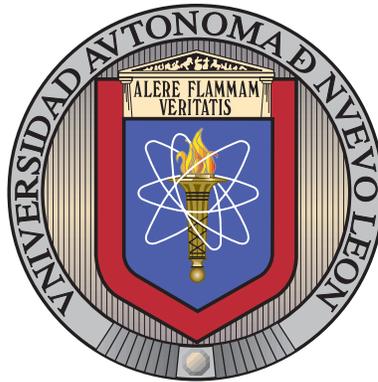


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SOLUCIONES ANALÍTICAS EN TEORÍA DE  
RETROALIMENTACIÓN CUANTITATIVA: APLICACIÓN A  
UN MOLINO DE LAMINACIÓN EN CALIENTE

POR

ÁLVARO ARMANDO DOMÍNGUEZ SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

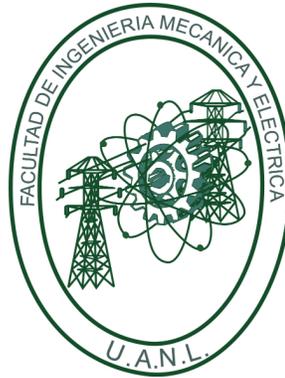
DOCTORADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

23 DE AGOSTO DE 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SOLUCIONES ANALÍTICAS EN TEORÍA DE  
RETROALIMENTACIÓN CUANTITATIVA: APLICACIÓN A  
UN MOLINO DE LAMINACIÓN EN CALIENTE

POR

ÁLVARO ARMANDO DOMÍNGUEZ SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTORADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

23 DE AGOSTO DE 2024

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Posgrado**

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis “Soluciones analíticas en teoría de retroalimentación cuantitativa: Aplicación a un molino de laminación en caliente”, realizada por el estudiante Álvaro Armando Domínguez Sánchez, con número de matrícula 1537607, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ingeniería Eléctrica.

**El Comité de Evaluación de Tesis**

Dr. Alberto Cavazos González  
Director

Dr. Manuel Antonio Andrade Soto  
Revisor

Dr. Marco Tulio Mata Jiménez  
Revisor

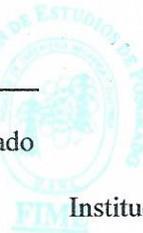
Dr. Gerardo Maximiliano Méndez  
Revisor

Dr. José Ángel Barrios Gómez  
Revisor

Dr. Javier González Garza  
Revisor

Vo.Bo.

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado



Institución 190001

Programa 514601

Acta Núm. 354

Ciudad Universitaria, a 23 de agosto de 2024.

*A mi familia y amigos por su apoyo incondicional.*

# Agradecimientos

A mi asesor de tesis Dr. Alberto Cavazos González.

A mis revisores.

A mis profesores de posgrado.

A mis compañeros de posgrado.

Al CONACYT y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por el apoyo para la realización de este trabajo de tesis.

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Álvaro Armando Domínguez Sánchez, Doctorado en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2024

## **Profesor asesor: Dr. Alberto Cavazos González**

En este trabajo se propone un procedimiento para el diseño de controladores robustos mediante técnicas analíticas usando teoría de retroalimentación cuantitativa (QFT, por sus siglas en inglés), dicho procedimiento puede ser aplicado a sistemas con incertidumbre paramétrica multilínea representados mediante subplantas con incertidumbre intervalo o afín. El procedimiento propuesto es implementado en dos ejemplos de aplicación, el primero es el control de velocidad en un motor de corriente continua y el segundo es el control para la salida de tensión de un molino de laminación en caliente MLC.

También, se presenta el modelo multivariable en el dominio de la frecuencia y en el espacio de estados para un MLC, mostrando la función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  representada mediante subplantas intervalo o afín, ya que se usa como un caso de estudio para el diseño de controladores QFT mediante técnicas analíticas.

Por otro lado, se presentan los conceptos de plantillas analíticas, cotas analíticas y se propone un procedimiento para el ajuste de plantillas analíticas en plantillas discretas convexas y no convexas.

Más aún, se propone aproximar a las plantillas abiertas descritas por un arco, con curvas de Bezier dada su simplicidad.

Asimismo, se presentan los procedimientos para operar plantillas analíticas, que en este trabajo se llevan a cabo usando las representaciones analíticas de la misma manera en que se operan los números complejos, ya que anteriormente se realizaban operaciones mediante puntos en el plano complejo de las plantillas discretas.

A su vez, se presentan los procedimientos para calcular cotas analíticas, las cuales se representan mediante series de Fourier y se ajustan para incluir completamente al conjunto de curvas que las forman, calculando cotas analíticas para las funciones sensibilidad  $S(s)$ , sensibilidad complementaria  $T(s)$  y seguimiento.

Finalmente se comparan los resultados obtenidos con la técnica analítica y con la técnica clásica QFT comúnmente usada.

# Índice General

<b>Resumen</b> . . . . .	VII
<b>Índice de Figuras</b> . . . . .	XI
<b>Índice de Tablas</b> . . . . .	XV
<b>Lista de Acrónimos</b> . . . . .	XVI
<b>Lista de Símbolos</b> . . . . .	XVII
<b>1. Introducción</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Hipótesis . . . . .	9
1.3. Objetivos . . . . .	9
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	10
1.5. Justificación . . . . .	10
1.6. Suposiciones y alcances . . . . .	10
1.7. Fundamentos de la técnica de control QFT . . . . .	11
1.7.1. Cálculo de cotas QFT . . . . .	13
1.8. Contenido de la tesis . . . . .	13
<b>2. Modelo matemático de un MLC</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.1.1. Molino de laminación en caliente . . . . .	17
2.1.2. Molino continuo . . . . .	18
2.1.3. Función de transferencia para la salida de tensión $\sigma_i$ . . . . .	21
2.2. Modelo del MLC representado en espacio de estados . . . . .	24

2.3. Resumen . . . . .	27
<b>3. Diseño de Controladores QFT usando Plantillas y Cotas Analíticas</b>	<b>28</b>
3.1. Introducción . . . . .	28
3.2. Plantillas y Cotas Analíticas . . . . .	29
3.2.1. Plantilla analítica . . . . .	29
3.2.2. Procedimiento para describir el contorno de la plantilla con una función analítica . . . . .	30
3.2.3. Ajuste de la plantilla analítica . . . . .	31
3.2.4. Ejemplo de ajuste en una plantilla analítica convexa . . . . .	33
3.2.5. Ejemplo de ajuste en una plantilla analítica no convexa . . . . .	37
3.2.6. Operaciones aritméticas entre plantillas analíticas . . . . .	39
3.2.7. Suma de Plantillas Analíticas . . . . .	40
3.2.8. Multiplicación de Plantillas Analíticas . . . . .	41
3.2.9. Cota analítica . . . . .	43
3.2.10. Cálculo de cotas analíticas . . . . .	44
3.2.11. Procedimiento de Diseño QFT usando Plantillas y Cotas Analíticas . . . . .	46
3.3. Resumen . . . . .	51
<b>4. Casos de Aplicación para el Diseño de Controladores QFT usando Plantillas y Cotas Analíticas</b>	<b>53</b>
4.1. Caso 1. Modelo de un Motor CD . . . . .	53
4.1.1. Cotas analíticas para el Motor de CD . . . . .	58
4.1.2. Diseño del control QFT usando plantillas y cotas analíticas para el Motor de CD	62
4.2. Caso 2. Modelo de un MLC para la salida de tensión $\sigma_i$ . . . . .	63
4.2.1. Cotas analíticas $S(s)$ y $T(s)$ para el MLC . . . . .	68
4.2.2. Conformación de lazo. . . . .	69
4.3. Conclusiones . . . . .	70
<b>Conclusiones</b>	<b>92</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	X
<b>Trabajo futuro</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>103</b>
A.1. Plantillas analíticas del MLC . . . . .	103
A.2. Cotas analíticas del MLC . . . . .	111

# Índice de figuras

1.1. Sistema de control clásico con dos grados de libertad . . . . .	11
2.1. Molino de laminación en caliente. . . . .	18
2.2. Diagrama esquemático de dos castillos contiguos del MLC. . . . .	20
2.3. Diagrama de entradas, salidas y perturbaciones en el MLC. . . . .	20
2.4. Modelo multivariable de dos castillos contiguos. . . . .	22
3.1. Ejemplo de una plantilla hexagonal con 720 muestras y aproximada con los primeros 7 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica $T^h(\varphi)$ no incluye completamente a la plantilla hexágono ${}^d T[k]$ , además se muestra una plantilla círculo $T^c(\varphi)$ con radio $\sqrt{2}$ como referencia. . . . .	34
3.2. Ejemplo de una plantilla hexagonal ajustada con 720 muestras y aproximada con los primeros 7 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica $T^h(\varphi)$ incluye completamente a la plantilla hexágono ${}^d T[k]$ , además se muestra una plantilla círculo $T^c(\varphi)$ con radio $\sqrt{2}$ como referencia. . . . .	34
3.3. Ajuste de la plantilla hexagono $T^h(\varphi)$ . . . . .	36
3.4. Plantilla para la salida de tensión $\sigma_i$ de un MLC en la frecuencia $45 \text{ rad/s}$ . Es una plantilla no convexa con 267 muestras y aproximada con los primeros 100 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica $T(\varphi)$ (línea de color negro) no incluye completamente a la plantilla discreta ${}^d T[k]$ (línea de color azul). . . . .	38

3.5. Plantilla para la salida de tensión  $\sigma_i$  de un MLC en la frecuencia  $45 \text{ rad/s}$ . Es una plantilla no convexa con 267 muestras y aproximada con los primeros 100 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica  $T(\varphi)$  (línea de color negro) está ajustada e incluye completamente a la plantilla discreta  ${}^d T[k]$  (línea de color azul). . . . . 38

3.6. Ajuste de la plantilla para la salida de tensión  $\sigma_i$  de un MLC en la frecuencia  $45 \text{ rad/s}$ . 52

4.1. Motor de CD controlado por armadura. . . . . 54

4.2. Diagrama de bloques del motor de CD controlado por armadura. . . . . 54

4.3. Plantilla  $P_1(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 57

4.4. Plantilla  $P_2(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 58

4.5. Plantilla  $P_3(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 59

4.6. Plantilla  $P_4(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 60

4.7. Plantilla  $P(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 71

4.8. Plantillas analíticas ajustadas para el motor de CD. . . . . 72

4.9. Cota analítica ajustada  $T(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 73

4.10. Cota analítica ajustada  $S(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 74

4.11. Cota analítica ajustada de seguimiento en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 75

4.12. Límite global de las Cotas analíticas ajustadas  $T(s)$ ,  $S(s)$  y seguimiento en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC. . . . . 76

4.13. Cotas analíticas ajustadas  $S(s)$ ,  $T(s)$ , seguimiento y Límites globales de cada frecuencia seleccionada para el motor de DC. . . . . 77

4.14. Conformación de lazo para el motor de CD. . . . . 78

4.15. Validación de las Cotas analíticas ajustadas  $T(s)$ ,  $S(s)$  y seguimiento para el motor de CD . . . . . 79

4.16. Plantilla analítica  $F_4(s)$  para  $\omega = 68 \text{ rad/s}$ . . . . . 80

4.17. Plantilla analítica  $F_8(s)$  para  $\omega = 68 \text{ rad/s}$ . . . . . 81

4.18. Plantilla analítica  $P_3(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$  para el MLC . . . . . 82

4.19. Plantillas analíticas ajustadas representadas en la carta de Nichols para $P_3(s)$ en frecuencias $\omega = 2, \omega = 36, \omega = 45, \omega = 68, \omega = 105, \omega = 250$ . . . . .	83
4.20. Cota analítica $S(s)$ para $P_3(s)$ en $\omega = 68 \text{ rad/s}$ . . . . .	84
4.21. Cota analítica $T(s)$ para $P_3(s)$ en $\omega = 68 \text{ rad/s}$ . . . . .	85
4.22. Conformación de lazo para $P_3(s)$ . . . . .	86
4.23. Validación de las cotas analíticas $S(s)$ y $T(s)$ para la salida de tensión $\sigma_i$ en el MLC. . . . .	87
4.24. Comparación de los resultados obtenidos para la cota $S(s)$ usando un procedimiento analítico (línea color negro) y un procedimiento clásico (línea color rojo) para la salida de tensión $\sigma_i$ en el MLC. . . . .	88
4.25. Comparación de los resultados obtenidos para la cota $T(s)$ usando un procedimiento analítico (línea color negro) y un procedimiento clásico (línea color rojo) para la salida de tensión $\sigma_i$ en el MLC. . . . .	89
A.1. Plantilla analítica ajustada $P_3(s)$ en la frecuencia $\omega = 2 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	104
A.2. Plantilla analítica ajustada $P_3(s)$ en la frecuencia $\omega = 36 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	105
A.3. Plantilla analítica ajustada $P_3(s)$ en la frecuencia $\omega = 45 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	106
A.4. Plantilla analítica ajustada $P_3(s)$ en la frecuencia $\omega = 68 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	107
A.5. Plantilla analítica ajustada $P_3(s)$ en la frecuencia $\omega = 105 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	108
A.6. Plantilla analítica ajustada $P_3(s)$ en la frecuencia $\omega = 250 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	109
A.7. Plantillas analíticas ajustadas $P_3(s)$ en las frecuencias $\omega = [2, 36, 45, 68, 105, 250] \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	110
A.8. Cota analítica $S(s)$ en la frecuencia $\omega = 2 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	111
A.9. Cota analítica ajustada $S(s)$ en la frecuencia $\omega = 36 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	112
A.10. Cota analítica ajustada $S(s)$ en la frecuencia $\omega = 45 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	113
A.11. Cota analítica ajustada $S(s)$ en la frecuencia $\omega = 68 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	114
A.12. Cota analítica ajustada $S(s)$ en frecuencia la $\omega = 105 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	115
A.13. Cota analítica ajustada $S(s)$ en la frecuencia $\omega = 250 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	116
A.14. Cota analítica ajustada $T(s)$ en la frecuencia $\omega = 2 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	117
A.15. Cota analítica ajustada $T(s)$ en la frecuencia $\omega = 36 \text{ rad/s}$ para el MLC . . . . .	118

A.16.Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 45 \text{ rad/s}$  para el MLC . . . . . 119

A.17.Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 68 \text{ rad/s}$  para el MLC . . . . . 120

A.18.Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 105 \text{ rad/s}$  para el MLC . . . . . 121

A.19.Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 250 \text{ rad/s}$  para el MLC . . . . . 122

A.20.Unión de cotas analíticas  $S(s)$  y  $T(s)$  para el MLC . . . . . 123

A.21.Unión de cotas analíticas  $S(s)$  y  $T(s)$  para el MLC . . . . . 124

A.22.Límites globales para el MLC . . . . . 125

# Índice de tablas

- 2.1. Variables de entrada, salida y perturbaciones en el MLC. . . . . 21
- 2.2. Incertidumbre considerada en los parámetros del modelo. . . . . 21

# Lista de Acrónimos

HSM	Hot Strip Mill (Molino de Laminación en Caliente)
QFT	Quantitative Feedback Theory (Teoría de Retroalimentación Cuantitativa)
MTF	Matrix Transfer Function (Matriz Función de Transferencia)
P	Proporcional
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
MPC	Model Predictive Control (Control Predictivo Basado en Modelo)
LMI	Linear Matrix Inequalities (Desigualdades de Matrices Lineales)
MIMO	Multiple Input Multiple Output (Múltiples Entradas Múltiples Salidas)
FM	Finishing Mill (Molino Continuo)

# Lista de Símbolos

$T_{\omega_i}$	Plantilla analítica
${}^d T_{\omega_i}$	Plantilla discreta
$h$	Espesor de la cinta de acero
$\theta$	Posición angular del formador de onda
$\sigma$	Tensión de la cinta de acero
$H_i$	Espesor de entrada del castillo $i$
$h_i$	Espesor de salida del castillo $i$
$\sigma_{iref}$	Valor nominal de tensión
$h_{i+1}$	Espesor de salida del castillo $i + 1$
$\theta_i$	Posición angular del looper entre los castillos $i$ e $i + 1$
$\sigma_i$	Tensión de la cinta de acero entre los castillos $i$ e $i + 1$
$\sigma_{i-1}$	Tensión del castillo $i - 1$
$\sigma_{i+1}$	Tensión del castillo $i + 1$
$S_{ri}$	Espacio entre los rodillos del castillo $i$
$S_{ri+1}$	Espacio ente los rodillos del castillo $i + 1$
$V_{ri}$	Velocidad de los rodillos de trabajo del castillo $i$
$\tau_{ri}$	Par del formador de onda $i$
$V_{i+1}$	Velocidad del rodillo de trabajo del castillo $i + 1$
$P_i$	Fuerza de rolado en el castillo $i$
$k_x^y$	Ganancia estática
$J_i$	Inercia del looper

$E_i$	Modulo de Young de la cinta
$L_i$	Distancia entre los rodillos de apoyo
$D_i$	Amortiguamiento
$\frac{1}{M_i}$	Constante en el modulo del molino
$\frac{1}{M_{i+1}}$	Constante en el modulo del molino
$F(s)$	Función de transferencia de un prefiltro
$G(s)$	Función de transferencia del controlador
$P(s)$	Función de transferencia de la planta con incertidumbre.
$y(s)$	Señal de salida de la planta
$u(s)$	Señal de control
$e(s)$	Señal de error
$r(s)$	Señal de referencia
$n(s)$	Ruido en el sensor
$d(s)$	Perturbación a la salida de la planta
$d_1(s)$	Perturbación a la entrada de la planta
$R_a$	Resistencia de armadura
$L_a$	Inductancia de armadura
$J$	Inercia
$B$	Coficiente de amortiguamiento
$k_a$	Constante de proporcionalidad
$k_b$	Constante de proporcionalidad

# Capítulo 1

## Introducción

El problema de diseñar controladores para obtener precisión en un sistema con presencia de incertidumbres y perturbaciones, es un problema clásico.

En la literatura se han propuesto técnicas de control que pueden reducir el impacto de las interacciones en un sistema (control multivariable) y/o que pueden mantener estabilidad en presencia de incertidumbres o perturbaciones (control robusto). Algunas de estas técnicas son: La técnica basada en la minimización de la norma  $H_\infty$  [1–6], Teoría de Retroalimentación Cuantitativa (QFT, por sus siglas en inglés “Quantitative Feedback Theory”) [7–13], Desigualdades de Matrices Lineales (LMI, por sus siglas en inglés “Linear Matrix Inequalities”) [14–18] y Control Predictivo Basado en Modelo (MPC, por sus siglas en inglés “Model Based Predictive Control”) [19–23], esta última no es clasificada en la literatura como una técnica de control robusto propiamente dicho, sin embargo, ha sido usada con éxito para reducir el impacto de las incertidumbres aplicando conceptos propios del control robusto.

La QFT es una de las técnicas de control robusto que actualmente cuenta con presencia relevante en la literatura [24–27]. Además, resulta ser eficiente y práctica en el diseño de controladores robustos, por lo que se han desarrollado diferentes metodologías para la obtención de plantillas y cotas [28–30]. Las técnicas analíticas proponen el uso de plantillas y cotas continuas, con lo cual, se puede mejorar la sintonización de los controladores, así como la posibilidad de incluir el peor caso, sin embargo, este problema aún no se resuelve para incertidumbre paramétrica multilineal.

En este trabajo se presenta un procedimiento para el diseño de controladores robustos me-

dian­te técnicas analíticas usando QFT, dicho procedimiento es implementado en dos casos de estudio, el primero es un control de velocidad en un motor de corriente continua y el segundo es un control para la salida de tensión de un molino de laminación en caliente MLC.

El procedimiento propuesto en este trabajo utiliza series de Fourier para aproximar una función discreta mediante una función continua y se puede aplicar en sistemas con polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal que se pueden representar mediante subsistemas con polinomios con incertidumbre paramétrica intervalo o afín, ya que el modelo de incertidumbre para polinomios intervalo o afín se puede representar con el Teorema del borde [31–36].

Al usar series de Fourier para realizar la aproximación, se obtiene una función continua que es derivable y suave, por lo que se puede representar una plantilla analítica solamente con una ecuación, sin embargo es probable que no se incluya completamente a la incertidumbre por lo que se tiene que realizar un procedimiento de ajuste de plantillas, donde se incluya al peor caso en el diseño del controlador, aunque no se pueda evitar que las plantillas sean conservadoras.

La representación de plantillas con series de Fourier permite que se puedan realizar operaciones aritméticas entre plantillas, de la misma manera en que se operan los números complejos, esto es debido a que las plantillas quedan representadas por una parte real y una parte imaginaria, entonces el procedimiento propuesto en este trabajo, está basado en la idea de obtener las plantillas que corresponden a las subplantas (con incertidumbre intervalo o afín), las cuales deben operarse para obtener como resultado la plantilla de la planta con incertidumbre multilineal.

Adicionalmente, las cotas también pueden ser representadas de manera analítica, al aproximar la función discreta que corresponde a la cota en una función continua mediante series de Fourier, dicho procedimiento se describe detalladamente en el Capítulo 3.

## 1.1. Antecedentes

En la actualidad la técnica de control robusto QFT es una técnica de diseño que se sigue utilizando por ser práctica, transparente y que además obtiene resultados satisfactorios.

En la literatura se han presentado trabajos que utilizan la técnica QFT para diseñar controladores robustos en diferentes aplicaciones, algunas de ellas son las siguientes:

En (Han, 2017) [37] se presenta el diseño de un control automatizado basado en un algoritmo genético y QFT, para mejorar la estabilidad de un sistema de potencia con un desfasador controlado por tiristores en el que se comparan los resultados para el desempeño robusto con los resultados de controladores convencionales SA-PSS (Simulated Annealing - Power System Stabilizer) y SA-TCPS (Simulated Annealing Thyristor Controlled Phase Shifter), obteniendo un mejor perfil de voltaje y características dinámicas con el control robusto QFT.

En (Cai, 2017) [38] se diseña un control diagonal secuencial multivariable QFT en un sistema hidráulico de giro híbrido para una excavadora. Los resultados se comparan con un control PI, obteniéndose mejores resultados con el control MIMO QFT en presencia de incertidumbre paramétrica y perturbaciones en la salida de la planta.

En (Gudimindla, 2018) [39] se diseña un controlador QFT automatizado para un sistema de potencia fotovoltaico, que minimiza una función de costo mediante la aplicación de un algoritmo genético, de tal forma que se satisfacen todas las especificaciones de desempeño en el dominio de la frecuencia y mediante simulaciones de Matlab se compara el desempeño con un controlador de parametrización afín, mostrando la eficacia del controlador QFT.

En (Guo, 2018) [40] se presenta el diseño de un controlador de posición robusto usando la técnica QFT para un servo sistema electro-hidráulico de cilindro hidráulico asimétrico basado en un modelo lineal con parámetros inciertos y perturbaciones externas, obteniendo resultados satisfactorios.

En (Hoyo, 2019) [41] se presenta un control basado en la combinación de las técnicas de retroalimentación lineal y QFT para regular la temperatura diurna en un invernadero. Se cancelan las no linealidades del modelo y las discrepancias con el sistema real se modelan como parámetros inciertos.

En (Boby, 2019) [42] se propone un controlador híbrido que combina un control adaptativo y un control QFT para sistemas de vehículos aéreos no tripulados de tres grados de libertad, se evalúa el desempeño del controlador en seguimiento y se usa la técnica de minimización de errores en cada ángulo para obtener el resultado deseado.

En (Gharib, 2019) [43] se presenta un algoritmo que combina las técnicas de lógica difusa y QFT para diseñar un controlador para sistemas inciertos MIMO. La técnica se aplica en un robot

manipulador de dos grados de libertad en el que se diseña un control QFT para cada eslabón con especificaciones de seguimiento y rechazo de perturbaciones. Una vez que fue diseñado el control QFT, después se diseña un controlador difuso PD de dos niveles para eliminar los posibles errores del control QFT y los efectos de acoplamiento del sistema MIMO. Finalmente se optimiza el controlador difuso usando un algoritmo genético.

En (Čápková, 2020) [44] se presenta el diseño de un control robusto mediante QFT para un motor de corriente directa con incertidumbre paramétrica. Los resultados se verificaron experimentalmente con un motor de laboratorio comprobando el rechazo de perturbaciones e incertidumbre.

En (Honari, 2020) [45] se presenta el diseño de un control robusto mediante QFT para un sistema MIMO que consta de dos rotores que se asemejan a un helicóptero, este sistema también es conocido como motor gemelo (Twin Rotor) en el que la parte no estacionaria del modelo puede girar en dos ejes perpendiculares para producir las salidas de azimuth y elevación del sistema. Estas salidas se ven afectadas por la velocidad de los rotores, con lo cual existen efectos de acoplamiento, dinámicas no lineales e incertidumbre. El sistema se linealiza en un punto de operación y el diseño del control QFT se realiza de la manera clásica usando plantillas discretas y por lo tanto no se asegura que se incluye el peor caso en el diseño.

En (Cheng, 2022) [13] se diseña un control robusto mediante QFT y un control predictivo generalizado con rechazo de perturbaciones activas (ADRC-GPC) para un vehículo aéreo no manipulado quadrotor con incertidumbres y perturbaciones externas. Los resultados se muestran mediante simulaciones para el desempeño robusto, el desempeño de la trayectoria de seguimiento, y el rechazo de perturbaciones.

En (Abadi, 2022) [12] se diseña un control robusto mediante QFT para un sistema de transporte con incertidumbre paramétrica en presencia de ruido, perturbaciones y ciberataques, obteniendo una respuesta precisa para la trayectoria de seguimiento del curso deseado.

En (Krishnankutty, 2023) [26] se presenta un control de velocidad robusto para un motor de inducción en presencia de incertidumbres y variación en los parámetros. Además se menciona que se incluye el peor caso de las incertidumbres y todas las posibles variaciones de los parámetros, sin embargo el diseño del control robusto mediante QFT se realiza de la manera clásica usando

plantillas discretas, con lo cual en el diseño no se incluyen todas las posibles incertidumbres ni todas las posibles variaciones de los parámetros.

En la literatura también se han presentado publicaciones que estudian la sintonización del controlador QFT, que generalmente se realiza mediante la técnica conocida como “loop shaping” o “conformación de lazo”, que consiste en moldear la forma del sistema de lazo abierto a través del controlador hasta satisfacer todas las condiciones del sistema de lazo cerrado, por lo que se han propuesto diferentes maneras para realizar este proceso de sintonización del controlador, de tal forma que el procedimiento sea óptimo y en algunas ocasiones sea automático. A continuación se describen algunas de ellas.

En (Makwana, 2015) [46] se presenta el diseño de un control robusto automático QFT, donde la sintonización del control se plantea como un problema de aproximación lineal por partes basado en un problema de programación lineal, encontrando una solución con el optimizador GUROBI que a través de aproximaciones converge a un óptimo global.

En (Purohit, 2015) [47] se presenta el diseño de un control robusto QFT, que satisface todas las especificaciones robustas al convertir la conformación de lazo en un problema de optimización de intervalo global, logrando automatizar el procedimiento de conformación de lazo.

En (Mercader, 2016) [48] se presenta el diseño de un control robusto PID basado en QFT, usando un criterio de optimización, el cual consiste en un procedimiento llamado concavo-convexo que es un método iterativo que describe las restricciones como funciones convexas, sin embargo se necesitan condiciones iniciales y no se garantiza la convergencia a un mínimo global. Las incertidumbres se pueden modelar como plantillas de polígonos simples que encierran completamente al conjunto de plantas. En este procedimiento no se necesita calcular las cotas en el plano de Nichols, ya que se utiliza el método de síntesis, que se puede aplicar a cualquier estructura de controlador donde los parámetros de la función de transferencia depende de manera afín, fijando los polos del controlador y obteniendo los ceros del controlador con el método de síntesis.

En (Purohit, 2017) [49] se presenta una metodología de diseño robusto basado en programación no lineal para controladores QFT en sistemas inciertos lineales invariantes en el tiempo. El control se diseña como un problema de optimización con restricciones, calculando al controlador y prefiltro con una solución estándar de programación no lineal para maximizar el desempeño de

la función objetivo, usando muestras de las plantillas y satisfaciendo especificaciones de estabilidad robusta y seguimiento.

En (Gudimindla, 2020) [50] se presenta el diseño de un controlador robusto para un convertidor electrónico de potencia, considerando incertidumbre en los parámetros del sistema. El controlador se diseña minimizando una función objetivo usando un algoritmo genético en el contexto de QFT, el cual en condiciones de carga completa alcanza un desempeño satisfactorio con un factor de potencia unitario y error de fase cero, además se evalúa la robustez del controlador para diferentes condiciones inciertas, con lo cual se demuestra que el controlador alcanzó el desempeño deseado en presencia de incertidumbres y variaciones de carga.

En (Katal, 2017) [51] se presenta un controlador robusto para un convertidor Buck (CD-CD), el cual debido a la operación de conmutación es no lineal. El modelo tiene parámetros inciertos debido a la operación continua del convertidor, y el controlador robusto QFT se diseña como un problema de optimización multi objetivo que se soluciona con un algoritmo genético. Los resultados obtenidos se comparan con los de un control clásico PID, sin embargo, el controlador robusto QFT obtiene mejores resultados ya que elimina el efecto de las incertidumbres paramétricas y ofrece un menor rizado en la corriente y voltaje, además el proceso de diseño ofrece un enfoque sin plantillas ni cotas para calcular al prefiltro y controlador QFT en un solo paso.

Por otra parte, algunas publicaciones se han enfocado en el cálculo de plantillas y cotas debido a que son de importancia fundamental en el procedimiento de la técnica QFT, ya que de estas depende la sintonización del controlador.

En (Rubin, 2019) [52] se presenta una modificación al diseño secuencial QFT para sistemas MIMO al agregar una etapa de rediseño que evita el sobredimensionamiento en el cálculo de cotas, específicamente en el rechazo de perturbaciones a la salida de la planta, donde se hace un ajuste al controlador MIMO QFT. El sobredimensionamiento puede existir debido a que la especificación se satisface en altas frecuencias, y es en estas frecuencias donde la magnitud para el rechazo de perturbaciones disminuye rápido, causando que el cálculo en el primer paso de diseño sea más estricto ya que se considera el peor caso, que es un caso que no puede suceder, por lo que en la etapa de rediseño se propone reducirlo. Además la perturbación equivalente es tratada como una planta equivalente no correlacionada, lo cual no es verdadero, por lo que se propone una etapa de

rediseño al control secuencial QFT.

En (Rico, 2018) [30] se presenta una metodología para calcular las cotas de estabilidad robusta en QFT, el algoritmo necesita pocas operaciones aritméticas y la estabilidad se define directamente en el sistema de lazo abierto, ya que las especificaciones de estabilidad en QFT clásico están definidas como restricciones de la función magnitud de lazo cerrado, por lo que en el algoritmo de este trabajo, se definen márgenes superior e inferior para la ganancia y fase, calculando la distancia requerida de la respuesta en frecuencia de lazo abierto al punto crítico de estabilidad, permitiendo calcular cotas de estabilidad más eficientes que en el método tradicional.

También en algunas publicaciones se estudia el diseño de controladores robustos dependiendo del tipo de incertidumbre y perturbaciones consideradas en el sistema, ya que actualmente solo se encuentra solución para la incertidumbre intervalo y afín, en cambio la incertidumbre multilínea y polinómica se siguen estudiando, así como las perturbaciones.

En (Fu, 1990) [31] se muestra que para funciones de transferencia con polinomios afín, el contorno de la plantilla analítica  $T_{\omega_i}$  es mapeado a partir de los bordes de la caja de parámetros  $Q$ , además se muestra que la plantilla analítica que corresponde a cada borde de  $Q$  es un segmento de línea o un segmento de arco, sin embargo se debe notar que algunos bordes de  $Q$  son mapeadas al interior de la plantilla analítica.

En (García S., 2007) [28] se muestra que a partir del contorno discreto de la plantilla  $^d T_{\omega_i}$  se puede obtener el contorno de la plantilla analítica  $T_{\omega_i}$  usando series de Fourier, la ventaja de esta técnica es que puede ser aplicada a plantas con un alto número de parámetros inciertos, además de obtener una plantilla de contorno diferenciable con curvas suaves, es probable que no se considere a la incertidumbre completa, ya que la aproximación por series de Fourier suaviza el contorno, con lo cual no se puede asegurar que se incluye el peor caso en el diseño del controlador.

En (Bhattacharyya, 2017) [53] se presenta una descripción general del control robusto con incertidumbre paramétrica, analizando el Teorema del borde, el Teorema de Kharitonov y temas relacionados como el diseño y síntesis de teoría paramétrica.

En (G. Dindis, 2018) [29] se muestra que en sistemas lineales con polinomios intervalo, se pueden usar curvas cúbicas de Bezier para determinar el contorno analítico de una plantilla. Además, se eliminan los puntos interiores de la plantilla que no se necesitan para calcular las cotas.

En (Mihalescu, 2018) [54] se presenta un método para la sintonización de controladores PID robustos, el cual se obtiene a partir del análisis de un caso especial multilíneo que resulta de la multiplicación de dos polinomios intervalo, al que se le llama sistema multilíneo intervalo con parámetros inciertos, y se llega a la conclusión de que el espacio de parámetros de un sistema con incertidumbre multilínea se puede usar como un método de diseño para obtener el conjunto preciso de controladores PID estabilizantes para la familia de polinomios completa.

En (Schauss, 2018) [55] se presenta un análisis de estabilidad para sistemas LTI con retardos e incertidumbre paramétrica, el cual se basa en modelos de Taylor y polinomios de Bernstein, determinando la estabilidad por regiones en el espacio de parámetros, lo que permite realizar diseños de controladores robustos. El método no es conservativo y debido al modelo de Taylor se asegura contener el resultado exacto, sin embargo debido al tiempo computacional que requiere este algoritmo solo se emplea en sistemas con un número moderado de parámetros inciertos.

En (An, 2019) [56] se presenta un método para encontrar el área en el espacio de los parámetros inciertos de un sistema de control con incertidumbre paramétrica, el cual se basa en un algoritmo para determinar un polinomio característico con coeficientes intervalo que establecen las condiciones suficientes para estabilidad robusta.

En (Gayvoronskiy, 2019) [57] se presenta una metodología para representar sistemas con incertidumbre afín mediante polinomios de coeficientes intervalo, además se menciona que reducir los coeficientes del polinomio característico a una representación con coeficientes intervalo produce una solución conservativa, por lo que se propone que no se necesita incluir todas las orillas y vértices de la caja de parámetros como se menciona en el Teorema del borde, y solamente se necesita seguir una trayectoria particular de vértice-orilla.

En (Zamora, 2021) [58] se propone un criterio que permite seleccionar un familia de controladores robustos estabilizantes para algunas clases de sistemas con incertidumbre intervalo y retardos de tiempo, los cuales se representan mediante plantillas y se usan polinomios de Kharitonov para establecer las condiciones suficientes que garantizan estabilidad robusta.

## 1.2. Hipótesis

En la técnica clásica de QFT se utilizan plantillas formadas por un número finito de posibles combinaciones de los parámetros, sin embargo, el intervalo de cada parámetro es continuo y se tendrían que realizar combinaciones infinitas, lo cual no es posible, y como consecuencia no se puede asegurar que se incluye al peor caso en el diseño, entonces utilizando técnicas analíticas se podría incluir completamente a la incertidumbre paramétrica, al menos para sistemas con polinomios multilineales que puedan ser representados por subplantas intervalo o afín.

## 1.3. Objetivos

- Objetivo General.

Proponer representaciones simbólicas para la incertidumbre paramétrica en el dominio de la frecuencia para sistemas con incertidumbre multilineal, de tal forma que se garantice estabilidad para el peor caso mediante la técnica QFT.

- Objetivos Específicos.

1. Diseñar y evaluar controladores robustos mediante la técnica de QFT para casos de estudio en los que el modelo del sistema incluya polinomios multilineales, usando plantillas analíticas garantizando estabilidad para el peor caso.
2. Proponer procedimientos para:
  - a) Obtener plantillas analíticas para incertidumbre paramétrica, particularmente para incertidumbre paramétrica multilineal.
  - b) Formular cotas analíticas.
  - c) Diseñar un control robusto mediante la técnica QFT haciendo uso de plantillas y cotas analíticas.
3. Evaluación de las plantillas analíticas y compararlas con el método de malla.

## 1.4. Planteamiento del problema

Actualmente en el diseño de controladores robustos mediante la técnica QFT no se asegura que se incluya completamente a la incertidumbre de los parámetros, ni se asegura que esté incluido al peor caso en el diseño, por lo que en este trabajo se propone utilizar técnicas analíticas para representar plantillas que incluyan el peor caso en el diseño de controladores robustos para sistemas con incertidumbre paramétrica multilineal en el que el modelo se puede representar mediante subplantas con polinomios con incertidumbre intervalo o afín.

## 1.5. Justificación

Como se vió en la revisión bibliográfica anterior, la técnica QFT es ampliamente usada en la actualidad, por esta razón se torna importante el estudio de esta técnica, enfocada tanto a mejorar el desempeño de los controladores diseñados, como a mejorar la eficiencia del procedimiento del mismo diseño.

En el diseño de controladores mediante QFT con técnicas analíticas, las plantillas se pueden representar analíticamente de manera sencilla, ya que es suficiente el uso de una sola ecuación, por lo que se pueden realizar operaciones aritméticas entre plantillas. Además, las plantillas analíticas pueden incluir por completo a las plantillas suficientemente densas obtenidas con la técnica de malla, pero con la ventaja de que requieren menor esfuerzo computacional para calcularlas y operarlas. Respecto a las cotas, estas también se pueden representar de manera analítica, por lo que se tendrían ventajas similares, quedando también representadas por una única ecuación y se puede requerir menos esfuerzo computacional para calcularlas, con lo cual se podría realizar un procedimiento de diseño de controladores robustos completamente analítico.

## 1.6. Suposiciones y alcances

Las suposiciones y alcances consideradas en esta tesis son:

- Los parámetros se considerarán inciertos e invariables en el tiempo.

- El comportamiento dinámico del molino puede aproximarse por un modelo dinámico linealizado alrededor de un punto de operación.
- Una planta con incertidumbre paramétrica multilineal puede ser representada por subplantas con incertidumbre paramétrica intervalo o afín.
- El retardo entre  $h_i$  y  $H_{i+1}$  puede aproximarse por un sistema de primer orden.
- Las perturbaciones pueden ser representadas en el dominio de la frecuencia y son predominantemente frecuencias bajas.
- Se considerarán controladores lineales invariantes en el tiempo capaces de mantener estabilidad en presencia de incertidumbre paramétrica.
- La aplicación al MLC se centrará en los castillos 3 y 4 para el producto más comúnmente laminado (acero AIST 1006).

## 1.7. Fundamentos de la técnica de control QFT

El diagrama de bloques para un sistema de lazo cerrado clásico con dos grados de libertad se muestra en la Figura 1.1, en el que se incluyen a la función de transferencia de un prefiltro  $F(s)$ , a la función de transferencia del controlador  $G(s)$  y a la función de transferencia de la planta  $P(s)$  con incertidumbre. La señal de salida de la planta es  $y(s)$ , la señal de control es  $u(s)$ , la señal de error es  $e(s)$  y la señal de referencia es  $r(s)$ . En lo que respecta a otras señales externas,  $n(s)$  es el ruido en el sensor,  $d(s)$  es la perturbación a la salida de la planta y  $d_1(s)$  es la perturbación a la entrada de la planta.

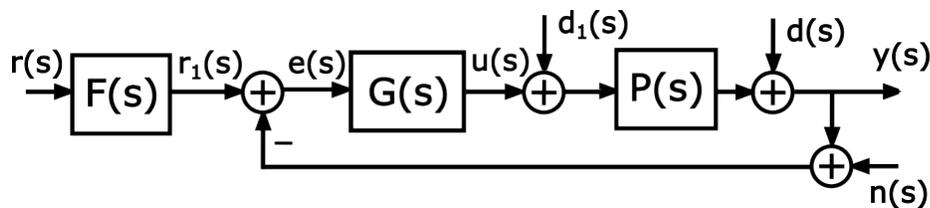


Figura 1.1: Sistema de control clásico con dos grados de libertad

En el diagrama de bloques de la Figura 1.1, se pueden obtener diferentes relaciones entre las diferentes señales, para definir especificaciones en el dominio de la frecuencia como se muestra a continuación:

- Rechazo de perturbaciones a la salida de la planta o también llamada función de sensibilidad  $S(s)$ .

$$\left| \frac{y}{d} \right| = \left| \frac{1}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_s \quad (1.7.1)$$

- Rechazo de perturbaciones a la entrada de la planta o también llamada función de sensibilidad a la entrada de la planta  $S_I(s)$ .

$$\left| \frac{y}{d_1} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_p \quad (1.7.2)$$

- Rechazo al ruido o también llamada función de sensibilidad complementaria  $T(s)$ .

$$\left| \frac{y}{n} \right| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_n \quad (1.7.3)$$

- Esfuerzo de control o también llamada especificación  $KS(s)$ .

$$\left| \frac{u}{n} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_c \quad (1.7.4)$$

- Especificación de seguimiento o también llamada en inglés Tracking.

$$\delta_{lo} < \left| \frac{y}{r} \right| = \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{up} \quad (1.7.5)$$

Las incertidumbres se modelan en frecuencia mediante plantillas, a las cuales se les realizan corrimientos horizontales y verticales sobre la carta de Nichols hasta cumplir con alguna especificación (círculos M). Los controladores se diseñan agregando polos y ceros sobre la planta nominal hasta satisfacer todas las especificaciones, a este procedimiento también se le llama “loop shaping” o “conformación de lazo”.

