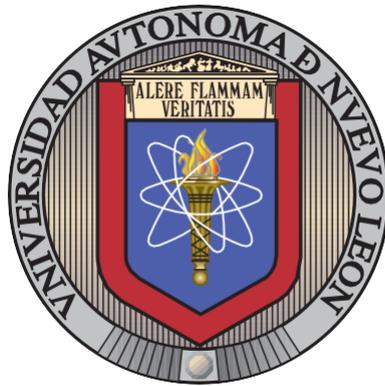


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



MEDICIÓN DE LA MATRIZ DE DENSIDAD DE  
ESTADOS COGNITIVOS MODELADOS  
CUÁNTICAMENTE.

POR

WENDY XIOMARA CHAVARRÍA GARZA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTORADO EN INGENIERÍA FÍSICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

MAYO 2025

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



MEDICIÓN DE LA MATRIZ DE DENSIDAD DE  
ESTADOS COGNITIVOS MODELADOS  
CUÁNTICAMENTE.

POR

WENDY XIOMARA CHAVARRÍA GARZA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTORADO EN INGENIERÍA FÍSICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

MAYO 2025

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Medición de la matriz de densidad de estados cognitivos modelados cuánticamente”, realizada por el alumno **Wendy Xiomara Chavarría Garza**, con número de matrícula **1478583**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería Física.

El Comité de Tesis

---

Dr. José Rubén Morones Ibarra  
Presidente

---

Dr. Osvaldo Aquines Gutiérrez  
Secretario

---

Dr. Francisco Vicente Flores Báez  
Vocal 1

---

Dr. Ajax Santos Guevara  
Vocal 2

---

Dr. Edgar Martínez Guerra  
Vocal 3

Vo. Bo.

---

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco  
Subdirector de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, mayo 2025

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

Dirección de la Tesis “Medición de la matriz de densidad de estados cognitivos modelados cuánticamente”, realizada por el alumno **Wendy Xiomara Chavarría Garza**, con número de matrícula **1478583**.

---

Dr. José Rubén Morones Ibarra  
Director

---

Dr. Osvaldo Aquines Gutiérrez  
Co-Director

Vo. Bo.

---

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco  
Subdirector de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, mayo 2025

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el Apoyo económico proporcionado para la realización de mis estudios de doctorado que culminan con el presente trabajo de tesis de grado.

*CVU: 783241.*

A mis asesores y miembros del comité, Dr. Osvaldo Aquines, Dr. Rubén Morones, Dr. Ajax Santos, Dr. Francisco Flores y Dr. Edgar Martínez, quiero expresar mi más sincero agradecimiento por todo su apoyo y orientación durante este posgrado. Sus consejos y sugerencias han enriquecido mi investigación y me han guiado a lo largo de este proceso, cada reunión y cada interacción con ustedes ha sido una oportunidad para aprender y crecer como investigadora. Agradezco profundamente su paciencia y dedicación ya que siempre estuvieron dispuestos a escuchar mis inquietudes, aportando ideas constructivas que me permitieron mejorar mi trabajo de tesis. Siempre estaré agradecida por haber tenido el privilegio de contar con un equipo tan excepcional, sus conocimientos y apoyo han dejado una gran huella en mi desarrollo académico y profesional, y su confianza y apoyo me permite culminar este grado académico sin dejar de lado el desarrollo de mi vida personal. Gracias por creer en mí y por ayudarme a alcanzar este importante logro.

## **DEDICATORIA**

Dedicado principalmente a Dios, por darme la sabiduría para concluir este proceso, a mi familia y amigos por ser parte fundamental de cada uno de mis logros.

A mi esposo Jonathan, te agradezco profundamente tu paciencia, comprensión y apoyo incansable. Has sido mi motivación y mi refugio en los momentos de desafío. Tu amor y sacrificio han sido fundamentales para que hoy pueda alcanzar este grado académico.

A mis hijos Leia y Logan, a quienes amo con todo mi corazón, les agradezco por ser mi fuente constante de alegría y motivación. Espero que este logro los inspire a perseguir sus propios sueños con pasión, recordando que todos los esfuerzos traen grandes recompensas.

A mis padres, les agradezco por haberme inspirado desde pequeña con su dedicación y su firme creencia en la educación como clave para el éxito. Su constante aliento, amor y consejos han sido mi roca durante todos estos años, gracias a ustedes hoy soy quien soy.

A toda mi familia, este logro que ahora celebro con la culminación de mi tesis doctoral no habría sido posible sin su amor y apoyo incondicional a lo largo de este viaje académico. A todos ustedes (Chavarría, Garza y Saucedo), les dedico este logro. Cada página de esta tesis lleva un poco de su amor. Gracias por creer en mí siempre.

A mis amigos, que aún sin compartir un lazo sanguíneo celebran mis logros y me acompañan en mis fracasos como si fuéramos familia. Gracias por ser parte de mí y ser parte de esto.

Las palabras se quedan cortas y las líneas son pocas para agradecer a cada uno de ustedes, pero cada palabra escrita va dedicada a ustedes, ya que sin todo su apoyo este logro no tendría el mismo significado.

## CONTENIDO

<b>CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>11</b>
<b>1.1 OBJETIVO DE LA TESIS .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 ESTRUCTURA DE LA TESIS .....</b>	<b>14</b>
<b>CAPITULO 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LOS CONCEPTOS ERRÓNEOS EN LA EDUCACIÓN.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1 CONCEPTOS ERRÓNEOS EN LA EDUCACIÓN.....</b>	<b>18</b>
<b>2.1.1 DEFINICIÓN DE CONCEPTOS ERRÓNEOS. ....</b>	<b>19</b>
<b>2.1.2 PRECONCEPTOS ERRÓNEOS EN TEMAS DE CALOR Y TEMPERATURA.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2 CUESTIONARIOS SIMILARES .....</b>	<b>21</b>
<b>2.2.1 FORCE CONCEPT INVENTORY (FCI) .....</b>	<b>22</b>
<b>2.2.2 COGNITIVE REFLECTION TEST (CRT) .....</b>	<b>23</b>
<b>2.2.3 THERMAL CONCEPT EVALUATION (TCE).....</b>	<b>25</b>
<b>CAPITULO 3. FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA. ....</b>	<b>27</b>
<b>3.1 CONCEPTOS BASICOS DE LA MECANICA CUANTICA .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2 MATRIZ DE DENSIDAD. ....</b>	<b>33</b>
<b>CAPÍTULO 4. ESTUDIOS PRECEDENTES Y PUBLICACIONES RELACIONADAS .....</b>	<b>37</b>
<b>4.1 EVALUACIÓN DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA (Chavarría-Garza et al., 2022) .....</b>	<b>37</b>
<b>4.2 PERFILES DE INGRESO Y HÁBITOS DE ESTUDIO COMO PREDICTORES DEL DESEMPEÑO ACADÉMICO (Aquines Gutiérrez et al., 2022) .....</b>	<b>39</b>
<b>4.3 BRECHA DE GÉNERO EN MOTIVACIÓN, PROCRASTINACIÓN Y DESEMPEÑO ACADÉMICO EN FÍSICA (Martínez-Huerta et al., 2024).....</b>	<b>40</b>
<b>4.4 CREENCIAS PSEUDOCIENTIFICAS.....</b>	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO 5. MODELIZACIÓN CUÁNTICA DE CONCEPTOS ERRÓNEOS ...</b>	<b>43</b>
<b>CAPÍTULO 6. METODOLOGÍA .....</b>	<b>47</b>
<b>6.1 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN .....</b>	<b>47</b>

<b>6.2 OBJETIVOS</b> .....	48
<b>6.2.1 SELECCIÓN DE MUESTRA</b> .....	48
<b>6.2.2 INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</b> .....	50
<b>6.2.3 PRUEBAS ESTADÍSTICAS UTILIZADAS.</b> .....	52
<b>6.3 ANÁLISIS CUÁNTICO DE LOS DATOS</b> .....	53
<b>CAPÍTULO 7. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b> .....	57
<b>7.1 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS</b> .....	57
<b>7.2 ANÁLISIS COMPARATIVO</b> .....	59
<b>7.2.1 ANÁLISIS POR PROGRAMA</b> .....	59
<b>7.2.2 ANÁLISIS POR GÉNERO</b> .....	60
<b>7.2.3 ANÁLISIS POR SITUACIÓN BECARIA</b> .....	61
<b>7.2.4 CORRELACIÓN DE LAS VARIABLES</b> .....	62
<b>7.2.5 CONSISTENCIA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS</b> .....	63
<b>7.2.6 FUENTES DE VARIABILIDAD</b> .....	65
<b>7.2.7 MATRIZ DE DENSIDAD</b> .....	68
<b>7.2.8 ENSAMBLE CANÓNICO</b> .....	68
<b>7.2.9 ANÁLISIS FACTORIAL</b> .....	70
<b>7.3 IMPLICACIONES EDUCATIVAS</b> .....	72
<b>CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES</b> .....	74
<b>8.1 LIMITACIONES DEL ESTUDIO</b> .....	76
<b>8.2 RECOMENDACIONES PARA FUTUROS ESTUDIOS</b> .....	77
<b>PUBLICACIONES DERIVADAS DEL TRABAJO DE TESIS DOCTORAL</b> .....	80
<b>REFERENCIAS</b> .....	81

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Pensamiento de los estudiantes .....	44
Figura 2. Análisis por programa .....	60
Figura 3. Análisis por género .....	61
Figura 4. Análisis por situación becarialustración .....	62
Figura 5. Fuentes de variabilidad.....	67
Figura 6. Mapa de calor .....	69

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Participantes. Mostrados de acuerdo con las variables analizadas en el estudio....	49
Tabla 2. Concepciones alternativas. ....	51
Tabla 3. Probabilidades de estados puros. ....	58
Tabla 4. Prueba Kruskal-Wallis (* $p < 0.05$ ) .....	58
Tabla 5. Análisis por programa de la no existencia de preconceptos erróneos, media y desviación estándar .....	59
Tabla 6. Análisis por género de la no existencia de preconceptos erróneos, media y desviación estándar .....	60
Tabla 7. Análisis por situación becaria de la no existencia de preconceptos erróneos, media y desviación estándar .....	62
Tabla 8. Correlación entre situación becaria y género.....	63
Tabla 9. Kruskal Wallis .....	63
Tabla 10. Resultados de cuestionarios similares como TCE, CRT y FCI ( $\omega 1$ representa la existencia de preconceptos, mientras que $\omega 2$ la no existencia de estos).....	65
Tabla 11. Error sistemático .....	65
Tabla 12. Análisis factorial .....	71
Tabla 13. Eigenvalores .....	71

## LISTA DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
AAVD	Arquitectura, Arte y Diseño
CRT	Cognition Reflection Test
CS	Ciencias de la Salud
DA	Delay avoidance
DYCS	Derecho y Ciencias Sociales
EDS	Educación para el Desarrollo Sostenible
EYH	Educación y Humanidades
F	Femenino
FCI	Force Concept Inventory
HSGPA	Promedio de Preparatoria
IYT	Ingeniería y Tecnologías
M	Masculino
N	Negocios
PES	Creencias pseudocientíficas
SAT	Examen de admisión
SSHA	Encuesta de hábitos de estudio y actitudes
STEM	Ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas.
TCE	Evaluación del Concepto Térmico
UNESCO	La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura

## RESUMEN

En el ámbito de la educación, comprender cómo los estudiantes adquieren y procesan el conocimiento es esencial para diseñar estrategias pedagógicas efectivas. Los modelos mentales juegan un papel clave en este proceso, ya que representan estructuras cognitivas que los estudiantes utilizan para interpretar y resolver problemas. Estos modelos pueden ser correctos o erróneos, y en muchas ocasiones los estudiantes no los utilizan de manera consistente, lo que hace necesario emplear herramientas avanzadas para su análisis.

Inspirados en los principios de la mecánica cuántica, implementamos un enfoque basado en la matriz de densidad para estudiar los conceptos erróneos de los estudiantes sobre calor y temperatura. Siguiendo el trabajo de Lei Bao y Edward Redish, utilizamos el método de análisis de modelos, que permite representar el conocimiento de los estudiantes como una combinación de estados puros y mixtos. En este contexto, la presencia o ausencia de conceptos erróneos se describe mediante estados puros, mientras que los estados mixtos reflejan la coexistencia probabilística de múltiples modelos mentales, lo que permite una caracterización más detallada del razonamiento estudiantil.

Para nuestra investigación, aplicamos el Thermal Concept Evaluation (TCE) de Zeo y Zadnik a 282 estudiantes de una universidad privada en el noreste de México. Este cuestionario de opción múltiple permitió explorar ideas preconcebidas sobre el calor y la temperatura, y los resultados se analizaron mediante la matriz de densidad. Los hallazgos muestran que la probabilidad de encontrar modelos mentales que llevan a conceptos erróneos es 0.72, mientras que la probabilidad de su ausencia es de 0.28, y la existencia de estados mixtos es de 0.43. No se encontraron diferencias significativas en función del género o la situación becaria, pero sí se identificaron diferencias notables entre los programas académicos ( $p < 0.05$ ). Los resultados derivados del presente trabajo de tesis han sido publicados en revistas de la editorial MDPI, la cuales son indexadas en el Journal Citation Reports (JCR), tal como se listan al final de este documento.

La matriz de densidad es una herramienta crucial en el análisis de modelos porque permite una representación más matizada y detallada del conocimiento de los estudiantes. Va

más allá de las puntuaciones simples al representar estados mixtos, cuantificar las probabilidades de uso de diferentes modelos mentales y capturar información tanto a nivel individual como de clase, algo que los métodos tradicionales no logran hacer. Su capacidad para reflejar la variabilidad y evolución del pensamiento estudiantil la convierte en un instrumento poderoso para la evaluación y mejora del aprendizaje.

El uso del análisis de modelos y la incorporación de estados mixtos en la evaluación del conocimiento representan una contribución significativa a la educación y a la sociedad en general. Este enfoque permite ir más allá del análisis tradicional de respuestas correctas e incorrectas, proporcionando una visión más completa de cómo los estudiantes estructuran su conocimiento y cómo pueden evolucionar sus modelos mentales. Esto permite el desarrollo de estrategias de aprendizaje más inclusivas y personalizadas, facilitando la construcción de un conocimiento más sólido en la población estudiantil. En un sentido más amplio, este método contribuye a la innovación en la educación, promoviendo un aprendizaje más profundo y adaptativo que puede aplicarse en diversas disciplinas y niveles educativos.

## ABSTRACT

In the field of education, understanding how students acquire and process knowledge is essential for designing effective pedagogical strategies. Mental models play a key role in this process, as they represent cognitive structures that students use to interpret and solve problems. These models can be correct or incorrect, and students often use them inconsistently, making it necessary to employ advanced tools for their analysis.

Inspired by the principles of quantum mechanics, we implemented an approach based on the density matrix to study students' misconceptions about heat and temperature. Following the work of Lei Bao and Edward Redish, we applied the model analysis method, which represents students' knowledge as a combination of pure and mixed states. In this context, the presence or absence of misconceptions is described through pure states, while mixed states reflect the probabilistic coexistence of multiple mental models, allowing for a more detailed characterization of students' reasoning.

For our research, we applied the Thermal Concept Evaluation (TCE) by Zeo and Zadnik to 282 students from a private university in northeastern Mexico. This multiple-choice questionnaire allowed us to explore preconceived ideas about heat and temperature, and the results were analyzed using the density matrix. The findings show that the probability of misconceptions is 0.72, while the probability of their absence is 0.28, and the presence of mixed states is 0.43. No significant differences were found based on gender or scholarship status, but notable differences were identified among academic programs ( $p < 0.05$ ). The findings from this thesis work have been published in journals by MDPI, which are indexed in the Journal Citation Reports (JCR), as listed at the end of this document.

The density matrix is a crucial tool in model analysis because it enables a more nuanced and detailed representation of students' knowledge. It goes beyond simple scores by representing mixed states, quantifying the probabilities of using different mental models, and capturing information at both the individual and class levels, something that traditional methods fail to achieve. Its ability to reflect the variability and evolution of student thinking makes it a powerful instrument for evaluation and improving learning.

The use of model analysis and the incorporation of mixed states in knowledge assessment represent a significant contribution to education and society in general. This approach goes beyond the traditional analysis of correct and incorrect responses, providing a more comprehensive view of how students structure their knowledge and how their mental models evolve. Moreover, its application enhances teaching and allows for the development of more inclusive and personalized learning strategies, facilitating the construction of stronger knowledge foundations in the student population. More broadly, this method contributes to educational innovation, fostering deeper and more adaptive learning that can be applied across various disciplines and educational levels.

# **CAPITULO 1.**

## **INTRODUCCIÓN.**

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en su Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, establece en el Objetivo 4 la importancia de garantizar una educación de calidad, enfatizando la enseñanza de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM) y la educación para el desarrollo sostenible (EDS) (UNESCO, 2022).

Con el propósito de contribuir a este objetivo, es fundamental analizar la comprensión de conceptos básicos en ciencias, especialmente aquellos con aplicaciones cotidianas que son clave en la formación de estudiantes en áreas científicas, como el concepto de calor y temperatura. Estos conceptos presentan desafíos de aprendizaje, ya que las experiencias diarias conducen al desarrollo de nociones intuitivas sobre la transferencia de calor y otros procesos térmicos que no siempre coinciden con las explicaciones científicas (Fitzallen, 2016). Incluso estudios previos han demostrado que los estudiantes tienden a interpretar los fenómenos físicos a través de ideas preconcebidas que muchas veces contradicen las explicaciones científicas (Savion, 2009).

Dichas creencias alternativas, también conocidas como preconceptos o modelos mentales erróneos, se originan a partir de la interacción con el entorno físico y social, así como del uso impreciso del lenguaje en contextos educativos y culturales (Yeo & Zadnik, 2001). Estos modelos mentales se almacenan en la memoria a largo plazo y son activados de manera espontánea cuando los estudiantes enfrentan un problema, influenciando la forma en que interpretan fenómenos científicos. Sin embargo, en muchas ocasiones, los estudiantes aplican estos modelos de manera inconsistente o simultánea, lo que genera estados cognitivos mixtos en los que coexisten concepciones correctas e incorrectas.

Dado que el aprendizaje se basa en la activación y reestructuración de modelos mentales, es necesario contar con metodologías que permitan identificar y analizar estas

estructuras cognitivas, así como comprender su evolución durante el proceso educativo. La literatura educativa ha explorado diversos enfoques, desde metodologías constructivistas hasta estrategias pedagógicas innovadoras (Ausubel, 1968; Vygotsky, 1978). Sin embargo, los métodos convencionales de evaluación de conceptos erróneos, como los análisis de respuestas correctas e incorrectas, no capturan la complejidad de los procesos cognitivos ni la coexistencia de múltiples modelos mentales en un mismo estudiante.

