferencia con incertidumbre paramétrica, pero únicamente en el caso de incertidumbre intervalo o afín. La aplicación de QFT en sistemas con incertidumbres multilineales, que representan variaciones complejas y no lineales en los parámetros del sistema, presenta retos significativos que requieren un enfoque más exhaustivo en la construcción de plantillas de control.

En este contexto, el presente trabajo se centra en la integración del Teorema de mapeo en la construcción de plantillas para sistemas con incertidumbre multilineal, abordando las limitaciones de los métodos tradicionales de QFT. A través de un análisis comparativo entre los enfoques a priori y a posteriori, se propone una metodología que asegura una cobertura

completa de los posibles valores de las funciones de transferencia dentro del contorno de la plantilla, lo cual puede llevar a mejorar la precisión y robustez del diseño de control.

La investigación realizada no solo refuerza la aplicación de QFT en entornos con incertidumbres complejas, sino que también introduce innovaciones metodológicas que pueden ser extrapoladas a otras áreas del control robusto. Así, este trabajo se posiciona como una contribución relevante tanto a nivel teórico como práctico, ofreciendo soluciones que pueden ser implementadas en sistemas de control avanzado en diversas industrias.

## **1.1 Planteamiento del problema**

En el ámbito de la ingeniería de control, la garantía de robustez frente a incertidumbres en los parámetros es un desafío crucial y continuo. La técnica QFT es una herramienta ampliamente adoptada para el diseño de controladores robustos, gracias a su capacidad para manejar incertidumbres en los sistemas de control. Sin embargo, un problema significativo surge al tratar funciones de transferencia con incertidumbre multilineal: las plantillas generadas mediante QFT no garantizan la inclusión de todos los posibles valores de la función de transferencia. Esto puede resultar en la omisión del peor caso, comprometiendo así la efectividad y robustez del sistema de control diseñado. Este capítulo explora los fundamentos y el marco de este problema, ofreciendo una visión general de la situación actual y la justificación para la investigación propuesta.

El desafío continuo en la ingeniería de control es asegurar la robustez frente a incertidumbres en los parámetros. La QFT es una herramienta popular para diseñar controladores robustos, pero presenta una limitación importante al tratar funciones de transferencia con incertidumbre multilineal. Las plantillas generadas mediante QFT no aseguran que todos los posibles valores de la función de transferencia estén incluidos, lo que puede resultar en una falta de cobertura del peor caso y, por ende, en una posible disminución de la efectividad del sistema de control.

## **1.2 Justificación**

En el diseño de controladores robustos, es crucial construir plantillas que representen todos los posibles valores de una función de transferencia, especialmente en sistemas con

incertidumbre multilineal. Aunque la investigación ha avanzado en el tratamiento de incertidumbres de intervalos y afines, existe una laguna significativa en la literatura sobre incertidumbres multilineales. La QFT enfrenta dificultades para capturar el peor caso de la función de transferencia debido a la incapacidad de sus plantillas para representar todos los valores posibles bajo variaciones paramétricas. A pesar de los avances del Teorema del borde en el manejo de incertidumbre de intervalo, este enfoque no se aplica adecuadamente a incertidumbres multilineales.

Este trabajo busca superar estas limitaciones mediante el uso del Teorema de mapeo, que ha demostrado ser efectivo para capturar todos los posibles valores de polinomios con coeficientes multilineales. La metodología propuesta implica construir plantillas para los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia, y luego obtener una plantilla completa para una frecuencia específica mediante la técnica de adición de plantillas en el diagrama de Nichols. Este enfoque no solo captura todos los posibles valores de la función de transferencia, sino que también ofrece una herramienta robusta para el diseño de controladores en presencia de incertidumbre multilineal, llenando un vacío crítico en la teoría existente.

### **1.3 Antecedentes**

Diversos estudios han abordado la limitación de asegurar la inclusión de todos los valores posibles en una plantilla mediante distintos enfoques. En este enfoque el Teorema del borde ha sido utilizado para mejorar las plantillas en el caso de incertidumbres paramétricas de intervalo. En (Fu, 1990) se demuestra que, para funciones de transferencia con polinomios en el numerador y denominador con incertidumbre paramétrica de intervalo, el contorno de la plantilla analítica se mapea a partir de los bordes del hiper-rectángulo de parámetros  $Q$ . Este trabajo muestra que la plantilla analítica correspondiente a cada borde de  $Q$  es un segmento de línea o un segmento de arco. No obstante, algunos bordes de  $Q$  son proyectados al interior de la plantilla analítica, lo cual puede afectar la precisión del diseño.

Para mejorar el contorno discreto de la plantilla, se ha propuesto el uso de series de Fourier, que permiten obtener un contorno diferenciable con curvas suaves. Esta técnica es aplicable a plantas con un alto número de parámetros inciertos, pero presenta la limitación de que la

aproximación por series de Fourier puede no considerar toda la incertidumbre, comprometiendo la garantía de inclusión del peor caso en el diseño del controlador y, por ende, la estabilidad y desempeño robustos del sistema (Juan Jose Martin-Romero, 2007) y (Martín-Romero, 2007).

En el caso de polinomios con incertidumbre de intervalo, se han utilizado curvas cúbicas de Bézier para determinar el contorno analítico de la plantilla, eliminando puntos interiores que no son necesarios para calcular las cotas (Karamancioglu, 2018). Además, se han propuesto métodos alternativos para calcular cotas analíticas para estabilidad robusta, como la envolvente de una familia de círculos (Montserrat Gil-Martínez, 2009) y la imagen espejo de la planta (J. Rico-Azagra, 2018).

Algunos trabajos recientes han aplicado estas técnicas para diseñar controladores robustos en diferentes contextos. Por ejemplo, en (Jeong, 2017), se presenta un método automático para diseñar un controlador de cambio de fase controlado por tiristores (TCPS) basado en QFT, con el objetivo de mejorar la estabilidad del sistema de potencia frente a incertidumbres y perturbaciones. El trabajo (Guo, 2018) propone el diseño de un controlador robusto utilizando QFT para un servosistema electro-hidráulico de cilindro asimétrico, considerando la variación de parámetros y las perturbaciones externas. Además, en (Rounakul Islam Boby, 2019), se discute un controlador híbrido que combina QFT adaptativo y cuantitativo para un modelo de helicóptero de tres grados de libertad.

En el trabajo (Yun Cheng, 2023) se centra el diseño y ajuste de parámetros del control activo de rechazo de perturbaciones (*ADRC*, por sus siglas en inglés) para sistemas multivariables inciertos utilizando la QFT. Este trabajo destaca el uso de plantillas para representar las incertidumbres del sistema y el mapeo para transformar estas incertidumbres en el dominio de la frecuencia, facilitando así el diseño del controlador. Esto refuerza la aplicabilidad del QFT en el manejo de incertidumbres complejas en sistemas multivariables. De manera similar, en otro trabajo reciente (Yunlei Fan, 2023) se enfoca en el diseño de un ADRC para un proceso de destilación multivariable con saturación de entrada, empleando también la QFT para el ajuste de parámetros. Este estudio no solo demuestra la mejora en el rendimiento dinámico del sistema, sino que también aborda la estabilidad robusta mediante el uso de

funciones descriptivas, confirmando la efectividad del enfoque propuesto a través de simulaciones numéricas y basadas en Aspen Plus.

Se destaca en (Kaixian Ba, 2024) el desarrollo de un sistema de control de compensación de fuerza para un sistema servo electrohidráulico que utiliza un accionamiento compuesto de bomba y válvula (PCDS). El objetivo principal es reducir las pérdidas de energía y mejorar tanto la precisión como la velocidad de respuesta del sistema. Los autores introducen un modelo matemático no lineal del sistema y diseñan un método de control basado en la QFT junto con un observador de par de perturbación (DTO), conocido como QFT-DTOC. Este enfoque mejora la precisión y la robustez del control de fuerza, minimizando los efectos de las perturbaciones.

De igual manera, en (Jisha Lakshmi Krishnankutty, 2023) se propone un método innovador para el control robusto de la velocidad de un motor de inducción controlado por vector con orientación de campo indirecto (IM) utilizando la teoría de retroalimentación cuantitativa (QFT). En este trabajo, se diseña un controlador basado en QFT para un modelo simplificado del motor de inducción, considerando el peor caso de incertidumbres y variaciones de parámetros. Los resultados de las simulaciones, realizadas en MATLAB/Simulink, muestran un rendimiento superior del controlador QFT en comparación con un controlador PID convencional, destacando la efectividad del enfoque propuesto para aplicaciones de control en entornos con alta incertidumbre.

Por otro lado, aunque el Teorema del borde ha sido eficaz para funciones de transferencia con incertidumbre paramétrica de intervalo, su aplicación a funciones con incertidumbre paramétrica multilineal tiende a resultar en una región sobreestimada (J. Zhou, 2017). En respuesta a esta limitación, se ha propuesto el uso del Teorema de mapeo para obtener el conjunto de valores de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal (Xu, 1989). Este teorema ha sido aplicado al polinomio característico de lazo cerrado en el dominio  $j\omega$  para determinar estabilidad robusta (J. Zhou, 2017) y (Bhattacharyya, 2017).

## **1.4 Hipótesis**

En el ámbito de la QFT, es posible garantizar la inclusión de todos los posibles valores de una plantilla para funciones de transferencia con incertidumbre paramétrica multilineal mediante el uso del Teorema de mapeo. Este teorema facilita la construcción de envolturas convexas que abarcan todos los valores posibles de polinomios con coeficientes multilineales, asegurando que las plantillas generadas reflejen completamente el rango de incertidumbre paramétrica.

## **1.5 Objetivos**

La investigación se propone asegurar que, mediante el uso del Teorema de mapeo, las plantillas en QFT incluyan todos los posibles valores para una función de transferencia con incertidumbre paramétrica multilineal. Para lograrlo, se han establecido los siguientes objetivos específicos:

1. Investigar métodos de construcción de plantillas en la técnica QFT y su aplicación en el diseño de controladores, evaluando su eficacia.
2. Obtener la imagen en el plano complejo a partir de los vértices de la hipercaja del espacio paramétrico, analizando la representación de la función de transferencia.
3. Validar las operaciones entre plantillas propuestas en la literatura, asegurando la coherencia y efectividad de las metodologías existentes.

## **1.6 Organización del trabajo**

Este trabajo ofrece un análisis detallado del uso de plantillas en la técnica QFT y el Teorema de mapeo en el análisis y diseño de plantillas distribuidos en 5 capítulos. El primer capítulo dedicado a los antecedentes de este estudio, planteamiento de la problemática y el diseño metodológico que sustentara el mismo.

El Capítulo 2 por su parte aborda la importancia de las plantillas en el ámbito de la teoría de control robusto. En este capítulo, se examinan diversos tipos de incertidumbres que afectan a los sistemas de control, como las incertidumbres paramétricas y no paramétricas, así como las incertidumbres aditivas, multiplicativas, estructuradas y no estructuradas. También se



revisan los métodos utilizados para construcción de plantillas, entre ellos el método de conjuntos de raíces, el método de construcción de conjuntos de valores, el Teorema del borde y el Teorema de mapeo, destacando sus fortalezas y limitaciones en términos de estabilidad y robustez del sistema.

El Capítulo 3 se adentra en el Teorema de mapeo, explorando sus fundamentos teóricos y condiciones de aplicación. Se define cómo este teorema se utiliza para construir plantillas en polinomios con incertidumbre multilínea, explicando cómo se relaciona con otros métodos de análisis de estabilidad y cómo permite crear plantillas a través de la envolvente convexa de los valores de un polinomio.

En el Capítulo 4, se aplica el Teorema de mapeo a un caso de estudio concreto: un motor de corriente continua controlado por armadura. Aquí se obtiene la plantilla de la función de transferencia usando tanto los métodos a priori como a posteriori para una frecuencia específica, ofreciendo una visión práctica del teorema en acción.

El Capítulo 5 amplía el análisis al aplicar los métodos teóricos en el motor de corriente continua para diferentes frecuencias y presenta dos casos de estudio adicionales. Estos incluyen la función de transferencia que describe la relación entre el par del looper y la tensión en la cinta de un HSM, así como el control de suspensión activa de un vehículo. Se comparan los resultados obtenidos con las plantillas construidas mediante los métodos a priori y a posteriori y se contrastan con las obtenidas usando el método QFT.

Finalmente, se concluye con un análisis de los hallazgos y se ofrecen recomendaciones basadas en los resultados obtenidos a lo largo del trabajo, evaluando la efectividad y la aplicabilidad de los métodos estudiados.

## **CAPÍTULO II: MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE PLANTILLAS PARA SISTEMAS CON INCERTIDUMBRES**

Las plantillas en la disciplina de control robusto, constituyen una herramienta gráfica importante que facilita el análisis y diseño de sistemas robustos, estas representan el conjunto de todos los posibles valores de la función de transferencia del sistema en el plano complejo, teniendo en cuenta las incertidumbres en los parámetros del modelo. Estas plantillas permiten visualizar cómo las incertidumbres afectan la estabilidad y el desempeño del sistema, y asegurar que este cumple con las especificaciones de diseño en todos los escenarios posibles.

En este capítulo, se discutirá sobre las diferentes incertidumbres en los sistemas de control y se explorarán varios métodos para la construcción de plantillas en la técnica QFT. Se aborda además cómo cada uno de estos métodos trabaja las incertidumbres del sistema, y cómo pueden ser utilizados para garantizar la estabilidad y el desempeño robusto del sistema de control.

### **2.1 Tipos de incertidumbre en sistemas de control**

En los sistemas de control robusto, la incertidumbre se refiere a la falta de conocimiento preciso sobre el modelo del sistema, incluyendo las dinámicas del sistema, las perturbaciones externas y los errores de modelado. En (Horowitz, 1993) se menciona que esta incertidumbre implica que los parámetros del sistema y las condiciones operativas pueden variar de manera impredecible, lo que dificulta garantizar un rendimiento y estabilidad consistentes con un controlador diseñado bajo suposiciones ideales. El concepto de incertidumbre es crucial en el diseño de sistemas de control robusto, ya que estos deben ser capaces de mantener un desempeño aceptable incluso frente a variaciones y perturbaciones imprevistas. A continuación, se presentan los principales tipos de incertidumbre en sistemas de control.

#### **2.1.1 Incertidumbre paramétrica y no paramétrica**

La incertidumbre paramétrica se refiere a la variabilidad en los parámetros del modelo del sistema. Estos parámetros pueden incluir constantes de tiempo, ganancias, y otros coeficientes que describen el comportamiento dinámico del sistema. (Garcia-Sanz M. , 2017)

menciona que "la incertidumbre paramétrica se presenta cuando los parámetros del sistema varían dentro de un rango especificado debido a tolerancias de fabricación, desgaste, o cambios en las condiciones operativas". La comprensión de este tipo de incertidumbre es esencial para el diseño de controladores que puedan adaptarse a cambios en los parámetros del sistema.

En cuanto a la incertidumbre no paramétrica, este tipo de incertidumbre incluye variaciones que no pueden ser descritas fácilmente por un conjunto pequeño de parámetros. Este tipo de incertidumbre puede abarcar modelos no lineales, dinámicas no modeladas, y efectos de alta frecuencia. En (Doyle, 1998) enfatizan que este tipo de incertidumbre es crítica cuando se trata de sistemas complejos donde las simplificaciones del modelo pueden omitir dinámicas importantes. Según (García-Sanz M. , 2017) esta forma de incertidumbre requiere técnicas avanzadas de modelado y control que pueden manejar discrepancias no paramétricas.

### **2.1.2 Incertidumbre aditiva**

La incertidumbre aditiva se refiere a perturbaciones o errores que se añaden al sistema, que puede ser externa o interna, y afecta la precisión del control del sistema. (Postlethwaite, 2005) señalan que la incertidumbre aditiva es común en situaciones donde las perturbaciones externas impactan directamente en la salida del sistema. Este tipo de incertidumbre generalmente se maneja mediante técnicas de filtrado y robustez en el diseño del controlador.

### **2.1.3 Incertidumbre multiplicativa**

La incertidumbre multiplicativa implica variaciones que multiplican la salida del sistema, y es especialmente relevante en sistemas donde los parámetros de ganancia pueden cambiar de manera significativa. (García-Sanz M. , 2017) explica que "la incertidumbre multiplicativa puede modelarse como una ganancia variable que multiplica la respuesta del sistema, introduciendo variabilidad en la magnitud de la respuesta". Este autor menciona además que el diseño de controladores robustos frente a esta incertidumbre requiere una cuidadosa consideración de los márgenes de ganancia y fase.

#### **2.1.4 Incertidumbre estructurada y no estructurada**

La incertidumbre estructurada se refiere a variaciones conocidas en ciertas partes del modelo del sistema, y puede modelarse y predecirse de manera más fácil, permitiendo diseños de control más específicos. (Garcia-Sanz M. , 2017) indica que "la incertidumbre estructurada se presenta en sistemas donde se conocen las fuentes y magnitudes de las variaciones, permitiendo un modelado detallado de estas incertidumbres". Por su parte (Ackermann, 1993 ) y (Postlethwaite, 2005) subrayan la importancia del manejo de esta incertidumbre para que se garantice la robustez del sistema bajo condiciones predefinidas.

A diferencia de la incertidumbre estructurada, la incertidumbre no estructurada se refiere a variaciones que no se pueden modelar fácilmente o predecir con precisión. Según (Garcia-Sanz M. , 2017), "esta incertidumbre incluye todas las posibles discrepancias entre el modelo y el sistema real que no se pueden capturar con precisión mediante un modelado estructurado". Este tipo de incertidumbre requiere enfoques robustos y flexibles en el diseño del controlador para asegurar el rendimiento adecuado del sistema bajo condiciones de incertidumbre no estructurada.

## **2.2 Métodos para construcción de plantillas**

En este epígrafe se presentan varios métodos para la construcción de plantillas, utilizados para modelar incertidumbre paramétrica en el dominio de Laplace para el análisis de estabilidad y robustez en sistemas de control. Dentro de los aspectos a mencionar en cada caso se indican los procedimientos y aplicación en diferentes incertidumbres, sus ventajas, limitaciones, entre otros.

### **2.2.1 Método de construcción de conjunto de raíces**

El método de construcción de conjuntos de raíces (*Root Set Construction*, en inglés) es un método que se basa en la identificación de las raíces del polinomio característico del sistema controlado. Según (Garcia-Sanz C. H., 2001), este método implica determinar los valores propios del sistema para diferentes configuraciones de los parámetros inciertos, centrándose en cómo estas raíces se distribuyen en el plano complejo y cómo esta distribución afecta la estabilidad y el rendimiento del sistema.

En la construcción de plantillas, el método de construcción de conjuntos de raíces permite representar gráficamente las posibles ubicaciones de los polos del sistema bajo diferentes variaciones paramétricas. (Ackermann, 1993 ) explica que esto se traduce en una plantilla que refleja la incertidumbre en los parámetros del sistema, mostrando cómo los polos se desplazan dentro de una región específica del plano complejo.

Para su aplicación es fundamental que el sistema sea lineal y pueda ser modelado por un polinomio característico lineal en términos de los parámetros inciertos. Como requisito indispensable es necesario conocer los rangos de incertidumbre dentro de los cuales estos parámetros pueden variar. Este enfoque es más adecuado para sistemas de entrada única y salida única (*Single Input Single Output, SISO*), aunque puede adaptarse a sistemas de entrada múltiple y salida múltiple (*Multiple Input Multiple Output, MIMO*) con mayor complejidad. Es crucial que la incertidumbre sea principalmente paramétrica y pueda ser claramente cuantificada.