### 1.7.1. Cálculo de cotas QFT

Cada planta de la plantilla en la frecuencia  $\omega_i$ , dada por una combinación de parámetros inciertos, se puede representar en forma polar  $P(j\omega) = pe^{j\theta}$ , y de la misma manera el controlador se puede representar como  $G(j\omega) = ge^{j\phi}$ . Estas expresiones se pueden sustituir en cada una de las especificaciones de la sección anterior, de tal forma que para la especificación de sensibilidad  $S(s)$ , resulta lo siguiente:

$$\left| \frac{1}{1 + gpe^{j(\theta+\phi)}} \right| \leq \delta \quad (1.7.6)$$

elevando ambos lados de la ecuación al cuadrado se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{g^2 p^2 + 2gp \cos(\theta + \phi) + 1} \leq \delta^2(\omega) \quad (1.7.7)$$

y despejando se obtiene la siguiente desigualdad cuadrática:

$$g^2 p^2 + 2gp \cos(\theta + \phi) + 1 - \frac{1}{\delta^2(\omega)} \geq 0 \quad (1.7.8)$$

donde el parámetro desconocido es:  $ge^{j\phi}$ . El cual se puede solucionar mediante un algoritmo resultando lo que se conoce como cota. Se puede realizar un procedimiento similar al anterior para obtener las cotas para otras especificaciones (Yaniv, 1999) [59], (Sidi, 2001) [60].

## 1.8. Contenido de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se describe el proceso de laminación en caliente y se presentan los modelos matemáticos multivariados representados en el espacio de estados y en matriz función de transferencia MFT.

En el Capítulo 3 se presenta el concepto de plantilla analítica, cota analítica, y se propone un procedimiento para el diseño de controladores robustos mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas.

En el Capítulo 4 se desarrollan dos casos de estudio. El primero es el modelo de un motor de corriente directa y el segundo es el modelo del MLC para la salida de tensión. En ambos casos se aplica el procedimiento del diseño de controladores robustos mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y trabajos futuros. Además en el Apéndice I se presentan algunas de las figuras que se obtienen en el procedimiento del cálculo de las plantillas y cotas analíticas del MLC para diferentes frecuencias.

# Capítulo 2

## Modelo matemático de un MLC

En este capítulo se presenta el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un molino de laminación en caliente MLC, el cual es un sistema multivariable representado en el espacio de estados y en matriz función de transferencia MFT, este modelo es utilizado en el Capítulo 4 para diseñar un controlador robusto.

### 2.1. Introducción

Actualmente la producción de acero es muy importante debido a sus variadas aplicaciones, siendo de principal atención aquellas que requieren un perfil plano, por lo que el proceso de laminación en caliente es muy importante en la industria.

Un molino de laminación en caliente MLC (HSM, por sus siglas en inglés “Hot Strip Mill”) consta de seis o siete castillos que se encargan de producir un rollo de lámina de acero, en el que los parámetros más importantes son el espesor de la lámina y la temperatura de acabado, ya que de eso dependen sus propiedades mecánicas (Roberts, 1983) [61], (Ginzburg, 1993) [62].

Entre los castillos del molino de laminación en caliente, se encuentra un dispositivo llamado “looper” o “formador de onda” que se encarga de aplicar tensión a la cinta de acero, por lo tanto, la posición angular del looper y la tensión de la cinta están involucradas en el espesor y velocidad de la cinta, las cuales impactan en la temperatura de acabado.

Un molino de laminación en caliente, puede ser considerado como un sistema multivariable

generalmente linealizado en un punto de operación, en el que se incluyen dos castillos contiguos con cuatro variables de entrada y cuatro variables de salida, donde las variables de entrada son:  $S_{ri}$  espacio entre rodillos del castillo  $i$ ,  $S_{ri+1}$  espacio entre rodillos del castillo  $i + 1$ ,  $\tau_{ri}$  par del formador de onda  $i$ ,  $V_{ri}$  velocidad de los rodillos de trabajo del castillo  $i$ , y las variables de salida son:  $h_i$  espesor del castillo  $i$  de salida,  $h_{i+1}$  espesor del castillo  $i + 1$  de salida,  $\sigma_i$  tensión de la cinta entre castillos,  $\theta_i$  posición angular del looper. Además se consideran como señales de perturbación:  $H_i$  espesor de entrada del castillo  $i$ ,  $\sigma_{i-1}$  tensión del castillo  $i - 1$ ,  $\sigma_{i+1}$  tensión del castillo  $i + 1$ ,  $V_{ri+1}$  velocidad del rodillo de trabajo del castillo  $i + 1$  (Obregón, 2010) [63], (Cantú, 2019) [3].

En el modelo del MLC se involucran parámetros que sólo se conocen de manera aproximada, por lo que se han diseñado controladores robustos para diferentes casos de incertidumbre y diferentes “subsistemas” del modelo (Obregón, 2010) [63].

En el caso de incertidumbre paramétrica se han propuesto controladores basados en técnicas  $H_\infty$  o QFT, sin embargo, estas técnicas no garantizan estabilidad robusta para el caso de incertidumbre paramétrica, ya que trabajan con un número finito de combinaciones de parámetros para lograr la representación de la región de incertidumbre paramétrica en el dominio de la frecuencia. En (Hearn and Grimble, 1997) [64] se propone un control basado en la técnica  $H_\infty$  para los lazos de espesor y flujo de masa, sin embargo, no se muestra el modelo del proceso, ni el modelo de incertidumbre.

En (Obregón, 2006) [65], (Obregón, 2010) [63] se presenta un modelo multivariable linealizado alrededor de un punto de operación en el dominio de Laplace de un molino continuo (FM por sus siglas en inglés), el cual es una buena aproximación del proceso real. Además se menciona la posibilidad de realizar un controlador para el sistema completo con cuatro entradas y cuatro salidas, sin embargo sólo se realizó el diseño de control para un sistema de menor dimensión.

Por otra parte, respecto a los controladores que se han diseñado para el MLC. En (Zhong, 2010) [66], se diseña un controlador no lineal para la tensión y altura del looper basado en la técnica de modos deslizantes y control adaptativo.

En (Chi Yu, 2011) [67] se propone un control robusto con la técnica de modos deslizantes basado en el método LMIs.

En (Don Juan Ríos, 2016) [68], (Pliego, 2017) [69], se propusieron dos controladores en lazo

individual para mantener estabilidad y desempeño robusto en presencia de incertidumbres paramétricas en el MLC mediante la técnica QFT.

En (Fang-chen, 2017) [70] se controla la altura del looper y tensión de la cinta usando la técnica de Control Predictivo de Matrices Dinámicas.

En (Cantú, 2019) [3] se diseñan dos controladores multivariables robustos en el dominio de la frecuencia para un MLC usando las técnicas QFT y  $H_\infty$  en el subsistema del looper de dimensión  $2 \times 2$ , para mantener estabilidad en presencia de incertidumbre paramétrica. El diseño del control  $H_\infty$  se realizó usando sensibilidad mezclada y el diseño del control QFT se realizó mediante el método de lazos secuenciales, verificando las condiciones de estabilidad robusta en el dominio de la frecuencia, evaluando los controladores en el dominio del tiempo, y comparando su desempeño con un control PI que fue diseñado para los subsistemas con una entrada y una salida. Se concluye que el controlador QFT muestra un mejor desempeño, pero se requiere una mayor potencia en una de las entradas de control.

En el Capítulo 4 se presentará al molino de laminación en caliente MLC como caso de estudio de una aplicación de los procedimientos propuestos en el Capítulo 3.

### 2.1.1. Molino de laminación en caliente

Un molino de laminación en caliente MLC se encarga de producir un rollo de lámina de acero, en el que los parámetros más importantes son el espesor de la lámina y la temperatura de acabado, ya que de eso dependen sus propiedades mecánicas (ver Figura 2.1), (Barrios J. A., 2012) [71].

El proceso para producir una lámina de acero consta de cuatro fases, en la primer fase se encuentran los hornos de recalentamiento que se encargan de elevar la temperatura de un planchón de acero hasta aproximadamente  $1300\text{ }^\circ\text{C}$  para su posterior deformación mecánica. En esta primer fase, el planchón tiene dimensiones aproximadamente de 0.2m de grosor, 0.915m de ancho, de 5 a 10m de largo y pesa entre 10 y 25 toneladas. Al salir del horno, se forma una capa de óxido, la cual debe ser eliminada con un rompedor de óxido antes de pasar a la siguiente etapa.

En el segunda fase se encuentran los molinos desbastadores, los cuales deforman el planchón para obtener una barra de transferencia BT, con un espesor aproximado de 25.4mm y una tem-

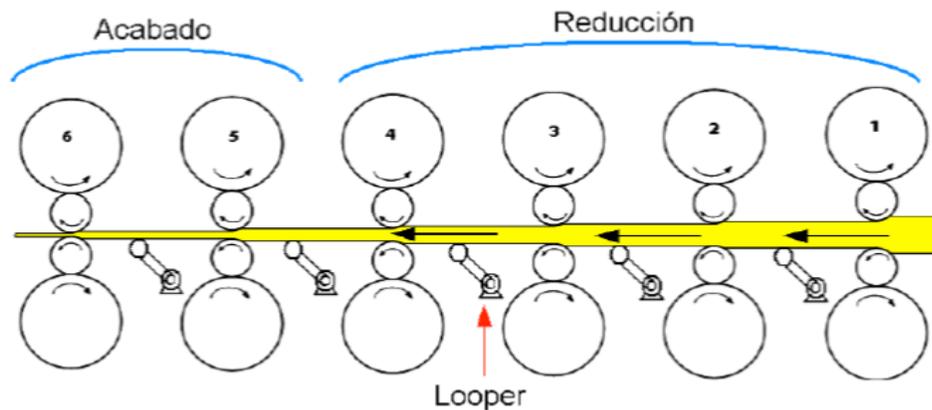


Figura 2.1: Molino de laminación en caliente.

peratura aproximada de  $1150\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Antes de pasar a la siguiente etapa, se corta el inicio de la barra para darle forma y para facilitar el acceso al molino continuo, también se remueve el óxido que se puede formar en esta etapa debido a las altas temperaturas.

En la tercer fase, se encuentra el molino continuo que puede constar de un tren de seis o siete castillos consecutivos, los cuales se encargan de reducir la barra hasta un espesor final de entre  $0.002\text{m}$  y  $0.0157\text{m}$  con ancho alrededor de  $0.9\text{m}$ . En esta etapa la temperatura se encuentra aproximadamente entre  $800\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $920\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Finalmente en la cuarta fase, la cinta de acero es enfriada mediante una cortina de agua y enrollada con una temperatura aproximada de entre  $550\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $650\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### 2.1.2. Molino continuo

Una de las etapas más importantes es el molino continuo (FM, por sus siglas en inglés Finishing Mill), el cual está formado por 6 ó 7 castillos contiguos que se encargan de obtener el espesor final de la cinta, además en esta etapa existe una mayor cantidad de interacción entre las variables, incertidumbres y no linealidades de los castillos.

En la Figura 2.2 se puede observar que cada castillo está formado principalmente por cuatro componentes:

- 1) Cápsula Hidráulica: Contiene un sistema hidráulico con regulador de posición vertical, que

se utiliza para generar la fuerza necesaria para la deformación mecánica de la lámina de acero, esta fuerza también es conocida como fuerza de rolado.

2) Rodillos de apoyo: Se encuentran en contacto directo con los rodillos de trabajo y con el sistema hidráulico, su diámetro se encuentra entre 1200 mm y 1563 mm aproximadamente, y son los encargados de transferir la fuerza generada en el sistema hidráulico a los rodillos de trabajo.

3) Rodillos de trabajo: Se encuentran en contacto directo con la lámina de acero, están localizados después de los rodillos de apoyo, y su función es la de transmitir la fuerza generada en el sistema hidráulico a la cinta de acero, estos rodillos tienen un radio entre 220 mm y 370 mm aproximadamente.

4) Celda de carga: Es un transductor de fuerza que se encarga de medir la fuerza generada en el sistema hidráulico.

Entre los castillos del FM, se encuentra un dispositivo llamado formador de onda (looper) que se encarga de aplicar tensión a la cinta de acero, con la finalidad de controlar el flujo de masa y corregir la velocidad de los rodillos de los castillos, por lo que, la posición angular del looper y la tensión de la cinta están involucradas en el espesor y velocidad de la cinta, las cuales impactan en la temperatura de acabado (Roberts, 1983) [61], (Ginzburg, 1993) [62].

Un molino de laminación en caliente, puede ser modelado como un sistema multivariable generalmente linealizado alrededor de un punto de operación, se modelan dos castillos contiguos con cuatro variables de entrada y cuatro variables de salida (Figuras 2.2 y 2.3), donde las variables de entrada son (ver Tabla 2.1) : espacio entre rodillos del castillo  $i$  ( $S_{ri}$ ), espacio entre rodillos del castillo  $i + 1$  ( $S_{ri+1}$ ), par del formador de onda  $i$  ( $\tau_{ri}$ ), velocidad de los rodillos de trabajo del castillo  $i$  ( $V_{ri}$ ), y las variables de salida son: espesor del castillo  $i$  ( $h_i$ ), espesor del castillo  $i + 1$  ( $h_{i+1}$ ), tensión de la cinta entre castillos ( $\sigma_i$ ), posición angular del looper ( $\theta_i$ ).

Además se consideran como señales de perturbación: espesor de entrada del castillo  $i$  ( $H_i$ ), tensión del castillo  $i - 1$  ( $\sigma_{i-1}$ ), tensión del castillo  $i + 1$  ( $\sigma_{i+1}$ ), velocidad del rodillo de trabajo del castillo  $i + 1$  ( $V_{ri+1}$ ), (Obregón, 2006) [65], (Evers, 2006) [72].

En (Obregón, 2010) [63] se desarrolló un modelo multivariable para el FM linealizado en un punto de operación en el dominio de la frecuencia. El modelo representa dos castillos contiguos y el looper entre ellos. El modelo se validó con datos reales del MLC y se concluyó que es una apro-

ximación aceptable del proceso real. El punto de operación se define por el producto laminado, en este caso es el acero AIST 1006 calibre  $2 \times 10^{-3}$  y ancho de 0.9m.

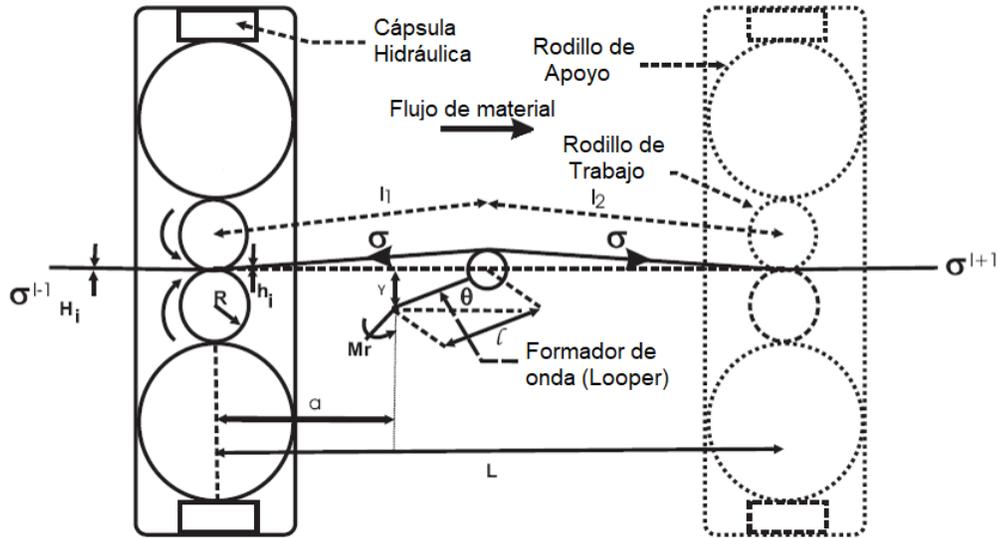


Figura 2.2: Diagrama esquemático de dos castillos contiguos del MLC.

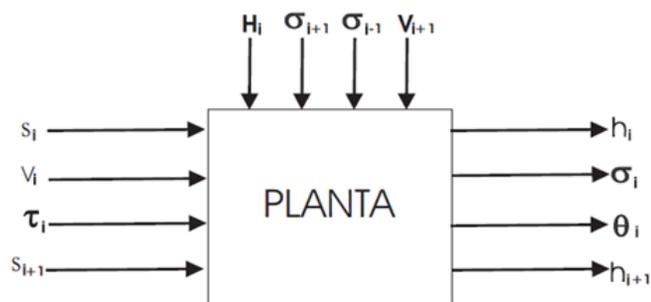


Figura 2.3: Diagrama de entradas, salidas y perturbaciones en el MLC.

La incertidumbre considerada en los parámetros del modelo se muestra en la Tabla 2.2.

Variable	Descripción	Unidades
$S_{r_i}$	Espacio entre rodillos del castillo $i$	m
$S_{r_{i+1}}$	Espacio entre rodillos del castillo $i + 1$	m
$V_{r_i}$	Velocidad de los rodillos de trabajo del castillo $i$	m/s
$\tau_{r_i}$	Par del formador de onda $i$	N-m
$h_i$	Espesor de salida del castillo $i$	m
$\sigma_i$	Tensión de salida del castillo $i$	N
$\theta_i$	Posición angular del formador de onda	grados
$h_{i+1}$	Espesor de salida del castillo $i + 1$	m
$H_i$	Espesor de entrada del castillo $i$	m
$\sigma_{i-1}$	Tensión del castillo $i - 1$	N
$\sigma_{i+1}$	Tensión del castillo $i + 1$	N
$V_{i+1}$	Velocidad de los rodillos de trabajo del castillo $i + 1$	m/s

Tabla 2.1: Variables de entrada, salida y perturbaciones en el MLC.

Parámetro	Unidades	Concepto	Incertidumbre
$K_{\theta_i}^T$	$kg \cdot mm$	Ganancia estática	$\pm 5\%$
$K_{\theta_i}^L$	$mm$	Ganancia estática	$\pm 5\%$
$K_{\sigma_i}^T$	$mm$	Ganancia estática	$\pm 5\%$
$J_i$	$kg \cdot mm \cdot s^2$	Inercia del looper	$\pm 10\%$
$D_i$	$kg \cdot mm \cdot s$	Amortiguamiento	$\pm 20\%$
$E_i$	$\frac{kg}{mm}$	Módulo de Young	$\pm 20\%$
$L_i$	$mm$	Distancia en rodillos	$\pm 1\%$

Tabla 2.2: Incertidumbre considerada en los parámetros del modelo.

### 2.1.3. Función de transferencia para la salida de tensión $\sigma_i$

De acuerdo al modelo multivariable para el MLC presentado en el diagrama de bloques de la Figura 2.4, se puede obtener la función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  respecto del par del formador de onda  $\tau_{r_i}$ , mediante reducción de bloques. Esta función de transferencia es usada en el Capítulo 4 para diseñar un controlador robusto usando la técnica de QFT.

La función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  del MLC, se puede calcular mediante operaciones aritméticas entre las siguientes funciones de transferencia, como se muestra a continuación:

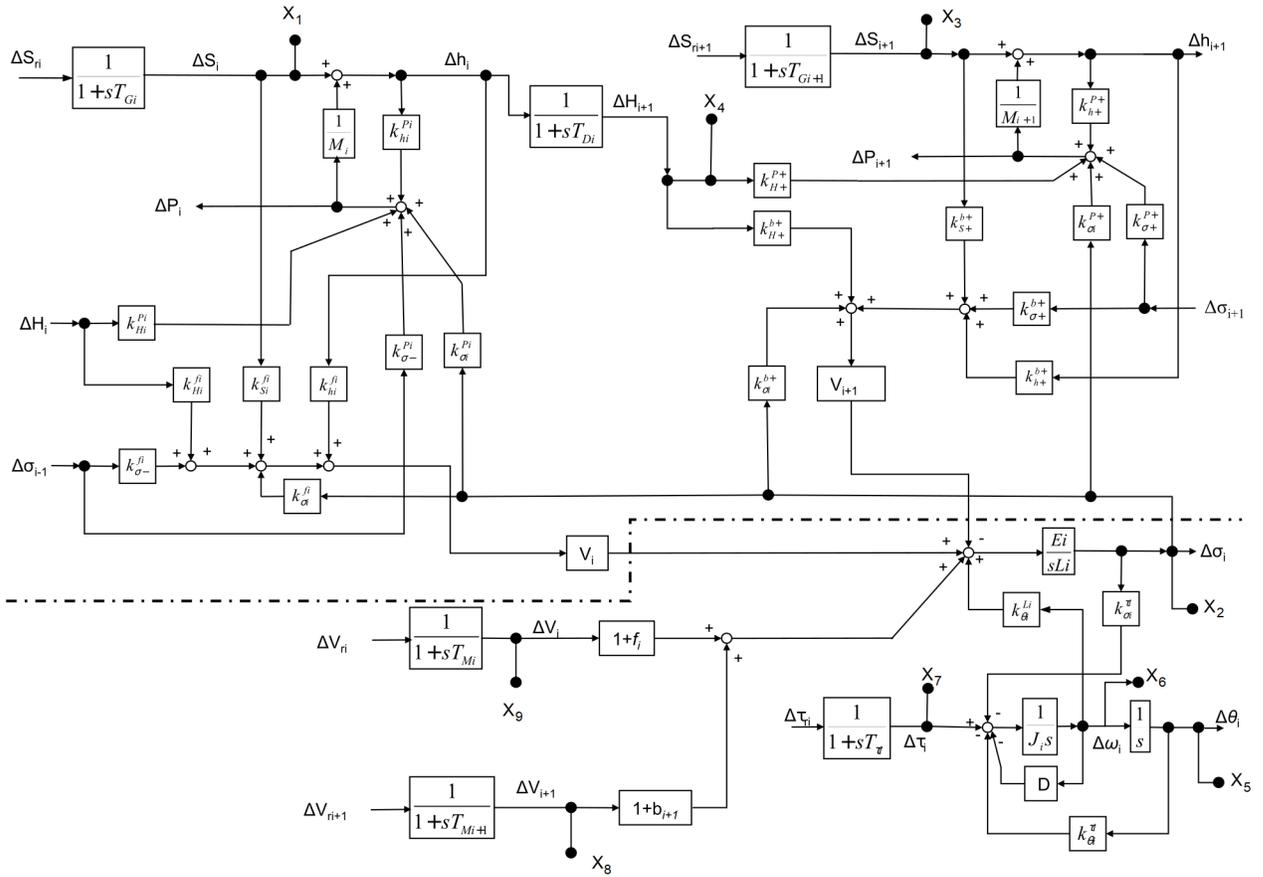


Figura 2.4: Modelo multivariable de dos castillos contiguos.

$$F_1(s) = \frac{\frac{1}{M_i} k_{\sigma_i}^{P_i}}{1 - \frac{1}{M_i} k_{h_i}^{P_i}} \quad (2.1.1)$$

$$F_2(s) = \frac{\frac{1}{M_{i+1}} k_{h+}^{b+}}{1 - \frac{1}{M_{i+1}} k_{h+}^{P+}} \quad (2.1.2)$$

$$F_3(s) = \frac{1}{J_i s + D} \quad (2.1.3)$$

$$F_4(s) = \frac{s}{J_i s^2 + Ds + k_{\theta_i}^{\tau_i}} \quad (2.1.4)$$

$$F_5(s) = \frac{\frac{E_i}{L_i s}}{1 - \frac{E_i}{L_i s} F_1(s) k_{h_i}^f V_i} \quad (2.1.5)$$

$$F_6(s) = \frac{F_5(s)}{1 + F_5(s) \left( \frac{F_1(s) k_{H^+}^{b+} V_{i+1}}{1 + T_{D_i} s} \right)} \quad (2.1.6)$$

$$F_7(s) = \frac{F_6(s)}{1 + F_6(s) \left( \frac{F_1(s) k_{H^+}^{p+} V_{i+1} F_2(s)}{1 + T_{D_i} s} \right)} \quad (2.1.7)$$

$$F_8(s) = \frac{F_7(s)}{1 + F_7(s) V_{i+1} F_2(s) k_{\sigma_i}^{p+}} \quad (2.1.8)$$

$$F_{11}(s) = \frac{F_4(s) k_{\theta_i}^{L_i} F_8(s)}{1 + F_4(s) k_{\theta_i}^{L_i} F_8(s) k_{\sigma_i}^{\tau_i}} \quad (2.1.9)$$

$$P_3(s) = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \tau_{r_i}} = \frac{F_{11}(s)}{T_{T_L} s + 1} \quad (2.1.10)$$

donde  $P_3(s)$  es la función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  respecto del par del formador de onda  $\tau_{r_i}$ .

## 2.2. Modelo del MLC representado en espacio de estados

Un modelo multivariable para el MLC representado como un diagrama de bloques se muestra en la Figura 2.4, de tal forma que los estados  $x$ , entradas  $u$ , perturbaciones  $d$  y salidas  $y$ , se definen como se muestra en la ecuación a continuación.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta S_i \\ \Delta \sigma_i \\ \Delta S_{i+1} \\ \Delta H_{i+1} \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta \tau_i \\ \Delta V_{i+1} \\ \Delta V_i \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta S_{ri} \\ \Delta S_{ri+1} \\ \Delta \tau_{ri} \\ \Delta V_{ri} \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta H_i \\ \Delta \sigma_{i-1} \\ \Delta \sigma_{i+1} \\ \Delta V_{ri+1} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h_i \\ \Delta h_{i+1} \\ \Delta \sigma_i \\ \Delta \theta_i \end{bmatrix} \quad (2.2.1)
 \end{aligned}$$

donde los símbolos  $i - 1$ ,  $i$  e  $i + 1$  en los subíndices de las variables, indican el castillo al que pertenecen respectivamente. De acuerdo al diagrama de bloques de la Figura 2.4, el modelo en espacio de estados es el que se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{T_{Gi}} + \bar{S}_{ri} u_1 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{T_{Gi}} GM1_i k_{h_i}^{f_i} V_i x_1 + \frac{E_i}{L_i} \left( k_{\sigma_i}^{P_i} GM2_i k_{h_i}^{f_i} V_i - k_{\sigma_i}^{P+} GM2_{i+1} k_{h+}^{b+} V_{i+1} \right) x_2 - \frac{1}{T_{Gi+1}} GM1_{i+1} k_{h+}^{b+} V_i x_3 - \\
&\quad - \frac{1}{T_D} \left( k_{H+}^{P+} GM2_{i+1} k_{h+}^{b+} V_{i+1} + k_{H+}^{b+} V_{i+1} \right) x_4 + k_{\theta_i}^{L_i} \frac{1}{J_i} x_6 - \frac{1}{T_{Mi+1}} (1 - b_i) x_8 + \frac{1}{T_{Mi}} (1 + f_i) x_9 + \\
&\quad + \left( k_{H_i}^{f_i} + k_{H_i}^{P_i} GM2_i k_{h_i}^{f_i} \right) V_i \bar{H}_i d_1 + \left( k_{\sigma-}^{f_i} + k_{\sigma-}^{P_i} GM2_i k_{h_i}^{f_i} \right) V_i \bar{\sigma}_{i-1} d_2 + \left( k_{\sigma+}^{b+} - k_{\sigma+}^{P+} GM2_{i+1} k_{h+}^{b+} \right) V_{i+1} \bar{\sigma}_{i+1} d_3 \\
\dot{x}_3 &= -\frac{1}{T_{Gi+1}} x_3 + \bar{S}_{ri+1} u_2 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{T_{Gi}} GM1_i x_1 + \frac{E_i}{L_i} k_{\sigma_i}^{P_i} GM2_i x_2 - \frac{1}{T_D} x_4 + GM2_i k_{H_i}^{P_i} \bar{H}_i d_1 + GM2_i k_{\sigma-}^{P+} \bar{\sigma}_{i-1} d_2 \\
\dot{x}_5 &= \frac{1}{J_i} x_6 \\
\dot{x}_6 &= -\frac{E_i}{L_i} k_{\sigma_i}^{\tau_i} x_2 - k_{\theta_i}^{\tau_i} x_5 - \frac{D}{J_i} x_6 + \frac{1}{T_{\tau_i}} x_7 \\
\dot{x}_7 &= -\frac{1}{T_{\tau_i}} x_7 + \bar{\tau}_{ri} u_3 \\
\dot{x}_8 &= -\frac{1}{T_{Mi+1}} x_8 + \bar{V}_{i+1} d_4 \\
\dot{x}_9 &= -\frac{1}{T_{Mi}} x_9 + \bar{V}_i u_4
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Las salidas del MLC son:

$$\begin{aligned}
y_1 = \Delta h_i &= \frac{1}{T_{Gi}} GM1_i \frac{1}{h_{iref}} x_1 + \frac{E_i}{L_i} k_{\sigma_i}^{P_i} GM2_i \frac{1}{h_{iref}} x_2 \\
y_2 = \Delta h_{i+1} &= \frac{E_i}{L_i} k_{\sigma_i}^{P+} GM2_{i+1} \frac{1}{h_{i+1ref}} x_2 + \frac{1}{T_{Gi+1}} GM1_{i+1} \frac{1}{h_{i+1ref}} x_3 + k_{H+}^{P+} \frac{1}{T_D} GM2_{i+1} \frac{1}{h_{i+1ref}} x_4 \\
y_3 = \Delta \sigma_i &= \frac{E_i}{L_i} \frac{1}{\sigma_{iref}} x_2 \\
y_4 = \Delta \theta_i &= \frac{1}{\theta_{iref}} x_5
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

con las equivalencias  $GM1_i = \frac{M_i}{M_i - k_{h_i}^{p_i}}$ ,  $GM2_i = \frac{1}{M_i - k_{h_i}^{p_i}}$ ,  $GM1_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{M_{i+1} - k_{h_{i+1}}^{p_{i+1}}}$ ,  $GM2_{i+1} = \frac{1}{M_{i+1} - k_{h_{i+1}}^{p_{i+1}}}$ ,

donde  $\bar{S}_{ri}$ ,  $\bar{S}_{ri+1}$ ,  $\bar{\tau}_{ri}$ ,  $\bar{V}_i$ ,  $\bar{H}_i$ ,  $\bar{\sigma}_{i-1}$ ,  $\bar{\sigma}_{i+1}$ ,  $\bar{V}_{i+1}$ , denotan los valores nominales de las correspondientes señales de entrada,  $k$  denota una ganancia estática proveniente de la linealización del modelo con la representación de las variables dependientes e independientes de las derivadas parciales como superíndices y subíndices respectivamente.

El sistema en espacio de estados se puede simplificar al reescribir las ganancias estáticas  $k_x^y$  como constantes  $c_1, \dots, c_{27}$ , de tal forma que el modelo simplificado queda como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -c_1 x_1 + u_1 \\
 \dot{x}_2 &= c_2 x_1 + c_3 x_2 - c_4 x_3 - c_5 x_4 + c_6 x_6 - c_7 x_8 + c_8 x_9 + a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \\
 \dot{x}_3 &= -c_9 x_3 + u_2 \\
 \dot{x}_4 &= c_{10} x_1 + c_{11} x_2 - c_{12} x_4 + a_4 d_1 + a_5 d_2 \\
 \dot{x}_5 &= c_{13} x_6 \\
 \dot{x}_6 &= -c_{14} x_2 - c_{15} x_5 - c_{16} x_6 + c_{17} x_7 \\
 \dot{x}_7 &= -c_{18} x_7 + u_3 \\
 \dot{x}_8 &= -c_{19} x_8 + a_6 d_4 \\
 \dot{x}_9 &= -c_{20} x_9 + u_4
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Las salidas del MLC en su representación simplificada son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= c_{21} x_1 + c_{22} x_2 \\
 y_2 &= c_{23} x_2 + c_{24} x_3 + c_{25} x_4 \\
 y_3 &= c_{26} x_2 \\
 y_4 &= c_{27} x_5
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

## 2.3. Resumen

En este capítulo se presentaron las representaciones en el dominio de la frecuencia y en el espacio de estados del modelo matemático multivariable para el MLC.

También se presentó la función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  mediante reducción de bloques.

En el Capítulo 4 se realizará un diseño de control basado en la representación del modelo del MLC presentado en esta sección.

La función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  del MLC, se puede calcular mediante operaciones aritméticas de las funciones de transferencia que corresponden a subplantas con incertidumbre intervalo o afín, por lo que se pueden obtener las plantillas analíticas correspondientes para cada subplanta y operar aritméticamente estas plantillas para obtener la plantilla analítica para la salida de tensión. Estas plantillas analíticas se utilizarán para realizar un diseño mediante la técnica de QFT.

## Capítulo 3

# Diseño de Controladores QFT usando Plantillas y Cotas Analíticas

En este capítulo se presentan los conceptos de cotas y plantillas analíticas. Además se propone un procedimiento para el ajuste de plantillas analíticas en plantillas discretas convexas y no convexas.

Finalmente se muestran los procedimientos para operar plantillas analíticas, para calcular cotas analíticas y se propone un procedimiento para diseñar controladores robustos usando plantillas y cotas analíticas mediante la técnica de QFT.

### 3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar una metodología para el diseño de controladores robustos mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas, con la finalidad de que el diseño pueda incluir al peor caso en sistemas con polinomios multilineales, ya que la técnica clásica de control robusto QFT, no asegura que se incluya al peor caso (Cantú, 2019) [3], (Mercader, 2016) [48].

El modelo se debe representar mediante subplantas que contengan polinomios intervalo o afín, de tal forma que al realizar operaciones aritméticas entre las subplantas se obtiene la planta

multilineal, entonces al obtener las plantillas correspondientes para cada subplanta y realizando operaciones aritméticas entre estas plantillas (Martín R. , 2007) [73], se puede obtener la plantilla de la planta multilineal.

Las plantillas utilizadas son plantillas analíticas, las cuales se obtienen al aproximar una función discreta con una función continua mediante series de Fourier, con la ventaja de que las plantillas pueden estar representadas solamente por una ecuación, además de ser derivables, sin embargo, debido a la aproximación mediante series de Fourier es posible que las plantillas analíticas no incluyan completamente a la incertidumbre, por lo que también se presenta una metodología de ajuste de plantillas analíticas.

Las cotas también pueden ser representadas de manera analítica, aproximando la función discreta que corresponde a la cota en una función continua mediante series de Fourier. El controlador debe satisfacer estas cotas, ya que representan a las especificaciones de diseño, como pueden ser estabilidad, rechazo de perturbaciones a la entrada o a la salida de la planta, seguimiento, entre otras.

## 3.2. Plantillas y Cotas Analíticas

En esta sección se presentan los conceptos de cotas y plantillas analíticas.

### 3.2.1. Plantilla analítica

Sea una planta  $P(s; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , con  $n$  parámetros inciertos  $\lambda$ . La proyección del espacio  $n$ -dimensional de parámetros sobre el plano Mod-Arg (o sobre el plano Im-Re) a una frecuencia  $\omega_i$ , por medio de la función  $P(j\omega_i; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $s = j\omega_i$ , da lugar a una superficie de incertidumbre (Martín R., 2009) [74].

La función matemática que describe el contorno de dicha superficie a la frecuencia  $\omega_i$  se denota por  $T_{\omega_i}$ . Se considera que  $T_{\omega_i}$  es una función analítica dada en coordenadas paramétricas,

que depende del parámetro  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Los valores de  $T_{\omega_i}$  se expresan en forma binómica representados en el plano Im-Re por  $T_{\omega_i} = (\mathcal{R}_{\omega_i}(\varphi), \mathcal{I}_{\omega_i}(\varphi))$  o por  $T_{\omega_i} = (\mathcal{A}_{\omega_i}(\varphi), \mathcal{M}_{\omega_i}(\varphi))$  en el plano Mod-Arg. Por su parte  ${}^d T_{\omega_i}$  es un vector de cantidades complejas representadas sobre el plano Im-Re o Mod-Arg que contiene un conjunto finito de puntos del contorno de la plantilla.

### 3.2.2. Procedimiento para describir el contorno de la plantilla con una función analítica

El procedimiento para calcular plantillas analíticas se presenta en (Martín R., 2009) [74]. Los pasos para calcular las plantillas analíticas se describen a continuación:

1. Se definen los vectores discretos  ${}^d \mathcal{R}$  y  ${}^d \mathcal{I}$  con  $n + 1$  elementos (representados en forma rectangular o polar) a partir de los  $n$  elementos de  ${}^d T_{\omega_i}$  que deben estar ordenados como aparecen consecutivamente en el contorno de la plantilla.

$${}^d T_{\omega_i} = \{p_{r1} + jp_{i1}, p_{r2} + jp_{i2}, \dots, p_{rn} + jp_{in}\} \quad (3.2.1)$$

$${}^d \mathcal{R} = \{p_{r1}, p_{r2}, \dots, p_{rn}, p_{r1}\} \quad (3.2.2)$$

$${}^d \mathcal{I} = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}, p_{i1}\}$$

2. Se crea un nuevo vector  ${}^d \varphi$  con  $n + 1$  elementos equidistantes y comprendidos entre  $\varphi_{min}$  y  $\varphi_{max}$  ( $\varphi_{min} = 0$  y  $\varphi_{max} = 2\pi$ ).

$${}^d \varphi = \left\{ 0, \frac{2\pi}{n-1}, 2\frac{2\pi}{n-1}, \dots, (n-2)\frac{2\pi}{n-1}, 2\pi \right\} \quad (3.2.3)$$

3. Cada elemento de  ${}^d \varphi$  se asocia a cada uno de los elementos de  ${}^d \mathcal{R}$  y  ${}^d \mathcal{I}$  formando parejas ( ${}^d \varphi[k], {}^d \mathcal{R}[k]$ ) y ( ${}^d \varphi[k], {}^d \mathcal{I}[k]$ ).

4. Debido a que ( ${}^d \varphi[k], {}^d \mathcal{R}[k]$ ) y ( ${}^d \varphi[k], {}^d \mathcal{I}[k]$ ) son curvas periódicas (periodo de  $2\pi$ ), entonces, se pueden aproximar por series de Fourier, obteniendo las siguientes funciones analíticas:

$$\mathcal{R}(\varphi) = A_{r0} + B_{r1} \sin \varphi + A_{r1} \cos \varphi + B_{r2} \sin 2\varphi + \dots \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{I}(\varphi) = A_{i0} + B_{i1} \sin \varphi + A_{i1} \cos \varphi + B_{i2} \sin 2\varphi + \dots$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_{r0} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}^d \mathcal{R}[k] \\
 A_{rl} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n {}^d \mathcal{R}[k] \cos(l {}^d \varphi[k]) \\
 B_{rl} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n {}^d \mathcal{R}[k] \sin(l {}^d \varphi[k])
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 A_{i0} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}^d \mathcal{I}[k] \\
 A_{il} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n {}^d \mathcal{I}[k] \cos(l {}^d \varphi[k]) \\
 B_{il} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n {}^d \mathcal{I}[k] \sin(l {}^d \varphi[k])
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

con  $l = 0, 1, 2, \dots, m$

La plantilla analítica en coordenadas paramétricas se define como  $T_{\omega_i} = (\mathcal{R}_{\omega_i}(\varphi), \mathcal{I}_{\omega_i}(\varphi))$ , o en su representación polar como  $T_{\omega_i} = (\mathcal{A}_{\omega_i}(\varphi), \mathcal{M}_{\omega_i}(\varphi))$ . La aproximación de la plantilla analítica depende de la cantidad de muestras  $n$  y de la cantidad de términos  $m$ , usados en la serie de Fourier. La cantidad de términos  $m$  puede ser seleccionada de manera arbitraria, sin embargo, entre más grande sea  $m$ , la aproximación de la plantilla analítica puede mejorar.

### 3.2.3. Ajuste de la plantilla analítica

Debido a las características de la aproximación por series de Fourier, es posible que en la plantilla analítica no sea considerada por completo la incertidumbre paramétrica como se puede observar en la Figura 3.1, por lo tanto, es necesario realizar un ajuste a la plantilla analítica, el cual, para plantillas convexas consiste en ampliar la plantilla analítica de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones.

$$\mathcal{R}(\varphi) \left\{ \begin{array}{ll} \geq & {}^d \mathcal{R}[k], \quad {}^d \mathcal{R}[k] > 0 \\ = & {}^d \mathcal{R}[k], \quad {}^d \mathcal{R}[k] = 0 \\ \leq & {}^d \mathcal{R}[k], \quad {}^d \mathcal{R}[k] < 0 \end{array} \right. \tag{3.2.7}$$

$$\mathcal{F}(\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \geq {}^d \mathcal{F}[k], \quad {}^d \mathcal{F}[k] > 0 \\ = {}^d \mathcal{F}[k], \quad {}^d \mathcal{F}[k] = 0 \\ \leq {}^d \mathcal{F}[k], \quad {}^d \mathcal{F}[k] < 0 \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

donde la parte real  ${}^d \mathcal{R}_{\omega_i}[k]$  e imaginaria  ${}^d \mathcal{I}_{\omega_i}[k]$  de la plantilla discreta  ${}^d T_{\omega_i}[k]$  están escaladas entre  $-1$  y  $1$ , además están desplazadas a cero para evitar posibles errores de aproximación con la serie de Fourier y están graficadas respecto de la fase que corresponde a cada número complejo, es decir la fase no se asigna con valores equidistantes de  $0$  a  $2\pi$ .

Una manera de satisfacer las condiciones anteriores, es realizando una ampliación de la plantilla discreta, de tal forma que cuando se calcula la plantilla analítica con la plantilla discreta ampliada, la plantilla analítica que resulta está ajustada e incluye completamente a la plantilla discreta original, sin embargo en este trabajo no se establece una medida de incremento en la plantilla discreta para que cuando sea calculada la plantilla analítica resulte ajustada, y solamente se establecen las condiciones que permiten el ajuste de la plantilla analítica, el cual se podría lograr ampliando a la plantilla discreta en factor del error máximo entre la plantilla analítica y la plantilla discreta,  $\max(T_{\omega_i} - {}^d T_{\omega_i}[k])$ , además también se podría aumentar la cantidad de términos  $m$  en la serie de Fourier para mejorar la aproximación.

En caso de que la plantilla no sea convexa, puede ser necesario separar por secciones a la plantilla discreta, y aplicar un procedimiento para ampliar o reducir las secciones de la plantilla discreta según se requiera, de tal forma, que la plantilla analítica ajustada incluya completamente a la plantilla discreta.

El ajuste de una plantilla analítica es un procedimiento para obtener una plantilla analítica más grande respecto de la plantilla analítica original, con lo cual la plantilla analítica ajustada es conservadora.

Dependiendo del problema y de los criterios de diseño se debe establecer un balance adecuado entre la complejidad de la función que describe la plantilla y lo conservadora que ésta pueda llegar a ser.