Para abordar este desafío, exploramos un enfoque basado en la mecánica cuántica, una teoría que ha sido utilizada para modelar procesos en psicología, economía, ciencias sociales y política (Aerts & Arguëlles, 2022; Alodjants et al., 2023; Bagarello et al., 2023). Estas aplicaciones han demostrado que el uso de superposición y probabilidad cuántica permite describir de manera más precisa la interacción de múltiples estados dentro de sistemas complejos, lo que lo hace particularmente útil para modelar los modelos mentales en educación.

De manera análoga a la superposición de estados en mecánica cuántica, donde una partícula puede existir en múltiples estados simultáneamente hasta que se realiza una medición, los estudiantes pueden activar diferentes modelos mentales para razonar sobre un concepto sin una coherencia estricta. Para representar este fenómeno, utilizamos la matriz de densidad, una herramienta matemática que permite cuantificar la coexistencia probabilística de diferentes estados cognitivos en un estudiante.

En este modelo, los estados puros representan situaciones en las que un estudiante utiliza exclusivamente un modelo mental correcto o incorrecto y los estados mixtos reflejan casos en los que un estudiante emplea simultáneamente modelos correctos e incorrectos, alternando entre ellos según el contexto del problema.

Así, la matriz de densidad no solo proporciona una representación más precisa del conocimiento de los estudiantes, sino que también permite cuantificar la probabilidad de uso de diferentes modelos mentales y capturar información tanto a nivel individual como de clase, algo que los métodos tradicionales de evaluación no logran hacer (Bao & Redish, 2006; Bruza et al., 2015).

Para nuestra investigación, aplicamos el Thermal Concept Evaluation (TCE) de Zeo y Zadnik a 282 estudiantes de una universidad privada en el noreste de México. Este cuestionario de opción múltiple permitió explorar ideas preconcebidas sobre calor y temperatura, y los resultados se analizaron mediante la matriz de densidad. Los hallazgos muestran que la probabilidad de encontrar conceptos erróneos es 0.72, mientras que la probabilidad de su ausencia es 0.28, y la existencia de estados mixtos es 0.43. No se encontraron diferencias significativas en función del género o la situación becaria, pero sí se identificaron diferencias notables entre los programas académicos ( $p < 0.05$ ).

En general, la incorporación del análisis de modelos y la utilización de la matriz de densidad permiten una visión más profunda de cómo los estudiantes estructuran su conocimiento y cómo pueden evolucionar sus modelos mentales. En particular, este enfoque trasciende la visión tradicional de respuestas correctas e incorrectas, permitiendo entender cómo las ideas preconcebidas influyen en el aprendizaje y facilitando el diseño de estrategias pedagógicas más efectivas e inclusivas.

En un sentido más amplio, este modelo proporciona una herramienta poderosa para la investigación en educación, ya que permite analizar la transición de los estudiantes hacia una comprensión más robusta de los conceptos científicos. Su aplicación no solo mejora la enseñanza en ciencias, sino que también tiene implicaciones significativas para el desarrollo de políticas educativas y estrategias de intervención, promoviendo un aprendizaje más profundo, adaptativo y basado en evidencia.

## **1.1 OBJETIVO DE LA TESIS**

El objetivo principal de este estudio es analizar la probabilidad de existencia y no existencia de preconceptos erróneos relacionados con el calor y la temperatura en estudiantes universitarios, considerando que el conocimiento de los estudiantes se presenta como una combinación de modelos mentales.

Para ello, se emplea un modelo matemático basado en la mecánica cuántica, desarrollado por Lei Bao y Edward Redish, que utiliza la matriz de densidad para representar y cuantificar los estados cognitivos mixtos de los estudiantes. Este enfoque permite modelar la coexistencia de modelos mentales correctos e incorrectos, proporcionando una representación más detallada de los patrones de pensamiento de los estudiantes.

El estudio se basa en la Evaluación del Concepto Térmico (TCE) de Yeo y Zadnik, un cuestionario diseñado para identificar creencias alternativas sobre el calor y la temperatura. A través del análisis de la matriz de densidad, se busca no solo cuantificar la prevalencia de conceptos erróneos, sino también comprender cómo los estudiantes activan y combinan distintos modelos mentales en función del contexto del problema.

Este enfoque tiene el propósito de sentar las bases para el desarrollo de estrategias pedagógicas innovadoras, capaces de abordar el aprendizaje desde una perspectiva más dinámica e inclusiva. Al identificar con mayor precisión cómo los estudiantes estructuran su conocimiento, se podrán diseñar intervenciones educativas más efectivas, promoviendo un aprendizaje profundo y basado en la transformación de modelos mentales hacia una comprensión más científica de los conceptos térmicos.

## **1.2 ESTRUCTURA DE LA TESIS**

La tesis está estructurada en ocho capítulos que abordan desde los fundamentos teóricos hasta los resultados y conclusiones del estudio.

En el Capítulo 1, se presenta la Introducción y se contextualiza la importancia de estudiar los conceptos erróneos en la educación, así como la relevancia de aplicar modelos cuánticos para su análisis, además de mencionar el objetivo general de la tesis.

El Capítulo 2 está dedicado a los Fundamentos de la Mecánica Cuántica, donde se exponen los principios básicos de esta teoría, junto con una explicación sobre el uso de la matriz de densidad para interpretar estados cuánticos, tanto puros como mixtos.

El Capítulo 3 explora los Fundamentos Teóricos de los Preconceptos Erróneos en la Educación, definiendo estos conceptos y revisando la literatura relevante. Se compara la modelización de la cognición desde enfoques clásicos y cuánticos, destacando las ventajas del segundo.

En el Capítulo 4, se analizan Estudios Precedentes y Publicaciones Relacionadas. Aquí se resumen las investigaciones previas sobre igualdad de género en STEM, perfiles de ingreso y rendimiento académico, y diversidad estudiantil, destacando la importancia de estos para el estudio de la cognición dentro de la educación.

El Capítulo 5 se centra en la Modelización Cuántica de Preconceptos Erróneos, donde se aplican principios de la mecánica cuántica para construir un modelo que permita analizar y representar estos conceptos mediante una matriz de densidad.

El Capítulo 6 describe la Metodología del estudio, detallando el diseño de la investigación, la selección de la muestra, y las herramientas utilizadas, como la Evaluación del Concepto Térmico (TCE). También se explica cómo se aplicó el modelo cuántico para analizar los datos obtenidos.

En el Capítulo 7, se presentan los Resultados y la Discusión de los hallazgos, incluyendo la probabilidad de existencia de conceptos erróneos, la interpretación de estados mixtos y la comparación de resultados según diversas variables.

Finalmente, el Capítulo 8: Conclusiones, resume los hallazgos principales, discute las limitaciones del estudio, y ofrece recomendaciones para futuras investigaciones en este campo.

Esta estructura permitirá abordar de manera coherente y completa el análisis de los conceptos erróneos mediante modelos cuánticos, contribuyendo al avance de la investigación educativa.

## **CAPITULO 2.**

# **FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LOS CONCEPTOS ERRÓNEOS EN LA EDUCACIÓN**

Según Daniel Kahneman (2011), el pensamiento humano opera a través de dos sistemas cognitivos que representan diferentes enfoques para el procesamiento de la información y la toma de decisiones. Estos sistemas interactúan constantemente y determinan la manera en que interpretamos el mundo, resolvemos problemas y tomamos decisiones.

Por un lado, el sistema 1 es el sistema del pensamiento rápido e intuitivo. Es un sistema automático, intuitivo y veloz, que opera sin esfuerzo y en gran medida de manera inconsciente. Está diseñado para procesar información de forma rápida y eficiente, basado en heurísticas y patrones aprendidos a lo largo de la vida. Este tipo de pensamiento nos permite reconocer rostros, evaluar situaciones de peligro, leer emociones y hacer juicios inmediatos, sin necesidad de un análisis profundo. Sin embargo, su dependencia de patrones y asociaciones preexistentes lo hace propenso a sesgos cognitivos, lo que puede conducir a errores en el juicio y la interpretación de información.

Por otro lado, el sistema 2, es el sistema del pensamiento analítico y reflexivo. Este sistema es lento, deliberado, consciente y analítico. Se activa cuando enfrentamos problemas complejos, realizamos cálculos matemáticos, evaluamos evidencia lógica o cuando nos vemos obligados a contrastar nuestra intuición con un análisis racional. Sin embargo, este sistema requiere esfuerzo mental y concentración, por lo que tiende a ser menos utilizado en situaciones de rutina, donde el Sistema 1 toma el control de manera predeterminada.

Si bien una respuesta alineada con los conceptos científicos no necesariamente proviene del Sistema 2, comprender la interacción entre estos dos sistemas nos permite entender cómo funciona la cognición humana. Nuestra mente opera con diferentes modelos mentales, y estos modelos se activan dependiendo del contexto y la situación específica.

La forma en que construimos nuestra comprensión del mundo no parte de cero, sino que está influenciada por nuestras experiencias previas, creencias e hipótesis. Nuestro aprendizaje y razonamiento están mediados por la interacción entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico.

En un primer nivel, nuestra percepción del mundo está profundamente influenciada por nuestro sistema sensoriomotor. Las interpretaciones iniciales que generamos sobre ciertos fenómenos físicos están ancladas en nuestras experiencias sensoriales, lo que en ocasiones genera conflictos cognitivos cuando la información percibida entra en contradicción con las explicaciones científicas formales.

Por ejemplo, si tocamos una cuchara de metal y una cuchara de madera que han estado en la mesa durante una noche fría, nuestro sentido del tacto nos dice que la cuchara de metal está más fría que la de madera. Sin embargo, desde un punto de vista científico, sabemos que ambas cucharas están a la misma temperatura ambiente. La diferencia en la sensación térmica proviene de la conductividad térmica de los materiales, no de una diferencia real en temperatura. Si un estudiante no ha interiorizado completamente el concepto de temperatura y transferencia de calor, su percepción sensorial puede llevarlo a una conclusión errónea, a pesar de que la respuesta científica correcta ya haya sido presentada en un contexto educativo.

Este tipo de conflicto entre lo que "sentimos" y lo que "sabemos" es un reflejo de cómo operan nuestros modelos cognitivos. El Sistema 1 nos proporciona una respuesta inmediata basada en nuestra experiencia sensorial, mientras que el Sistema 2 puede intervenir para corregir o reinterpretar la información de manera más racional y analítica. Sin embargo, para que el Sistema 2 sea efectivo en modificar nuestras creencias intuitivas, es necesario fortalecer la conexión entre el conocimiento teórico y la experiencia práctica, utilizando estrategias pedagógicas que permitan desafiar y reconstruir los modelos mentales erróneos.

El estudio de la cognición en la educación es clave para comprender cómo los estudiantes adquieren, procesan y reorganizan el conocimiento. Las respuestas de los estudiantes no siempre reflejan un razonamiento erróneo, sino que pueden ser resultado de modelos mentales en conflicto o del predominio del pensamiento intuitivo sobre el analítico. Identificar y abordar estos modelos es fundamental para mejorar el aprendizaje y la

enseñanza de la ciencia, permitiendo que los estudiantes transiten de una comprensión intuitiva a una conceptual más profunda.

## **2.1 CONCEPTOS ERRÓNEOS EN LA EDUCACIÓN**

Durante el proceso de aprendizaje, los estudiantes generan nuevos conceptos a partir de la interpretación de sus ideas, habilidades y creencias previas. Estos conocimientos previos desempeñan un papel crucial en la forma en que los estudiantes interactúan con el entorno de aprendizaje y en la manera en que asimilan nueva información. Cuando las concepciones preexistentes no se alinean con el conocimiento científico aceptado, se habla de conceptos erróneos o concepciones alternativas (Dong et al., 2020; Eggen et al., 2017; Gurel et al., 2015; J. P. Smith et al., 1994).

Desde un enfoque constructivista, se enfatiza que las ideas previas de los estudiantes no deben ser simplemente descartadas o corregidas, sino que deben servir como base para la construcción de un conocimiento significativo (Ausubel, 1968). Cuando un estudiante se enfrenta a un concepto nuevo, lo interpreta inicialmente a través de sus esquemas previos, y solo mediante un proceso de reconstrucción conceptual puede integrar la nueva información en su marco cognitivo. Este proceso es esencial para lograr un aprendizaje significativo, ya que permite encontrar vínculos entre los conocimientos previos y el contenido nuevo, facilitando la consolidación de ideas científicamente correctas.

El aprendizaje significativo también está estrechamente relacionado con la zona de desarrollo próximo, propuesta por Vygotsky (1978), quien argumentó que el conocimiento previo del estudiante debe ser el punto de partida para el desarrollo de sus esquemas conceptuales y estrategias de aprendizaje. En este sentido, es fundamental comprender las creencias previas de los estudiantes para diseñar intervenciones pedagógicas efectivas que promuevan una evolución conceptual progresiva. La transformación de ideas erróneas debe realizarse a través de secuencias didácticas adecuadas, que permitan guiar a los estudiantes desde su nivel actual de comprensión hasta una asimilación más profunda de los conceptos científicos.

Sin embargo, la literatura educativa ha documentado que los conceptos erróneos persisten incluso después de recibir instrucción formal, especialmente en temas de ciencias como la transferencia de calor (Erickson, 1979; Yeo & Zadnik, 2001). Esto se debe a que los estudiantes suelen interpretar los fenómenos físicos a través de esquemas intuitivos, desarrollados a lo largo de su experiencia cotidiana, que en muchas ocasiones contradicen las explicaciones científicas (Brown, 1989).

Por ello, es fundamental considerar el conocimiento previo de los estudiantes como una herramienta para guiar eficazmente el proceso de aprendizaje. Los modelos cognitivos de los estudiantes son construcciones personales, elaboradas a partir de su interacción diaria con el mundo, y es mediante la identificación y el análisis de estos modelos que se puede facilitar una transición desde la intuición hacia una comprensión científica más rigurosa.

### **2.1.1 DEFINICIÓN DE CONCEPTOS ERRÓNEOS.**

Existen diversas denominaciones para referirse a una idea errónea. Algunos autores las llaman "concepciones alternativas" (Klammer, 1998; Wandersee et al., 1994), mientras que otros se refieren a ellas como "conceptos erróneos" (Clement et al., 1989; Driver & Easley, 1978; Helm, 1980), "creencias ingenuas" (McCloskey et al., 1980), "ideas de niños" (Osborne et al., 1993), "dificultades conceptuales" (McDermott, 1995), "primitivos fenomenológicos" (diSessa, 1993), "modelos mentales" (Greca & Moreira, 2002), o "conocimiento previo" (Binder et al., 2019).

Según Binder (Binder et al., 2019), el conocimiento previo de los estudiantes puede ser una barrera que impide el aprendizaje, considerándose incluso el mejor predictor del rendimiento académico. Este aspecto es crucial, ya que el rendimiento académico podría influir en la decisión de un estudiante de abandonar la universidad (Aquines Gutiérrez et al., 2022). A lo largo de nuestras experiencias e interacciones con el entorno, desarrollamos teorías o ideas ingenuas que, una vez arraigadas, son difíciles de cambiar, incluso frente a

situaciones que las contradicen. Este fenómeno se conoce como perseverancia de creencias (Savion, 2009). Cuando estamos en tal situación, experimentamos un estado de incomodidad y tendemos a evitar cualquier información nueva que entre en conflicto con nuestras creencias actuales (Piaget, 1971). Esta resistencia a cambiar conceptos erróneos puede llevar a rechazar o ignorar la evidencia que desafía esas creencias, obstaculizando así el proceso de aprendizaje y la adopción de nuevos conocimientos.

De acuerdo con Piaget (Piaget, 1971), existen dos formas de adaptarse a nuevas experiencias e información: asimilación y acomodación. La asimilación es el método más sencillo, pues no requiere grandes ajustes; simplemente integramos la nueva información en nuestro conocimiento preexistente, a veces reinterpretando las nuevas experiencias para que encajen en lo que ya sabemos. La otra forma es la acomodación, donde las ideas previas se modifican o incluso se reemplazan por completo a la luz de nueva información.

La asimilación y la acomodación funcionan conjuntamente en el proceso de aprendizaje. Parte de la nueva información se incorpora a los esquemas existentes mediante la asimilación, mientras que otra parte genera el desarrollo de nuevos esquemas o la transformación total de las ideas previas a través de la acomodación. No obstante, tendemos a rechazar la información nueva que nos lleva al desequilibrio cognitivo (Piaget, 1971), lo que podría explicar por qué los conceptos erróneos persisten incluso después de recibir instrucción (Longfield, 2009).

### **2.1.2 PRECONCEPTOS ERRÓNEOS EN TEMAS DE CALOR Y TEMPERATURA.**

En los últimos años, investigadores en física educativa han observado que los estudiantes ingresan a los cursos universitarios con un conjunto de ideas y creencias sobre conceptos científicos que no siempre coinciden con los aceptados por la comunidad científica. Esta discrepancia entre las ideas, habilidades y creencias de los estudiantes y las concepciones científicas establecidas se define como una concepción errónea, la cual representa un obstáculo significativo en el proceso de aprendizaje (Kizilcik et al., 2021).

Muchos estudiantes tienen dificultades para diferenciar entre calor y temperatura (Fitzallen et al., 2016), y algunos llegan a creer que estos términos son intercambiables. Además, existe la creencia entre ciertos estudiantes de que los metales son naturalmente fríos al tacto, mientras que materiales aislantes como la madera o el plástico son inherentemente cálidos. Estas ideas erróneas contribuyen al desarrollo de nociones alternativas sobre la transferencia de calor y otros conceptos térmicos. Como señala (Yeo & Zadnik, 2001), estas creencias erróneas proporcionan "un marco inadecuado para un pensamiento más profundo sobre los procesos termodinámicos."

Los conceptos de calor, temperatura, transferencia de calor y cambio de fase no siempre están directamente relacionados con las experiencias cotidianas de los estudiantes. Esto puede dificultarles relacionar las ideas teóricas sobre el calor con situaciones prácticas, generando preconceptos erróneos persistentes en ciertos contextos aun comprendiendo el concepto formal.

## **2.2 CUESTIONARIOS SIMILARES**

Durante años, se han hecho esfuerzos para comprender la cognición humana. Comprender los modelos mentales que se desarrollan dentro de nuestro cerebro nos brinda la capacidad de conocer y reconocer patrones en la construcción del conocimiento, permitiendo el desarrollo de diversos materiales de aprendizaje con el fin de que avancemos como sociedad.

Existen en la actualidad diversos materiales que se pueden utilizar para conocer un poco mejor sobre la forma en que las personas responden a cuestionamientos cuando pueden existir confusiones entre una respuesta intuitiva y una respuesta no intuitiva. Por ejemplo, cuestionarios como el Force Concept Inventory (FCI), Cognitive Reflection Test (CRT) o Thermal Concept Evaluation (TCE).

### 2.2.1 FORCE CONCEPT INVENTORY (FCI)

El Force Concept Inventory (FCI) es un cuestionario ampliamente utilizado en la educación de la física para evaluar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre las fuerzas y las leyes de Newton. Fue desarrollado en 1992 por Hestenes, Wells y Swackhamer, y ha sido fundamental en investigaciones sobre el aprendizaje en física.

