Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Propiedades Topológicas y de Retícula del espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables

por

Homero Alejandro Escamilla Rocha

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León — Noviembre 2024

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Propiedades Topológicas y de Retícula del espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables

por

Homero Alejandro Escamilla Rocha

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León — Noviembre 2024

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Propiedades Topológicas y de Retícula del espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables", realizada por el alumno Homero Alejandro Escamilla Rocha, con número de matrícula 1067136, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dra. Lilia Alanís López
Directora

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Revisor

Dr. Tómas Pérez Becerra
Revisor

Dr. Gerardo Hernández Valdez
Revisor

Dr. Gerardo Palafox Castillo
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Noviembre 2024

DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD

Declaro solemnemente que el documento que enseguida presento es fruto de mi propio trabajo, y hasta donde estoy enterado, no contiene material previamente publicado o escrito por alguien más, excepto aquellos materiales o ideas que por ser de otras personas les he dado el debido reconocimiento y los he citado cumplidamente en la bibliografía o las referencias. Declaro además que tampoco contiene material que haya sido aceptado para el otorgamiento de cualquier otro grado o diploma de alguna universidad o institución.

Homero Alejandro Escamilla Rocha

San Nicolás de los Garza, Nuevo León — Noviembre 2024

Para Sandra, la fuente que todo lo emana.

Índice general

Agradecimientos

En la consecución de todo trabajo académico siempre intervienen muchas más personas que el titular del mismo, y este no es la excepción. Haciendo uso de la palabra como recurso afectivo, utilizo este espacio para agradecer a todas ellas.

Siempre la familia desempeña un papel fundamental en el desarrollo de cada uno de sus miembros. Por tal motivo, deseo agradecer a mis padres Homero Escamilla Reyna y Sara Rocha Rivera, mis hermanos Jorge Mariano Escamilla Rocha y Tanai Sarahí Escamilla Rocha, y a mi esposa Sandra Behena Méndez. Sin ellos este trabajo hubiera sido imposible.

A mis asesores de tesis, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y Dra. Lilia Alanía López, por su tiempo, su paciencia, sus consejos y enseñanzas.

Al Dr. Raúl Gómez Múñoz por su apoyo en el estudio de ciertos temas que fueron necesarios para el desarrollo del presente trabajo.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León por brindarme la oportunidad de trabajar durante mis estudios de doctorado.

Finalmente, quisiera agradecer a todos mis compañeros de estudios y a todos mis amigos; en particular a Juan Carlos Hernández Pacheco por todos los buenos momentos durante mi estancia en la ciudad de Monterrey, Nuevo León.

Resumen

En este trabajo de tesis definimos un producto y un orden en el espacio $D_{HK}([a,b],X)$ de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables para darle la estructura de un álgebra reticular de Banach. Damos condiciones suficientes para que $D_{HK}([a,b],X)$ se un $AM-$espacio, para que tenga la propiedad de Dunford-Pettis y para que su cono sea generador. Se prueba que la norma de Alexiewicz en $D_{HK}([a,b],X)$ no es $\sigma-$orden continua y que este espacio no tiene unidades de orden. Además probamos que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de c_0 y damos condiciones necesarias y suficientes para que tenga una copia complementada de l_1 y una copia de l_∞. Como aplicación de los resultados obtenidos, presentamos un teorema de punto fijo en $D_{HK}([a,b],X)$ el cual empleamos para obtener un teorema que garantiza la existencia de una única solución a una ecuación integral de Volterra.

Palabras clave: Integral distribucional vectorial de Henstock-Kurzweil, AM-espacio, álgebra reticular de Banach, copia de c_0, copia de l_1, copia de l_∞.

Capítulo 1

Introducción

A finales de los años cincuenta del siglo pasado, Ralph Henstock (1955) y Jaroslav Kurzweil (1957), de manera independiente, desarrollan dos teorías de integración para funciones con valores reales definidas en intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Dichas integrales resultaron ser equivalentes y por tal motivo en la actualidad se le conoce como la integral de Henstock-Kurzweil.

La introducción de esta nueva teoría de integración abrió un nuevo campo de investigación con diferentes direcciones, entre las que podemos destacar: definir nuevas integrales siguiendo el esquema de Riemann; generalizar la integral a funciones con varias variables y a funciones que toman valores en un espacio de Banach; aplicarla a la teoría de las ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, análisis de Fourier, la probabilidad, la estadística; definir normas y topologías vectoriales sobre el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables de tal forma que lo doten de buenas propiedades. La razón de esto último se debe a que el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables no es completo con la semi-norma de Alexiewicz (véase [24]). Bongiorno y Panchapagesan prueban en [4] que la completación de dicho espacio es un subespacio del espacio de las distribuciones reales. Por su parte, Erick Talvila en [25] hace un estudio de la integral distribucional de Henstock-Kurzweil, presentando entre otras cosas, teoremas de convergencia y propiedades de retícula del espacio de las distribuciones reales Henstock-Kurzweil integrables. Guoju Ye et al. en [27] y [15] continua el estudio de los teoremas de convergencia y de las propiedades de retícula, mientras que Gutiérrez et al. en [13] hace un estudio de las propiedades topológicas de dicho espacio.

Por otra parte, Cao en [5] extiende las integrales de Henstock y Kurzweil a funciones que toman valores en un espacio de Banach X y demuestra, entre otras cosas, que en este contexto dichas integrales dejan de ser equivalentes si X es de dimensión infinita. Es sabido que para cualquier espacio de Banach X, los espacios de las funciones Henstock integrables $H([a,b],X)$ y Kurzweil integrables $K([a,b],X)$ no son completos con la semi-norma de Alexiewicz (véase [11]). En [20] Pérez et al. prueban que la completación de los espacios $H([a,b],X)$ y $K([a,b],X)$ es un subespacio de las distribuciones vectoriales y definen una integral en la completación, la cual es conocida como la integral distribucional vectorial de Henstock-Kurzweil, pero no considera las propiedades de retícula del espacio. La integral distribucional vectorial de Henstock-Kurzweil es una forma integral muy amplia que contiene a la integral de Bochner y a las integrales vectoriales de Henstock y de Kurzweil (ver [20]).

El espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables es denotado por $D_{HK}([a,b],X)$ y constituye el objeto de estudio de este trabajo.

Entre los principales resultados obtenidos, tenemos: $D_{HK}([a,b],X)$ siempre tiene una copia complementada de c_0, se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que $D_{HK}([a,b],X)$ tenga una copia complementada de l_1 y una copia de l_∞, mostrando así que los resultados que aparecen en [17] son casos particulares de los nuestros. Se definen un producto y un orden en $D_{HK}([a,b],X)$ para dotarlo de la estructura de un álgebra reticular de Banach. Damos condiciones suficientes para que $D_{HK}([a,b],X)$ se un AM-espacio con la propiedad de Dunford-Pettis. Además probamos que la norma de Alexiewicz en $D_{HK}([a,b],X)$ no es $\sigma-$orden continua y que este espacio no tiene unidades de orden, mostrando de este modo que los teoremas presentados por Wei Liu et al. en [15] son erróneos. Se dan condiciones suficientes para que el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ sea generador. Los resultados obtenidos son empleados para obtener un teorema de punto fijo en $D_{HK}([a,b],X)$ el cual empleamos para probar la existencia de una única solución a una ecuación integral de Volterra.

Una técnica empleada para el estudio de un espacio de Banach general es saber si tiene copias y/o copias complementadas de los espacios c_0, l_1 y/o l_∞. Los siguientes teoremas son ejemplo de este hecho.

Teorema 1. *([16]) Si el espacio de Banach X tiene una copia de c_0, entonces ninguna base para el espacio es acotadamente completa.*

Teorema 2. *([16]) Si el espacio de Banach X tiene una copia de l_1, entonces ninguna base para el espacio es reductora.*

Por tal motivo, teoremas que den condiciones para determinar cuando un espacio de Banach tiene copias (complementadas) de los espacios c_0, l_1 y/o l_∞ han sido buscados con asiduidad. Ejemplo de esto son los siguientes resultados.

Teorema 3. *([9]) Sea X un esapcio de Bnach. Si X^* contiene una copia de $L_1[0,1]$, entonces X contiene una copia de l_1.*

Teorema 4. *([9]) Sea X un espacio de Banach. X^* contiene una copia de c_0 si y solo si X contiene una copia complementada de l_1.*

Por otra parte, algunos teoremas de punto fijo que se emplean en la solución de ecuaciones integrales que surgen en la matemática aplicada, tienen entre sus hipótesis algunas de las propiedades de retícula estudiadas en este trabajo. Ejemplo de ello son los siguientes teoremas.

Teorema 5. *([22]) Sea X un $AM-$espacio. Si $B_r \subset X$ es una bola cerrada y $T : B_r \to B_r$ es un operador no expansivo, entonces T tiene un punto fijo en B_r.*

Teorema 6. *([22]) Sea X un $AM-$espacio. Si $I \subset X$ es un intervalo cerrado en orden y $T : I \to I$ es un operador no expansivo, entonces T tiene un punto fijo en I.*

Las observaciones anteriores muestran la relevancia de los resultados obtenidos en este trabajo de tesis. Para resaltar la importancia de dichos resultados, enunciamos brevemente algunas consecuencias que se desprenden de ellos.

Como mencionamos anteriormente, en nuestro trabajo probamos que el espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables siempre tiene una copia complementada de c_0 y una copia de l_1. Como consecuencia de este hecho, se deduce que dicho espacio no tiene una base acotadamente completa ni reductora. Además, como consecuencia de los resultados obtenidos en nuestro trabajo, deducimos que el espacio de las distribuciones vectoriales Henstok-Kurzweil integrables no es débilmente secuencialmente completo, no es reflexivo y no tiene la propiedad de Schur.

El presente trabajo de tesis consta de cinco capítulos, de los cuales la presente introducción constituye el primero. Los capítulos restantes se describen a continuación:

Capítulo 2. Se tratan los conceptos y resultados fundamentales concernienetes a la teoría de los espacios de Banach que serán empleados a lo largo del capítulo cinco del presente trabajo. Entre otras cosas se definen los conceptos de subespacio complementado, copia complementada, bases de Schauder, espacio reflexivo, espacio débilmente secuencialmente completo, la propiedad de Schur, la propiedad de Dunford-Pettis y los operadores compactos.

Capítulo 3. Trata con los conceptos de cono ordenado en un espacio vectorial, diferentes tipos de conos ordenados, acotación en orden y acotación en norma, espacio de

Banach ordenado, retícula de Banach, norma $\sigma-$orden continua, $AM-$espacio y resultados que emplearemos en el capítulo cinco.

Capítulo 4. Se introducen las integrales vectoriales de Henstock y Kurzweil, la norma de Alexiewicz, las distribuciones vectoriales y la integral distribucional vectorial de Henstock-Kurzweil.

Capítulo 5. Es el capítulo principal y contiene las aportaciones originales de este trabajo de tesis. En la sección uno, definimos un orden y un producto en el espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables, $D_{HK}([a,b],X)$, y probamos que si X es un álgebra reticular de Banach, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ es un álgebra reticular de Banach sin identidad multiplicativa y que su cono ordenado no es regular. Demostramos que $D_{HK}([a,b],X)$ es un $AM-$espacio si X lo es y que tiene la propiedad de Dunford-Pettis si X es un $AM-$espacio. Se prueba que la norma de Alexiewicz en $D_{HK}([a,b],X)$ no es $\sigma-$orden continua y que este espacio no tiene unidades de orden. Además damos condiciones suficientes para que el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ sea generador. En la sección dos probamos que para cada espacio de Banach X, $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de c_0 y damos condiciones necesarias y suficientes para que este espacio tenga una copia complementada de l_1 y una copia de l_∞. En la sección tres presentamos un teorema de punto fijo en $D_{HK}([a,b],X)$ y lo empleamos para obtener un resultado que nos garantiza la existencia y unicidad de una solución a una ecuación integral de Volterra.

Capítulo 2
Espacios de Banach

En este capítulo presentaremos conceptos básicos relacionados con la teoría de los espacios de Banach así como algunos resultados que utilizaremos en el capítulo cinco, el cual constituye el capítulo principale de este trabajo de tesis. No presentaremos las demostraciones de los teoremas por ser la mayoría de ellos muy conocidos, sin embargo, para los menos conocidos y mas relevantes para este trabajo, citamos las fuentes donde pueden ser consultadas. En cualquier caso, el lector interesado puede consultar [16], [9] y [1], las cuales son las fuentes principales para el contenido del presente capítulo.

2.1 Espacios Normados y de Banach

Recordemos que si X es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ pueden ser los reales o los complejos, una **norma** en X es una función $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. Si $||x|| = 0$, entonces $x = 0$.
2. Para cada $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.
3. Para cada $x, y \in X$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Observación 1. *Nótese que de* 2. *se tiene que* $||0|| = 0$ *y de* 3. *y esto último que* $||x|| \geq 0$*, para cada* $x \in X$.

Al par $(X, ||\cdot||)$, siendo X un espacio vectorial y $||\cdot||$ una norma en X, se le llama un **espacio normado** y si definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por $d(x, y) = ||x - y||$ se obtiene una métrica en X. Dos normas en un mismo espacio vectorial se dicen que son equivalentes si inducen la misma topología.

Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo con la métrica inducida por la norma.

Presentamos a continuación los ejemplos de espacios de Banach más relevantes para este trabajo. La verificación de que son realmente espacios de Banach puede ser consultada prácticamente en cualquier libro de análisis funcional.

Ejemplo 1. *Los siguientes son ejemplos de espacios de Banach.*

1. $l_\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{F} : (x_n)$ *es sucesión acotada*$\}$ *con la norma* $||(x_n)||_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.
2. $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{F} : (x_n)$ *converge a cero*$\}$ *con la misma norma que en 1.*
3. $l_1 = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ *con la norma* $||(x_n)||_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.
4. $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ *es una función continua*$\}$ *con la norma* $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$.
5. $C_0[a,b] = \{f \in C[a,b] : f(a) = 0\}$ *con la misma norma que 4.*
6. $C([a,b], X) = \{f : [a,b] \to X : f$ *es una función continua*$\}$, *siendo* X *un espacio de Banach, con la norma* $||f||_\infty = \sup\{||f(x)|| : x \in [a,b]\}$.
7. $C_0([a,b], X) = \{f \in C([a,b], X) : f(a) = 0\}$ *con la misma norma que que 6.*

Dentro de la teoría de los espacios normados a los conjuntos $\{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ y $\{x \in X : ||x|| = 1\}$ se les suele representar por los símbolos B_X, S_X y se les llama la **bola unidad cerrada** y la **esfera unidad** en X respectivamente.

Recordemos que un operador lineal T entre los espacios normados X e Y se dice **acotado** si $T(B)$ es un subconjunto acotado de Y siempre que B es un subconjunto acotado de X. Nótese que esta definición difiere del concepto clásico de función acotada entre espacios métricos, donde se suele pedir que la imagen de la función sea un subconjunto acotado del codominio; de hecho, el único operador lineal de X a Y con imagen acotada es el operador constante cero. Existen varias formas equivalentes de definir a un operador acotado dadas por el siguiente teorema.