### 3.2.4. Ejemplo de ajuste en una plantilla analítica convexa

En este ejemplo se supone una plantilla hexagonal, donde la parte real  ${}^d\mathcal{R}^h[k]$  e imaginaria  ${}^d\mathcal{I}^h[k]$  de la plantilla discreta hexágono  ${}^d\mathcal{T}^h[k]$ , están desplazadas a cero y escaladas entre  $-1$  y  $1$ , por lo tanto un círculo de referencia  $T^c(\varphi) = (\mathcal{R}^c(\varphi), \mathcal{I}^c(\varphi))$  con radio  $\sqrt{2}$  y centro en el origen, incluye por completo a la plantilla hexagonal escalada y a cualquier plantilla escalada entre  $-1$  y  $1$ . La aproximación por series de Fourier no considera a la incertidumbre completamente como se muestra en la Figura 3.1, por lo que se debe hacer un ajuste en la plantilla analítica, de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\mathcal{R}^c(\varphi) \begin{cases} \geq \mathcal{R}^h(\varphi) \geq {}^d\mathcal{R}^h[k], & {}^d\mathcal{R}^h[k] > 0 \\ = \mathcal{R}^h(\varphi) = {}^d\mathcal{R}^h[k], & {}^d\mathcal{R}^h[k] = 0 \\ \leq \mathcal{R}^h(\varphi) \leq {}^d\mathcal{R}^h[k], & {}^d\mathcal{R}^h[k] < 0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$\mathcal{I}^c(\varphi) \begin{cases} \geq \mathcal{I}^h(\varphi) \geq {}^d\mathcal{I}^h[k], & {}^d\mathcal{I}^h[k] > 0 \\ = \mathcal{I}^h(\varphi) = {}^d\mathcal{I}^h[k], & {}^d\mathcal{I}^h[k] = 0 \\ \leq \mathcal{I}^h(\varphi) \leq {}^d\mathcal{I}^h[k], & {}^d\mathcal{I}^h[k] < 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Los resultados del ajuste para la plantilla hexágono se muestran en la Figura 3.2, donde la línea de color azul corresponde a la plantilla círculo de referencia con radio  $\sqrt{2}$  y centro en el origen, la plantilla círculo es de referencia ya que incluye completamente a cualquier plantilla escalada entre  $-1$  y  $1$ , la línea de color rojo corresponde con la plantilla hexágono discreta y la línea de color negro corresponde con la plantilla hexágono analítica. En la Figura 3.3 (a) la línea de color negro corresponde a la parte real de la plantilla analítica hexágono obtenida con la aproximación por series de Fourier, la parte real de la plantilla hexágono discreta corresponde con la línea de color rojo, y la parte real del círculo de referencia con la línea de color azul. En el inciso (b) las líneas roja y azul son las mismas que en el inciso (a) y la línea de color negro es la parte real de la plantilla hexágono analítica ajustada, la cual fue obtenida con la parte real de la plantilla discreta ampliada y se puede observar que la línea negra está arriba de la línea roja para valores positivos y está abajo de la línea roja para valores negativos. En los incisos (c) y (d) se representa lo mismo que los incisos (a) y (b) pero para la parte imaginaria, con lo cual se cumplen las condiciones de

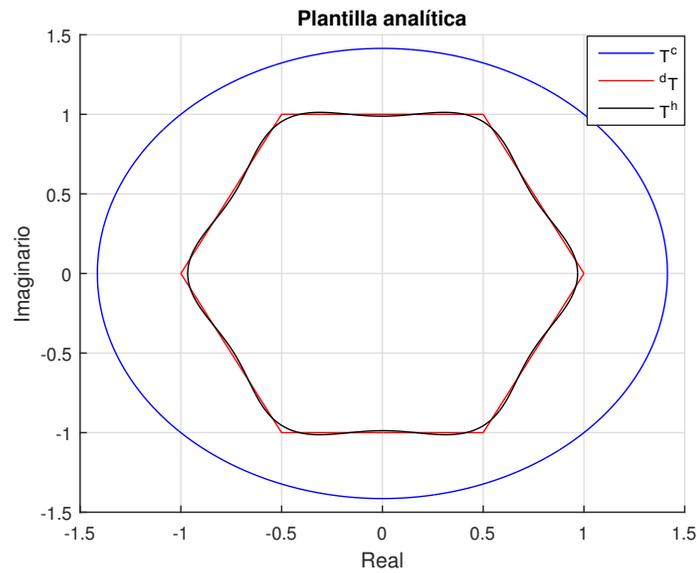


Figura 3.1: Ejemplo de una plantilla hexagonal con 720 muestras y aproximada con los primeros 7 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica  $T^h(\varphi)$  no incluye completamente a la plantilla hexágono  ${}^d T[k]$ , además se muestra una plantilla círculo  $T^c(\varphi)$  con radio  $\sqrt{2}$  como referencia.

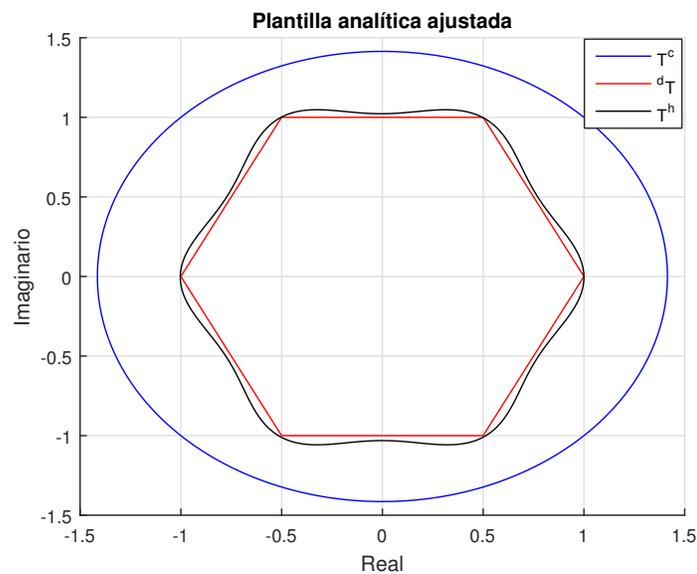
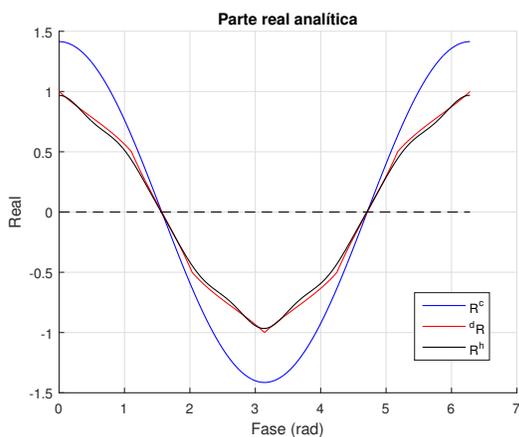
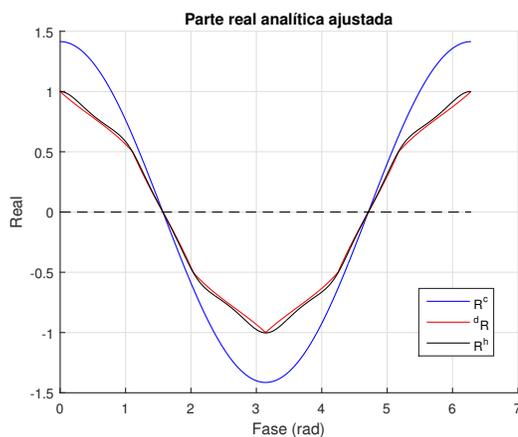


Figura 3.2: Ejemplo de una plantilla hexagonal ajustada con 720 muestras y aproximada con los primeros 7 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica  $T^h(\varphi)$  incluye completamente a la plantilla hexágono  ${}^d T[k]$ , además se muestra una plantilla círculo  $T^c(\varphi)$  con radio  $\sqrt{2}$  como referencia.

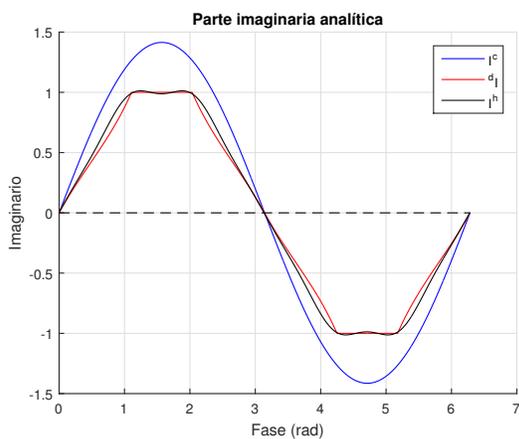
(3.2.9) y (3.2.10). En los incisos (e) y (f) se muestra el resultado de la plantilla analítica hexágono sin ajuste y con ajuste, se puede observar que la plantilla analítica hexágono con ajuste incluye completamente a la plantilla hexágono discreta.



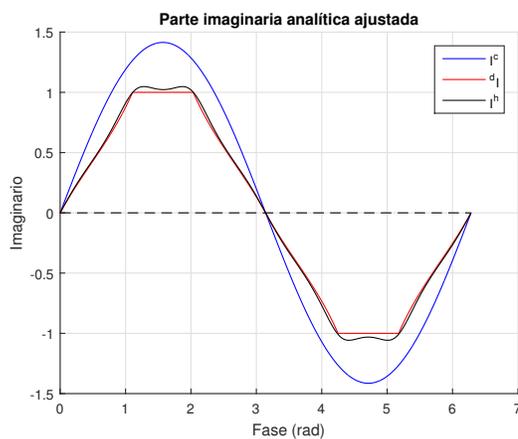
(a)  $R^h(\varphi)$  aproximada por series de Fourier.



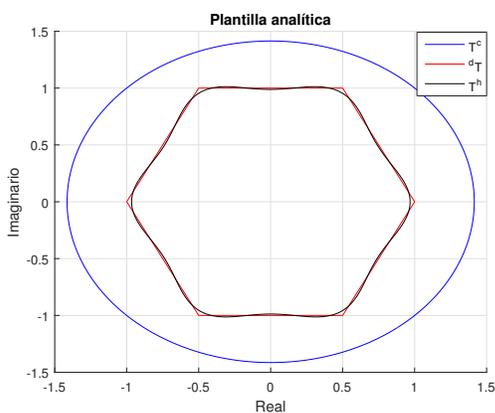
(b)  $R^h(\varphi)$  ajustada.



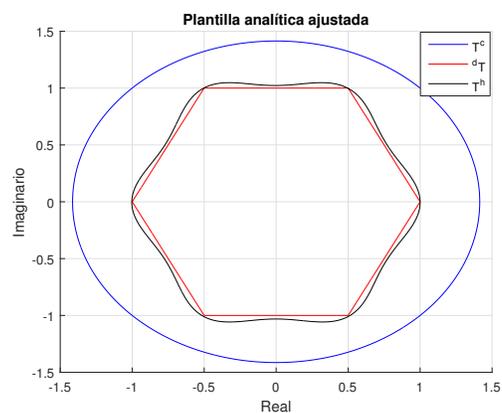
(c)  $I^h(\varphi)$  aproximada por series de Fourier.



(d)  $I^h(\varphi)$  ajustada.



(e) Plantilla hexagono  $T^h(\varphi)$  aproximada por series de Fourier.



(f) Plantilla hexagono ajustada  $T^h(\varphi)$ .

Figura 3.3: Ajuste de la plantilla hexagono  $T^h(\varphi)$ .

### 3.2.5. Ejemplo de ajuste en una plantilla analítica no convexa

En este ejemplo se muestra la plantilla no convexa que corresponde a la salida de tensión  $\sigma_i$  del MLC en la frecuencia  $\omega = 45 \text{ rad/s}$ . La aproximación por series de Fourier no considera a la incertidumbre completamente como se puede ver en la Figura 3.4, por lo que se debe hacer un ajuste en la plantilla analítica, sin embargo para una plantilla no convexa, las condiciones de la Sección 3.2.3 no son válidas y tampoco se requiere hacer escalamiento. Para que la plantilla analítica incluya completamente a la plantilla discreta, se propone separar a la plantilla discreta en secciones, para ampliar a algunas secciones y reducir a otras.

En la Figura 3.5 se encuentra la plantilla analítica ajustada en línea de color negro y se puede observar que incluye completamente a la plantilla discreta en línea de color azul.

En la Figura 3.6 se muestra el procedimiento de ajuste en la plantilla analítica. En el inciso (a) la plantilla no convexa se puede separar en dos secciones, con línea de color azul la sección que se propone reducir y con línea de color rojo la sección que se propone ampliar. En el inciso (b) los resultados de la reducción y ampliación de las secciones. En el inciso (c) las secciones ampliada y reducida ordenadas para formar un contorno ajustado. En el inciso (d) se usa el contorno ajustado para calcular la plantilla analítica ajustada que incluye completamente a la plantilla discreta. En el inciso (e) se muestra a la plantilla analítica ajustada y en el inciso (f) a la plantilla analítica ajustada en la carta de Nichols.

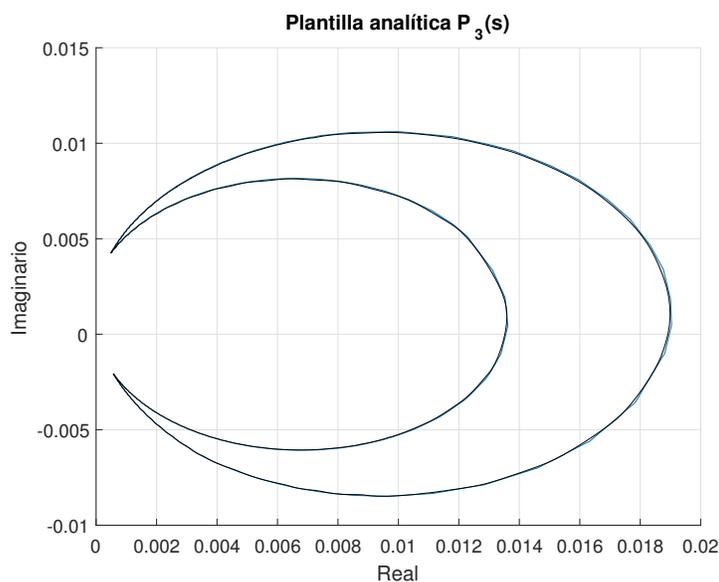


Figura 3.4: Plantilla para la salida de tensión  $\sigma_i$  de un MLC en la frecuencia  $45 \text{ rad/s}$ . Es una plantilla no convexa con 267 muestras y aproximada con los primeros 100 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica  $T(\varphi)$  (línea de color negro) no incluye completamente a la plantilla discreta  ${}^d T[k]$  (línea de color azul).

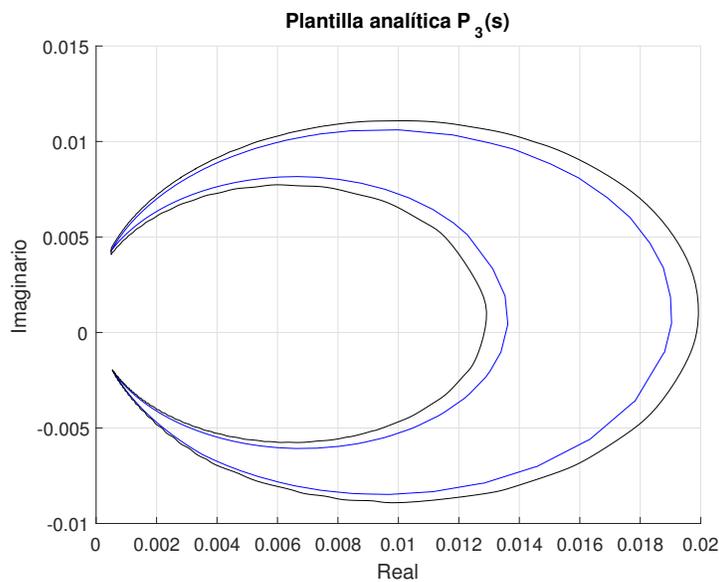


Figura 3.5: Plantilla para la salida de tensión  $\sigma_i$  de un MLC en la frecuencia  $45 \text{ rad/s}$ . Es una plantilla no convexa con 267 muestras y aproximada con los primeros 100 términos de la serie de Fourier, donde se puede observar que la plantilla analítica  $T(\varphi)$  (línea de color negro) está ajustada e incluye completamente a la plantilla discreta  ${}^d T[k]$  (línea de color azul).

### 3.2.6. Operaciones aritméticas entre plantillas analíticas

El procedimiento para realizar operaciones aritméticas entre dos plantillas analíticas mostrado en (Martín R., 2007) [73], (Martín R. , 2009) [74], consiste en discretizar la primer plantilla en  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  y cada punto discreto se opera con la segunda plantilla, generando de esta manera un conjunto de curvas, donde el contorno de dichas curvas se puede obtener mediante la solución de una ecuación llamada por los autores “trascendental” y corresponde con la plantilla resultado de la operación aritmética, sin embargo, el procedimiento empleado en este documento para realizar operaciones aritméticas, consiste en operar a las plantillas de la misma manera en que se operan los números complejos, esto puede ser de esta manera debido a que las plantillas analíticas están representadas mediante series de fourier con parte real y parte imaginaria.

Si se supone que cada plantilla analítica depende de un sólo parámetro, entonces el resultado de operar dos plantillas analíticas depende de dos parámetros como se muestra en la siguiente ecuación:

$$T(\varphi_1, \varphi_2) = T_1(\varphi_1) \odot T_2(\varphi_2) \quad (3.2.11)$$

donde el símbolo  $\odot$  representa alguna operación aritmética genérica, y además se debe notar que  $T(\varphi_1, \varphi_2)$  al depender de dos parámetros es un conjunto de curvas y no es una plantilla analítica, es decir, al evaluar uno de los parámetros seleccionando valores discretos y manteniendo al otro parámetro como la variable continua, se obtiene un conjunto de curvas analíticas, donde los puntos discretos del contorno del conjunto de curvas se pueden aproximar mediante series de Fourier para obtener la plantilla analítica de  $T(\varphi_1, \varphi_2)$ , finalmente se debe realizar el ajuste necesario para que dicha plantilla analítica incluya completamente al conjunto de curvas.

En el caso de que se operen más de dos plantillas analíticas, el conjunto de curvas analíticas se puede obtener al evaluar uno de los parámetros como la variable continua y los demás parámetros con valores discretos, sin embargo el procedimiento para calcular el contorno del conjunto de curvas se puede volver más complicado.

### 3.2.7. Suma de Plantillas Analíticas

El procedimiento para sumar dos plantillas analíticas se presenta en (Martín R., 2007) [73], (Martín R. , 2009) [74], y se describe a continuación. Sean  $T_{\omega_i}^1(\nu) = (\mathcal{R}_{\omega_i}^1(\nu), \mathcal{I}_{\omega_i}^1(\nu))$  y  $T_{\omega_i}^2(\psi) = (\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi), \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi))$  dos plantillas analíticas, de las cuales una se debe discretizar en  $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m\}$  y se debe sumar cada punto de la plantilla discreta con la segunda plantilla analítica, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{C}_1 = T_{\omega_i}^1(\nu_1) + T_{\omega_i}^2(\psi), \quad \mathcal{C}_2 = T_{\omega_i}^1(\nu_2) + T_{\omega_i}^2(\psi), \quad \dots, \quad \mathcal{C}_m = T_{\omega_i}^1(\nu_m) + T_{\omega_i}^2(\psi) \quad (3.2.12)$$

donde,  $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m\}$  es un conjunto de curvas, y el contorno de este conjunto de curvas corresponde con el resultado de la suma de las plantillas analíticas. Entonces, cada punto de la envolvente puede calcularse con la intersección entre  $\mathcal{C}_h$  y  $\mathcal{C}_{h+1}$ , de tal forma que si son infinitesimalmente cercanas,  $\nu_2 = \nu_1 + \varepsilon_\nu$ , ( $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ ), con lo cual,

$$\begin{aligned} T_{\omega_i}^1(\nu_1) &= p_{r1} + j p_{j1} \\ T_{\omega_i}^1(\nu_2) &= T_{\omega_i}^1(\nu_1 + \varepsilon_\nu) = p_{r2} + j p_{j2} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= T_{\omega_i}^2(\psi) + p_{r1} + j p_{j1} = (\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi) + p_{r1}, \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi) + p_{j1}) \\ \mathcal{C}_2 &= T_{\omega_i}^2(\psi) + p_{r2} + j p_{j2} = (\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi) + p_{r2}, \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi) + p_{j2}) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

e igualando la parte real e imaginaria de ambas curvas para determinar la intersección,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi_1) + p_{r1} &= \mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi_2) + p_{r2} \\ \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi_1) + p_{j1} &= \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi_2) + p_{j2} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

haciendo  $\psi_1 = \psi$  y  $\psi_2 = \psi + \varepsilon_\psi$ , donde  $\varepsilon_\psi \rightarrow 0$ , de tal forma que entre más cercanas sean las curvas, la aproximación del contorno tiende a ser exacta, entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi) + p_{r1} &= \mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi) + \frac{d\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} \varepsilon_\psi + p_{r2} \\ \mathcal{J}_{\omega_i}^2(\psi) + p_{j1} &= \mathcal{J}_{\omega_i}^2(\psi) + \frac{d\mathcal{J}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} \varepsilon_\psi + p_{j2}\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

despejando  $\varepsilon_\psi$  de (3.2.16) e igualando,

$$(p_{j1} - p_{j2}) \frac{d\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} = (p_{r1} - p_{r2}) \frac{d\mathcal{J}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi}\quad (3.2.17)$$

resulta lo siguiente:

$$\frac{d\mathcal{J}_{\omega_i}^1(\nu)}{d\nu} \frac{d\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} = \frac{d\mathcal{R}_{\omega_i}^1(\nu)}{d\nu} \frac{d\mathcal{J}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi}\quad (3.2.18)$$

La ecuación anterior permite conocer el contorno del conjunto de curvas, sin embargo, es una ecuación llamada trascendente cuya solución analítica no es simple, por lo que se resolverá de forma numérica. Además debe notarse que conforme  $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ , las muestras de la plantilla discreta tienden a ser cercanas y el contorno del conjunto de curvas (solución para la suma de plantillas) tiende a ser exacto.

### 3.2.8. Multiplicación de Plantillas Analíticas

El procedimiento para multiplicar dos plantillas analíticas se presenta en (Martín R., 2007) [73], (Martín R., 2009) [74], y se describe a continuación. Sean  $T_{\omega_i}^1(\nu) = (\mathcal{A}_{\omega_i}^1(\nu), \mathcal{M}_{\omega_i}^1(\nu))$  y  $T_{\omega_i}^2(\psi) = (\mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi), \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi))$  dos plantillas analíticas expresadas en forma polar (donde  $\mathcal{A}$  denota el argumento y  $\mathcal{M}$  el módulo). Una de las plantillas se debe discretizar en  $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m\}$  y cada punto de la plantilla discreta se debe multiplicar con la segunda plantilla analítica, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{C}_1 = T_{\omega_i}^1(\nu_1) \times T_{\omega_i}^2(\psi), \quad \mathcal{C}_2 = T_{\omega_i}^1(\nu_2) \times T_{\omega_i}^2(\psi), \quad \dots, \quad \mathcal{C}_m = T_{\omega_i}^1(\nu_m) \times T_{\omega_i}^2(\psi)\quad (3.2.19)$$

donde,  $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m\}$  es un conjunto de curvas, y el contorno de este conjunto de curvas corresponde con el resultado de la multiplicación de las plantillas analíticas. Entonces, cada punto de la envolvente puede calcularse con la intersección entre  $\mathcal{C}_h$  y  $\mathcal{C}_{h+1}$ , de tal forma que si son infinitesimalmente cercanas,  $v_2 = v_1 + \varepsilon_v$ , ( $\varepsilon_v \rightarrow 0$ ), con lo cual,

$$\begin{aligned} T_{\omega_i}^1(v_1) &= k_1 \angle \theta_1 \\ T_{\omega_i}^1(v_1 + \varepsilon_v) &= k_2 \angle \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= T_{\omega_i}^2(\psi) \times k_1 \angle \theta_1 = (\mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi) + \theta_1, k_1 \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi)) \\ \mathcal{C}_2 &= T_{\omega_i}^2(\psi) \times k_2 \angle \theta_2 = (\mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi) + \theta_2, k_2 \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi)) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

e igualando magnitud y fase de ambas curvas para determinar la intersección, resulta el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} k_1 \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi_1) &= k_2 \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi_2) \\ \mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi_1) + \theta_1 &= \mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi_2) + \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

haciendo  $\psi_1 = \psi$  y  $\psi_2 = \psi + \varepsilon_\psi$ , donde  $\varepsilon_\psi \rightarrow 0$ , de tal forma que entre más cercanas sean las curvas, la aproximación del contorno tiende a ser exacta, entonces,

$$\begin{aligned} k_1 \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi) &= k_2 \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi) + k_2 \frac{d\mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} \varepsilon_\psi \\ \mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi) + \theta_1 &= \mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi) + \frac{d\mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} \varepsilon_\psi + \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

despejando  $\varepsilon_\psi$  en ambas ecuaciones de (3.2.23) e igualando,

$$\frac{k_1 - k_2}{k_2} \frac{d\mathcal{A}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} \mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi) = (\theta_1 - \theta_2) \frac{d\mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi)}{d\psi} \quad (3.2.24)$$

dividiendo ambos términos por  $\varepsilon_v$  y resolviendo el límite cuando  $\varepsilon_v \rightarrow 0$ , resulta lo siguiente:

$$\mathcal{M}_{\omega_i}^2(\psi) \mathcal{A}_{\omega_i}^{2'}(\psi) \mathcal{M}_{\omega_i}^{1'}(v) = \mathcal{M}_{\omega_i}^1(v) \mathcal{A}_{\omega_i}^{1'}(v) \mathcal{M}_{\omega_i}^{2'}(\psi) \quad (3.2.25)$$

donde  $(\prime)$  denota derivada. La ecuación anterior permite conocer el contorno del conjunto de curvas, sin embargo, sucede lo mismo que en la sección anterior (suma de plantillas analíticas), es una ecuación llamada trascendente cuya solución analítica no es simple, por lo que también se resolverá de forma numérica, además debe notarse que conforme  $\varepsilon_v \rightarrow 0$ , las muestras de la plantilla discreta tienden a ser cercanas y el contorno del conjunto de curvas (solución para la multiplicación de plantillas analíticas) tiende a ser exacto. La ecuación trascendente también se puede escribir en la forma rectangular como se muestra a continuación:

$$\frac{\mathcal{R}_{\omega_i}^1(v) \mathcal{R}_{\omega_i}^{1'}(v) + \mathcal{I}_{\omega_i}^1(v) \mathcal{I}_{\omega_i}^{1'}(v)}{\mathcal{R}_{\omega_i}^1(v) \mathcal{I}_{\omega_i}^{1'}(v) - \mathcal{I}_{\omega_i}^1(v) \mathcal{R}_{\omega_i}^{1'}(v)} = \frac{\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi) \mathcal{R}_{\omega_i}^{2'}(\psi) + \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi) \mathcal{I}_{\omega_i}^{2'}(\psi)}{\mathcal{R}_{\omega_i}^2(\psi) \mathcal{I}_{\omega_i}^{2'}(\psi) - \mathcal{I}_{\omega_i}^2(\psi) \mathcal{R}_{\omega_i}^{2'}(\psi)} \quad (3.2.26)$$

### 3.2.9. Cota analítica

Las cotas QFT son los límites mínimo y/o máximo en cada frecuencia del lazo abierto nominal  $L_{nom}(j\omega) = P_{nom}(j\omega)G(j\omega)$ , donde  $P_{nom}(j\omega)$  es la planta nominal y  $G(j\omega)$  es el controlador que garantiza se cumplan las especificaciones de lazo cerrado para todas las plantas en el conjunto de incertidumbre, por lo que las especificaciones QFT se pueden formular como desigualdades para la respuesta deseada en la frecuencia.

Originalmente las cotas se calculaban mediante manipulación gráfica de las plantillas de la planta en la carta de Nichols (Chait, 1993) [75], (Rodrigues, 1997) [76], sin embargo, después aparecieron nuevos algoritmos para la generación de cotas como lo son las técnicas geométricas, algoritmos numéricos basados en desigualdades cuadráticas, mapeo de la incertidumbre y especificaciones en expresiones con desigualdades [59, 60, 77].

### 3.2.10. Cálculo de cotas analíticas

El procedimiento para calcular cotas analíticas se presenta en (Martín Romero et al., 2007) [28]. En general una especificación QFT para sistemas con una entrada y una salida o también llamados sistemas SISO por sus siglas en inglés, se puede expresar como:

$$\left| \frac{A(j\omega_i, \varphi) + B(j\omega_i, \varphi)G_{\omega_i}}{1 + C(j\omega_i, \varphi)G_{\omega_i}} \right| \leq \gamma(\omega_i), \quad \forall \omega_i \in [\omega_{min}, \omega_{max}] \quad (3.2.27)$$

donde:  $A = ae^{j\theta_a} = A_r + jA_i$ ,  $B = be^{j\theta_b} = B_r + jB_i$  y  $C = ce^{j\theta_c} = C_r + jC_i$ , son funciones complejas y dependen de los valores de la plantilla  $T_{\omega_i}(\varphi)$ ,  $G_{\omega_i} = ge^{j\phi} = g_{re} + jg_{im}$  es el control para la especificación  $\gamma(\omega_i)$ .

Se puede reescribir (3.2.27) como sigue:

$$\left| \frac{A_r + jA_i + (B_r + jB_i)(g_{re} + jg_{im})}{1 + (C_r + jC_i)(g_{re} + jg_{im})} \right| \leq \gamma \quad (3.2.28)$$

de (3.2.28) se puede obtener la siguiente desigualdad cuadrática:

$$\begin{aligned} & ((C_r^2 + C_i^2)\gamma^2 - (B_r^2 + B_i^2))(g_{re}^2 + g_{im}^2) + 2(\gamma^2 C_r - A_r B_r \\ & - A_i B_i)g_{re} - 2(\gamma^2 C_i + A_i B_r - A_r B_i)g_{im} + \gamma^2 - A_r^2 - A_i^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

La ecuación precedente representa una familia de circunferencias, de tal forma que si no hay incertidumbre paramétrica, la circunferencia se puede representar por,

$$(g_{re} - g_{rc})^2 + (g_{im} + g_{ic})^2 = r^2 \quad (3.2.30)$$

$$g_{rc}(\varphi) = \frac{-\gamma^2 C_r + A_r B_r + A_i B_i}{(C_r^2 + C_i^2)\gamma^2 - B_r^2 - B_i^2} \quad (3.2.31)$$

$$g_{ic}(\varphi) = \frac{\gamma^2 C_i + A_i B_r - A_r B_i}{(C_r^2 + C_i^2)\gamma^2 - B_r^2 - B_i^2}$$

$$r(\varphi) = \frac{\gamma \sqrt{(z_1 - z_2)}}{(C_r^2 + C_i^2)\gamma^2 - B_r^2 - B_i^2} \quad (3.2.32)$$

donde  $z_1 = (A_r^2 + A_i^2)(C_r^2 + C_i^2) + B_r^2 + B_i^2$ ,  $z_2 = 2(A_r B_r + A_i B_i)C_r - 2(A_i B_r - A_r B_i)C_i$

La circunferencia se puede reescribir en forma paramétrica como sigue:

$$\begin{aligned} g_{rc}(\varphi) + r(\varphi) \cos(\theta) \\ g_{ic}(\varphi) + r(\varphi) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

donde  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Una circunferencia cercana es:

$$\begin{aligned} g_{rc}(\varphi + \Delta\varphi) + r(\varphi + \Delta\varphi) \cos(\theta) \\ g_{ic}(\varphi + \Delta\varphi) + r(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

La intersección entre las circunferencias cercanas es:

$$\begin{aligned} g_{rc}(\varphi) + r(\varphi) \cos(\theta_1) &= g_{rc}(\varphi + \Delta\varphi) + r(\varphi + \Delta\varphi) \cos(\theta_2) \\ g_{ic}(\varphi) + r(\varphi) \sin(\theta_1) &= g_{ic}(\varphi + \Delta\varphi) + r(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Debido a que  $\varphi$  y  $\varphi + \Delta\varphi$  son muy cercanos, entonces,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  también lo son, con lo cual, se puede escribir que  $\theta_1 = \theta$  y  $\theta_2 = \theta + \Delta\theta$ . Entre más cercanas sean las curvas, la aproximación del contorno tiende a ser exacta, entonces,

$$\begin{aligned} g_{rc}(\varphi) + r(\varphi) \cos(\theta) &= g_{rc}(\varphi + \Delta\varphi) + r(\varphi + \Delta\varphi) \cos(\theta + \Delta\theta); \\ g_{ic}(\varphi) + r(\varphi) \sin(\theta) &= g_{ic}(\varphi + \Delta\varphi) + r(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\theta + \Delta\theta) \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Además, si se supone que,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta f(x) = f(x) + f'(x) \Delta x \quad (3.2.37)$$

entonces,

$$\begin{aligned} g'_{rc}(\varphi) \Delta\varphi + r'(\varphi) \cos \theta \Delta\varphi &= r(\varphi) \sin \theta \Delta\theta + r'(\varphi) \sin \theta \Delta\varphi \Delta\theta \\ g'_{ic}(\varphi) \Delta\varphi + r'(\varphi) \sin \theta \Delta\varphi &= -r(\varphi) \cos \theta \Delta\theta + r'(\varphi) \cos \theta \Delta\varphi \Delta\theta \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Despejando  $\Delta\theta$ , se obtiene:

$$\frac{g'_{rc}(\varphi) + r'(\varphi) \cos(\theta)}{r(\varphi) \sin \theta + r'(\varphi) \sin \theta \Delta\varphi} = \frac{g'_{ic}(\varphi) + r'(\varphi) \sin(\theta)}{r(\varphi) \cos \theta + r'(\varphi) \cos \theta \Delta\varphi} \quad (3.2.39)$$

El límite de (3.2.39) cuando  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  es:

$$g'_{rc}(\varphi) \cos \theta + g'_{ic}(\varphi) \sin \theta + r'(\varphi) = 0 \quad (3.2.40)$$

resolviendo la ecuación anterior,

$$\theta_{1,2}(\varphi) = \arctan \left( \frac{g'_{ic}(\varphi) r'(\varphi) \mp g'_{rc}(\varphi) \sqrt{g'_{ic}(\varphi)^2 + g'_{rc}(\varphi)^2 - r'(\varphi)^2}}{g'_{rc}(\varphi) r'(\varphi) \pm g'_{ic}(\varphi) \sqrt{g'_{ic}(\varphi)^2 + g'_{rc}(\varphi)^2 - r'(\varphi)^2}} \right) \quad (3.2.41)$$

Las soluciones de (3.2.41) proporcionan el contorno interior y exterior de la familia de círculos. La cota del controlador estará definida por el contorno interior en el caso de que el radio  $r(\varphi)$  de alguna circunferencia de la familia sea negativo, de otra forma estará definido por el contorno exterior.

La cota del controlador  $G_{\omega_i}$  puede ser expresada en función de  $\varphi$ .

$$G_{\omega_i}(\varphi) = \begin{cases} g_{rc}(\varphi) + r(\varphi) \cos(\theta(\varphi)) \\ g_{ic}(\varphi) + r(\varphi) \sin(\theta(\varphi)) \end{cases} \quad (3.2.42)$$

El diseño del controlador mediante el procedimiento de conformación de lazo, debe satisfacer la ecuación anterior.

### 3.2.11. Procedimiento de Diseño QFT usando Plantillas y Cotas Analíticas

En las secciones anteriores de este capítulo se presentó el concepto de plantilla analítica, en el contexto de la técnica QFT, y se describió el procedimiento para obtener una aproximación de las plantillas discretas mediante series de Fourier. Asimismo, dado que la plantilla analítica no cubre por completo la plantilla original, se propuso un procedimiento de ajuste, sin embargo, el resul-

tado podría ser conservador. También se presentó el concepto de operaciones aritméticas entre plantillas y se propuso llevarlas a cabo de manera analítica, así como la descripción de la envolvente resultante mediante series de Fourier. Por otro lado, se describió el procedimiento para obtener las cotas analíticas, también en el contexto de la técnica QFT, y se propuso su aproximación mediante series de Fourier con su correspondiente ajuste.

Con base en dichos métodos, en esta sección se propone un procedimiento para el diseño de controladores robustos mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas. Además, también se presentan “The edge Theorem” o también llamado en español “Teorema del borde” y “The mapping Theorem” o también llamado en español el “Teorema del mapeo” (Zhou et al. 2017) [36], ya que son importantes en la aplicación del procedimiento.

El Teorema del borde proporciona condiciones necesarias y suficientes para establecer el contorno de la plantilla de funciones de transferencia con incertidumbre paramétrica afín.

**Teorema 3.2.1.** *Teorema del borde (Zhou et al. 2017) [36]. La plantilla de la familia polinomial  $P(s, Q) = \{ P(s, q) = \sum_i a_i(q)s^i | q \in Q \}$  con funciones de coeficientes afín  $a_i(q)$  para una frecuencia fija siempre es un polígono convexo cuyos vértices son generados por los vértices de  $Q$ . Cuando  $q$  varía en alguna coordenada de  $Q$ , la imagen de  $P(s, q)$  varía en línea recta en el plano complejo.*

Con el teorema anterior se muestra que para funciones con polinomios afín su correspondiente plantilla es un polígono convexo que proviene de la imagen de los vértices de la caja de parámetros.

En el siguiente teorema se muestra que el mapeo de alguno de los bordes de la caja de parámetros  $E(Q)$ , resulta en una línea recta o en un segmento de arco.

**Teorema 3.2.2.** *(Fu, 1990) [31]. Sea  $\omega$  una frecuencia fija y  $E$  un segmento de línea en  $R^1$  con puntos finales denotados por  $q^L$  y  $q^R$  y un punto medio  $q^M$ . Suponer que  $P(j\omega, q)$  es acotada para toda  $q \in E$ , entonces, la plantilla de  $P(j\omega, E)$  es un arco o un segmento de línea en el plano complejo el cual empieza en  $P_L := P(j\omega, q^L)$ , pasa por  $P_M := P(j\omega, q^M)$  y termina en  $P_R := P(j\omega, q^R)$ . El centro del círculo está dado por la intersección de las siguientes dos líneas:*

$$L_1(\alpha) := \frac{P_M + P_L}{2} + j\alpha(P_M - P_L), \alpha \in R \quad (3.2.43)$$

$$L_2(\beta) := \frac{P_R + P_M}{2} + j\beta(P_R - P_M), \beta \in R \quad (3.2.44)$$

y el radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de los puntos  $P_L$ ,  $P_M$  o  $P_R$ . En el caso de que las dos líneas sean paralelas,  $P(j\omega, E)$  se vuelve una línea de  $P_L$  a  $P_R$ .

Por otro lado el Teorema del mapeo ofrece una solución suficiente para el análisis de estabilidad robusta de polinomios con incertidumbre paramétrica multilineal, el teorema es como sigue:

**Teorema 3.2.3.** *Teorema del mapeo (Zhou et al. 2017) [36]. La envolvente convexa de la plantilla de la familia polinomial  $P(s, Q) = \{ P(s, q) = \sum_i a_i(q)s^i | q \in Q \}$  con funciones de coeficientes multilineales  $a_i(q)$  es la envolvente convexa de la imagen de los vértices de  $Q$ .*

En general, el Teorema del mapeo proporciona una condición suficiente para acotar la región en la que existe el conjunto de valores del polinomio. En (Ackermann 1993) [78] se plantea que, en términos prácticos, obtener gráficas de frecuencia del polinomio para una malla suficientemente densa de valores de parámetros es adecuado. Se ha planteado el uso de este teorema para el cálculo de las plantillas para funciones de transferencias con incertidumbre paramétrica multilineal, sin embargo, la solución a través del Teorema de mapeo puede resultar demasiado conservadora. Se ha propuesto trabajar con una malla incrementando el número de puntos hasta que sea suficientemente densa y seleccionar los puntos externos para determinar el borde de la plantilla (Coelingh et al. 1998) [79], aunque las dificultades prácticas de este método aumentan, así como el consumo de recursos computacionales al aumentar el número de puntos de la plantilla.

El procedimiento para calcular plantillas analíticas es propuesto en este trabajo para plantas multilineales que puedan ser representadas mediante subplantas con polinomios intervalo o afín para que exista la posibilidad de que pueda ser considerada la incertidumbre paramétrica completamente incluyendo al peor caso en el diseño.

De esta forma el procedimiento propuesto para diseño de controladores mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas consiste en:

1. Calcular una plantilla para cada subplanta intervalo o afín usando el Teorema del borde, dicha plantilla puede tener la forma de una superficie o de una línea, en caso de que la plantilla

sea una superficie también se conoce como plantilla cerrada, y en caso de que la plantilla sea una línea se conoce como plantilla abierta.

2. Discretizar la plantilla de cada subplanta intervalo o afín obtenida con el Teorema del borde.

3. Calcular las plantillas analíticas usando las plantillas discretas que corresponden a cada subplanta (intervalo o afín). Para las plantillas cerradas calcular las correspondientes plantillas analíticas usando series de Fourier y para las plantillas abiertas calcular las correspondientes plantillas analíticas usando la ecuación de una línea recta o usando la ecuación de una curva de Bezier, seleccionando la ecuación que se ajuste mejor a los datos discretos. Se propone usar la ecuación de una curva de Bezier ya que puede aproximar arcos circulares de manera efectiva para ángulos menores de  $\pi/2$  con un error de  $1.96 \times 10^{-4}$  en el radio, además de que sólo se necesitan cuatro puntos de control ( $P_0, P_1, P_2, P_3$ ) para ajustar la curva a los datos discretos.

4. Operar a las plantillas analíticas de la misma manera en que se realiza la reducción por diagrama de bloques. Debido a que cada plantilla analítica queda representada por una parte real y una parte imaginaria se pueden realizar operaciones aritméticas de la misma manera en que se operan los números complejos. Cada plantilla analítica depende de un parámetro continuo, así que cuando se realiza una operación aritmética el resultado depende de la cantidad de parámetros o plantillas involucradas, es decir, si se operan dos plantillas el resultado depende de dos parámetros, en cambio si se operan tres plantillas analíticas el resultado depende de tres parámetros, siendo el resultado un conjunto de curvas analíticas. El conjunto de curvas analíticas se obtiene al evaluar a los parámetros continuos, donde uno de ellos se mantiene con el valor de variable continua y los demás parámetros se evalúan con valores discretos.