Fue diseñado para diagnosticar los conceptos erróneos de los estudiantes en mecánica clásica, particularmente en el estudio de las fuerzas y el movimiento. Evalúa cómo los estudiantes entienden conceptos fundamentales, como la primera, segunda y tercera ley de Newton, fuerzas gravitacionales, fuerzas de contacto, entre otros.

Consiste en 30 preguntas de opción múltiple, cada una con cinco opciones de respuesta, las opciones de respuesta están diseñadas para incluir conceptos erróneos comunes, lo que permite identificar patrones de pensamiento que no se alinea con la definición formal del concepto. Se analizan conceptos como:

- Conceptos básicos de fuerza y movimiento.
- Primera, segunda y tercera leyes de Newton.
- Interacción entre objetos y fuerzas.
- Dinámica del movimiento circular.
- Fuerzas gravitacionales.

Las preguntas están diseñadas de maneras similar a este ejemplo:

*Una caja está en reposo sobre una mesa. ¿Qué fuerza actúa sobre la caja?*

*(a) Solo la gravedad.*

*(b) Gravedad y una fuerza de soporte de la mesa.*

*(c) Gravedad, pero la fuerza de soporte es mayor.*

*(d) Gravedad, pero la fuerza de soporte es menor.*

*(e) Ninguna fuerza actúa porque la caja está en reposo.*

Donde la respuesta correcta es (b), ya que la fuerza normal de la mesa equilibra la gravedad.

El FCI no mide la capacidad de resolver problemas matemáticos, sino la comprensión conceptual, las preguntas suelen estar enmarcadas en situaciones cotidianas para facilitar la conexión con las experiencias de los estudiantes. Suele usarse como herramienta diagnóstica antes y después de la instrucción en física para medir el aprendizaje conceptual y así, poder comparar los resultados iniciales y finales permite evaluar la efectividad de las metodologías de enseñanza.

En general, El FCI es una herramienta esencial en la enseñanza y aprendizaje de la física, ayudando a identificar y abordar los conceptos erróneos de los estudiantes sobre las fuerzas y el movimiento. Su uso permite a los educadores ajustar sus estrategias pedagógicas para mejorar la comprensión conceptual en física, pues podemos identificar el modelo del pensamiento utilizado por los estudiantes.

### **2.2.2 COGNITIVE REFLECTION TEST (CRT)**

El Cognitive Reflection Test (CRT), o Prueba de Reflexión Cognitiva, es una herramienta psicológica diseñada para medir la capacidad de las personas para suprimir respuestas automáticas o intuitivas incorrectas y reflexionar antes de llegar a una solución. Fue desarrollado en 2005 por el psicólogo Shane Frederick y ha sido ampliamente utilizado en investigaciones sobre razonamiento, toma de decisiones y sesgos cognitivos.

Esta prueba evalúa la tendencia de las personas a usar un razonamiento reflexivo y deliberado en lugar de depender de su intuición inmediata. Se enfoca en la capacidad de inhibir respuestas automáticas que parecen correctas a primera vista, pero que son erróneas.

El CRT clásico consta de tres preguntas cortas, las cuales están diseñadas para provocar una respuesta intuitiva incorrecta, que debe ser superada mediante reflexión analítica. Por ejemplo:

*Pregunta 1: Un bate y una pelota cuestan \$1.10 en total. El bate cuesta \$1.00 más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota?*

*Respuesta intuitiva: \$0.10 (incorrecta).*

*Respuesta correcta: \$0.05.*

*Pregunta 2: Si cinco máquinas tardan cinco minutos en fabricar cinco artículos, ¿cuánto tiempo tardarán 100 máquinas en fabricar 100 artículos?*

*Respuesta intuitiva: 100 minutos (incorrecta).*

*Respuesta correcta: 5 minutos.*

*Pregunta 3: En un lago hay un parche de lirios. Cada día, el parche se duplica en tamaño. Si tarda 48 días en cubrir todo el lago, ¿cuánto tiempo tardará en cubrir la mitad del lago?*

*Respuesta intuitiva: 24 días (incorrecta).*

*Respuesta correcta: 47 días.*

Una puntuación más alta en el CRT indica una mayor inclinación a pensar de manera analítica y reflexiva, ya que las respuestas incorrectas suelen señalar una inclinación hacia el pensamiento rápido e intuitivo.

El CRT es una herramienta simple pero poderosa para explorar cómo las personas procesan información y toman decisiones. Al destacar las diferencias entre el pensamiento intuitivo y reflexivo, proporciona información valiosa sobre cómo los estudiantes responden en cuestionamientos donde la intuición y los conceptos se ponen en confrontación.

### 2.2.3 THERMAL CONCEPT EVALUATION (TCE)

El Thermal Concept Evaluation (TCE) es un cuestionario diseñado para evaluar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre temas relacionados con el calor y la temperatura en física, permite evaluar la comprensión de conceptos fundamentales relacionados con el calor, la temperatura, la transferencia de calor y los cambios de estado e identificar conceptos erróneos persistentes, como la confusión entre calor y temperatura, o ideas equivocadas sobre cómo los materiales conducen o almacenan calor.

El cuestionario consiste en preguntas de opción múltiple, generalmente diseñadas para abordar situaciones cotidianas o experimentales relacionadas con los conceptos térmicos, cada pregunta incluye varias opciones, con distractores (opciones incorrectas) que reflejan conceptos erróneos comunes.

Los temas evaluados abarcan conceptos sobre: Diferencia entre calor y temperatura, transferencia de calor (conducción, convección y radiación), cambio de estado y energía asociada (calor latente), propiedades térmicas de los materiales (como la capacidad calorífica y la conductividad térmica) y conceptos relacionados con el equilibrio térmico.

Esta prueba no mide la habilidad matemática, sino la comprensión conceptual. Las preguntas se formulan para explorar cómo los estudiantes razonan sobre fenómenos térmicos en lugar de enfocarse en la aplicación de fórmulas, con cuestionamientos similares a:

*¿Qué sucede con la temperatura de un cubo de hielo cuando comienza a derretirse?*

- (a) La temperatura aumenta.*
- (b) La temperatura permanece constante.*
- (c) La temperatura disminuye.*
- (d) Depende de la cantidad de hielo.*

Donde la respuesta correcta es (b), ya que durante el cambio de estado la temperatura permanece constante.

Este tipo de preguntas ayuda a los educadores a identificar conceptos erróneos antes y después de la instrucción y con ello facilita el diseño de estrategias pedagógicas para abordar áreas de dificultad, puesto que permite comparar el desempeño conceptual de estudiantes en diferentes niveles educativos o bajo diferentes metodologías de enseñanza por lo que ha sido utilizado en investigaciones educativas para evaluar la efectividad de diferentes enfoques de enseñanza en física térmica.

Así se puede detectar conceptos erróneos comunes como:

- Creer que "calor" y "temperatura" son sinónimos.
- Pensar que los metales son "más fríos" que otros materiales, como la madera.
- Asumir que los objetos con mayor masa siempre contienen más calor.
- Confundir la dirección de la transferencia de calor, pensando que siempre va de "calor a frío" de manera absoluta, sin considerar equilibrios térmicos.

En general, El TCE es una herramienta valiosa para identificar y abordar conceptos erróneos sobre el calor y la temperatura en estudiantes. Su uso permite a los educadores diseñar estrategias de enseñanza más efectivas y basadas en evidencias para mejorar la comprensión conceptual de temas térmicos.

## CAPITULO 3.

### FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA.

El contenido correspondiente a este capítulo está basado en los conceptos físicos aceptados por la comunidad científica sobre mecánica cuántica, descritos de manera clara por autores como Saxon, De la Peña y Piris.

A finales del siglo XIX, la comunidad científica creía firmemente que la física había alcanzado su madurez. Las leyes de Newton, junto con la gravitación universal y la electrodinámica de Maxwell, proporcionaban un marco teórico tan completo que parecía que el universo ya era comprendido y podría ser explicado con lo que se conocía hasta ese momento.

Sin embargo, a medida que se perfeccionaban las técnicas experimentales, ocurrieron fenómenos que no podían explicarse dentro de la física clásica. Estos problemas fueron las primeras señales de que el modelo utilizado tenía limitaciones y era necesario un nuevo marco teórico. Principalmente cuatro crisis fundamentales marcaron el inicio de la mecánica cuántica: el enigma de la radiación del cuerpo negro, el misterio de los calores específicos, el dilema de la estructura atómica y el efecto fotoeléctrico.

Comenzando con la radiación del cuerpo negro, según la teoría clásica y el teorema de equipartición de la energía, un cuerpo caliente debería emitir radiación de todas las frecuencias con igual intensidad. Esto llevaba a una predicción absurda: a frecuencias altas, la cantidad de energía irradiada debería tender a infinito. Este resultado, conocido como la catástrofe ultravioleta, no tenía sentido físico. Sin embargo, los experimentos mostraban que la radiación emitida alcanzaba un máximo en una frecuencia específica y luego disminuía a frecuencias más altas, en lugar de crecer indefinidamente. Para resolver esta paradoja, Max Planck propuso en 1901 una idea revolucionaria: la energía no se emite de manera continua, sino en paquetes discretos, llamados cuantos. La energía de cada cuanto venía dada por la ecuación:  $E = hv$  (donde  $h$  es la constante de Planck y  $v$  la frecuencia de la radiación). Este

concepto introdujo la idea de la cuantización de la energía, estableciendo las bases de la mecánica cuántica.

En segundo punto, el comportamiento térmico de los sólidos. Según la Ley de Dulong y Petit, el calor específico de los sólidos debía ser constante y no depender de la temperatura. Sin embargo, los experimentos mostraban que, a bajas temperaturas, los calores específicos disminuían drásticamente, lo que contradecía las predicciones clásicas. En 1907, Albert Einstein aplicó la cuantización de Planck a los modos vibracionales de los átomos en un sólido, demostrando que a bajas temperaturas solo los modos de vibración de menor energía contribuían al calor específico. Este resultado explicó la discrepancia observada y sentó las bases para una comprensión más profunda del comportamiento térmico de los materiales.

Continuamos con el estudio de la estructura del átomo. Según la electrodinámica clásica, un electrón en órbita alrededor del núcleo debería irradiar energía continuamente, perder velocidad y finalmente colapsar en el núcleo, esto significaba que los átomos no podían ser estables, lo que claramente no coincidía con la realidad. Además, los espectros de emisión de los elementos no eran continuos, sino que consistían en líneas discretas, algo que la física clásica no podía explicar. En 1913, Niels Bohr propuso un modelo basado en órbitas cuánticas estacionarias, en las cuales: Los electrones solo pueden ocupar ciertos niveles de energía sin irradiar energía y la radiación solo se emite cuando un electrón salta entre estos niveles, con una energía dada por  $E = h\nu$ , este modelo permitió explicar con precisión el espectro del hidrógeno y marcó un hito en la comprensión de la estructura atómica.

Por último, el efecto fotoeléctrico (la luz como partícula). Mientras Bohr revolucionaba la teoría atómica, Albert Einstein resolvía este otro misterio. Según la teoría clásica, la energía de los electrones emitidos al iluminar una superficie metálica debería depender de la intensidad de la luz. Es decir, cuanto mayor fuera la intensidad, mayor debería ser la energía de los electrones emitidos, pero los experimentos mostraban algo diferente: los electrones solo eran emitidos si la luz tenía una frecuencia mínima (umbral), sin importar su intensidad y a mayor frecuencia los electrones tenían más energía, pero la intensidad no influía en su energía individual. Para explicar esto, Einstein propuso en 1905 que la luz no era solo una onda, sino que estaba formada por partículas llamadas fotones, cada una con una

energía dada por  $E = h\nu$ . Si un fotón tenía suficiente energía, podía liberar un electrón; si no, ningún electrón era emitido, sin importar cuánta luz se usará. Esta idea revolucionaria confirmó la existencia de los cuantos de energía y más tarde le valió el Premio Nobel de Física en 1921.

Estos descubrimientos sentaron las bases de la mecánica cuántica, que se consolidó con los siguientes hitos:

1924 - Louis de Broglie: Introduce la dualidad onda-partícula, sugiriendo que los electrones y otras partículas pueden comportarse como ondas.

1925 - Uhlenbeck y Goudsmit: Introducen la noción de espín del electrón, ampliando la teoría cuántica. Wolfgang Pauli: Formula el principio de exclusión de Pauli, explicando la estructura electrónica de los átomos.

1926 - Erwin Schrödinger: Formula la ecuación de onda, que describe cómo los sistemas cuánticos evolucionan en el tiempo.

1927 - Werner Heisenberg: Establece el principio de incertidumbre, que indica que es imposible conocer simultáneamente la posición y el momento de una partícula con precisión absoluta.

El desarrollo de la mecánica cuántica nos deja una lección fundamental: las observaciones que realizamos pueden explicarse con modelos que, en un principio, parecen poco convencionales o incluso contradictorios con las teorías tradicionales.

Así como la física clásica no pudo explicar la radiación del cuerpo negro o la estabilidad atómica, hoy en día seguimos encontrando fenómenos que desafían nuestros modelos actuales.

Este recorrido histórico nos enseña que muchas de las observaciones que realizamos pueden explicarse a través de modelos que, en un principio, podrían parecer poco convencionales o incluso contradictorios con las teorías tradicionales. Así como los avances en la física demostraron que los modelos clásicos no eran suficientes para describir

fenómenos a nivel microscópico, debemos reconocer que los paradigmas actuales pueden ampliarse o adaptarse para abordar nuevos desafíos y enriquecer nuestra comprensión.

Esto refuerza la importancia de adoptar una mentalidad abierta hacia la innovación, permitiéndonos construir herramientas y modelos que respondan a la complejidad de las observaciones actuales en diversos ámbitos, no solo en física, permitiendo desarrollar herramientas más allá de los enfoques tradicionales.

### 3.1 CONCEPTOS BASICOS DE LA MECANICA CUANTICA

Uno de los principios fundamentales de la mecánica cuántica es la dualidad onda-partícula, introducida por Louis de Broglie en 1924. Este principio establece que las partículas subatómicas, como electrones y fotones, pueden exhibir propiedades tanto de partículas como de ondas, dependiendo de la forma en que sean observadas.

Por ejemplo, en el experimento de la doble rendija, cuando los electrones no son medidos directamente, interfieren consigo mismos y generan un patrón de interferencia característico de las ondas. Sin embargo, si se introduce un detector para observar por cuál rendija pasa cada electrón, el patrón de interferencia desaparece y los electrones se comportan como partículas localizadas. Este fenómeno sugiere que la naturaleza de las partículas subatómicas no es fija, sino que depende del contexto experimental en el que se analicen.

Para describir matemáticamente el estado de un sistema cuántico, se introduce la función de onda, denotada por  $\psi$  o  $\Psi$ . Esta función contiene toda la información posible sobre la partícula, como su posición, momento o energía. Su interpretación fue establecida por Max Born, quien propuso que el cuadrado de su módulo,  $|\psi(x, t)|^2$ , representa la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en una posición determinada  $x$  en el tiempo  $t$ :

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \quad (1)$$

Esta interpretación probabilística de la función de onda revolucionó la forma en que entendemos la realidad a nivel microscópico, ya que implica que no podemos conocer con certeza la ubicación exacta de una partícula antes de medirla, solo su distribución de probabilidad.

La evolución de la función de onda está determinada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\delta\psi(x, t)}{\delta t} = \hat{H}\psi(x, t) \quad (2)$$

Donde  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano del sistema, que representa la energía total. Para una partícula libre en una dimensión, donde el potencial  $V(x, t) = 0$ , el Hamiltoniano se reduce al operador de energía cinética:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} \quad (3)$$

y la ecuación de Schrödinger se convierte en:

$$i\hbar \frac{\delta\psi(x, t)}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2\psi(x, t)}{\delta x^2} \quad (4)$$

Una de las soluciones de esta ecuación para una partícula libre con un momento bien definido  $p = \hbar k$  y energía  $E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  es una onda plana de la forma:

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (5)$$

donde  $k$  es el número de onda y  $\omega$  es la frecuencia angular. Esta función de onda describe un estado de momento bien definido, pero no representa físicamente a una partícula localizada, ya que no es normalizable. Para describir de manera más realista a una partícula

localizada, se recurre a un paquete de ondas, que es una superposición de múltiples ondas planas con distintos valores de  $k$ .

En mecánica cuántica, un estado cuántico representa toda la información posible sobre un sistema en un momento dado. Este estado puede describir propiedades como la posición, el momento, la energía y el espín de una partícula. Dependiendo de la representación elegida, los estados cuánticos pueden expresarse mediante vectores de estado en un espacio de Hilbert, generalmente denotados como  $|\psi\rangle$  (notación de Dirac) o funciones de onda  $\psi(x, t)$  en la representación de coordenadas. Estos estados nos permiten predecir probabilísticamente los resultados de las mediciones físicas que realizamos sobre el sistema.

Los estados cuánticos pueden clasificarse en dos tipos principales:

**Estado puro:** Un estado puro es un estado cuántico que se puede describir completamente mediante un vector en el espacio de Hilbert. Matemáticamente, se representa como  $|\psi\rangle$ , y su evolución está gobernada por la ecuación de Schrödinger.

**Estado mixto:** Un estado mixto es una combinación probabilística de varios estados puros, lo que ocurre cuando no se tiene información completa sobre el sistema. En este caso, el sistema no se encuentra en un único estado bien definido, sino en una combinación de posibles estados con diferentes probabilidades. Se representa mediante una matriz de densidad, una herramienta clave en la mecánica cuántica para describir sistemas que no están en estados puros.

Una de las propiedades más fascinantes de la mecánica cuántica es la superposición de estados. En este principio, un sistema cuántico puede existir en múltiples estados simultáneamente hasta que se realiza una medición, lo que colapsa la superposición en uno de los posibles resultados.

Si un sistema cuántico puede estar en los estados  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ , entonces su estado general puede ser una combinación lineal de estos:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \quad (6)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son coeficientes complejos que determinan las contribuciones relativas de cada estado en la superposición.

Este principio es el que permite fenómenos cuánticos como la interferencia cuántica, el entrelazamiento y la computación cuántica. En educación y cognición, también puede utilizarse para modelar estados cognitivos mixtos, como en el caso de la matriz de densidad aplicada al aprendizaje.

La mecánica cuántica ha revolucionado nuestra comprensión de la naturaleza, introduciendo conceptos como la dualidad onda-partícula, la función de onda, la superposición de estados y la matriz de densidad. Estos principios, aunque inicialmente concebidos para sistemas físicos, han encontrado aplicaciones en áreas como la cognición y el aprendizaje, permitiéndonos modelar cómo los estudiantes pueden sostener simultáneamente conceptos erróneos y correctos en sus modelos mentales. Así, la mecánica cuántica no solo describe el mundo microscópico, sino que también ofrece herramientas poderosas para entender procesos cognitivos complejos.