Teorema 7. *([16]) Sean* X *y* Y *espacios normados y* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El operador* T *es continuo.*
2. *El operador* T *es continuo en* 0.
3. *El operador* T *es uniformemente continuo sobre* X.

4. *El operador T es acotado.*

5. *Para alguna vecindad U de 0 en X, el conjunto $T(U)$ es acotado en Y.*

6. *Existe un número real no negativo M tal que $||Tx|| \leq M||x||$ para cada $x \in X$.*

7. *La cantidad $\sup\{||Tx|| : x \in B_X\}$ es finita.*

Nótese que en particular un operador lineal acotado es equivalente a un operador lineal continuo y que para probar esto último basta con probar la continuidad en 0. De aquí en adelante haremos uso de este hecho sin mención explicita.

Al espacio vectorial de todos los operadores lineales acotados de X en Y se le suele denotar por $B(X,Y)$ y si para $T \in B(X,Y)$ definimos $||T|| = \sup\{||Tx|| : x \in B_X\}$, entonces obtenemos una norma, llamada **norma de operadores**.

Si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X,Y)$ con la norma de operadores es también un espacio de Banach; en particular $X^* = B(X,\mathbb{F})$ con la norma de operadores siempre es un espacio de Banach, llamado el **espacio dual de** X. A los elementos de X^* se les llama **funcionales lineales acotados** en X.

Como los espacios de Banach tienen estructura algebraica, topológica y métrica, una forma de compararlos es mediante operadores lineales biyectivos que sean continuos (acotados).

Definición 1. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que*

- *T es un **isomorfismo** si es inyectivo, continuo, y su mapeo inverso T^{-1} es continuo sobre la imagen de T. Si además, $||Tx|| = ||x||$, para cada $x \in X$, se dice que T es un isomorfismo isométrico.*

- *Y tiene una **copia** de X si existe un isomorfismo T de X en Y. Si además T es isomorfismo isométrico, se dice que Y tiene una **copia isométrica** de X.*

- *X y Y son **isomorfos**, si existe un isomorfismo de X sobre Y. Si además el isomorfismo es isométrico se dice que X y Y son isométricamente isomorfos.*

Si los espacios de Banach X e Y son isomorfos, entonces algebraicamente y topológicamente son el mismo espacio, y si son isométricamente isomorfos, entonces desde el punto de vista algebraico, topológico y métrico son el mismo, es decir tenemos una identificación total de los espacios y en este sentido se consideran el mismo.

Se verifica sin dificultad que si Y es un subespacio denso de un espacio normado X, entonces Y^* y X^* son isométricamente isomorfos. Por otra parte, si Y es un espacio normado incompleto, siempre existe un espacio de Banach X que contiene un subespacio denso isométricamente isomorfo a Y. A dicho espacio se le llama la **completación de** Y.

Teorema 8. *([16]) Sea Y un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach X y un isomorfismo isométrico $T : Y \to X$ tal que $T(Y)$ es denso en X. Además, el espacio Y^* es isométricamente isomorfo a X^*. Si Z es otro espacio de Banach tal que existe un isomorfismo isométrico de Y sobre un subconjunto denso de Z, entonces Z es isométricamente isomorfo a X.*

Otro concepto importante dentro de la teoría de los espacios de Banach es el de subespacio complementado. Para poder hablar de él necesitamos introducir antes el concepto de suma directa.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios vectoriales. El conjunto $X_1 \times \cdots \times X_n$ con las operaciones

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

es un espacio vectorial llamado **espacio vectorial suma.**

Si $X_1, \ldots, X_n$ son espacios normados, entonces existe una forma de normar su espacio vectorial suma que es sugerido por la norma del $n-$espacio Euclidiano.

Definición 2. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios normados. La **suma directa (externa)** de $X_1, \ldots, X_n$ es el espacio normado cuyo espacio vectorial subyacente es el espacio vectorial suma de $X_1, \ldots, X_n$ y cuya norma es la **norma suma directa** dada por la fórmula*

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \Big(\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 \Big)^{1/2}.$$

Este espacio normado es denotado por $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$.

No existe un acuerdo universal sobre la mejor forma de definir la norma suma directa. Otras alternativas vienen dadas por

$$||(x_1,\ldots,x_n)||_1=\sum_{j=1}^{n}||x_j||$$

y

$$||(x_1,\ldots,x_n)||_\infty=\max\{||x_1||,\ldots,||x_n||\}.$$

Afortunadamente, estas tres normas resultan ser equivalentes, es decir inducen la misma topología.

El siguiente resultado nos dice que la suma directa de los espacios normados $X_1,\ldots,X_n$ contiene como subespacios a $X_1,\ldots,X_n$.

Proposición 1. *([16]) Sean $X_1,\ldots,X_n$ espacios normados. Para cada entero j tal que $1\leq j\leq n$, sea*

$$X'_j=\{(x_1,\ldots,x_n)\in X_1\oplus\cdots\oplus X_n : x_k=0 \textit{ cuando } k\neq j\}.$$

Entonces cada X'_j es un subespacio cerrado de $X_1\oplus\cdots\oplus X_n$ que es isométricamente isomorfo al correspondiente X_j.

La siguiente Proposición nos da leyes conmutativas y asociativas generalizadas para la suma directa.

Proposición 2. *([16]) Sean $X_1,\ldots,X_n$ espacios normados. Si dos sumas directas están cada una formada al permutar y asociar los términos de $X_1\oplus\cdots\oplus X_n$, entonces esas dos sumas directas son isométricamente isomorfas.*

Una pregunta natural es: ¿cuándo la suma directa de espacios normados es un espacio de Banach? La respuesta viene dada por el siguiente Teorema.

Teorema 9. *([16]) Sean $X_1,\ldots,X_n$ espacios normados. Entonces $X_1\oplus\cdots\oplus X_n$ es un espacio de Banach si y solo si cada X_j es un espacio de Banach.*

Supongamos ahora que V es un espacio vectorial y que $A_1,\ldots,A_n$ son subconjuntos de V. Entonces la suma (algebraica) de $A_1,\ldots,A_n$, denotada por $A_1+\cdots+A_n$, se define como $\{a_1+\cdots+a_n : a_j\in A_j \text{ para cada } j\}$. Es fácil ver que si $A_i,\ldots,A_n$ son subespacios de V, entonces también lo es su suma algebraica.

En la terminologia de los espacios vectoriales se dice que el espacio vectorial V es la **suma directa interna algebraica** de sus subespacios $M_1, \dots, M_n$ si $V = M_1 + \cdots + M_n$ y $M_j \cap \sum_{k \neq j} M_k = \{0\}$ para $j = 1, \dots, n$.

La suma directa interna que es de mayor importancia en la teoría de espacios normados tiene una restricción adicional sobre los subespacios usados para formarla.

Definición 3. *Supongamos que $M_1, \dots, M_n$ son subespacios cerrados de un espacio normado X tal que $X = M_1 + \cdots + M_n$ y $M_j \cap \sum_{k \neq j} M_k = \{0\}$ cuando $j = 1, \dots, n$. Entonces el espacio normado X es la* ***suma directa (interna)*** *de $M_1, \dots, M_n$.*

Es decir, un espacio normado X es la suma directa interna de sus subespacios $M_1, \dots, M_n$ si y solo si cada uno de estos subespacios es cerrado y X es su suma directa interna algebraica.

La relación entre los conceptos de suma directa externa y suma directa interna viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 3. *([16])*

1. *Si $X_1, \dots, X_n$ son espacios normados y $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, entonces X tiene subespacios cerrados $X'_1, \dots, X'_n$ tal que X es la suma directa interna de $X'_1, \dots, X'_n$ y cada X_j es isométricamente isomorfo al correspondiente X'_j.*

2. *Si X es un espacio de Banach que es la suma directa interna de sus subespacios cerrados $M_1, \dots, M_n$, entonces X es isomorfo a $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.*

La segunda parte de la Proposición previa no se cumple en general para espacios normados incompletos.

Podemos ahora definir el concepto de subespacio complementado de un espacio normado X.

Definición 4. *Un subespacio M de un espacio normado X es* ***complementado*** *en X si es cerrado en X y existe un subespacio cerrado N de X tal que X es la suma directa interna de M y N. En tal caso el subespacio N se dice que es* ***complementario*** *a M.*

Lema 1. *Sea X un espacio de Banach y Y un subespacio de X. Si M es un subespacio complementado de Y y Y es un subespacio complementado de X, entonces M es un subespacio complementado de X.*

Demostración: Como M es complementado en Y, entonces M es cerrado en Y y existe un subespacio cerrado N_1 de Y tal que $Y = M \oplus N_1$, donde la igualdad se entiende en el sentido de ser isomorfos ya que Y al ser complementado en X es cerrado en X y por lo tanto es espacio de Banach.

Al ser Y complementado en X, entonces existe un subespacio cerrado N_2 de X tal que $X = Y \oplus N_2$.

Como M es cerrado en Y y Y es cerrado en X, entonces M es subespacio cerrado de X. De igual modo N_1 es un subespacio cerrado de X. Al ser N_1 y N_2 subespacios cerrados del espacio de Banach X, son espacios de Banach y entonces $N_1 \oplus N_2$ es un subespacio de Banach de X y por lo tanto cerrado en X. Finalmente, por la ley asociativa generalizada para sumas directas tenemos que $X = Y \oplus N_2 = (M \oplus N_1) \oplus N_2 = M \oplus (N_1 \oplus N_2)$. ■

Existe una forma equivalente de definir subespacios complementados de espacios de Banach que involucra la noción de proyección.

Recordemos que si X es un espacio vectorial un operador lineal $P : X \to X$ es una **proyección** en X si $P(Px) = Px$ para cada $x \in X$, esto es, si $P^2 = P$.

Proposición 4. *([16]) Un subespacio de un espacio de Banach es complementado si y solo si es la imagen de una proyección acotada en el espacio.*

Si X e Y son espacios de Banach, en sintonía con la definición (1) se dice que Y tiene una **copia complementada de** X, si X es isomorfo a un subespacio complementado de Y.

Un Teorema debido a A. Sobczyk nos dice que todo espacio de Banach separable que contiene una copia de c_0, entonces la tiene complementada.

Teorema 10. *([9]) Si c_0 es un subespacio cerrado de un espacio de Banach separable X, entonces existe una proyección lineal acotada P de X sobre c_0.*

Los siguientes resultados serán empleados en el capítulo cinco de este trabajo de tesis.

Teorema 11. *([6], Teorema 3.1.4) Sea K un espacio Hausdorff compacto. Entonces $C(K, X)$ contiene una copia complementada de l_1 si y solo si X la tiene.*

Teorema 12. *([6], Teorema 3.3.1) Sea K un espacio Hausdorff compacto. Entonces $C(K, X)$ tine copía de l_∞ si y sólo si, $C(K)$ o X la tiene.*

Entre los teoremas fundamentales del análisis funcional tenemos los siguientes.

Teorema 13. *(de Hahn-Banach) Sea f_0 un funcional lineal acotado sobre un subespacio Y de un espacio normado X. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $||f|| = ||f_0||$ y la restricción de f a Y es f_0.*

El siguiente corolario del Teorema de Hahn-Banach es uno de los más útiles.

Corolario 1. *Si x es un elemento no cero de un espacio normado X, entonces existe $f \in X^*$ tal que $||f|| = 1$ y $f(x) = ||x||$.*

Teorema 14. *(del Mapeo Abierto) Todo operador lineal acotado de un espacio de Banach sobre un espacio de Banach es un mapeo abierto*

Como corolario del Teorema del mapeo abierto tenemos que todo operador lineal acotado biyectivo entre espacios de Banach es un isomorfismo.

Teorema 15. *(de la Gráfica Cerrada) Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si la gráfica de T es un conjunto cerrado en $X \times Y$, entonces T es un operador acotado.*

2.2 La topología débil y débil*

Es sabido que B_X, la bola unidad cerrada en un espacio normado X, es compacta si y solo si X es de dimensión finita. Así entonces, toda sucesión acotada en un espacio normado tiene una subsucesión convergente si y solo si el espacio es finito dimensional. La necesidad de extraer subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas llevó a la buequeda de nuevas topologías en los espacios normados, siendo la culminación de estos esfuerzos las llamadas topología débil y débil*, la primera definida en todo espacio normado mientras que la segunda se define en los espacios duales de los espacios normados.

Definición 5. *Sea X un espacio normado. La **topología débil** en X se define como la menor topología en X que hace continuos a todos los elementos de X^**

Es sabido que la topología débil en un espacio normado es una topología de Hausdorff localmente convexa, es decir las operaciones de espacio vectorial son continuas respecto a dicha topología y esta tiene una base local en cero constituida por conjuntos convexos.

La topología débil suele denotarse por el símbolo w y una propiedad topológica que se cumple con respecto a la topología débil se dice que es una propiedad débil o que se cumple débilmente. Adjuntar la letra w a un símbolo topológico es otro modo de indicar que se está usando la topología débil. Por ejemplo $w - \lim_n x_n = x$ significa que la sucesión (x_n) converge a x en la topología débil. Al hacer referencia a una propiedad topológica sin mención de ningun topología, la topología de la norma es la que está en juego. Si X es espacio normado, el símbolo X^* representará siempre el dual de X respecto a la topología de la norma.

Si X es un espacio normado, como cada elemento de X^* es continuo respecto a la topología de la norma, entonces la topología débil en X está contenida en la topología de la norma y por lo tanto cada sucesión convergente es $w-$convergente. A los espacios donde se cumple el recíproco se les da un nombre especial.

Definición 6. *Sea X un espacio de Banach. Se dice que X tiene la* ***propiedad de Schur*** *si para cada sucesión (x_n) en X tal que $w-\lim_n x_n = x$ se tiene que $||x_n - x|| \to 0, n \to \infty$.*

Ejemplo 2. *Los siguientes son ejemplos de espacios que tiene la propiedad de Schur y de espacios que no tienen la propiedad de Schur.*

1. *J. Schur probó en un artículo publicado en 1920 que toda sucesión $w-$convergente en l_1 es de hecho norma convergente al límite débil de la sucesión. Por lo tanto l_1 tiene la propiedad de Schur.*
2. *El espacio l_2 no tiene la propiedad de Schur.*
3. *Los espacios c_0 y l_p tal que $1 < p < \infty$, no tienen la propiedad de Schur.*
4. *La propiedad de Schur se hereda a subespacios cerrados; es decir si X es un espacio normado con la propiedad de Schur y Y es un subespacio cerrado de X, entonces Y tiene la propiedad de Schur.*

Definición 7. *Sea X un espacio de Banach y (x_n) una sucesión en X. Se dice que (x_n) es una sucesión $w-$**Cauchy**, si para cada $x^* \in X^*$, $x^*(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{F}$ y se dice que X es* ***débilmente secuencialmente completo*** *si toda sucesión $w-$Cauchy en X es $w-$convergente.*

En el capítulo cinco de este trabajo estudiaremos la llamada propiedad de Dunford-Pettis, la cual se define de la siguiente manera.