De acuerdo con su procedimiento se comienza con la definición del polinomio característico del sistema, expresado en función de los parámetros del sistema. Luego, se identifican los parámetros del sistema que presentan incertidumbre y se determinan sus posibles rangos de variación. Posteriormente, se calculan las raíces del polinomio característico para las configuraciones extremas de los parámetros inciertos, representando los valores mínimo y máximo de dichos parámetros. Estas raíces se utilizan para construir una plantilla gráfica en el plano complejo, que muestra el conjunto de puntos que forman la plantilla. Finalmente, se realiza un análisis de estabilidad para verificar si las raíces permanecen dentro de la región estable del plano complejo para todas las configuraciones de los parámetros inciertos. Este proceso garantiza un diseño de control robusto que sea efectivo y estable ante la variabilidad de los parámetros del sistema.

El método ofrece varias ventajas, entre las que se pueden destacar: la capacidad de proporcionar una representación clara de cómo la incertidumbre paramétrica afecta la estabilidad del sistema, siendo especialmente útil para sistemas donde las variaciones en los parámetros pueden ser significativas. Además, permite una visualización completa de todas las posibles posiciones de las raíces del polinomio característico, lo que es esencial para

asegurar que ninguna raíz se encuentre en el semiplano derecho del plano complejo, garantizando así la estabilidad del sistema.

A pesar de las facilidades que ofrece este método para garantizar la estabilidad del sistema, trae consigo algunas limitaciones pues su aplicación resulta compleja y computacionalmente intensiva, especialmente para sistemas con un gran número de parámetros inciertos. El gran número de combinaciones posibles de parámetros puede hacer que este método sea muy costoso en términos de recursos computacionales. Además, no siempre es fácil interpretar las regiones resultantes en términos de rendimiento del sistema.

Sin embargo, en cuanto a la robustez, el método considera todas las combinaciones posibles de parámetros inciertos, proporcionando una evaluación exhaustiva de la estabilidad del sistema. Esto hace que el método de construcción de conjuntos de raíces sea una herramienta poderosa para el análisis detallado de la estabilidad, aunque las dificultades computacionales asociadas no deben ser subestimadas.

### **2.2.2 Método de construcción de conjuntos de valor**

El método de construcción de conjuntos de valor se centra en evaluar el polinomio característico en un rango de frecuencias especificado, generando un conjunto de valores en el plano complejo. Este conjunto de valores se analiza para determinar la estabilidad, asegurándose de que no incluye el origen. Según (Ackermann, 1993 ), este método es útil para sistemas donde las incertidumbres afectan de manera conjunta y multilineal a los parámetros del sistema.

Para aplicar este método, se evalúa el polinomio característico del sistema en un rango de frecuencias y se genera un conjunto de valores en el plano complejo. Estos valores forman una plantilla que muestra cómo las variaciones en la frecuencia afectan el comportamiento del sistema. La plantilla resultante proporciona una visualización de las posibles ubicaciones de los valores del polinomio característicos en función de las incertidumbres de los parámetros y la frecuencia. (Ackermann, 1993 ) y (Garcia-Sanz M. , 2017) destacan que este método es eficiente y práctico, especialmente en escenarios donde se puede definir un rango

bien definido de frecuencias de interés, por lo que este es esencial para capturar todas las posibles inestabilidades que puedan surgir en el sistema logrando así el éxito de este método.

El método de construcción de conjuntos de valor requiere de un profundo conocimiento de las incertidumbres paramétricas, para entender como los parámetros inciertos afectan al polinomio característico y, por ende, la estabilidad del sistema. Se asume que las incertidumbres pueden ser modeladas de forma lineal o multilineal en el polinomio característico, lo que subraya la importancia de comprender la naturaleza de estas incertidumbres en el ámbito del control de sistemas.

Un primer paso para la aplicación de este método, es la selección de un rango de frecuencias de interés para el análisis del sistema; esta es crucial ya que determinará la precisión y relevancia del análisis en relación con el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones. Luego se calcula el polinomio característico del sistema para diferentes frecuencias dentro del rango especificado. Este cálculo permitirá observar cómo varía el comportamiento del sistema en respuesta a cambios en la frecuencia. Como resultado se generará un conjunto de valores en el plano complejo evaluando el polinomio característico en las frecuencias seleccionadas. Este conjunto de valores, conocido como la plantilla, proporciona una visualización de las posibles ubicaciones de los valores del polinomio en función de las variaciones de frecuencia. Finalmente, se realiza un análisis de estabilidad verificando que el conjunto de valores generados no incluya el origen del plano complejo. La inclusión del origen indicaría inestabilidad en el sistema, por lo que su exclusión es esencial para asegurar la estabilidad del mismo.

Entre los méritos que se le pueden reconocer a este método se encuentra que: facilita la evaluación de la robustez del sistema al mostrar explícitamente las respuestas extremas. Es más eficiente en comparación con el método de construcción de conjuntos de raíces, ya que se enfoca en un rango de frecuencias en lugar de todas las combinaciones de parámetros. Además, es útil para sistemas donde las respuestas límite son críticas para el rendimiento. Sin embargo, no puede capturar todas las posibles inestabilidades si el rango de frecuencias no es adecuadamente elegido. Tampoco logra capturar todas las interacciones posibles entre los parámetros inciertos, especialmente en sistemas altamente no lineales.

### 2.2.3 Teorema de Kharitonov

El Teorema de Kharitonov es una herramienta fundamental en el análisis de estabilidad robusta de sistemas dinámicos, especialmente cuando los coeficientes de un polinomio característico presentan incertidumbre dentro de intervalos conocidos. Este teorema, propuesto por el matemático ruso Vladimir Kharitonov en 1978, permite garantizar la estabilidad robusta de una familia de polinomios sin necesidad de verificar individualmente la estabilidad de cada uno de ellos (L.Kharitonov, 1978). En lugar de evaluar todos los posibles polinomios dentro de una familia definida por estos intervalos, el Teorema de Kharitonov simplifica el proceso, estableciendo que solo es necesario comprobar cuatro polinomios específicos, conocidos como los polinomios de Kharitonov. Si estos cuatro polinomios son estables, entonces toda la familia de polinomios lo será (S. P. Bhattacharyya, 1995).

El procedimiento simplificado que ofrece el Teorema de Kharitonov es una de sus principales ventajas, ya que reduce significativamente la complejidad del análisis de estabilidad en comparación con otros métodos que requieren la evaluación exhaustiva de todos los polinomios posibles. Esta simplicidad lo convierte en una herramienta atractiva en el diseño de sistemas de control robusto, donde es crucial garantizar que un sistema mantenga su estabilidad frente a variaciones e incertidumbres en los parámetros (A. C. Bartlett, 1988). En muchos sistemas reales, especialmente en sistemas de potencia, los coeficientes están correlacionados, lo que puede dar lugar a resultados conservadores al aplicar el (Barmish, 1994). Además, su aplicabilidad se restringe a polinomios cuyos coeficientes pueden expresarse claramente en términos de intervalos, limitando su uso en escenarios donde estos intervalos no están bien definidos.

En los sistemas de potencia, el Teorema de Kharitonov ha demostrado ser útil en el diseño robusto de controladores, asegurando que el sistema permanezca estable frente a incertidumbres en sus parámetros. En el trabajo de (J. Zhou, 2017), se aplica este teorema para el diseño robusto de parámetros de controladores en un sistema eléctrico de gran escala, representando las incertidumbres mediante polinomios de intervalo. Este enfoque permite garantizar que, a pesar de las variaciones en los parámetros operativos, la estabilidad del



sistema no se vea comprometida, lo cual es esencial para evitar oscilaciones de baja frecuencia que podrían desestabilizar el sistema (J. Zhou, 2017).

En comparación con otros métodos, el Teorema de Kharitonov proporciona una visión más conservadora pero simplificada de la estabilidad robusta. Estos métodos alternativos no solo aseguran la estabilidad robusta, sino que también permiten un análisis más detallado del impacto de cada parámetro en la estabilidad del sistema, ofreciendo una comprensión más profunda y menos conservadora en ciertas situaciones (Barmish, 1994). Sin embargo, la simplicidad y la eficacia del Teorema de Kharitonov siguen siendo una razón clave para su uso en el análisis de estabilidad robusta en sistemas de control y potencia.

#### **2.2.4 Teorema del borde**

El Teorema del borde es un método importante para la construcción de plantillas en el marco del control robusto, en sistemas con incertidumbres paramétricas. Este teorema se utiliza para determinar la respuesta en frecuencia de sistemas lineales, en funciones de transferencia con perturbaciones paramétricas de intervalo o afines. Según (García-Sanz M. , 2017), este método es crucial para el diseño de sistemas de control robusto, ya que permite construir plantillas de incertidumbre que representan todas las posibles variaciones del sistema dentro de un rango de parámetros.

Como condiciones indispensables para su aplicación, es necesario que las incertidumbres paramétricas del sistema sean lineales en los coeficientes de la función de transferencia. Esto significa que los coeficientes del sistema deben depender linealmente de los parámetros de perturbación. Además, se asume que el conjunto de parámetros de perturbación es un hiperrectángulo, lo que facilita la determinación de los conjuntos de valores en frecuencia.

El método es aplicable a incertidumbres estructuradas donde los parámetros del sistema pueden variar dentro de intervalos definidos. Esto incluye sistemas con incertidumbres en los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia. En (Fu, 1990), se destaca que estas incertidumbres pueden modelarse como variaciones paramétricas, permitiendo así el uso del Teorema del borde para analizar la estabilidad y el rendimiento del sistema bajo estas variaciones.

Como procedimiento en la construcción de plantillas mediante este método, se destaca el procedimiento en el trabajo (Fu, 1990). En este trabajo se realizan varios pasos, donde se calcula la respuesta en frecuencia de sistemas con perturbaciones paramétricas. Un primer paso sería la confirmación de que el conjunto de valores  $P(j\omega_k, Q)$  está acotado, utilizando condiciones específicas para los polinomios del denominador. Posteriormente para cada frecuencia de interés, se evalúa la función de transferencia perturbada en los puntos extremos y el punto medio de cada borde del conjunto de perturbación. Utilizando las evaluaciones anteriores se determina que cada borde del conjunto de valores es un arco o un segmento de línea, y por último se construye la plantilla uniendo los arcos y segmentos para obtener el conjunto de valores en el plano complejo.

Dentro de las ventajas que ofrece este método en el diseño de controladores robustos, encontramos que garantiza que el diseño del controlador sea robusto frente a las variaciones paramétricas dentro del conjunto definido, y proporciona transparencia al permitir una visualización gráfica clara de la respuesta del sistema, lo que facilita el diseño y ajuste del controlador. Este método es ampliamente aplicable a una gran variedad de sistemas lineales con incertidumbres estructuradas.

Sin embargo, también presenta algunas limitaciones. Según (Ackermann, 1993) la principal complejidad es su aplicación en sistemas complejos, ya que su implementación puede volverse complicado en sistemas con incertidumbres de alta dimensión.

### **2.2.5 Teorema de mapeo**

El Teorema de mapeo es el último método que se presenta en la construcción de plantillas en este capítulo. Este método es una herramienta poderosa en la construcción de plantillas, especialmente cuando se trata de incertidumbres multilineales, ya que asegura que todas las posibles respuestas del polinomio característico están contenidas dentro de la envolvente convexa de los vértices del hiperrectángulo de los parámetros inciertos. Este se utiliza para mapear directamente las variaciones paramétricas a cambios en la estabilidad del sistema, proporcionando así una representación precisa y efectiva de cómo estas variaciones influyen en el comportamiento global del sistema.

De acuerdo con (Ackermann, 1993 ) y (Garcia-Sanz M. , 2017) el Teorema de mapeo garantiza un nivel de precisión en la estabilidad del sistema, y es de gran utilidad para manejar incertidumbres multilineales en sistemas de control, proporcionando condiciones suficientes de estabilidad. Además, este método permite una reducción de la complejidad, simplificando el análisis al transformar el problema de estabilidad en un problema de existencia de un valor en un conjunto mapeado. Otra ventaja significativa que se menciona en (Ackermann, 1993 ) es la robustez, dado que el teorema facilita el diseño de sistemas robustos al garantizar que las incertidumbres se consideren adecuadamente en la evaluación de la estabilidad del sistema.

Sin embargo, existen también limitaciones importantes en este teorema, reconocidas tanto por (Ackermann, 1993 ) como por (Garcia-Sanz M. , 2017). Estos autores señalan que este método puede ser computacionalmente intenso debido a la necesidad de evaluar múltiples combinaciones de parámetros inciertos por lo que la implementación del mismo puede ser compleja y demanda un gran rigor técnico y precisión. (Garcia-Sanz M. , 2017), por su parte, menciona que el Teorema de mapeo requiere información detallada y precisa sobre las incertidumbres del sistema, lo cual puede no estar siempre disponible.

En el próximo capítulo, se explorará en detalle este teorema, el cual ha sido seleccionado para nuestro estudio debido a su capacidad para manejar incertidumbres multilineales y proporcionar condiciones suficientes de estabilidad, asegurando que todos los posibles valores del polinomio característico estén dentro del contorno de la plantilla generada. La exploración detallada de este teorema permitirá comprender mejor sus aplicaciones y beneficios en la construcción de plantillas bajo condiciones de incertidumbre.

### **Conclusiones del capítulo**

En correspondencia con lo que se ha planteado anteriormente sobre las características de cada método en la construcción de plantillas analíticas en sistemas de control con incertidumbres se muestran las particularidades de cada caso en cuanto a términos de aplicabilidad, robustez, eficiencia computacional, y tipos de incertidumbre:

- 1- Teorema de mapeo: se destaca por su alta aplicabilidad en sistemas con incertidumbres estructuradas y multilineales. Este método transforma el problema al dominio del disco unitario, permitiendo el uso de técnicas robustas como  $H_\infty$ , que proporcionan condiciones de estabilidad suficientes y aseguran que todos los valores del polinomio estén dentro del casco convexo creado. Sin embargo, su principal desventaja es la alta complejidad computacional
- 2- Teorema del borde: es aplicable a incertidumbres paramétricas lineales y es moderadamente eficiente en términos computacionales. Este método proporciona una evaluación precisa y clara de la estabilidad al analizar los bordes de los conjuntos de valores en frecuencia, lo que facilita la construcción de plantillas. En comparación con el Teorema de mapeo su carga computacional es menor.
- 3- Teorema de Kharitonov: En comparación con los demás métodos, este teorema destaca por su simplicidad y alta eficiencia computacional. Es particularmente eficaz en el análisis de estabilidad para sistemas cuyos coeficientes del polinomio se encuentran dentro de intervalos bien definidos. Aunque su aplicabilidad se restringe a sistemas con incertidumbres paramétricas independientes, su ventaja radica en que reduce la complejidad del análisis a la verificación de solo cuatro polinomios específicos, lo que lo convierte en una opción menos costosa en términos computacionales, pero más limitada en cuanto a la generalización a sistemas con incertidumbres más complejas.
- 4- Construcción de conjuntos de valor: es muy flexible y se puede aplicar a una variedad de sistemas con incertidumbres estructuradas y no estructuradas. Este método permite una evaluación visual clara de la estabilidad y robustez del sistema, construyendo plantillas en el diagrama de Nichols o Nyquist. La eficiencia computacional es moderada, ya que depende de la cantidad de frecuencias y variaciones consideradas en la construcción de la plantilla. Aunque puede requerir un esfuerzo significativo en la construcción y validación de plantillas, es una opción robusta y visualmente intuitiva.
- 5- Construcción de conjunto de raíces: proporciona un análisis detallado y exhaustivo de la estabilidad del sistema al evaluar la ubicación de las raíces de los polinomios. Este método es muy robusto y adecuado para análisis específicos, pero su

complejidad computacional es alta debido a la necesidad de analizar cada raíz individualmente. Esto puede hacerlo menos práctico para sistemas con múltiples incertidumbres, aunque ofrece una evaluación exhaustiva de la estabilidad.

Se puede considerar que el Teorema de mapeo es altamente adecuado para incertidumbre multilineal, ofreciendo robustez y estabilidad superiores a costa de una mayor complejidad computacional. El Teorema del borde y el método de construcción de conjuntos de valor son métodos más eficientes computacionalmente y ofrecen una robustez adecuada para incertidumbres paramétricas lineales y variadas, respectivamente. El método de construcción de conjunto de raíces proporciona una robustez detallada y exhaustiva, pero con una carga computacional considerablemente alta. En cuanto al Teorema de Kharitonov, este se destaca por su simplicidad y alta eficiencia computacional.

## CAPÍTULO III: TEOREMA DE MAPEO EN POLINOMIOS CON INCERTIDUMBRE MULTILINEAL

En este capítulo se aborda en detalle el Teorema de mapeo, incluyendo sus condiciones de aplicación y su uso específico en la creación de plantillas para polinomios con incertidumbre multilineal. A partir de estas plantillas, se exploran otros métodos generales para la construcción de plantillas en funciones de transferencias, ampliando el análisis más allá del ámbito de los polinomios. Además, se discutirán las implicaciones de este teorema en términos de estabilidad, proporcionando una comprensión integral de cómo este enfoque se integra dentro del marco de control robusto. Este análisis permitirá destacar la importancia del Teorema de mapeo en contextos específicos y su relación con métodos alternativos en el diseño y análisis de sistemas de control con incertidumbres.

### 3.1 Fundamentos del Teorema de mapeo

El Teorema de mapeo, según lo descrito por (J. Zhou, 2017), establece que “la envoltura convexa del conjunto de valores de la familia polinómica  $P(s, D) = \{P(s, \delta) = \sum_i a_i(\delta) s^i | \delta \in D\}$  con funciones coeficientes multilineales  $a_i(\delta)$  es la envoltura convexa de las imágenes de los vértices de  $D$ ” (pág. 2). Este teorema es una herramienta fundamental en el análisis de sistemas dinámicos, especialmente en el estudio de la estabilidad y el comportamiento de sistemas con incertidumbres en los parámetros. Es una técnica utilizada en el análisis de sistemas para visualizar y comprender el comportamiento de un sistema en función de sus parámetros inciertos. Consiste en representar gráficamente cómo varían las características del sistema a medida que los parámetros cambian dentro de un rango específico.

Su uso en la construcción de la envolvente convexa del conjunto de valores de una familia de polinomios en función de un parámetro variable se observa en (J. Zhou, 2017), donde se relaciona el Teorema de mapeo con el método de Kharitonov para el análisis de la estabilidad de sistemas con polinomios de intervalos y el concepto de diagrama de Mikhailov (Mikhailov plot). En este método, se utiliza el Teorema de mapeo para generar el diagrama de Mikhailov, que es una herramienta gráfica que muestra el conjunto de valores de un polinomio

característico en función de un parámetro variable, generalmente en el plano complejo. Esta representación visual permite representar cómo varían las raíces del polinomio a medida que el parámetro cambia, lo que proporciona información crucial sobre la estabilidad del sistema en presencia de incertidumbre.

En (Fu, 1990), se aborda el problema de calcular la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con perturbaciones paramétricas y se destaca la importancia de construir plantillas de valor en la respuesta en frecuencia de sistemas con perturbaciones paramétricas para facilitar la evaluación de la estabilidad y el rendimiento del sistema. Aunque en dicho trabajo no se hace uso directo del Teorema de mapeo en el método propuesto, se reconoce su relevancia en enfoques anteriores para el diseño de sistemas con perturbaciones estructuradas, como se discute en (Safonov, 1986).