### **3.2 MATRIZ DE DENSIDAD.**

En el contexto de la mecánica cuántica, la "densidad" se refiere a cómo la información sobre un sistema cuántico se distribuye en el espacio de estados. La matriz de densidad es una herramienta matemática fundamental que permite describir tanto estados puros como estados mixtos, proporcionando una representación más general y completa de un sistema cuántico. Este concepto fue desarrollado por L.D. Landau y J. von Neumann para abordar situaciones en las que no se tiene un conocimiento completo del estado de un sistema, ya sea debido a interacciones con el entorno o a una mezcla estadística de estados.

Para un estado puro, la función de onda  $\psi(x, t)$  describe completamente el sistema, y la densidad de probabilidad  $|\psi(x, t)|^2$  indica la probabilidad de encontrar una partícula en una posición específica  $x$  en un tiempo  $t$ .

Para un estado mixto, la matriz de densidad combina múltiples estados cuánticos con diferentes probabilidades, proporcionando una descripción más generalizada del sistema cuando este no se encuentra en un único estado bien definido. Matemáticamente, se define como:

$$\rho = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \quad (7)$$

donde  $\rho$  es la matriz de densidad del sistema,  $|\psi_{\alpha}\rangle$  son los estados cuánticos individuales y  $\omega_{\alpha}$  representa las probabilidades de que el sistema se encuentre en cada estado  $|\psi_{\alpha}\rangle$ , con la condición de que  $\sum_{\alpha} \omega_{\alpha} = 1$

Las probabilidades  $\omega_{\alpha}$  pueden tener un origen cuántico o clásico, dependiendo de la interacción del sistema con su entorno. En muchos casos, se asume que estas probabilidades son constantes en el tiempo, y la evolución del sistema se describe exclusivamente por las reglas de la mecánica cuántica aplicadas a los estados puros. Sin embargo, si el sistema interactúa con su entorno y cambia sus condiciones externas, las probabilidades pueden modificarse, lo que implica que su evolución dependerá tanto de su propia dinámica interna como de las influencias externas.

La matriz de densidad posee una serie de propiedades clave que garantizan su correcto uso en la descripción de sistemas cuánticos:

1. Hermiticidad: La matriz de densidad es hermítica, lo que significa que sus elementos fuera de la diagonal son complejos conjugados entre sí. Esta propiedad garantiza que los valores propios de  $\rho$  sean reales, lo que es fundamental para la interpretación probabilística de la mecánica cuántica.

$$\rho^{\dagger} = \rho \quad (8)$$

2. Positividad Definida: La matriz de densidad es positiva definida, lo que implica que todas sus probabilidades asociadas son no negativas. Esto refleja el principio fundamental de que las probabilidades físicas no pueden ser negativas.

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad (9)$$

3. Trazabilidad (Normalización): La traza de la matriz de densidad es igual a 1, lo que garantiza que la probabilidad total de encontrar el sistema en cualquier estado es 1. Esta propiedad asegura la normalización del sistema.

$$\text{Tr}(\rho) \tag{10}$$

4. Estados Puros y Estados Mixtos: Un estado puro se caracteriza porque su matriz de densidad cumple que  $\rho^2 = \rho$ , esto significa que el estado está completamente definido y se puede representar mediante un único vector de estado  $|\psi\rangle$ . Un estado mixto, en cambio, satisface la condición  $\rho^2 \neq \rho$ , en este caso el sistema no está en un solo estado cuántico, sino en una combinación estadística de varios estados con diferentes probabilidades.
5. Coherencia y Decoherencia: Los elementos diagonales de  $\rho$  representan las probabilidades de encontrar el sistema en un determinado estado dentro de la base elegida y los elementos fuera de la diagonal, llamados coherencias, contienen información sobre la interferencia cuántica entre estados.
6. Evolución Temporal de la Matriz de Densidad: La evolución temporal de la matriz de densidad está gobernada por la ecuación de von Neumann, que es la versión cuántica de la ecuación de Liouville en mecánica clásica, esta ecuación rige cómo cambia el estado del sistema con el tiempo, asegurando la conservación de la probabilidad y la evolución unitaria de los estados cuánticos.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \tag{11}$$

Donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema, que describe su energía total y  $[H, \rho]$  representa el conmutador entre el Hamiltoniano y la matriz de densidad.

7. Invariancia Bajo Cambio de Base: La matriz de densidad puede expresarse en cualquier base ortonormal, y su forma cambia bajo una transformación unitaria  $U$ :

$$\rho' = U\rho U^\dagger \tag{12}$$

donde  $U$  es una matriz unitaria que representa la transformación de base.

La matriz de densidad no solo es una herramienta esencial en la mecánica cuántica, sino que también ha encontrado aplicaciones en cognición y aprendizaje, especialmente en el estudio de modelos mentales y conceptos erróneos en educación ya que permite modelar estados cognitivos mixtos en los que un estudiante puede sostener simultáneamente ideas correctas e incorrectas sobre un mismo concepto, facilitando una representación probabilística del pensamiento estudiantil, considerando que los estudiantes pueden usar múltiples modelos de manera inconsistente al abordar problemas científicos.

En este trabajo, utilizamos la matriz de densidad para modelar los estados cognitivos de los estudiantes en relación con conceptos de calor y temperatura, identificando la presencia, ausencia o coexistencia de conceptos erróneos. Al aplicar este enfoque, podemos obtener una visión más profunda del proceso de aprendizaje y diseñar estrategias pedagógicas más efectivas para mejorar la enseñanza de la física en niveles universitarios. Es una herramienta versátil que permite describir sistemas cuánticos abiertos y mezclas estadísticas. Sus propiedades fundamentales la convierten en un recurso poderoso para diversos campos, desde la física teórica hasta la educación y la ciencia cognitiva. En el presente estudio, utilizamos este marco para representar y analizar estados cognitivos mixtos, proporcionando una perspectiva innovadora en la evaluación del aprendizaje y la comprensión de conceptos científicos en estudiantes universitarios.

La matriz de densidad es una herramienta fundamental en la mecánica cuántica que permite representar tanto estados puros como estados mixtos de un sistema. En el contexto educativo, y especialmente en el análisis de modelos mentales de los estudiantes, esta matriz ofrece una representación robusta del estado conceptual de un individuo o grupo, sin requerir el seguimiento de su evolución temporal. Esta expresión permite representar un sistema cognitivo que se encuentra en una superposición estadística de distintos modelos mentales (correctos, incorrectos, confusos, en transición, etc.).

## **CAPÍTULO 4.**

### **ESTUDIOS PRECEDENTES Y PUBLICACIONES RELACIONADAS**

El estudio de la cognición y su impacto en el aprendizaje es fundamental en la investigación educativa. Comprender cómo los estudiantes procesan la información, activan modelos mentales y estructuran su conocimiento permite desarrollar estrategias pedagógicas más efectivas e inclusivas. A lo largo de este trabajo doctoral, hemos abordado la problemática de los preconceptos erróneos en calor y temperatura a través de un enfoque innovador basado en la matriz de densidad y el análisis de diferentes factores que pudieran ser relevantes para nuestra investigación, este enfoque parte de una serie de investigaciones previas que han aportado información clave.

Estos cuatro estudios proporcionan una base sólida para el desarrollo del presente trabajo, permitiendo integrar perspectivas sobre diversidad cognitiva, diferencias individuales en el aprendizaje y modelos de razonamiento en el análisis de preconceptos erróneos en calor y temperatura. En este capítulo, se presentan los hallazgos clave de cada una de estas investigaciones y su impacto en la formulación de nuestro modelo de análisis basado en la mecánica cuántica y la matriz de densidad.

#### **4.1 EVALUACIÓN DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN ESTUDIANTES DE**

##### **INGENIERÍA (Chavarría-Garza et al., 2022)**

El artículo "Assessment of Multiple Intelligences in First-Year Engineering Students in Northeast Mexico" analiza los perfiles de aprendizaje de estudiantes de ingeniería de primer año, basándose en la teoría de inteligencias múltiples de Howard Gardner. El estudio explora si existen diferencias en el desarrollo de estas inteligencias según el género y el

programa académico, con el objetivo de diseñar estrategias educativas más inclusivas y efectivas.

Los hallazgos revelaron diferencias significativas en las inteligencias predominantes entre estudiantes de distintas ingenierías y géneros. Mientras que las mujeres obtuvieron puntuaciones más altas en inteligencia lingüística e interpersonal, los hombres mostraron mejores resultados en inteligencia matemática y visual. Además, los estudiantes de diferentes programas de ingeniería mostraron fortalezas en distintas inteligencias, sugiriendo que el enfoque tradicional de enseñanza basado en la inteligencia lógico-matemática podría no ser suficiente para atender las diversas formas de aprendizaje de los estudiantes.

Estos resultados nos llevaron a considerar la diversidad en los perfiles estudiantiles como un factor clave en la comprensión de los preconceptos erróneos. En nuestro estudio, exploramos cómo las diferencias en los programas académicos pueden influir en la existencia y persistencia de conceptos erróneos sobre el calor y la temperatura. Dado que el aprendizaje está directamente vinculado a los modelos mentales y las estructuras cognitivas de los estudiantes, es fundamental reconocer cómo las diferencias en las inteligencias múltiples pueden influir en la manera en que los estudiantes procesan y conceptualizan la información científica.

Por lo tanto, este artículo fue crucial para fundamentar la importancia de analizar cómo las características individuales de los estudiantes afectan su comprensión de conceptos científicos. Nos permitió incluir la variable programa académico en nuestro análisis y reforzar la idea de que el aprendizaje de la física no es homogéneo, sino que está influenciado por diversos factores cognitivos y educativos.

## 4.2 PERFILES DE INGRESO Y HÁBITOS DE ESTUDIO COMO PREDICTORES

### DEL DESEMPEÑO ACADÉMICO (Aquines Gutiérrez et al., 2022)

El artículo "How the Entry Profiles and Early Study Habits Are Related to First-Year Academic Performance in Engineering Programs" analiza la relación entre los perfiles de ingreso, hábitos de estudio y el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en su primer año universitario. A través del análisis del promedio de calificaciones en preparatoria (HSGPA), puntajes del examen de admisión (SAT) y hábitos de estudio medidos con la encuesta de hábitos de estudio y actitudes (SSHA), el estudio identifica factores que pueden predecir el éxito académico y sugiere estrategias de intervención temprana para mejorar la retención estudiantil.

Los hallazgos del estudio revelan que HSGPA, puntajes del SAT y la evitación de la procrastinación (delay avoidance - DA) son los predictores más significativos del rendimiento académico en el primer año. Además, se encontró que los hábitos de estudio y actitudes influyen en el éxito académico, destacando la importancia de implementar estrategias para mitigar la procrastinación y mejorar la organización del tiempo de los estudiantes.

Estos resultados nos llevaron a considerar la importancia de variables individuales y contextuales en el aprendizaje, como el género y el programa académico, para entender cómo influyen en la persistencia de preconceptos erróneos. Dado que las diferencias en hábitos de estudio y estrategias de aprendizaje pueden estar relacionadas con la manera en que los estudiantes procesan y consolidan su conocimiento, resulta relevante analizar si estas variables afectan la forma en que los estudiantes estructuran sus modelos mentales sobre el calor y la temperatura.

A partir de estos hallazgos, se incorporó el análisis de género como una variable clave dentro de esta investigación doctoral, permitiendo explorar si existen diferencias significativas en la prevalencia y persistencia de conceptos erróneos entre estudiantes masculinos y femeninos. Esta inclusión enriquece el análisis y abre nuevas líneas de

investigación sobre la relación entre el género, los modelos mentales y la adquisición del conocimiento científico.

### **4.3 BRECHA DE GÉNERO EN MOTIVACIÓN, PROCRASTINACIÓN Y**

#### **DESEMPEÑO ACADÉMICO EN FÍSICA (Martínez-Huerta et al., 2024)**

El artículo "Exploring the Gender Gap: Motivation, Procrastination, Environment, and Academic Performance in an Introductory Physics Course in a Human-Centered Private University in Northeast Mexico—A Case Study" analiza las diferencias de género en motivación, procrastinación y desempeño académico en estudiantes de primer año de ingeniería inscritos en un curso de Física I. A diferencia de la mayoría de los estudios en la literatura, donde los hombres suelen mostrar mayor motivación y mejores calificaciones en física, este estudio reveló que las estudiantes mujeres obtuvieron mejores resultados académicos, mostraron mayor motivación intrínseca y extrínseca, y reportaron niveles más bajos de procrastinación.

Los hallazgos sugieren que este fenómeno puede estar influenciado por el contexto familiar y universitario en el que se desarrollan las estudiantes, así como por la existencia de espacios seguros e iniciativas de equidad de género dentro de la universidad. La correlación entre motivación intrínseca y desempeño académico también destaca la importancia de fortalecer el interés y la autodeterminación de las estudiantes en disciplinas STEM.

Estos resultados llevaron a considerar el análisis de género como un elemento fundamental en nuestra investigación sobre preconceptos erróneos en calor y temperatura. Dado que la motivación y los hábitos de estudio pueden influir en la forma en que los estudiantes procesan conceptos científicos, es relevante explorar si existen diferencias de género en la prevalencia y persistencia de preconceptos erróneos. Además, el estudio refuerza la importancia de comprender cómo las variables psicológicas y el entorno educativo impactan el aprendizaje, lo que resulta crucial para diseñar estrategias pedagógicas más inclusivas y equitativas.

A partir de estos hallazgos, nuestro trabajo doctoral incorpora el análisis de género y situación becaria como una variable clave para evaluar su influencia en los modelos mentales de los estudiantes y en su transición hacia una comprensión más científica de los conceptos térmicos. Esta perspectiva permite ampliar la discusión sobre equidad de género en la enseñanza de la física, contribuyendo al diseño de estrategias educativas que fomenten la participación de mujeres en STEM y reduzcan la brecha de género en el aprendizaje de ciencias.

#### **4.4 CREENCIAS PSEUDOCIENTIFICAS.**

El artículo " Assessment of Pseudoscientific Beliefs Among University Students in Northeastern Mexico." analiza la prevalencia de creencias pseudocientíficas en una muestra de 794 estudiantes universitarios pertenecientes a seis disciplinas académicas en una universidad privada del noreste de México. Utilizando la Pseudoscience Endorsement Scale (PES) y aplicando pruebas estadísticas como Kruskal–Wallis y Wilcoxon rank sum, el estudio identificó diferencias significativas en la adhesión a creencias pseudocientíficas tanto por género como por facultad académica.

Los resultados muestran que las mujeres presentaron puntuaciones más altas en creencias pseudocientíficas en comparación con los hombres ( $p < 0.001$ ). En cuanto a las disciplinas académicas, los estudiantes de Negocios y Arte, Arquitectura y Diseño exhibieron los niveles más altos de adhesión, mientras que los de Ingeniería y Tecnologías obtuvieron los puntajes más bajos ( $p < 0.001$ ).

Estos hallazgos subrayan la necesidad de intervenciones educativas específicas que aborden estas diferencias y fortalezcan el pensamiento crítico, especialmente en disciplinas no STEM. Además, el estudio se alinea con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4 de la ONU, al abogar por una educación inclusiva y equitativa que promueva el aprendizaje crítico y a lo largo de la vida.

En el contexto de esta tesis doctoral, estos resultados son clave para entender cómo las estructuras cognitivas y los modelos mentales de los estudiantes pueden influir en la persistencia de conceptos erróneos en física, particularmente en temas como calor y temperatura. Al igual que las creencias pseudocientíficas, estos preconceptos pueden derivarse de una comprensión fragmentada del conocimiento.

## **CAPÍTULO 5.**

### **MODELIZACIÓN CUÁNTICA DE CONCEPTOS ERRÓNEOS**

El estudio de los conceptos erróneos en la educación ha sido ampliamente abordado desde enfoques tradicionales basados en la teoría clásica de la probabilidad y modelos deterministas del aprendizaje. Sin embargo, estos enfoques suelen tratar el conocimiento de los estudiantes de manera simple: correcto o incorrecto, sin capturar la naturaleza dinámica y contextual del pensamiento humano.

En este capítulo, exploramos un enfoque alternativo e innovador basado en la mecánica cuántica, específicamente en la teoría de la probabilidad cuántica y la matriz de densidad, para modelar el proceso de aprendizaje y la coexistencia de conceptos erróneos. La cognición cuántica proporciona un marco para desarrollar modelos cognitivos utilizando los principios matemáticos de la teoría de probabilidad cuántica (Busemeyer, 2012; Yearsley, 2017), permitiendo una representación más precisa de la incertidumbre y las transiciones entre modelos mentales en el aprendizaje.

El aprendizaje se basa en la activación de modelos mentales, que son estructuras cognitivas utilizadas para interpretar y resolver problemas. Según Bao & Redish (2006), los estudiantes pueden emplear múltiples modelos mentales, incluso de manera inconsistente, dependiendo del contexto del problema planteado.

A diferencia de la visión clásica, donde se asume que un estudiante tiene una concepción fija de un fenómeno, la investigación en educación ha demostrado que los estudiantes pueden activar diferentes modelos mentales para problemas equivalentes, lo que indica que su conocimiento no es rígido. Los conceptos erróneos pueden coexistir con el conocimiento científico, creando un estado mixto en el que el estudiante oscila entre explicaciones correctas e incorrectas. La activación de un modelo depende del contexto, lo que sugiere que el conocimiento no es completamente estable, sino que evoluciona dinámicamente.

Esto nos lleva a plantear que el pensamiento de los estudiantes no es dicotómico, sino que puede representarse de manera probabilística, donde coexisten simultáneamente modelos mentales alternativos. Esta dinámica es análoga al principio de superposición en la mecánica cuántica, donde un sistema puede estar en una combinación de estados hasta que una medición determina uno en particular.

Por ejemplo, al tocar simultáneamente una cuchara de metal y una de madera en un día frío, los estudiantes pueden experimentar una sensación térmica diferente, lo que frecuentemente conduce a confundir la temperatura con la transferencia de calor. Aunque ambas cucharas estén a la misma temperatura, la mayor conductividad térmica del metal provoca una sensación de mayor frialdad, activando en el estudiante un modelo mental erróneo basado en la experiencia sensorial. Al mismo tiempo, el conocimiento formal aprendido en clase les permite reconocer que ambas cucharas deberían estar a la misma temperatura. Esta coexistencia de modelos contradictorios refleja un estado cognitivo mixto, donde ambos modelos se encuentran superpuestos y cuya activación depende del contexto.



Figura 1. Pensamiento de los estudiantes.

Este fenómeno es análogo a la superposición de estados en la mecánica cuántica, donde un sistema puede describirse como una combinación de estados posibles hasta que una medición colapsa la superposición hacia uno de ellos. Así, en la cognición estudiantil, el análisis mediante la matriz de densidad permite representar esta mezcla de modelos mentales y comprender cómo el contexto y la situación específica influyen en la selección del modelo aplicado. En la figura 1 ilustramos cómo los estudiantes pueden sostener simultáneamente

un modelo erróneo y un modelo científico, dependiendo del contexto en el que se enfrenten al problema.