Definición 8. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la* ***propiedad de Dunford-Pettis*** *si para cada par de sucesiones (x_n) en X y (x_n^*) en X^* tales que $w - \lim_n x_n = 0$ y $w - \lim_n x_n^* = 0$, se cumple que $\lim_n x_n^*(x_n) = 0$.*

Existen formas equivalentes de definir la propiedad de Dunford-Pettis que pueden ser consultadas en [16].

Ejemplo 3.

1. *Todo espacio de Banach con la propiedad de Schur tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Por lo tanto, del ejemplo previo,* l_1 *tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

2. *Dunford y Pettis probaron por primera vez que todo espacio* $L_1(\mu)$ *tiene la propiedad de Dunford-Pettis. La demostración de esto puede ser consultada en [1].*

3. *Si* X *es un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, entonces* X *no tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Así, los espacios* l_p*, para* $1 < p < \infty$*, al ser reflexivos de dimensión infinita, no tienen la propiedad de Dunford-Pettis. (Véase la definición de espacio reflexivo al final de la seccón).*

4. *Grothendieck demostró que si un espacio de Banach* X *es tal que su dual* X^* *tiene la propiedad de Dunford-Pettis, entonces* X *la tiene también, sin embargo el recíproco es falso.*

5. *Como es sabido que* $c_0^* = l_1$ *y al tener* l_1 *la propiedad de Dunford-Pettis, se concluye por lo mencionado antes que* c_0 *tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

6. *Alexandre Grothendieck también probó que todo espacio* $C(K)$*, siendo* K *un espacio de Hausdorff compacto, tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Si un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis y Y es un subespacio cerrado de X, no necesariamente Y tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Sin embargo, si Y es un subespacio complementado de X, entonces Y tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Es decir, la propiedad de Dunford-Pettis no se hereda a subespacios cerrados pero sí a subespacios complementados. Una prueba de esto puede consultarse en [8].

Si X es un espacio normado y A un subconjunto de X, entonces la cerradura de A y la $w-$cerradura de A no tienen por que ser la misma, sin embargo si A es convexo ambas cerraduras coinciden.

Teorema 16. *(S.Mazur, véase [16]) La cerradura y la cerradura débil de un subconjunto convexo de un espacio normado son la misma. En particular, un subconjunto convexo de un espacio normado es cerrado si y solo si es* $w-$*cerrado.*

Si X e Y son espacios de Banach, dos subespacios muy importantes de $B(X, Y)$ están constituidos por los llamados operadores compactos y los operadores débil compactos, los cuales se definen de la siguiente manera.

Definición 9. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Se dice que:*

1. *T es un **operador compacto**, si lleva conjuntos acotados a conjuntos relativamente compactos, es decir si $T(B)$ es un conjunto relativamente compacto en Y, siempre que B es un conjunto acotado en X.*

2. *T es un operador **débilmente compacto** si lleva conjuntos acotados a conjuntos débilmente relativamente compactos, es decir si $T(B)$ es un conjunto débilmente relativamente compacto en Y, siempre que B es un conjunto acotado en X.*

El espacio de operadores compactos de X a Y se denota por $K(X,Y)$ y los débilmente compactos por $K^w(X,Y)$.

Si $T \in K(X,Y)$ y $B \subset X$ es acotado, entonces $T(B)$ es relativamente compacto, es decir su cerradura es un conjunto compacto y por lo tanto acotado. Al estar $T(B)$ contenido en su cerradura, se sigue que $T(B)$ es acotado y por lo tanto $K(X,Y) \subset B(X,Y)$. Además $K(X,Y)$ es un subespacio cerrado propio de $B(X,Y)$.

Si $T \in K(X,Y)$ y $B \subset X$ es acotado, entonces $\overline{T(B)}$ es compacto y como la topología débil es más débil que la topolgía de la norma, se sigue que $\overline{T(B)}$ es $w-$compacto y por lo tanto $w-$cerrado. Se sigue entonces que $\overline{T(B)}^w \subset \overline{T(B)}$ y por lo tanto $\overline{T(B)}^w$ es $w-$compacto por ser subconjunto $w-$cerrado de un conjunto $w-$compacto. De lo anterior se tiene que $K(X,Y) \subset K^w(X,Y)$.

Por otra parte, si $T \in K^w(X,Y)$ y $B \subset X$ es acotado, entonces $\overline{T(B)}^w$ es $w-$compacto, entonces $\overline{T(B)}^w$ es $w-$acotado y por lo tanto acotado. Como $T(B) \subset \overline{T(B)}^w$, se sigue que $T(B)$ es acotado, es decir $K^w(X,Y) \subset B(X,Y)$. Además $K^w(X,Y)$ es un subespacio cerrado propio de $B(X,Y)$.

Se tienen entonces las contenciones propias $K(X,Y) \subset K^w(X,Y) \subset B(X,Y)$.

Para que un operador lineal entre los espacios de Banach X y Y sea compacto ($w-$compacto) basta que $T(B_X)$ sea relativamente compacto (débilmente relativamente compacto). Véase [16].

Ejemplo 4.

1. *El operador identidad $I : l_1 \to l_1$ es acotado pero no $w-$compacto.*

2. *El operador identidad $I : l_2 \to l_2$ es $w-$compacto pues $I(B_{l_2}) = B_{l_2}$ y como l_2 es reflexivo B_{l_2} es $w-$compacto. Sin embargo $I : l_2 \to l_2$ no es compacto pues $\overline{I(B_{l_2})} = \overline{B_{l_2}} = B_{l_2}$ no es compacto.*

Un técnica muy empleada para obtener información acerca de un espacio de Banach es saber si tiene copias (complementadas) de c_0, l_1 y/o l_∞. Un ejemplo de ello está dado por el siguiente resultado.

Teorema 17. *([14]) Si el espacio de Banach Y contiene una copia complementada de c_0 y X es cualquier espacio de Banach, entonces $K(X,Y)$ no es complementado en $B(X,Y)$.*

Si X es un espacio normado y $J : X \to X^{**}$ está definido por $\langle x^*, J(x)\rangle = \langle x, x^*\rangle$, $x^* \in X^*$, $x \in X$, entonces J resulta ser un isomorfismo isométrico. De este modo X se identifica con un subespacio de X^{**}. El espacio X es llamado **reflexivo** si J es sobreyectivo.

Definición 10. *Sea X un espacio normado y X^* su dual. La **topología débil** * se define como la menor topología en X^* que hace continuos a los elementos de $J(X)$.*

Nótese que por definición, cada elemento de X^{**} es continuo respecto a la topología débil en X^* y por lo tanto cada elemento de $J(X) \subset X^{**}$ también lo es y se sigue entonces que la topología débil* en X^* es aún más débil que la topología débil.

2.3 Bases de Schauder

Como es sabido, el concepto de base de Hamel es sumamente útil en la teoría de espacios vectoriales y aunque todo espacio de Banach tiene una base de Hamel, esta solo toma en cuenta la estructura algebraica del espacio, y un espacio de Banach, como hemos mencionado antes, tiene una estructura mucho más rica. Por tal motivo se buscaron conceptos análogos al de base de Hamel en la teoría de espacios de Banach, siendo el de base de Schauder el que ha resultado ser más útil.

En lo que sigue solo presentaremos los conceptos básicos relacionados con las bases de Schauder que serán utilizados más adelante en este trabajo. El lector interesado en profundizar en su estudio, puede consultar cualquier libro que trate sobre la geometría de los espacios de Banach, en particular puede verse en [16].

Definición 11. *Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X es una **base de Schauder** para X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (α_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.*

Es bien sabido que todo espacio vectorial tiene una base de Hamel, sin embargo, no todo espacio de Banach tiene una base de Schauder. Una condición necesaria para que un espacio de Banach tenga una base de Schauder es que este sea de dimensión infinita y separable; así por ejemplo, l_∞ al no ser separable no tiene base de Schauder. Debido a lo anterior, es natural preguntar si todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable tiene una base de Schauder. Este problema es conocido como el problema de la base y permaneció abierto por alrededor de cuarenta años hasta que en 1973, Per Enflo dio una respuesta negativa presentando un contraejemplo reflexivo (véase [10]).

La siguiente generalización del concepto de base de Schauder es también útil.

Definición 12. *Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach es una* ***sucesión básica de Schauder*** *si es una base de Schauder para el subespacio cerrado generado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Como las bases de Schauder y las sucesiones básicas de Schauder serán las únicas que emplearemos, de aquí en adelante las llamaremos simplemente bases y sucesiones básicas respectivamente.

Recordemos que una serie $\sum_n x_n$ en un espacio normado es incondicionalmente convergente si $\sum_n x_{\pi(n)}$ converge para cada permutación π de $\mathbb{N}$.

Definición 13. *Una base (x_n) para un espacio de Banach X es* ***incondicional*** *si, para cada $x \in X$, la expansión $\sum_n \alpha_n x_n$ para x en términos de la base es incondicionalmente convergente. Una base para un espacio de Banach es* ***condicional*** *si no es incondicional.*

Además de las bases incondicionales, otro tipo de bases que resultan ser útiles son las siguientes.

Definición 14. *Sea (x_n) una base para un espacio de Banach X. Se dice que:*

1. *(x_n) es* ***reductora*** *si $\lim_m ||x^*||_{(m)} = 0$ para cada $x^* \in X^*$, donde $||x^*||_{(m)}$ es la norma de la restricción de x^* al subespacio cerrado generado por $\{x_n : n > m\}$.*

2. *(x_n) es* ***acotadamente completa*** *si, siempre que una sucesión de escalares (α_n) sea tal que $\sup_m || \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n||$ es finito, la serie $\sum_n \alpha_n x_n$ converge.*

Cerramos esta sección y el capítulo, presentando otro ejemplo de la importancia de saber si un espacio de Banach tiene copias de c_0 y/o de l_1. Los siguientes resultados serán empleados en el capítulo cinco.

Teorema 18. *([16]) Sea X un espacio de Banach. Si X tiene una copia de c_0, entonces ninguna base para el espacio es acotadamente completa.*

Teorema 19. *([16]) Sea X un espacio de Banach. Si X tiene una copia de l_1, entonces ninguna base para el espacio es reductora.*

Capítulo 3
Retículas de Banach

La finalidad de este capítulo es presentar solamente los conceptos básicos relacionados con las retículas de Banach y una serie de resultados que serán utilizados en el capítulo cinco del presente trabajo. Al igual que en el capítulo previo, no presentaremos la mayoría de las demostraciones de los resultados pero indicamos las referencias donde el lector interesado puede consultarlas. Si se desea profundizar en el estudio de las retículas de Banach se recomienda consultar para tal fin [2] y [18], que son nuestras fuentes principales para el contenido de este capítulo.

3.1 Espacios de Banach ordenados

Sea X un conjunto. Recordemos que un **orden** en X es una relación $\leq$ que cumple con ser:

1. reflexiva, es decir $\forall x \in X$, $x \leq x$.
2. antisimétrica, es decir $x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$.
3. transitiva, esto es $x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Si X es un espacio vectorial real, para que un orden en X sea de utilidad se requiere que guarde alguna relación con la estructura algebraica del espacio. Por tal motivo, un espacio vectorial real X se dice que es un **espacio vectorial ordenado** si hay un orden en X satisfaciendo lo siguiente:

1. Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ para cada $z \in X$
2. Si $x \leq y$, entonces para cada escalar $\alpha \geq 0$, $\alpha x \leq \alpha y$.

Cualquier orden en un espacio vectorial real que cumpla con las dos condiciones anteriores le llamaremos un **orden vectorial**. De tal manera, podemos decir que un espacio vectorial ordenado es un espacio vectorial real en el cual hay definido un orden vectorial.

Si X es un espacio vectorial ordenado, al conjunto $X_+ = \{x \in X : 0 \leq x\}$ se le llama el **cono positivo del espacio**.

Se comprueba fácilmente que el cono positivo de un espacio vectorial ordenado tiene las siguientes propiedades:

- $X_+ + X_+ \subset X_+$.
- Para cada $\alpha \geq 0$, $\alpha X_+ \subset X_+$.
- $X_+ \cap (-X_+) = \{0\}$.

De manera general tenemos la siguiente definición.

Definición 15. *Si X es un espacio vectorial real, un **cono ordenado** en X, o simplemente un cono en X, es un subconjunto P de X tal que:*

1. $P + P \subset P$.
2. $\alpha P \subset P$, *para cada escalar* $\alpha \geq 0$.
3. $P \cap (-P) = \{0\}$.

Ejemplo 5. *Los siguientes son ejemplos de conos ordenados.*

1. *Si* $X = \mathbb{R}$, $X_+ = \mathbb{R}^+$.
2. *Si* $X = \mathbb{R}^2$, $X_+ = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$.
3. *Si* $X = C[a, b]$, $X_+ = \{f \in X : f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]\}$.

Vemos entonces que el cono positivo de un espacio vectorial ordenado es un cono ordenado. De forma recíproca, si P es un cono ordenado en un espacio vectorial X y definimos una relación $\leq$ en X como

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; y - x \in P,$$

entonces se comprueba sin dificultad que $\leq$ es una relación de orden que convierte a X en un espacio vectorial ordenado cuyo cono positivo es P.

Es fácil ver que el orden vectorial inducido por el cono positivo de un espacio vectorial ordenado coincide con el orden original del espacio. Por tal motivo, hablar de ordenes vectoriales y de conos ordenados en espacios vectoriales reales es esencialmente lo mismo y muchas veces se dice que el espacio vectorial está ordenado por el cono.

Para espacios de Banach, y en general para espacios normados, tenemos la siguiente Definición.

Definición 16. *Un **espacio de Banach ordenado** es un espacio de Banach que está ordenado por un cono cerrado.*

La razón de incluir la condición de que el cono sea cerrado en la definición previa se debe a que se desea que el límite de vectores positivos, es decir, de vectores en X_+, sea también positivo.

Si X es un espacio de Banach ordenado y (x_n) es una sucesión en X, hay dos conceptos de acotación para la sucesión (x_n): acotación en orden y acotación en norma. Especificamente, se dice que la sucesión (x_n) es:

1. **acotada en orden**, si existen vectores $u, v \in X$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $u \leq x_n \leq v$. Si solo se cumple que $x_n \leq v$ se dice que la sucesión está **acotada superiormente** y solo se cumple que $u \leq x_n$ se dice que está **acotada inferiormente**.
2. **acotada en norma**, si existe $M > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| \leq M$.

A una sucesión acotada en norma la llameremos simplemente **sucesión acotada**. Se tienen definiciones análogas para subconjuntos de X.

Si X es un espacio de Banach ordenado tiene sentido hablar de sucesiones crecientes y decrecientes de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 17. *Sea X un espacio de Banach ordenado y (x_n) una sucesión en X.*

1. *La sucesión (x_n) se dice que es **creciente** si $n \leq m$ implica $x_n \leq x_m$.*
2. *La sucesión (x_n) se dice que es **decreciente** si $n \leq m$ implica $x_n \geq x_m$.*

*3. La sucesión (x_n) se dice que es **monótona** si es o bien creciente o bien decreciente.*

En un espacio de Banach ordenado, y en general, en un espacio vectorial ordenado X, se define el supremo de un conjunto de la manera usual: un subconjunto A de X se dice que tiene supremo en X si existe un vector $s \in X$ tal que para cada $a \in A$, $a \leq s$ y si w es un vector en X tal que $a \leq w$ para cada $a \in A$, entonces se tiene que $s \leq w$. Dicho vector s es llamado el supremo del conjunto A.