5. Obtener el contorno del conjunto de curvas analíticas, aproximando mediante series de Fourier a las muestras del contorno del conjunto de curvas que se pueden obtener resolviendo las ecuaciones trascendentales (3.2.25) y (3.2.18).

6. Obtener la plantilla analítica que corresponde a la planta multilineal incluyendo el procedimiento para ajuste de plantillas analíticas (mostrado en la Sección 3.2.3), dicho procedimiento se realiza usando el contorno discreto obtenido con el paso anterior para incluir por completo al conjunto de curvas que forman a la plantilla.

7. Repetir los puntos del 1 al 6 para calcular una plantilla analítica ajustada de la planta multi-

lineal para cada frecuencia de trabajo  $\omega_i$ .

8. Calcular las cotas analíticas para cada frecuencia y para cada especificación. En (3.2.28) se usan las plantillas analíticas ajustadas de cada frecuencia  $\omega_i$  para obtener un conjunto de curvas, donde el contorno discreto del conjunto de curvas se aproxima mediante series de Fourier para obtener la cota analítica correspondiente a la especificación, dicha cota analítica se debe ajustar para obtener la cota analítica ajustada que incluye completamente al conjunto de curvas. Este procedimiento se debe repetir para cada frecuencia y para cada especificación.

9. Una vez que se obtuvieron las cotas analíticas ajustadas para todas las frecuencias y para todas las especificaciones, ahora se obtienen los límites globales de la misma manera que en la metodología convencional. En cada frecuencia  $\omega_i$  se grafican todas las especificaciones juntas y se selecciona a la cota más restrictiva de cada fase.

10. Diseñar el controlador que satisface todas las especificaciones en todas las frecuencias.

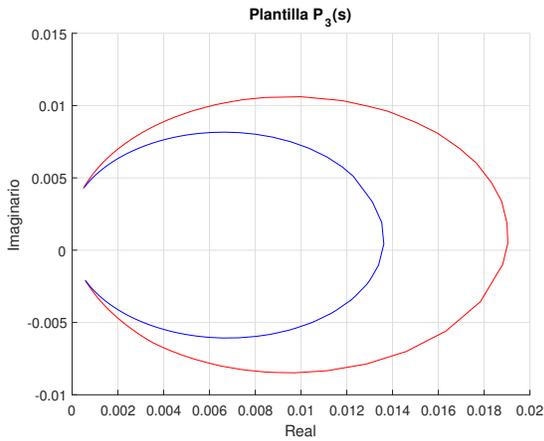
11. Evaluar el desempeño del control robusto en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo.

Finalmente, debe notarse que este procedimiento propuesto para obtener plantillas analíticas necesita menos operaciones que las que se necesitan en el procedimiento mostrado en (Martín R., 2009) [74], además de que se podría incluir completamente a la incertidumbre paramétrica de una planta multilínea representada con subplantas intervalo o afín, y aunque no se comprueba matemáticamente que incluya todas las posibles plantas, sí cumple con el criterio de Ackerman (Ackermann, 1993) [78].

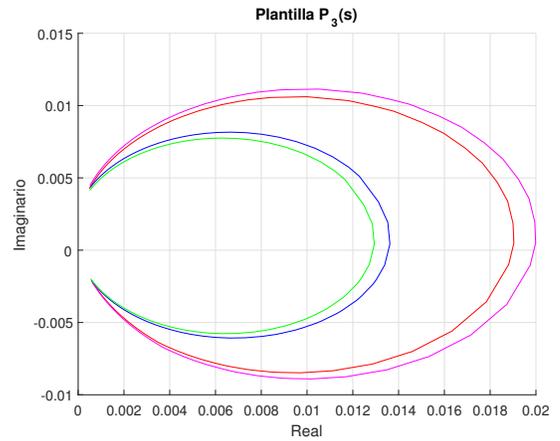
En el Capítulo 4, se aplicará este procedimiento para dos casos de estudio y se muestra que la plantilla resultante cubre la plantilla suficientemente densa obtenida mediante el método de malla de la planta con incertidumbre paramétrica multilínea. El método propuesto en este trabajo, resuelve las desventajas del método propuesto en (Coelingh et al. 1998) [79], ya que no requiere la selección de los puntos externos de una plantilla suficientemente densa para formar el borde de la plantilla, además la plantilla está representada por una sola función, ver Sección 3.2.

### **3.3. Resumen**

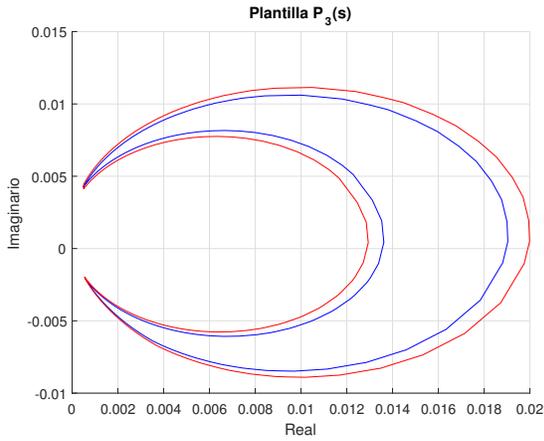
En este capítulo se presentaron los conceptos de cotas y plantillas analíticas. Además se propuso un procedimiento para el ajuste de plantillas analíticas en plantillas discretas convexas y no convexas. También se muestran los procedimientos para operar plantillas analíticas y para calcular cotas analíticas. Finalmente, se propuso un procedimiento para diseñar controladores robustos usando plantillas y cotas analíticas mediante la técnica de QFT.



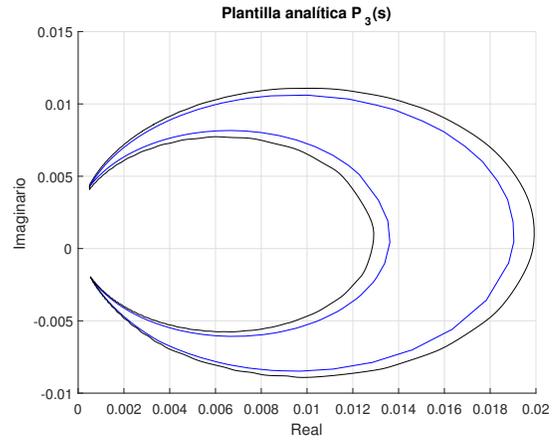
(a) Plantilla no convexa se puede separar en dos secciones, con línea de color azul la sección que se propone reducir y con línea de color rojo la sección que se propone ampliar.



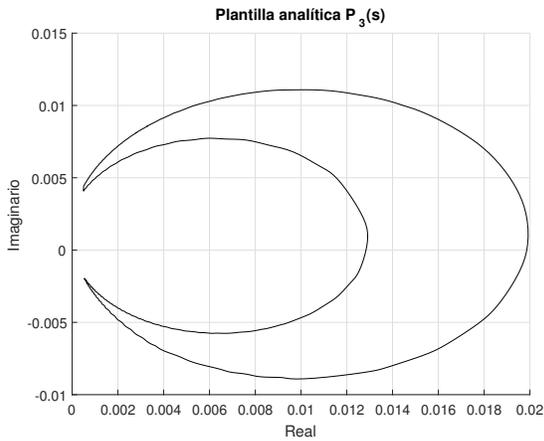
(b) En línea de color verde se muestra la reducción de la sección en un 5% y en color magenta la ampliación de la sección en un 5%.



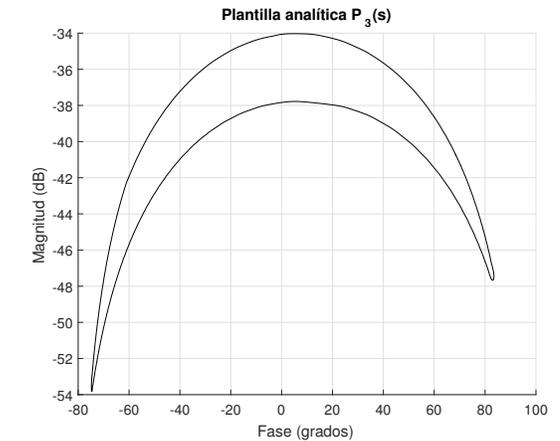
(c) Secciones ampliada y reducida ordenadas para formar un contorno ajustado.



(d) Plantilla analítica ajustada (línea de color negro) que incluye completamente a la plantilla discreta (línea de color azul).



(e) Plantilla analítica ajustada con los primeros 100 términos de la serie de Fourier y 230 muestras.



(f) Plantilla analítica ajustada en la carta de Nichols.

Figura 3.6: Ajuste de la plantilla para la salida de tensión  $\sigma_i$  de un MLC en la frecuencia  $45 \text{ rad/s}$ .

## Capítulo 4

# Casos de Aplicación para el Diseño de Controladores QFT usando Plantillas y Cotas Analíticas

En este capítulo se presentan dos casos de aplicación, el primero es el modelo de un motor de corriente directa y el segundo es el modelo del MLC para la salida de tensión. En ambos casos de aplicación se desarrolla el procedimiento de diseño QFT usando plantillas y cotas analíticas presentado en la Sección 3.2.11.

### 4.1. Caso 1. Modelo de un Motor CD

Un motor de corriente directa (CD) consiste de una parte rotacional o armadura que contiene conductores enrollados alrededor de un núcleo de acero, los cuales tienen una inductancia  $L_a$  y una resistencia  $R_a$ . El conmutador está compuesto de un aro con segmentos de contacto metálicos en la parte móvil y escobillas en la parte fija que conectan los conductores de la armadura móvil con la parte fija del motor. La armadura está dentro de un campo magnético constante  $B$  producido por imanes o electroimanes en el estator. Cuando un voltaje externo  $v(s)$  se aplica a los conductores de la armadura, se produce una corriente  $i_a(s)$  creando un torque  $T_m$  que causa la rotación en la armadura. El voltaje puede ser usado para controlar el par  $T_m$  o la velocidad angu-

lar del motor  $\omega_m$ , por lo que algunas veces se le llama motor controlado por armadura (García S., 2007) [28], (García S., 2017) [80].

El modelo que describe la dinámica del motor de CD, así como su correspondiente diagrama de bloques se muestran en las Figuras 4.1 y 4.2.

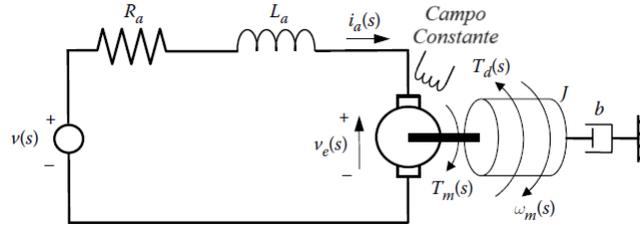


Figura 4.1: Motor de CD controlado por armadura.

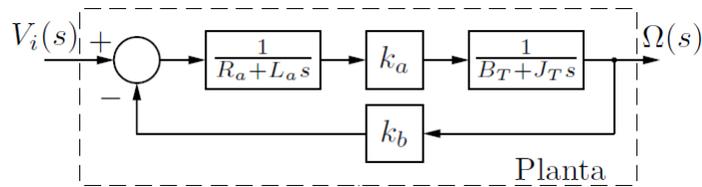


Figura 4.2: Diagrama de bloques del motor de CD controlado por armadura.

El modelo de la planta se puede escribir como sigue:

$$P(j\omega) = \frac{1}{\frac{(R_a + jL_a\omega)(B + jJ\omega)}{k_a} + k_b} \quad (4.1.1)$$

donde  $R_a$  ( $\Omega$ ),  $L_a$  (H) son resistencia e inductancia de armadura respectivamente,  $J$  ( $\text{N m/s}^2$ ) es inercia,  $B$  ( $\text{N m/(rad/s)}$ ) es el coeficiente de amortiguamiento,  $k_a$  ( $\text{N m/A}$ ) y  $k_b$  ( $\text{V/(rad/s)}$ ) son constantes de proporcionalidad. El rango de incertidumbre considerado en los parámetros es el siguiente:  $R_a \in [0.5, 0.7]$ ,  $L_a \in [1 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}]$ ,  $k_a \in [0.04, 0.06]$ ,  $k_b \in [0.04, 0.06]$ ,  $J \in [4 \times 10^{-5}, 8 \times 10^{-5}]$ ,  $B \in [6 \times 10^{-5}, 9 \times 10^{-5}]$ , y los valores nominales son:  $R_{a_{nom}} = 0.07$ ,  $L_{a_{nom}} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $k_{a_{nom}} = 0.04$ ,  $k_{b_{nom}} = 0.04$ ,  $J_{nom} = 6 \times 10^{-5}$ ,  $B_{nom} = 6 \times 10^{-5}$ , (García S., 2017) [80].

El modelo se puede separar en cuatro subplantas:  $P_1(s) = R_a + sL_a$ ,  $P_2(s) = \frac{1}{k_a}$ ,  $P_3(s) = B + Js$  y  $P_4(s) = k_b$ , entonces,

$$P(s) = \frac{1}{P_1(s)P_2(s)P_3(s) + P_4(s)} \quad (4.1.2)$$

donde  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$ ,  $P_3(s)$  y  $P_4(s)$  son plantas con polinomios intervalo y  $P(s)$  es una planta con polinomios multilineales.

Existen diferentes técnicas para obtener la correspondiente plantilla de cada planta. Una plantilla se define como el conjunto de todos los valores posibles de una planta incierta en una frecuencia  $\omega_i$ . En esta tesis se usan: la técnica de “grid” (Yaniv, 1999) [59], (García S., 2017) [80], la técnica del “Teorema del borde” (Fu, 1990) [31], (Zhou,2017) [36] y la técnica de “series de Fourier” (García S., 2007) [28], (Martín R., 2007) [73].

La técnica más común es la técnica “grid” o también llamada en español técnica de “malla”, donde se realizan combinaciones de los parámetros inciertos y se grafica el conjunto de plantas en el plano complejo o en la carta de Nichols.

En plantas con polinomios intervalo o afín, se puede obtener su correspondiente plantilla mediante el Teorema del borde, ya que se pueden obtener los “bordes” de la plantilla a partir de los “bordes” de la caja de parámetros inciertos (ver Sección 3.2.11), (Fu, 1990) [31], (Zhou,2017) [36].

La técnica mediante “series de Fourier” se usa para obtener una plantilla analítica a partir de una plantilla con puntos discretos, con la característica de ser continua y estar representada solamente por una ecuación compleja, que se puede representar en forma rectangular (parte real e imaginaria) o en forma polar (magnitud y fase), y debido a que la plantilla queda representada en forma polar o en forma rectangular se pueden realizar operaciones entre plantillas de la misma manera en la que se operan los número complejos (ver Secciones 3.2.6 - 3.2.8).

En este trabajo, se obtienen las plantillas de subplantas con polinomios intervalo o afín usando la técnica del Teorema del borde, dicha plantilla se discretiza y se usa la técnica de series de Fourier para obtener la correspondiente plantilla analítica, y aprovechando la representación rectangular o polar se realizan operaciones aritméticas entre las subplantillas para finalmente obtener la plantilla de planta completa, sin embargo, cada que se realiza una operación aritmética entre plantillas analíticas, se obtiene un conjunto de curvas analíticas, por lo que el resultado de dicha operación aritmética corresponde con el contorno de dicho conjunto de curvas.

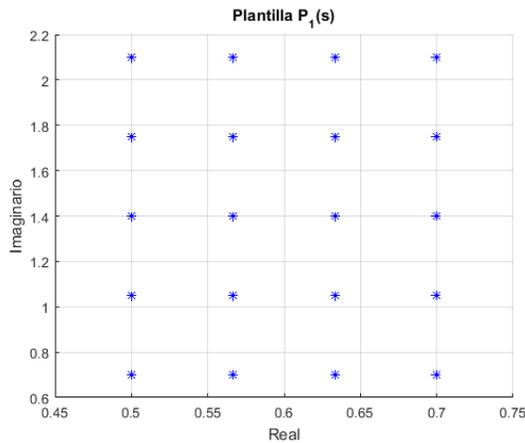
Por consiguiente, se obtienen las plantillas analíticas para cada subplanta  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$ ,  $P_3(s)$  y  $P_4(s)$ , y con estas plantillas se realizan operaciones aritméticas para obtener la plantilla analítica de la planta  $P(s)$ .

En las Figuras 4.3 y 4.5, se muestran los resultados para las plantillas  $P_1(s)$  y  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 700 \text{ rad/s}$ . En el inciso (a) de cada figura se muestran las plantillas obtenidas mediante la técnica de malla. En el inciso (b) las plantillas obtenidas mediante la técnica del Teorema del borde. En el inciso (c) se discretizan las plantillas del inciso (b) para obtener las plantillas analíticas ajustadas mediante la técnica de series de Fourier, y en el inciso (d) se puede observar que las plantillas analíticas ajustadas incluyen completamente a las representaciones mediante la técnica del Teorema del borde y la técnica de malla.

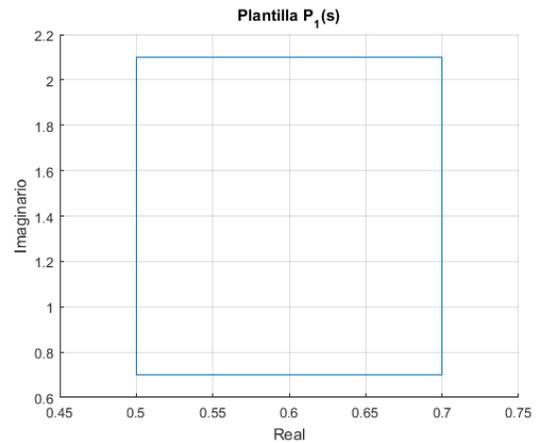
En las Figuras 4.4 y 4.6, se muestran los resultados para las plantillas  $P_2(s)$  y  $P_4(s)$  en la frecuencia  $\omega = 700 \text{ rad/s}$ . En el inciso (a) se muestran las plantillas obtenidas mediante la técnica del Teorema del borde y cada una se modela con la ecuación de una línea recta respectivamente. En el inciso (b) se muestra que las plantillas analíticas incluyen completamente a la representación mediante la técnica de malla.

La plantilla analítica  $P(s)$  en la frecuencia  $\omega = 700 \text{ rad/s}$ , se obtiene al operar las plantillas analíticas ajustadas que corresponden a  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$ ,  $P_3(s)$ ,  $P_4(s)$  (ver Sección 3.2.6). De acuerdo a (4.1.2) las operaciones aritméticas que se deben realizar entre las plantillas analíticas ajustadas, consisten en multiplicar  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  y  $P_3(s)$ , después sumar  $P_4(s)$  y finalmente obtener el inverso de ese resultado con el ajuste correspondiente para obtener la plantilla analítica ajustada  $P(s)$ .

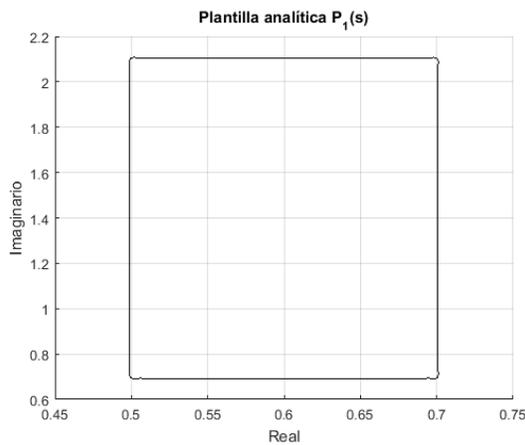
Los resultados de este procedimiento se encuentran en la Figura 4.7. En el inciso (a) se grafica el conjunto de curvas analíticas que resulta de operar las plantillas  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$ ,  $P_3(s)$ ,  $P_4(s)$ . En el inciso (b) se obtienen los puntos del contorno del conjunto de curvas analíticas con (3.2.18) y (3.2.25). En el inciso (c) se usan estas muestras del contorno para obtener la plantilla analítica ajustada  $P(s)$  mediante la técnica de series de Fourier. En el inciso (d) se muestra que la plantilla analítica ajustada  $P(s)$  incluye completamente al conjunto de curvas analíticas del inciso (b). En el inciso (e) se representa la plantilla analítica ajustada  $P(s)$  en la carta de Nichols, y en el inciso (f) dicha plantilla incluye completamente a la plantilla suficientemente densa representada con la técnica de malla.



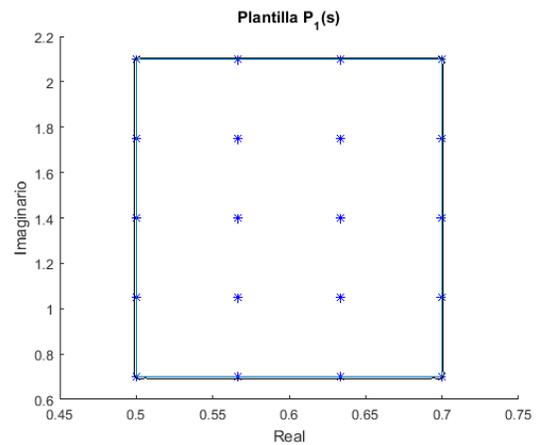
(a) Plantilla  $P_1(s)$  obtenida mediante el método de malla



(b) Plantilla  $P_1(s)$  obtenida mediante el Teorema del borde



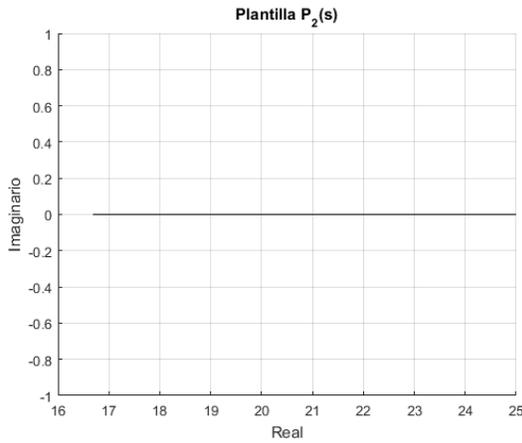
(c) Plantilla analítica ajustada  $P_1(s)$  calculada con 1600 muestras y los primeros 100 términos de la serie de Fourier.



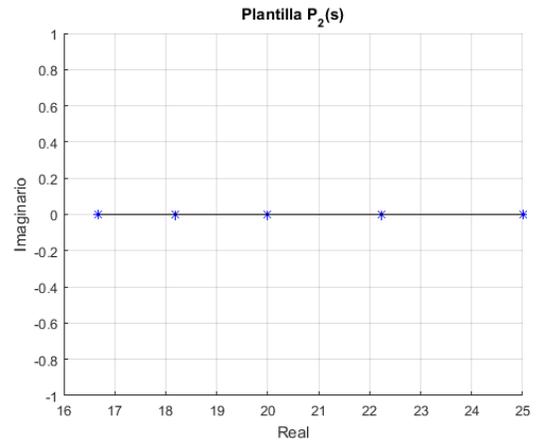
(d) Plantilla analítica ajustada  $P_1(s)$  incluye completamente a las plantillas obtenidas con el método de malla y el Teorema del borde.

Figura 4.3: Plantilla  $P_1(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.

En el Capítulo 3 se mencionó que no se comprueba matemáticamente que se incluyen todas las posibles plantas, pero sí se cumple con el criterio de Ackerman (Ackermann, 1993) [78], agregando las ventajas de una plantilla analítica.



(a) Plantilla analítica  $P_2(s)$  modelada con la ecuación de una línea recta



(b) Plantilla analítica  $P_2(s)$  incluye completamente a la plantilla obtenida con el método de malla

Figura 4.4: Plantilla  $P_2(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.

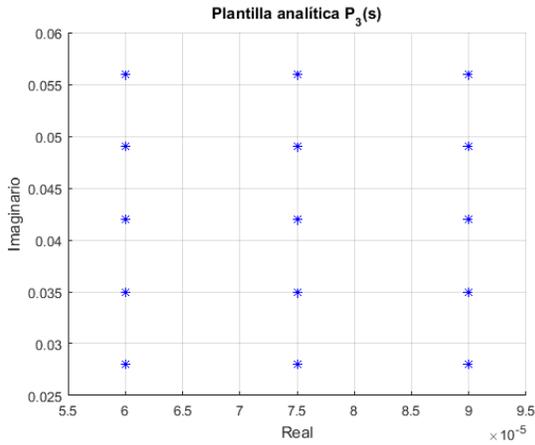
En la Figura 4.8, se muestran las plantillas analíticas ajustadas  $P(s)$  en la carta de Nichols para las frecuencias  $\omega \in [1, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 500, 700, 1000, 2000, 5000, 10000] \text{ rad/s}$ .

### 4.1.1. Cotas analíticas para el Motor de CD

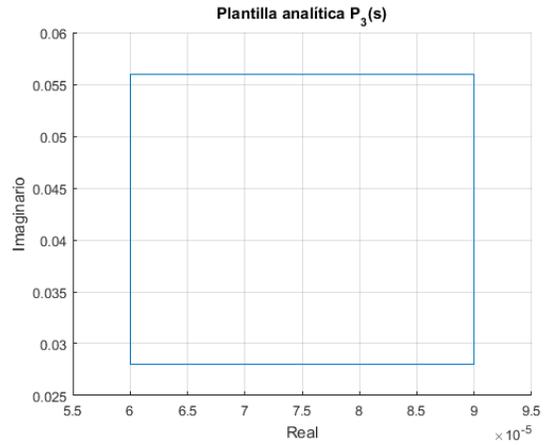
El procedimiento de diseño para el control mediante la técnica QFT, consiste en utilizar plantillas para obtener cotas, las cuales son los límites (máximo y/o mínimo) de la función de transferencia de lazo abierto nominal  $L_o(j\omega) = P_o(j\omega)G(j\omega)$  en cada frecuencia, donde  $P_o(j\omega)$  es la planta nominal y  $G(j\omega)$  es el control que garantiza que se satisfacen las especificaciones de lazo cerrado para todas las plantas del conjunto incierto, y las especificaciones QFT se pueden formular como desigualdades de magnitud para la respuesta deseada en funciones de transferencia de lazo cerrado representadas en frecuencia.

Como se mencionó en la Sección 3.2.10, una especificación de control QFT puede ser expresada como una familia de circunferencias, de tal forma que con puntos del contorno de dicha familia de circunferencias y usando series de Fourier se puede obtener una cota analítica (Martín R., 2009) [74].

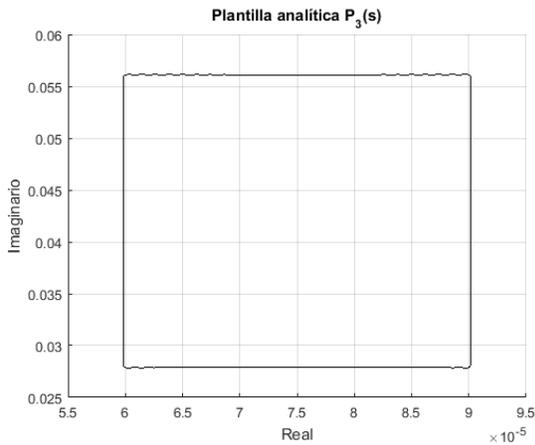
La especificación de estabilidad se puede definir mediante la función sensibilidad complementaria como se muestra en la siguiente ecuación:



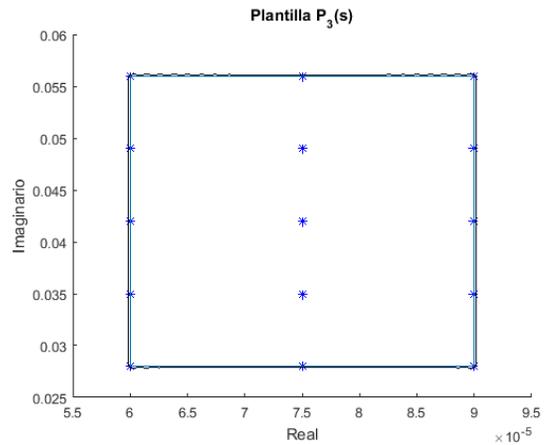
(a) Plantilla  $P_3(s)$  obtenida mediante el método de malla



(b) Plantilla  $P_3(s)$  obtenida mediante el Teorema del borde



(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  calculada con 1600 muestras y los primeros 100 términos de la serie de Fourier.



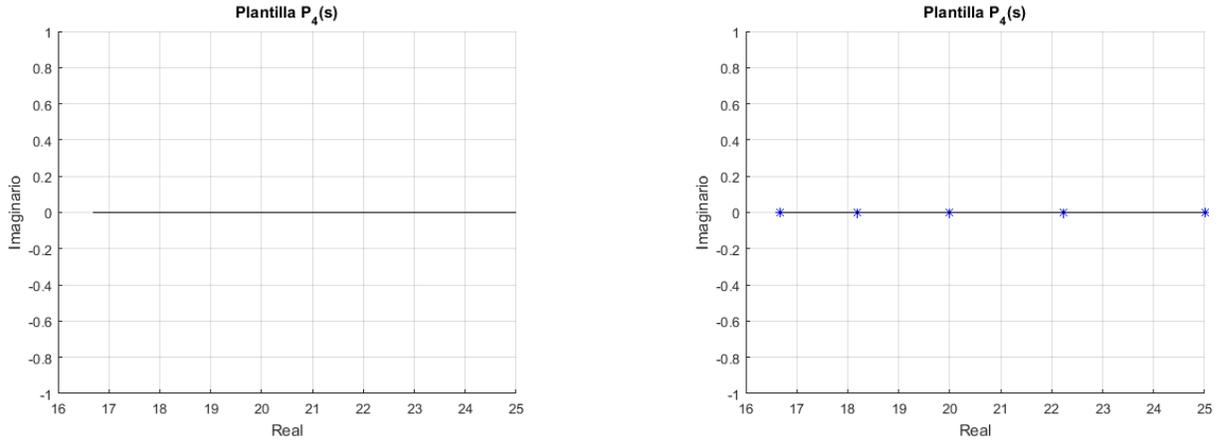
(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  incluye completamente a las plantillas obtenidas con el método de malla y el Teorema del borde

Figura 4.5: Plantilla  $P_3(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) \quad (4.1.3)$$

donde  $\delta_1(\omega) = 1.46$ , es la magnitud de la especificación en el dominio de la frecuencia, para el motor de CD en  $\omega \in [1, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 500, 700, 1000, 2000, 5000, 10000] \text{ rad/s}$  (García Sanz, 2017) [80].

Se obtiene una cota para cada frecuencia y en la Figura 4.9, se muestra el procedimiento para obtener la cota sensibilidad complementaria  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  (ver 4.1.3). En el



(a) Plantilla analítica  $P_4(s)$  modelada como la ecuación de una línea recta

(b) Plantilla analítica  $P_4(s)$  incluye completamente a la plantilla obtenida con el método de malla

Figura 4.6: Plantilla  $P_4(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.

inciso (a) se muestra el conjunto de círculos que forman a la cota  $T(s)$ , en el inciso (b) el contorno discreto del conjunto de círculos, en el inciso (c) la cota analítica  $T(s)$  obtenida al aproximar las muestras del contorno discreto del conjunto de círculos mediante series de Fourier, en el inciso (d) se realiza un ajuste a la cota analítica  $T(s)$  para incluir completamente al contorno discreto, en el inciso (e) la cota analítica  $T(s)$  representada en la carta de Nichols y en el inciso (f) la cota analítica  $T(s)$  representada en la carta de Nichols contiene completamente en su interior al conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$ .

Ahora, en la siguiente ecuación se define la especificación para el rechazo de perturbaciones a la salida de la planta mediante la función sensibilidad  $S(s)$ .

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega) \quad (4.1.4)$$

donde  $\delta_2(s) = \frac{s/1000}{1+s/1000}$ , para el motor de CD en  $\omega \in [1, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 500, 700, 1000] \text{ rad/s}$  (García Sanz, 2017) [80].

Como se mencionó anteriormente, se obtiene una cota para cada frecuencia. En la Figura 4.10, se muestra el procedimiento para obtener la cota sensibilidad  $S(s)$  de (4.1.4) en la frecuencia  $\omega = 700 \text{ rad/s}$ . En el inciso (a) se muestra el conjunto de círculos que forman la cota  $S(s)$ , en el inciso (b) los círculos están representados en la carta de Nichols y en el inciso (c) se selecciona la curva

más restrictiva que corresponde con la cota  $S(s)$ .

De la misma forma que en las cotas anteriores, ahora en la siguiente ecuación se define la especificación para seguimiento.

$$\delta_{lo}(\omega) \leq \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{up}(\omega) \quad (4.1.5)$$

donde  $\delta_{lo}(s) = \frac{1}{[1+(s/1000)]^2}$  y  $\delta_{up}(s) = \frac{1+s/1000}{1+0.001024s+(s/1562.5)^2}$ , son las funciones que acotan inferiormente y superiormente a la especificación de seguimiento para las siguientes frecuencias:

$\omega \in [1, 5, 10, 50, 100, 200, 300, 500, 700, 1000, 2000, 5000] \text{ rad/s}$  (García Sanz, 2017) [80].

También se obtiene una cota para cada frecuencia. En la Figura 4.11, se muestra el procedimiento para obtener la cota de la especificación de seguimiento para la frecuencia  $\omega = 700 \text{ rad/s}$ , ver (4.1.5). En el inciso (a) se presenta el conjunto de círculos que forman a la cota de seguimiento. En el inciso (b) se obtiene el contorno del conjunto de círculos que forman a la cota de seguimiento. En el inciso (c) se obtiene la cota analítica ajustada para la especificación de seguimiento al aproximar mediante series de Fourier a las muestras del contorno del conjunto de círculos del inciso (b). En el inciso (d) la cota analítica ajustada de seguimiento incluye completamente al conjunto círculos y en el inciso (e) se representa la cota analítica ajustada de seguimiento en la carta de Nichols.

El procedimiento para obtener cada cota se debe repetir para cada frecuencia. Una vez que se obtuvieron todas las cotas para todas las frecuencias, se deben seleccionar los segmentos de cota más restrictivos para cada frecuencia, esto es, todas las cotas de la misma frecuencia se grafican juntas y para cada fase se obtiene un límite global que corresponde con la cota más restrictiva, como se muestra en la Figura 4.12 para  $\omega = 700 \text{ rad/s}$ , se grafican (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5).

En la Figura 4.13 se muestra el resultado para todas las especificaciones de cada frecuencia, incluyendo los límites globales.

### 4.1.2. Diseño del control QFT usando plantillas y cotas analíticas para el Motor de CD

Ahora se diseña el control usando la técnica “loop shaping” o también llamada en español “conformación de lazo”, la cual consiste en graficar en la misma figura a las especificaciones (límites globales) y al lazo abierto nominal  $L_o(j\omega) = P_o(j\omega)G(j\omega)$  en cada frecuencia, donde  $P_o(j\omega)$  es la planta nominal y  $G(j\omega)$  es un control inicial, de tal forma que se deben agregar polos y ceros al control inicial hasta que  $L_o(j\omega)$  satisface las especificaciones en cada frecuencia como se muestra en la Figura 4.14, con lo cual, el control garantiza que se satisfacen las especificaciones de lazo cerrado para todas las plantas del conjunto incierto. El control que resulta es el siguiente:

$$G(s) = \frac{1500((s/55) + 1)((s/1700) + 1)}{s((s/25000) + 1)} \quad (4.1.6)$$

Debido a que el diseño de control también debe satisfacer la especificación de seguimiento, es necesario agregar un prefiltro  $F(s)$ , el cual resulta como se muestra en la siguiente ecuación:

$$F(s) = \frac{1}{(s/1100) + 1} \quad (4.1.7)$$

Finalmente se realiza un análisis de validación, que consiste en verificar el desempeño del sistema de control en el dominio de frecuencia y en el dominio del tiempo. En la Figura 4.15 incisos (a), (b) y (c), se muestran los resultados de la validación en el dominio de la frecuencia y en los incisos (d), (e) y (f) los resultados de la validación en el dominio del tiempo para las cotas  $S(s)$ ,  $T(s)$  y seguimiento, siendo la línea de color rojo la especificación que se satisface en cada caso.

## 4.2. Caso 2. Modelo de un MLC para la salida de tensión $\sigma_i$

En esta sección, de la misma manera que en el ejemplo anterior, se presenta un diseño de control robusto mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas. El ejemplo es para la salida de tensión en un MLC (ver Sección 2.1.3).

La función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  del MLC, se puede calcular mediante operaciones aritméticas entre las siguientes funciones de transferencia, como se muestra a continuación:

$$F_1(s) = \frac{\frac{1}{M_i} k_{\sigma_i}^{P_i}}{1 - \frac{1}{M_i} k_{h_i}^{P_i}} \quad (4.2.1)$$

$$F_2(s) = \frac{\frac{1}{M_{i+1}} k_{h^+}^{b^+}}{1 - \frac{1}{M_{i+1}} k_{h^+}^{P^+}} \quad (4.2.2)$$

$$F_3(s) = \frac{1}{J_i s + D} \quad (4.2.3)$$

$$F_4(s) = \frac{F_3(s)}{1 + k_{\theta_i}^{\tau_i} \frac{F_3(s)}{s}} = \frac{s}{J_i s^2 + Ds + k_{\theta_i}^{\tau_i}} \quad (4.2.4)$$

$$F_5(s) = \frac{\frac{E_i}{L_i s}}{1 - \frac{E_i}{L_i s} F_1(s) k_{h_i}^{f_i} V_i} \quad (4.2.5)$$

$$F_6(s) = \frac{F_5(s)}{1 + F_5(s) \left( \frac{F_1(s) k_{H^+}^{b^+} V_{i+1}}{1 + T_{D_i} s} \right)} \quad (4.2.6)$$

$$F_7(s) = \frac{F_6(s)}{1 + F_6(s) \left( \frac{F_1(s) k_{H^+}^{P^+} V_{i+1} F_2(s)}{1 + T_{D_i} s} \right)} \quad (4.2.7)$$

$$F_8(s) = \frac{F_7(s)}{1 + F_7(s) V_{i+1} F_2(s) k_{\sigma_i}^{P^+}} \quad (4.2.8)$$

$$F_{11}(s) = \frac{F_4(s)k_{\theta_i}^{L_i}F_8(s)}{1 + F_4(s)k_{\theta_i}^{L_i}F_8(s)k_{\sigma_i}^{\tau_i}} \quad (4.2.9)$$

$$P_3(s) = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\tau_{r_i}} = \frac{F_{11}(s)}{T_{T_L}s + 1} \quad (4.2.10)$$

La función de transferencia  $F_3(s)$  de (4.2.3) es necesaria para calcular la función de transferencia  $F_4(s)$  mostrada en (4.2.4), y (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5) - (4.2.7) son necesarias para calcular la función de transferencia  $F_8(s)$  de (4.2.8). Las funciones de transferencia de (4.2.4) y (4.2.8) contienen polinomios intervalo, y son necesarias para calcular la función de transferencia  $F_{11}(s)$  de (4.2.9) y con esta última calcular la función de transferencia  $P_3(s)$  que relaciona a la entrada  $\tau_{r_i}$  con la salida  $\sigma_i$  en (4.2.10) que contiene polinomios con incertidumbre multilineal.

El procedimiento para obtener la plantilla analítica para la salida de tensión  $\sigma_i$ , es el que se muestra en la Sección 3.2.11, por lo que se deben calcular las plantillas analíticas que corresponden a las subplantas de las funciones de transferencia  $F_4(s)$  y  $F_8(s)$  de (4.2.4) y (4.2.8), con las que se realizan operaciones aritméticas como se describió en la Sección 3.2.6 para obtener un conjunto de curvas analíticas, donde el contorno del conjunto de curvas se aproxima mediante series de Fourier para finalmente obtener la plantilla analítica para la salida de tensión  $P_3(s)$ .

La función de transferencia  $F_4(s)$  de (4.2.4) contiene polinomios intervalo, por lo que se puede utilizar el Teorema de borde para obtener su correspondiente plantilla, la cual resulta en una superficie cerrada por lo que también se le puede llamar plantilla cerrada, esta plantilla se discretiza en  ${}^d T_{\omega_i}^{F_4}$ . Las muestras discretas de la parte real e imaginaria ( ${}^d \mathcal{R}^{F_4}[k]$ ,  ${}^d \mathcal{I}^{F_4}[k]$ ) de la plantilla discreta cerrada  ${}^d T_{\omega_i}^{F_4}$  se aproximan mediante series de Fourier para obtener una plantilla analítica  $T_{\omega_i}^{F_4}(\varphi)$  (ver Figura 4.16).

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{F_4}(\varphi) &= A_{r0} + B_{r1} \sin \varphi + A_{r1} \cos \varphi + B_{r2} \sin 2\varphi + \dots \\ \mathcal{I}^{F_4}(\varphi) &= A_{i0} + B_{i1} \sin \varphi + A_{i1} \cos \varphi + B_{i2} \sin 2\varphi + \dots \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{r0} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d \mathcal{R}^{F_4}[k] \\ A_{rl} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n d \mathcal{R}^{F_4}[k] \cos(l^d \varphi[k]) \\ B_{rl} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n d \mathcal{R}^{F_4}[k] \sin(l^d \varphi[k]) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} A_{i0} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d \mathcal{I}^{F_4}[k] \\ A_{il} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n d \mathcal{I}^{F_4}[k] \cos(l^d \varphi[k]) \\ B_{il} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n d \mathcal{I}^{F_4}[k] \sin(l^d \varphi[k]) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

para  $n = 3360$  muestras y  $l = 100$  términos de la serie de Fourier.

De la misma manera, la función de transferencia  $F_8(s)$  de (4.2.8) contiene polinomios de la forma intervalo, sin embargo en este caso resulta una línea, por lo que también se le llama plantilla abierta y debido al Teorema del borde esta línea está formada por secciones y al no ser una línea recta se propone usar una curva de Bezier [81–85], para aproximar las muestras discretas de  ${}^d T_{\omega_i}^{F_8}$  a una plantilla analítica  $T_{\omega_i}^{F_8}(t)$  quedando representada por una sola ecuación con parte real e imaginaria. Se decidió usar curvas de bezier por su simplicidad, ya que se pueden ajustar sólo con cuatro puntos de control ( $P_0, P_1, P_2, P_3$ ) y además pueden aproximar arcos circulares de manera efectiva para ángulos menores de  $\pi/2$  con un error de  $1.96 \times 10^{-4}$  en el radio (Riskus, 2006) [86], (Dindis, 2018) [29].