En la mecánica cuántica, la matriz de densidad se utiliza para representar sistemas en los que coexisten múltiples estados posibles antes de ser observados. Aplicando este concepto al aprendizaje, podemos modelar los estados cognitivos de los estudiantes como una superposición de conceptos erróneos y correctos.

En esta tesis, adoptamos una interpretación de los modelos mentales de los estudiantes donde los estados cuánticos se manejan en términos de sus coherencias internas en lugar de tratarse simplemente como errores (Bao & Redish, 2006; Piten & Rakkapao, 2017; Redish, 1999; T. I. Smith, 2016). Esta perspectiva permite analizar cómo los estudiantes combinan y transitan entre diferentes modelos mentales en lugar de considerar sus respuestas como meros aciertos o fallos.

La matriz de densidad se expresa como:

$$\rho = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle\psi_{\alpha}| \quad (3)$$

donde  $\omega_{\alpha}$  representa la probabilidad de que el estudiante utilice el modelo mental  $|\psi_{\alpha}\rangle$  en un momento determinado.

En el estado puro se encuentra un solo modelo mental activo, lo cual sería una representación precisa de un estado cognitivo. El estado mixto representa la combinación probabilística de varios modelos mentales; indica ambigüedad o confusión, captura la coexistencia de múltiples modelos.

La representación matemática en la matriz de densidad que incluye todos los posibles estados y sus probabilidades permite análisis cuantitativo de los estados cognitivos de los individuos o grupos con precisión probabilística.

El uso de la matriz de densidad en la modelización de conceptos erróneos tiene varias ventajas, ya que captura la coexistencia de conceptos erróneos y correctos dentro del

pensamiento de un estudiante, mejorando la evaluación del aprendizaje, al revelar no solo si un estudiante tiene una respuesta correcta o incorrecta, sino también con qué probabilidad utiliza distintos modelos mentales, facilitando el diseño de intervenciones educativas más precisas, así identificar patrones en el uso de modelos mentales y diseñar estrategias específicas para promover la transición hacia modelos científicos correctos.

Desde una perspectiva cuántica, la elección de un modelo mental se asemeja al colapso de la función de onda en mecánica cuántica. Antes de responder una pregunta, el estudiante puede estar en un estado de superposición, en el que varios modelos mentales compiten por ser activados. La pregunta actúa como un "colapsador" del estado, determinando qué modelo se utiliza en la respuesta.

En contraste, en la teoría de probabilidad clásica, se supone que un sistema está en un estado definido en cualquier momento dado (Bruza et al., 2015). Esta diferencia clave es lo que permite que la modelización cuántica capture la incertidumbre inherente en la toma de decisiones cognitivas y el proceso de aprendizaje.

Este enfoque nos permite entender por qué los estudiantes pueden responder correctamente a unas preguntas y erróneamente a otras, a pesar de tratarse del mismo concepto. Y por ello, como los preconceptos erróneos persisten en el tiempo, debido a la coexistencia de múltiples modelos mentales.

La modelización cuántica de conceptos erróneos representa un cambio de paradigma en la evaluación del aprendizaje, al permitir una representación probabilística y dinámica del conocimiento de los estudiantes. A través del uso de la matriz de densidad, hemos demostrado que los estudiantes no operan exclusivamente con respuestas correctas o incorrectas, sino que pueden activar modelos mentales inconsistentes dependiendo del contexto del problema.

Este enfoque supera las limitaciones de los métodos tradicionales, al proporcionar herramientas más precisas para analizar cómo los estudiantes organizan su conocimiento y cómo evolucionan sus modelos mentales. En futuras investigaciones, este modelo podrá aplicarse a otras áreas del aprendizaje, contribuyendo al desarrollo de estrategias pedagógicas más efectivas, personalizadas e inclusivas.

## **CAPÍTULO 6.**

### **METODOLOGÍA**

Se aplicó el cuestionario Evaluación de Conceptos Térmicos (TCE) con el propósito de identificar si las respuestas de los estudiantes se alinean con el modelo 1 (asociado a la presencia de conceptos erróneos) o con el modelo 2 (correspondiente a una respuesta coherente con el conocimiento científico esperado). Esta clasificación nos permite analizar la distribución de conceptos erróneos dentro de la población estudiantil mediante un modelo de análisis formal. Se asignaron probabilidades a cada modelo: la probabilidad de que un estudiante respondiera utilizando el modelo 1 se representó mediante la variable  $\omega_1$ , mientras que la probabilidad de que su respuesta correspondiera al modelo 2 se denotó como  $\omega_2$ . Estos valores se interpretan como los pesos iniciales de la matriz de densidad, proporcionando un marco matemático para analizar la coexistencia de diferentes modelos mentales en el proceso de aprendizaje.

#### **6.1 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN**

Este estudio es esencial porque aborda la persistente presencia de conceptos erróneos en la educación en ciencias, un problema identificado como un obstáculo significativo para el aprendizaje efectivo. A pesar de las numerosas estrategias pedagógicas empleadas, estos conceptos erróneos continúan afectando la comprensión de los estudiantes sobre temas fundamentales como el calor y la temperatura. Al aplicar un modelo cuántico para analizar estos conceptos erróneos, esta investigación pretende llenar un vacío en la literatura al proporcionar una nueva perspectiva que podría mejorar la precisión en la identificación y corrección de estas ideas erróneas. Los resultados tienen el potencial de influir en la forma en que se enseñan y evalúan estos conceptos, beneficiando tanto a estudiantes como a educadores.

La elección de este tema surge de un interés profundo por entender cómo los estudiantes construyen y aplican sus conocimientos en física, y por qué ciertos conceptos erróneos son tan resistentes al cambio. Debido a la dificultad que tienen los estudiantes para comprender correctamente los conceptos de calor y temperatura, es de gran interés ver la posibilidad de aplicar principios cuánticos a problemas cognitivos en la educación, ofreciendo así una nueva herramienta para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en ciencias.

## 6.2 OBJETIVOS

- ❖ Analizar la existencia o no existencia de preconceptos erróneos sobre Calor y Temperatura en los estudiantes utilizando la evaluación de conceptos térmicos (TCE) desarrollado por Yeo y Zadnik.
- ❖ Medir la matriz de densidad propuesto por Lei Bao y Edward Redish de estados cognitivos.
- ❖ Explorar la influencia de variables demográficas y académicas, como género, programa de estudios y situación becaria, en la distribución y persistencia de los conceptos erróneos identificados.

Estos objetivos permitirán estructurar la tesis en torno al análisis de los conceptos erróneos desde una perspectiva innovadora, combinando fundamentos de la cognición cuántica con herramientas matemáticas avanzadas para mejorar la enseñanza de la física.

### 6.2.1 SELECCIÓN DE MUESTRA

El cuestionario fue aplicado a la muestra en la primavera de 2023, la cual estuvo conformada por 282 estudiantes, los cuales se describen en la tabla Tabla 1.

Los programas a los que pertenecen los estudiantes de la muestra: 43(15%) estudiantes de Arquitectura, Arte y Diseño (AAYD), 21 (7%) de Ciencias de la Salud (CS), 28 (10%) de Derecho y Ciencias Sociales (DYSC), 15 (5%) de Educación y Humanidades (EYH), 86 (30%) de Ingeniería y Tecnología (IYT) y 89 (32%) de Negocios (N). El género fue preguntado a los estudiantes, quienes se identificaron con el género Masculino (47%) o Femenino (53%). La situación becaria se divide en 2 categorías, donde “si” representa a los alumnos que están becados (65%) independientemente si su beca es completa o parcial, mientras el “no” representa a los estudiantes que no cuentan con beca estudiantil (35%).

<b>Programa</b>	<b>n</b>
Arquitectura, Arte y Diseño (AAYD)	43
Ciencias de la Salud (CS)	21
Derecho y Ciencias Sociales (DYSC)	28
Educación y Humanidades (EYH)	15
Ingeniería y Tecnología (IYT)	86
Negocios (N)	89
<b>Género</b>	<b>n</b>
Femenino	132
Masculino	150
<b>Becarios</b>	<b>n</b>
Si	182
No	100
<b>Total</b>	<b>282</b>

*Tabla 1 Participantes. Mostrados de acuerdo con las variables analizadas en el estudio  
(Programa, Género y Situación de Beca)*

Los estudiantes participaron voluntariamente y estaban bien informados sobre su papel en esta investigación. Durante todo el estudio, se mantuvo rigurosamente la confidencialidad de su identidad e información personal.

Si bien el tamaño de la muestra es correcto para los cálculos realizados en el estudio, se tuvo en cuenta el error sistemático potencialmente causado por el tamaño de la muestra, lo cual se puede observar en la ecuación (4).

## 6.2.2 INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Se aplicó el cuestionario Thermal Concept Evaluation (TCE) desarrollado por Yeo y Zadnik, el cual consta de 26 preguntas que permite analizar las ideas que tienen los estudiantes sobre el calor y la temperatura (Yeo & Zadnik, 2001). La Tabla 2 describe los conceptos erróneos alternativos estudiados en el cuestionario.

<b>Concepciones alternativas de calor</b>	<b>Preguntas</b>
El calor es una sustancia	10, 22
El calor no es energía	22
El calor y el frío son diferentes, más que opuestos extremos de un continuo	10,13,18,23,24
Calor y temperatura son lo mismo	15, 18
El calor es proporcional a la temperatura	7,11,15
El calor no es un concepto medible y cuantificable	7
<b>Concepciones alternativas de Temperatura</b>	<b>Preguntas</b>
La temperatura es la "intensidad" del calor	15
La piel o el tacto pueden determinar la temperatura	16
Las percepciones de calor y frío no están relacionadas con la transferencia de energía.	10,18,21,22
Cuando la temperatura en ebullición permanece constante, algo está mal.	5
El punto de ebullición es la temperatura máxima a la sustancia puede alcanzar	19
Un cuerpo frío no contiene calor	7,10,11,22,26
La temperatura de un objeto depende de su tamaño	1,9,14
No hay límite para la temperatura más baja	25
<b>Concepciones alternativas de transferencia de calor y cambio de temperatura</b>	<b>Preguntas</b>
El calentamiento siempre produce un aumento de temperatura	3, 4, 5

El calor sólo viaja hacia arriba.	20
El calor sube.	20
El calor y el frío fluyen como líquidos.	10, 13
Objetos de diferente temperatura que están en contacto entre sí o en contacto con aire a diferente temperatura, no necesariamente se acercan a la misma temperatura. (El equilibrio térmico no es un concepto).	1,2,3,6
El calor fluye más lentamente a través de los conductores haciendo se sienten calientes	25
La teoría cinética realmente no explica el calor transferir. (Las explicaciones se recitan, pero no se creen).	18,20,21
<b>Concepciones alternativas de "propiedades térmicas" de los materiales</b>	<b>Preguntas</b>
La temperatura es una propiedad de un material particular u objeto	9, 14, 16, 24
El metal tiene la capacidad de atraer, retener, intensificar o absorber calor y frío	9, 14, 16, 20
Los objetos que se calientan fácilmente no se enfrían fácilmente	25
Diferentes materiales retienen la misma cantidad de calor	11
El punto de ebullición del agua es 100°C (únicamente)	4,8,19
El hielo está a 0°C y/o no puede cambiar de temperatura	1
El agua no puede estar a 0°C	2, 11
El vapor supera los 100°C	6, 19
Materiales como la lana tienen la capacidad de calentar las cosas arriba.	17, 23
Algunos materiales son difíciles de calentar: son más resistente al calentamiento	26
Las burbujas significan hervir	
Las burbujas en el agua hirviendo contienen "aire", "oxígeno" o "nada"	12

*Tabla 2. Concepciones alternativas.*

Las respuestas correctas en este cuestionario reflejan la comprensión adecuada de los conceptos físicos enseñados en el aula, así como su correcta aplicación en situaciones cotidianas. Por esta razón, estas respuestas se asocian con el estado 2, ya que no evidencian la presencia de conceptos erróneos.

En contraste, las respuestas incorrectas, debido al diseño del instrumento, están vinculadas a conceptos erróneos alternativos, lo que indica la activación de modelos mentales no alineados con el conocimiento científico. Estas respuestas se representan en el estado 1, reflejando la persistencia de ideas intuitivas o malinterpretaciones conceptuales.

Además, el cuestionario incluyó preguntas adicionales relacionadas con carrera, género y estado de beca, con el propósito de ampliar el análisis y explorar posibles relaciones entre estas variables y la prevalencia de conceptos erróneos en la población estudiantil.

### 6.2.3 PRUEBAS ESTADÍSTICAS UTILIZADAS.

Para analizar los datos obtenidos a partir del cuestionario sobre conceptos térmicos y su asociación con diferentes variables demográficas, se empleó la Prueba de Kruskal-Wallis. Esta prueba no paramétrica se utilizó para determinar si existen diferencias significativas entre más de dos grupos independientes, respecto a las probabilidades  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , asociadas a los modelos mentales identificados mediante la matriz de densidad. Esta prueba es adecuada cuando no se puede asumir normalidad en la distribución de los datos. La ecuación del estadístico H se calcula como:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{k=1}^n n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2 \quad (11)$$

donde N: número total de observación,  $n_i$ : número de observaciones en el grupo i,  $\bar{R}_i$ : rango promedio del grupo i,  $\bar{R}$ : rango promedio total, k: número de grupos.

Para comparar dos grupos independientes (por ejemplo, estudiantes con y sin beca, o por género) respecto a sus puntuaciones de estado 1 y estado 2. Se puede utilizar la prueba de Mann-Whitney U (Wilcoxon rango-suma), la cual permite identificar si existen diferencias significativas entre ambos grupos sin necesidad de asumir distribuciones normales.

En este estudio, se utilizó el software estadístico R para aplicar las pruebas no paramétricas correspondientes. Particularmente, se empleó la función `kruskal.test()` tanto para comparar tres o más grupos (como en el análisis por programas académicos), como para

comparar dos grupos (por género y beca). Aunque la prueba de Kruskal-Wallis está diseñada originalmente para múltiples grupos, su aplicación a dos grupos es estadísticamente válida y equivale, en términos del valor-p, a la prueba de Mann-Whitney U (`wilcox.test()`), aunque entrega un estadístico diferente (H en lugar de U). Esta decisión se tomó para mantener la consistencia metodológica en el tratamiento de todas las variables categóricas y facilitar la interpretación de los resultados dentro del mismo marco analítico.

### 6.3 ANÁLISIS CUÁNTICO DE LOS DATOS

Para el análisis de los datos en este trabajo, identificamos los estados puros como la existencia o no existencia de conceptos erróneos, mientras que los estados mixtos representan situaciones en las que un estudiante puede conocer la definición formal del concepto, pero debido a factores como interpretación incorrecta de la información o confusión de contexto, es conducido a una respuesta guiada por conceptos erróneos. Por tanto, es crucial identificar y abordar estos casos para promover una comprensión más precisa y profunda de los conceptos científicos. Para calcular estos estados mixtos, que nos permiten obtener esta información, utilizamos el modelo descrito anteriormente por Lei Bao y Edward Redish.

Incorporando esta metáfora cuántica, se propone la integración de un instrumento adicional para mostrar el estatus del estudiante como puro o mixto: la matriz de densidad definida en el análisis del modelo (Redish, 1999). Este enfoque innovador implica la construcción de una matriz  $D$  para cada  $k$  del número total de estudiantes ( $N$ ), que resume la esencia de su situación educativa:

$$D_k = \begin{pmatrix} n_1 & \sqrt{n_1 n_2} \\ \sqrt{n_1 n_2} & n_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

En su forma actual, la matriz de densidad correspondiente a un estudiante individual abarca solo las puntuaciones del estudiante,  $n_1$  y  $n_2$ . Estos valores  $n_1$  y  $n_2$  coinciden con los pesos iniciales de la matriz de densidad, es decir, la probabilidad de que el estudiante

respondiera usando el modelo 1 que estaba representado en la variable  $\omega_1$  y la probabilidad de que el estudiante respondiera usando el modelo 2 en la variable  $\omega_2$ . Por lo general, estos simplemente se califican en función de los promedios de clase de lo correcto e incorrecto, respectivamente, lo que se traduce en si aparecen o no preconcepciones erróneas.

Sin embargo, este escenario cambia cuando se consolidan las matrices de densidad de todos los estudiantes dentro de una clase. La construcción de la matriz de densidad para una clase involucra la suma de las matrices de densidad pertenecientes a cada estudiante individual:

$$D = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_k \quad (13)$$

Los enfoques estadísticos convencionales que simplemente suman los puntajes de las clases efectivamente solo capturan la diagonal de la matriz de densidad, descartando así información valiosa sobre la combinación de modelos de estudiantes. La matriz de densidad del modelo de clase juega un papel vital en la captura y preservación de detalles estructurales esenciales sobre los modelos individuales de estudiantes dentro de una clase. A través del análisis de esta matriz, los educadores pueden obtener información sobre la distribución de los modelos de estudiantes y la coherencia de su utilización. La configuración de la matriz refleja varios escenarios que los estudiantes podrían demostrar al utilizar sus modelos, desde el uso consistente del mismo modelo hasta el empleo de diferentes modelos o experimentar estados de modelos mixtos. Estos escenarios incorporan características estadísticas del alumnado, distintas de la naturaleza probabilística de los estados del modelo de estudiante individual. Los elementos diagonales de la matriz de densidad del modelo de clase indican la proporción de respuestas asociadas con modelos específicos empleados por la clase, mientras que los elementos fuera de la diagonal representan la coherencia de los estudiantes individuales al utilizar sus modelos. Los elementos grandes fuera de la diagonal sugieren una baja consistencia o una variación significativa en la forma en que los estudiantes aplican sus modelos. (Bao & Redish, 2006).

Según diversos autores (Bao & Redish, 2006; Piten & Rakkapao, 2017; T. I. Smith, 2016), las metodologías tradicionales, como el análisis factorial, que retienen las respuestas individuales de los estudiantes dentro de una gran matriz de preguntas y respuestas, tienen como objetivo obtener información de los patrones en las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, su eficacia depende de la suposición de patrones estudiantiles consistentes. Por ejemplo, consideremos un escenario en el que se realiza una prueba con  $N$  estudiantes, la mitad de los cuales se adhieren consistentemente al modelo 1 y la otra mitad al modelo 2. En tales casos, el análisis factorial revelará dos factores distintos. Sin embargo, si todos los estudiantes de la clase usan ambos modelos por igual (50% del tiempo cada uno), el análisis factorial no identificará ningún factor fuerte. Este método supone inherentemente la coherencia de los estudiantes, lo que lleva a una pérdida de información sobre las combinaciones de modelos de los estudiantes. En tales casos, la investigación cualitativa puede complementar el enfoque al revelar modelos comunes, permitiendo así comprender en qué medida los estudiantes emplean modelos mixtos, utilizando la matriz de respuesta de los estudiantes como un recurso valioso.

Conocer la matriz de densidad de un sistema cuántico-cognitivo, sin necesidad de calcular su evolución temporal, proporciona información clave sobre el estado actual del sistema, lo cual es especialmente útil en contextos como el análisis del aprendizaje y la detección de conceptos erróneos.