Proposición 5. *Si X es un espacio normado ordenado y (x_n) es una sucesión creciente en X tal que $x_n \to x$, entonces x es el supremo de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración: Sea $m \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es creciente, entonces para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_m \leq x_{n+m}$, es decir $x_{n+m} - x_m \in X_+$. Como la sucesión converge a x y X_+ es cerrado, entonces haciendo $n \to \infty$ se obtiene que $x - x_m \in X_+$, es decir $x_m \leq x$, lo que prueba que x es una cota superior de la sucesión.

Ahora, si $w \in X$ es tal que $x_n \leq w$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $w - x_n \in X_+$ y de nuevo haciendo $n \to \infty$ obtenemos que $w - x \in X_+$, es decir $x \leq w$ y x es entonces el supremo de la sucesión. ■

En los números reales se sabe que toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente pero esto ya no se cumple necesariamente en todo espacio de Banach ordenado.

Ejemplo 6. *Sea $X = C[0,1]$ con la norma*

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Si para $f, g \in X$ definimos $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [0,1]$, entonces X es un espacio de Banach ordenado.

Consideremos la sucesión $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro que (f_n) es una sucesión decreciente en X y acotoda inferiormente por la función constante cero; es decir $f_1 \geq f_2 \geq, \ldots \geq 0$. Esta sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in [0,1) \\ \\ 1 \quad si \quad x = 1 \end{cases}$$

Supongamos que existe una función $g \in X$ tal que f_n converge a g en norma. Esto es equivalente a decir que (f_n) converge uniformemente a g en $[0,1]$ y por lo tanto (f_n)

converge puntualmente a g en $[0,1]$. De lo anterior tenemos que $f = g$ lo cual es una contradicción ya que f es discontinua en 1.

Lo anterior da lugar a la definición de diferentes tipos de conos en los espacios de Banach ordenados.

Definición 18. *Sea X_+ un cono ordenado en un espacio de Banach X. Se dice que X_+ es:*

1. ***normal**, si existe una constante $\gamma \geq 1$, llamada constante de normalidad del cono, tal que $0 \leq x \leq y$ implica $||x|| \leq \gamma ||y||$.*
2. ***regular**, si toda sucesión en X, creciente y acotada superiormente es convergente.*
3. ***completamente regular**, si toda sucesión en X, creciente y acotada es convergente.*
4. ***generador**, si $X = X_+ - X_+$, es decir si todo vector en X puede expresarse como la diferencia de dos vectores positivos.*

Ejemplo 7.

1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$ con la norma*

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

y consideremos $X_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}$. Es fácil ver que X_+ es un cono en $\mathbb{R}^n$. Nótese que $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ si y solo si $x_j \leq y_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Si $(0, \ldots, 0) \leq (x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$, entonces $||(x_1, \ldots, x_n)|| \leq ||(y_1, \ldots, y_n)||$ y por lo tanto X_+ es un cono normal con constante de normalidad 1.

2. *Sea $X = C^1[0, 2\pi]$, el espacio de las funciones de clase C^1 en el intervalo $[0, 2\pi]$ con la norma*

$$||f|| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f'(x)|$$

y consideremos el cono $X_+ = \{f \in X : f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 2\pi]\}$. Supongamos que el cono X_+ es normal con constante de normalidad $\gamma > 0$. Sea $f_n(x) = 1 - \cos nx$ y $g_n(x) = 2$ para $n \in \mathbb{N}$. Claramente se tiene que

$$0 \leq f_n \leq g_n, \quad ||f_n|| = 2 + n, \quad ||g_n|| = 2.$$

Entonces $2 + n \leq 2\gamma$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *lo cual no es posible. Por lo tanto, el cono* X_+ *no es normal.*

3. *Sea* $X = C[0,1]$ *con la norma*

$$||f||_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|,$$

y consideremos el cono $X_+ = \{f \in X : f(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]\}$. *Si* $0 \leq f \leq g$, *entonces* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para cada* $x \in [0,1]$ *y por lo tanto* $||f||_\infty \leq ||g||_\infty$. *Así,* X_+ *es un cono normal pero como vimos en el ejemplo 6 no es regular.*

4. *Sea* $X = c_0$ *con la norma*

$$||(x_n)||_\infty = \sup_n |x_n|,$$

y consideremos $X_+ = \{(x_n) \in c_0 : x_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. *Este cono es regular pero no completamente regular.*

La relación existente entre los tipos de conos anteriores está dada por los siguientes resultados.

Teorema 20. *([12]) Sea* X_+ *un cono ordenado en un espacio de Banach* X. *Si* X_+ *es completamente regular, entonces es regular y si* X_+ *es regular, entonces es normal.*

Teorema 21. *([12]) Supongamos que* X_+ *es un cono ordenado en un espacio de Banach* X. *Si* X *es débilmente secuencialmente completo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X_+ *es normal.*

(b) X_+ *es regular.*

(c) X_+ *es completamente regular.*

Como todo espacio reflexivo es débilmente secuencialmente completo, lo anterior también se cumple en dicho tipo de espacios.

Una forma de caracterizar a los conos normales está dada en el siguiente resultado.

Teorema 22. *([12]) Sea* X *un espacio de Banach y* X_+ *un cono ordenado en* X. *Son equivalentes:*

1. X_+ *es normal.*

2. *existe una norma equivalente* $||\cdot||_1$ *en* X *tal que*

$$0 \leq x \leq y \implies ||x||_1 \leq ||y||_1,$$

esto es, la norma $||\cdot||_1$ *es monótona.*

3.2 Espacios de Riesz

Sea X un espacio vectorial ordenado y $x, y \in X$. Siguiendo la notación clásica escribiremos

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \text{ y } x \wedge y := \text{ínf}\{x, y\}.$$

Estos supremos e ínfimos no tienen necesariamente que existir en un espacio vectorial ordenado cualquiera. Cuando existen, a dicho espacio se le da un nombre especial.

Definición 19. *Un* ***espacio de Riesz****, también llamado* ***retícula vectorial****, es un espacio vectorial ordenado* X *con la propiedad adicional de que para cada* $x, y \in X$, $x \vee y$ *y* $x \wedge y$ *existen ambos en* X.

Si X es un espacio vectorial de funciones real-valuadas definidas en un conjunto Ω y se define para $f, g \in X$, $f \leq g$ si y sólo si $f(\omega) \leq g(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$, entonces se obtiene un orden vectorial en X llamado el **orden puntual**.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de espacios de Riesz.

Ejemplo 8. *Los siguientes espacios con el orden puntual son ejemplos de espacios de Riesz.*

1. $\mathbb{R}^\Omega$, *todas las funciones real valuadas definidas en un conjunto* Ω.
2. $C(\Omega)$, *todas las funciones continuas real-valuadas definidas en un espacio topológico* Ω.
3. $C_b(\Omega)$, *todas las funciones continuas real-valuadas y acotadas en un espacio topológico* Ω.
4. l_p $(0 < p < \infty)$,*todas las sucesiones reales* (x_n) *tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

Algunas cuantas identidades útiles que se cumplen en un espacio de Riesz están contenidas en el siguiente teorema.

Teorema 23. *([2]) Si x, y y z son elementos de un espacio de Riesz, entonces:*

1. $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *y* $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$.
2. $x + y = x \wedge y + x \vee y$.
3. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ *y* $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$.
4. $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ *y* $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$, *para cada* $\alpha \geq 0$.

De 1. del teorema previo vemos que si el supremo de cualesquiera dos vectores en un espacio vectorial ordenado existe, entonces también existe el ínfimo de cualesquiera dos vectores y recíprocamente. Así, en la definición de espacio de Riesz, basta con pedir que el supremo de cualesquiera dos vectores exista en el espacio. Se suelen incluir ambas condiciones solo para enfatizar.

Para cualquier vector x en un espacio de Riesz se define

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0, \quad \text{y} \quad |x| := x \vee (-x).$$

El vector x^+ es llamado **la parte positiva de** x, x^- es llamado la parte negativa de x y $|x|$ es llamado el **valor absoluto de** x.

Estos vectores satisfacen las siguientes identidades.

Teorema 24. *([2]) Si x es un vector arbitrario en un espacio de Riesz, entonces:*

1. $x = x^+ - x^-$.
2. $|x| = x^+ + x^-$.
3. $x^+ \wedge x^- = 0$.

Otras identidades en los espacios de Riesz que resultan muy útiles vienen dadas en el siguiente teorema.

Teorema 25. *([2]) Si x y y son elementos de un espacio de Riesz, entonces tenemos:*

1. $x = (x - y)^+ + x \wedge y$.
2. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *y* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

3. $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.
4. $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$.
5. $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\Big||x + y| - |x - y|\Big|$.
6. $|x + y| \wedge |x - y| = \Big||x| - |y|\Big|$.
7. $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$.

Las principales desigualdades que son usadas en las estimaciones vienen dadas en el siguiente resultado.

Teorema 26. *([2]) Para elementos arbitrarios x, y, y z en un espacio de Riesz tenemos las siguientes desigualdades.*

1. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad del triángulo).*
2. $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ *y* $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$ *(desigualdades de Birkhoff).*

Una red (x_α) en un espacio de Riesz se dice que es **decreciente** y se escribe $x_\alpha \downarrow$, si $\alpha \leq \beta$ implica $x_\alpha \geq x_\beta$. La notación $x_\alpha \downarrow x$ significa que la red es decreciente y que $x = \inf\{x_\alpha\}$. Los significados de $x_\alpha \uparrow$ y $x_\alpha \uparrow x$ son análogos.

Definición 20. *Un espacio de Riesz (y en general un espacio vectorial ordenado) X es llamado* ***Arquimediano*** *si para cada $x \in X_+$ se cumple que $\frac{1}{n}x \downarrow 0$.*

Cerramos esta sección con los conceptos de espacios Dedekind completos y Dedekind $\sigma-$completos. En lo que sigue, el símbolo $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$, siginifica que x_α es una red en X_+ creciente y acotada superiormente por x.

Definición 21. *Un espacio de Riesz es llamado* ***Dedekind completo*** *si todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene un supremo (o, equivalentemente, siempre que $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ implica la existencia de $\sup\{x_\alpha\}$).*

De forma análoga, un espacio de Riesz es llamado ***Dedekind $\sigma-$completo*** *si todo subconjunto no vacío, numerable, y acotado superiormente tiene un supremo (o, de forma equivalente, siempre que $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ implica la existencia de $\sup\{x_n\}$).*

3.3 Retículas de Banach

Si X es un espacio de Riesz, a cualquier norma en X que cumpla con

$$|x| \leq |y| \implies ||x|| \leq ||y||$$

se le llama **norma reticular** o bien **norma retícula** y un espacio de Riesz equipado con una norma reticular es llamado **espacio normado de Riesz**.

Definición 22. *Una **retícula de Banach** es un espacio normado de Riesz completo.*

Como una retícula de Banach tiene una estructura adicional a la de espacio de Banach, esta debe ser tomada en cuenta al momento de comparar dos retículas de Banach. Tenemos así las siguientes definiciones.

Definición 23. *Sean X, Y dos espacios de Riesz y $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que:*

- *T es **homomorfismo retícula**, si para cada $x, y \in X$ se cumple que $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$.*
- *T es un **isomorfismo retícula**, si es homomorfismo retícula uno a uno.*

Si X y Y son retículas de Banach, se dice que:

- *T es una **isometría reticular**, si es isometría y homomorfismo retícula. X y Y se dicen **reticularmente isométricos**, si existe una isometría reticular de X sobre Y.*
- *Y tiene una **copia reticular isométrica** de X si existe una isometría reticular de X en Y.*

El siguiente teorema será utilizado en el capítulo cinco del presente trabajo.

Teorema 27. *([2], Teorema 4.60) Para una retícula de Banach X, son equivalentes*

1. *X tiene cono completamente regular.*
2. *X no tiene copia de c_0.*
3. *X es débilmente secuencialmente completo.*

Dos tipos de normas reticulares son las llamadas orden continuas y σ-orden continuas las cuales definimos a continuación.

Definición 24. *Una norma retícula $||\cdot||$ sobre un espacio de Riesz es*

1. ***orden continua**, si $x_\alpha \downarrow 0$ implica $||x_\alpha|| \downarrow 0$.*
2. *$\sigma-$**orden continua**, si $x_n \downarrow 0$ implica $||x_n|| \downarrow 0$.*

Cuando la norma de una retícula de Banach cumple con propiedades adicionales a dichas retículas de Banach se les da un nombre especial. Así tenemos por ejemplo los $AM-$espacios y los $AL-$espacios, los cuales serán considerados en el capítulo cinco de este trabajo.

Definición 25. *Sea X una retícula de Banach. Se dice que:*

1. *X es un **AL-espacio**, si se cumple que*

$$||x+y|| = ||x|| + ||y||$$

para cada $x, y \in X^+$ con $x \wedge y = 0$.

2. *X es un **AM-espacio**, si su norma es una $M-$norma, i.e., si $x \wedge y = 0$ en X implica*
$$||x \vee y|| = \max\{||x||, ||y||\}.$$

Una propiedad de dualidad importante entre los $AM-$espacios y los $AL-$espacios viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 28. *[2] Una retícula de Banach X es un $AL-$espacio (respectivamente un $AM-$espacio) si y solo si X^* es un $AM-$espacio (respectivamente un $AL-$espacio)*

Generalmente resulta complicado demostrar que un espacio de Banach tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Por tal motivo el siguiente resultado debido a Grothendieck resulta ser de mucha utilidad.

Teorema 29. *([2], Teorema 5.85) Todo $AL-$espacio y todo $AM-$espacio tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Capítulo 4
La integral distibucional de Henstock-Kurzweil

En este capítulo presentamos el objeto de estudio de este trabajo de tesis: el espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables. Iniciamos definiendo las integrales vectoriales de Henstock y Kurzweil así como algunas de sus propiedades básicas. Posteriormente definimos a las distribuciones vectoriales y concluimos dando la definición de la integral distribucional de Henstock-Kurzweil y el correspondiente espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables.

Nuestras principales refencias para el contenido del capítulo son los artículos de investigación [20] y [19] para el caso de la integral distribucionl y [21] para las integrales vectoriales de Henstock y Kurzweil.

4.1 Las integrales de Henstock y Kurzweil

Para poder definir las integrales de Henstock y Kurzweil se necesitan desarrollar algunos conceptos previos. Iniciamos definiendo a las particiones etiquetadas de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Una **partición etiquetada** del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de pares ordenados $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, \ldots, n\}$ tales que los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ son no traslapados, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ y $\cup_{i=1}^{n}[x_{i-1}, x_i] = [a, b]$.