Por otra parte, en el trabajo sobre sistemas mecatrónicos en (Erik Coelingh, 1998), se hace referencia al Teorema de mapeo para determinar la forma de las plantillas de manera conservadora para funciones de transferencia con coeficientes multilineales. El Teorema de mapeo se utiliza para transformar la incertidumbre en los parámetros físicos en una representación geométrica en el plano complejo. Este teorema establece que la envolvente convexa de los valores de una función polinómica evaluada en los vértices de un conjunto de parámetros inciertos en el espacio de parámetros es la envolvente convexa de los valores de la función en esos vértices.

Se aborda además en (Desoer, 1963) el Teorema de mapeo en el contexto de la teoría de sistemas lineales, y se representa a los sistemas lineales utilizando el enfoque del espacio de estados. El Teorema de mapeo de Desoer, es un resultado fundamental en el campo de los polinomios multilineales, cuyo análisis se enfoca en el dominio de la frecuencia. Este teorema, discutido en (Ackermann, 1993), proporciona una condición de estabilidad suficiente que restringe el muestreo de frecuencias a un subconjunto de las frecuencias no negativas. En términos conceptuales, el Teorema de mapeo establece que la envoltura convexa del conjunto de valores de un polinomio con funciones de coeficientes multilineales es la envoltura convexa de las imágenes de los vértices de un conjunto dado.

### **3.2 Condiciones para aplicación del Teorema de mapeo**

El Teorema del mapeo es aplicable a polinomios con coeficientes multilineales. En (Ackermann, 1993 ) se establece que el teorema es válido para polinomios con incertidumbre multilineal, lo que significa que los coeficientes del polinomio son funciones de múltiples variables que pueden ser combinaciones lineales de los parámetros del sistema.

El Teorema del mapeo se basa en la convexidad de la caja de parámetros  $Q$  de los valores del polinomio. La convexidad garantiza que la imagen de un punto interior de la caja esté contenida en el envoltorio convexo de los vértices de la caja. No todos los polinomios cumplen con estas condiciones, por lo tanto, el teorema no es aplicable a todos los polinomios, sino específicamente a aquellos que cumplen con los requisitos mencionados.

### **3.3 Construcción de plantillas mediante el Teorema de mapeo**

La construcción de la envolvente convexa  $Q$  se menciona en (Ackermann, 1993 ) como un paso fundamental en la creación de plantillas complejas para el análisis de estabilidad en sistemas con coeficientes multilineales. Este proceso se apoya en el Teorema de mapeo de Desoer, el cual proporciona una condición suficiente de estabilidad robusta mediante la exclusión de cero del conjunto de valores.

Al considerar una frecuencia específica  $\omega$ , este enfoque, permite construir una plantilla en el plano complejo que muestra la distribución de los valores del polinomio para diferentes combinaciones de parámetros inciertos. En cada paso, las imágenes de los vértices de  $Q$  se proyectan en el plano complejo  $p$ , formando una serie de segmentos lineales que conectan estos puntos. La envolvente convexa resultante se forma a partir de estos segmentos, asegurando que todos los puntos interiores del dominio original  $Q$  están contenidos dentro de esta envolvente.

Este método no solo facilita la comprobación de la estabilidad de sistemas polinomiales complejos, sino que también optimiza el proceso al reducir la necesidad de evaluar todas las posibles combinaciones de parámetros. La construcción de plantillas complejas mediante la envolvente convexa permite una representación visual y analítica clara del comportamiento



del sistema bajo diferentes condiciones, asegurando que se mantenga la estabilidad en todo el rango de incertidumbres considerado.

El Teorema de mapeo se aplica en (Erik Coelingh, 1998) como base en la confección de la envoltura convexa de los polinomios del numerador y del denominador para obtener la plantilla general de una función de transferencia. Al obtener estas envolturas convexas, se garantiza que todos los posibles valores de los polinomios inciertos estén contenidos dentro de estas regiones. Este trabajo proporciona un procedimiento detallado para convertir las plantillas complejas al diagrama de Nichols, para evaluar la estabilidad y el rendimiento de un sistema de control en el dominio de la frecuencia. La representación de las plantillas en el diagrama de Nichols facilita la visualización de cómo las incertidumbres en los parámetros del sistema afectan su comportamiento dinámico. Una vez que las plantillas se han convertido al diagrama de Nichols, se presenta los métodos *a priori* y *a posteriori* que define (Ackermann, 1993) para la construcción de plantillas.

### **3.3.1 Método *a priori* para la construcción de plantillas**

El método *a priori* es una técnica que se emplea en el diseño de controladores robustos para sistemas con incertidumbre en los parámetros físicos. Este método consiste en identificar, de manera anticipada, las combinaciones de parámetros que podrían contribuir al contorno de una plantilla en el diagrama de Nichols, lo que es crucial para la implementación de la QFT.

Según (Erik Coelingh, 1998), el método *a priori* se aplica identificando de antemano los valores de los parámetros físicos que pueden llevar a los extremos del contorno de la plantilla. Estos parámetros se agrupan en un vector y se mapean en una región de incertidumbre dentro del diagrama de Nichols. Este proceso es particularmente efectivo cuando los parámetros inciertos están distribuidos de manera que el numerador y el denominador de la función de transferencia dependen de diferentes parámetros. De esta forma, es posible construir plantillas por separado para el numerador y el denominador, que luego se combinan para formar la plantilla global del sistema.

### **3.3.2 Método a posteriori para la construcción de plantillas**

El método a posteriori es otra técnica ampliamente utilizada en el diseño de controladores robustos, especialmente en la QFT. En (Ackermann, 1993 ) se describe esta técnica de aproximación como '*gridding*' (malla de puntos). A diferencia del método a priori, este enfoque se basa en calcular la respuesta en frecuencia del sistema para un conjunto finito de combinaciones de parámetros inciertos, y posteriormente determinar cuáles de esas combinaciones contribuyen al contorno de la plantilla en el diagrama de Nichols.

Según (Erik Coelingh, 1998), el principal desafío de este método a posteriori es establecer de antemano la densidad adecuada de la cuadrícula. Sin embargo, la inspección visual de la plantilla proporciona una respuesta inmediata sobre si la cuadrícula aplicada es lo suficientemente densa. Por lo tanto, se recomienda comenzar con una densidad de cuadrícula relativamente baja, que puede incrementarse iterativamente. Una vez que el resultado del cuadrículado sea lo suficientemente denso, es necesario identificar los puntos de la plantilla que realmente contribuyen al contorno.

### **3.4 Teorema de mapeo para la estabilidad en familia de polinomios. Teorema de exclusión de cero**

En lo relacionado con la estabilidad de sistemas, el Teorema de mapeo juega un papel crucial al ofrecer una descripción clara y poderosa de la envoltura convexa de los valores de un polinomio. Esta envoltura convexa es esencial para determinar la estabilidad de lazo cerrado de un sistema, ya que la exclusión del origen de esta envoltura en todas las frecuencias es una condición necesaria para la estabilidad del sistema. En (Ackermann, 1993 ) se aborda la relación entre el Teorema de exclusión de cero de (L.Kharitonov, 1978) y el Teorema de mapeo, destacando cómo estos se aplican en conjunto para analizar la estabilidad de sistemas con parámetros inciertos.

En un gráfico de frecuencias, (Ackermann, 1993 ), establece que un polinomio es estable si su respuesta en frecuencia cumple con dos condiciones clave: primero, que comience en el eje real positivo (amplitud positiva) y segundo, que a medida que la frecuencia aumenta, la

fase del polinomio rodee el origen en dirección antihoraria, y tienda a  $\pi$  radianes a medida que la frecuencia tiende a infinito.

El uso de ambos teoremas se observa en la construcción del gráfico de frecuencias del polinomio de la ecuación 3.1. El polinomio característico de lazo cerrado, que se presenta en la ecuación 3.1 tomada de (Ackermann, 1993), es el utilizado para el control del movimiento de una grúa, y tiene como parámetros inciertos a la longitud de la cuerda ( $l = [8, 16]$ ) y la masa del carro ( $m_c = [100, 2000]$ ).

$$p(s, m_c, l) = 5000 + 1000s + (20100 + 500l + 10m_c)s^2 + 100ls^3 + lm_c s^4 \quad (3.1)$$

En la figura 3.1 se muestran las plantillas del polinomio multilíneo de la ecuación 3.1 para diferentes frecuencias, construidas mediante el Teorema de mapeo. Se observa que el origen está excluido del casco convexo de los conjuntos de valores en todas las frecuencias, y que se cumplen las condiciones establecidas en el gráfico de frecuencias según el Teorema de exclusión de cero. El Teorema de mapeo ofrece condiciones suficientes para garantizar la estabilidad si el origen está excluido. En caso contrario, si el origen estuviera incluido, no se podrían extraer conclusiones definitivas sobre la estabilidad.

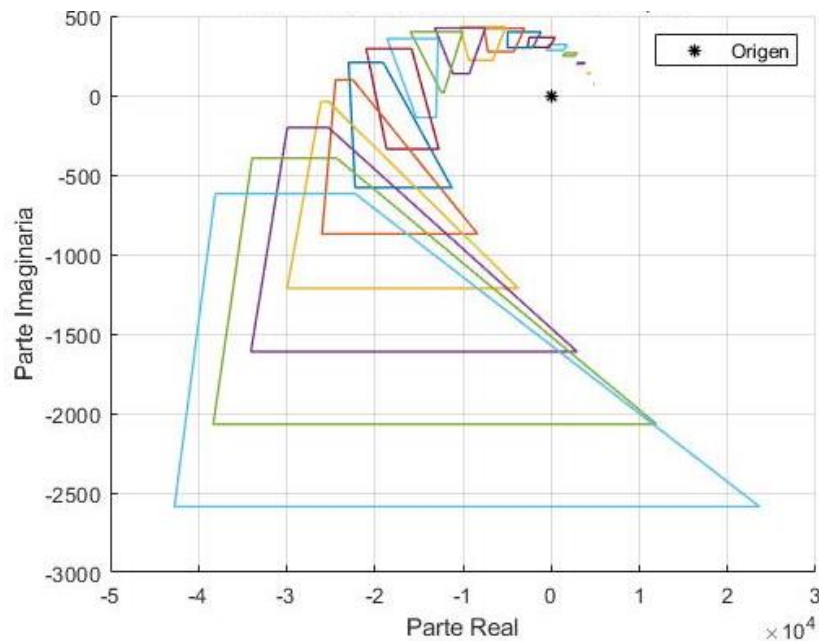


Figura 3.1: Análisis de estabilidad con Teorema de mapeo y Teorema de exclusión cero para el polinomio definido en 3.1.

### 3.4.1 Teorema de mapeo en algoritmos de división de dominios

Algunas de las plantillas obtenidas mediante el Teorema de mapeo para el polinomio del denominador del motor CC controlado por armadura, uno de los tres casos de estudio presentados en este trabajo, se muestran en la figura 3.2. En estas plantillas, se garantiza que todos los posibles valores del polinomio para diferentes frecuencias estén contenidos dentro de la envoltura convexa, representada en color verde. Los vértices de la hipercaja se indican en verde, mientras que otros valores del polinomio se muestran en azul, lo que evidencia que todos los valores están incluidos dentro de la envoltura convexa. Como se observa, las plantillas obtenidas no son conservadoras; no presentan áreas vacías sin valores del polinomio.

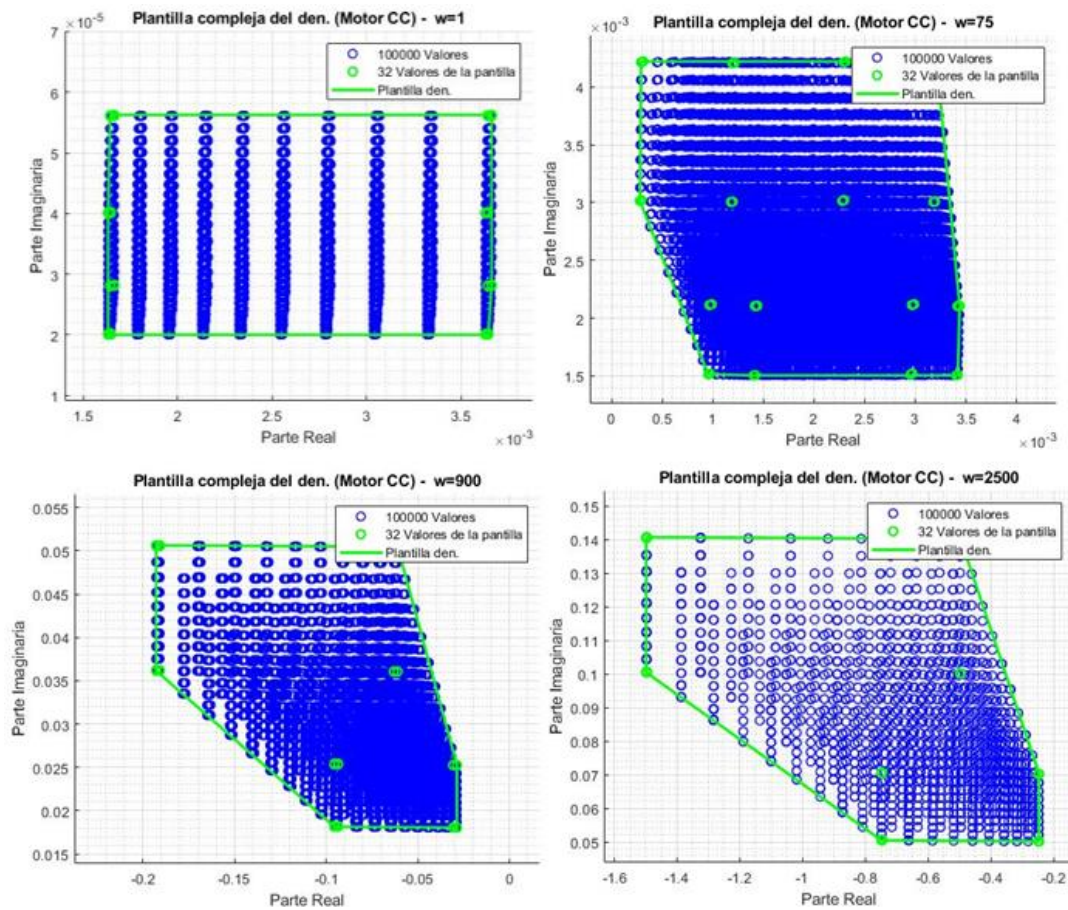


Figura 3.2: Envolturas convexas del polinomio del denominador del motor CC.

Dado que el Teorema de mapeo proporciona condiciones suficientes, existe la posibilidad de que en ocasiones genere plantillas conservadoras. En el contexto de la técnica QFT, es fundamental el uso de plantillas que sean precisas y completas, donde se represente de manera efectiva todas las posibles variaciones del sistema, para garantizar un diseño eficiente de control robusto que asegure la estabilidad bajo condiciones de incertidumbre. Un ejemplo de esto, se observa en el polinomio característico de la ecuación 3.2, extraído de (Ackermann, 1993), con parámetros inciertos  $q_i \in [1, 5]$ ,  $i = 1, 2$

$$p(s, q_1, q_2) = 3 + 2s + (0.25 + 2q_1 + 2q_2)s^2 + 0.5(q_1 + q_2)s^3 + q_1q_2s^4 \quad (3.2).$$

Para una  $\omega = 1$ , el casco convexo  $p(j, Q)$  obtenido mediante el Teorema de mapeo, se presenta en la figura 3.3, donde se observa una plantilla conservadora. En esta figura, los valores del polinomio se muestran en verde, mientras que la plantilla se representa en azul, se resalta la inclusión del origen dentro de su contorno. Este resultado subraya la importancia de la división de dominios como una estrategia eficaz en el análisis y diseño de sistemas de control. Esta técnica permite considerar múltiples regiones de parámetros, lo que garantiza tanto la estabilidad como el rendimiento del sistema bajo diversas condiciones operativas.

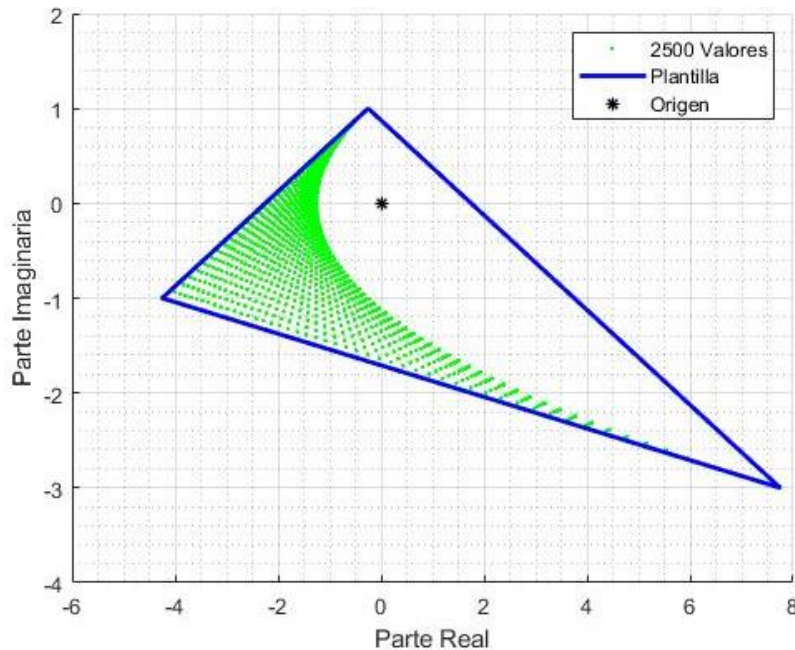


Figura 3.3: Plantilla de polinomio característico de la ecuación 3.2 para  $\omega = 1$ .

En (Ackermann, 1993 ) se describe un método robusto para validar la estabilidad de sistemas con parámetros inciertos mediante la combinación del Teorema de exclusión de cero y el Teorema de mapeo, utilizando una división de dominios para asegurar la precisión del análisis de estabilidad. Esta técnica se utiliza en situaciones donde el Teorema de mapeo por sí solo no ofrece una condición suficiente, en ella se divide el dominio de operación en subdominios más manejables; esto permite construir cascos convexos de los conjuntos de valores en cada subdominio. Si el origen no está incluido en ninguna envoltura convexa resultante, se confirma la estabilidad del sistema en esos subdominios específicos.

El procedimiento para la división de dominios en el polinomio característico de la ecuación 3.2 consiste en dividir la plantilla obtenida en varias subplantillas de tal manera que el origen siempre quede excluido de todas ellas. Además, es necesario asegurarse de que el conjunto de valores del polinomio característico esté contenido dentro del contorno de la nueva plantilla obtenida a partir de las subplantillas construidas.

Las nuevas subplantillas se construyen también mediante el Teorema de mapeo, manipulando los rangos de valores inciertos de los parámetros para crear nuevos contornos. Este proceso de subdivisión continúa hasta que todas las subplantillas excluyen el origen. Este método es eficaz para confirmar la estabilidad del sistema, ya que al excluir el origen de todas las subplantillas, se garantiza que el polinomio característico no tiene raíces en el lado derecho del plano complejo, asegurando así la estabilidad robusta del sistema para todos los valores inciertos de los parámetros.

La envolvente convexa para un nuevo dominio es construida con los subdominios  $Q_2$ ,  $Q_3$  y  $Q_4$ , donde ya no está contenido el origen, véase figura 3.4. Se observa además que todos los valores del polinomio característico están contenidos en el contorno de los subdominios construidos y se determina de esta manera la estabilidad del sistema.