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{F_8}(t) &= P_{x_0}(1-t)^3 + P_{x_1}(3t)(1-t)^2 + P_{x_2}(3t^2)(1-t) + P_{x_3}(t^3) \\ \mathcal{I}^{F_8}(t) &= P_{y_0}(1-t)^3 + P_{y_1}(3t)(1-t)^2 + P_{y_2}(3t^2)(1-t) + P_{y_3}(t^3) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

donde  $P_0 = (P_{x_0}, P_{y_0})$ ,  $P_1 = (P_{x_1}, P_{y_1})$ ,  $P_2 = (P_{x_2}, P_{y_2})$ ,  $P_3 = (P_{x_3}, P_{y_3})$ , son los puntos de control que permiten aproximar los puntos discretos de  ${}^d T_{\omega_i}^{F_8}$  a una curva de Bezier  $T_{\omega_i}^{F_8}(t)$ , (ver Figura 4.17).

Las plantillas analíticas  $T_{\omega_i}^{F_4}$  y  $T_{\omega_i}^{F_8}$  se representan como funciones complejas con parte real y parte imaginaria, por lo que se pueden realizar operaciones aritméticas de la misma forma en

que se realizan operaciones con números complejos, de tal forma que la multiplicación de las dos plantillas es la siguiente.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{F_8 F_4}(t, \varphi) &= \mathcal{R}^{F_8}(t) \mathcal{R}^{F_4}(\varphi) - \mathcal{I}^{F_8}(t) \mathcal{I}^{F_4}(\varphi) \\ \mathcal{I}^{F_8 F_4}(t, \varphi) &= \mathcal{R}^{F_8}(t) \mathcal{I}^{F_4}(\varphi) + \mathcal{I}^{F_8}(t) \mathcal{R}^{F_4}(\varphi)\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

Ahora, se pueden obtener las plantillas analíticas  $T_{\omega_i}^{F_{11N}}$  y  $T_{\omega_i}^{F_{11D}}$  que corresponden al numerador y denominador de  $F_{11}(s)$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= (K_{\theta_i}^{L_i})(\mathcal{R}^{F_8 F_4}(t, \varphi)) \\ \mathcal{I}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= (K_{\theta_i}^{L_i})(\mathcal{I}^{F_8 F_4}(t, \varphi))\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= (K_{\sigma_i}^{T_i})(\mathcal{R}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi)) + 1 \\ \mathcal{I}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= (K_{\sigma_i}^{T_i})(\mathcal{I}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi))\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

Para calcular  $T_{\omega_i}^{F_{11}}$  se realiza la división del numerador  $T_{\omega_i}^{F_{11N}}$  entre el denominador  $T_{\omega_i}^{F_{11D}}$ , dicha división de plantillas analíticas se puede realizar con el procedimiento de multiplicación de plantillas analíticas, calculando el inverso de la plantilla del denominador.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{F_{11D}inv}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= \frac{\mathcal{R}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi)}{(\mathcal{R}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi))^2 + (\mathcal{I}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi))^2} \\ \mathcal{I}^{F_{11D}inv}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= \frac{-\mathcal{I}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi)}{(\mathcal{R}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi))^2 + (\mathcal{I}^{F_{11D}}(K_{\sigma_i}^{T_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi))^2}\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{F_{11}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= \mathcal{R}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \mathcal{R}^{F_{11D_{inv}}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \\
&\quad - \mathcal{I}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \mathcal{I}^{F_{11D_{inv}}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \\
\mathcal{I}^{F_{11}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= \mathcal{R}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \mathcal{I}^{F_{11D_{inv}}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \\
&\quad + \mathcal{I}^{F_{11N}}(K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \mathcal{R}^{F_{11D_{inv}}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi)
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Ahora se define la función de transferencia  $F_{12}(s)$ .

$$F_{12}(s) = \frac{1}{T_5 s + 1} \tag{4.2.20}$$

De tal forma que se puede definir la plantilla analítica  $T_{\omega_i}^{F_{12}}$ , con parte real e imaginaria ( $\mathcal{R}^{F_{12}}, \mathcal{I}^{F_{12}}$ ), debe notarse que  $T_5$  dado que no es incierto es una constante y la plantilla analítica es un punto complejo, entonces, se puede realizar la multiplicación con la plantilla analítica  $T_{\omega_i}^{F_{11}}$  y de esta manera calcular la plantilla analítica  $T_{\omega_i}^{P_3}$  de la función de transferencia  $P_3(s)$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{P_3}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= \mathcal{R}^{F_{12}} \mathcal{R}^{F_{11}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) - \mathcal{I}^{F_{12}} \mathcal{I}^{F_{11}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) \\
\mathcal{I}^{P_3}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) &= \mathcal{R}^{F_{12}} \mathcal{I}^{F_{11}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi) + \mathcal{I}^{F_{12}} \mathcal{R}^{F_{11}}(K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi)
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Finalmente, debe notarse que al evaluar los parámetros  $K_{\sigma_i}^{\tau_i}, K_{\theta_i}^{L_i}, t, \varphi$  en (4.2.21), considerando que uno de los parámetros es una variable continua y los demás parámetros valores discretos, se obtiene un conjunto de curvas analíticas, de tal forma que se puede utilizar el procedimiento mostrado en (Martín R., 2007) [73], (García S., 2007) [28], para determinar puntos del contorno que pueden ser obtenidos con (3.2.18) y (3.2.25). Los puntos del contorno se aproximan mediante series de Fourier a la plantilla analítica  $T_{\omega_i}^{P_3}$  (ver Figura 4.18). Este procedimiento se debe repetir para varias frecuencias, las cuales son seleccionadas dependiendo la aplicación y las especificaciones de diseño, por lo tanto, se obtiene una plantilla para cada frecuencia. La plantilla analítica incluye completamente a la plantilla suficientemente densa representada con la técnica de malla, y como se menciona en el caso anterior (caso 1), no se comprueba matemáticamente que se incluye a todas las posibles plantas, pero sí cumple con el criterio de Ackerman (Ackermann, 1993) [78], con las ventajas de una plantilla analítica.

Para la salida de tensión del MLC, se seleccionaron las frecuencias  $\omega = [2, 36, 45, 68, 105, 250]$

$rad/s$ . En la Figura 4.19, se muestran las plantillas analíticas en la carta de Nichols que resultan para cada frecuencia.

### 4.2.1. Cotas analíticas $S(s)$ y $T(s)$ para el MLC

El diseño del controlador robusto mediante la técnica QFT, es tal que, el lazo abierto  $L(s) = G(s)P_3(s)$ , satisface las especificaciones sensibilidad  $S(s)$  y sensibilidad complementaria  $T(s)$ , donde  $P_3(s)$  es la planta incierta y  $G(s)$  es el controlador.

La especificación para el rechazo de perturbaciones a la salida de la planta mediante la función sensibilidad  $S(s)$ , se acota como sigue para las frecuencias  $\omega \in [2, 36, 45, 68, 105, 250]$   $rad/s$  (Don Juan Ríos, 2016) [68].

$$S(s) = \frac{1}{L(s) + 1} < 1.2 \quad (4.2.22)$$

La especificación para la estabilidad se puede representar mediante la función sensibilidad complementaria  $T(s)$ , y se acota como sigue para las mismas frecuencias de (4.2.22).

$$T(s) = \frac{L(s)}{L(s) + 1} < \frac{0.02(s^3 + 64s^2 + 748s + 2400)}{s^2 + 14.4s + 169} \quad (4.2.23)$$

Se selecciona como planta nominal la siguiente:

$$P_{3_{nom}}(s) = \frac{P_{3_{nomN}}(s)}{P_{3_{nomD}}(s)} \quad (4.2.24)$$

donde  $P_{3_{nomN}}(s) = -23160s^2 - 11350s$ ,  $P_{3_{nomD}}(s) = 2.379 \times 10^8 s^5 + 2.172 \times 10^9 s^4 + 4.613 \times 10^{11} s^3 + 2.674 \times 10^{12} s^2 + 2.021 \times 10^{12} s + 3.178 \times 10^{11}$ .

Se obtiene una cota para cada especificación  $S(s)$  y  $T(s)$  en cada frecuencia  $\omega \in [2, 36, 45, 68, 105, 250]$   $rad/s$ .

En las Figuras 4.20 - 4.21, se muestran los resultados obtenidos para  $S(s)$  y  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 68 rad/s$ , en el inciso (a) se presenta a el conjunto de circunferencias con las que se puede formar la cota analítica, en el inciso (b) los puntos del contorno del conjunto de circunferencias, los cuales usando series de Fourier se aproximan a la cota analítica ajustada para que se incluya

completamente al conjunto de circunferencias y en los incisos (c) - (d) se representa a la cota analítica en el plano complejo y en la carta de Nichols respectivamente.

El procedimiento se repite para cada frecuencia  $\omega \in [2, 36, 45, 68, 105, 250]$   $rad/s$  en ambas especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$ .

#### 4.2.2. Conformación de lazo.

Una vez que se han obtenido todas las cotas para todas las frecuencias, se deben obtener los límites globales, los cuales se obtienen al graficar todas las especificaciones para una misma frecuencia, y se selecciona la cota más restrictiva en cada fase, este procedimiento se debe realizar para cada frecuencia, de tal forma que para diseñar el controlador, se deben satisfacer todos los límites globales, Figura 4.22 inciso (a).

El controlador se diseña agregando polos y ceros hasta que todas las especificaciones se satisfacen, el resultado para el controlador es el siguiente:

$$G(s) = \frac{-1.2595 \times 10^{14}(s + 0.2)(s + 3.5)(s^2 + 10s + 1394)}{s^2(s + 19500)(s + 31000)} \quad (4.2.25)$$

En la Figura 4.22 inciso (b) se muestra que todas las especificaciones se satisfacen con el controlador propuesto.

Para verificar el desempeño del sistema de control, se realiza un análisis de validación en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. Los resultados de validación para las cotas  $S(s)$  y  $T(s)$  se encuentran en la Figura 4.23, donde la línea de color rojo es la especificación que se satisface en cada caso.

Finalmente en las Figuras 4.24 - 4.25 se comparan los resultados obtenidos para las cotas  $S(s)$  y  $T(s)$  con el procedimiento analítico y con el procedimiento clásico de la técnica QFT, donde se puede observar que las cotas clásicas (línea roja) no garantizan incluir el peor caso en el diseño, en cambio las cotas analíticas (línea negra) son más restrictivas y por lo tanto son más conservadoras.

### 4.3. Conclusiones

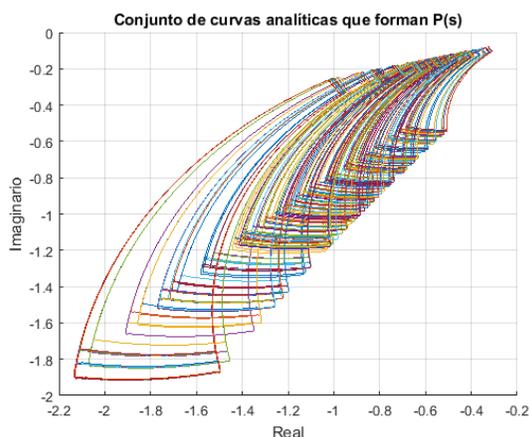
En este capítulo se diseñaron controladores robustos mediante la técnica QFT usando plantillas y cotas analíticas para dos casos de estudio.

Se calcularon plantillas analíticas ajustadas para plantillas discretas convexas y no convexas. Las plantillas analíticas incluyen completamente a las plantillas suficientemente densas representadas con la técnica de malla, y aunque no se comprueba matemáticamente que se incluya a todas las posibles plantas, sí cumplen con el criterio de Ackerman (Ackermann, 1993) [78], pero con las ventajas de las plantillas analíticas.

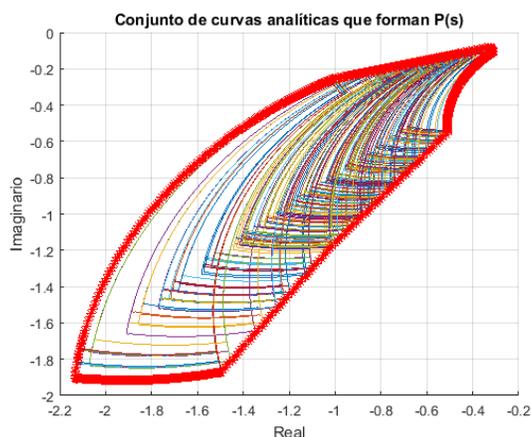
Además se realizaron operaciones aritméticas entre plantillas analíticas y se calcularon cotas analíticas para las funciones sensibilidad  $S(s)$ , sensibilidad complementaria  $T(s)$  y seguimiento. También se diseñaron controladores robustos mediante la técnica de QFT usando plantillas y cotas analíticas ajustadas para dos casos de aplicación: el modelo de un motor CD y la salida de tensión en un MLC.

Finalmente, se compararon los resultados obtenidos de la técnica analítica y la técnica clásica QFT comunmente usada.

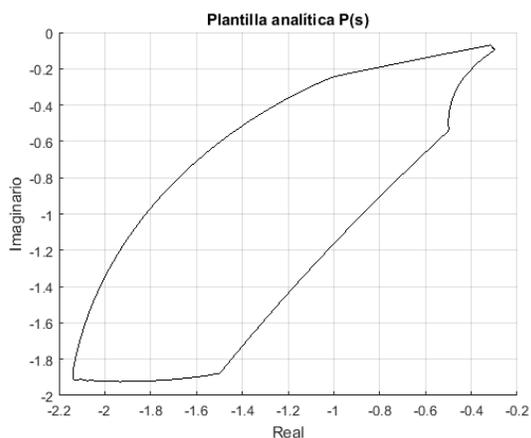
La técnica analítica obtuvo resultados satisfactorios al obtener plantillas y cotas, que incluyen completamente a las obtenidas con la técnica clásica QFT. Aunque las plantillas obtenidas fueron conservadoras, como se mencionó en el capítulo anterior, durante el proceso de diseño se buscó mantener un balance respecto de la complejidad de las mismas. Por lo que se puede concluir que la técnica analítica puede ser utilizada para realizar diseños robustos en sistemas multilíneales que pueden ser representados por subplantas intervalo o afín, además la técnica analítica en comparación con la técnica clásica resulta ser más eficiente computacionalmente.



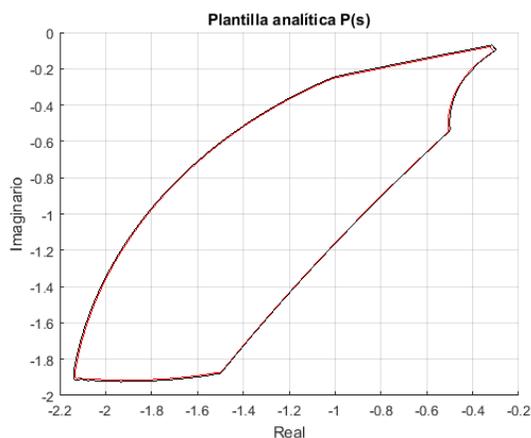
(a) Conjunto de curvas analíticas que forman a la plantilla  $P(s)$



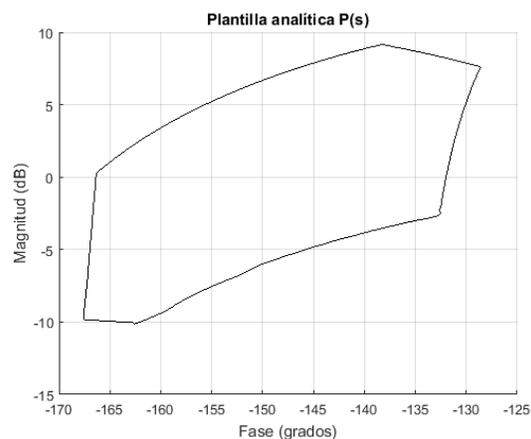
(b) Contorno del conjunto de curvas analíticas que forman a la plantilla  $P(s)$



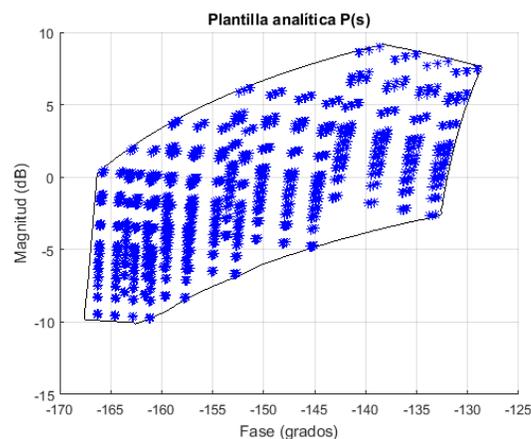
(c) Plantilla analítica ajustada  $P(s)$



(d) Plantilla analítica ajustada  $P(s)$  incluye completamente al contorno del conjunto de curvas analíticas



(e) Plantilla analítica ajustada  $P(s)$  representada en la carta de Nichols



(f) Plantilla analítica ajustada  $P(s)$  incluye completamente a la plantilla obtenida con el método de malla

Figura 4.7: Plantilla  $P(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.

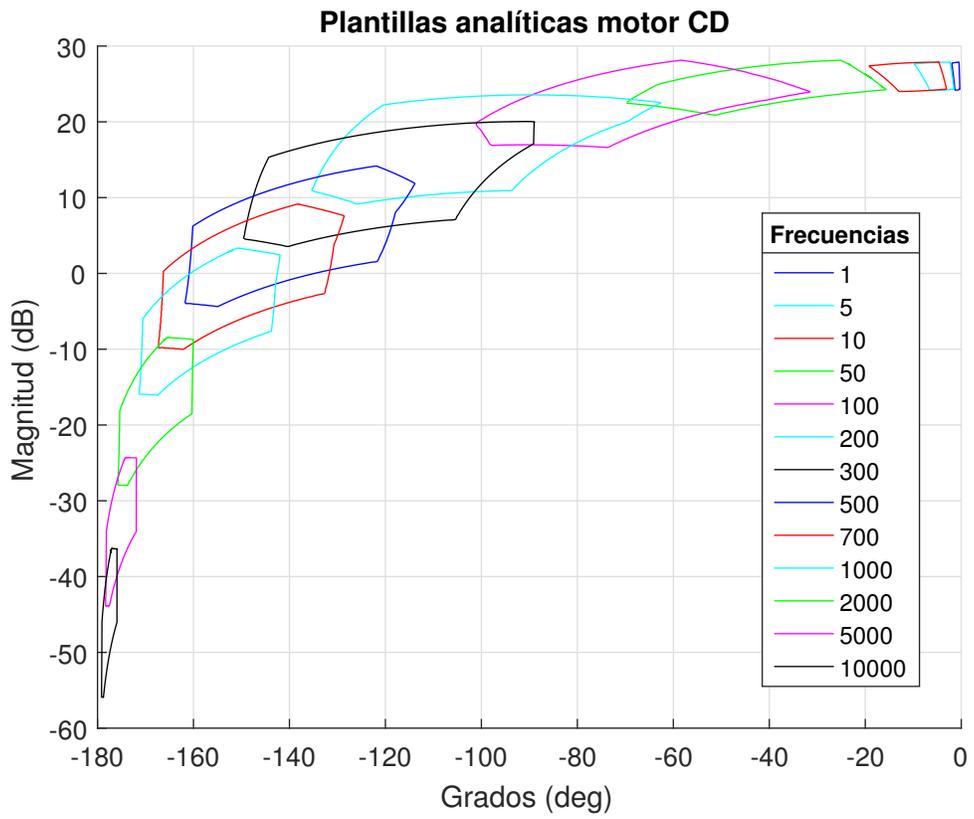
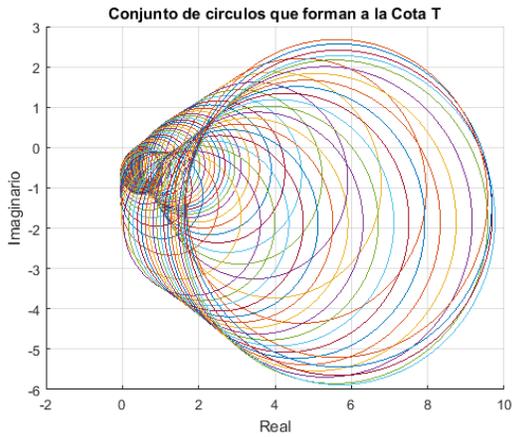
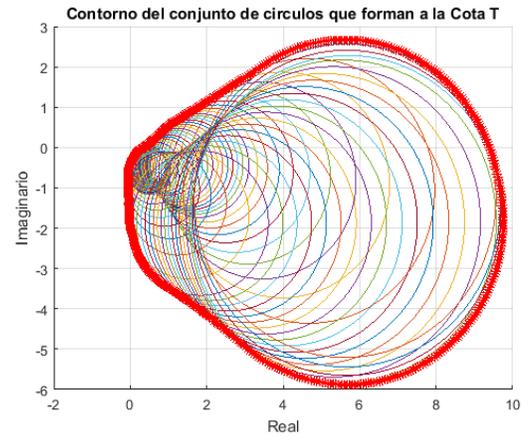


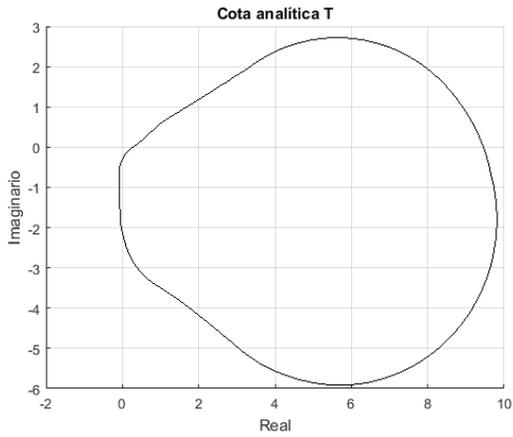
Figura 4.8: Plantillas analíticas ajustadas para el motor de CD.



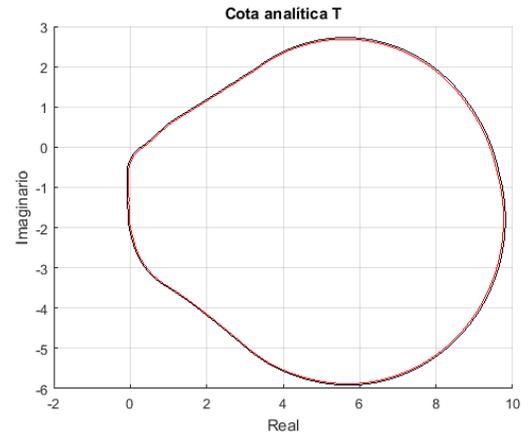
(a) Conjunto de círculos que forman a la Cota  $T(s)$



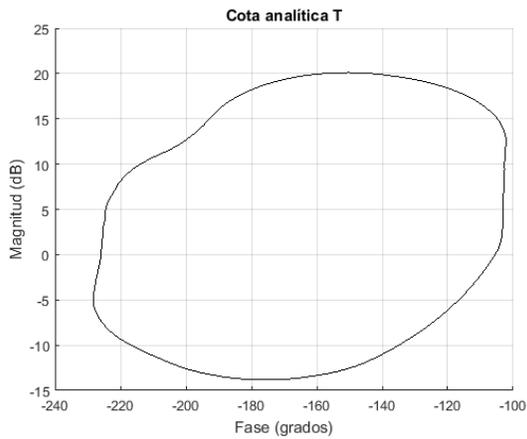
(b) Contorno del conjunto de círculos que forman a la Cota  $T(s)$



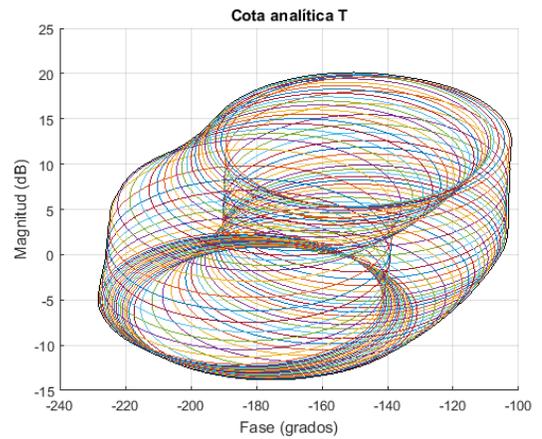
(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$



(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  incluye completamente al contorno del conjunto de círculos

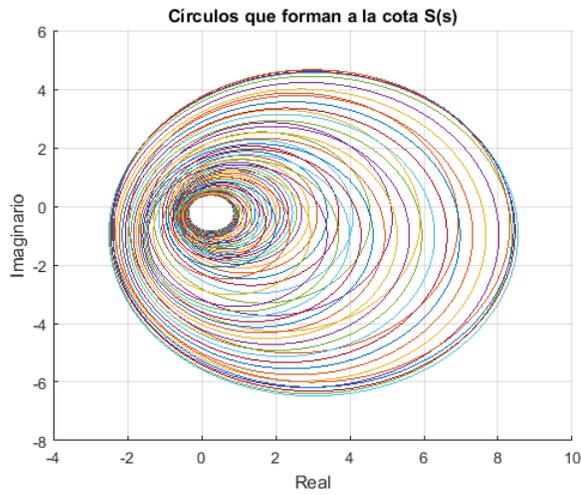


(e) Cota analítica ajustada  $T(s)$  representada en la carta de Nichols

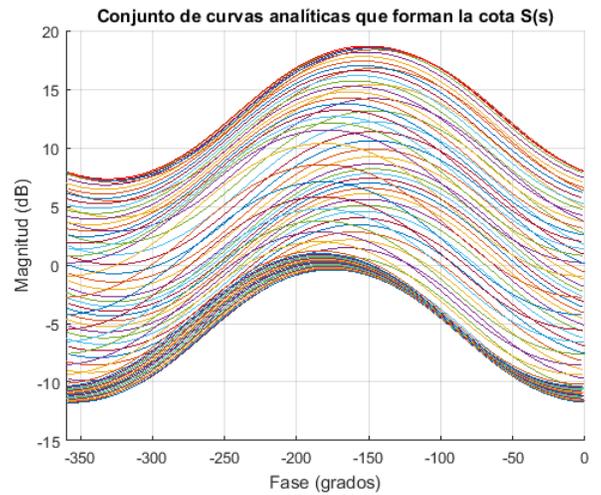


(f) Cota analítica ajustada  $T(s)$  incluye completamente al conjunto de círculos representados en la carta de Nichols

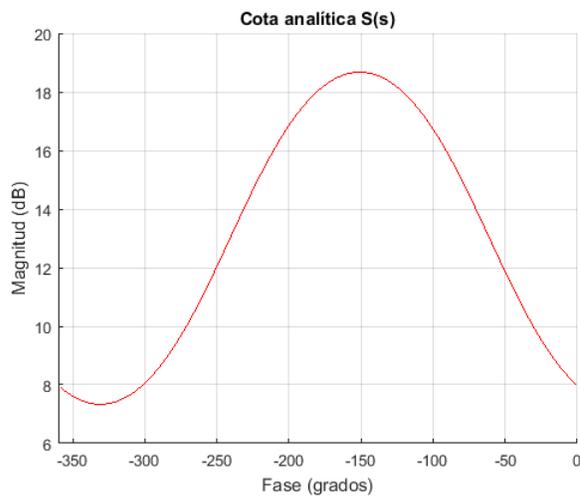
Figura 4.9: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.



(a) Conjunto de círculos que forman a la Cota  $S(s)$

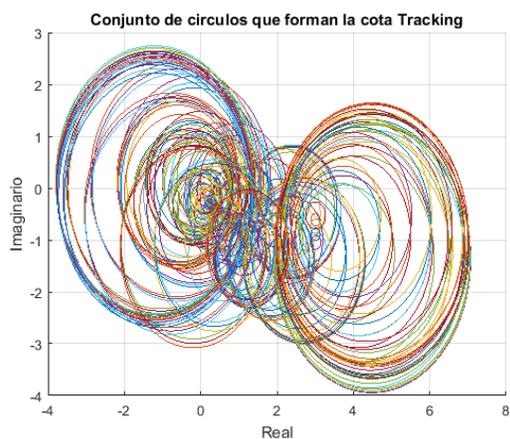


(b) Conjunto de curvas analíticas que forman a la Cota  $S(s)$

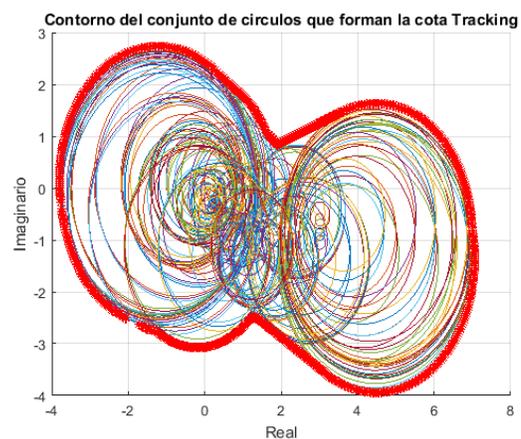


(c) Cota  $S(s)$  corresponde con la curva analítica más restrictiva del conjunto de curvas

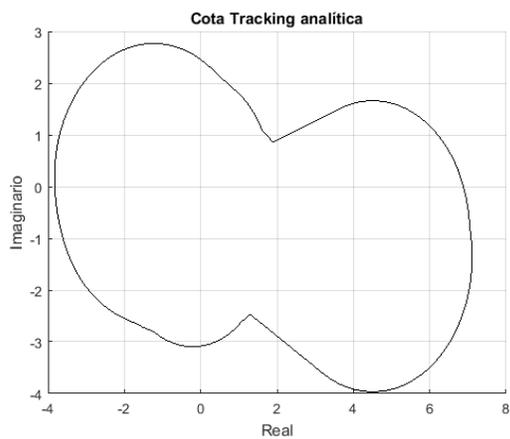
Figura 4.10: Cota analítica ajustada  $S(s)$  en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.



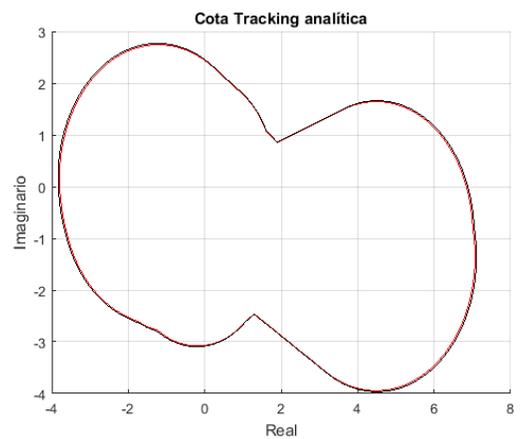
(a) Conjunto de círculos que forman a la Cota de seguimiento



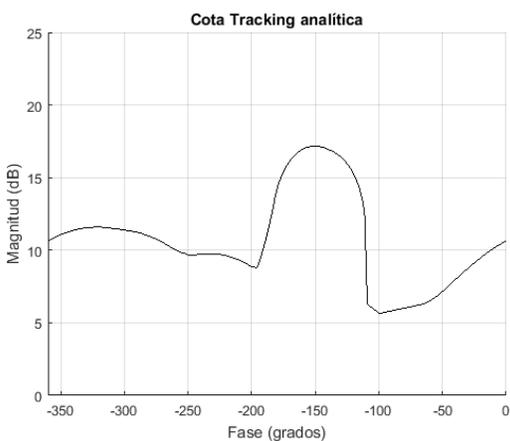
(b) Contorno del conjunto de círculos que forman a la Cota de seguimiento



(c) Cota analítica ajustada de seguimiento

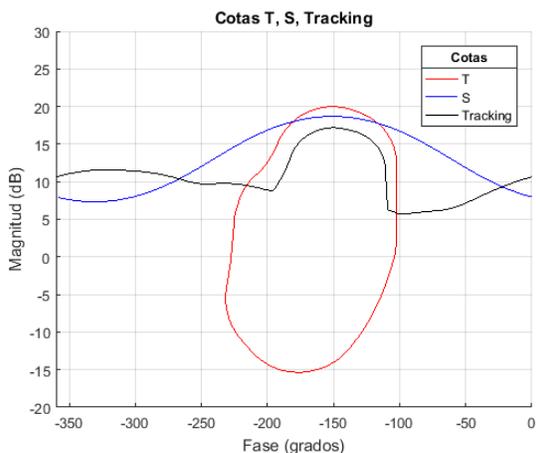


(d) Cota analítica ajustada de seguimiento incluye completamente al contorno del conjunto de círculos

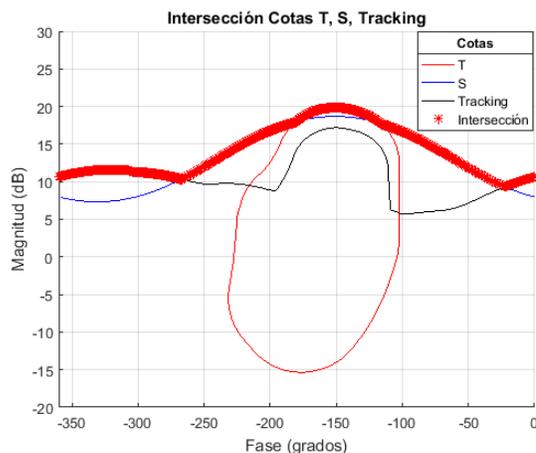


(e) Cota analítica ajustada de seguimiento representada en la carta de Nichols

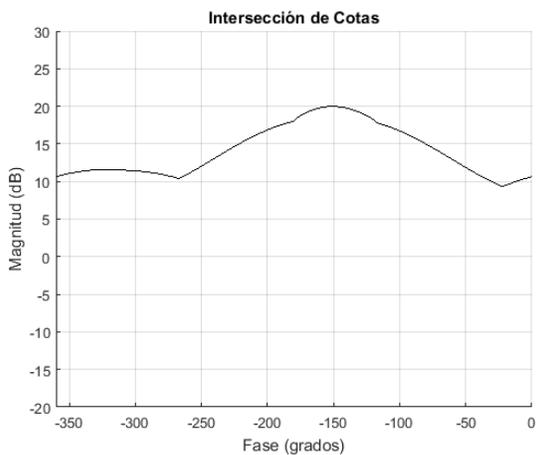
Figura 4.11: Cota analítica ajustada de seguimiento en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.



(a) Cota analítica ajustada  $T(s)$ , Cota analítica ajustada  $S(s)$  y Cota analítica ajustada de seguimiento

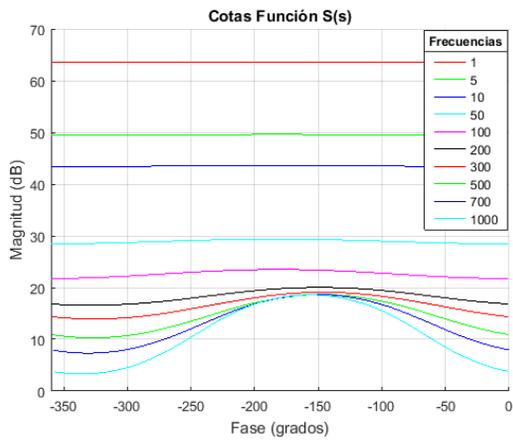


(b) La intersección de las cotas, corresponde con la selección de la cota mas restrictiva en cada valor de fase

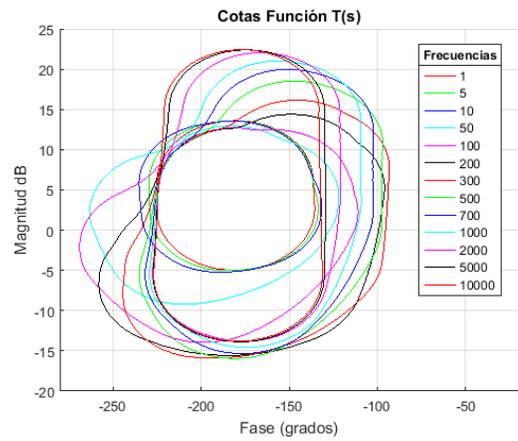


(c) Límite global

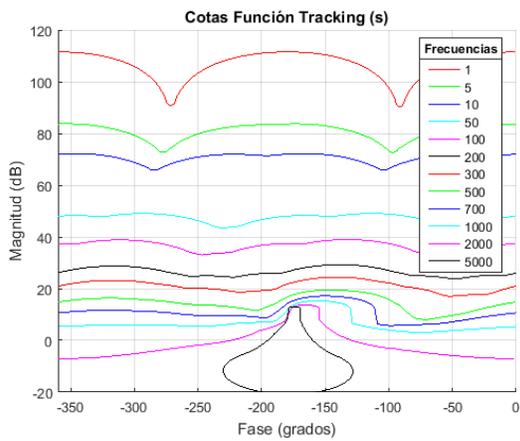
Figura 4.12: Límite global de las Cotas analíticas ajustadas  $T(s)$ ,  $S(s)$  y seguimiento en  $\omega = 700 \text{ rad/s}$  para el motor de DC.



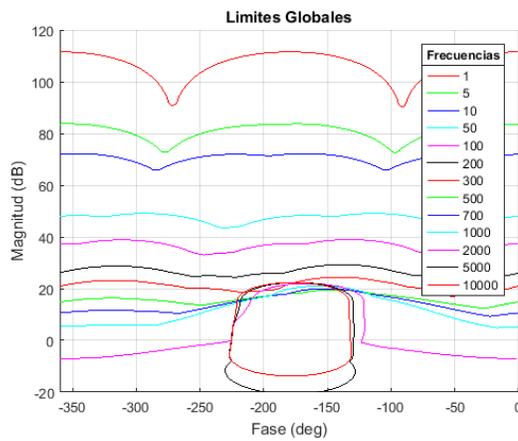
(a) Cotas analíticas ajustadas  $S(s)$



(b) Cotas analíticas ajustadas  $T(s)$



(c) Cotas analíticas ajustadas de seguimiento



(d) Límites globales para el motor de CD

Figura 4.13: Cotas analíticas ajustadas  $S(s)$ ,  $T(s)$ , seguimiento y Límites globales de cada frecuencia seleccionada para el motor de DC.

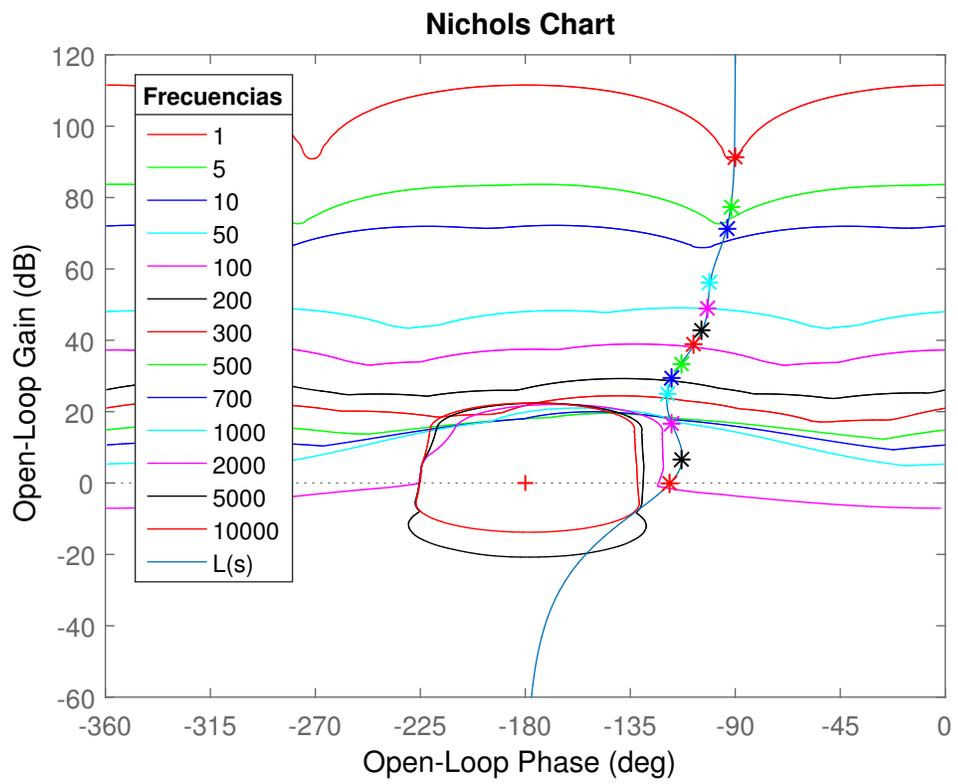
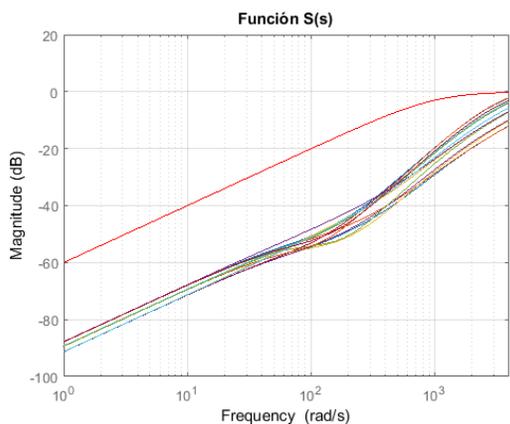
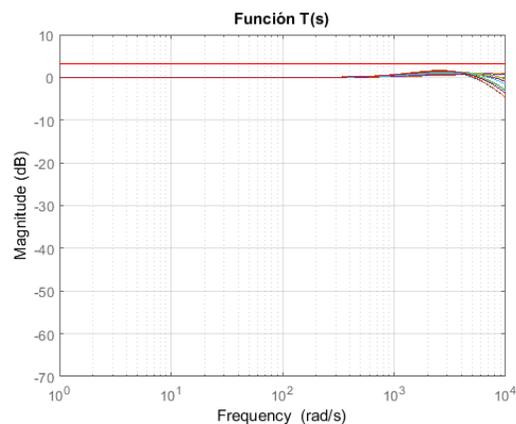


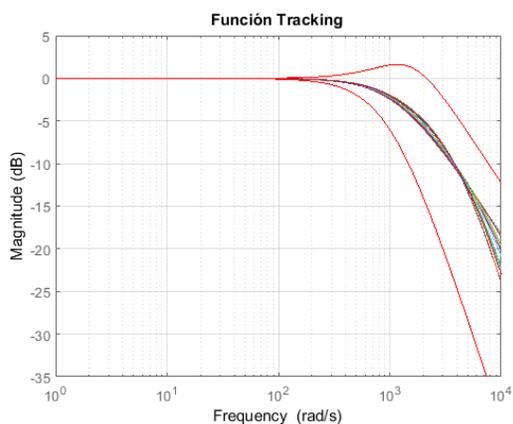
Figura 4.14: Conformación de lazo para el motor de CD.