La matriz de densidad encapsula toda la información estadística disponible sobre el sistema: no solo permite identificar la probabilidad de encontrar al sistema en un estado determinado (elementos diagonales), sino también evaluar la coherencia entre estados (elementos fuera de la diagonal), lo que puede interpretarse como el grado de ambigüedad o mezcla cognitiva en la toma de decisiones o respuestas del estudiante.

Esto brinda grandes ventajas, ya que permite describir tanto estados puros como mixtos, ofreciendo un marco más realista para modelar sistemas educativos, donde los estudiantes rara vez se encuentran en un estado de comprensión total o desconocimiento absoluto. Posibilita analizar la distribución de probabilidades de modelos mentales

coexistentes, permitiendo identificar qué tan probable es que un estudiante active un modelo erróneo o uno correcto en un contexto dado.

Conocer esta información sirve como base para diseñar intervenciones personalizadas, al identificar con mayor precisión el nivel de confusión o transición conceptual en el que se encuentra un estudiante. En este sentido, el análisis de la matriz de densidad permite un diagnóstico educativo inmediato y detallado, sin necesidad de modelar dinámicamente el proceso de aprendizaje a lo largo del tiempo. Esta capacidad de "fotografiar" el estado conceptual del estudiante en un momento dado, la convierte en una herramienta poderosa para la investigación educativa y el desarrollo de estrategias pedagógicas basadas en evidencia.

## CAPÍTULO 7.

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 7.1 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

La Tabla 3 muestra las medias obtenidas por los estudiantes en el estado 1 y estado 2, que en nuestro modelo estaría relacionado con el peso de cada uno de los estados cognitivos. Donde  $\omega_1$  representa el número promedio de preguntas respondidas con conceptos alternativos y  $\omega_2$  representa el número promedio de preguntas respondidas correctamente en el cuestionario TCE.

<b>Programa</b>	<b><math>\omega_1</math></b>	<b><math>\omega_2</math></b>
Arquitectura, Arte y Diseño (AAYD)	0.72	0.28
Ciencias de la Salud (CS)	0.68	0.32
Derecho y Ciencias Sociales (DYSC)	0.77	0.23
Educación y Humanidades (EYH)	0.72	0.28
Ingeniería y Tecnología (IYT)	0.71	0.29
Negocios (N)	0.73	0.27
<b>Género</b>	<b><math>\omega_1</math></b>	<b><math>\omega_2</math></b>
Femenino	0.73	0.27
Masculino	0.71	0.29
<b>Becario</b>	<b><math>\omega_1</math></b>	<b><math>\omega_2</math></b>

Si	0.71	0.29
No	0.72	0.28
<b>Total</b>	<b>0.72</b>	<b>0.28</b>

*Tabla 3. Probabilidades de estados puros.*

Observamos un claro predominio del estado 1 sobre el estado 2, lo que sugiere una mayor prevalencia de conceptos erróneos entre los estudiantes en comparación con una comprensión correcta de los conceptos de calor y temperatura. Se observa que los valores del estado 1 oscilan entre 0,68 y 0,77, siendo el valor más bajo para el programa CS y el más alto para el programa DYSC. Por otro lado, los valores del estado 2 representan el complemento de estos resultados. Es importante señalar que estos valores representan sólo los promedios obtenidos de los cuestionarios, excluyendo los valores de estados mixtos en este punto.

Realizando la Prueba de Kruskal-Wallis para cada una de las variables analizadas en el estudio (programa, beca y género), podemos observar en la Tabla 4 que sólo para el programa, el p-valor es menor a 0.05. Por lo tanto, podemos concluir que sólo para esa variable hay diferencia significativa entre los grupos.

<b>Variable</b>	$\chi^2$	<b>DF</b>	<b>p</b>
Programa	11.764	5	0.03817*
Género	3.4603	1	0.06286
Becario	0.0001161	1	0.9914

*Tabla 4. Prueba Kruskal-Wallis (\*p<0.05)*

## 7.2 ANÁLISIS COMPARATIVO

En los siguientes apartados se examinarán en detalle los resultados obtenidos en cada una de las categorías analizadas: Programa, género y beca.

### 7.2.1 ANÁLISIS POR PROGRAMA

En el análisis por programa podemos ver en la tabla 5, que los estudiantes que obtuvieron mayor puntaje en el estado 2 son los estudiantes de CS con un promedio de  $0.32 \pm 0.12$ , seguidos por IYT ( $0.29 \pm 0.11$ ), AAYD ( $0.28 \pm 0.09$ ), EYH ( $0.28 \pm 0.07$ ), N ( $0.27 \pm 0.08$ ) mientras que quienes obtuvieron menor ponderación son los estudiantes DYCS con un promedio de  $0.23 \pm 0,09$ .

<b>Programa</b>	<b><i>n</i></b>	<b><math>\omega_2</math></b>	<b><i>SD</i></b>
Arquitectura, Arte y Diseño (AAYD)	43	0.28	0.09
Ciencias de la Salud (CS)	21	0.32	0.12
Derecho y Ciencias Sociales (DYSC)	28	0.23	0.09
Educación y Humanidades (EYH)	15	0.28	0.07
Ingeniería y Tecnología (IYT)	86	0.29	0.11
Negocios (N)	89	0.27	0.08

Tabla 5. Análisis por programa de la no existencia de preconceptos erróneos, media y desviación estándar

La figura 2 representa esta información, donde podemos ver como los estudiantes de DYSC se muestran por debajo del promedio de los demás programas.

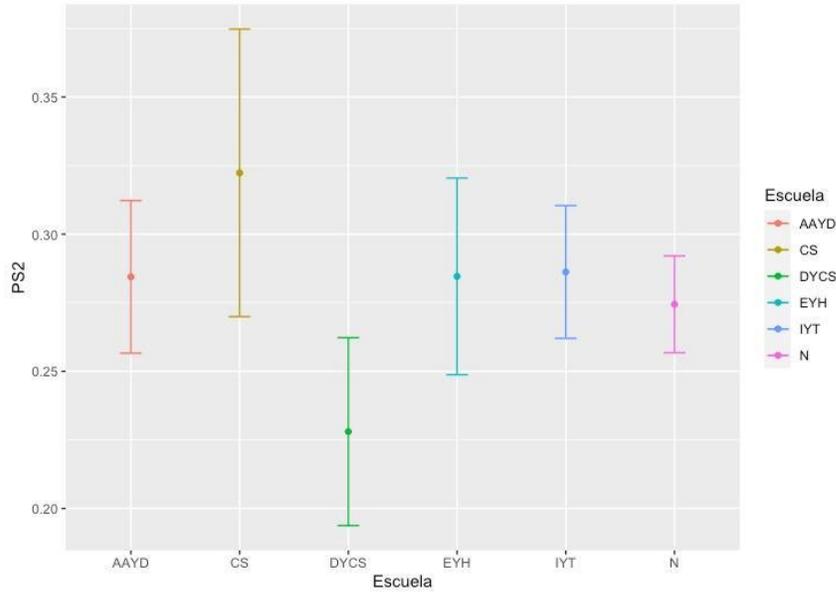


Figura 2. Análisis por programa.

El análisis del programa permite concluir que sólo los estudiantes de DYCS exhiben una muestra diferente a los demás programas. Por lo tanto, si se tiene una población con estudiantes que tienen características similares a este programa, se deben realizar los ajustes pertinentes a los valores obtenidos en el estudio.

### 7.2.2 ANÁLISIS POR GÉNERO

El análisis por género en la tabla 6 nos muestra que los hombres son más analíticos que las mujeres, ya que su puntaje promedio en el estado 2 es mayor (F:  $0.27 \pm 0.09$ ; M:  $0.29 \pm 0.11$ ) aunque no existe diferencia significativa entre ambos grupos.

Género	<i>n</i>	$\omega_2$	<i>SD</i>
Femenino	132	0.27	0.09
Masculino	150	0.29	0.11

Tabla 6. Análisis por género de la no existencia de preconceptos erróneos, media y desviación estándar

En la figura 3 tenemos el apoyo visual que nos permite ver que la diferencia entre las medias no es significativa.

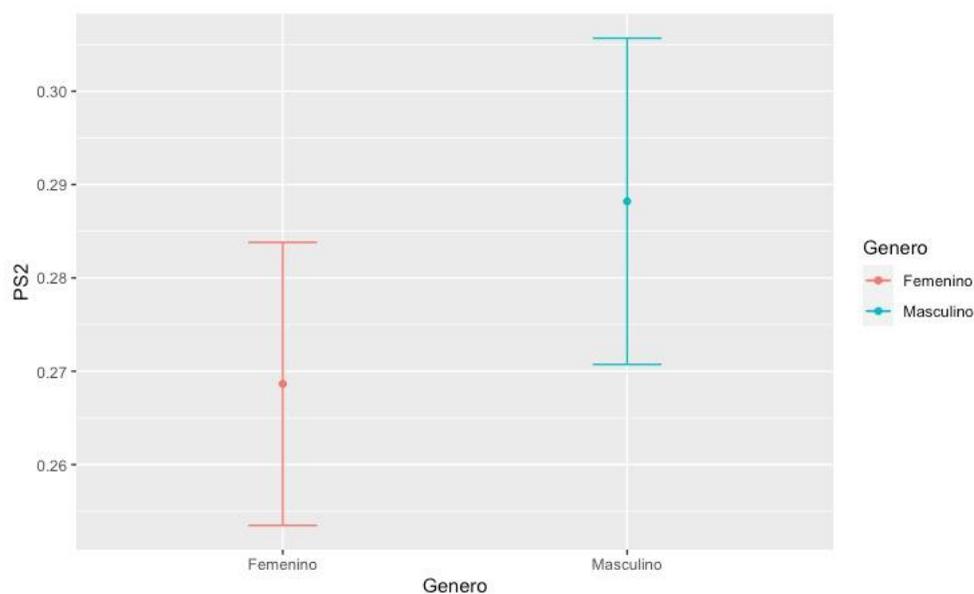


Figura 3. Análisis por género.

En el análisis de género podemos observar que no existen diferencias significativas dentro de la muestra compuesta por un 47% mujeres y un 53% hombres. Por tanto, asumimos que independientemente del género, el modelo propuesto es aplicable.

### 7.2.3 ANÁLISIS POR SITUACIÓN BECARIA

Cuando se toman en cuenta las becas, la tabla 7 muestra que las medias son idénticas en ambos escenarios, indicando que no existen diferencias estadísticamente significativas entre estudiantes con y sin becas, lo que podemos complementar visualmente con la figura 4.

Becario	$n$	$\omega_2$	$SD$
Si	182	0.28	0.10
No	100	0.28	0.09

Tabla 7. Análisis por situación becaria de la no existencia de preconceptos erróneos, media y desviación estándar

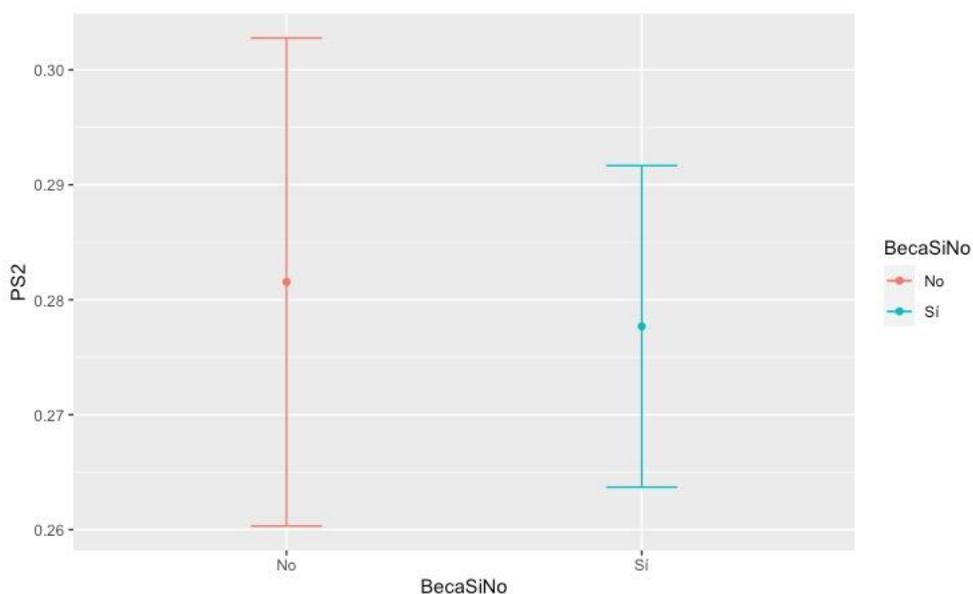


Figura 4. Análisis por situación becaria.

#### 7.2.4 CORRELACIÓN DE LAS VARIABLES.

Para explorar la relación entre las variables cualitativas consideradas en el estudio, se utilizaron pruebas no paramétricas adecuadas a la naturaleza de los datos. En el caso de la relación entre Situación Becaria y Género, ambas variables son dicotómicas, por lo que se aplicó el coeficiente de correlación de Spearman, dado que, aunque las variables son categóricas, al tener solo dos niveles permiten la aplicación de este coeficiente como aproximación a la correlación. El resultado obtenido fue 0.1754, lo que indica una relación baja y no significativa, como se presenta en la Tabla 8.

Variable	Correlación
Situación Becaria vs Género	0.1754

Tabla 8. Correlación entre situación becaria y género.

Para analizar la relación entre Género y Programa Académico, así como entre Situación Becaria y Programa Académico, se utilizó la prueba de Kruskal-Wallis, debido a que la variable Programa Académico es categórica sin un orden natural y con más de dos categorías. Esta prueba permitió evaluar si existen diferencias significativas en la distribución de Género y Beca entre los diferentes programas académicos. Los resultados mostraron diferencias significativas en ambos casos ( $p = 2.06e-06$  y  $p = 0.02503$ , respectivamente), lo que sugiere que tanto la distribución de género como la situación becaria varían entre programas académicos.

Variable	p
Género vs Programa	0.00000206*
Becario vs Programa	0.02503

Tabla 9. Kruskal Wallis

### 7.2.5 CONSISTENCIA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Para comparar nuestros resultados con los obtenidos en otros estudios, decidimos analizar estudios que aplicaron el TCE en poblaciones similares, así como estudios que aplicaron cuestionarios con el mismo propósito, como el Force Concept Inventory (FCI) y el Cognitive Reflection Test (CRT).

La CRT se emplea ampliamente para diferenciar la inclinación de los individuos hacia dos modos de pensar (Frederick, 2005), se utiliza especialmente para evaluar el estilo cognitivo intuitivo-analítico (Wood et al., 2016). Para esta comparación, interpretamos el modelo intuitivo como aquel modelo que utiliza preconceptos en el estado 1 y el modelo

analítico como el correspondiente al estado 2, esto nos permite comparar los resultados obtenidos al aplicar la prueba TCE con los obtenidos en la prueba CRT, verificando así si los pesos son específicos de la prueba o consistentes con los hallazgos de la literatura.

El Inventario de Conceptos de Fuerza (FCI) mide la comprensión de los estudiantes de los principios fundamentales de la física newtoniana usando un lenguaje simple y preguntas que incluyen respuestas de sentido común que distraen (Hestenes et al., 1992). Este cuestionario sirve para identificar y clasificar conceptos erróneos, por lo que fue utilizado dentro de los artículos en comparación para medir el uso del estado 1 y el estado 2 en estos conceptos.

En nuestra comparación de artículos, buscamos aquellos que presentaban una población similar a la empleada en nuestro estudio. Esta elección se hizo para garantizar la comparabilidad dentro del mismo contexto, conservando estudios que, como el nuestro, involucraban a estudiantes universitarios o un grupo equivalente. Además, consideramos estudios que utilizaron instrumentos diferentes a los nuestros, pero compartieron un enfoque comparable con respecto al estado 1 y al estado 2. Esto nos permitió crear una tabla comparativa, la tabla 10 que abarca trabajos que emplean TCE, CRT o FCI. Para todas las pruebas,  $\omega_2$  se define como el número de preguntas correctas, dividido por el número total de preguntas. Por otro lado,  $\omega_1$  se refiere a preguntas que fueron respondidas en base a concepciones alternativas, divididas por el número total de preguntas.

<b>Autor</b>	<b>Variable</b>	<b>n</b>	<b><math>\omega_1</math></b>	<b><math>\omega_2</math></b>
Nuestro estudio (Chavarría-Garza et al., 2024)	TCE	282	0.72	0.28
(Luera et al., 2006)	TCE	47	0.65	0.35
(Başer, 2006)	TCE	42	0.68	0.32
	TCE	40	0.7	0.3
(Frederick, 2005)*	CRT	1774	0.65	0.35

(Toplak et al., 2011)	CRT	346	0.77	0.23
(Bialek & Pennycook, 2018)	CRT	1573	0.89	0.11
(Welsh et al., 2013)	CRT	58	0.59	0.41
(Bao & Redish, 2006)	FCI	778	0.73	0.27
(T. I. Smith, 2016)	FCI	109	0.78	0.22

Tabla 10. Resultados de cuestionarios similares como TCE, CRT y FCI ( $\omega_1$  representa la existencia de preconceptos, mientras que  $\omega_2$  la no existencia de estos)

Independientemente de los estudios comparativos, es evidente que el Sistema 1 exhibe dominancia y tiene un mayor peso, lo que se alinea con nuestros resultados. Existe un claro predominio de conceptos erróneos, ya que la probabilidad  $\omega_1$  (59-89%) suele ser mayor que  $\omega_2$  (11-41%).

### 7.2.6 FUENTES DE VARIABILIDAD

Consideramos la variabilidad estocástica que surge del uso de múltiples instrumentos y calculamos el promedio de los errores obtenidos por cada instrumento. En este cálculo, asumimos que todos los instrumentos tenían el mismo peso. Este error sistemático lo mostramos en la siguiente Tabla 11. Error sistemático con estos valores:

Instrumento	Media
CRT	0.2528
FCI	0.2460
TCE	0.3134
Error sistemático	0.0674

Tabla 11. Error sistemático

En el contexto del TCE, calculamos la desviación estándar, suponiendo que, al utilizar el mismo instrumento con poblaciones similares, estos valores exhiben un comportamiento estocástico.

Considerando estas fuentes de variabilidad, podemos definir nuestro rango de error como el valor medio, teniendo en cuenta la variabilidad estocástica resultante de la comparación de varios estudios utilizando el mismo instrumento, y un error sistemático adicional que surge de la comparación de diferentes instrumentos.

Esto nos lleva al siguiente cálculo:

$$\omega_2 \pm Err_{estocastico} \pm Err_{sistemático} = 0.28 \pm 0.0351 \pm 0.0674 \quad (4)$$

En la figura 5, podemos ver las medias de cada uno de los estudios, Las líneas continuas representan las medias obtenidas por el estado 2 en cada cuestionario (Azul: TCE, Rojo: CRT, Verde: FCI). Las barras de error que se muestran representan el doble del error estándar; cuando no fue mencionado en el artículo citado, se estimó utilizando proporciones con el tamaño de la muestra. El intervalo gris representa la región de error centrada en la media como la ecuación (3) (incluye error sistemático y estocástico).