De manera general, los detalles y algoritmos para el enfoque de división de dominios proporcionan condiciones suficientes y necesarias de estabilidad. Además del límite exterior del conjunto de valores (condición suficiente), los algoritmos también generan un límite interior (condición necesaria) debido al hecho de que las imágenes de los bordes adicionales deben pertenecer al conjunto de valores. Estos algoritmos se detienen cuando se cumple una

condición suficiente para la exclusión cero o se viola una condición necesaria para la exclusión cero.

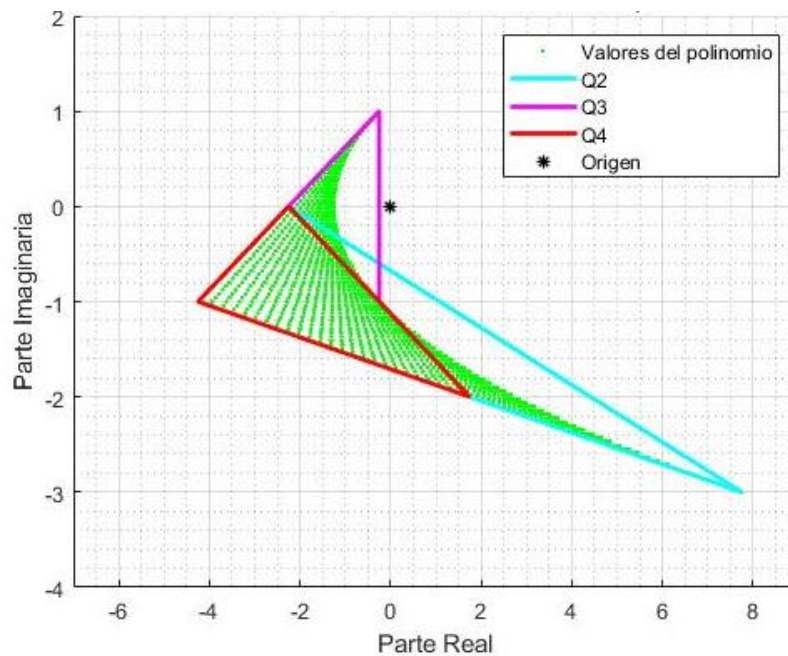


Figura 3.4: Dominio estable obtenido para el polinomio característico de la ecuación 3.2.

En el caso del Teorema del mapeo, se establece que la envolvente convexa del conjunto de valores de un polinomio familiar con coeficientes multilineales es igual a la envolvente convexa de las imágenes de los vértices del conjunto de parámetros. Para este caso el teorema proporciona una condición suficiente para la estabilidad del sistema. Es decir, si se cumple esta condición, entonces el sistema es estable. Sin embargo, no se garantiza que sea una condición necesaria en todos los casos.

### Conclusiones del capítulo

El Teorema de mapeo se destaca por su capacidad para manejar incertidumbres multilineales en sistemas de control, proporcionando una manera eficiente de obtener la envoltura convexa de polinomios. Este método asegura que todos los valores posibles del polinomio con incertidumbre se encuentren dentro de esta envolvente convexa, lo que es crucial para garantizar la robustez y estabilidad del sistema. Este no solo mejora la precisión en la representación de incertidumbres, sino que también simplifica el análisis de estabilidad y rendimiento del sistema.

Como método en la construcción de plantillas en polinomios con incertidumbre multilínea es fundamental ya que asegura que todos los posibles valores del polinomio se encuentren dentro de la envoltura convexa. Utilizando los métodos a priori y a posteriori, este teorema proporciona un punto de partida sólido para diseñar plantillas para funciones de transferencias con polinomios en el numerador y el denominador. Los métodos a priori permiten establecer plantillas basadas en el conocimiento previo de las incertidumbres, mientras que los métodos a posteriori ajustan las plantillas en función de los datos obtenidos durante el funcionamiento del sistema. La capacidad del Teorema de mapeo para integrar estos enfoques facilita un diseño más flexible y adaptativo, adecuado para diversas aplicaciones en control robusto.

En términos de estabilidad, el Teorema de mapeo ofrece condiciones suficientes para garantizar que el sistema permanezca estable bajo variaciones paramétricas. Un ejemplo claro es el uso del Teorema de exclusión cero, que determina la estabilidad de un polinomio característico cuando el origen está excluido del casco convexo de los conjuntos de valores en todas las frecuencias. Además, la técnica de división de dominios permite segmentar el espacio de incertidumbres en subdominios manejables, evaluando la estabilidad de cada segmento y garantizando que toda la región de incertidumbre esté cubierta. Estas condiciones de estabilidad suficientes no solo proporcionan seguridad en el diseño del controlador, sino que también facilitan el cumplimiento de especificaciones estrictas de rendimiento y robustez.

En resumen, el Teorema de mapeo conforme es una herramienta poderosa para la construcción de plantillas en polinomios con incertidumbres multilíneas. Su eficiencia en la obtención de envolturas convexas y la representación precisa de incertidumbres, junto con su capacidad para construir plantillas proporciona la creación de plantillas completas en funciones de transferencia mediante métodos a priori y a posteriori.



# **CAPÍTULO IV: APLICACIÓN DEL TEOREMA DE MAPEO EN UN MODELO DE MOTOR CC PARA LA CONSTRUCCIÓN DE PLANTILLAS**

En este capítulo, se presentará el análisis del Teorema de mapeo en un motor de corriente continua controlado por armadura. Se explorará cómo esta herramienta puede utilizarse para modelar las incertidumbres en los parámetros del motor, dentro del contexto de la técnica QFT.

Los motores eléctricos han desempeñado un papel fundamental en la historia de la humanidad, revolucionando la forma en que se utiliza la energía para el trabajo de máquinas y dispositivos. Uno de los hitos más significativos en esta evolución fue la invención del motor CC, que permitió la conversión eficiente de energía eléctrica en energía mecánica de forma controlada.

El motor CC, según (Chapman, 2005), se define como un tipo de motor eléctrico que utiliza corriente continua para generar un campo magnético constante en el estator y un campo magnético variable en el rotor, lo que produce un par de torsión que impulsa la rotación del eje. Este diseño ha sido ampliamente utilizado en una variedad de aplicaciones industriales y comerciales debido a su capacidad para proporcionar un control preciso sobre la velocidad y el par de salida.

## **4.1 Dinámica del motor CC controlado por armadura**

El caso de estudio seleccionado es la dinámica del motor CC controlado por armadura de (Garcia-Sanz M. , 2017). La representación gráfica de su funcionamiento se muestra en la figura 4.1.

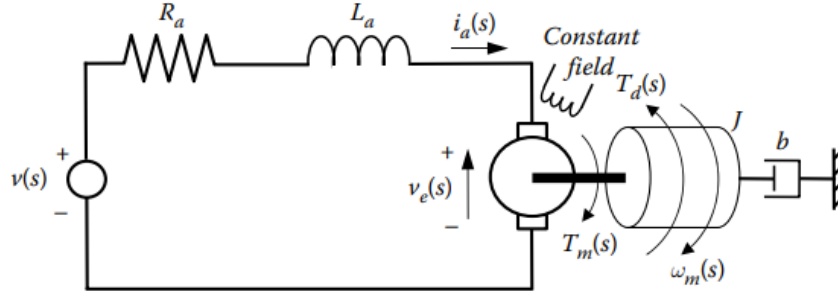


Figura 4.1: Motor CC controlado por armadura. Adaptado de (Garcia-Sanz M. , 2017).

A partir de las expresiones electromecánicas del motor, se obtienen las ecuaciones que están relacionadas con las especificaciones de control, tales como la sensibilidad o rechazo de perturbaciones en la salida de la planta y el seguimiento de referencia. Estas ecuaciones conforman el modelo en el dominio de Laplace, representado en la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} i_a(s) \\ \omega_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ T_d(s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde:

$$p_{11}(s) = \frac{(Js + b)}{(Js + b)(L_a s + R_a) + K_T K_e} \quad (4.2)$$

$$p_{12}(s) = \frac{K_e}{(Js + b)(L_a s + R_a) + K_T K_e} \quad (4.3)$$

$$p_{21}(s) = \frac{K_T}{(Js + b)(L_a s + R_a) + K_T K_e} \quad (4.4)$$

$$p_{22}(s) = \frac{-(L_a s + R_a)}{(Js + b)(L_a s + R_a) + K_T K_e} \quad (4.5)$$

- $i_a$ : Corriente del inducido
- $\omega_m$ : Velocidad de rotación.
- $K_T$ : Constante de par del motor.
- $K_e$ : Constante de voltaje.
- $J$ : Inercia de todas las partes giratorias del motor.
- $b$ : Coeficiente de amortiguación.
- $L_a$ : Inductancia del inducido.

- $R_a$ : Resistencia del inducido.

De las ecuaciones anteriores se selecciona la función de transferencia descrita por la ecuación 4.4. Esta ecuación presenta una situación en la que existen cinco parámetros físicos inciertos, cuyos valores se muestran en la Tabla 4.1.

$$p_{21}(s) = \frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{K_T}{JL_a s^2 + (JR_a + bL_a)s + (bR_a + K_T K_e)} \quad (4.6)$$

Parámetros	Valor mínimo	Valor nominal	Valor máximo
$J \rightarrow Nm/s^2$	$4 \times 10^{-5}$	$6 \times 10^{-5}$	$8 \times 10^{-5}$
$b \rightarrow Nm/(rad/s)$	$6 \times 10^{-5}$	$6 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-5}$
$L_a \rightarrow H$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$
$R_a \rightarrow \Omega$	0.5	0.7	0.7
$K_T \rightarrow Nm/A = K_e \rightarrow V/(rad/s)$	0.04	0.04	0.06

Tabla 4.1: Valores de parámetros inciertos del motor CC.

## 4.2 Aplicación del Teorema de mapeo a los polinomios de la planta de estudio

En la función de transferencia de la ecuación 4.6, observamos que el numerador depende únicamente del parámetro incierto  $K_T$ , que se corresponde a la constante de par del motor. Debido a que este polinomio depende solo de este parámetro, se concluye que no cumple con la condición de funciones con coeficientes multilineales, las cuales requieren que dos o más parámetros se multipliquen entre sí sin repetirse.

En esta situación, la aplicación del Teorema de mapeo no sería necesaria, ya que este teorema se basa en la convexidad de la caja de parámetros y en la representación de los coeficientes del polinomio como funciones multilineales de múltiples parámetros.

En el plano complejo el polinomio del numerador  $p_n(s) = K_T$ , estaría representado por una línea recta que conecta los puntos correspondientes a los extremos del intervalo [0.04; 0.06] en el eje real, como se observa en la figura 4.2.

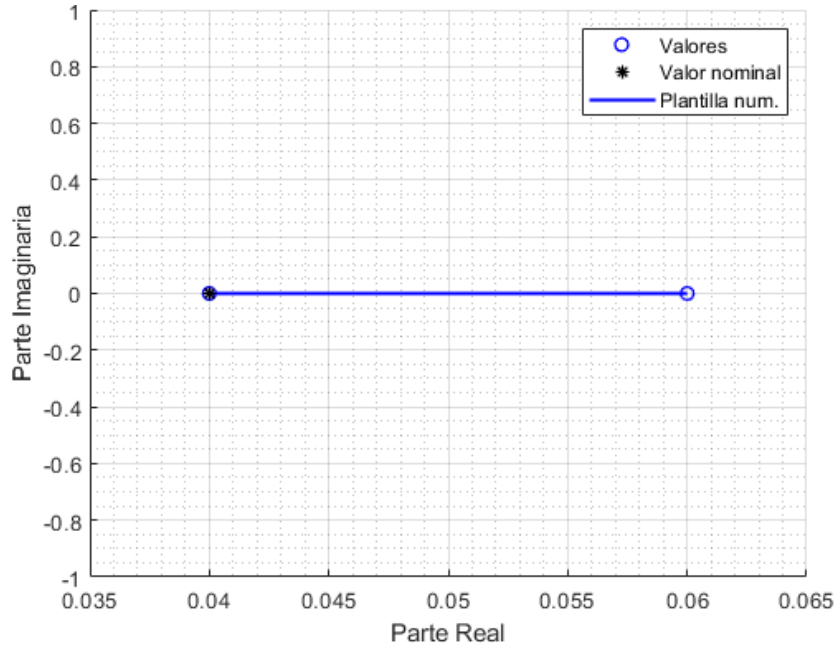


Figura 4.2: Plantilla compleja del polinomio del numerador (motor CC,  $\omega = 500$ ).

En el caso del polinomio del denominador, representada en la ecuación 4.7, se observa que el polinomio cumple con las condiciones necesarias para la aplicación del Teorema de mapeo. Por lo que se transforma la ecuación en parámetros  $q$ , para los siguientes análisis:

$$p_d(s) = J L_a s^2 + (J R_a + b L_a) s + (b R_a + K_T K_e) \quad (4.7)$$

$$p_d(s, Q) = q_1 q_2 s^2 + (q_1 q_3 + q_2 q_4) s + q_3 q_4 + q_5 q_6 \quad (4.8)$$

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\} \quad (4.9)$$

$$p_d(j\omega, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = q_1 q_2 (j\omega)^2 + (q_1 q_3 + q_2 q_4) (j\omega) + q_3 q_4 + q_5 q_6 \quad (4.10)$$

donde:

- $q_1 = J$ , con  $q_1 \in [4 \times 10^{-5}; 8 \times 10^{-5}]$
- $q_2 = L_a$ , con  $q_2 \in [1 \times 10^{-3}; 3 \times 10^{-3}]$
- $q_3 = R_a$ , con  $q_3 \in [0.5; 0.7]$
- $q_4 = b$ , con  $q_4 \in [6 \times 10^{-5}; 9 \times 10^{-5}]$
- $q_5 = K_T$ , con  $q_5 \in [0.04; 0.06]$
- $q_6 = K_e$ , con  $q_6 \in [0.04; 0.06]$

Al sustituir  $s = j\omega$  en la ecuación 4.10, la envoltura convexa del conjunto de valores del polinomio del denominador se construye haciendo combinaciones de los valores extremos de los parámetros inciertos  $q$ . Para los cinco parámetros  $q$ , se obtienen 32 posibles combinaciones, lo que representa para  $s = j\omega$ , las imágenes de los 32 vértices del casco convexo  $Q$ .

Para una frecuencia  $\omega = 500$ , las imágenes de los 32 vértices de  $Q$  se muestran en el plano complejo de la figura 4.3. Se destaca la relevancia de este teorema cuando se incrementa el número de combinaciones entre los parámetros inciertos de la ecuación del polinomio  $p_d$ . Cuando se toman los valores extremos de cada parámetro  $q$  y 8 valores intermedios de cada uno, se obtienen 100000 combinaciones posibles. De esta manera, se considera una mayor variedad de casos posibles y se observa que todas estas combinaciones de parámetros incluidas en el análisis del polinomio permanezcan dentro de los límites definidos por la envoltura convexa, conforme a lo establecido en el teorema. Como puede observarse en la figura 4.4, el contorno obtenido a través del Teorema de mapeo no es conservador, por lo que no sería necesario ajustar esta plantilla mediante la técnica de división de dominios.

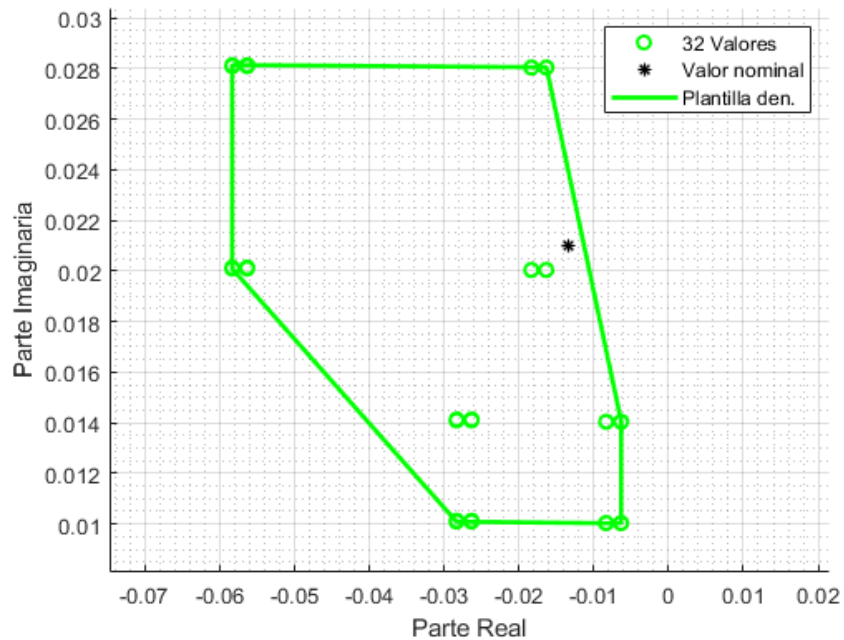


Figura 4.3: Envoltura convexa del polinomio  $p_d$  (motor CC,  $\omega = 500$ ).

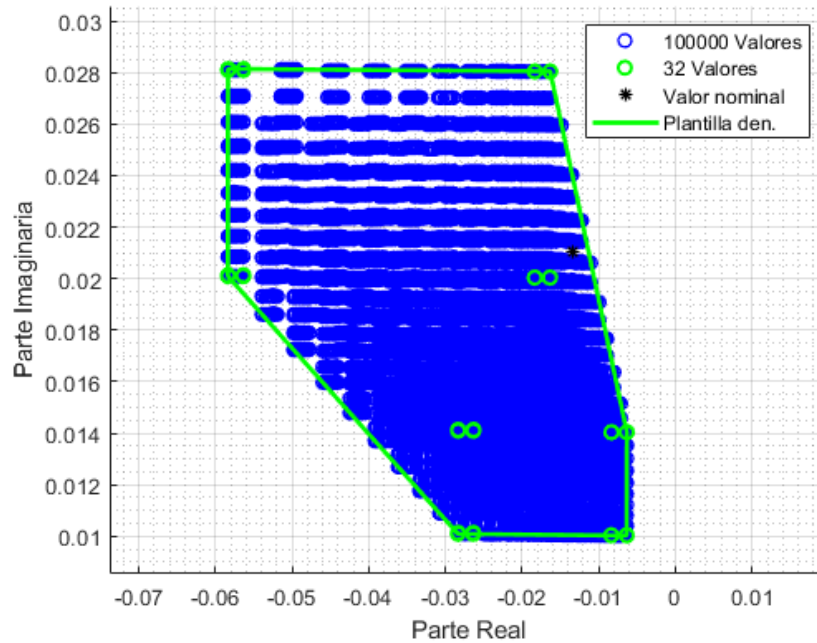


Figura 4.4: Envoltura convexa del polinomio  $p_d$  y 100000 valores del mismo contenidos en la envoltura convexa (motor CC,  $\omega = 500$ ).

Una vez obtenidas los contornos de las plantillas de los polinomios del numerador y del denominador, en el siguiente apartado se muestran los métodos a priori y a posteriori para la creación de plantillas de la función de transferencia para determinadas frecuencias.

### 4.3 Obtención de plantilla con método a priori

El método a priori, como se mencionó anteriormente, es un enfoque que se centra en la planificación anticipada y la predicción de la estabilidad. Un requisito indispensable para su implementación es que los coeficientes de los polinomios del numerador y el denominador de la función de transferencia sean independientes entre sí. En el caso del modelo del motor CC controlado por armadura que se analiza, se observa que el parámetro incierto  $K_T$  es un parámetro común tanto en el numerador como en el denominador. Esto puede producir una plantilla resultante que esté sobreacotada, es decir, que sea más conservadora de lo necesario. Aun así, se continúa con el procedimiento, para la obtención de la plantilla de la función de transferencia y posteriormente se realizan algunos análisis.