Cualquier función $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(t) > 0$ para cada $t \in [a, b]$ es llamada **un calibre** en $[a, b]$ o bien una función **medidora**.

Si $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es una partición etiquetada del intervalo $[a, b]$ y δ un calibre en $[a, b]$, se dice que P es una partición $\delta-$**fina** si $[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$ para $i = 1, \ldots, n$. Si δ es un calibre en $[a, b]$, un resultado llamado Lema de Coussin (véase [24]) nos garantiza que siempre existen particiones etiquetadas que son $\delta-$finas.

Definición 26. *Sea X un espacio de Banach y $f : [a, b] \to X$. Se dice que f es* ***Kurzweil integrable*** *en $[a, b]$, si existe $x \in X$ satisfaciendo la siguiente propiedad:*

Dado $\epsilon > 0$, existe un calibre δ en $[a, b]$ tal que si $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es una partición etiquetada $\delta-$fina de $[a, b]$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - x\right\| < \epsilon.$$

El vector $x \in X$ de la definición anterior, el cual es único, se le llama la integral de Kurzweil de f en $[a, b]$ y se denota por $x = (K) \int_a^b f$.

El espacio de las funciones Kurzweil integrables en $[a, b]$ se denota por $K([a, b], X)$.

La siguiente es una lista de las propiedades básicas de la integral de Kurzweil y pueden ser consultadas en [21].

- Si $f, g \in K([a, b], X)$, entonces $f + g \in K([a, b], X)$.
- Si $f \in K([a, b], X)$ y $[c, d] \subset [a, b]$, entonces $f \in K([c, d], X)$.
- Si $f \in K([a, b], X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \in K([a, b], X)$.
- Si $f \in K([a, b], X)$ y $F : [a, b] \to X$ se define por $F(t) = (K) \int_a^b f$, entonces F es una función continua en $[a, b]$ (respecto a la topología de la norma en X) y se le llama la integral indefinida de f.

Definición 27. *Una función $f : [a, b] \to X$, siendo X un espacio de Banach, se dice* ***Henstock integrable*** *en $[a, b]$ si existe una función $F : [a, b] \to X$ con la siguiente propiedad:*

Dado $\epsilon > 0$, existe un calibre δ en $[a, b]$ tal que si $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es una partición etiquetada $\delta-$fina de $[a, b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} ||F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})|| < \epsilon.$$

y se define la integral de Henstock de la función f sobre $[a, b]$ como $(H) \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

La integral de Henstock posee las mismas propiedades establecidas anteriormente para la integral de Kurzweil. Es sabido que toda función Henstock integrable es Kurzweil integrable y el valor de las integrales coincide. Sin embargo, existen funciones Kurzweil integrables que no son Henstock integrables, es decir, se tiene $H([a,b],X) \subsetneq K([a,b],X)$ (véase [21]).

En el caso en que $X = \mathbb{R}$ las dos integrales coinciden y se le suele llamar (aunque el nombre no está estandarizado) la **integral de Henstock-Kurzweil**. Más aún, Solodov demuestra en [23] que las integrales de Henstock y Kurzweil coinciden si y solo si X es de dimensión finita. El espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en el intervalo $[a,b]$ se denota por $HK[a,b]$.

Como la integral de Henstock-Kurzweil no es una integral absoluta, es decir, existen funciones $f \in HK[a,b]$ tales que $|f| \notin HK[a,b]$, no se puede definir una norma en $HK[a,b]$ como se hace en el espacio de las funciones Lebesgue integrables. La norma en $HK[a,b]$ que ha resultado ser mas útil es la llamada **norma de Alexiewicz** la cual se define como

$$||f||_A = \sup\left\{ \left| (HK) \int_a^t f \right| : t \in [a,b] \right\}, \quad f \in HK[a,b],$$

donde $(HK)\int_a^b f$ denota la integral de Henstock-Kurzweil de la función f.

Sin embargo, el espacio $HK[a,b]$ con la norma de Alexiewicz no es completo.

Teorema 30. *([24]) $HK[a,b]$ con la norma de Alexiewicz no es un espacio de Banach.*

La norma de Alexiewicz en los espacios $K([a,b],X)$ y $H([a,b],X)$ se define de forma análoga, solo hay que reemplazar el valor absoluto por la norma de X y la integral de Henstock-Kurzweil por la integral de Kurzweil y Henstock respectivamente. Estos espacios tampoco son completos con la norma de Alexiewicz.

Por el teorema 8 sabemos que $(HK[a,b], ||\cdot||_A)$, $(K([a,b],X), ||\cdot||_A)$ y $(H([a,b],X), ||\cdot||)$ tienen una completación. Bongiorno y Panchapagesan prueban en [4] que la completación de $HK[a,b]$ es un subespacio de las distribuciones reales mientras que Pérez en [20] prueba que las completaciones de $K([a,b],X)$ y $H([a,b],X)$ son un subespacio de las distribuciones vectoriales.

4.2 Distribuciones Vectoriales

El soporte de una función $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es el conjunto

$$supp(\phi) = \overline{\{t \in [a, b] : \phi(t) \neq 0\}}.$$

Se define el **espacio de las funciones prueba** como $\mathcal{D} = \{\phi : [a, b] \to \mathbb{R} : \phi \in C^{\infty}[a, b] \text{ y } supp(\phi) \subset (a, b)\}$, el cual resulta ser un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalar. Equipamos a $\mathcal{D}$ con la siguiente propiedad de convergencia: una sucesión $(\phi_n) \subset \mathcal{D}$ converge a $\phi \in \mathcal{D}$ si existe un conjunto compacto $K \subset (a, b)$ tal que $supp(\phi) \subset K$, $supp(\phi_n) \subset K$, $n \in \mathbb{N}$ y para toda $m \in \mathbb{N}$ la sucesión de derivadas $(\phi_n^{(m)})$ converge uniformemente en K a $\phi^{(m)}$.

El espacio de las **distribuciones vectoriales** se define como

$$\mathcal{D}' = \{T : \mathcal{D} \to X : T \text{ es lineal y continua}\}$$

donde la continuidad de T significa que $T(\phi_n) \to T(\phi)$ en X, siempre que $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}$. Bajo la suma y producto por escalar usuales $\mathcal{D}'$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Toda función $f \in K([a, b], X)$ y toda función $g \in H([a, b], X)$ define una distribución vectorial de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 28. *(Distribuciones vectoriales de Denjoy [20], Definición 3.1) Si* $f \in K([a, b], X)$ *y* $g \in H([a, b], X)$*, entonces definimos* $T_f : \mathcal{D} \to X$ *y* $H_g : \mathcal{D} \to X$ *por*

$$T_f(\phi) = (K) \int_a^b f\phi, \quad H_g(\phi) = (H) \int_a^b g\phi. \tag{4.1}$$

Estas funciones resultan ser distribuciones vectoriales. Nótese que en particular toda función $F \in C([a, b], X)$ define una distribución vectorial.

Teorema 31. *([20], Teorema 3.2) Los operadores* T_f *y* H_g *definidos en 4.1 son distribuciones vectoriales sobre* $\mathcal{D}$*.*

Sea $T \in \mathcal{D}'$. La derivada distribucional T' de T se define como $\langle \phi, T' \rangle = -\langle \phi', T \rangle$ y si $F \in C([a, b], X)$ se define su derivada distribucional F' como la derivada distribucional de la distribución vectorial T_F determinada por F. Además, como en el caso de las distribuciones reales, la derivada distribucional de una distribución vectorial es una distribución vectorial.

Definición 29. *Sean $T, G \in \mathcal{D}'$. G es una **integral** de T si $G' = T$.*

Resulta que toda distribución vectorial tiene una integral y además dicha integral es única salvo constantes.

Teorema 32. *([20], Teorema 3.3) Dada $T \in \mathcal{D}'$, existe $G \in \mathcal{D}'$ tal que $G' = T$ y G es única excepto por constantes.*

Recordemos que $C_0([a,b],X)$ siendo X un espacio de Banach, es el espacio de las funciones continuas $F : [a,b] \to X$ tales que $F(a) = 0$ y que con la norma $||F||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} ||F(t)||$ resulta ser un espacio de Banach. En las siguientes lineas presentamos resultados que muestran que una completación de los espacios $(K([a,b],X, ||\cdot||_A)$ y $(H([a,b],X), ||\cdot||_A)$ es precisamente $(C_0([a,b],X), ||\cdot||_\infty)$.

Lema 2. *([20], Lema 4.3) Sean $\Phi_K : K([a,b],X) \to C_0([a,b],X)$ y $\Phi_H : H([a,b],X) \to C_0([a,b],X)$ definidas por $\Phi_K(f) = (K)\int_a^t f$ y $\Phi_H(f) = (H)\int_a^t f$. Entonces las imagenes de Φ_K y Φ_H son densos en $C_0([a,b],X)$ con la norma $||\cdot||_\infty$.*

Denotamos a las completaciones de $K([a,b],X)$ y $H([a,b],X)$ por $K(\widehat{[a,b]},X)$ y $H(\widehat{[a,b]},X)$, respectivamente.

Teorema 33. *([20], Teorema 4.4) $K(\widehat{[a,b]},X)$ y $H(\widehat{[a,b]},X)$ son ambos isométricamente isomorfos a $C_0([a,b],X)$.*

Demostración: Sea Φ_K el operador definido en el lema 2. Nótese que Φ_K es lineal y

$$||\Phi_K(f)||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left|\left|(K)\int_a^t f\right|\right| = ||f||_A.$$

Por lo tanto $\Phi_K : (K([a,b],X), ||\cdot||_A) \to (\Phi_K(K([a,b],X)), ||\cdot||_\infty)$ es un isomorfismo isométrico y como por el Lema 2, $\Phi_K(K([a,b],X))$ es denso en $C_0([a,b],X)$ con la norma $||\cdot||_\infty$, por el Teorema 8, $K(\widehat{[a,b]},X)$ es isométricamente isomorfo a $C_0([a,b],X)$. ∎

Como $K([a,b],X)$ y $H([a,b],X)$ tiene la misma completación, denotamos su completación común por $HK(\widehat{[a,b]},X)$.

Si X es un espacio de Banach y $[a,b] \subset \mathbb{R}$, definimos $D_{HK}([a,b],X)$ como

$$D_{HK}([a,b],X) = \{T \in \mathcal{D}' : \exists F \in C_0([a,b],X) \ \text{ tal que } \ F' = T\},$$

donde F' es la derivada distribucional de la distribución vectorial T_F determinada por F. En el caso en que $X = \mathbb{R}$, denotaremos a $D_{HK}([a,b],X)$ simplemente por $D_{HK}[a,b]$, con notaciones análogas para $C_0([a,b],X)$ y $C([a,b],X)$.

Las distribuciones en $D_{HK}([a,b],X)$ tienen una única integral en el sentido de que si $F, G \in C_0([a,b],X)$ y $F' = T = G'$, entonces $F = G$.

Para $T \in D_{HK}([a,b],X)$ definimos su norma de Alexiewicz como

$$||T||_A = \sup_{t\in[a,b]} ||F(t)|| = ||F||_\infty,$$

dodne $F' = T$.

De la completez de $C_0([a,b],X)$ obtenemos la completez de $D_{HK}([a,b],X)$.

Teorema 34. *([20], Teorema 4.6) $D_{HK}([a,b],X)$ con la norma de Alexiewicz es un espacio de Banach.*

Veamos ahora que $D_{HK}([a,b],X)$ es una completación de $K([a,b],X)$ y $H([a,b],X)$.

Teorema 35. *([20], Teorema 4.7) El operador $\Psi : (C_0([a,b],X), ||\cdot||_\infty) \to (D_{HK}([a,b],X), ||\cdot||_A)$ definido por $\Psi(F) = F'$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración: Por las propiedades de la derivada distribucional, Ψ es lineal. Si $T \in D_{HK}([a,b],X)$, entonces existe $F \in C_0([a,b],X)$ tal que $F' = T$ y entonces $\Psi(F) = T$, de donde Ψ es sobre. Como además

$$||\Psi(F)||_A = ||F'||_A = ||F||_\infty,$$

se sigue que Ψ es un isomorfismo isométrico. ∎

Obtenemos de lo anterior de manera inmediata.

Corolario 2. *([20], Corolario 4.8) $\widehat{HK([a,b]},X)$ y $D_{HK}([a,b],X)$ son isométricamente isomorfos.*

4.3 La integral distribucional de Henstock-Kurweil

Sea $T \in D_{HK}([a,b],X)$. Entonces existe una única $F \in C_0([a,b],X)$ tal que $T'_F = T$. Como además $\Phi_K(K([a,b],X))$ y $\Phi_H(H([a,b],X))$ son densos en $C_0([a,b],X)$, existen sucesiones $(f_n) \subset K([a,b],X)$ y $(g_n) \subset H([a,b],X)$ tales que

$$||\Phi_K(f_n) - F||_\infty \to 0 \text{ y } ||\Phi_H(g_n) - F||_\infty \to 0. \tag{4.2}$$

Así que es natural definir la integral de Kurzweil y de Henstock de T del siguiente modo.

Definición 30. *Si $T \in D_{HK}([a,b],X)$, entonces para cada $[c,d] \subset [a,b]$, definimos la integral distribucional de Kurzweil (resp. Henstock) sobre $[c,d]$ como*

$$(D_K)\int_c^d T := \text{lím}(K)\int_c^d f_n \text{ y } (D_H)\int_c^d T := \text{lím}(H)\int_c^d g_n, \tag{4.3}$$

donde (f_n) y (g_n) son como en 4.2.

Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(K)\int_c^d f_n = \Phi_K(f_n)(d) - \Phi_K(f_n)(c)$ y $(H)\int_c^d g_n = \Phi_H(g_n)(d) - \Phi_H(g_n)(c)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{lím}(K)\int_c^d f_n &= \text{lím}[\Phi_K(f_n)(d) - \Phi_K(f_n)(c)] \\ &= F(d) - F(c) \\ &= \text{lím}[\Phi_H(g_n)(d) - \Phi_H(g_n)(c)] \\ &= \text{lím}(H)\int_c^d g_n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por lo tanto, las integrales distribucionales de Kurzweil y Henstock de T están bien definidas y coinciden. Este valor común será llamado la integral distribucional (vectorial) de Henstock-Kurzweil de T y como será la única que utilizaremos de aquí en adelante, la denotaremos simplemente por $\int_c^d T$.

Definición 31. *Una distribución vectorial $f \in \mathcal{D}'$ es **distribucionalmente Henstock-Kurzweil integrable** sobre $[a,b]$ si existe $F \in C_0([a,b],X)$ tal que $F' = T'_F = f$. La función F es llamada la **primitiva** o **integral indefinida** de f.*

Si $f \in \mathcal{D}'$ es distribucionalmente Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a, b]$, es decir, si existe $F \in C_0([a, b], X)$ tal que $F' = f$, entonces por 4.4 la integral distribucional de Henstock-Kurzweil de f sobre $[c, d] \subset [a, b]$ está dada por

$$\int_c^d f = F(d) - F(c).$$

Nótese que $D_{HK}([a, b], X)$ constituye el espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables y es el objeto de estudio de este trabajo de tesis.