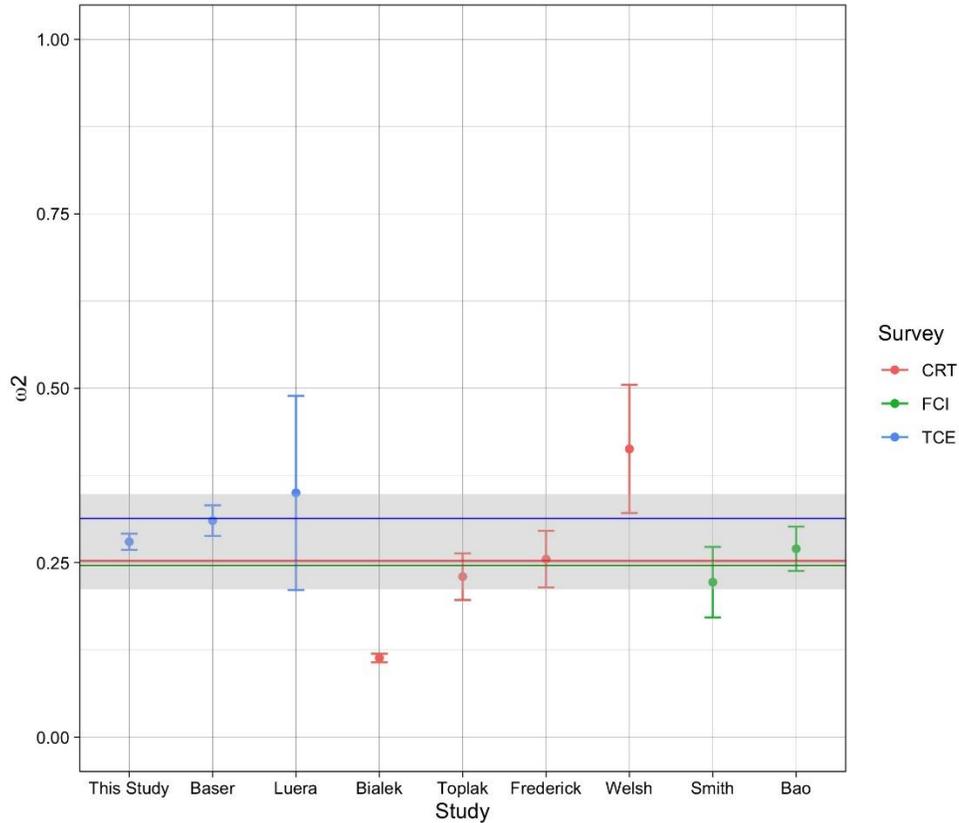


Figura 5. Fuentes de variabilidad.

Al comparar los 3 instrumentos podemos observar que el CRT es hipersensible generando una alta variabilidad estocástica en las puntuaciones. Incluso con esta variabilidad, el dominio del estado 1 sobre el estado 2 sigue siendo visible en los 3 cuestionarios.

Por tanto, en comparación con otros estudios, podemos suponer que los pesos obtenidos en nuestro estudio, siendo consistentes con los comparados en la literatura, pueden establecerse como estas probabilidades constantes necesarias para la matriz de densidad. Los resultados obtenidos en esta sección demuestran la consistencia de los valores, independientemente de las variables que fueron analizadas. En la siguiente subsección, describiremos la matriz de densidad en función de los valores presentados.

### 7.2.7 MATRIZ DE DENSIDAD

En la matriz de densidad, los pesos o probabilidades a priori  $\omega_i$  están determinados por consideraciones externas al sistema estudiado, ajenas al mismo; su origen puede ser cuántico o clásico. Generalmente se supone que estas probabilidades  $\omega_i$  son constantes, por lo que la evolución temporal de la matriz de densidad está determinada por la de los estados que contiene, es decir, por las reglas de la mecánica cuántica (De la Peña, 2014). Con los resultados obtenidos en este apartado se replicaron los dos modelos descritos en el apartado 3, lo que permite proporcionar la matriz de densidad según el modelo canónico y el modelo clásico.

### 7.2.8 ENSAMBLE CANÓNICO

Pudimos observar que no había diferencia significativa relacionada con los factores, por lo que esto nos llevaría a definir nuestra matriz de densidad de la siguiente manera:

$$\rho = 0.72 |\psi_1\rangle + 0.28 |\psi_2\rangle \quad (5)$$

donde los estados del sistema los podemos definir mediante:  $|\psi_1\rangle$  es el vector que representa el primer estado cuántico (sistema 1) y  $|\psi_2\rangle$  es el vector que representa el segundo estado cuántico.

Y su representación matricial está dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 \\ 0 & 0.28 \end{pmatrix} \quad (6)$$

La matriz de densidad que se muestra en la ecuación (6) (3) muestra en su diagonal los valores de los estados puros del sistema. Como podemos observar, este modelo sólo nos proporciona información sobre las probabilidades de existencia de conceptos erróneos en los estudiantes, pero no nos permite analizar las probabilidades de estados mixtos.

Y para el análisis del modelo, como describimos en la ecuación (12), se construye una matriz de densidad por estudiante, la cual se convierte en la matriz de densidad de una clase al sumarlos y dividirlos por el número total de estudiantes como en la ecuación 7:

$$\rho = \frac{1}{282} \begin{pmatrix} 203.31 & 122.59 \\ 122.59 & 78.69 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Simplificando la matriz de densidad de estados, obtenemos:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.43 \\ 0.43 & 0.28 \end{pmatrix} \quad (8)$$

En este caso, la matriz de densidad en la ecuación (8) muestra las probabilidades de los estados puros a lo largo de su diagonal principal, pero va más allá al abarcar información adicional sobre el sistema al incluir probabilidades de estados mixtos.

Para reforzar la interpretación visual de los estados cognitivos modelados mediante la matriz de densidad, en la figura 6 se incorporó un mapa de calor que representa gráficamente la magnitud de cada elemento de la matriz, siguiendo principios análogos a las representaciones utilizadas en física cuántica. En este mapa, los elementos diagonales reflejan las probabilidades de que los estudiantes empleen exclusivamente el modelo 1 (conceptos erróneos) o el modelo 2 (comprensión correcta). Estas áreas aparecen destacadas por su intensidad, indicando qué modelo predomina en la población. Por otra parte, los elementos fuera de la diagonal capturan la coherencia entre modelos, representando la presencia de estados mixtos, donde las respuestas dependen del contexto, mostrando la coexistencia de modelos mentales alternativos.

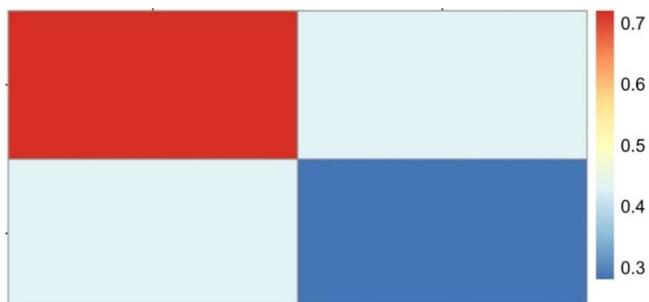


Figura 6. Mapa de Calor

Esta representación resulta especialmente relevante, ya que proporciona una visión clara y matizada de la distribución de estados cognitivos, permitiendo no solo identificar la proporción de cada modelo, sino también la zona de transición y confusión entre ambos. Así, el mapa de calor se convierte en una herramienta poderosa para visualizar la naturaleza probabilística y dinámica del pensamiento estudiantil, similar a cómo la física cuántica emplea la matriz de densidad para representar sistemas en superposición de estados y estudiar su evolución sin necesidad de medirlos directamente.

### **7.2.9 ANÁLISIS FACTORIAL**

El análisis factorial es una técnica comúnmente utilizada en la investigación educativa y psicológica para extraer información de una matriz de correlación construida a partir de las puntuaciones de los estudiantes en diferentes elementos de una prueba. Los factores derivados de esta matriz revelan cómo se relacionan los diferentes elementos de la prueba en términos de coherencia entre las respuestas de los estudiantes. El objetivo del análisis factorial no es explicar las razones subyacentes de estas relaciones, sino más bien identificar patrones y asociaciones entre los elementos de la prueba basándose en las respuestas de los estudiantes.

En la investigación educativa, los investigadores suelen formular múltiples preguntas equivalentes sobre el mismo concepto, pero con diferentes contextos en los instrumentos de evaluación. Sin embargo, la influencia del contexto puede generar variación en la forma en que los estudiantes responden estas preguntas equivalentes, lo que resulta en una baja consistencia en las puntuaciones de los estudiantes dentro de grupos de preguntas consideradas equivalentes por los expertos. La interpretación de estos hallazgos depende de los modelos de aprendizaje de los estudiantes que emplean los investigadores. Cuando los estudiantes tienen modelos de conocimiento mixtos, la baja consistencia entre las puntuaciones de los ítems equivalentes se debe principalmente a la influencia del contexto en su conocimiento (Bao & Redish, 2006). En la Tabla 12. Análisis factorial podemos observar los casos: si el estudiante responde alineado con un modelo de pensamiento específico, la

matriz de correlación se obtendría en la primera forma, y en el caso en que el estudiante presente uno o más pensamientos modelos, ocurriría el segundo caso.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>
<i>Matriz de correlación</i>	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -0.33 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 1 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 1 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & -0.33 & 1 \end{pmatrix}$
<i>Eigenvalores</i>	$\sigma_1^2 = 4, \sigma_{2,3,4}^2 = 0$	$\sigma_{1,2,3,4}^2 \neq 0$

Tabla 12. Análisis factorial

Siguiendo la idea de Bao (Bao & Redish, 2006), procedemos a seleccionar un conjunto de preguntas del Test de Conceptos Erróneos (TCE), específicamente las preguntas P9, P14, P16 y P20, que contienen entre sus opciones de respuesta el mismo concepto erróneo: " El metal tiene la capacidad de atraer, retener, intensificar o absorber calor y frío". Si asumimos que los estudiantes tienen esta idea errónea profundamente arraigada en su pensamiento, entonces, al examinar la matriz de correlación, observaríamos una estructura similar al caso 1, donde solo se identifica un patrón consistente (un valor propio significativo) debido a la uniformidad en las respuestas. Por otro lado, si consideramos que los estudiantes tienen un pensamiento de estado mixto respecto a este concepto erróneo, es decir, responden de manera variable dependiendo del contexto de la pregunta, la matriz de correlación reflejaría una estructura similar al caso 2. En este escenario en la tabla 13 al calcular los valores propios, encontraríamos más de un valor significativo, lo que indica la presencia de múltiples patrones consistentes en las respuestas.

	<i>P9</i>	<i>P14</i>	<i>P16</i>	<i>P20</i>
$\begin{pmatrix}$	1.00	0.09	-0.03	-0.06
$\begin{pmatrix}$	0.09	1.00	-0.02	0.04
$\begin{pmatrix}$	-0.03	-0.02	1.00	-0.03
$\begin{pmatrix}$	-0.06	0.04	-0.03	1.00
<i>Eigenvalores:</i> $\sigma_1^2 = 1.1025367, \sigma_2^2 = 1.0496245, \sigma_3^2 = 0.9806959, \sigma_4^2 = 0.8671430$				

Tabla 13. Eigenvalores

Estos resultados dejan la evidencia de la presencia de más de dos factores, lo que sugiere que el pensamiento estudiantil en torno a los conceptos de calor y temperatura no

puede reducirse únicamente a "sabe" o "no sabe". Este hallazgo es consistente con el enfoque de modelos mentales mixtos, donde los estudiantes pueden utilizar diferentes esquemas de razonamiento según el contexto, mostrando combinaciones de ideas correctas, erróneas o transicionales.

Este comportamiento complejo queda reflejado en la matriz de densidad, la cual, gracias a su capacidad de capturar estados mixtos y coherencias internas, permite representar y analizar estas situaciones más allá del enfoque tradicional correcto-incorrecto, reconociendo la diversidad y dinamismo inherente a los procesos cognitivos humanos.

### **7.3 IMPLICACIONES EDUCATIVAS**

La presencia de estados mentales mixtos entre los estudiantes, como sugiere este análisis, subraya la importancia de emplear técnicas de modelado y análisis que tengan en cuenta esta variabilidad, como el modelado de estados mixtos, para una interpretación más precisa de los resultados del TCE y una comprensión más profunda de cómo los estudiantes manejan y aplican conceptos erróneos en diferentes contextos de aprendizaje.

Además, el reconocimiento de estos estados mentales mixtos resalta la necesidad de diseñar estrategias pedagógicas que no solo corrijan conceptos erróneos específicos, sino que también aborden la coexistencia de ideas correctas e incorrectas en la mente de los estudiantes. Esto podría incluir el desarrollo de intervenciones educativas más personalizadas y adaptativas que guíen a los estudiantes a través de sus procesos de razonamiento, promoviendo una transición más fluida hacia una comprensión conceptual más robusta y científicamente precisa. De esta manera, los educadores pueden identificar y mitigar de manera más efectiva los conceptos erróneos antes de que se arraiguen profundamente, mejorando así la calidad y eficacia del aprendizaje en ciencias térmicas.

La matriz de densidad encapsula toda la información estadística disponible sobre el estado del sistema en un momento dado. Esto permite describir no solo estados puros, sino

también estados mixtos, los cuales son comunes en situaciones reales donde el conocimiento del sistema es incompleto o se encuentra influenciado por su entorno.

En sistemas cognitivos, como en el caso de los modelos mentales de estudiantes, esta representación permite identificar con qué probabilidad un estudiante se encuentra en un estado conceptual determinado, sin necesidad de reconstruir todo su proceso de razonamiento paso a paso. Esto resulta particularmente útil en contextos educativos, donde el interés radica en conocer el estado actual del entendimiento del estudiante para diseñar intervenciones pedagógicas adecuadas.

La matriz de densidad proporciona una descripción completa y compacta del estado cuántico o cognitivo del sistema, permitiendo el análisis de propiedades fundamentales como la coherencia, el grado de mezcla y las expectativas de mediciones, sin requerir el cálculo explícito de su evolución temporal. Esta capacidad de diagnóstico inmediato la convierte en una herramienta fundamental en física cuántica, así como en aplicaciones interdisciplinarias como la cognición y el aprendizaje.

## CAPÍTULO 8.

### CONCLUSIONES

Los preconceptos erróneos suelen predominar sobre la comprensión científica correcta de los fenómenos físicos, de acuerdo con Pathare y Pradhan (2010) esto puede deberse a múltiples factores, entre ellos: la formación de modelos mentales intuitivos antes de la instrucción formal, el uso ambiguo del lenguaje cotidiano en contraposición con la terminología científica, la sobre generalización de conceptos, la memorización mecánica en sistemas educativos enfocados en la evaluación y la falta de una visión general estructurada por parte de los docentes. Como resultado, los estudiantes desarrollan modelos mentales que, aunque les permiten operar en la vida cotidiana, entran en conflicto con las explicaciones científicas rigurosas.

En el estudio presentado, el conocimiento de la matriz de densidad permitió identificar con precisión: La dominancia del estado 1 (modelo erróneo) sobre el estado 2 (modelo correcto), la existencia de estados mixtos (donde la probabilidad de activar uno u otro modelo dependía del contexto), la confusión conceptual en los estudiantes incluso cuando no seleccionaban respuestas completamente erróneas. El análisis basado en matriz de densidad permitió ir más allá de los enfoques clásicos y obtener una descripción más rica y realista de los procesos cognitivos implicados en la comprensión del calor y la temperatura.

El predominio de estos modelos erróneos, representado en nuestro estudio como el estado 1, puede explicarse a través de la teoría de sistemas cognitivos de Kahneman (Kahneman, 2011). Según esta teoría, el pensamiento intuitivo (Sistema 1) es rápido y automático, lo que facilita la activación de preconceptos erróneos sin la necesidad de un esfuerzo cognitivo significativo. En contraste, el pensamiento analítico (Sistema 2) requiere mayor esfuerzo y recursos mentales para evaluar y corregir estas concepciones, lo que explica por qué el estado 2 (comprensión científica correcta) tiende a ser menos frecuente en ausencia de intervenciones educativas efectivas (Palmer, 2020).

Si bien en la literatura encontramos estudios donde el estado 2 muestra un predominio mayor (Wood et al., 2016; Frederick, 2005), es importante considerar que las poblaciones estudiadas en dichos trabajos no son directamente comparables con la nuestra. Los estudios que reportan un mayor porcentaje de respuestas científicamente correctas suelen involucrar poblaciones con características académicas distintas o metodologías de enseñanza diferentes, lo que resalta la importancia del contexto en la prevalencia de conceptos erróneos (Kacovsky, 2015; Madu & Orji, 2015; Piten & Rakkapao, 2017).

Un aspecto clave de este estudio es la inclusión de estados mixtos, una característica fundamental del modelo cuántico aplicado a la cognición. En modelos tradicionales, el análisis de respuestas se reduce a una clasificación dicotómica (correcto o incorrecto), ignorando las inconsistencias en el razonamiento de los estudiantes. Sin embargo, la realidad cognitiva es mucho más compleja, ya que el pensamiento humano rara vez es binario. Como argumentan Bao y Redish (2006), la activación de modelos mentales depende en gran medida del contexto en el que se presente la información, lo que significa que un mismo estudiante puede responder correctamente en una situación y cometer errores en otra, a pesar de tratarse del mismo concepto.

El modelo basado en la matriz de densidad nos ha permitido cuantificar la probabilidad de transición entre estados de conocimiento, lo que nos proporciona información adicional sobre el grado de confusión de los estudiantes. En lugar de asumir que un estudiante que responde incorrectamente no tiene ningún conocimiento del tema, este enfoque permite medir en qué medida su razonamiento oscila entre el modelo intuitivo (estado 1) y el modelo formal (estado 2). En este estudio, encontramos que el estado 1 dominó en un 70% de los casos, mientras que el estado 2 solo se presentó en el 30% restante. No obstante, los valores obtenidos para los estados mixtos sugieren que existe una transición gradual entre ambos estados, lo que confirma que el proceso de aprendizaje no es abrupto, sino un espectro continuo influenciado por el contexto del problema y la experiencia previa del estudiante.

Otro hallazgo relevante es que no se encontraron diferencias significativas en la existencia de preconceptos erróneos en función del género o la situación becaria, lo que sugiere que estas variables no juegan un papel determinante en la internalización de

conceptos científicos. Sin embargo, sí se identificaron diferencias significativas entre los programas académicos, lo que implica que la formación disciplinaria influye en la forma en que los estudiantes conceptualizan los fenómenos físicos.