Para la implementación del método a priori, en este apartado utilizamos el procedimiento de adición de plantillas de (Erik Coelingh, 1998), donde se describe cómo se combinan las

familias de numeradores y denominadores inciertos para formar una plantilla en el diagrama de Nichols.

El primer paso antes de la aplicación de los métodos a priori o a posteriori, es la transformación de las plantillas complejas de los polinomios del numerador y denominador, a subplantillas en el diagrama de Nichols. Esto se hace mediante la siguiente ecuación:

$$\left( \arctan\left(\frac{\text{Im}(p)}{\text{Re}(p)}\right), 20\log\left(\sqrt{\text{Re}^2(p) + \text{Im}^2(p)}\right) \right) \quad 4.11$$

donde se calcula la fase y la magnitud para cada número complejo de las plantillas de los polinomios. La transformación de las plantillas complejas al diagrama de Nichols se observa en las figuras 4.5 y 4.6.

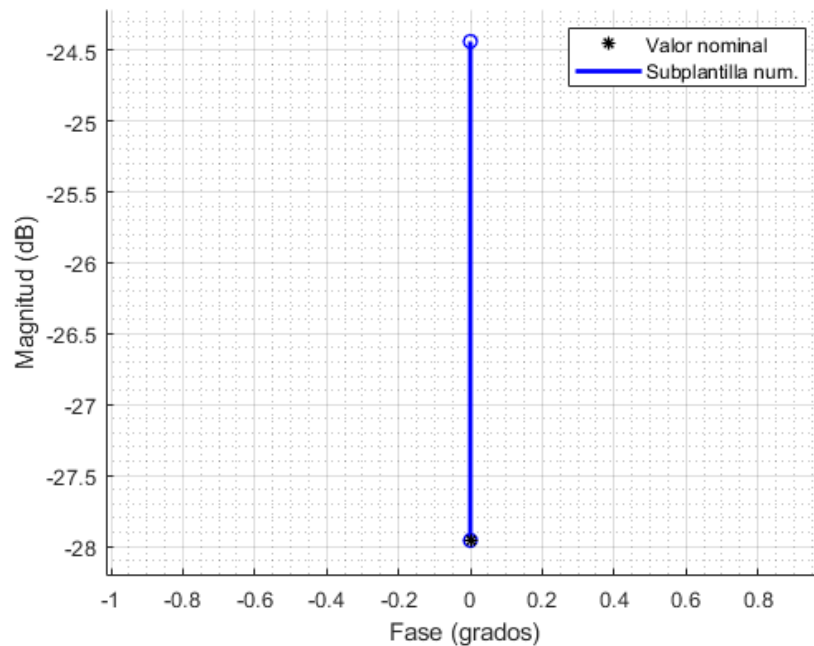


Figura 4.5: Subplantilla del numerador en el diagrama de Nichols (motor CC,  $\omega = 500$ ).

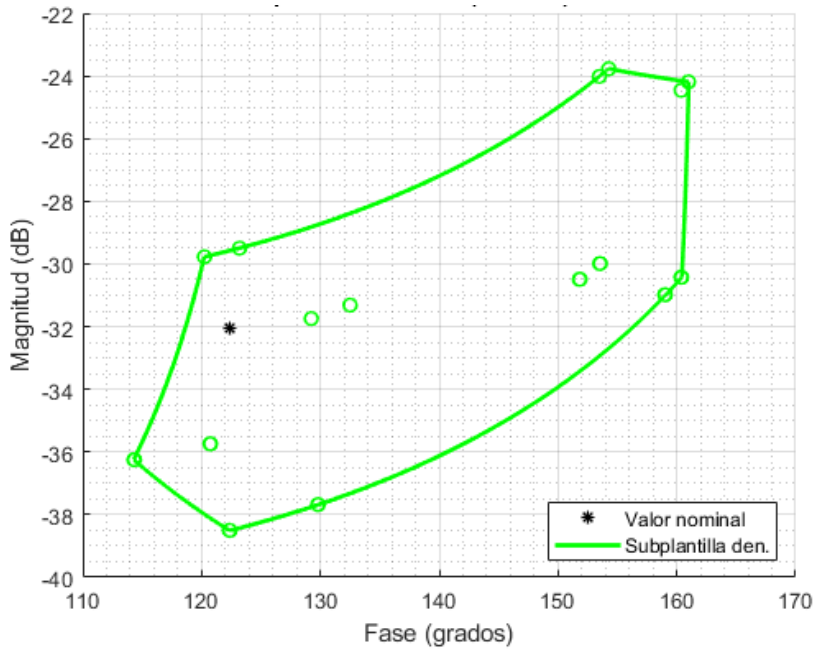


Figura 4.6: Subplantilla del denominador en el diagrama de Nichols (motor CC,  $\omega = 500$ ).

Para la obtención de la plantilla general de la función de transferencia con este método se combina las incertidumbres del numerador y del denominador, asegurando que la plantilla resultante cubra todas las variaciones posibles en el sistema. El procedimiento para la construcción de la plantilla mediante este método se ilustra en la figura 4.7. En dicha figura,  $n_0$  representa el numerador nominal de la subplantilla  $R_N$  y  $d_0$  el denominador nominal de la subplantilla  $R_D$ .

Primero se obtiene el reflejo de la plantilla del denominador ( $-R_{D,mirror}$ ) y su valor nominal ( $-d_0$ ), como se muestra en la figura 4.7a. Si los parámetros del denominador fueran ciertos, la plantilla resultante  $R_p$  sería idéntica a la plantilla del numerador desplazada por el valor nominal del denominador ( $R_N^* = R_N - d_0$ ), ya que la incertidumbre no afecta la plantilla y solo se considera el desplazamiento fijo correspondiente al denominador nominal. La planta nominal  $P_0$  correspondería al numerador nominal desplazado ( $n_0 - d_0$ ), como se ilustra en la figura 4.7b.



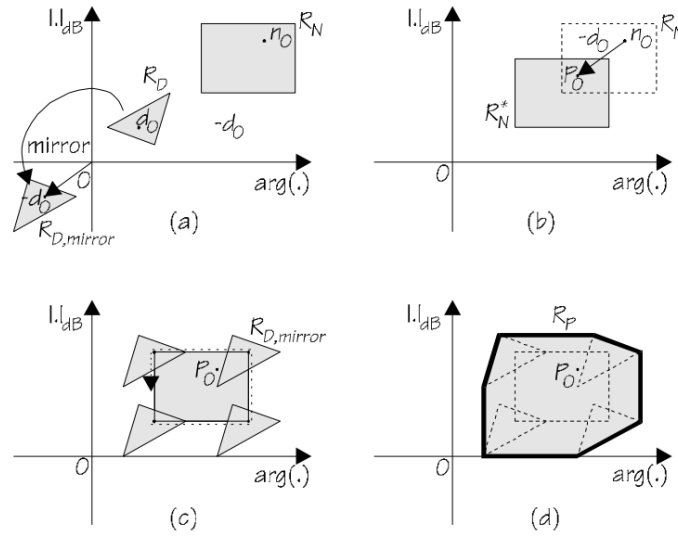


Figura 4.7: Método de adición de plantillas. Adaptado de (Erik Coelingh, 1998).

En caso de que el denominador sea incierto, la incertidumbre en toda la planta aumenta. La subplantilla desplazada  $R_N^*$  debe extenderse con aquellos puntos que se pueden alcanzar dentro de la subplantilla reflejada  $R_{D,mirror}$ , cuando el punto nominal  $-d_0$  se encuentra dentro de la subplantilla  $R_N^*$ . Por lo tanto,  $R_p$  se puede construir desplazando la subplantilla reflejada  $R_{D,mirror}$  alrededor de la subplantilla  $R_N^*$ , manteniendo el punto nominal de la subplantilla  $R_{D,mirror}$  en el contorno de  $R_N^*$ , véase figura 4.7c. La plantilla  $R_p$  puede considerarse el resultado de la adición de las subplantillas  $R_N$  y  $R_{D,mirror}$ , tal como se muestra en la figura 4.7d.

De manera alternativa la plantilla  $R_p$  se puede construir restando cualquier vector denominador de cualquier vector numerador mediante las ecuaciones siguientes:

$$\arg(P(j\omega_i, q_u)) = \arg(\text{num}(j\omega_i, q_{u,N})) - \arg(\text{den}(j\omega_i, q_{u,D})) \quad (4.12)$$

$$|P(j\omega_i, q_u)|_{dB} = |\text{num}(j\omega_i, q_{u,N})|_{dB} - |\text{den}(j\omega_i, q_{u,D})|_{dB} \quad (4.13)$$

El procedimiento de adición de plantillas aplicado a las subplantillas de los polinomios del numerador y denominador se muestra en la figura 4.8 y la figura 4.9. La figura 4.8 ilustra visualmente los pasos descritos, desde la obtención del reflejo de la plantilla del denominador hasta el desplazamiento de la subplantilla del numerador. Se representa con un asterisco los valores nominales para cada subplantilla. En la figura 4.9 se observa cómo se combinan las

incertidumbres del numerador y del denominador para construir la plantilla resultante que cubre todas las variaciones posibles en el sistema debido a la incertidumbre en los parámetros.

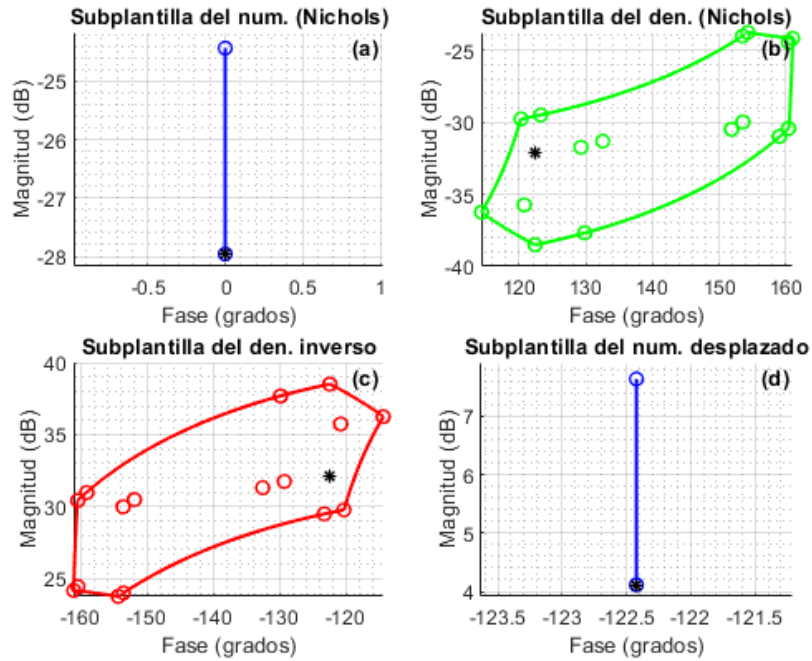


Figura 4.8: Subplantillas del denominador y del numerador (motor CC,  $\omega = 500$ ).

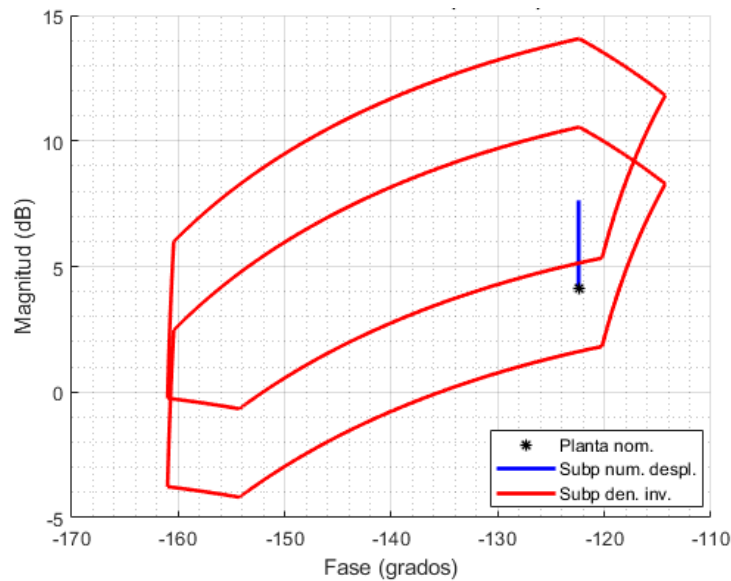


Figura 4.9: Adición de las subplantillas del numerador y del denominador (motor CC,  $\omega = 500$ ).

Al unir los vértices de cada una de las subplantillas rojas, ubicadas en los vértices de la subplantilla del numerador en azul, se obtiene la plantilla para la función de transferencia con incertidumbre multilínea. Las uniones y las subplantillas de los extremos, anteriormente dibujadas en color rojo, se representan en color magenta en la figura 4.10.

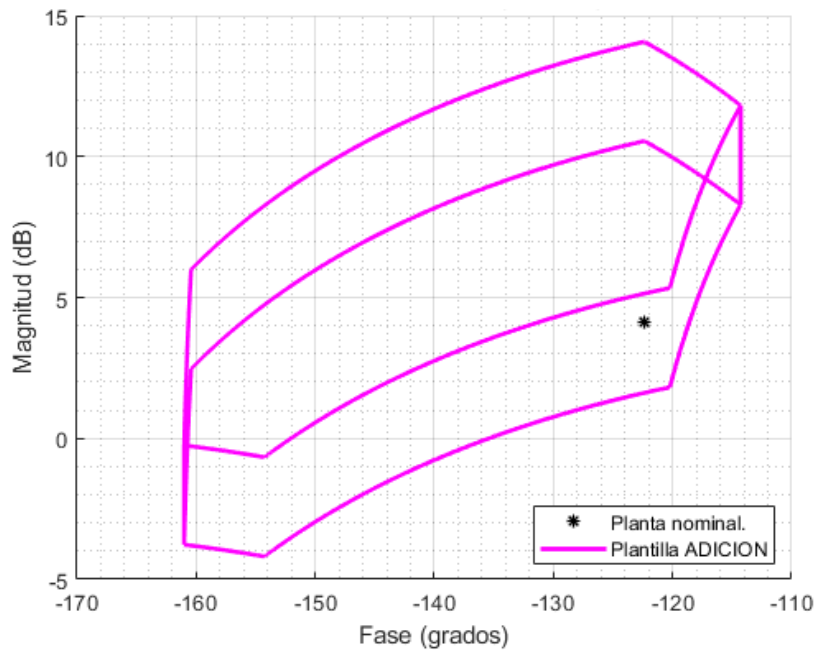


Figura 4.10: Plantilla construida con método a priori (motor CC,  $\omega = 500$ ).

#### 4.4 Obtención de plantilla con método a posteriori

En el epígrafe anterior se mostró el procedimiento a priori para la determinación de la plantilla de la función de transferencia del motor CC controlado por armadura. En este método a posteriori, el análisis se realiza considerando la función de transferencia completa y no se analiza por separado los polinomios del numerador y del denominador, como se hace en el método a priori. Se evalúa la función de transferencia directamente para un conjunto de valores de los parámetros inciertos, y se obtiene una plantilla basada en la respuesta real del sistema.

Para la determinación de la plantilla mediante este método, es necesario calcular todos los valores complejos de la ecuación 4.6. Para esto nuevamente se transforma la ecuación en parámetros  $q$ , y se sustituye el término  $s$  por  $j\omega$  en la ecuación. De esta manera se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega_m(j\omega, Q)}{v(j\omega, Q)} = \frac{q_5}{q_1 q_2 (j\omega)^2 + (q_1 q_3 + q_2 q_4)(j\omega) + q_3 q_4 + q_5 q_6} \quad (4.14)$$

con

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ .

Según (Ackermann, 1993 ), se requiere que la plantilla sea lo más densa posible; por esta razón se toman diez valores de cada parámetro incierto, incluyendo los valores extremos de cada uno. Para  $\omega = 500$ , se obtienen 100000 valores posibles de la función de transferencia, véase figura 4.11.

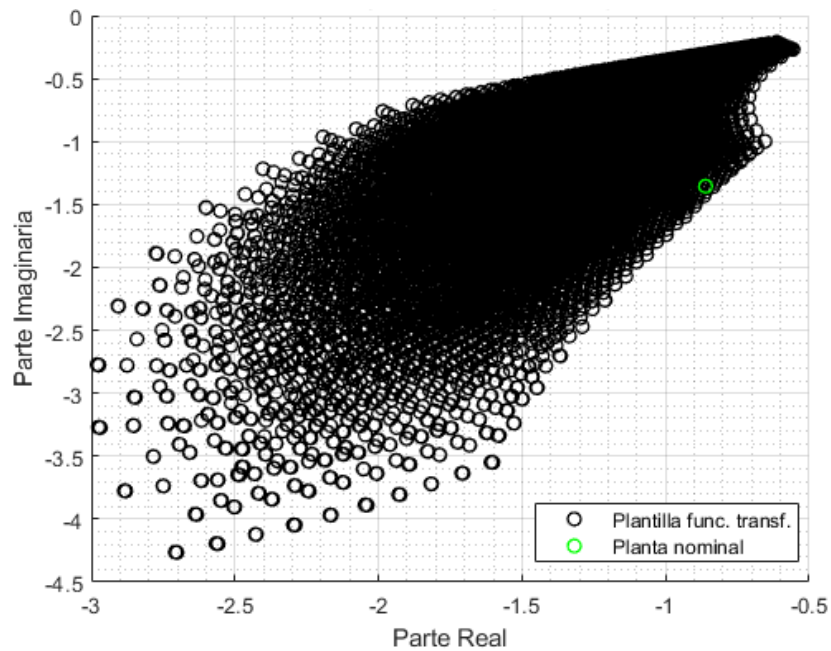


Figura 4.11: Plantilla compleja de la ecuación 4.14 (motor CC,  $\omega = 500$ ).

Nuevamente se hace uso de la ecuación 4.11 para la transformación del conjunto de valores complejos a valores en el diagrama de Nichols. La plantilla obtenida se muestra en la figura 4.12.

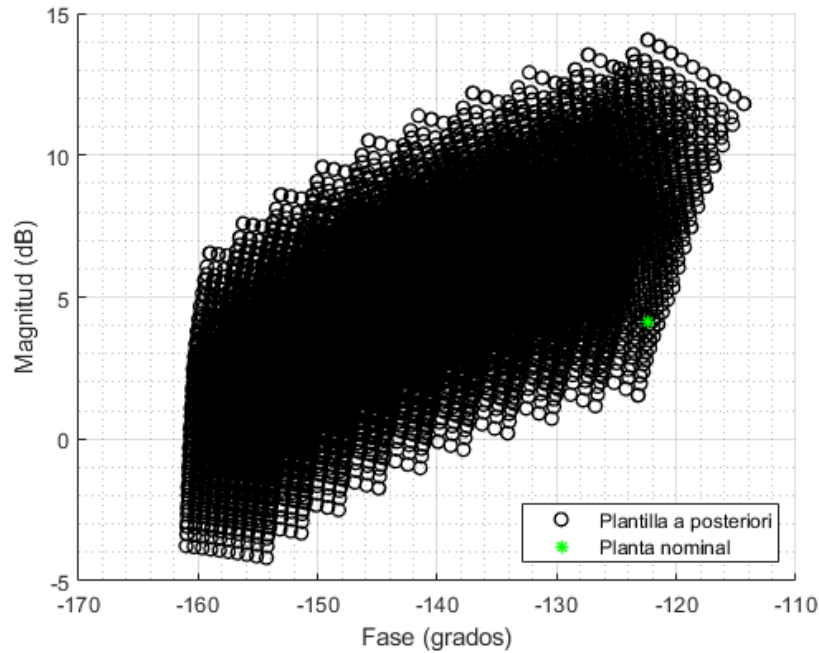


Figura 4.12: Plantilla obtenida con el método a posteriori (motor CC,  $\omega = 500$ ).