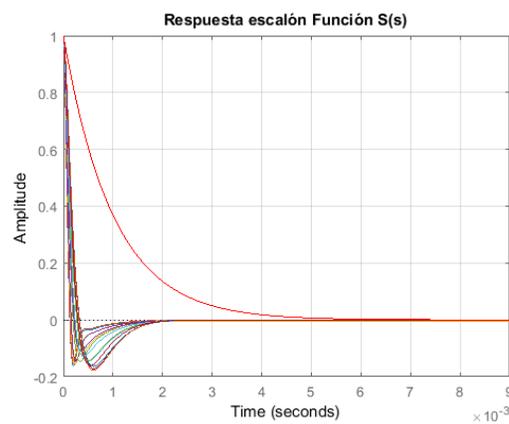
(a) Función S(s) para el motor CD



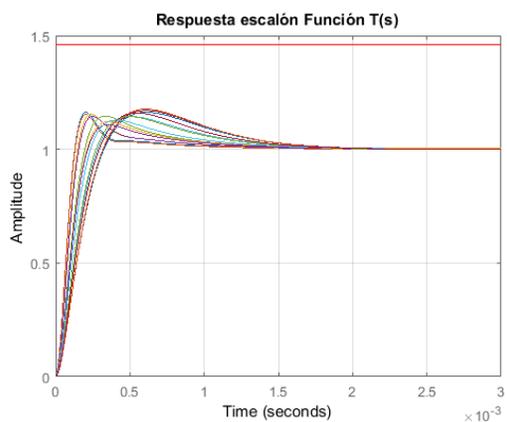
(b) Función T(s) para el motor CD



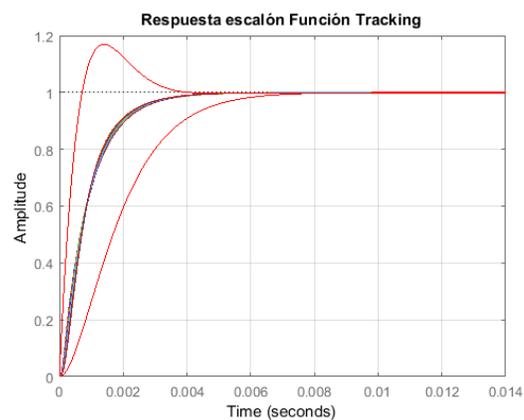
(c) Función de seguimiento para el motor CD



(d) Respuesta al escalón para la función S(s) del motor de CD

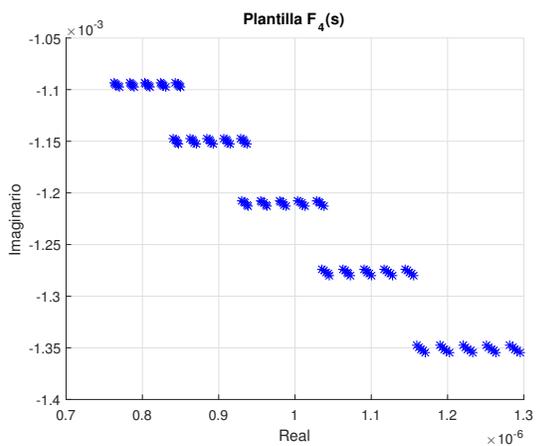


(e) Respuesta al escalón para la función T(s) del motor de CD

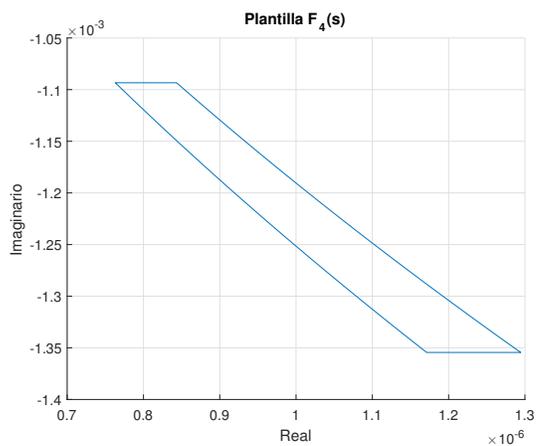


(f) Respuesta al escalón para la función de seguimiento del motor de CD

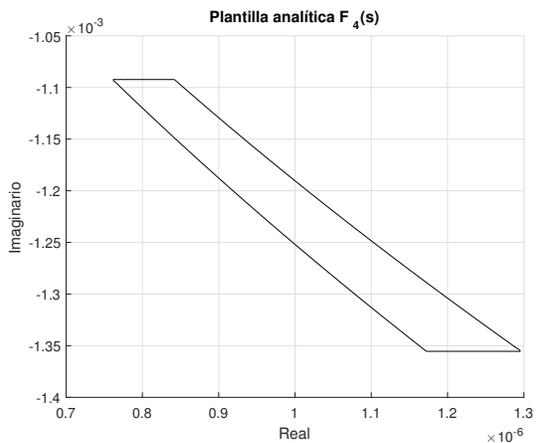
Figura 4.15: Validación de las Cotas analíticas ajustadas  $T(s)$ ,  $S(s)$  y seguimiento para el motor de CD



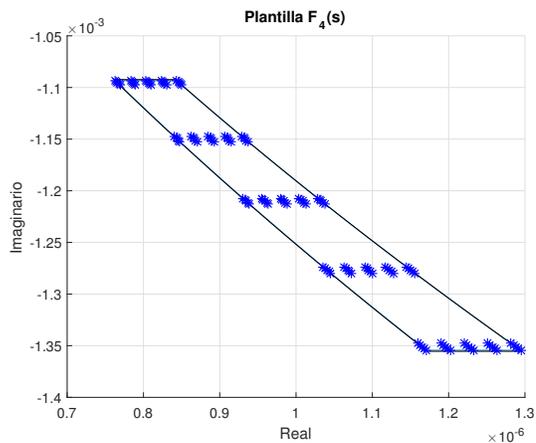
(a) Plantilla  $F_4(s)$  obtenida mediante el método de malla



(b) Plantilla  $F_4(s)$  obtenida mediante el Teorema del borde

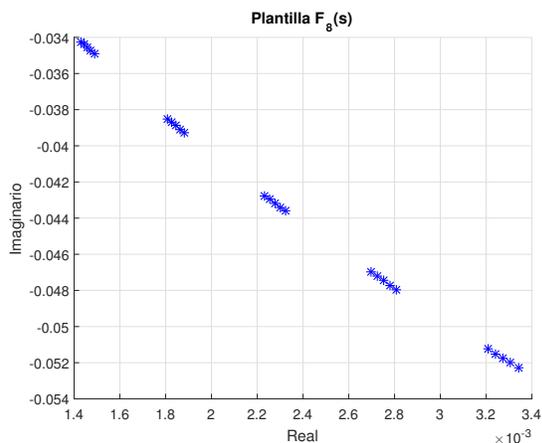


(c) Plantilla analítica ajustada  $F_4(s)$

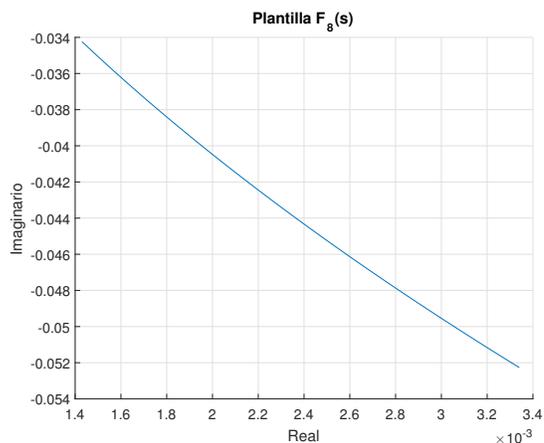


(d) Plantilla analítica ajustada  $F_4(s)$  incluye completamente a las plantillas obtenidas con el método de malla y el Teorema del borde

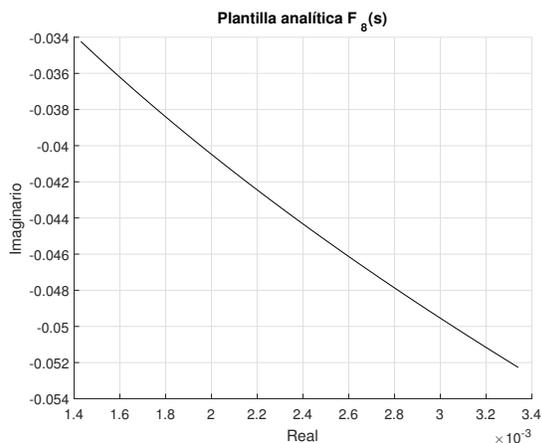
Figura 4.16: Plantilla analítica  $F_4(s)$  para  $\omega = 68 \text{ rad/s}$



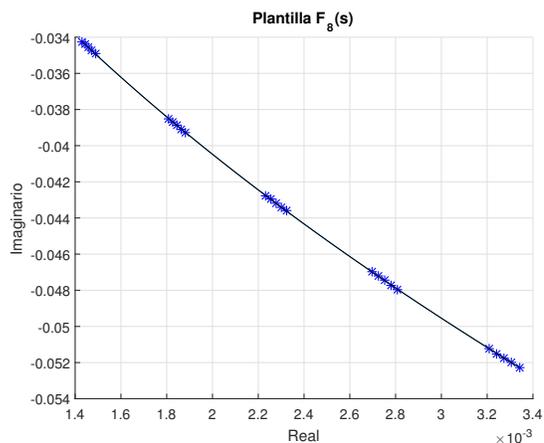
(a) Plantilla  $F_8(s)$  obtenida mediante el método de malla



(b) Plantilla  $F_8(s)$  obtenida mediante el Teorema del borde

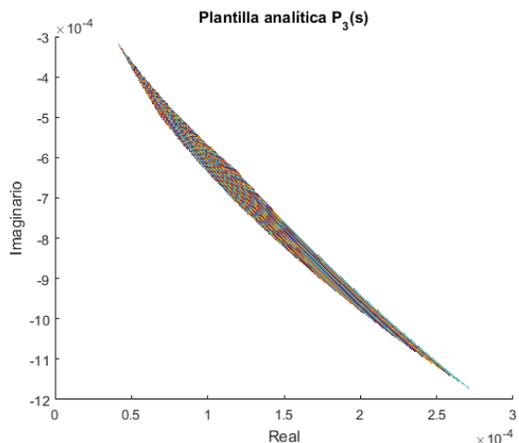


(c) Plantilla analítica  $F_8(s)$  obtenida mediante una curva de Bezier, donde  $P_0 = (1.9217 \times 10^{-6}, -4.6015 \times 10^{-5})$ ,  $P_1 = (2.5992 \times 10^{-6}, -5.4111 \times 10^{-5})$ ,  $P_2 = (3.4553 \times 10^{-6}, -6.2191 \times 10^{-5})$ ,  $P_3 = (4.4896 \times 10^{-6}, -7.0250 \times 10^{-5})$ , son los puntos de control

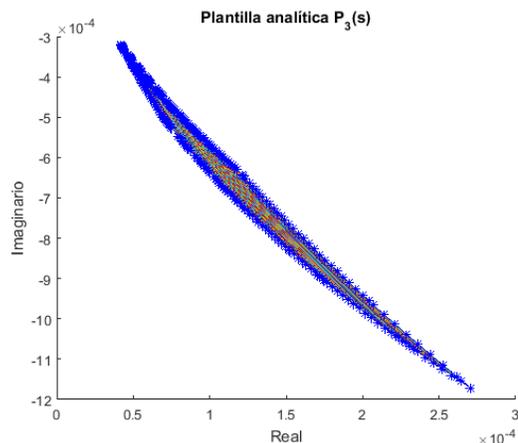


(d) Plantilla analítica  $F_8(s)$  incluye a las plantillas obtenidas con el método de malla y el Teorema del borde

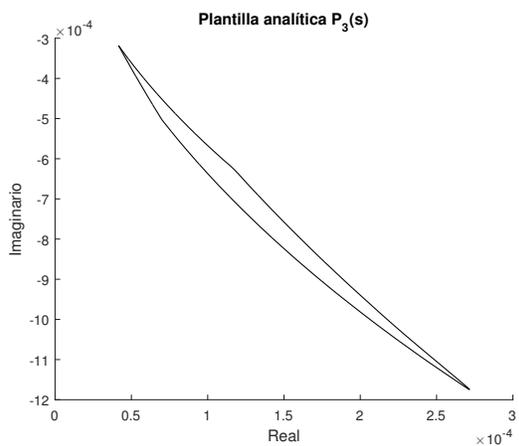
Figura 4.17: Plantilla analítica  $F_8(s)$  para  $\omega = 68 \text{ rad/s}$



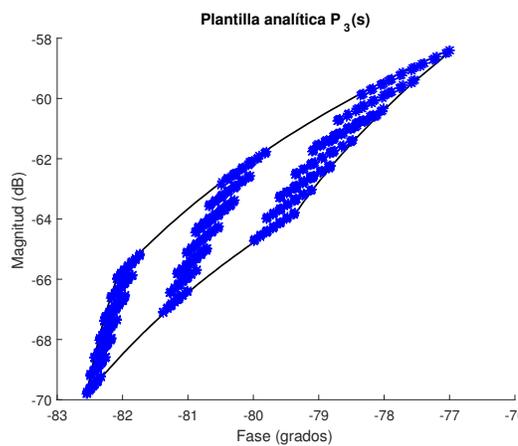
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



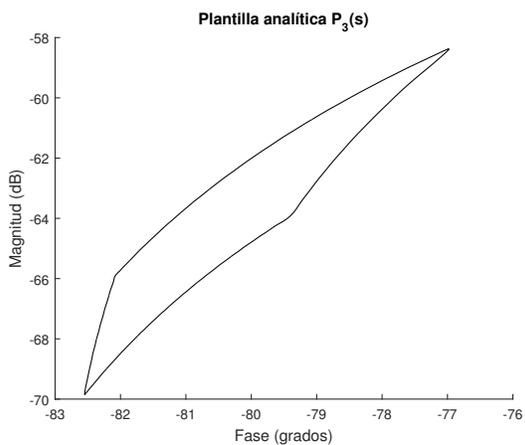
(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$



(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols incluye completamente a la plantilla representada con la técnica de malla



(e) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

Figura 4.18: Plantilla analítica  $P_3(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$  para el MLC

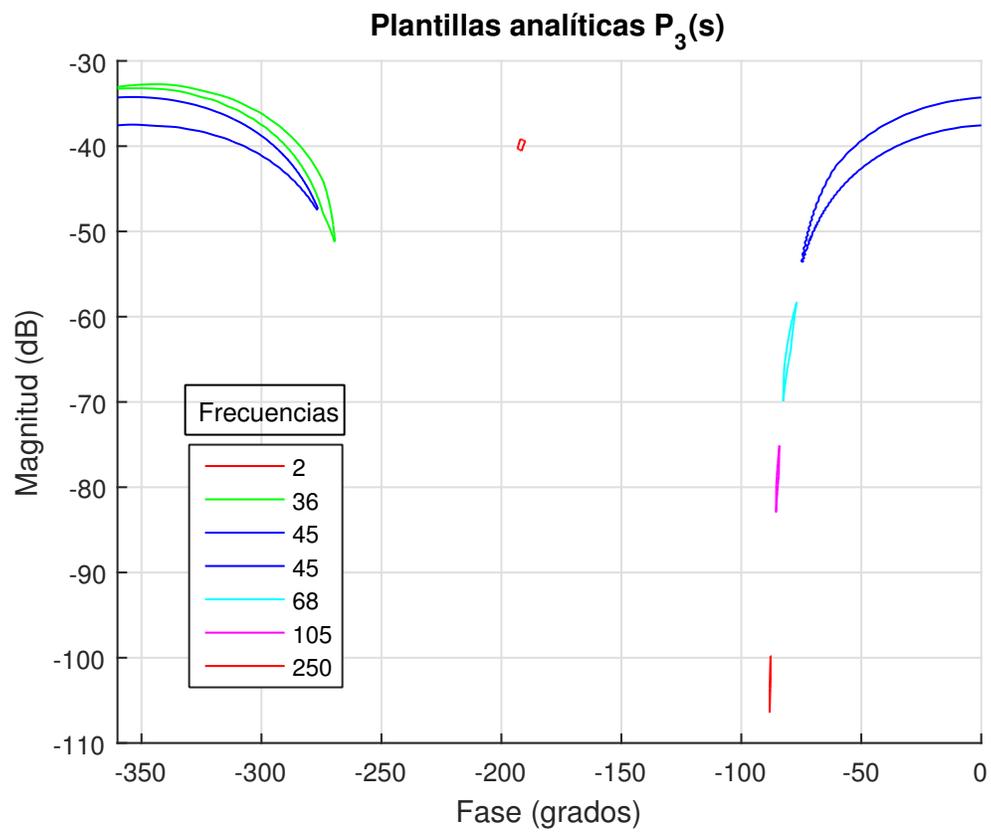
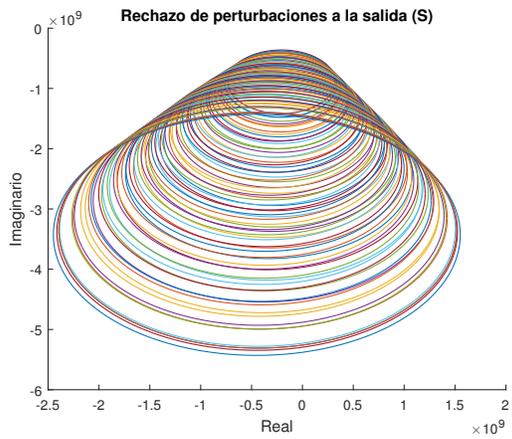
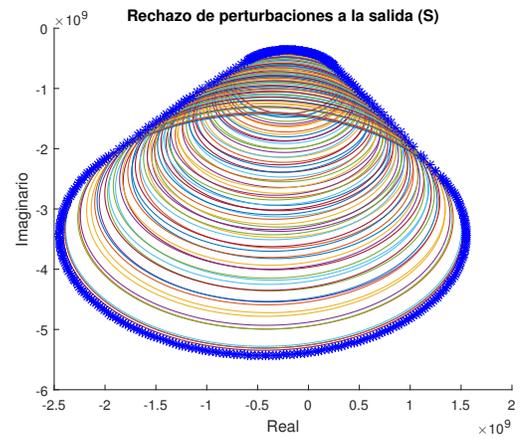


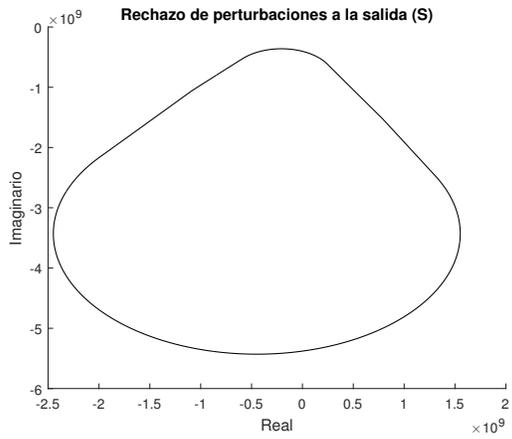
Figura 4.19: Plantillas analíticas ajustadas representadas en la carta de Nichols para  $P_3(s)$  en frecuencias  $\omega = 2$ ,  $\omega = 36$ ,  $\omega = 45$ ,  $\omega = 68$ ,  $\omega = 105$ ,  $\omega = 250$



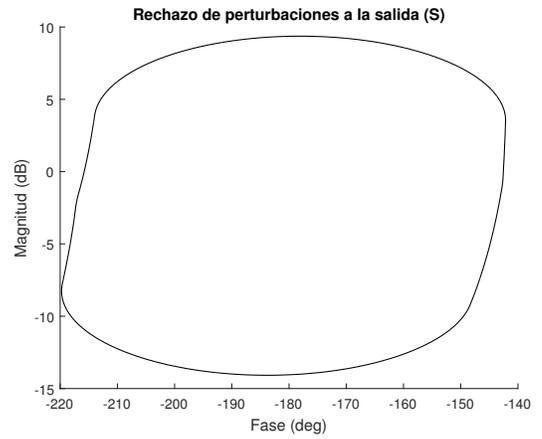
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$

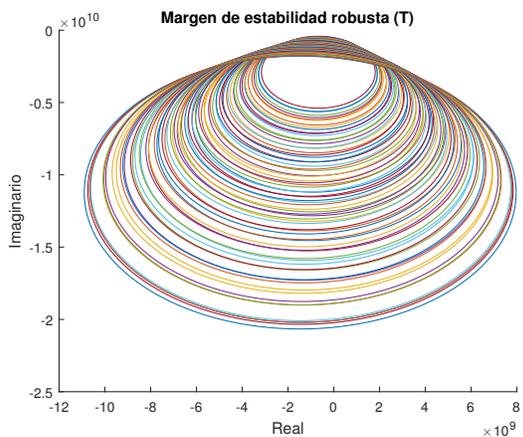


(c) Cota analítica ajustada  $S(s)$

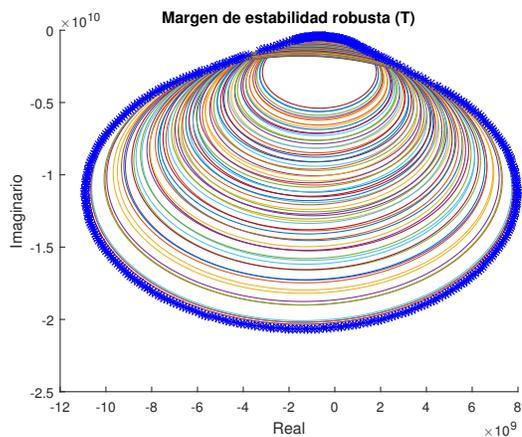


(d) Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la carta de Nichols

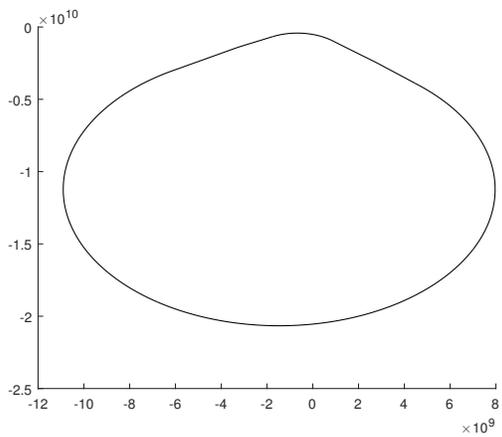
Figura 4.20: Cota analítica  $S(s)$  para  $P_3(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$



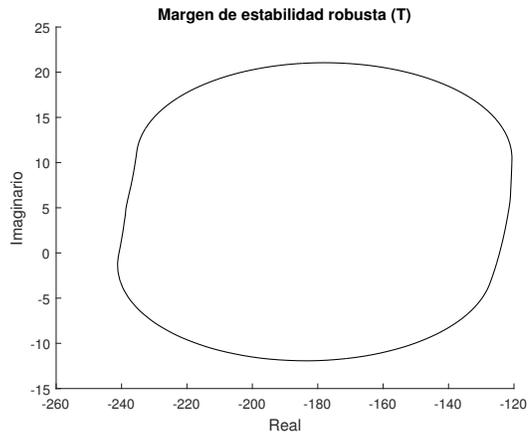
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$

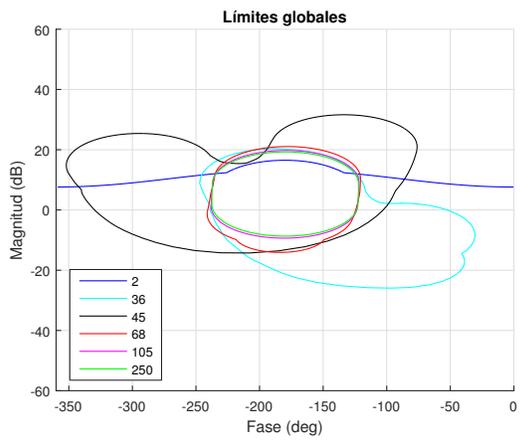


(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

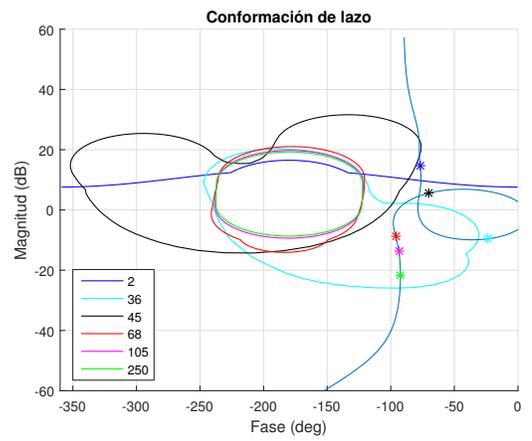


(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

Figura 4.21: Cota analítica  $T(s)$  para  $P_3(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$

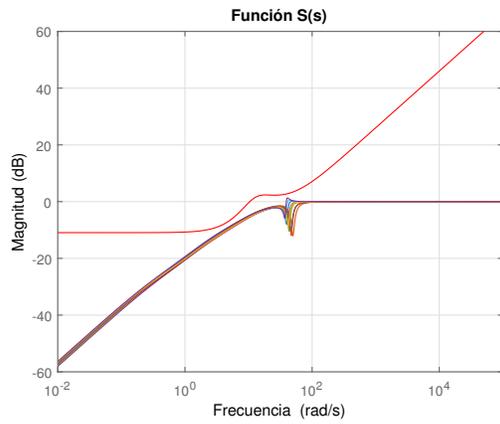


(a) Límites globales

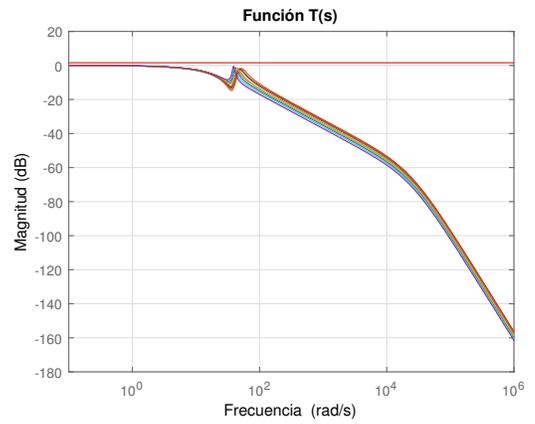


(b) Conformación de lazo

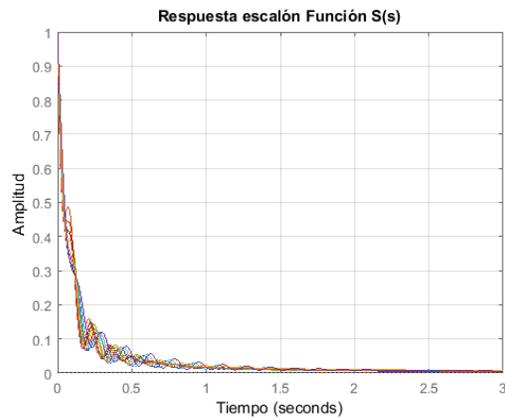
Figura 4.22: Conformación de lazo para  $P_3(s)$



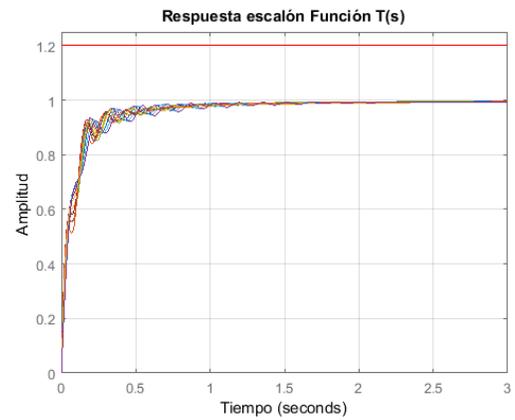
(a) Función  $S(s)$



(b) Función  $T(s)$

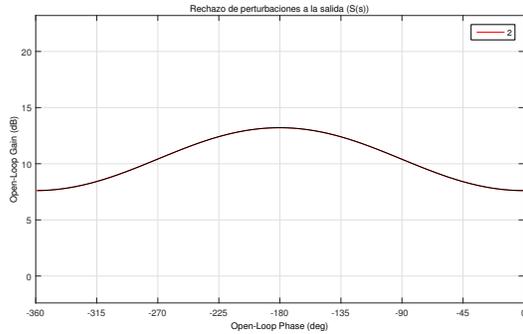


(c) Respuesta al escalón para la función  $S(s)$

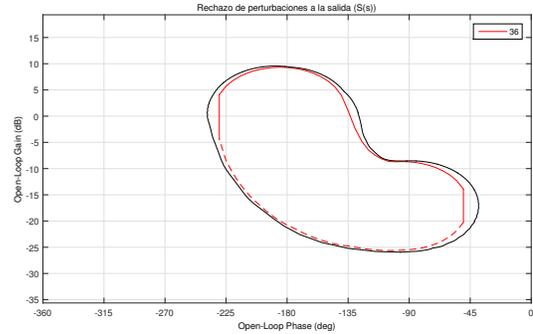


(d) Respuesta al escalón para la función  $T(s)$

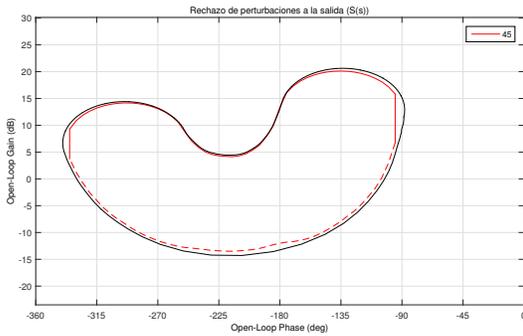
Figura 4.23: Validación de las cotas analíticas  $S(s)$  y  $T(s)$  para la salida de tensión  $\sigma_i$  en el MLC.



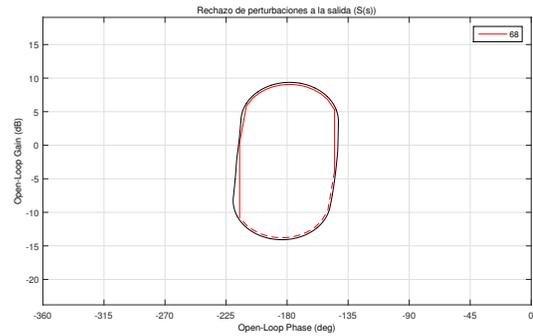
(a) Función  $S(s)$  en  $\omega = 2 \text{ rad/s}$



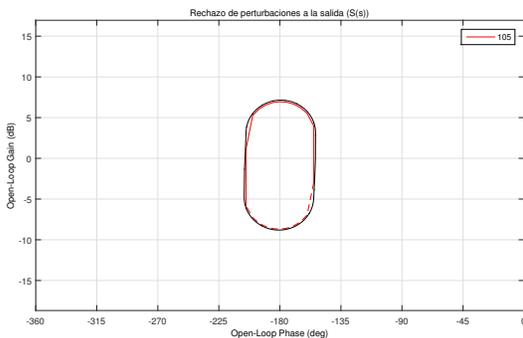
(b) Función  $S(s)$  en  $\omega = 36 \text{ rad/s}$



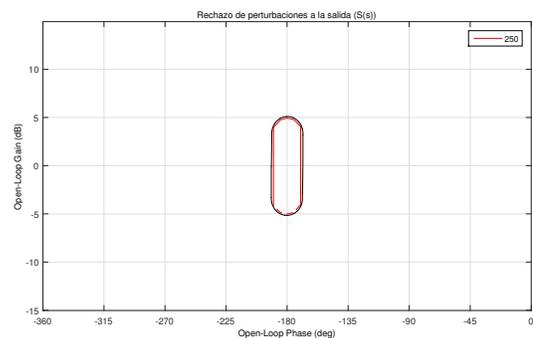
(c) Función  $S(s)$  en  $\omega = 45 \text{ rad/s}$



(d) Función  $S(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$

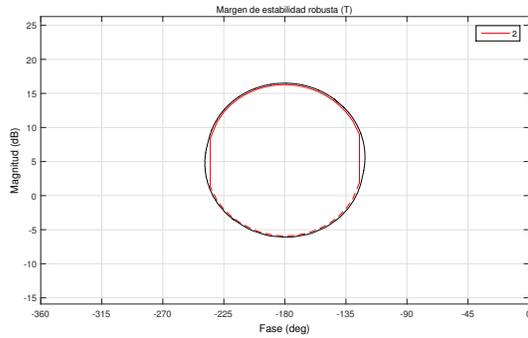


(e) Función  $S(s)$  en  $\omega = 105 \text{ rad/s}$

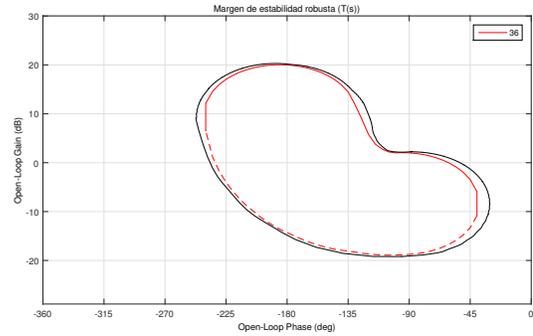


(f) Función  $S(s)$  en  $\omega = 250 \text{ rad/s}$

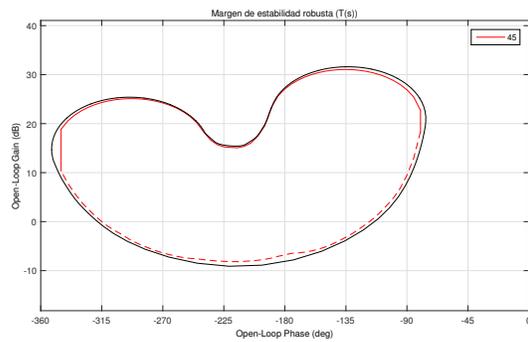
Figura 4.24: Comparación de los resultados obtenidos para la cota  $S(s)$  usando un procedimiento analítico (línea color negro) y un procedimiento clásico (línea color rojo) para la salida de tensión  $\sigma_i$  en el MLC.



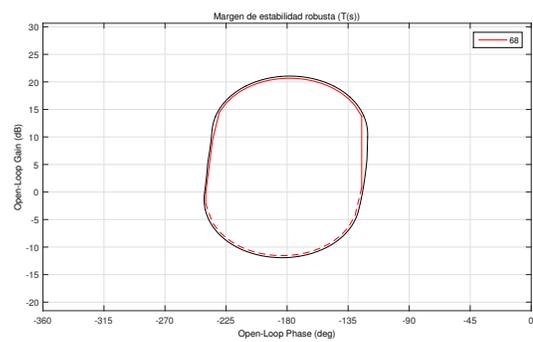
(a) Función  $T(s)$  en  $\omega = 2 \text{ rad/s}$



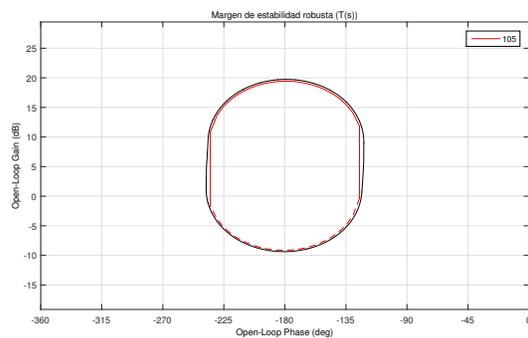
(b) Función  $T(s)$  en  $\omega = 36 \text{ rad/s}$



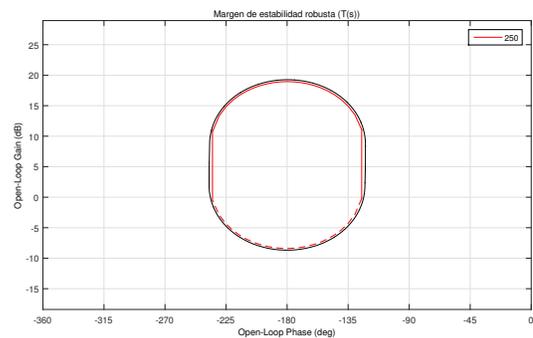
(c) Función  $T(s)$  en  $\omega = 45 \text{ rad/s}$



(d) Función  $T(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$



(e) Función  $T(s)$  en  $\omega = 105 \text{ rad/s}$



(f) Función  $T(s)$  en  $\omega = 250 \text{ rad/s}$

Figura 4.25: Comparación de los resultados obtenidos para la cota  $T(s)$  usando un procedimiento analítico (línea color negro) y un procedimiento clásico (línea color rojo) para la salida de tensión  $\sigma_i$  en el MLC.

# Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo de tesis, se presentaron los modelos multivariables en el dominio de Laplace y en el espacio de estados para un MLC. También se presentó la función de transferencia para la salida de tensión  $\sigma_i$  mediante subplantas intervalo o afín, la cual se usó como caso de estudio para el diseño de controladores QFT mediante técnicas analíticas.

Se presentaron los conceptos de plantillas analíticas, cotas analíticas y se propuso un procedimiento para el ajuste de plantillas analíticas en plantillas discretas convexas y no convexas. Asimismo, se propuso aproximar plantillas abiertas descritas por un arco con funciones de Bezier dada la simplicidad de estas últimas.

Respecto a las operaciones entre plantillas, se presentaron los procedimientos para operar plantillas analíticas, que en este trabajo, se llevaron a cabo usando directamente las representaciones analíticas, ya que anteriormente se realizaban operaciones mediante puntos en el plano complejo de las plantillas discretas. Por otro lado, también se presentaron los procedimientos para calcular cotas analíticas, las cuales se representaron mediante series de Fourier y se ajustaron para incluir completamente al conjunto de curvas que las forman.

También se propuso un procedimiento para diseñar controladores robustos usando plantillas y cotas analíticas mediante la técnica QFT para plantas que pueden ser representadas por subplantas con incertidumbre afín, dicho procedimiento fue implementado en dos casos de aplicación: el modelo de un motor CD y la salida de tensión en un MLC, en los que se realizaron operaciones aritméticas entre plantillas analíticas y se calcularon cotas analíticas para las funciones sensibilidad  $S(s)$ , sensibilidad complementaria  $T(s)$  y seguimiento.

Además se compararon los resultados obtenidos de la técnica analítica y la técnica clásica QFT comúnmente usada, y se mostró que las plantillas analíticas incluyen completamente a las plan-

tillas suficientemente densas representadas con la técnica de malla, y aunque no se comprueba matemáticamente que se incluya a todas las posibles plantas, sí cumplen con el criterio de Ackermann (Ackermann, 1993) [78], pero con las ventajas de las plantillas analíticas.

Finalmente se puede concluir que la técnica analítica puede ser utilizada para realizar diseños robustos mediante QFT en sistemas multilineales que pueden ser representados por subplantas intervalo o afín, ya que se obtuvieron resultados más eficientes computacionalmente en comparación con los resultados obtenidos con la técnica clásica QFT.

De esta manera las contribuciones de este trabajo son las siguientes:

- Se propuso un procedimiento para el ajuste de plantillas analíticas en plantillas discretas convexas y no convexas.
- Se propuso aproximar plantillas abiertas descritas por un arco con funciones de Bezier.
- En este trabajo, las operaciones entre plantillas se llevaron a cabo usando las representaciones analíticas de la misma manera en que se operan los números complejos.
- Se ajustaron los procedimientos para calcular cotas analíticas mediante series de Fourier para incluir completamente al conjunto de curvas que las forman.
- Se propuso un procedimiento para diseñar controladores robustos usando plantillas y cotas analíticas mediante la técnica QFT para plantas que pueden ser representadas por subplantas con incertidumbre afín.

**Trabajo futuro**

- Proponer un diseño de control robusto mediante la técnica QFT usando técnicas analíticas en lazo individual para cada salida del MLC.
- Proponer un diseño de controladores multivariantes robustos mediante QFT y técnicas analíticas.
- Comparar resultados entre técnicas analíticas y técnicas clásicas.
- El ajuste de plantillas analíticas convexas se podría lograr ampliando a la plantilla discreta en factor del error máximo entre la plantilla analítica y la plantilla discreta,  $\max(T_{\omega_i} - {}^d T_{\omega_i}[k])$ , además también se podría aumentar la cantidad de términos  $m$  en la serie de Fourier para mejorar la aproximación.

# Bibliografía

- [1] Karen Yareli González Palacios. *Control robusto de espesor de la cinta de acero en un molino de laminación en caliente mediante  $H_\infty$* . PhD thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2016.
- [2] Jorge Alberto Castillo González. *Control robusto de espesor y tensión de la cinta de acero en un molino de laminación mediante  $H_\infty$* . PhD thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2018.
- [3] L. F. Cantú, P. Mendiola, Á. A. Domínguez, and A. Cavazos. Parametric robust control of the multivariable  $2 \times 2$  looper system in steel hot rolling: A comparison between multivariable qft and  $h_\infty$ . *Metals*, 9(8):839, 2019.
- [4] Nadir Abbas, Xiaodong Liu, and Jamshed Iqbal. A flexible mixed-optimization with  $h_\infty$  control for coupled twin rotor mimo system based on the method of inequality (moi)-an experimental study. *Plos one*, 19(3):e0300305, 2024.
- [5] A Muñoz and P García-Fogeda. Active flutter suppression of a wing section in the subsonic, sonic and supersonic regimes by the  $h_\infty$  control method. *aerospace* 2024, 11, 198, 2024.
- [6] Zheren Tang, Wenxun Xiao, Bo Zhang, Dongyuan Qiu, Fan Xie, and Yanfeng Chen. H-infinity loop shaping control of wireless power transfer system based on generalized state space averaging model. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 52(1):364–379, 2024.
- [7] Isaac Horowitz. Quantitative feedback theory. In *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, volume 129, pages 215–226. IET, 1982.