Cerramos este capítulo presentando el teorema fundamental del cálculo.

Teorema 36. *(Teorema fundamental del cálculo [20], Teorema 5.3) Sea $f \in D_{HK}([a, b], X)$ y $\Psi(t) = \int_a^t f$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$\Psi \in C_0([a, b], X)$ y $\Psi' = f$.*
2. *Si $F \in C([a, b], X)$, entonces $\int_a^t F' = F(t) - F(a)$, para cada $t \in [a, b]$.*

Se invita al lector interesado a consultar el artículo [20], donde además de lo anterior, se presentan teoremas de integración por partes y teoremas de convergencia para la integral distribucional de Henstock-Kurzweil. Como dichos resultados no son necesarios para los fines de nuestro trabajo no los presentamos aquí.

Capítulo 5
Propiedades de Retícula y Topológicas

En lo que sigue, definimos un producto y un orden en el espacio $D_{HK}([a,b],X)$ de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables para darle la estructura de un álgebra reticular de Banach. Damos condiciones suficientes para que $D_{HK}([a,b],X)$ sea un $AM-$espacio, para que tenga la propiedad de Dunford-Pettis, y para que su cono sea generador. Probamos que la norma de Alexiewicz en $D_{HK}([a,b],X)$ no es $\sigma-$orden continua y que este espacio no tiene unidades de orden. Además, probamos que para cada espacio de Banach X, $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de c_0 y damos condiciones necesarias y suficientes para que tenga una copia complementada de l_1 y una copia de l_∞. Como una aplicación de los resultados obtenidos, presentamos un teorema de punto fijo en $D_{HK}([a,b],X)$, el cual empleamos para obtener un teorema que garantiza la existencia de una única solución a una ecuación integral de Volterra.

Los resultados de este capítulo, salvo los que aparecen citados, son aportaciones originales de este trabajo de tesis y han sido aceptados para su publicación en The Journal of Nonlinear Sciences and Applications.

5.1 Propiedades de Retícula

5.1.1 Álgebra Reticular de Banach

Recordemos que un espacio de Riesz es un espacio vectorial ordenado X tal que para cada $x,y \in X$, $x \vee y := \sup\{x,y\}$ existe en X. Un espacio normado de Riesz es un espacio de Riesz X con una norma $||\cdot||$ que satisface lo siguiente: si $|x| \leq |y|$, entonces $||x|| \leq ||y||$. Una retícula de Banach es un espacio normado de Riesz completo.

En un espacio de Riesz X, para $x \in X$ se define su parte positiva, su parte negativa, y su valor absoluto, respectivamente, como:

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0, \quad |x| := x \vee (-x)$$

y se tiene que $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.

Siguiendo a Wickstead en [26], X es un **álgebra reticular de Banach** si

1. Es retícula de Banach.
2. Es álgebra con norma submultiplicativa, i.e. $||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||$.
3. El producto de dos elementos positivos es positivo.

Si además en X hay una identidad multiplicativa, la cual tiene norma 1, X es llamada **1-algébra reticular de Banach**.

Si X es un álgebra retícular de Banach, el **orden y producto puntual** en $C([a,b],X)$ se definen como

$$F \leq G \iff F(t) \leq G(t), \quad \forall t \in [a,b],$$

$$(FG)(t) = F(t)G(t), \quad t \in [a,b].$$

Es sabido que $C([a,b],X)$ con el orden puntual, producto puntual y la norma uniforme, es álgebra retícular de Banach.

Para $f,g \in D_{HK}([a,b],X)$, con primitivas $F,G \in C_0([a,b],X)$ respectivamente, definimos

$$f \leq g \iff F \leq G,$$

$$fg = (FG)'.$$

De aquí en adelante, salvo que se indique lo contrario, este será el orden y producto que consideraremos en $D_{HK}([a,b],X)$ sin hacer mención explícita de ello.

Nótese que en general, el producto de dos distribuciones no está definido. Sin embargo el producto puntual define un producto en el espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables, y como veremos a continuación, este producto le da la estructura de un álgebra reticular de Banach a dicho espacio.

Teorema 37. *Si X es una retícula de Banach, entonces $D_{HK}([a,b],X)$, con la norma de Alexiewiecz, lo es también.*

Demostración: Sean $f,g,h \in D_{HK}([a,b],X)$ y $a \geq 0$. Si $f \leq g$, entonces $\forall t \in [a,b]$, $F(t)+H(t) \leq G(t)+H(t)$ y $aF(t) \leq aG(t)$.

Como $(F+H)' = F'+H'$ y $(aF)' = aF'$, entonces $f+h \leq g+h$ y $af \leq ag$. Se sigue que $D_{HK}([a,b],X)$ es un espacio vectorial ordenado.

Definimos ahora $f \vee g := (F \vee G)'$, la cual pertenece a $D_{HK}([a,b],X)$ ya que $F \vee G \in C_0([a,b],X)$.

Como $F,G \leq F \vee G$, entonces $f,g \leq f \vee g$, y si $f,g \leq h$, entonces $F,G \leq H$ y por lo tanto $F \vee G \leq H$. Se sigue que $f \vee g \leq h$ y $D_{HK}([a,b],X)$ es entonces un espacio de Riesz.

Nótese que $f^+ = f \vee 0 = (F \vee 0)' = (F^+)'$. De igual modo $f^- = (F^-)'$ y por consiguiente $|f| = |F|'$.

Si $|f| \leq |g|$, entonces $|F| \leq |G|$ y de aquí que $||F||_\infty \leq ||G||_\infty$. Por lo tanto $||f||_A \leq ||g||_A$.

Como $D_{HK}([a,b],X)$ con la norma de Alexiewicz es completo, se sigue que es una retícula de Banach. ■

El teorema previo generaliza el correspondiente resultado presentado por Talvila en [25].

Teorema 38. *Si X es un álgebra reticular de Banach, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ es un álgebra reticular de Banach sin identidad.*

Demostración: Por el Teorema (37), $D_{HK}([a,b],X)$ es una retícula de Banach. Se sigue directamente de las definiciones del producto, orden, la norma de Alexiewicz y el hecho de que X es un álgebra reticular de Banach, que $D_{HK}([a,b],X)$ es un álgebra con norma submultiplicativa en la cual el producto de dos elementos positivos es positivo. Por jemplo, si $f,g,h \in D_{HK}([a,b],X)$, entonces $f(g+h) = [F(G+H)]' = (FG+FH)' = (FG)' + (GH)' = fg+fh$.

Para ver que $D_{HK}([a,b],X)$ no tiene identidad, consideramos dos posibilidades: (a) X tiene identidad y (b) X no tiene identidad. En ambos casos probaremos que $D_{HK}([a,b],X)$ no tiene identidad.

(a) X tiene identidad e.

Supongamos que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene identidad y denotémosla por f_e. Entonces F_e, la primitiva de f_e, es identidad en $C_0([a,b],X)$ ya que si $F \in C_0([a,b],X)$, entonces

$$(FF_e)' = F'f_e = F'$$

y por la unicidad de las primitivas, $FF_e = F$. De igual modo, $F_eF = F$.

Consideremos la función $F(t) = (t-a)e$, $t \in [a,b]$. Como $F \in C_0([a,b],X)$, entonces $FF_e = F$ y por lo tanto para cada $t \in [a,b]$ se tiene

$$(t-a)F_e(t) = (t-a)eF_e(t) = (t-a)e,$$

de donde $F_e(t) = e$ para cada $t \in (a,b]$ y $F_e(a) = 0$, contadiciendo que F_e es una función continua.

(b) X no tiene identidad.

Si $D_{HK}([a,b],X)$ tuviera identidad f_e, entonces como vimos antes, su primitiva F_e es identidad de $C_0([a,b],X)$.

Sea $x \in X$ y consideremos la función $F : [a,b] \to X$ dada por $F(t) = \left(\frac{t-a}{b-a}\right)x$, $t \in [a,b]$. Como $F \in C_0([a,b],X)$, entonces $FF_e = F$. En particular, para $t = b$ se tiene que $xF_e(b) = x$ y de igual modo $F_e(b)x = x$. Por lo tanto $F_e(b)$ es identidad en X, lo cual es una contradicción.

En cualquier caso $D_{HK}([a,b],X)$ no tiene identidad.

■

Sea X un espacio de Banach ordenado. En $D_{HK}([a,b],X)$ definimos

$$D_{HK}([a,b],X)_+ = \{f \in D_{HK}([a,b],X) : f \geq 0\},$$

el cual es un cono ordenado.

Nótese que si el cono X_+ de X es normal, entonces $D_{HK}([a,b],X)_+$ también lo es, ya que si $0 \leq f \leq g$, entonces $\forall t \in [a,b]$, $0 \leq F(t) \leq G(t)$ y se sigue que $\forall t \in [a,b]$, $||F(t)|| \leq N||G(t)||$, siendo N la constante de normalidad de X_+. Lo anterior implica que $||f||_A = ||F||_\infty \leq N||G||_\infty = N||g||_A$. Sin embargo, si el cono X_+ de X es regular, no necesariamente $D_{HK}([a,b],X)_+$ es regular; como ejemplo, basta tomar $X = \mathbb{R}$ (véase [15]).

Surge entonces la pregunta: ¿existe alguna condición que nos garantice la regularidad de $D_{HK}([a,b],X)_+$? Como mostramos a continuación la respuesta es no.

Teorema 39. *Sea X un espacio de Banach ordenado. El cono de $D_{HK}([a,b],X)$ no es regular.*

Demostración: Sean $x \in X_+$ un vector fijo con $||x|| = 1$ y $f \in D_{HK}[a,b]$. Entonces $f \times x : \mathcal{D} \to X$ dada por $f \times x(\phi) = f(\phi)x$, $\phi \in \mathcal{D}$, es una distribución vectorial y si $F \in C_0[a,b]$ es la primitiva de f, entonces la función $F \times x : [a,b] \to X$ dada por $F \times x(t) = F(t)x$, $t \in [a,b]$, está en $C_0([a,b],X)$ y es primitiva de $f \times x$, ya que para $\phi \in \mathcal{D}$, $\langle (F \times x)', \phi \rangle = -\langle F \times x, \phi' \rangle = -(H)\int_a^b F(t)\phi'(t)x dt = -x(H)\int_a^b F(t)\phi'(t)dt = x\langle F', \phi \rangle = x\langle f, \phi \rangle = \langle f \times x, \phi \rangle$. Por lo tanto, $f \times x \in D_{HK}([a,b],X)$. Si ahora definimos $T : D_{HK}[a,b] \to D_{HK}([a,b],X)$ por $T(f) = f \times x$, entonces tenemos un isomorfismo isométrico y por consiguiente $D_{HK}[a,b]$ se identifica con un subespacio cerrado de $D_{HK}([a,b],X)$. Nótese que si $f \geq 0$, entonces $f \times x \geq 0$ pues $\forall t \in [a,b]$, $F \times x(t) = F(t)x \geq 0$.

Supóngase que $D_{HK}([a,b],X)_+$ es regular y sea (f_n) una sucesión creciente en $D_{HK}[a,b]_+$ y acotada superiormente. Por la discusión previa, (f_n) es una sucesión creciente en $D_{HK}([a,b],X)_+$ y acotada superiormente. Por hipótesis, (f_n) converge a algún $f \in D_{HK}([a,b],X)$ y como $D_{HK}[a,b]$ es cerrado en $D_{HK}([a,b],X)$, $f \in D_{HK}[a,b]$, lo cual contradice que el cono de $D_{HK}[a,b]$ no es regular. ■

La primera parte de la demostración previa será utilizada mas adelante. Para fácil referencia lo establecemos como un Lema.

Lema 3. *Sea X un espacio de Banach, $x \in X$ un vector fijo con $||x|| = 1$ y $f \in D_{HK}[a,b]$. Entonces $f \times x(\phi) = f(\phi)x$, $\phi \in \mathcal{D}$ es una distribución vectorial Henstock-Kurzweil integrable con primitiva $F \times x(t) = F(t)x$, siendo F la primitiva de f. Además, $T(f) = f \times x$, $f \in D_{HK}[a,b]$ es un isomorfismo isométrico.*

5.1.2 AM-espacio y la propiedad de Dunford-Pettis

Sea X una retícula de Banach. Recordemos que X es un $AM-$espacio si su norma es una $M-$norma, i.e., si $x \wedge y = 0$ en X implica

$$||x \vee y|| = \max\{||x||, ||y||\}.$$

Teorema 40. *Si X es un $AM-$espacio, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ también lo es.*

Demostración: Sean $f,g \in D_{HK}([a,b],X)$ con $f \wedge g = 0$. Sin perder generalidad, supongamos que $||f||_A \geq ||g||_A$.

Como $0 \leq F(t) \leq F(t) \vee G(t)$, $\forall t \in [a,b]$, entonces $||F(t)|| \leq ||F(t) \vee G(t)||$, $\forall t \in [a,b]$ y así $||F||_\infty \leq ||F \vee G||_\infty$. Ahora, sea $\epsilon > 0$. Existe $t_0 \in [a,b]$ tal que $||F \vee G||_\infty - \epsilon \leq ||F(t_0) \vee G(t_0)|| = \text{máx}\{||F(t_0), ||G(t_0)\} \leq ||F||_\infty$.

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se obtiene que $||F \vee G||_\infty \leq ||F||_\infty$. Por lo tanto $||F \vee G||_\infty = ||F||_\infty = \text{máx}\{||F||_\infty, ||G||_\infty\}$ y de aquí que $||f \vee g||_A = \text{máx}\{||f||_A, ||g||_A\}$. ■

Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis, si $w - \text{lím}_n\, x_n = x$ en X y $w - \text{lím}_n\, x_n^* = x^*$ en X^* implica $\langle x_n, x_n^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$, donde $w - \text{lím}$ significa convergencia en la topología débil.

En general, resulta complicado probar que un espacio de Banach tiene la propiedad de Dunford-Pettis y por tal motivo el siguiente resultado puede resultar de algún interés.

Teorema 41. *Si X es un $AM-$espacio, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis*

Demostración: El Teorema de Grothendieck (véase [2]) nos dice que un $AM-$espacio tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Como X es un $AM-$espacio, el resultado se sigue del Teorema (40). ■

El Teorema previo generaliza los correspondientes resultados presentados por Gutiérrez en [13] y Wei Liu en [15].

5.1.3 La $\sigma-$orden continuidad y unidades de orden

Sea (x_α) una red en un espacio de Riesz. El símbolo $x_\alpha \downarrow$ significa que la red es decreciente, i.e, si $\alpha \geq \beta$ implica $x_\alpha \leq x_\beta$. El símbolo $x_\alpha \uparrow$ indica que la red es creciente, mientras que $x_\alpha \uparrow\leq x$ denota una red creciente acotada superiormente en orden por x. El símbolo $x_\alpha \downarrow\geq x$ tiene un significado análogo. La notación $x_\alpha \downarrow x$ significa que $x_\alpha \downarrow$ y $x = \text{ínf}\{x_\alpha\}$ con un significado análogo para $x_\alpha \uparrow x$.