#### 4.5 Comparación de las plantillas obtenidas con los métodos a priori y a posteriori

En la figura 4.13 se presentan las plantillas obtenidas anteriormente con los métodos a priori y a posteriori. En color verde se muestra la plantilla obtenida mediante el método QFT, con el objetivo de compararla con las plantillas obtenidas con los métodos mencionados. En color negro se muestra la plantilla obtenida mediante el método a posteriori, y en magenta la plantilla obtenida mediante el método a priori.

El método a posteriori, representado en negro, proporciona una plantilla más densa y precisa. Esto se debe a que, además de considerar los valores extremos de los parámetros inciertos, se utilizan valores intermedios, capturando así una gama más completa de posibles variaciones del sistema. La mayor cantidad de puntos en la plantilla a posteriori refleja la exhaustividad del método, que incluye las posibles combinaciones de los parámetros inciertos, proporcionando una representación detallada del comportamiento del sistema. Este método no garantiza que se incluya el conjunto de valores completo, ya que se basa en obtener una plantilla suficientemente densa, como se recomienda en (Ackermann, 1993).

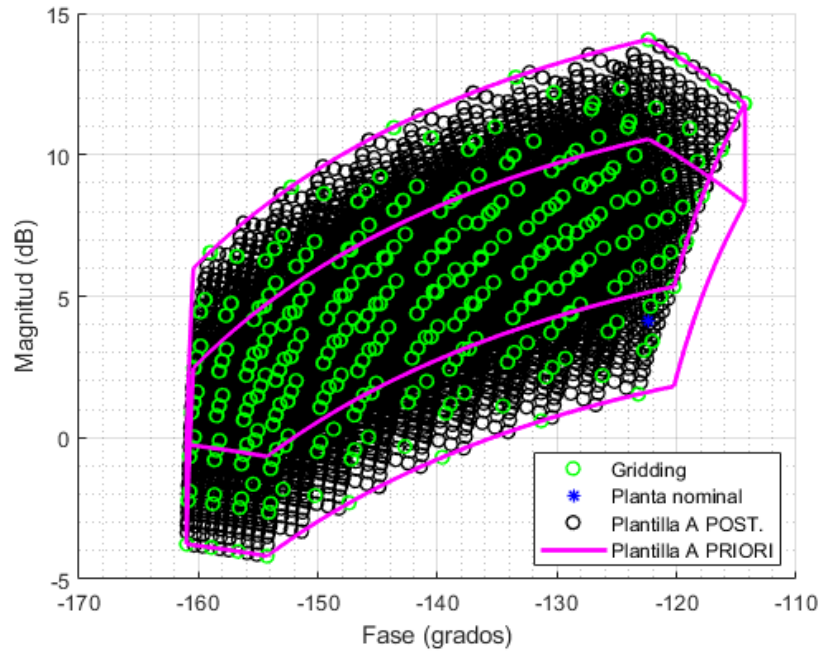


Figura 4.13: Plantillas obtenidas a priori y a posteriori (motor CC,  $\omega = 500$ ).

Por otro lado, la plantilla en verde, utiliza únicamente los valores extremos de los parámetros inciertos, es decir, los vértices del hiperrectángulo en el espacio de los parámetros. Esto resulta en una menor cantidad de valores en comparación con la plantilla a posteriori, aunque asegura que las variaciones críticas del sistema estén representadas.

La plantilla en color magenta, obtenida mediante el método a priori, muestra una pequeña sobreestimación, aunque asegura que todos los valores posibles estén considerados dentro de la envoltura convexa. Este método es más conservador y, en algunos casos, incluye regiones del espacio de parámetros que en realidad no corresponden a valores posibles del sistema. Una contribución significativa en la aplicación de este método, es que logra obtener un contorno donde todos los valores de las demás plantillas estén incluidos dentro del mismo.

## **Conclusiones del capítulo**

En este capítulo se ha resumido la aplicación del Teorema de mapeo para obtener la envoltura convexa de polinomios con coeficientes multilineales, y construir la plantilla de una función de transferencia con incertidumbre multilineal. Este enfoque es fundamental porque garantiza mediante su aplicación que todos los posibles valores de un polinomio se encuentren dentro de la envoltura convexa construida, proporcionando una base sólida para la obtención de la plantilla general.

Se analizan además los métodos a priori y a posteriori para la construcción de plantillas, y se lleva a cabo la metodología propuesta por (Erik Coelingh, 1998) para las operaciones entre subplantillas para la obtención de la plantilla general de la función de transferencia del motor CC para determinadas frecuencias.

En cuanto a las plantillas obtenidas mediante los métodos presentados, se observa que las plantillas construidas con el método a priori tienden a proporcionar resultados más conservadores, aunque la subplantilla del denominador obtenida mediante el Teorema de mapeo no resultó conservadora.

## **CAPÍTULO V: APLICACIÓN PRÁCTICA Y RESULTADOS**

En este capítulo, se exponen los resultados obtenidos mediante la aplicación práctica de los métodos teóricos desarrollados previamente. La importancia de esta sección radica en la necesidad de validar y demostrar la eficacia del Teorema de mapeo, y los métodos a priori y a posteriori en sistemas reales y complejos. A través de tres casos de estudio específicos, se mostrará cómo estos métodos pueden utilizarse en el análisis de sistemas de control robusto en distintas aplicaciones industriales.

Primero, se presentan los resultados obtenidos en el motor CC controlado por armadura presentado en el capítulo 4, y luego se muestran los resultados de dos casos adicionales. El segundo caso de estudio involucra una función de transferencia que representa la relación entre el par del looper y la tensión resultante en la cinta en un molino de laminación de acero en caliente. El tercer y último caso de estudio aborda el control de suspensión activa de un vehículo, con el objetivo de mejorar la comodidad y la seguridad en la conducción.

En cada uno de estos casos, se muestra un análisis detallado de los resultados obtenidos, destacando las ventajas y limitaciones de los métodos aplicados. De esta manera, este se proporciona una validación práctica de los métodos teóricos.

### **5.1 Resultados del Teorema de mapeo para los tres casos de estudio**

En el capítulo anterior, se aplicó el Teorema de mapeo a los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia del motor CC controlado por armadura, para  $\omega=500$ , y posteriormente se obtuvieron las plantillas de la función de transferencia mediante los métodos a priori y a posteriori. En esta sección, retomamos este caso de estudio considerando otras frecuencias y luego se muestran los resultados obtenidos con los demás casos de estudio mencionados anteriormente.

#### **5.1.1 Motor CC controlado por armadura**

Retomando el caso de estudio del motor CC, cuya función de transferencia se mostró en la ecuación 4.6, donde la variable de salida se corresponde con la velocidad del motor  $\omega_m(s)$ ,



y la de entrada es el voltaje  $v(s)$ . En esta sección, se aplica nuevamente los pasos del Teorema de mapeo al polinomio del denominador. La frecuencia de trabajo en esta ocasión es  $\omega = 50$ . Las plantillas complejas para los polinomios del numerador y del denominador se muestran en la figura 5.1 y 5.2.

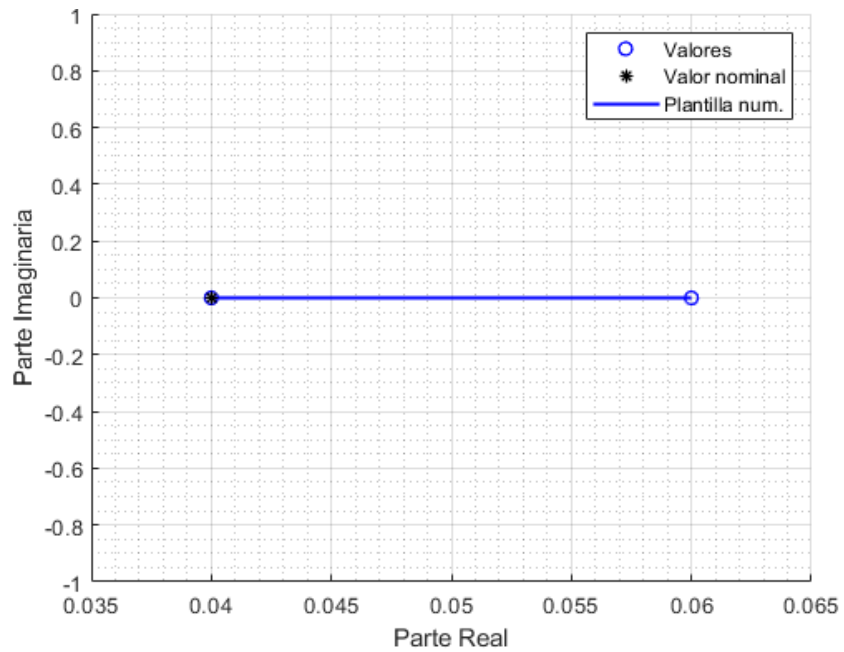


Figura 5.1: Plantilla del polinomio del numerador (motor CC,  $\omega = 50$ ).

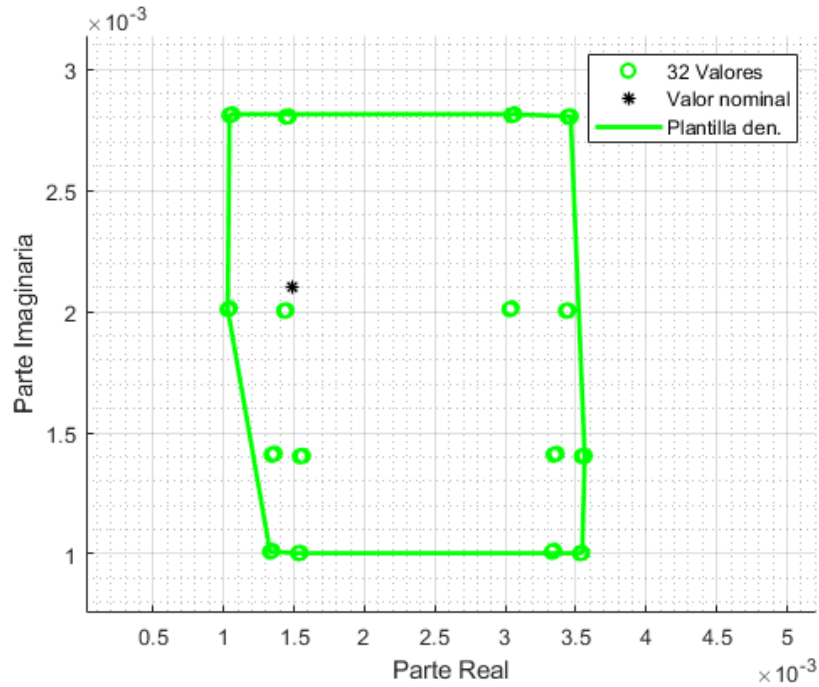


Figura 5.2: Plantilla del polinomio del denominador (motor CC,  $\omega = 50$ ).

En el caso de la plantilla del polinomio del numerador representada en la figura 5.1, se obtiene la misma representación que en el caso de  $\omega = 500$ . Este polinomio solo depende del parámetro incierto  $K_T$ , y no se multiplica por el término  $s$ . Por lo tanto, la plantilla del polinomio del numerador permanece constante independientemente de los cambios en  $\omega$ .

En el caso de la plantilla del denominador representada en la figura 5.2, y para otras frecuencias, como se muestra en la figura 5.3, se logra que todos los posibles valores del polinomio del denominador se mantengan dentro de la envolvente convexa, tal como se establece en el Teorema del mapeo. Este enfoque garantiza que todas las posibles variaciones de los parámetros inciertos se representen adecuadamente, proporcionando una imagen completa y precisa del comportamiento del sistema.

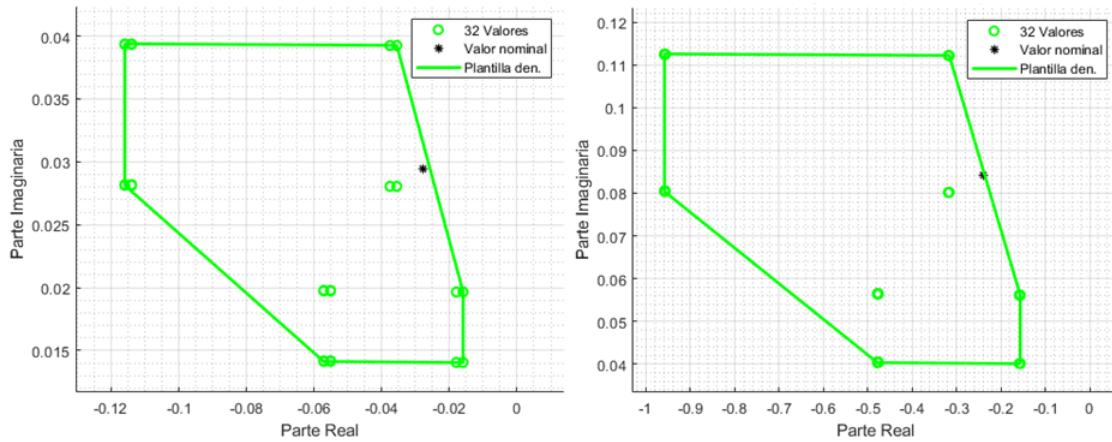


Figura 5.3: Plantillas del polinomio del denominador del motor CC para  $\omega = 700$  (izquierda) y  $\omega = 2000$  (derecha).

Se observa en las figuras 5.2 y 5.3 que el contorno obtenido para el polinomio del denominador, en las diferentes frecuencias analizadas, no es conservador, similar a lo que se observó con el polinomio discutido en el capítulo 3, y a diferencia del polinomio de la ecuación 3.2, en el que se requirió la división de dominios.

### 5.1.2 Molino de laminación de acero en caliente

El segundo caso que se muestra es la función de transferencia que representa la relación entre el par del looper y la tensión resultante en la cinta, en un HSM. El desarrollo de esta función de transferencia se observa en la figura 5.4, debido a su complejidad se requirió el uso del software MATLAB para su resolución. Los parámetros inciertos de la función de transferencia y sus respectivos valores se muestran en la Tabla 5.1.

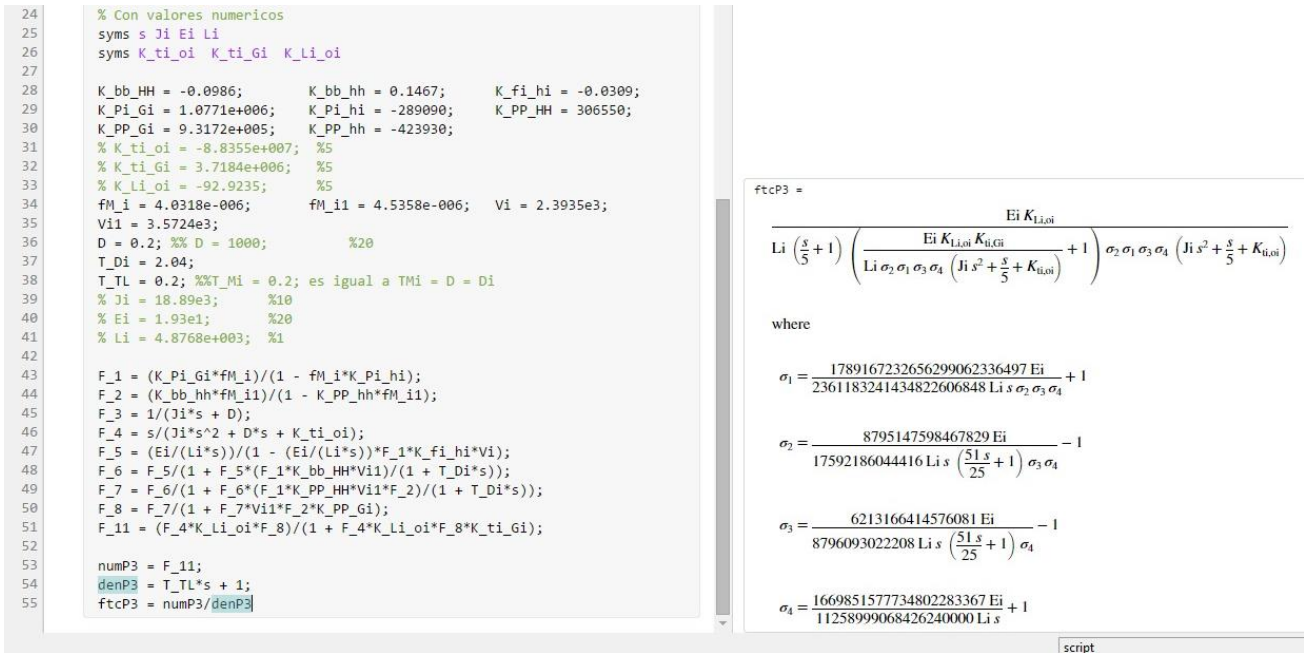


Figura 5.4: Desarrollo de la ecuación del molino de laminación de acero en caliente utilizando MATLAB.

Variable	Parámetros	Valor mínimo	Valor nominal	Valor máximo
Ganancia estática	$K_{\theta_i}^{\tau_i} \rightarrow kg.mm$	-92772750	-88355000	-83937250
Ganancia estática	$K_{\theta_i}^{L_i} \rightarrow mm$	-97.5697	-92.9235	-88.2773
Ganancia estática	$K_{\sigma_i}^{\tau_i} \rightarrow mm$	3532480	3718400	3904320
Inercia del looper	$J_i \rightarrow kg.mm.s^2$	17001	18890	20779
Módulo de Young de la cinta	$E_i \rightarrow kg/mm$	15.4400	19.3	23.1600
Distancia entre los centros de los rodillos	$L_i \rightarrow mm$	4828	4876.8	4925.6

Tabla 5.1: Valores de parámetros inciertos del HSM.

Los polinomios del numerador y del denominador de esta función de transferencia presentan coeficientes multilineales, por lo que se aplica el Teorema de mapeo en ambos. En el caso del polinomio del numerador, los valores obtenidos para distintas frecuencias no conforman envolturas convexas, ya que siempre representan una recta en el plano complejo. Solo se

muestra la representación de los valores del polinomio del numerador para  $\omega = 1$  en la figura 5.5, ya que el mayor interés es demostrar la efectividad del Teorema de mapeo en los polinomios con coeficientes multilineales.

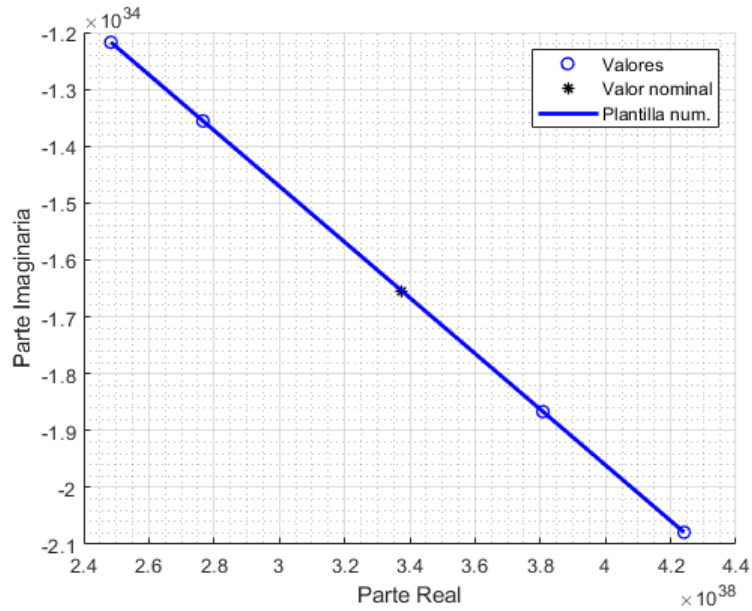


Figura 5.5: Plantilla del polinomio del numerador (HSM,  $\omega = 1$ ).