- [8] Isaac Horowitz. Survey of quantitative feedback theory (qft). *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 11(10):887–921, 2001.
- [9] M. García-Sanz, I. Egaña, and M. Barreras. Design of quantitative feedback theory non-diagonal controllers for use in uncertain multiple-input multiple-output systems. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 152(2):177–187, 2005.
- [10] J. Rico-Azagra R. del Campo Pedrosa, M. Gil-Martínez. Control robusto qft de un sistema de refrigeración. In *XL Jornadas de Automática*.
- [11] M. Gil-Martínez and J. Rico-Azagra. Robust feedback control for nonminimum phase, delayed, or unstable systems with multiple inputs. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020.
- [12] Ali Soltani Sharif Abadi, Pooyan Alinaghi Hosseinabadi, Andrew Ordys, and Michael Grimbale. Design a robust quantitative feedback theory controller for cyber-physical systems: ship course control problem. *Archives of Control Sciences*, pages 589–605, 2022.
- [13] Yun Cheng, Lingyu Dai, Ang Li, Yinlong Yuan, and Zengqiang Chen. Active disturbance rejection generalized predictive control of a quadrotor uav via quantitative feedback theory. *IEEE Access*, 10:37912–37923, 2022.
- [14] Chi Yu, Hongwei Wang, and Yuanwei Jing. Tension control in hot strip process based on lmi approach. In *2011 Chinese Control and Decision Conference CCDC*, pages 1424–1427. IEEE, 2011.
- [15] Ali Khudhair Al-Jiboory. Optimal control of satellite system model using linear matrix inequality approach. *Results in Control and Optimization*, 10:100207, 2023.
- [16]
- [17] Gustavo G Koch, Caio RD Osório, Ricardo CLF Oliveira, and Vinícius F Montagner. Robust control based on observed states designed by means of linear matrix inequalities for grid-connected converters. *Energies*, 16(4):2047, 2023.

- [18] Hassiba Nechaf, Ali Zemouche, Mohammed Mostefai, Taous-Meriem Laleg-Kirati, Nadya Djeghali, and Fazia Bedouhene. Linear matrix inequality–based observer design methods for a class of nonlinear systems with delayed output measurements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 237(3):433–446, 2023.
- [19] J Schuurmans and T Jones. Control of mass flow in a hot strip mill using model predictive control. In *Proceedings of the International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 379–384. IEEE, 2002.
- [20] Abiodun Emmanuel Abioye, Mohamad Shukri Zainal Abidin, Mohd Saiful Azimi Mahmud, Salinda Buyamin, Olatunji Obalowu Mohammed, Abdulrahaman Okino Otuoze, Ibrahim Olakunle Oleolo, and Abioye Mayowa. Model based predictive control strategy for water saving drip irrigation. *Smart Agricultural Technology*, 4:100179, 2023.
- [21] Sabrina F Dell Agnolo, Arthur G Bartsch, Filipe Fernandes, José De Oliveira, Mariana SM Cavalca, and Ademir Nied. Convex control set model-based predictive control applied to a permanent magnet synchronous motor. In *2023 IEEE 8th Southern Power Electronics Conference (SPEC)*, pages 1–6. IEEE, 2023.
- [22] Mohammed Saad Faizan Bangi and Joseph Sang-Il Kwon. Deep hybrid model-based predictive control with guarantees on domain of applicability. *AIChE Journal*, 69(5):e18012, 2023.
- [23] Luis Vásquez, Cristian Basoalto, and Fabián Gonzalo Pierart. Experimental evaluation of model-based predictive control applied to a point absorber. In *2023 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON)*, pages 1–6. IEEE, 2023.
- [24] Yun Cheng, Yunlei Fan, Pengcheng Zhang, Yinlong Yuan, and Junhong Li. Design and parameter tuning of active disturbance rejection control for uncertain multivariable systems via quantitative feedback theory. *ISA transactions*, 141:288–302, 2023.

- [25] Yunlei Fan, Yun Cheng, Pengcheng Zhang, and Guoping Lu. An active disturbance rejection control design for the distillation process with input saturation via quantitative feedback theory. *Journal of Process Control*, 128:103029, 2023.
- [26] Jisha Lakshmi Krishnankutty, Arekkadan Antony Powly Thomas, and Suresh Srivastava. Quantitative feedback theory based robust speed control of vector controlled induction motor. *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*, 12(1):121–130, 2023.
- [27] Kaixian Ba, Yuan Wang, Xiaolong He, Chunyu Wang, Bin Yu, Yaliang Liu, and Xiangdong Kong. Force compensation control for electro-hydraulic servo system with pump–valve compound drive via qft–dtoc. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 37(1):27, 2024.
- [28] J. J. Martín-Romero, M. Gil-Martínez, and M. García-Sanz. Analytical formulation to compute qft templates for plants with a high number of uncertain parameters. In *2007 Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- [29] G Dindis and A Karamanciouglu. An edge determination algorithm for exact computation of the frequency response of linear interval systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(3):987–994, 2018.
- [30] Javier Rico-Azagra, Montserrat Gil-Martínez, R Rico, and P Maisterra. Qft bounds for robust stability specifications defined on the open-loop function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(3):1116–1125, 2018.
- [31] Minyue Fu. Computing the frequency response of linear systems with parametric perturbation. *Systems and Control Letters*, 15(1):45–52, 1990.
- [32] Andrew C Bartlett, Christopher V Hollot, and Huang Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1(1):61–71, 1988.
- [33] Shankar P Bhattacharyya and Lee H Keel. Robust control: the parametric approach. In *Advances in control education 1994*, pages 49–52. Elsevier, 1995.

- [34] Shankar P Bhattacharyya, Aniruddha Datta, and Lee H Keel. *Linear control theory: structure, robustness, and optimization*. CRC press, 2018.
- [35] Lee H Keel and Shankar P Bhattacharyya. Robustness and fragility of high order controllers: A tutorial. In *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 191–202. IEEE, 2016.
- [36] Jinghao Zhou, Peng Shi, Deqiang Gan, Ying Xu, Huanhai Xin, Changming Jiang, Huan Xie, and Tao Wu. Large scale power system robust stability analysis based on value set approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(5):4012–4023, 2017.
- [37] Ki Sun Han, Moon Gyu Jeong, and Jeong Phil Lee. Qft based controller design of thyristor-controlled phase shifter for power system stability enhancement. *International Journal of Research in Engineering and Science*, 5(4):54–64, 2017.
- [38] Yan Cai, Jinchun Song, and Nariman Sepehri. Synthesis of a mimo qft controller for hydraulic hybrid swing system of excavators. *International Journal of Fluid Power*, 19(1):1–13, 2018.
- [39] Hemachandra Gudimindla and K Manjunatha Sharma. Performance analysis of automated quantitative feedback theorybased robust controller for photovoltaic converter. In *2018 International Conference on Emerging Trends and Innovations In Engineering And Technological Research (ICETIETR)*, pages 1–7. IEEE, 2018.
- [40] Hongbo Guo. Robust qft-based position control of an asymmetric hydraulic cylinder electro-hydraulic servo system. *International Journal of Robotics and Automation Technology*, 5:1–6, 2018.
- [41] Angeles Hoyo, José Carlos Moreno, José Luis Guzmán, and Francisco Rodríguez. Robust qft-based feedback linearization controller of the greenhouse diurnal temperature using natural ventilation. *IEEE Access*, 7:64148–64161, 2019.
- [42] Rounakul Islam Bobby, Khaizuran Abdullah, AZ Jusoh, Nagma Parveen, and Md Mahmud. Adaptive control of nonlinear system based on qft application to 3-dof flight control system. *TELKOMNIKA (Telecommunication Computing Electronics and Control)*, 17(5):2595–2606, 2019.

- [43] Mohammad Reza Gharib and Armin Daneshvar. Quantitative fuzzy controller design for multivariable systems with uncertainty. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17:1515–1523, 2019.
- [44] Romana Čápková, Alena Kozáková, Martin Minár, and Kristián Ondrejčka. Robust qft-based control of the dc motor laboratory model. In *2020 Cybernetics and Informatics (Kand I)*, pages 1–6. IEEE, 2020.
- [45] Mostafa Honari-Torshizi, Hossein Rahmani, Hossein Moeinkhah, Mohammad Reza Gharib, and Javad Jahanpour. A qft robust controller as a remedy for trms. *Aviation*, 24(4):137–148, 2020.
- [46] Dipesh Makwana and PSV Nataraj. Automated synthesis of fixed structure qft controller using piecewise linear approximation based linear programming optimization techniques. In *2015 International Conference on Industrial Instrumentation and Control (ICIC)*, pages 1597–1602. IEEE, 2015.
- [47] Harsh Purohit and PSV Nataraj. Optimized and automated synthesis of robust pid controller with quantitative feedback theory. In *2015 International Conference on Industrial Instrumentation and Control (ICIC)*, pages 105–110. IEEE, 2015.
- [48] Pedro Mercader, Karl Johan Åström, Alfonso Baños, and Tore Hägglund. Robust pid design based on qft and convex concave optimization. *IEEE transactions on control systems technology*, 25(2):441–452, 2016.
- [49] Harsh Purohit, Alexandre Goldsztejn, Christophe Jermann, Laurent Granvilliers, Frédéric Goualard, PSV Nataraj, and Bhagyesh Patil. Simultaneous automated design of structured qft controller and prefilter using nonlinear programming. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(15):2529–2548, 2017.
- [50] Hemachandra Gudimindla et al. Dynamic performance evaluation of automated qft robust controller for grid-tied fuel cell under uncertainty conditions. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 42:100800, 2020.

- [51] Nitish Katal and Shiv Narayan. Optimal qft controller and pre-filter for buck converter using multi-objective genetic algorithm. *International Journal of Swarm Intelligence*, 3(2-3):192–214, 2017.
- [52] Daniel Rubin and Per-Olof Gutman. On the computation of horowitz-sidi bounds for mimo qft output disturbance rejection. In *2019 27th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 94–99. IEEE, 2019.
- [53] SP Bhattacharyya. Robust control under parametric uncertainty: An overview and recent results. *Annual Reviews in Control*, 44:45–77, 2017.
- [54] Dinu Mihailescu-Stoica, Frank Schrödel, Rick Voßwinkel, and Jürgen Adamy. On robustly stabilizing pid controllers for systems with a certain class of multilinear parameter dependency. In *2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 1–6. IEEE, 2018.
- [55] Thomas Schauss, Angelika Peer, and Martin Buss. Parameter-space stability analysis of lti time-delay systems with parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(11):3927–3934, 2018.
- [56] Gayvoronskiy S An, T Ezangina, and I Khozhaev. Finding an area of acceptable oscillability in a space of uncertain parameters of a control system. In *2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)*, pages 1–5. IEEE, 2019.
- [57] Sergey Gayvoronskiy, Tatiana Ezangina, Ivan Khozhaev, and Viktor Kazmin. Determination of vertices and edges in a parametric polytope to analyze root indices of robust control quality. *International Journal of Automation and Computing*, 16(6):828–837, 2019.
- [58] Pedro Zamora, Alejandro Arceo, Noé Martínez, Gerardo Romero, and Luis E Garza. Robust stabilization of interval plants with uncertain time delay using the value set concept. *Mathematics*, 9(4):429, 2021.
- [59] Odded Yaniv. *Quantitative feedback design of linear and non linear control systems*. Springer science bussines media, 1999.

- [60] Marcel J Sidi. Design of robust control systems: From classical to modern practical approaches. (*No Title*), 2001.
- [61] William Roberts. *Hot Rolling of Steel (1st ed.)*. CRC Press, 1983.
- [62] Vladimir B. Ginzburg. *High-Quality Steel Rolling: Theory and Practice*. CRC Press, 1993.
- [63] A. Obregón, P. Mendiola, K. Evers, A. Cavazos, and L. Leduc. Linear multivariable dynamic model of a hot strip finishing mill. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 224(8):1007–1021, 2010.
- [64] G. Hearn and M. J. Grimble. Multivariable control of a hot strip finishing mill. *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, 6.
- [65] Alma Obregón, Alberto Cavazos, Luis Leduc, and Ramí. *Modelo dinámico lineal multivariable de un molino de laminación en caliente*. PhD thesis.
- [66] Zhaozhun Zhong, Jingcheng Wang, and Lihua Lu. Looper and tension control in hot strip finishing mills based on sliding mode and adaptive control. In *2010 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*.
- [67] Chi Yu, Hongwei Wang, and Yuanwei Jing. Sliding mode control for two input and two-output tito looper systems. In *2011 Chinese Control and Decision Conference CCDC*.
- [68] O.A. Don Juan Ríos, E.A. Rojas Lugo, and A. Cavazos González. Control robusto paramétrico qft del sistema del formador de onda en un molino de laminación en caliente. *CIENCIA ergonomía*, 23(1):35–48, 2016.
- [69] Norma Liliana Pliego Reyes. *Control robusto de espesor de la cinta de acero en un molino de laminación en caliente mediante Teoría de Retroalimentación Cuantitativa*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2017.
- [70] Fang-chen Yin, Jie Sun, Wen Peng, Hong-yu Wang, Jing Yang, and Dian-hua Zhang. Dynamic matrix predictive control for a hydraulic looper system in hot strip mills. *Journal of Central South University*, 24(6):1369–1378, 2017.

- [71] José Angel Barrios, Miguel Torres-Alvarado, and Alberto Cavazos. Neural, fuzzy and grey box modelling for entry temperature prediction in a hot strip mill. *Expert systems with applications*, 39(3):3374–3384, 2012.
- [72] KWM Evers. Hot rolling multivariable model verification and qft robust loop control. 2006.
- [73] J. J. Martín-Romero and A. Martín-Romero. Qft templates for plants with a high number of uncertainty parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(4):754–758, 2007.
- [74] M. Gil-Martínez J. J. Martín-Romero and M. García-Sanz. Analytical formulation to compute qft bounds: The envelope method. *INTERNATIONAL JOURNAL OF ROBUST AND NONLINEAR CONTROL*, 19(17):1959–1971, 2009.
- [75] Yossi Chait and Oded Yaniv. Multi input/single output computer aided control design using the quantitative feedback theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 3(1):47–54, 1993.
- [76] JM Rodrigues, Y Chait, and CV Hollot. An efficient algorithm for computing qft bounds. 1997.
- [77] Yossi Chait. Design of robust control systems from classical to modern practical approaches, krieger publishing co., malabar, fl 32950, isbn 1-57524-143-9, 2001., 2002.
- [78] Jürgen Ackermann, Andrew Bartlett, Dieter Kaesbauer, Wolfgang Siemel, and Reinhold Steinhauser. *Robust control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer, 1993.
- [79] Erik Coelingh, T de Vries, Jan Holterman, and Job van Amerongen. Mechatronic systems with uncertain physical parameters. In *Proceedings of the 6th UK Mechatronics Forum International Conference, Skove, Sweden*, pages 9–11, 1998.
- [80] Mario García-Sanz. *Robust control engineering: practical QFT solutions*. CRC press, 2017.
- [81] Tim A Pastva. *Bezier curve fitting*. PhD thesis, Monterey, California. Naval Postgraduate School, 1998.

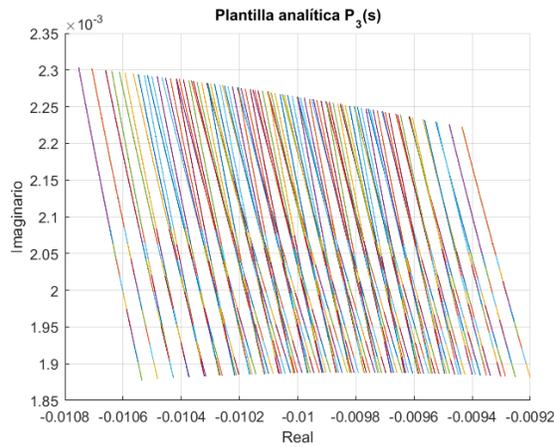
- [82] Lejun Shao and Hao Zhou. Curve fitting with bezier cubics. *Graphical models and image processing*, 58(3):223–232, 1996.
- [83] Mohamed Elhoseny, Alaa Tharwat, and Aboul Ella Hassanien. Bezier curve based path planning in a dynamic field using modified genetic algorithm. *Journal of Computational Science*, 25:339–350, 2018.
- [84] Yajuan Li, Meng Zhang, Wenbiao Jin, and Chongyang Deng. Approximating bézier curves with least square polygons. *The Visual Computer*, 40(2):637–646, 2024.
- [85] Xu Liu, Hongyu Nie, Decai Li, Yuqing He, and Marcelo H Ang. High-fidelity and curvature-continuous path smoothing with quadratic bézier curve. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024.
- [86] Aleksas Riskus. Approximation of a cubic bezier curve by circular arcs and vice versa. *Information Technology and control*, 35(4), 2006.

# Apéndice A

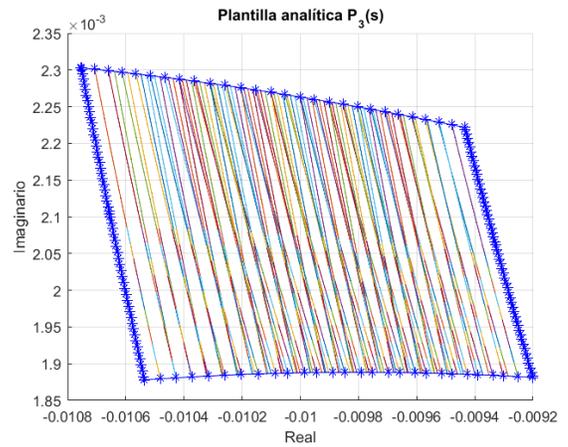
## Apéndice

### A.1. Plantillas analíticas del MLC

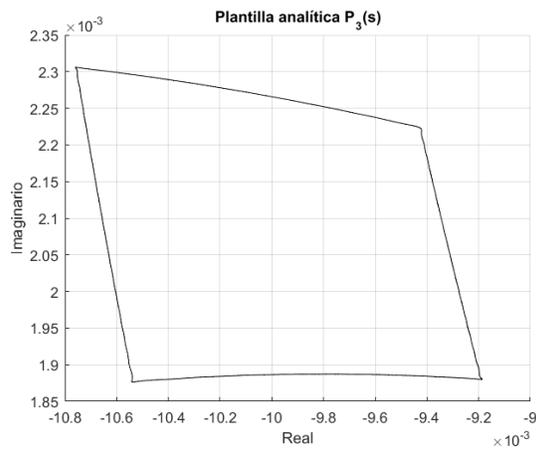
En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones para las plantillas analíticas en diferentes frecuencias del MLC. La función de transferencia  $P_3(s)$  relaciona a la salida tensión  $\sigma_i$  con respecto a la entrada par del formador de onda  $\tau_{ri}$ .



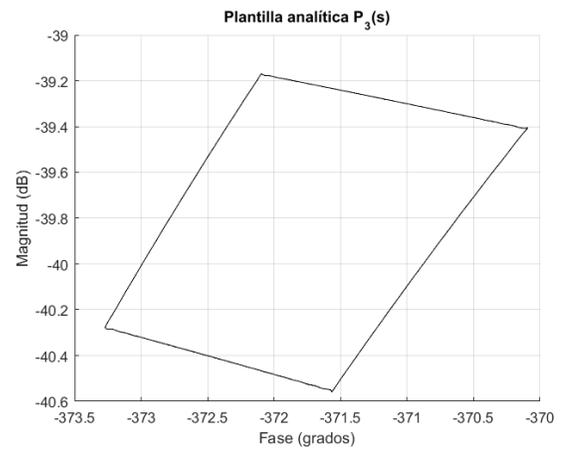
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$

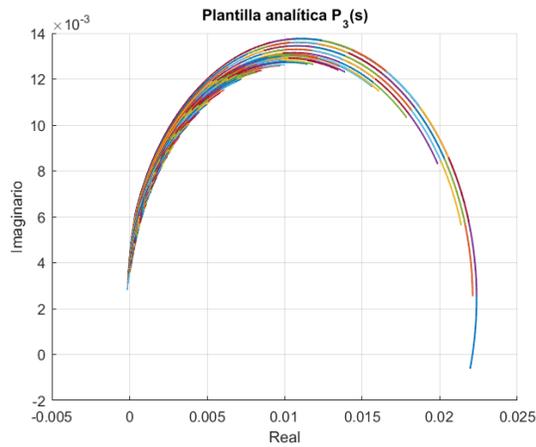


(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$

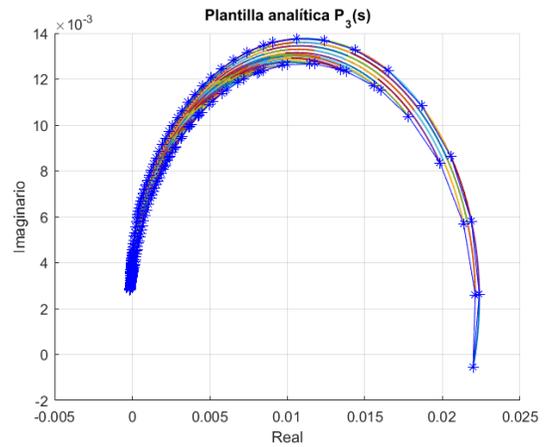


(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

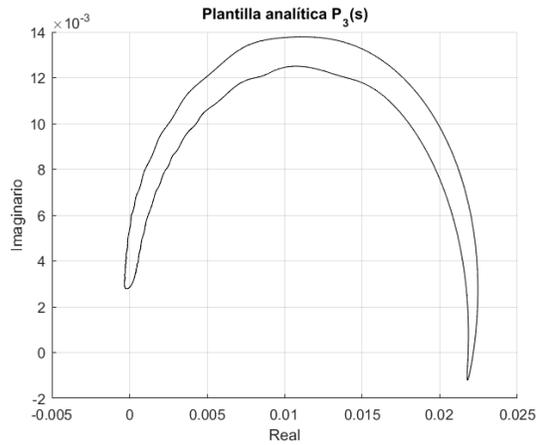
Figura A.1: Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  para el MLC



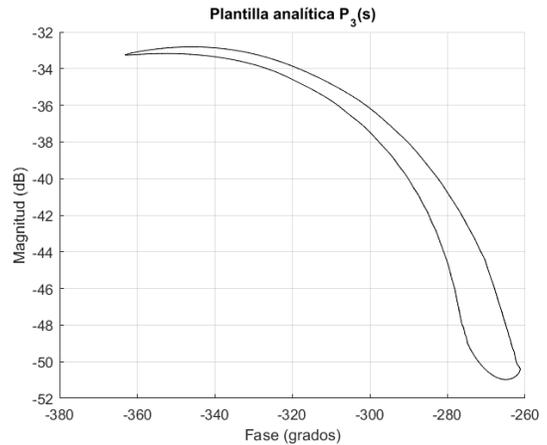
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$

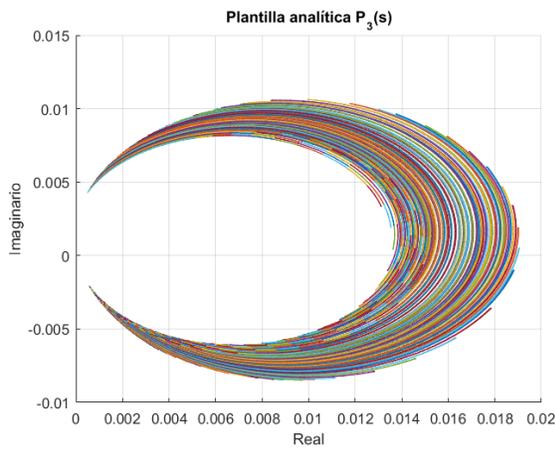


(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$

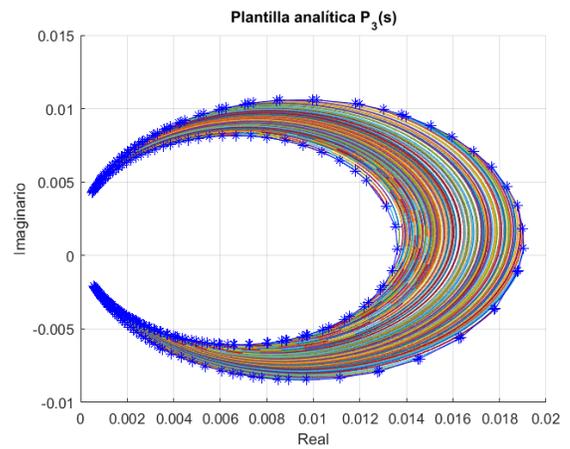


(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

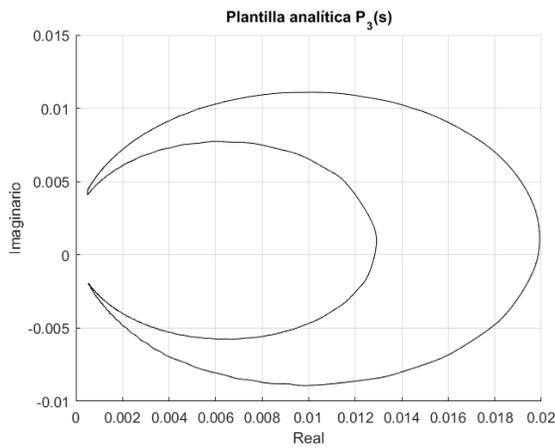
Figura A.2: Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 36 \text{ rad/s}$  para el MLC



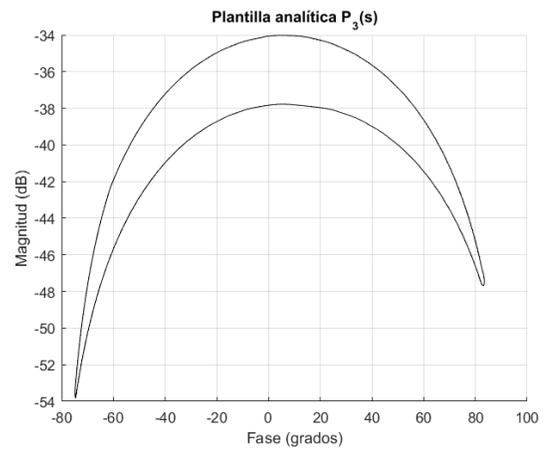
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$

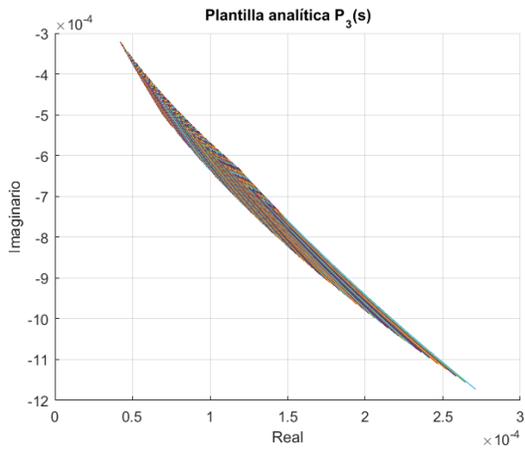


(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$

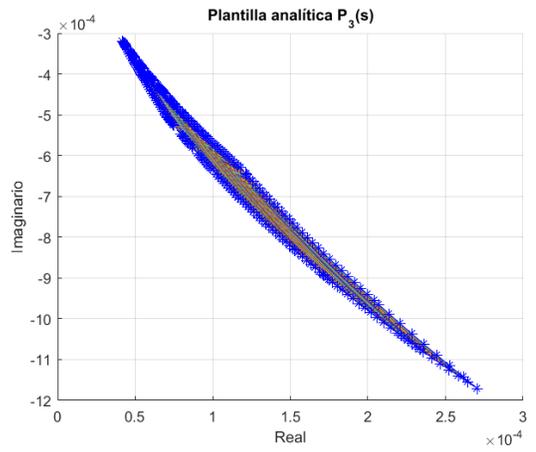


(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

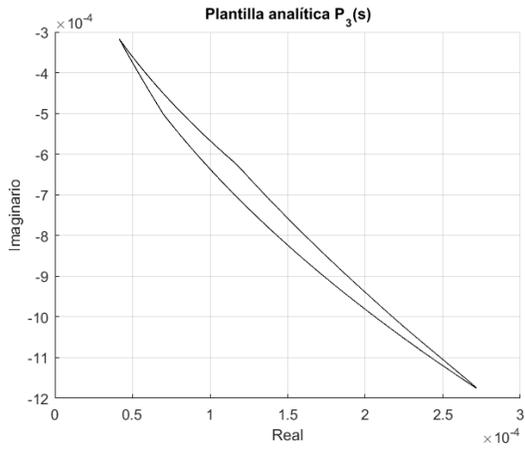
Figura A.3: Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 45 \text{ rad/s}$  para el MLC



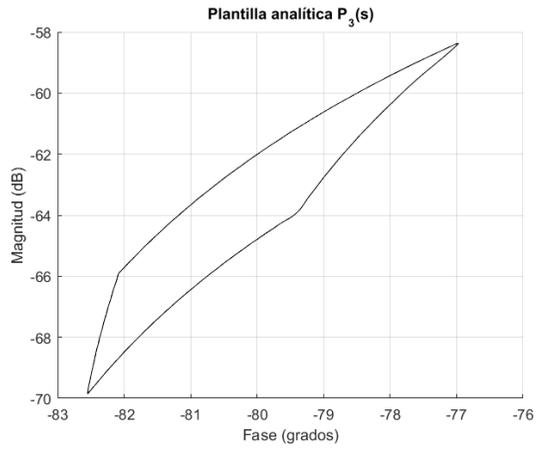
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$

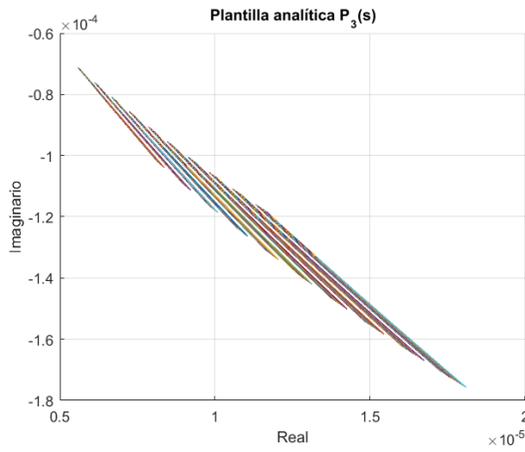


(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$

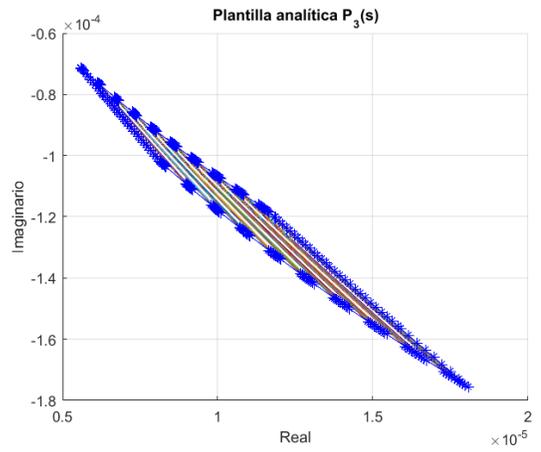


(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

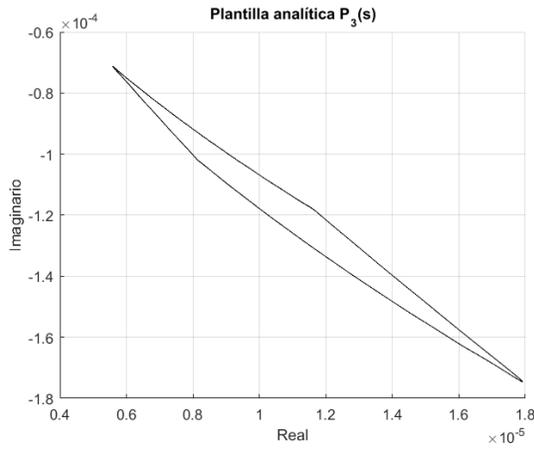
Figura A.4: Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 68 \text{ rad/s}$  para el MLC



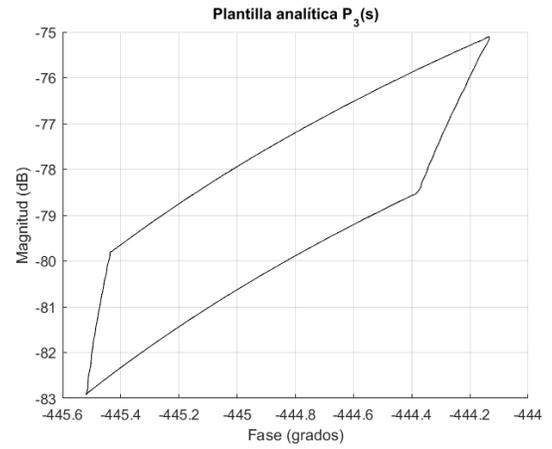
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$

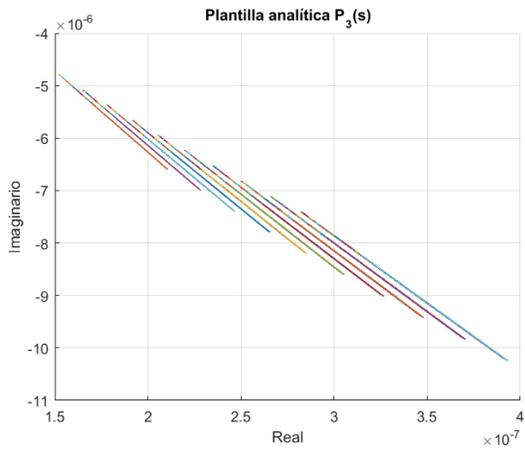


(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$

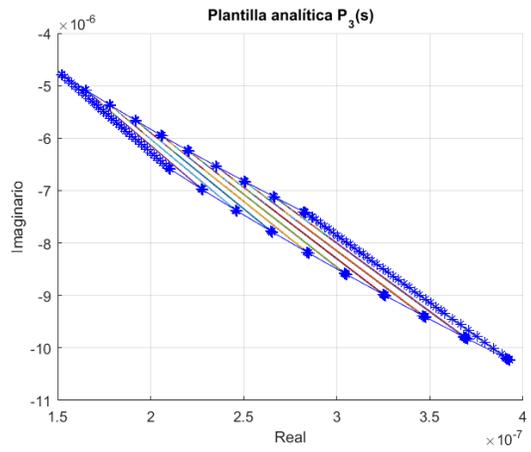


(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

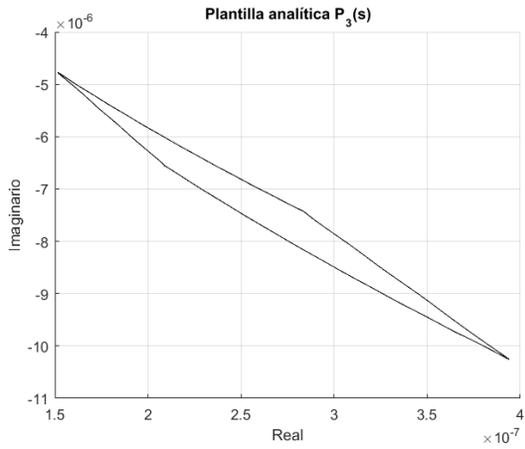
Figura A.5: Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 105 \text{ rad/s}$  para el MLC



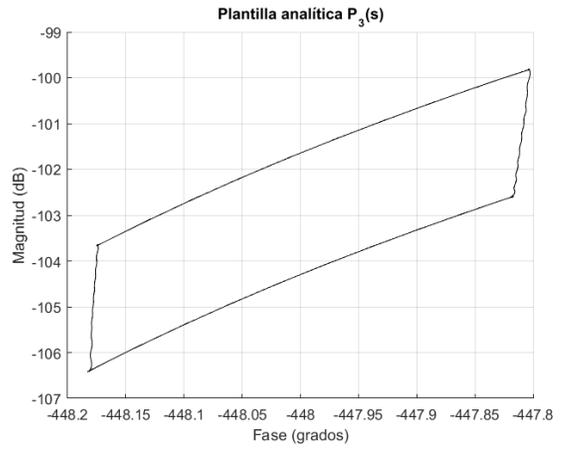
(a) Conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(b) Contorno del conjunto de curvas que forman a la plantilla analítica  $P_3(s)$



(c) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$



(d) Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.6: Plantilla analítica ajustada  $P_3(s)$  en la frecuencia  $\omega = 250 \text{ rad/s}$  para el MLC

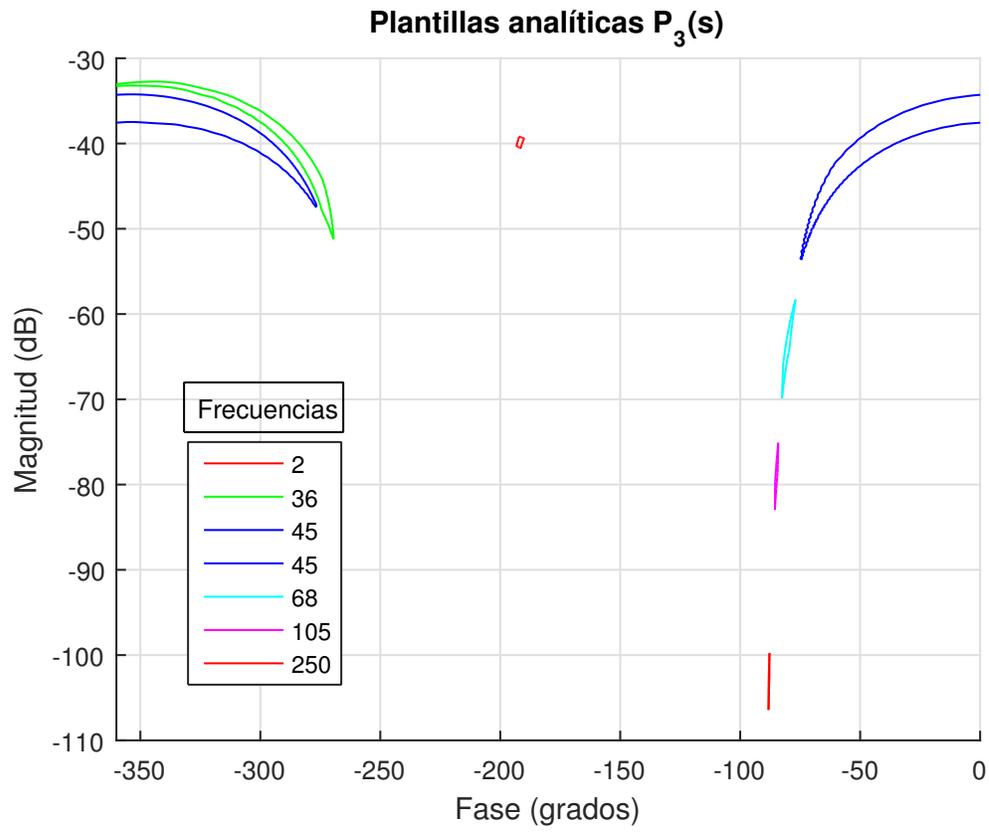
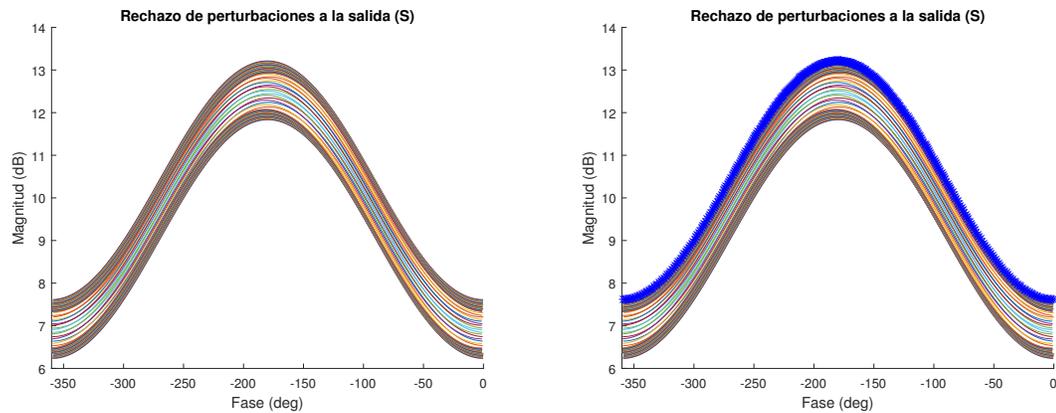


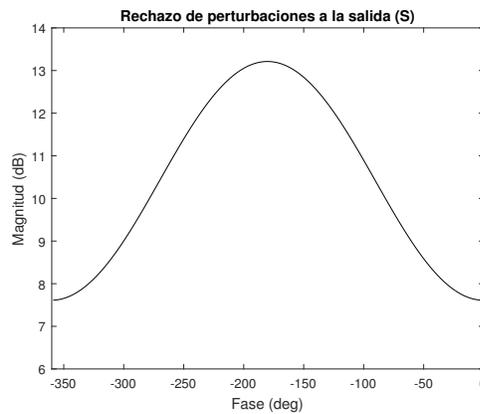
Figura A.7: Plantillas analíticas ajustadas  $P_3(s)$  en las frecuencias  $\omega = [2, 36, 45, 68, 105, 250]$   $rad/s$  para el MLC

## A.2. Cotas analíticas del MLC

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones para las cotas analíticas en diferentes frecuencias del MLC. La función de transferencia  $P_3(s)$  relaciona a la salida tensión  $\sigma_i$  con respecto a la entrada par del formador de onda  $T_{r_i}$ .