Definición 32. *Una norma retícular $||\cdot||$ en un espacio de Riesz es*

- ***orden continua**, si $x_\alpha \downarrow 0$ implica $||x_\alpha|| \downarrow 0$.*
- *$\sigma-$**orden continua**, si $x_n \downarrow 0$ implica $||x_n|| \downarrow 0$.*

Definición 33. *Sea X un espacio vectorial ordenado. Una **unidad de orden** (o simplemente una unidad) en X es un vector $e > 0$ tal que para cada $x \in X$, existe un $\lambda > 0$ tal que*

$$|x| \leq \lambda e.$$

En [15], Wei Liu et al. plantean los siguientes teoremas:

Teorema 42. *([15], Teorema 6.2) La norma $||\cdot||_A$ en $D_{HK}[a,b]$ es $\sigma-$orden continua, pero D_{HK} no es Dedekind completo.*

La prueba ofrecida es la siguiente: "Supóngase que $f_n \in D_{HK}[a,b]$ con las primitivas F_n, $n = 1, 2\ldots,$ y $f_n \downarrow 0$. Entonces $F_n(t) \downarrow 0$ para cada $t \in [a,b]$. Por el teorema de Dini, (F_n) converge uniformemente a 0. Esto implica que $||F_n||_\infty \downarrow 0$ en $C[a,b]$ y por lo tanto $||f_n||_A \downarrow 0$ en $D_{HK}[a,b]$. Así, la norma $||\cdot||_A$ sobre $D_{HK}[a,b]$ es $\sigma-$orden continua y la prueba es completa".

Teorema 43. *([15], Teorema 5.5) La retícula de Banach $D_{HK}[a,b]$ es reticularmente isométrica a $C[a,b]$.*

La prueba ofrecida es la siguiente: "El teorema de Kakutani-Bohnenblust-M.Krein-S.Krein muestra que una retícula de Banach es un $AM-$espacio con unidad si y solo si, es reticularmente isométrica a $C(K)$, para algún espacio Hausdorff compacto K. El espacio K es único (salvo homeomorfismos). Como la retícula de Banach $D_{HK}[a,b]$ es un $AM-$espacio y es fácil ver que tiene unidad de orden, se sigue el resultado".

Hemos decidido escribir esta sección aparte para enfatizar los errores cometidos en los argumentos previos.

En la primer prueba el problema radica en que de $f_n \downarrow 0$ no se sigue que para cada $t \in [a,b]$, $F_n(t) \downarrow 0$. Por lo tanto, la prueba ofrecida por los autores es incorrecta y más aún, el resultado es falso.

Teorema 44. *Para cada retícula de Banach X, la norma de Alexiewicz en $D_{HK}([a,b],X)$ no es $\sigma-$orden continua.*

Demostración: Por simplicidad, asumimos que $[a,b]=[0,1]$. Sea $x \in X_+$ con $||x||=1$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea f_n la derivada distribucional de la función $F_n(t)=t^n x$, $t \in [0,1]$. Entonces $f_n \in D_{HK}([a,b],X)$ y $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, pues $\forall t \in [0,1]$, $t^n x \leq t^{n+1}x$ y además $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Si $g \in D_{HK}([a,b],X)$ es tal que $g \leq f_n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $G(t) \leq t^n x$ para cada $t \in [0,1)$ y haciendo $n \to \infty$ obtenemos $G(t) \leq 0$, $t \in [0,1)$. Si ahora hacemos $t \to 1$, de la continuidad de G obtenemos $G(1) \leq 0$. Se sigue que $g \leq 0$ y por lo tanto $f_n \downarrow 0$. Sin embargo, $||f_n||_A = ||F_n||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} ||t^n x|| = 1$. ■

El error en la segunda prueba está en la afirmación: "es fácil ver que $D_{HK}[a,b]$ tiene unidad de orden". Como mostramos a continuación, esto es falso.

Teorema 45. *Sea X una retícula de Banach. La retícula de Banach $D_{HK}([a,b],X)$ no tiene unidad de orden.*

Demostración: Supongamos que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene unidad de orden f_e y sea $F_e \in C_0([a,b],X)$ su primitiva. Definimos $E:[a,b]\to\mathbb{R}$ como $E(t)=||F_e(t)||$.

Sea $F \in C_0[a,b]$ y $x \in X$ con $||x||=1$. Como la función $G(t)=F(t)x$, $t\in[a,b]$, está en $C_0([a,b],X)$, entonces $g=G' \in D_{HK}([a,b],X)$, y por lo tanto, existe $\lambda>0$ tal que

$$|g| \leq \lambda f_e$$

Entonces, para cada $t \in [a,b]$, $|G(t)| \leq \lambda F_e(t)$ y por lo tanto

$$|F(t)| = ||G(t)|| \leq \lambda ||F_e(t)|| = \lambda E(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

De lo anterior, E es unidad de orden en $C_0[a,b]$. Nótese que para cada $t \in (a,b]$, $E(t)>0$, ya que si $E(t_0)=0$ para algún $t_0 \in (a,b]$, entonces al considerar la función $H(t)=t-a$, $t\in[a,b]$, obtenemos un $\lambda>0$ tal que

$$t-a \leq \lambda E(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

En particular, $t_0 - a \leq \lambda E(t_0) = 0$, lo cual es imposible.

Consideremos ahora la función $\big(E(t)\big)^{1/2}$, $t \in [a,b]$. Como esta función está en $C_0[a,b]$, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\big(E(t)\big)^{1/2} \leq \lambda E(t), \ \ \forall t \in [a,b]$$

y entonces

$$\frac{1}{\big(E(t)\big)^{1/2}} \leq \lambda, \ \ \forall t \in (a,b],$$

lo cual es imposible, ya que la función de la izquierda en la desigualdad anterior es no acotada en cualquier vecindad de a.

Se concluye que $D_{HK}([a,b],X)$ no tiene unidad de orden. ■

Si X es un espacio vectorial ordenado con unidad de orden, es fácil ver que su cono es generador. Como muestra el teorema previo, el recíproco es falso, ya que cada retícula de Banach tiene cono generador.

Si X es un espacio de Banach ordenado y el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ es generador, entonces el cono de X lo es también, ya que si $x \in X$, la función $F(t) = \big(\frac{t-a}{b-a}\big)x$, $t \in [a,b]$ está en $C_0([a,b],X)$ y $f = F' \in D_{HK}([a,b],X)$. Por lo tanto, existen f_1, $f_2 \in D_{HK}([a,b],X)_+$ tales que

$$f = F' = f_1 - f_2 = (F_1 - F_2)'$$

y por la unicidad de las primitivas, $F = F_1 - F_2$. En particular,

$$x = F(b) = F_1(b) - F_2(b).$$

La observación previa nos muestra que si X es un espacio de Banach ordenado, el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ no es necesariamente generador. El siguiente resultado nos da condiciones suficientes para que el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ sea generador.

Teorema 46. *Sea X un espacio de Banach ordenado cuya esfera unidad $S_X = \{x \in X : ||x|| = 1\}$ es acotada en orden. Entonces el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ es generador.*

Demostración: Veamos que si la esfera unidad de X es acotada en orden, entonces X tiene unidad de orden. Como S_X es acotado en orden, existe $x_0 \in X$ tal que para cada

$x \in S_X$,

$$x \leq x_0.$$

Al ser el cono de X no trivial, podemos suponer que $x_0 > 0$. Sea $x \in X$; si $x = 0$, entonces $x \leq x_0$ y si $x \neq 0$, entonces $x \leq ||x||x_0$. Por lo tanto x_0 es unidad de orden.

Sea ahora $f \in D_{HK}([a,b],X)$ con primitiva F. Para cada $t \in [a,b]$ tenemos

$$F(t) \leq ||F(t)||x_0$$

y

$$F(t) = ||F(t)||x_0 - \big(||F(t)||x_0 - F(t)\big) \in X_+ - X_+.$$

Por lo tanto

$$f = F' = \big(||F||x_0\big)' - \big(||F||x_0 - F\big)' \in D_{HK}([a,b],X)_+ - D_{HK}([a,b],X)_+,$$

y el cono de $D_{HK}([a,b],X)$ es entonces generador. ∎

5.2 Propiedades Topológicas

5.2.1 Copia complementada de c_0 en $D_{HK}([a,b],X)$

Un subespacio M de un espacio normado X se dice **complementado** en X, si es cerrado y si existe un subespacio cerrado N de X tal que $X = M \oplus N$; es decir, si $M \cap N = \emptyset$ y $X = M + N$.

Un operador lineal $P : X \to X$, siendo X un espacio vectorial, es una **proyección** en X, si para cada $x \in X$ $P(P(x)) = P(x)$.

Si X es un espacio de Banach y M un subespacio de X, entonces M es complementado en X si y solo si es la imagen de una proyección acotada en X (ver [16]).

Supongamos que X y Y son espacios de Banach. Se dice que Y tiene una **copia complementada de** X, si X es isomorfo a un subespacio complementado de Y.

Utilizando el hecho de que $D_{HK}([a,b],X)$ es una retícula de Banach si X lo es (Teorema (37)), y que su cono no es regular (Teorema (39)), en esta sección probaremos que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de c_0.

Iniciamos con un par de lemas.

Lema 4. *$D_{HK}[a,b]$ tiene una copia complementada de c_0.*

Demostración: Como $D_{HK}[a,b]$ es una retícula de Banach cuyo cono no es completamente regular, entonces tiene una copia de c_0 (Teorema (27)). Como además $D_{HK}[a,b]$ es separable, por el Teorema de Sobczyk (ver [9]), c_0 está complementado en $C_0[a,b]$. ■

Es sabido que si $f \in H([a,b],X)$ y $T : X \to Y$ es un operador linael acotado entre espacios de Banach, entonces $T \circ f \in H([a,b],Y)$ y $(H)\int_a^b T \circ f = T\Big((H)\int_a^b f\Big)$ (véase [21]). Probamos a continuación que lo mismo se cumple en $D_{HK}([a,b],X)$.

Lema 5. *Sean X, Y espacios de Banach. Si $f \in D_{HK}([a,b],X)$ y $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, entonces $T \circ f \in D_{HK}([a,b],Y)$ y $\int_a^b T \circ f = T\Big(\int_a^b f\Big)$.*

Demostración: Sea $F \in C_0([a,b],X)$ tal que $F' = f$. Es claro que $T \circ f$ es una distribución vectorial y para $\phi \in \mathcal{D}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle (T \circ F)', \phi \rangle &= -\langle T \circ F, \phi' \rangle \\
&= -(H)\int_a^b (T \circ F)\phi' \\
&= -(H)\int_a^b T(F\phi') \\
&= T\Big(-(H)\int_a^b F\phi'\Big) \\
&= T(F'(\phi)) \\
&= \langle T \circ F', \phi \rangle \\
&= \langle T \circ f, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(T \circ F)' = T \circ f$. Como además $T \circ F \in C_0([a,b],Y)$, concluimos que $T \circ f \in D_{HK}([a,b],Y)$ y $\int_a^b T \circ f = (T \circ F)(b) = T(F(b)) = T\Big(\int_a^b f\Big)$.

■

Teorema 47. *$D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de c_0.*

Demostración: Por el Lema (4), $D_{HK}[a,b]$ tiene una copia complementada de c_0. Probaremos ahora que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de $D_{HK}[a,b]$, obteniendo de esta forma el resultado deseado (véase el Lema (1)).

Sea $x_0 \in X$ un vector fijo con $||x_0|| = 1$. Por el Lema (3), $T : D_{HK}[a,b] \to D_{HK}([a,b],X)$ dado por $T(f) = f \times x_0$ es un isomorfismo isométrico. Probaremos que $M = \{f \times x_0 : f \in D_{HK}[a,b]\}$ es un subespacio complementado de $D_{HK}([a,b],X)$.

Sea $x_0^* \in X^*$ tal que $||x_0^*|| = 1$ y $x_0^*(x_0) = ||x_0|| = 1$ (Teorema de Hahn-Banach). Por el lema (5), $x_0^* \circ f \in D_{HK}[a,b]$ para cada $f \in D_{HK}([a,b],X)$ y podemos entonces definir $P : D_{HK}([a,b],X) \to D_{HK}([a,b],X)$ como

$$P(f) = T(x_0^* \circ f).$$

Claramente P es lineal.

Sean $f \in D_{HK}([a,b],X)$ y F su primitiva. Entonces, por la prueba del Lema (5), $x_0^* \circ F$ es primitiva de $x_0^* \circ f$. Como para cada $t \in [a,b]$, $|x_0^*(F(t))| \leq ||F(t)|| \leq ||F||_\infty = ||f||_A$, se tiene que $||x_0^* \circ f||_A = ||x_0^* \circ F||_\infty \leq ||f||_A$ y por lo tanto $||P(f)||_A = ||T(x_0^* \circ f)||_A \leq ||T|| \cdot ||x_0^* \circ f||_A \leq ||T|| \cdot ||f||_A$. Se sigue que P es un operador acotado.

Finalmente, si $f \times x_0 \in M$, entonces $P(f \times x_0)(\phi) = x_0^*(f(\phi)x_0)x_0 = f(\phi)x_0^*(x_0)x_0 = f(\phi)x_0 = f \times x_0(\phi)$ y P es por lo tanto una proyección acotada con imagen M.

∎

El resultado anterior es más general que la Proposición 16 presentada por Gutiérrez en [13].

Iniciamos esta subsección empleando propiedades de retícula de $D_{HK}([a,b],X)$ para obtener una propiedad topológica de dicho espacio. Ahora emplearemos una propiedad topológica de $D_{HK}([a,b],X)$ para obtener una propiedad de retícula.

Por el Teorema (39), con el orden puntual en $D_{HK}([a,b],X)$, se pierde toda esperanza de tener un teorema de convergencia monótona. Sin embargo, algunos autores introducen otros tipos de orden en $D_{HK}([a,b],X)$ distintos del orden puntual, con la finalidad de obtener un teorema de convergencia monótona. Por ejemplo en [20], Pérez define el siguiente orden en $D_{HK}([a,b],X)$:

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [a,b], \;\; F(t) \leq G(t) \;\text{ y }\; \int_t^b f \leq \int_t^b g. \tag{5.1}$$

Hacemos notar que si el cono de X es completamente regular, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ con el orden dado en (5.1) no es retícula de Banach, ya que la regularidad completa del cono en X se hereda al cono de $D_{HK}([a,b],X)$ ([20]) y entonces, si $D_{HK}([a,b],X)$ fuera retícula de Banach no contendría copia de c_0 ([2]), pero por el teorema (47), $D_{HK}([a,b],X)$ siempre tiene copia de c_0.

De los comentarios previos obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 48. *Si $D_{HK}([a,b],X)$ es ordenado por un cono completamente regular, entonces no es una retícula de Banach.*

5.2.2 Copias de l_1 y l_∞ en $D_{HK}([a,b],X)$

Gutiérrez demuestra en [17] que $D_{HK}[a,b]$ tiene una copia no complementada de l_1. Se sigue entonces que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia de l_1 y surge la pregunta de cuando esta copia es complementada.