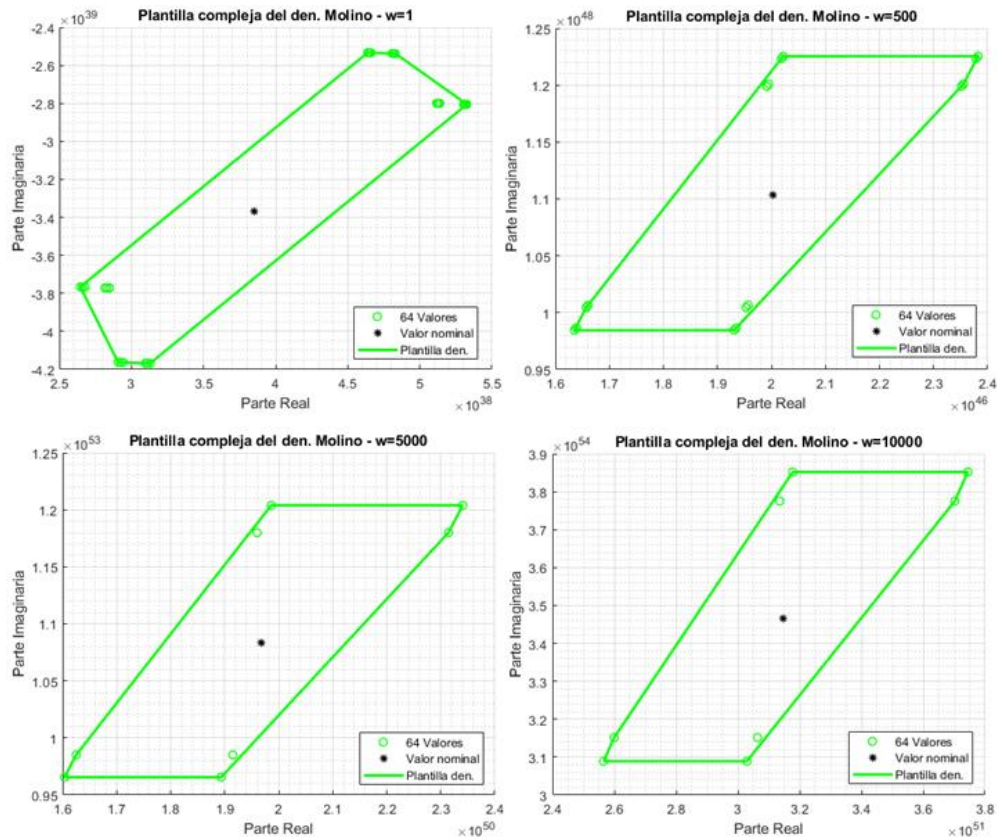


Figura 5.6: Plantillas complejas del polinomio del denominador del HSM.

En el caso del denominador, en la figura 5.6 se muestran las distintas envolturas convexas, donde se incluyen todos los conjuntos valores del polinomio para las respectivas frecuencias. En todos los casos se observa que las envolturas convexas obtenidas no son conservadoras, tal como el caso mostrado en el capítulo 3.

### 5.1.3 Control de suspensión activa de un vehículo

El último caso de estudio se corresponde con el control de suspensión activa de un vehículo, tomado de (Garcia-Sanz M. , 2017). En este escenario, se requiere que un automóvil ofrezca la conducción lo más suave posible, y para ello, el sistema de control debe minimizar las aceleraciones que sienten los pasajeros del vehículo al pasar por superficies irregulares. Este sistema está relacionado con la señal de control  $u(s)$  y la altura de la carrocería del vehículo  $y(s)$  con respecto a la referencia de la carretera. La representación matemática de esta dinámica está dada por la siguiente ecuación:

$$p_{11}(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(m_1 s^2 + k_t)}{m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2) s^3 + [k_t m_2 + k_s(m_1 + m_2)] s^2 + b k_t s + k_t k_s} \quad (5.1)$$

Los parámetros de la función de transferencia se muestran en la Tabla 5.2.

<b>Variable</b>	<b>Parámetros</b>	<b>Valor mínimo</b>	<b>Valor nominal</b>	<b>Valor máximo</b>
<b>Constante de resorte</b>	$k_s \rightarrow N/m$	-	27000	-
<b>Coefficiente de amortiguamiento</b>	$b \rightarrow Ns/m$	650	-	750
<b>Masa 1 (sistema neumático)</b>	$m_1 \rightarrow kg$	-	10	-
<b>Rigidez (sistema neumático)</b>	$k_t \rightarrow N/m$	70600	-	90600
<b>Masa 2</b>	$m_2 \rightarrow kg$	280	-	400

Tabla 5.2: Valores de los parámetros del vehículo.

En la función de transferencia mostrada en la ecuación 5.1 se observa que solo el polinomio del denominador presenta coeficientes multilineales, por lo que solo se podrá aplicar el Teorema de mapeo al mismo. En el caso del polinomio del numerador para diferentes frecuencias siempre se obtienen valores que conforman una recta en el plano complejo, por lo que solo se muestra la plantilla para  $\omega = 1$ , véase figura 5.7.

En la figura 5.8 se observan las envolturas convexas del polinomio del denominador para distintas frecuencias, obtenidas con el Teorema de mapeo. Como puede notarse, los contornos obtenidos tampoco resultan ser conservadores.

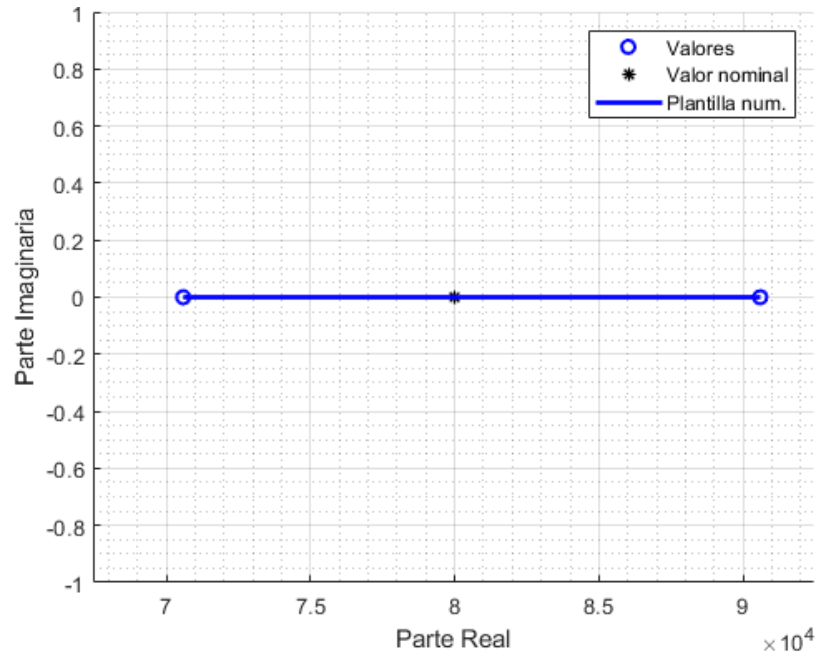


Figura 5.7: Plantilla del polinomio del numerador (Vehículo,  $\omega = 1$ ).

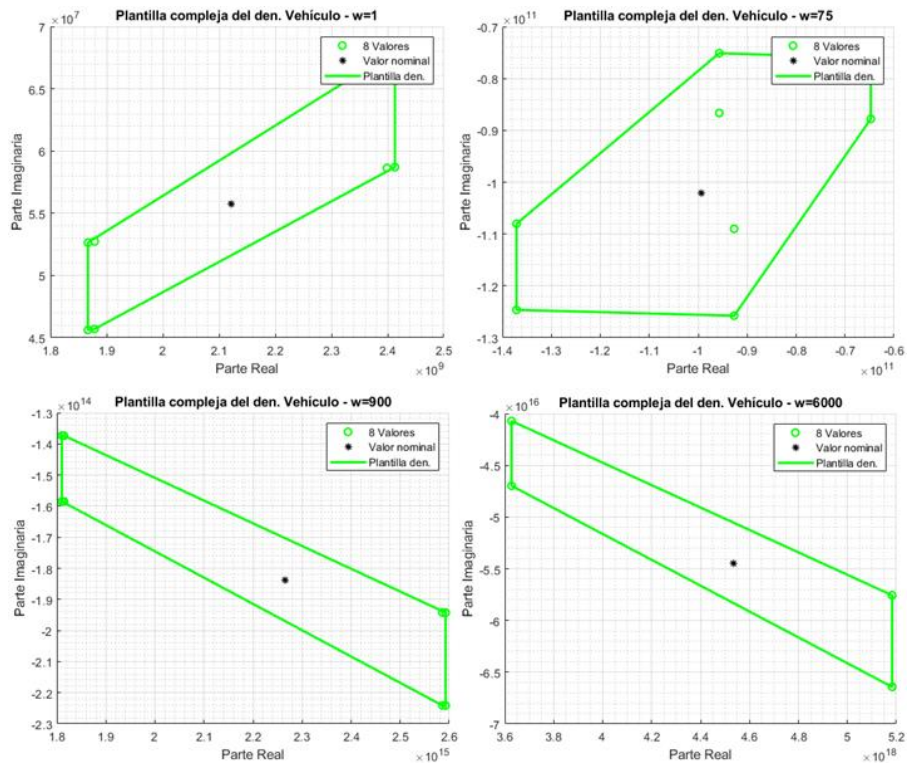


Figura 5.8: Plantillas del polinomio del denominador del Vehículo.



## 5.2 Resultados con los métodos a priori y a posteriori en la construcción de plantillas

En esta sección se discuten los resultados obtenidos mediante la aplicación de los métodos a priori y a posteriori en los tres casos de estudio. Para la obtención de las plantillas en cada caso de estudio se realizaron los procedimientos del capítulo anterior, tales como la transformación de las plantillas complejas a plantillas en el diagrama de Nichols, mediante la ecuación 4.11, y los procedimientos de los métodos a priori y a posteriori. Las plantillas obtenidas se comparan con las plantillas calculadas con el método de malla, comúnmente usado en la técnica QFT.

### 5.2.1 Motor CC controlado por armadura

En el caso del motor CC se mencionó anteriormente la dependencia del parámetro  $K_T$ , por lo que el uso del método a priori en estos caso contribuye a plantillas conservadoras. Para  $\omega = 50$ , parte del procedimiento de adición de plantillas mediante el método a priori se muestra en la figura 5.9. En la figura se muestran las subplantillas del numerador en color azul y en verde la del denominador. La imagen de la subplantilla del polinomio del denominador se muestra en color rojo. Se muestra con un asterisco en cada subplantilla los valores nominales de cada una. En la figura 5.10 se observa la última parte del procedimiento, donde la subplantilla negativa del denominador en rojo abarca el contorno de la subplantilla desplazada del numerador. La plantilla completa se muestra en la figura 5.11. Esta se forma al unir los vértices de cada una de las subplantillas rojas, ubicadas en los vértices de la subplantilla del numerador en azul. Las uniones y las subplantillas de los extremos, anteriormente dibujadas en color rojo, se representan en color magenta.

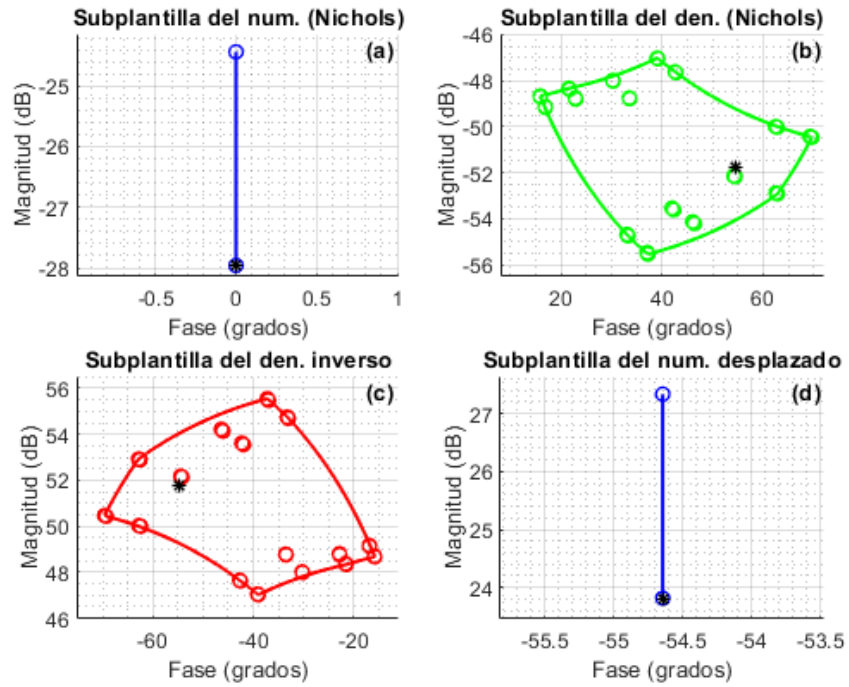


Figura 5.9: Subplantillas del numerador y denominador (motor CC,  $\omega = 50$ ).

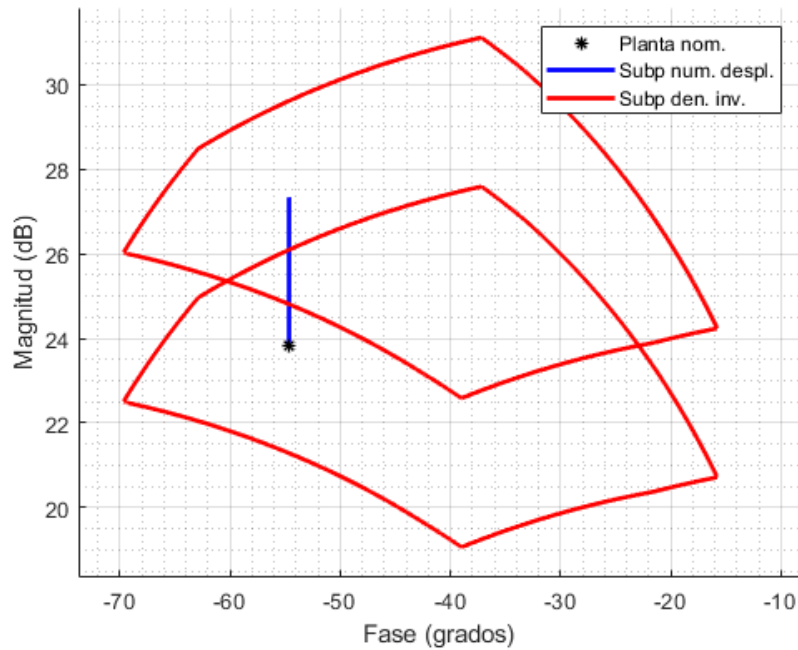


Figura 5.10: Procedimiento de adición de plantillas (motor CC,  $\omega = 50$ ).

Se destaca en la plantilla a priori el resultado de una plantilla conservadora, ya que resulta en una región sobreestimada, pero se incluyen todos los posibles valores de la función de

transferencia, asegurando que todas las variaciones están dentro de la región. Se muestra en la figura 5.11 la plantilla obtenida con el método a posteriori en verde en azul la imagen de los vértices del hiperrectángulo del espacio paramétrico.

En el caso de la plantilla a posteriori se obtiene una representación más densa y detallada de la función de transferencia del motor CC controlado por armadura. En cambio, la plantilla en color azul muestra una menor representación de los valores de la función de transferencia, aunque coincide en valores cruciales que identifican el comportamiento crítico del sistema.

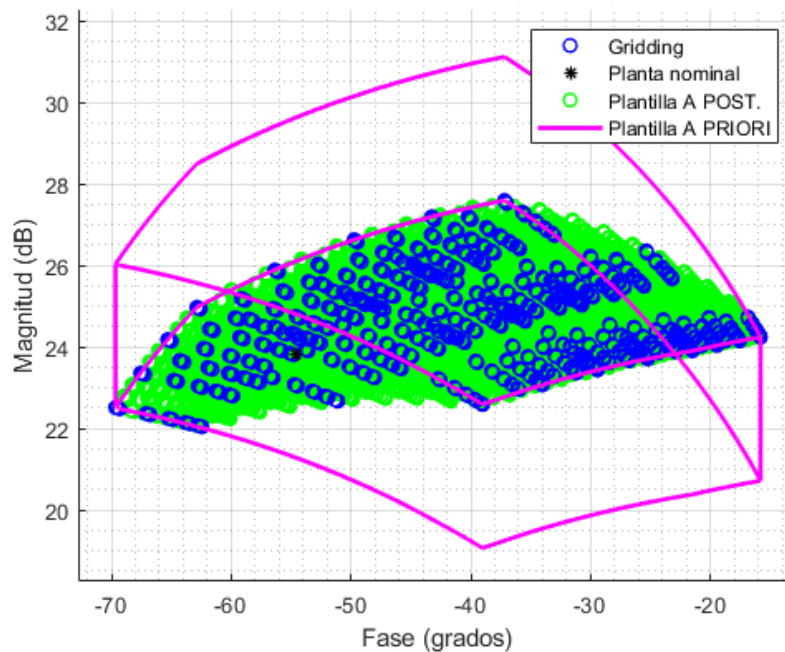


Figura 5.11: Plantillas obtenidas (motor CC,  $\omega = 50$ ).

En la figura 5.12 se muestran además otras plantillas, calculadas para  $\omega = 700$  y  $\omega = 2000$ . En color magenta las plantillas obtenidas a priori, en verde las obtenidas a posteriori y en color azul la imagen de los vértices. Se observa en estas figuras un comportamiento menos conservador por parte de las plantillas a priori al aumentar las frecuencias de operación, incluso llegando casi a coincidir en el último caso, con la plantilla a posteriori.

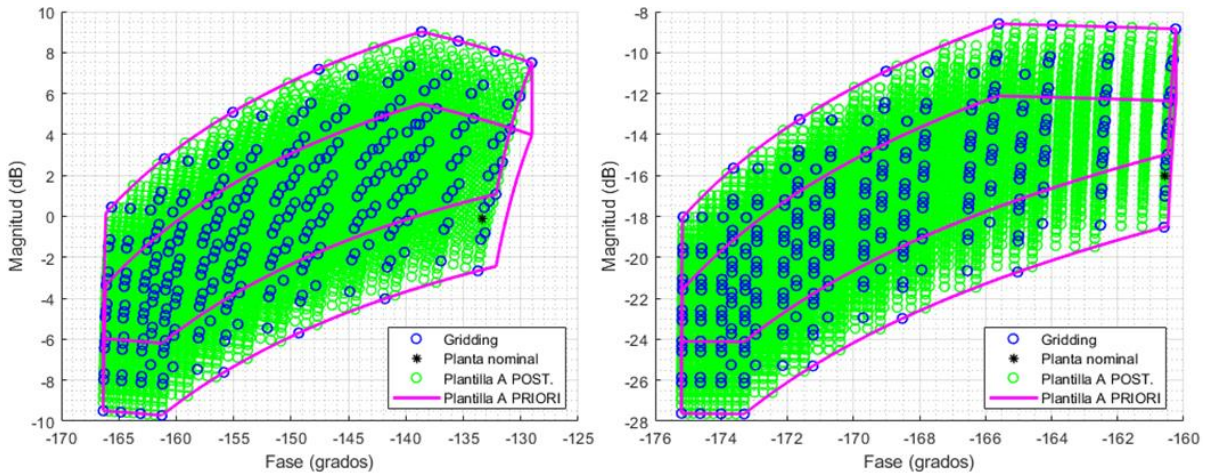


Figura 5.12: Plantillas obtenidas para el motor CC, para  $\omega = 700$  (izquierda) y  $\omega = 2000$  (derecha).