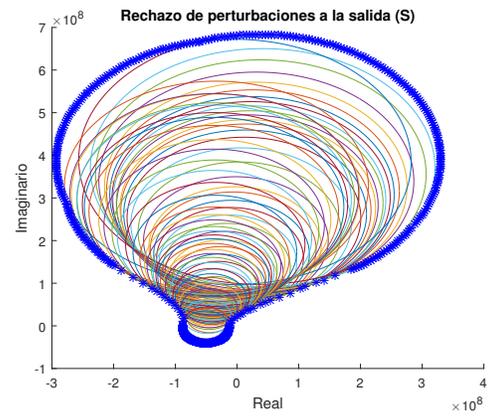
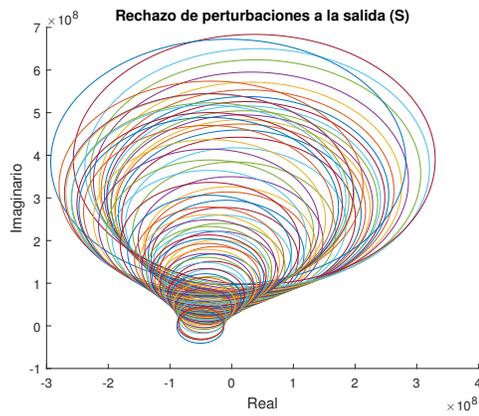


(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$  - (b) Selección de la curva más restrictiva para la cota analítica  $S(s)$



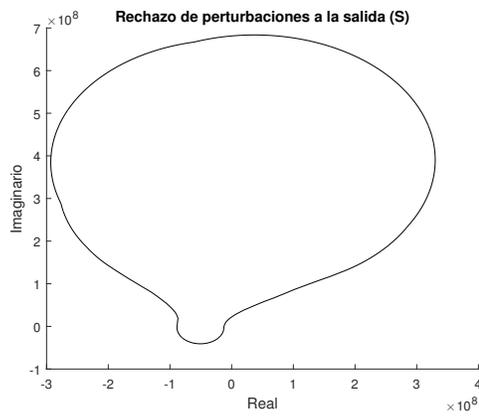
(c) Cota analítica  $S(s)$

Figura A.8: Cota analítica  $S(s)$  en la frecuencia  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  para el MLC

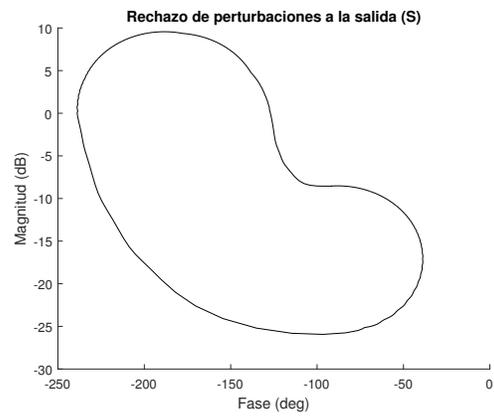


(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$

(b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $S(s)$

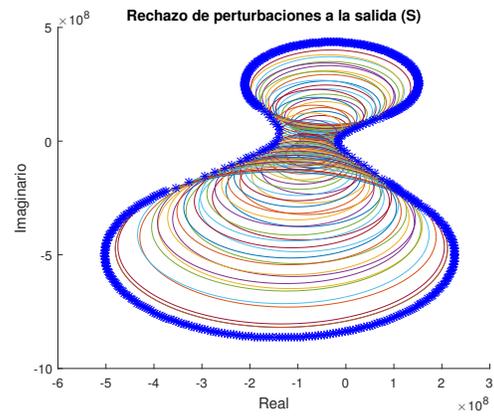
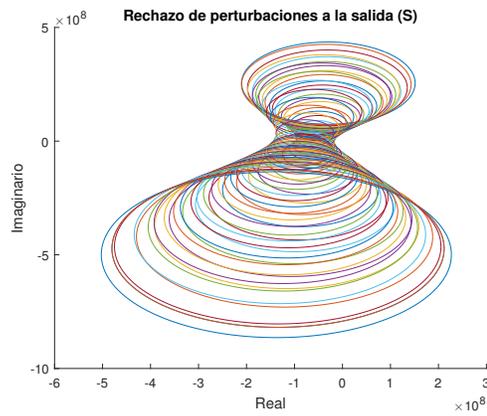


(c) Cota analítica ajustada  $S(s)$

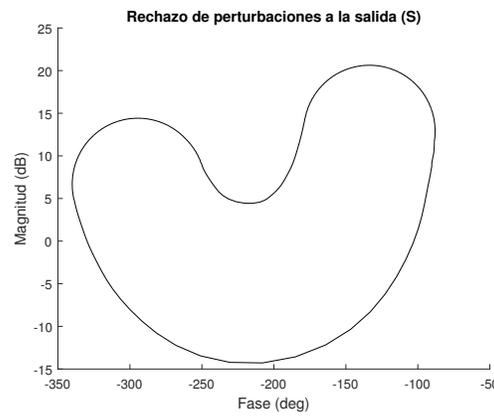
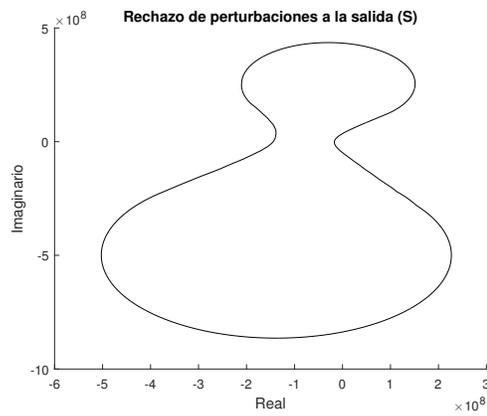


(d) Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.9: Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la frecuencia  $\omega = 36 \text{ rad/s}$  para el MLC



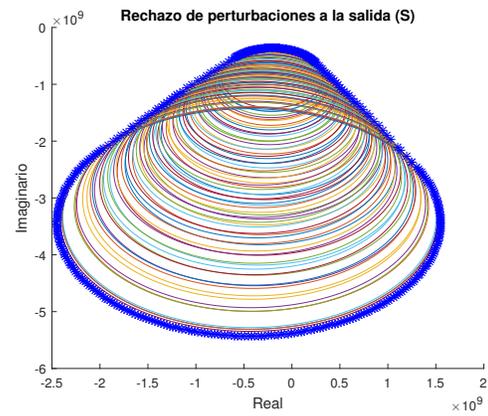
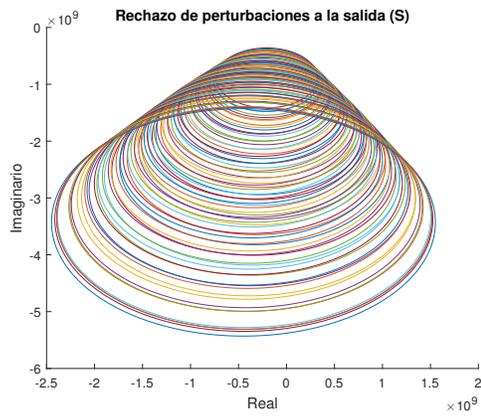
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$  - (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $S(s)$



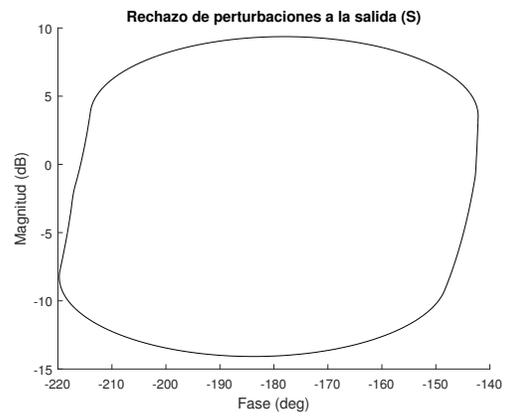
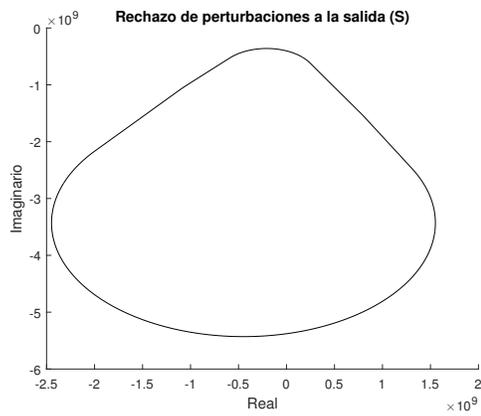
(c) Cota analítica ajustada  $S(s)$

(d) Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.10: Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la frecuencia  $\omega = 45 \text{ rad/s}$  para el MLC



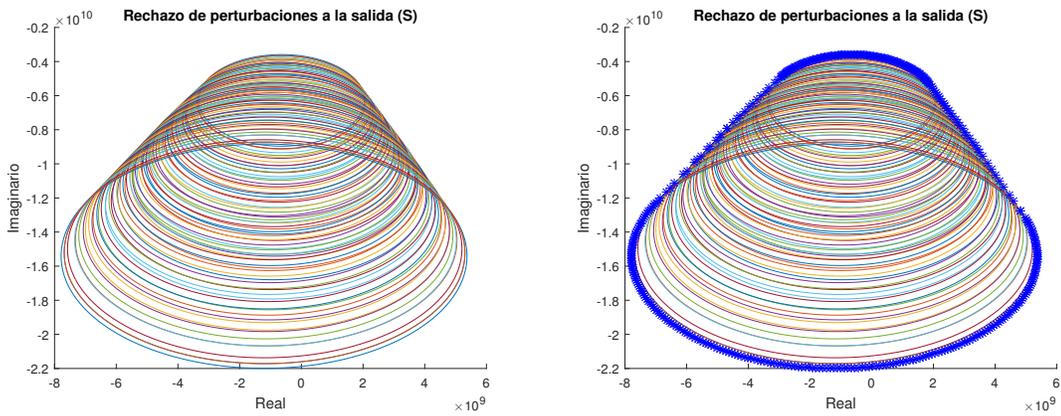
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$  - (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $S(s)$



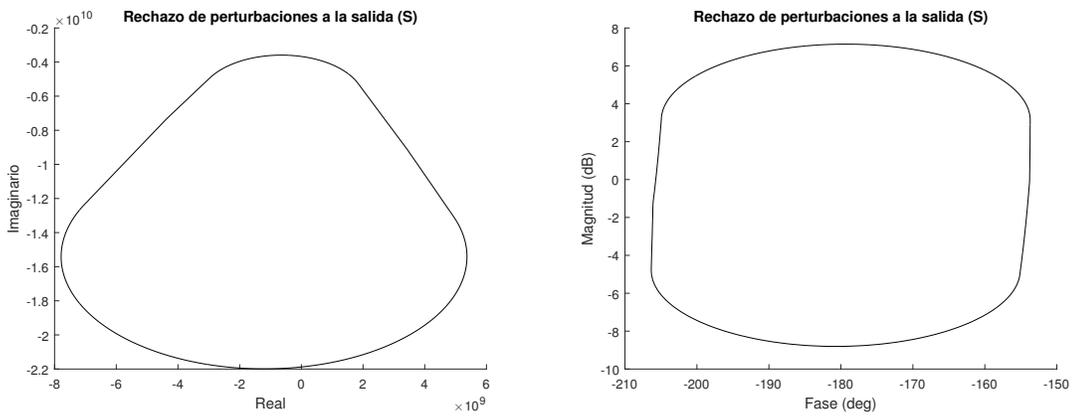
(c) Cota analítica ajustada  $S(s)$

(d) Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.11: Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la frecuencia  $\omega = 68 \text{ rad/s}$  para el MLC



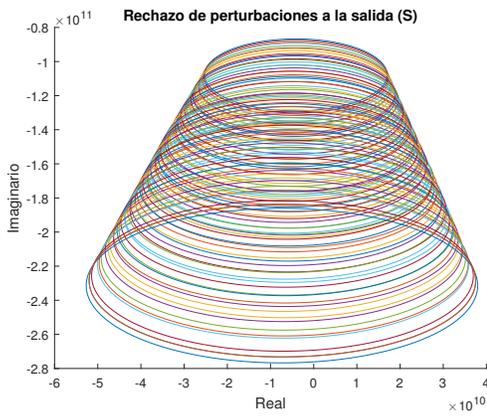
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica- (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que  
 ca  $S(s)$  forman la cota analítica  $S(s)$



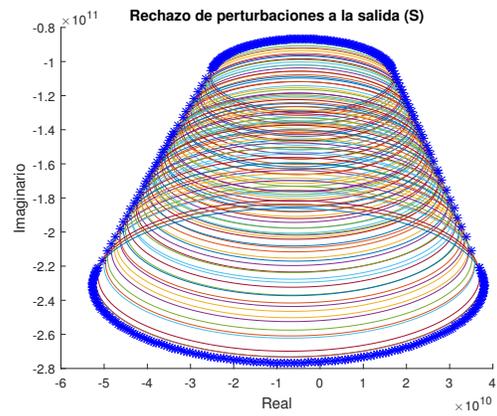
(c) Cota analítica ajustada  $S(s)$

(d) Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la carta de Nichols

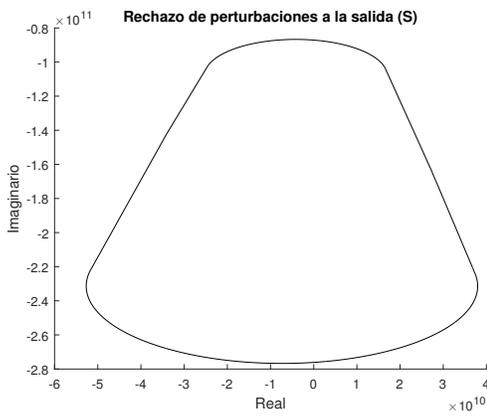
Figura A.12: Cota analítica ajustada  $S(s)$  en frecuencia la  $\omega = 105 \text{ rad/s}$  para el MLC



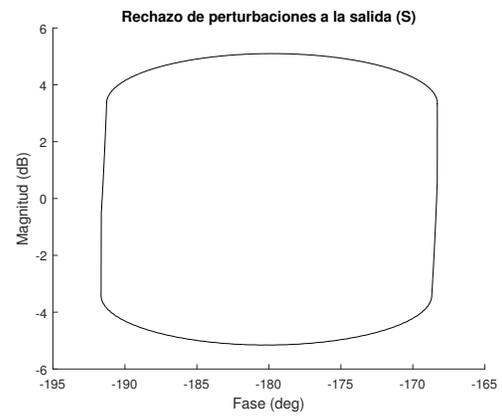
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $S(s)$



(b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $S(s)$

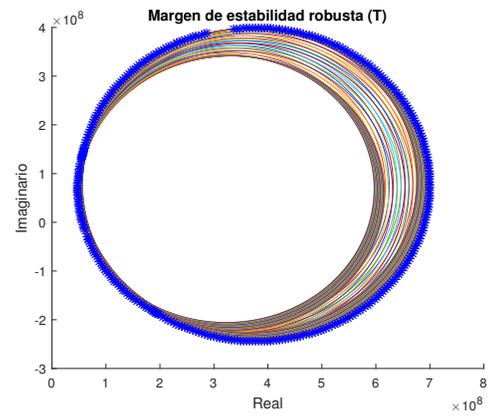
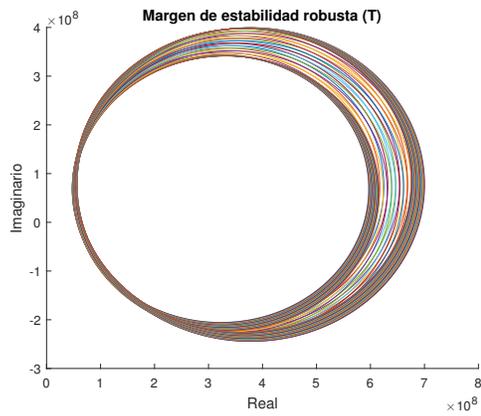


(c) Cota analítica ajustada  $S(s)$



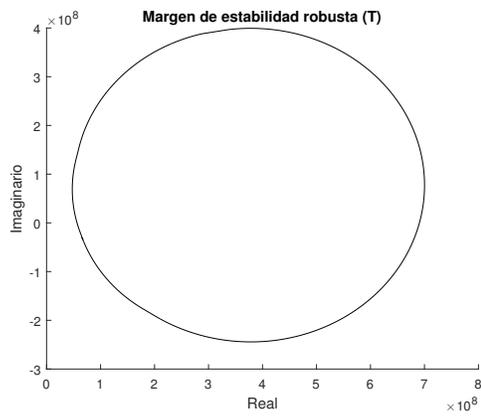
(d) Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.13: Cota analítica ajustada  $S(s)$  en la frecuencia  $\omega = 250 \text{ rad/s}$  para el MLC

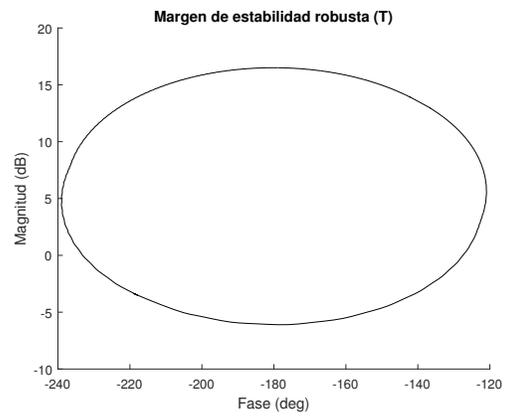


(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$

(b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$

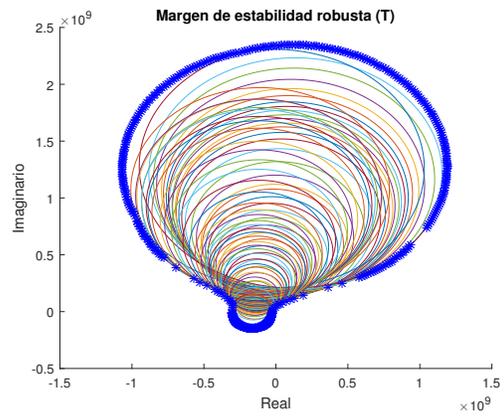
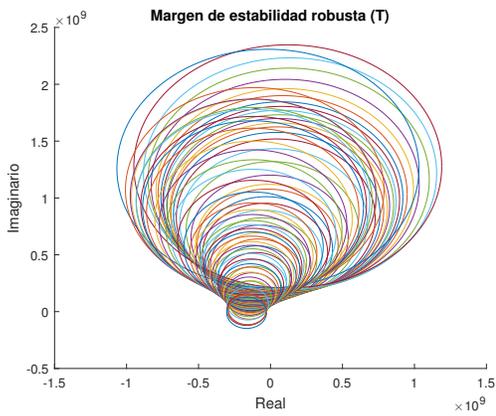


(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

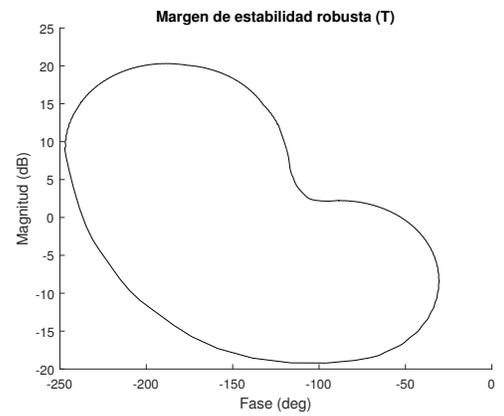
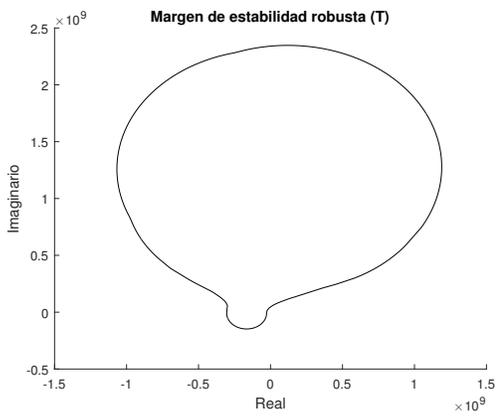


(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.14: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  para el MLC



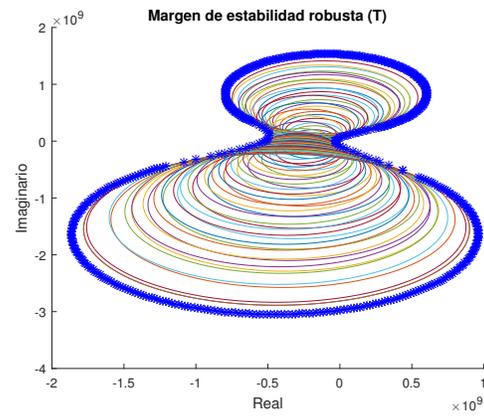
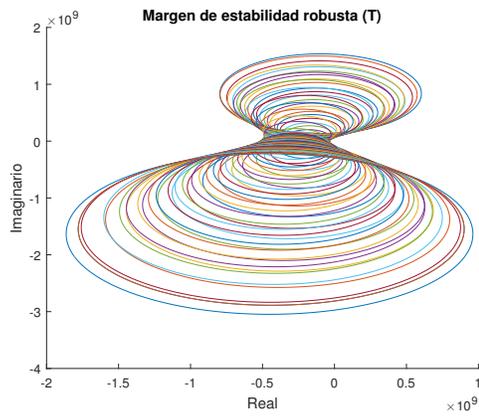
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$  (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$



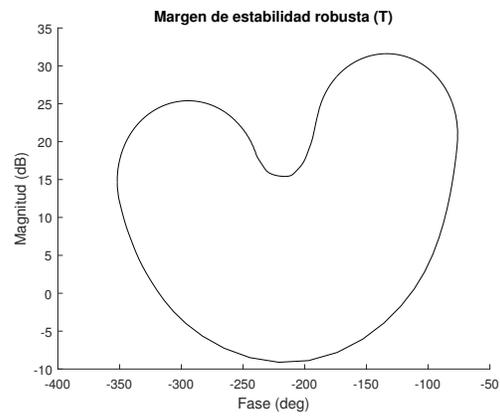
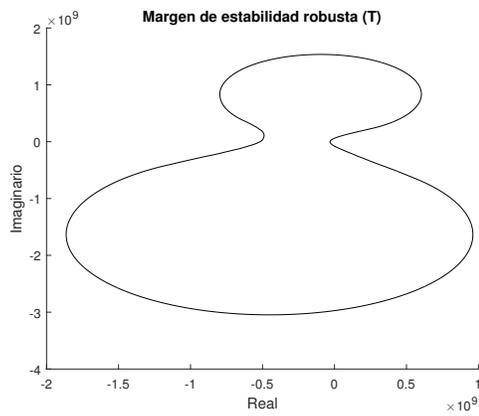
(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.15: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 36 \text{ rad/s}$  para el MLC



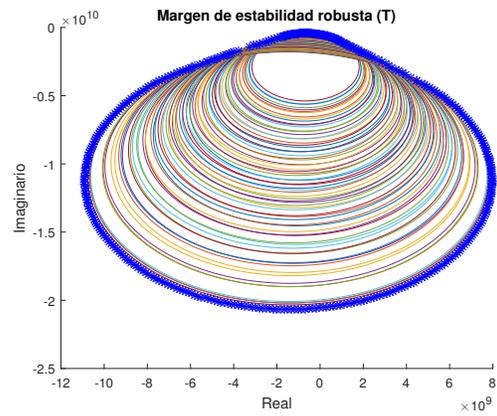
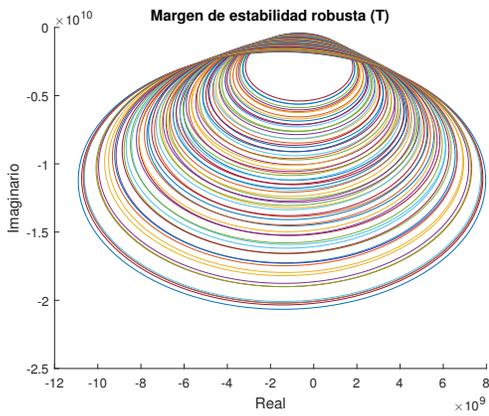
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$  - (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$



(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

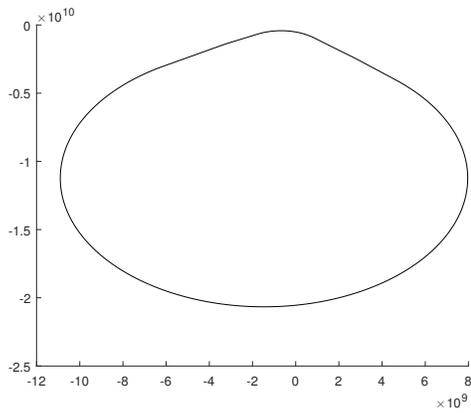
(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.16: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 45 \text{ rad/s}$  para el MLC

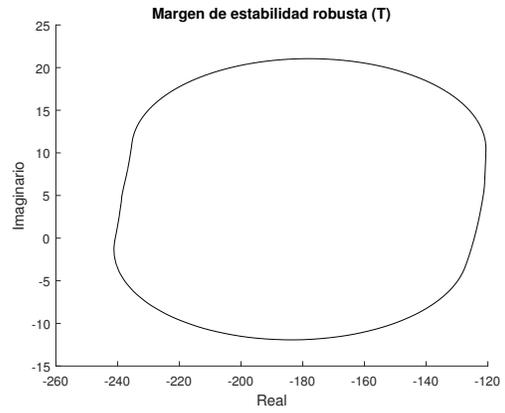


(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$

(b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$

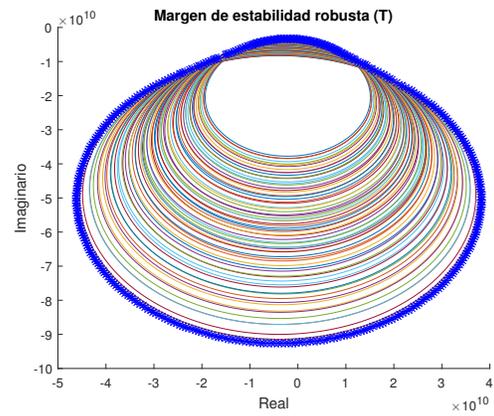
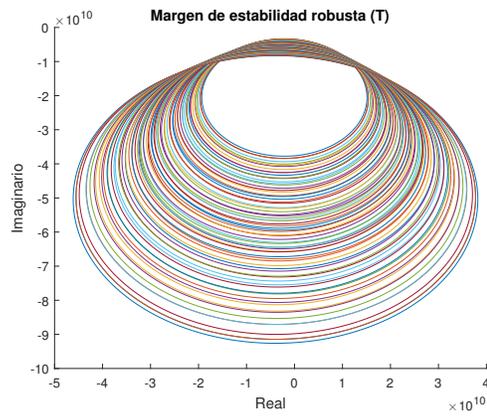


(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

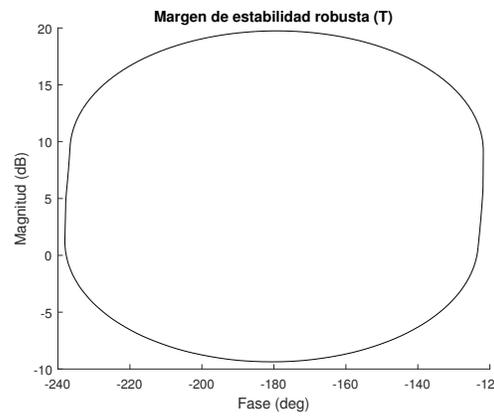
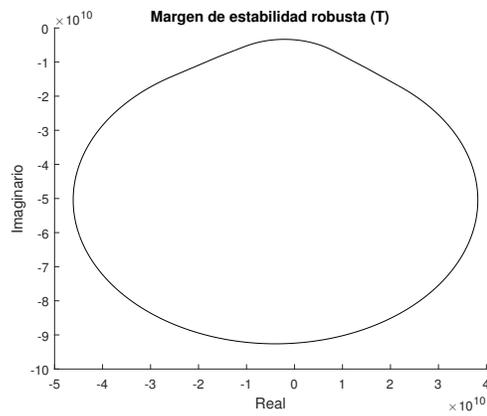


(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.17: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 68 \text{ rad/s}$  para el MLC



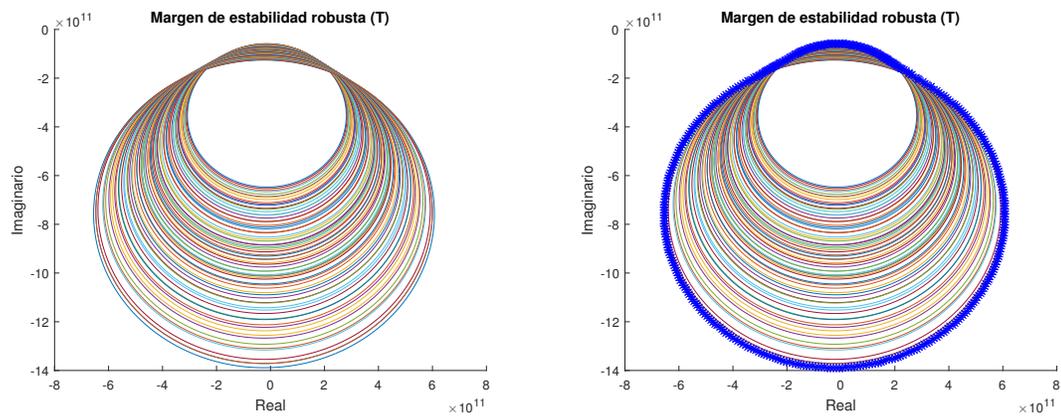
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$  - (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$



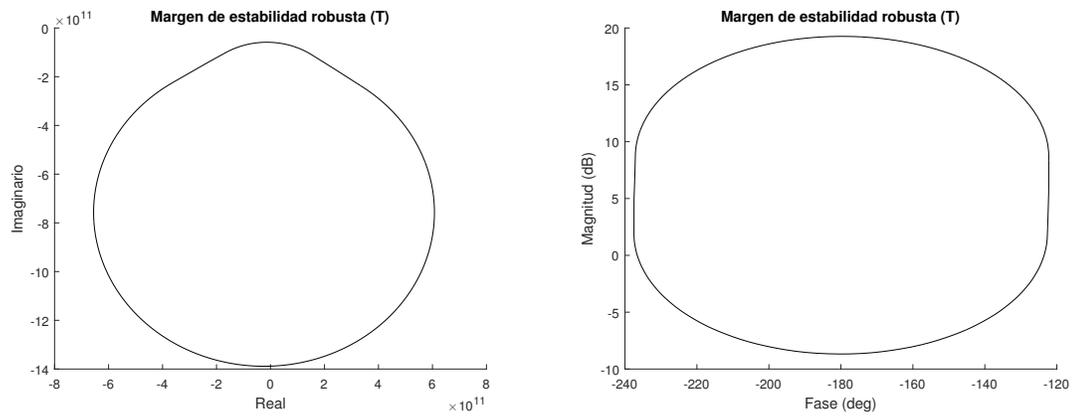
(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

Figura A.18: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 105 \text{ rad/s}$  para el MLC



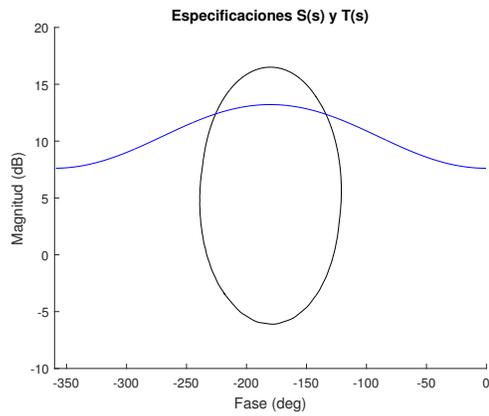
(a) Conjunto de curvas que forman a la cota analítica  $T(s)$  (b) Contorno discreto del conjunto de curvas que forman la cota analítica  $T(s)$



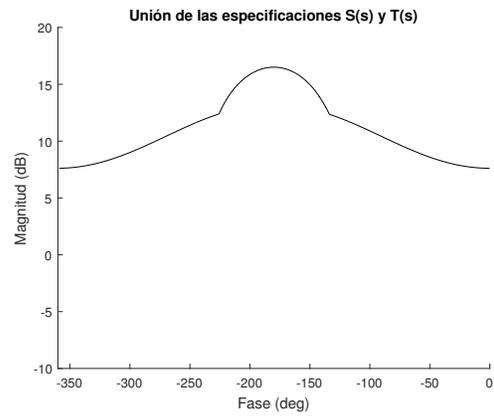
(c) Cota analítica ajustada  $T(s)$

(d) Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la carta de Nichols

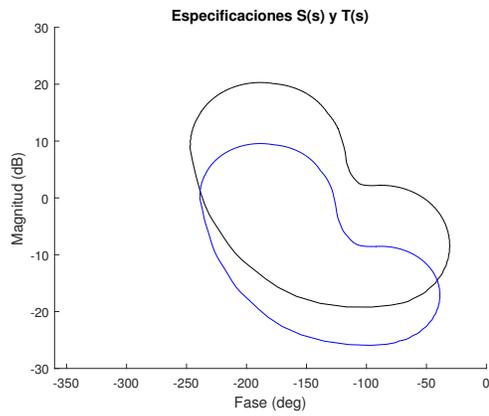
Figura A.19: Cota analítica ajustada  $T(s)$  en la frecuencia  $\omega = 250 \text{ rad/s}$  para el MLC



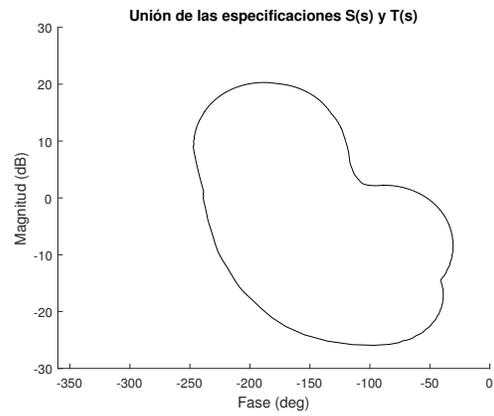
(a) Especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 2 \text{ rad/s}$



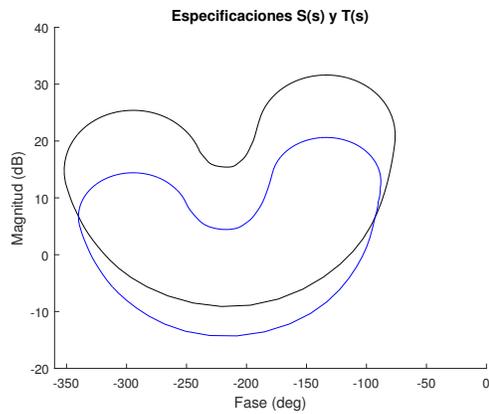
(b) Unión de las especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 2 \text{ rad/s}$



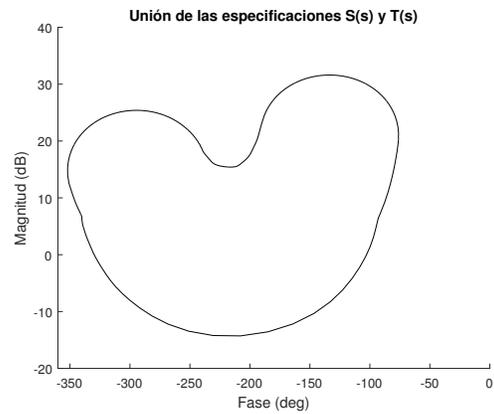
(c) Especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 36 \text{ rad/s}$



(d) Unión de las especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 36 \text{ rad/s}$

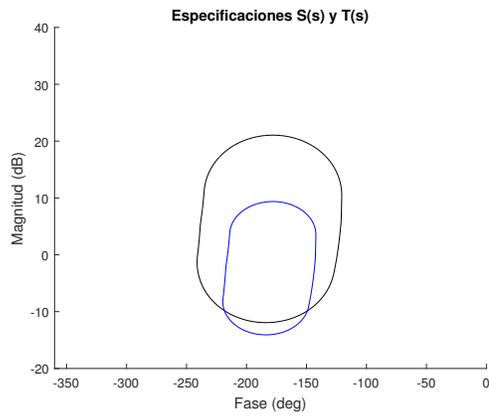


(e) Especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 45 \text{ rad/s}$

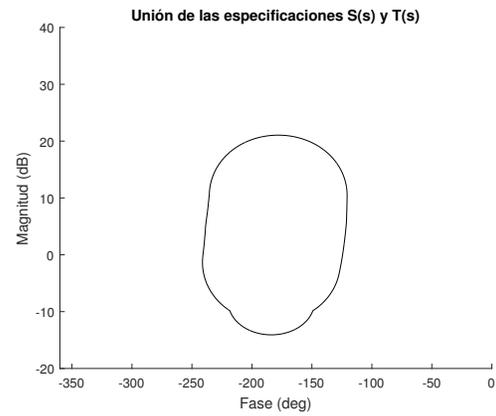


(f) Unión de las especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 45 \text{ rad/s}$

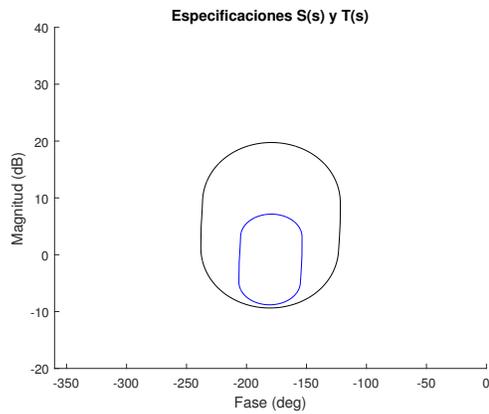
Figura A.20: Unión de cotas analíticas  $S(s)$  y  $T(s)$  para el MLC



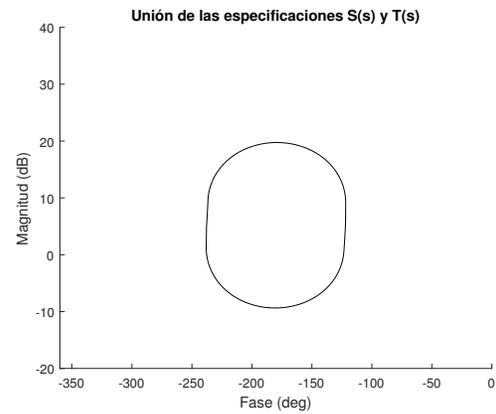
(a) Especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$



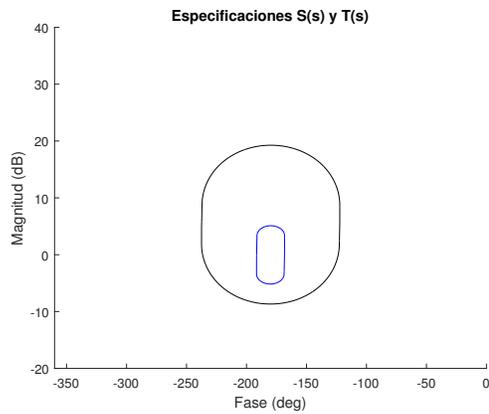
(b) Unión de las especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 68 \text{ rad/s}$



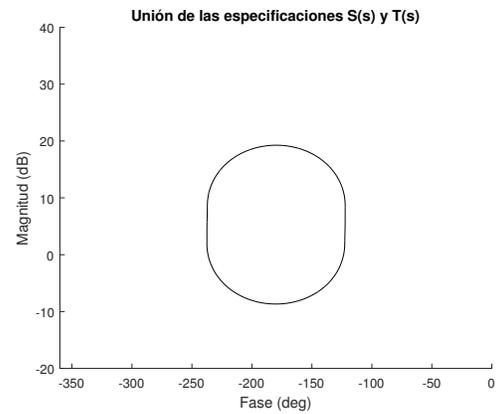
(c) Especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 105 \text{ rad/s}$



(d) Unión de las especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 105 \text{ rad/s}$



(e) Especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 250 \text{ rad/s}$



(f) Unión de las especificaciones  $S(s)$  y  $T(s)$  en  $\omega = 250 \text{ rad/s}$

Figura A.21: Unión de cotas analíticas  $S(s)$  y  $T(s)$  para el MLC

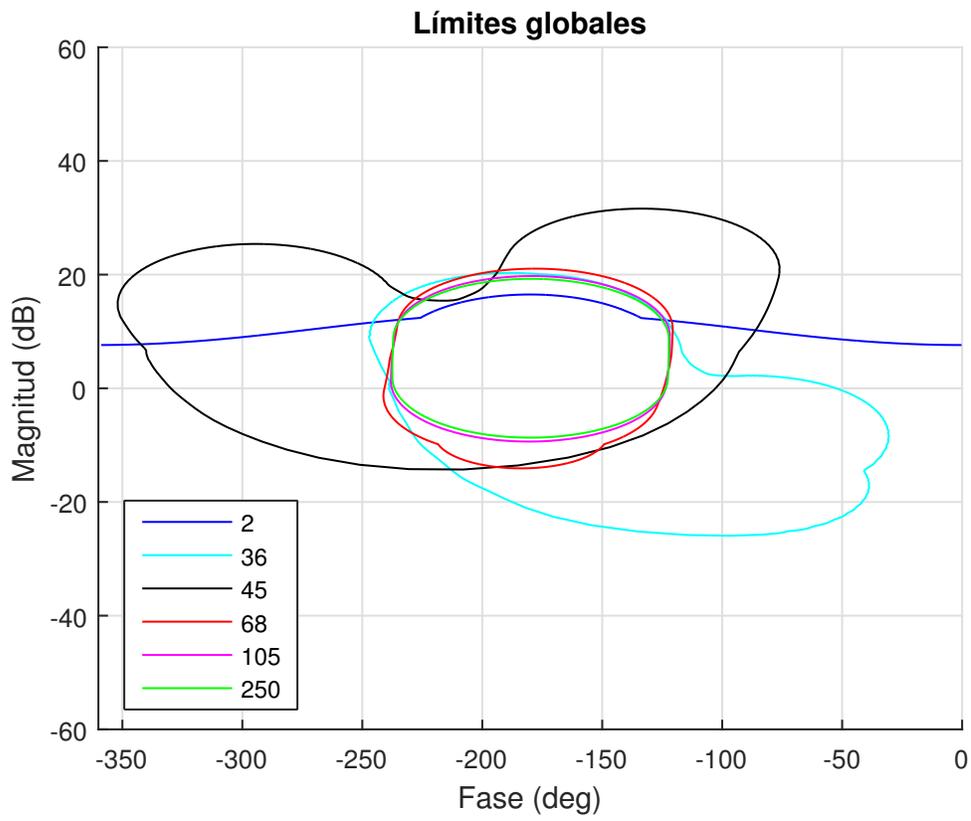


Figura A.22: Límites globales para el MLC