Teorema 49. *$D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de l_1 si y solo si X la tiene.*

Demostración: Supongamos que X tiene una copia complementada de l_1. Sea $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F_0(t) = \frac{t-a}{b-a}$ y sea f_0 la derivada distribucional de F_0. Como $F_0 \in C_0[a,b]$, entonces $f_0 \in D_{HK}[a,b]$.

Si definimos $T : X \to D_{HK}([a,b],X)$ como $T(x) = f_0 \times x$ (lema (3)), se verifica sin dificultad que T es un isomorfismo isométrico.

Probaremos que $M = \{f_0 \times x : x \in X\}$ es un subespacio complementado de $D_{HK}([a,b],X)$.

Sea $P : D_{HK}([a,b],X) \to D_{HK}([a,b],X)$ dada por $P(f) = T(F(b))$, donde $f \in D_{HK}([a,b],X)$ y $F \in C_0([a,b],X)$ es su primitiva.

Es inmediato que P es lineal y como $||P(f)||_A = ||T(F(b))||_A \leq ||T|| \cdot ||F(b)|| \leq ||T|| \cdot ||F||_\infty = ||T|| \cdot ||f||_A$, P es acotada.

Ahora, si $f_0 \times x \in M$, entonces $P(f_0 \times x) = T(F_0 \times x(b)) = T(F_0(b)x) = Tx = f_0 \times x$ y por lo tanto P es una proyección acotada con imagen M.

De lo anterior, X es un subespacio complementado de $D_{HK}([a,b],X)$ y por hipótesis, se sigue que este último tiene una copia complementada de l_1.

Supóngase ahora que $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una copia complementada de l_1. Si $T : D_{HK}([a,b],X) \to C([a,b],X)$ está dada por $T(f) = F$, donde F es la primitiva de f, entonces obtenemos un isomorfismo isométrico. Probaremos que $M = \{T(f) : f \in D_{HK}([a,b],X)\}$ es complementado en $C([a,b],X)$.

Sea $P : C([a,b],X) \to C([a,b],X)$ dada por $P(F)(t) = F(t) - F(a)$. Es inmediato que P es lineal y como $||P(F)(t)|| \leq ||F(t)|| + ||F(a)|| \leq 2||F||_\infty$, entonces $||P(F)||_\infty \leq 2||F||_\infty$ y P es acotada.

Finalmente, si $T(f) \in M$, entonces $P(T(f))(t) = T(f)(t) - T(f)(a) = T(f)(t)$. Por lo tanto, $P(T(f)) = T(f)$ y P es entonces una proyección acotada con imagen M.

Concluimos que $C([a,b],X)$ tiene una copia complementada de l_1 y por lo tanto X tiene una copia complementada de l_1 (véase [7], Teorema 3.1.4). ∎

Empleando la misma técnica que en el demostración del resultado previo y el Teorema 3.3.1 de [7], obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 50. $D_{HK}([a,b],X)$ *tiene una copia de* l_∞ *si y solo si* X *la tiene.*

5.3 Algunas consecuencias de los resultados obtenidos

Terminamos este trabajo presentando algunas hechos que se desprenden de los resultados obtenidos, mostrando de este modo su relevancia para obtener información acerca del espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables $D_{HK}([a,b],X)$.

1. Para cada espacio de Banach X, $D_{HK}([a,b],X)$ no es reflexivo.
   Esto es así ya que la propiedad de ser reflexivo se hereda a los subespacios cerrados y como el cono de $D_{HK}[a,b]$ es normal pero no regular, entonces no puede ser reflexivo, ya que en estos espacios los conceptos de cono normal, regular y completamente regular coinciden.

2. Para cada espacio de Banach X, $D_{HK}([a,b],X)$ no es débilmente secuencialmente completo.
   Esto se debe a que $D_{HK}[a,b]$ es una retícula de Banach cuyo cono no es completamente regular y de acuerdo al Teorema 4.60 en [2], $D_{HK}[a,b]$ no puede ser débilmente secuencialmente completo. Como esta propiedad se hereda a subespacios cerrados, $D_{HK}([a,b],X)$ no es débilmente secuencialmente completo.

3. Para cada espacio de Banach X, $D_{HK}([a,b],X)$ no tiene la propiedad de Schur ya que todo espacio de Banach con esta propiedad es débilmente secuencialmente completo.

4. Si $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una base de Schauder, esta no puede ser acotadamente completa, ya que este espacio tiene una copia de c_0 (véase el Teorema (18)).

5. Si $D_{HK}([a,b],X)$ tiene una base de Schauder, esta no puede ser reductora, ya que este espacio tiene una copia de l_1. (véase el Teorema (19)).

6. Si X y Y son espacios de Banach ordenados y la esfera unidad de X es acotada en orden, entonces todo operador positivo $T : D_{HK}([a,b],X) \to Y$ es continuo.
   Esto es debido al Teorema (46) y a que el Teorema de Lozanovsky (véase [3]) afirma que todo operador positivo entre espacios de Banach ordenados, siendo el cono del dominio generador, es continuo.

7. Sean X y Y dos espacios de Banach. Como $D_{HK}([a,b],Y)$ tiene una copia complementada de c_0, entonces por el Teorema (17), $K(X, D_{HK}([a,b],Y))$ no es complementado en $B(X, D_{HK}([a,b],Y))$.

5.3.1 Teorema de Punto Fijo y Ecuación integral de Volterra

A continuación, aplicaremos las conclusiones de la sección 5.1 para establecer un Teorema de punto fijo en $D_{HK}([a,b],X)$. El resultado obtenido es empleado para probar la existencia de una única solución a una ecuación integral de Volterra.

Teorema 51. *([12]) Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono normal y generador, y sea $A : X \to X$ un operador. Si existe un operador lineal positivo $B : X \to X$, $||B|| < 1$ tal que*

$$-B(x-y) \leq Ax - Ay \leq B(x-y), \quad x, y \in X, \quad x \geq y,$$

entonces A tiene un único punto fijo $x^* \in X$ y, para cada $x_0 \in X$, si $x_n = Ax_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \to x^*$.

Recordemos que el orden que estamos considerando en $D_{HK}([a,b],X)$ es el orden puntual: $f \leq g$ si y solo si $F(t) \leq G(t)$ para cada $t \in [a,b]$. Aunque estamos empleando el mismo símbolo para denotar los órdenes en X y en $D_{HK}([a,b],X)$, el contexto debe dejar en claro a que orden estamos haciendo referencia.

Teorema 52. *Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono normal tal que $S_X = \{x \in: ||x|| = 1\}$ es acotado en orden, o bien, sea X una retícula de Banach, y sea $T : D_{HK}([a,b],X) \to D_{HK}([a,b],X)$ un operador. Si existe un operador lineal positivo $B : D_{HK}([a,b],X) \to D_{HK}([a,b],X)$, $||B||| < 1$ tal que*

$$-B(x-y) \leq Tx - Ty \leq B(x-y), \;\; x, y \in D_{HK}([a,b],X), \;\; x \geq y,$$

entonces T tiene un único punto fijo $x^* \in D_{HK}([a,b],X)$ y para cada $x_0 \in D_{HK}([a,b],X)$, si $x_n = Tx_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \to x^*$.

Demostración: Si X es un espacio de Banach ordenado por un cono normal tal que S_X es acotado en orden, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ es un espacio de Banach ordenado por un cono normal (subsección 5.1.1) y generador (Teorema (46)).

Si X es una retícula de Banach, entonces $D_{HK}([a,b],X)$ es una retícula de Banach (Teorema (37)) y por lo tanto su cono es normal y generador.

El resultado se sigue del Teorema (51). ■

Cualquier distribución vectorial $T \in \mathcal{D}'$ puede ser multiplicada por una función suave $g \in C^\infty[a,b]$ definiendo $\langle gT, \phi\rangle = \langle T, g\phi\rangle$. Esto tiene sentido porque $g\phi \in \mathcal{D}$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$. Las distribuciones vectoriales $f \in D_{HK}([a,b],X)$ pueden además ser multiplicadas por funciones de variación acotada $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$.

Teorema 53. *([20]) Sean $f \in D_{HK}([a,b],X)$, $g \in BV([a,b],\mathbb{R})$ y $\Phi : [a,b] \to X$ dada por $\Phi(t) = F(t)g(t) - (HS)\int_a^t F dg$, donde $F \in C_0([a,b],X)$ es tal que $F' = f$. Entonces $\Phi \in C_0([a,b],X)$. Se define fg como la derivada distribucional de Φ.*

La integral que aparece en la definición de Φ en el Teorema anterior es en el sentido de Henstock-Stieltjes. Para la definición de dicha integral puede consultarse ([20]).

Teorema 54. *Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono normal tal que S_X es acotado en orden, o bien, sea X una retícula de Banach. Consideremos una ecuación integral de Volterra del tipo*

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s) f(s, x(s)) ds, \ t \in [0,1], \tag{5.2}$$

donde $x, \ g \in D_{HK}([0,1], X), \ f : [0,1] \times D_{HK}([0,1], X) \to D_{HK}([0,1], X), \ y \ K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *es una función de variación acotada en la segunda variable para cada* $t \in [0,1]$

Asumamos que:

1. $\int_0^{(\cdot)} K(\cdot, s) f(s, x(s)) ds \in D_{HK}([0,1], X)$.
2. *Existe un operador lineal positivo* $B : D_{HK}([0,1], X) \to D_{HK}([0,1], X), \ ||B|| < 1$ *tal que*

$$-B(x-y) \leq \int_0^{(\cdot)} K(\cdot, s) \big[f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \big] ds \leq B(x-y),$$

donde $x, \ y \in D_{HK}([0,1], X), \ x \geq y$.

Entonces, la ecuación integral de Volterra (5.2) tiene una única solución.

Demostración: Definimos $T : D_{HK}([0,1], X) \to D_{HK}([0,1], X)$ por

$$Tx = g + \int_0^{(\cdot)} K(\cdot, s) f(s, x(s)) ds.$$

Para cada $x, \, y \in D_{HK}([a,b], X)$, $x \geq y$, tenemos por hipótesis que

$$-B(x-y) \leq Tx - Ty \leq B(x-y).$$

El Teorema (52) nos garantiza que T tiene un único punto fijo $x^* \in D_{HK}([0,1], X)$. Dicho punto fijo es la única solución a la ecuación integral de Volterra (5.2). ■

Bibliografía

[1] Fernando Albiac and Nigel John Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233. Springer, 2006.

[2] Charalambos D Aliprantis and Owen Burkinshaw. *Positive operators*, volume 119. Springer Science & Business Media, 2006.

[3] Charalambos D Aliprantis and Rabee Tourky. *Cones and duality*, volume 84. American Mathematical Soc., 2007.

[4] Benedetto Bongiorno and TV Panchapagesan. On the Alexiewicz topology of the Denjoy space. *Real Analysis Exchange*, pages 604–614, 1995.

[5] S Cao. The Henstock integral for Banach-valued functions. *SEA Bull. Math.*, 16:35–40, 1992.

[6] Pilar Cembranos and José Mendoza. *Banach spaces of vector-valued functions*. Springer, 2006.

[7] Pilar Cembranos Díaz. *Algunas propiedades del espacio de Banach C (K, E)*. Universidad Complutense de Madrid (Spain), 1984.

[8] Joe Diestel. A survey of results related to the Dunford-Pettis property. *Contemp. Math*, 2:15–60, 1980.

[9] Joseph Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*, volume 92. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] Per Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. 1973.

[11] M Federson. Some peculiarities of the Henstock and Kurzweil integrals of Banach space-valued functions. 2003.

[12] Dajun Guo, Yeol Je Cho, and Jiang Zhu. *Partial ordering methods in nonlinear problems*. Nova Publishers, 2004.

[13] Luis Ángel Gutiérrez Méndez, Juan Alberto Escamilla Reyna, Francisco Javier Mendoza Torres, and María Guadalupe Morales Macías. The use of an isometric isomorphism on the completion of the space of Henstock-Kurzweil integrable functions. *Journal of Function Spaces and Applications*, 2013, 2013.

[14] Jerry Johnson. Remarks on Banach spaces of compact operators. *Journal of Functional Analysis*, 32(3):304–311, 1979.

[15] Wei Liu, Guoju Ye, and Dafang Zhao. The distributional Henstock-Kurzweil integral and applications ii. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 10(1):290–298, 2017.

[16] Robert E Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.

[17] Luis Angel Gutiérrez Méndez and Juan Alberto Escamilla Reyna. Some results about completion of the space of Henstock–Kurzweil integrable functions. *Int. J. Math. Anal.(Ruse)*, 8:307–315, 2014.

[18] Peter Meyer-Nieberg. *Banach lattices*. Springer Science & Business Media, 2012.

[19] Tomás Pérez Becerra, Juan Alberto Escamilla Reyna, Daniela Rodríguez Tzompantzi, Jose Jacobo Oliveros Oliveros, and Khaing Khaing Aye. A Riesz representation theorem for the space of Henstock integrable vector-valued functions. *Journal of Function Spaces*, 2018, 2018.

[20] Tomás Pérez-Becerra, Salvador Sánchez-Perales, and Juan A Escamilla-Reyna. Henstock–Kurzweil vector distributions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17(6):195, 2020.

[21] Stefan Schwabik and Guoju Ye. *Topics in Banach space integration*, volume 10. World Scientific, 2005.

[22] Paolo M Soardi. Existence of fixed points of nonexpansive mappings in certain Banach lattices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 73(1):25–29, 1979.

[23] Aleksei Petrovich Solodov. Henstock and McShane integrals for Banach-valued functions. *Mathematical Notes*, 65:723–730, 1999.

[24] Charles W Swartz. *Introduction to gauge integrals*. World Scientific, 2001.

[25] Erik Talvila. The distributional Denjoy integral. *arXiv preprint math/0606537*, 2006.

[26] AW Wickstead. Banach lattice algebras: some questions, but very few answers. *Positivity*, 21(2):803–815, 2017.

[27] Guoju Ye and Wei Liu. The distributional Henstock–Kurzweil integral and applications. *Monatshefte für Mathematik*, 181:975–989, 2016.

Autobiografía

Homero Alejandro Escamilla Rocha

Candidato para el grado de Doctorado en Ciencias
con Orientación en Matemáticas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

tesis:

Propiedades Topológicas y de Retícula del espacio de las distribuciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables

Nací el 26 de febrero de 1981 en la ciudad de Reynosa Tamaulipas, México, donde cursé mis estudios de educación básica. Soy licenciado en matemáticas (2004) y maestro en ciencias con orientación en matemáticas (2020) por la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autonóma de Nuevo León. Me he desempeñado como profesor de asignatura en la Facultad de Ciencias Físico-Matematicas de la Universidad Autónoma de Nuevo León en los periodos (2008-2009) y (2019-2023) y en la Universidad Tecnológica de Tamaulipas Norte (2011-2018).

Mis áreas de interés son el Análisis Matemático y sus Aplicaciones, en particular la teoría de integración. Además de las matemáticas, tengo interés en la literatura, la filosofía de la ciencia y el ajedrez.