### 5.2.2 Molino de laminación de acero en caliente

Las plantillas obtenidas para la función de transferencia que describe la relación entre el par del looper y la tensión resultante en la cinta del HSM se presentan en la figura 5.13. En color magenta se muestran las plantillas obtenidas mediante el método a priori, en verde las plantillas a posteriori, y en azul las plantillas construidas a partir de la imagen de los vértices.

Para este análisis, se trabajó con un rango de frecuencias que incluye valores específicos como 1, 500, 5000 y 10000. En estos casos, las plantillas obtenidas mediante el método a priori resultaron ser bastante conservadoras. Dado que los polinomios del numerador y del denominador de la función de transferencia presentan coeficientes multilineales y dependen de dos parámetros inciertos, se esperaban resultados conservadores.

Por otro lado, las plantillas obtenidas con el método a posteriori, mostraron resultados similares a los del caso de estudio anterior. Para las frecuencias consideradas, el método a posteriori proporcionó una representación más densa y capturó todas las posibles combinaciones de la función de transferencia. Cabe destacar que, en este caso de estudio, se consideraron también diez valores para cada parámetro incierto de la función de transferencia, lo que contribuyó a una representación más exhaustiva.

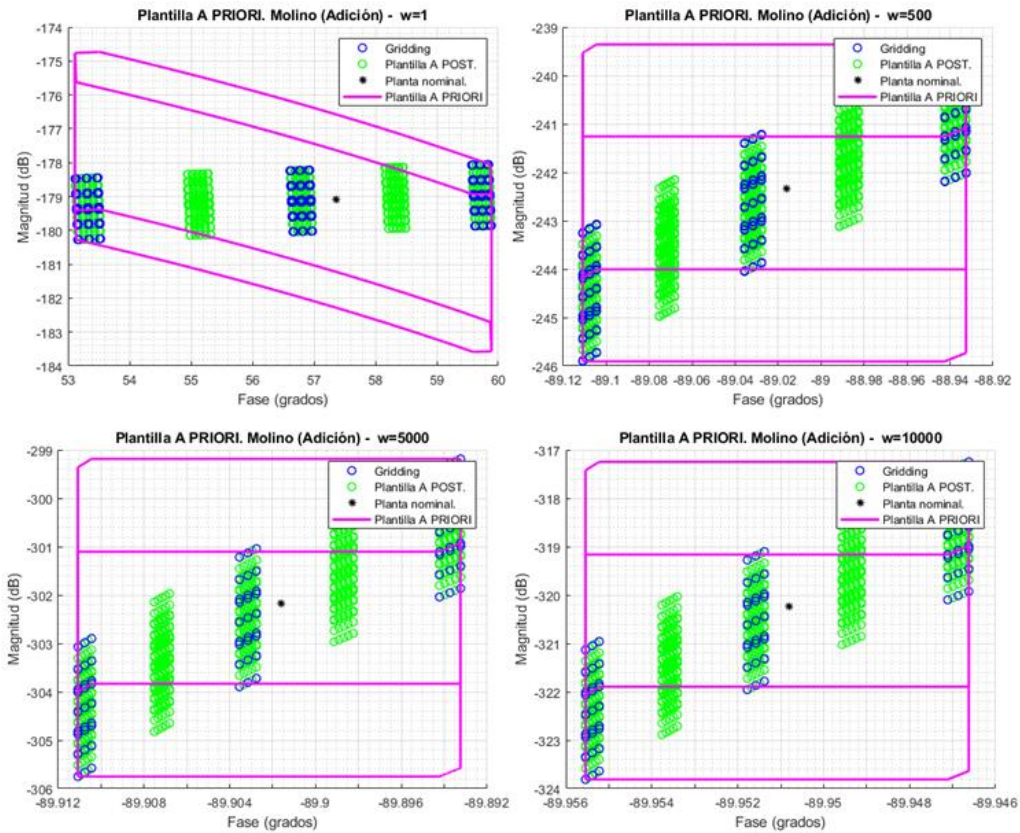


Figura 5.13: Plantillas obtenidas para el HSM para diferentes  $\omega$ .

### 5.2.3 Control de suspensión activa de un vehículo.

Para este último caso, las plantillas obtenidas con los métodos a posteriori y a priori, se muestran en la figura 5.14. Se tomaron diez valores para cada parámetro incierto del sistema y se trabajó con un rango de frecuencias que incluye valores específicos como 1, 75, 900 y 6000. En color magenta se muestran las plantillas obtenidas mediante el método a priori, en verde las plantillas a posteriori, y en azul las plantillas construidas a partir de la imagen de los vértices.

En este caso se obtienen resultados algo parecidos al caso del motor CC controlado por armadura; para altas frecuencias las plantillas obtenidas con el método a priori tienden a ser menos conservadores y llegan a coincidir con las plantillas obtenidas con el método a posteriori, solo para  $\omega=1$  se obtiene el caso más conservador. La función de transferencia de este caso de estudio presenta polinomios que dependen de un mismo parámetro físico



incierto, el parámetro  $k_t$  del sistema neumático. El polinomio del denominador es el único que presenta coeficientes multilineales.

En el caso de las plantillas a posteriori, se observa el mismo comportamiento que los dos casos de estudios anteriores. En este caso de estudio y en los demás, las plantillas a posteriori capturan todas las posibles variaciones del sistema, comparadas con las plantillas en color azul y proporcionan una representación más completa del comportamiento del sistema.

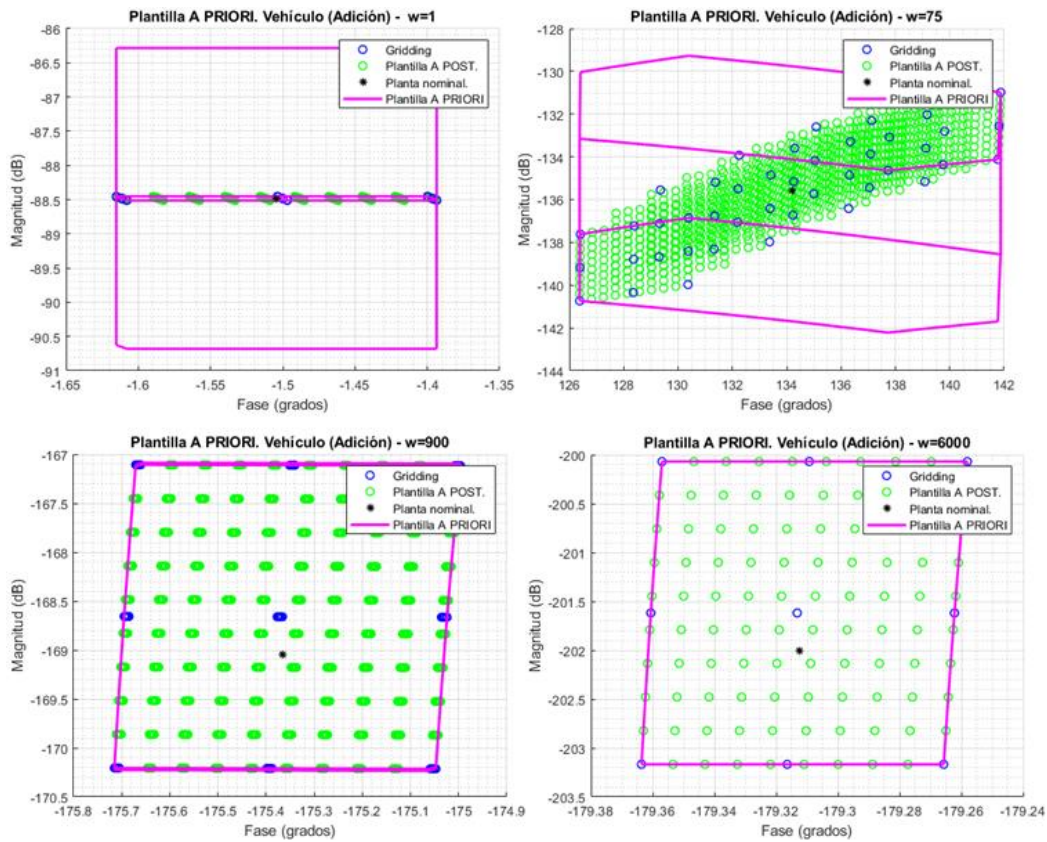


Figura 5.14: Plantillas obtenidas para el HSM para diferentes  $\omega$ .

### 5.3 Análisis comparativo entre los tres casos de estudio

El Teorema de mapeo se presenta como una herramienta valiosa en el análisis de sistemas con incertidumbres multilineales. Su efectividad radica en la capacidad de asegurar que todos los posibles valores de los polinomios estén contenidos dentro de una envoltura convexa, tal como se describe en (Ackermann, 1993). En los tres casos de estudio analizados, se ha

demostrado de manera convincente la efectividad de este teorema, garantizando así una representación precisa de los sistemas bajo incertidumbre.

En la construcción de plantillas es crucial seleccionar el método adecuado según la situación específica. En los tres casos de estudio, el método a priori basado en la adición de las subplantillas del numerador y del denominador ha demostrado ser eficaz para asegurar que se consideren todos los posibles valores de la función de transferencia. Esta metodología, al combinar las subplantillas de manera adecuada, confirma la inclusión completa de las variaciones posibles, proporcionando una representación más robusta de las incertidumbres. Este enfoque valida la utilidad del método a priori en enfoques específicos donde la precisión es crítica, al tiempo que aminora algunas de las limitaciones inherentes a su uso.

Es interesante considerar que, en escenarios donde las plantillas obtenidas con el método a priori resulten conservadoras, podría ser beneficioso explorar la posibilidad de extender la técnica de división de dominios, actualmente aplicada a polinomios, para trabajar directamente con funciones de transferencia. Esta adaptación permitiría identificar y desechar regiones en la plantilla que no contengan valores correspondientes a la función de transferencia, mejorando así la precisión y utilidad de las plantillas obtenidas.

El método a posteriori se aplica en los tres casos de estudio como una técnica que, si bien permite obtener una plantilla más densa, requiere un mayor esfuerzo computacional. Esto se debe a que el método implica calcular la respuesta en frecuencia para un amplio conjunto de combinaciones de parámetros inciertos. Cuantas más combinaciones se consideren, más precisa será la plantilla resultante; sin embargo, esto también incrementa significativamente la cantidad de cálculos necesarios. A pesar de la densidad obtenida, no siempre se logra abarcar la totalidad de los posibles escenarios del sistema, lo que dificulta confirmar que todos los casos posibles estén incluidos en la plantilla resultante.

### **Conclusiones del capítulo**

En este capítulo, se evidencia el uso de los métodos para la construcción de plantillas en sistemas con incertidumbre multilínea, mostrando cómo estos métodos, apoyados en la

teoría del Teorema de mapeo y la técnica de adición de plantillas, permiten abarcar un rango completo de posibles valores de la función de transferencia.

El método a priori, aunque asegura la inclusión de todos los valores posibles mediante una envoltura convexa, puede resultar en plantillas sobreestimadas que incluyen áreas donde no hay valores reales de la función, lo que podría conducir a un diseño de control excesivamente conservador. Por su parte, el método a posteriori requiere un alto esfuerzo computacional cuando se busca una plantilla densa debido a la gran cantidad de posibilidades que deben considerarse y evaluarse, y no garantiza que se incluyan todos los posibles valores, lo que podría comprometer la estabilidad robusta.

Aunque ambos métodos tienen sus méritos en la construcción de plantillas, la aplicación del método a priori se presenta como una opción preferible cuando la robustez en la estabilidad es una prioridad ineludible, especialmente en presencia de incertidumbre paramétrica multilínea. En este contexto, el Teorema de mapeo ofrece una herramienta poderosa, ya que permite asegurar que los valores de los polinomios se mantengan dentro de un contorno bien definido. Aunque el método a priori puede ser más conservador, su aplicación permite una mayor garantía de que la plantilla incluya todos los posibles escenarios, abordando así las limitaciones inherentes al método a posteriori, que, aunque útil en ciertos casos, no asegura la inclusión de todos los posibles valores de la función de transferencia. Esta consideración subraya la importancia de enfoques que prioricen la estabilidad robusta, contribuyendo de manera significativa a la confiabilidad del sistema.



## CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo, se ha logrado cumplir con los objetivos planteados al demostrar la relevancia del Teorema de mapeo como una herramienta esencial en la construcción de plantillas dentro del contexto de la QFT. Este enfoque ha permitido abordar de manera eficaz las incertidumbres paramétricas multilineales, proporcionando una representación más completa y precisa en comparación con los métodos tradicionales. La investigación realizada ha puesto en evidencia las limitaciones de la QFT en escenarios de incertidumbre, subrayando la necesidad de adoptar métodos más robustos y exhaustivos que garanticen la inclusión de todos los posibles valores de la función de transferencia dentro de las plantillas.

Además, se ha analizado y validado la eficacia de los métodos a priori y a posteriori en la construcción de plantillas, identificando sus respectivas ventajas. Esta comparación ha sido crucial para entender cómo cada enfoque contribuye a la robustez del diseño de sistemas de control, asegurando que las plantillas obtenidas sean tanto predictivas como validadas frente a las posibles variaciones del sistema. La aplicación del Teorema de mapeo en la obtención de la imagen en el plano complejo, a partir de los vértices de la hipercaja del espacio paramétrico, ha sido fundamental para asegurar que las plantillas reflejen con precisión las incertidumbres presentes.

Finalmente, la combinación del Teorema de mapeo con los métodos a priori y a posteriori representa un avance significativo en la obtención de plantillas robustas en funciones de transferencia con incertidumbre multilineal. Este logro es especialmente relevante para aplicaciones industriales, donde la capacidad de compensar la presencia de incertidumbres y perturbaciones es crítica para el éxito operativo y la seguridad.

## RECOMENDACIONES

A partir de los resultados y análisis presentados en esta tesis, se recomienda avanzar hacia la validación práctica de las plantillas desarrolladas. Esta validación podría realizarse mediante el diseño e implementación de un controlador basado en dichas plantillas, evaluando su efectividad y robustez en sistemas con incertidumbre multilineal. Dado el limitado número de estudios en esta área, especialmente en lo referente a funciones de transferencia con incertidumbre multilineal, esta validación no solo enriquecería la teoría existente, sino que también demostraría la aplicabilidad de las metodologías propuestas en contextos reales. Este paso experimental es fundamental para confirmar la viabilidad práctica de las plantillas y refinar el proceso de diseño de controladores robustos.

En aquellos casos en los que las plantillas obtenidas resulten excesivamente conservadoras, se sugiere estudiar la posibilidad de extender la técnica de división de dominios, tradicionalmente aplicada a polinomios, para su uso en funciones de transferencia. Esta adaptación podría permitir la identificación y eliminación de regiones en la plantilla que no contengan valores correspondientes a la función de transferencia, mejorando así tanto la precisión como la utilidad de las plantillas generadas.

Para futuras investigaciones, se recomienda seguir perfeccionando los métodos de construcción de plantillas, aprovechando el uso del Teorema de mapeo, con un enfoque especial en su integración con tecnologías y algoritmos emergentes. Un área de particular interés sería la mejora de la eficiencia computacional de estos métodos sin sacrificar la robustez del diseño, lo cual abriría nuevas oportunidades para su aplicación en sistemas de mayor complejidad y en sectores industriales que demandan altos niveles de precisión y confiabilidad.

## REFERENCIAS

- A. C. Bartlett, C. V. (1988). Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 61-71.
- Ackermann, J. (1993 ). *Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters*. Londres: Springer.
- Barmish, B. R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Nueva York: Macmillan.
- Bhattacharyya, S. (2017). Robust control under parametric uncertainty: An overview and recent results. *Annual Reviews in Control*.
- Chapman, S. J. (2005). *Electric Machinery Fundamentals*. Nueva York: McGraw-Hill.
- Desoer, L. A. (1963). *Linear System Theory: The State Space Approach*. McGraw-Hill.
- Doyle, K. Z. (1998). *Essentials of Robust Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Erik Coelingh, T. J. (1998). *Mechatronic Systems with Uncertain Physical Parameters*. *Mechatronics*.
- Fu, M. (1990). Computing the frequency response of linear systems with parametric perturbation. *Systems & Control Letters*.
- Garcia-Sanz, C. H. (2001). *Quantitative Feedback Theory: Fundamentals and Applications*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Garcia-Sanz, M. (2017). *Robust Control Engineering: Practical QFT Solutions*. Boca Raton: CRC Press.
- Guo, H. (2018). Robust QFT-Based Position Control of an Asymmetric Hydraulic Cylinder Electro-hydraulic Servo System. *International Journal of Robotics and Automation Technology*.
- Horowitz, I. (1993). *Quantitative Feedback Design Theory (QFT)*.
- J. Rico-Azagra, M. G.-M. (2018). QFT bounds for robust stability specification defined on the open-loop function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- J. Zhou, P. S. (2017). Large scale power system robust stability analysis based on value set approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 4012-4023.
- Jeong, K. S. (2017). QFT Based Controller Design of Thyristor-Controlled Phase Shifter for Power System Stability Enhancement. *International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES)*.

- Jisha Lakshmi Krishnankutty, A. A. (2023). Quantitative feedback theory based robust speed control of vector controlled induction motor. *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*, 121-130.
- Juan Jose Martin-Romero, M. G.-M.-S. (2007). Analytical formulation to compute QFT templates for plants with a high number of uncertain parameters. *2007 Conferencia Mediterránea de Control y Automatización*. Atenas, Grecia: IEEE.
- Kaixian Ba, Y. W. (2024). Force compensation control for electro-hydraulic servo system with pump-valve compound drive via QFT-DTOC. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*.
- Karamancioglu, G. D. (2018). An edge determination algorithm for exact computation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*.
- L.Kharitonov, V. (1978). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, 1483-1485.
- Martín-Romero, A. M.-R. (2007). QFT Templates for plants with a high number of uncertainty parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 754 - 758.
- Montserrat Gil-Martínez, M. G.-S.-R. (2009). Analytical formulation to compute QFT bounds: the envelope methods. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Postlethwaite, S. S. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons.
- Rounakul Islam Boby, K. A. (Octubre de 2019). *TELKOMNIKA*. Obtenido de TELKOMNIKA:  
<http://telkomnika.uad.ac.id/index.php/TELKOMNIKA/article/view/12810>
- S. P. Bhattacharyya, H. C. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.
- Safonov, A. S. (1986). A design algorithm for the robust synthesis of SISO feedback control systems using conformal maps and  $H_\infty$ -theory. *1986 American Control Conference*, 1234-1239.
- Xu, C. V.-L. (1989). When is the image of a multilinear function polytope? – a conjecture. *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Yun Cheng, Y. F. (2023). Design and parameter tuning of active disturbance rejection control for uncertain multivariable systems via quantitative feedback theory. *ISA Transactions*.

Yunlei Fan, Y. C. (2023). An active disturbance rejection control design for the distillation process with input saturation via quantitative feedback theory. *Journal of Process Control*.