Dada la importancia de estos resultados, proponemos como líneas futuras de investigación el desarrollo de intervenciones pedagógicas diseñadas específicamente para reducir la prevalencia de conceptos erróneos, guiando a los estudiantes en un proceso cognitivo que les permita identificar y aplicar correctamente los principios científicos sin depender del contexto. Una estrategia viable sería la aplicación del TCE como pretest y posttest, con el objetivo de medir cuantitativamente la evolución de los estados cognitivos tras la implementación de metodologías didácticas basadas en este enfoque. Este análisis permitiría evaluar la eficacia de distintas estrategias educativas y proporcionar información valiosa para mejorar la enseñanza de las ciencias.

En conclusión, este estudio aporta un enfoque innovador para analizar la cognición en la educación en ciencias, integrando herramientas matemáticas de la mecánica cuántica para capturar la complejidad de los procesos de aprendizaje. Al reconocer que la cognición humana no es estática ni dicotómica, sino altamente contextual y dinámica, se abre la posibilidad de diseñar estrategias de enseñanza más efectivas y adaptativas. Este modelo no solo nos permite entender mejor la persistencia de los conceptos erróneos, sino que también proporciona un marco más preciso para su identificación y corrección, contribuyendo así al avance en la enseñanza y aprendizaje de la física.

## **8.1 LIMITACIONES DEL ESTUDIO**

Los valores obtenidos para los pesos del estado 1 y del estado 2 son aplicables a situaciones similares a las del presente estudio. Sin embargo, en otros entornos, será necesario ajustar estos valores para adaptarse a la población específica. Estos resultados nos proporcionan una comprensión del comportamiento cognitivo de los estudiantes antes de cualquier intervención diseñada para ayudarlos a interpretar conceptos de manera analítica. En estudios futuros, se buscará diseñar una intervención que permita a los estudiantes interpretar conceptos físicos desde la perspectiva del estado 2, evitando caer en conceptos

erróneos guiados por la intuición. Esto podría resultar en una contribución más significativa al campo de la educación.

Aunque los conceptos erróneos a menudo están guiados por ideas heurísticas, no podemos determinar sus orígenes cognitivos precisos con los datos actuales. Será necesaria una intervención más controlada para definir los procesos mentales que conducen a la existencia de estos conceptos erróneos. Además, es necesario realizar más investigaciones para determinar las probabilidades de estados mixtos de manera más precisa.

El estudio se realizó con estudiantes universitarios de primer año. Para obtener conclusiones más generales, es necesario realizar estudios adicionales que incluyan más variables controladas y que consideren diferentes edades y orígenes de los estudiantes.

El modelo presentado no es la versión definitiva del modelo cuántico; más bien, es un estado inicial que sirve como base para cálculos futuros de matrices que involucren la probabilidad de estados mixtos. La precisión y robustez de estos cálculos pueden mejorarse en futuras iteraciones. Por lo tanto, es esencial reconocer que las limitaciones del modelo actual radican en su naturaleza transicional, y se anticipan mayores avances y ajustes para una comprensión más completa en etapas posteriores de la investigación en este tema.

## **8.2 RECOMENDACIONES PARA FUTUROS ESTUDIOS**

Para futuros trabajos, sería valioso extender el análisis cuántico de conceptos erróneos a otras áreas de la ciencia, con el fin de determinar si los patrones observados en el estudio de calor y temperatura también se aplican a otros temas. Asimismo, sería recomendable realizar estudios con muestras más amplias y diversas, que incluyan estudiantes de diferentes niveles educativos, contextos culturales y antecedentes académicos. Esto permitiría generalizar los hallazgos y adaptar los modelos cuánticos a diferentes poblaciones estudiantiles.

Además, sería útil llevar a cabo estudios longitudinales que observen cómo evolucionan los conceptos erróneos a lo largo del tiempo, tanto antes como después de intervenciones educativas. Esto ayudaría a comprender mejor la persistencia y el cambio en los estados cognitivos.

Una dirección prometedora para investigaciones futuras es el análisis de intervenciones pedagógicas mediante la evolución temporal de la matriz de densidad, utilizando la ecuación de von Neumann:  $i \hbar \frac{d\rho}{dt} = [\hat{H}, \rho]$ , esta ecuación, análoga a la de Schrödinger pero aplicada a sistemas representados por matrices de densidad, permite modelar cómo cambia el estado cuántico (o cognitivo) de un sistema bajo la acción de un operador Hamiltoniano  $\hat{H}$ , que en este caso puede interpretarse como una intervención educativa formalizada. En el contexto de la educación en física, una intervención diseñada para reducir conceptos erróneos podría conceptualizarse como una transformación del estado cognitivo del estudiante. La evolución temporal de  $\rho$  permitiría entonces observar no solo la transición entre estados de modelo erróneo a modelo correcto, sino también el grado de coherencia y mezcla durante el proceso. Esto abriría la posibilidad de comparar estados pre y post intervención mediante el mismo instrumento (por ejemplo, el cuestionario TCE), y modelar cuantitativamente el efecto de la instrucción. Además, se podrían evaluar distintas estrategias didácticas según la dirección y la rapidez con la que modifican los estados cognitivos hacia una mayor consistencia con el conocimiento científico aceptado. Este enfoque integraría la evaluación educativa con la dinámica de sistemas cuánticos mixtos, aportando un marco matemático robusto para entender no solo qué aprenden los estudiantes, sino cómo evoluciona su comprensión bajo diferentes condiciones de enseñanza.

De manera similar, se podrían diseñar e implementar intervenciones pedagógicas que incorporen el uso de tecnologías avanzadas, como simulaciones y entornos de realidad virtual, específicamente dirigidas a reducir la incidencia de conceptos erróneos. Estas intervenciones deberían incluir el desarrollo de materiales didácticos y estrategias de enseñanza que aborden los estados mentales mixtos y utilicen la matriz de densidad para medir su efectividad.

También se recomienda realizar estudios que comparen directamente la efectividad de los modelos clásicos y cuánticos en la identificación y corrección de conceptos erróneos. Este enfoque podría incluir análisis cuantitativos y cualitativos para determinar cuál modelo ofrece una comprensión más profunda y resultados más eficaces.

Finalmente, investigar cómo la presencia de estados mentales mixtos influye en el rendimiento académico de los estudiantes y su capacidad para aplicar conocimientos científicos en diferentes contextos ayudaría a identificar qué estrategias pedagógicas son más efectivas para diferentes perfiles cognitivos. Esto contribuiría a expandir el alcance y la aplicabilidad de los modelos cuánticos en la educación, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones que busquen mejorar el aprendizaje de conceptos científicos complejos.

## PUBLICACIONES DERIVADAS DEL TRABAJO DE

### TESIS DOCTORAL

❖ Chavarría-Garza, W.X.; Santos-Guevara, A.; Morones-Ibarra, J.R.; Aquines-Gutiérrez, O. Assessment of Multiple Intelligences in First-Year Engineering Students in Northeast Mexico. *Sustainability* 2022, 14, 4631. <https://doi.org/10.3390/su14084631>

❖ Aquines Gutiérrez, O.; Hernández Taylor, D.M.; Santos-Guevara, A.; Chavarría-Garza, W.X.; Martínez-Huerta, H.; Galloway, R.K. How the Entry Profiles and Early Study Habits Are Related to First-Year Academic Performance in Engineering Programs. *Sustainability* 2022, 14, 15400. <https://doi.org/10.3390/su142215400>

❖ Martínez-Huerta, H.; Chavarría-Garza, W.X.; Aquines-Gutiérrez, O.; Santos-Guevara, A. Exploring the Gender Gap: Motivation, Procrastination, Environment, and Academic Performance in an Introductory Physics Course in a Human-Centered Private University in Northeast Mexico—A Case Study. *Educ. Sci.* 2024, 14, 186. <https://doi.org/10.3390/educsci14020186>

❖ Chavarría-Garza, W.X.; Aquines-Gutiérrez, O.; Santos-Guevara, A.; Martínez-Huerta, H.; Morones-Ibarra, J.R.; Saucedo, J.R. Measuring the Density Matrix of Quantum-Modeled Cognitive States. *Quantum Rep.* 2024, 6, 156-171. <https://doi.org/10.3390/quantum6020013>

❖ Azuela, J.A.; Chavarría-Garza, W.X.; Aquines-Gutiérrez, O.; Santos-Guevara, A.; Martínez-Huerta, H. Assessment of Pseudoscientific Beliefs Among University Students in Northeastern Mexico. *Educ. Sci.* 2025, 15, 483. <https://doi.org/10.3390/educsci15040483>

## REFERENCIAS

- Aerts, D., & Arguëlles, J. A. (2022). Human Perception as a Phenomenon of Quantization. *Entropy*, 24(9), 1207. <https://doi.org/10.3390/e24091207>
- Alodjants, A., Zacharenko, P., Tsarev, D., Avdyushina, A., Nikitina, M., Khrennikov, A., & Boukhanovsky, A. (2023). Random Lasers as Social Processes Simulators. *Entropy*, 25(12), 1601. <https://doi.org/10.3390/e25121601>
- Alwan, A. A. (2011). Misconception of heat and temperature among physics students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 12, 600–614. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.02.074>
- Aquines Gutiérrez, O., Hernández Taylor, D. M., Santos-Guevara, A., Chavarría-Garza, W. X., Martínez-Huerta, H., & Galloway, R. K. (2022). How the Entry Profiles and Early Study Habits Are Related to First-Year Academic Performance in Engineering Programs. *Sustainability (Switzerland)*, 14(22). <https://doi.org/10.3390/su142215400>
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. NY.
- Bagarello, F., Gargano, F., & Oliveri, F. (2023). *Quantum Tools for Macroscopic Systems*. Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-30280-0>
- Bao, L., & Redish, E. F. (2006). Model analysis: Representing and assessing the dynamics of student learning. *Physical Review Special Topics—Physics Education Research*, 2(1), 010103.
- Başer, M. (2006). Fostering conceptual change by cognitive conflict based instruction on students' understanding of heat and temperature concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2(2), 96–114. <https://doi.org/10.12973/ejmste/75458>
- Bialek, M., & Pennycook, G. (2018). The cognitive reflection test is robust to multiple exposures. *Behavior Research Methods*, 50(5), 1953–1959. <https://doi.org/10.3758/s13428-017-0963-x>
- Binder, T., Sandmann, A., Sures, B., Friege, G., Theyssen, H., & Schmiemann, P. (2019). Assessing prior knowledge types as predictors of academic achievement in the

- introductory phase of biology and physics study programmes using logistic regression. *International Journal of STEM Education*, 6(1).  
<https://doi.org/10.1186/s40594-019-0189-9>
- Brown, D. E. (1989). Students' concept of force: The importance of understanding Newton's third law. *Physics Education*, 24(6), 353–358.  
<https://doi.org/10.1088/0031-9120/24/6/007>
- Bruza, P. D., Wang, Z., & Busemeyer, J. R. (2015). Quantum cognition: A new theoretical approach to psychology. In *Trends in Cognitive Sciences* (Vol. 19, Issue 7, pp. 383–393). Elsevier Ltd. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2015.05.001>
- Busemeyer, J. (2012). *Quantum Models of Cognition and Decision*. Cambridge University Press.
- Chavarría-Garza, W. X., Aquines-Gutiérrez, O., Santos-Guevara, A., Martínez-Huerta, H., Morones-Ibarra, J. R., & Saucedo, J. R. (2024). Measuring the Density Matrix of Quantum-Modeled Cognitive States. *Quantum Reports*, 6(2), 156–171.  
<https://doi.org/10.3390/quantum6020013>
- Chavarría-Garza, W. X., Santos-Guevara, A., Morones-Ibarra, J. R., & Aquines-Gutiérrez, O. (2022). Assessment of Multiple Intelligences in First-Year Engineering Students in Northeast Mexico. *Sustainability*, 14(8), 4631.  
<https://doi.org/10.3390/su14084631>
- Clement, J., Brown, D. E., & Zietsman, A. (1989). Not all preconceptions are misconceptions: Finding 'anchoring conceptions' for grounding instruction on students' intuitions. *International Journal of Science Education*, 11(5), 554–565.  
<https://doi.org/10.1080/0950069890110507>
- De la Peña, L. (2014). *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica.
- Deli, E. K. (2023). What Is Psychological Spin? A Thermodynamic Framework for Emotions and Social Behavior. *Psych*, 5(4), 1224–1240.  
<https://doi.org/10.3390/psych5040081>
- diSessa, A. A. (1993). Toward an Epistemology of Physics. *Cognition and Instruction*, 10(2–3), 105–225. <https://doi.org/10.1080/07370008.1985.9649008>
- Dong, A., Jong, M. S. Y., & King, R. B. (2020). How Does Prior Knowledge Influence Learning Engagement? The Mediating Roles of Cognitive Load and Help-Seeking. *Frontiers in Psychology*, 11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.591203>

- Driver, R., & Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*, 5(1), 61–84. <https://doi.org/10.1080/03057267808559857>
- Eggen, P. O., Persson, J., Jacobsen, E. E., & Hafskjold, B. (2017). Development of an inventory for alternative conception among students in chemistry. *LUMAT*, 5(1), 1–11. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.5.1.115>
- Erickson, G. L. (1979). Children's conceptions of heat and temperature. *Science Education*, 63(2), 221–230. <https://doi.org/10.1002/sce.3730630210>
- Fitzallen, N., Wright, S., Watson, J., & Duncan, B. (2016). Year 3 Students' Conceptions of Heat Transfer. *Australian Association for Research in Education*.
- Foroushani, S. (2019). Misconceptions in engineering thermodynamics: A review. In *International Journal of Mechanical Engineering Education* (Vol. 47, Issue 3, pp. 195–209). SAGE Publications Inc. <https://doi.org/10.1177/0306419018754396>
- Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. In *Journal of Economic Perspectives* (Vol. 19, Issue 4, pp. 25–42). <https://doi.org/10.1257/089533005775196732>
- Greca, I. M., & Moreira, M. A. (2002). Mental, Physical, and Mathematical Models in the Teaching and Learning of Physics. *Science Education*, 86(1), 106–121. <https://doi.org/10.1002/sce.10013>
- Guevara Hidalgo, E. (2007). Quantum Econophysics. *AAAI Spring Symposium - Technical Report*, 158–163.
- Gurel, D. K., Eryilmaz, A., & McDermott, L. C. (2015). A review and comparison of diagnostic instruments to identify students' misconceptions in science. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(5), 989–1008. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1369a>
- Helm, H. (1980). Misconceptions in physics amongst South African students. *Physics Education*, 15(2), 92–105. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/15/2/308>
- Hestenes, D., Wells, M., & Swackhamer, G. (1992). Force concept inventory. *The Physics Teacher*, 30(3), 141–158. <https://doi.org/10.1119/1.2343497>
- Kacovsky, P. (2015). GRAMMAR SCHOOL STUDENTS' MISCONCEPTIONS CONCERNING THERMAL PHENOMENA. *Journal of Baltic Science Education*, 14(2), 194–206. <https://doi.org/10.33225/jbse/15.14.194>

- Khrennikov, A., & Haven, E. (2023). A Brief Overview of the Quantum-Like Formalism in Social Science. In *New Economic Windows: Vol. Part F1452* (pp. 3–9). Springer-Verlag Italia s.r.l. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-38833-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-38833-0_1)
- Klammer, J. (1998). *An Overview of Techniques for Identifying, Acknowledging and Overcoming Alternate Conceptions in Physics Education*.
- Kizilcik, H. Ş., Aygün, M., Şahin, E., Önder-Çelikkanll, N., Türk, O., Taşkın, T., & Güneş, B. (2021). Possible misconceptions about solid friction. *Physical Review Physics Education Research*, 17(2). <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.023107>
- Longfield, J. (2009). Discrepant teaching events: Using an inquiry stance to address students' misconceptions. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education*, 21(2), 266.
- Luera, G. R., Otto, C. A., & Zitzewitz, P. W. (2006). Use of the Thermal Concept Evaluation to Focus Instruction. *The Physics Teacher*, 44(3), 162–166. <https://doi.org/10.1119/1.2173324>
- Madu, B. C., & Orji, E. (2015). Effects of Cognitive Conflict Instructional Strategy on Students' Conceptual Change in Temperature and Heat. *SAGE Open*, 5(3). <https://doi.org/10.1177/2158244015594662>
- Martínez-Huerta, H., Chavarría-Garza, W. X., Aquines-Gutiérrez, O., & Santos-Guevara, A. (2024). Exploring the Gender Gap: Motivation, Procrastination, Environment, and Academic Performance in an Introductory Physics Course in a Human-Centered Private University in Northeast Mexico—A Case Study. *Education Sciences*, 14(2). <https://doi.org/10.3390/educsci14020186>
- McCloskey, M., Caramazza, A., & Green, B. (1980). Curvilinear motion in the absence of external forces: Naive beliefs about the motion of objects. *Science*, 210(4474), 1139–1141.
- McDermott, L. C. (1995). How we teach and how students learn. *Thermodynamics and Statistical Physics: Teaching Modern Physics: Proceedings of the 4th IUPAP Teaching Modern Physics Conference Held in Badajoz, Spain, July 1992*, 199.
- Mohanty, P. K. (2006). Generic features of the wealth distribution in ideal-gas-like markets. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 74(1). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.011117>

- Osborne, J. F., Black, P., & Meadows, J. (1993). Young children's (7-11) ideas about light and their development. *International Journal of Science Education*, 15(1), 83–93. <https://doi.org/10.1080/0950069930150107>
- Palmer, T. (2020). Human creativity and consciousness: Unintended consequences of the brain's extraordinary energy efficiency? *Entropy*, 22(3). <https://doi.org/10.3390/e22030281>
- Pathare, S. R., & Pradhan, H. C. (2010). Students' misconceptions about heat transfer mechanisms and elementary kinetic theory. *Physics Education*, 45(6), 629–634. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/45/6/008>
- Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge: An essay on the relations between organic regulations and cognitive processes*.
- Piten, S., & Rakkapao, S. (2017). Evaluation of high school Cambodian students' comprehension of the projectile trajectory using the model analysis technique. *Proceedings of the Physics Education Research Conference, Cincinnati, OH, USA*, 26–27.
- Pothos, E. M., Waddup, O. J., Kouassi, P., & Yearsley, J. M. (2021). What is rational and irrational in human decision making. *Quantum Reports*, 3(1), 242–252. <https://doi.org/10.3390/quantum3010014>
- Redish, E. F. (1999). *Diagnosing Student Problems Using the Results and Methods of Physics Education Research*.
- Roeder, L., Hoyte, P., van der Meer, J., Fell, L., Johnston, P., Kerr, G., & Bruza, P. (2023). A Quantum Model of Trust Calibration in Human–AI Interactions. *Entropy*, 25(9), 1362. <https://doi.org/10.3390/e25091362>
- Savion, L. (2009). Clinging to Discredited Beliefs: The Larger Cognitive Story. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, 9(1), 81–92.
- Saxon, D. (1968). *Elementos de mecánica Cuántica*.
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115–163. [https://doi.org/10.1207/s15327809jls0302\\_1](https://doi.org/10.1207/s15327809jls0302_1)
- Smith, T. I. (2016). Representing uncertainty on model analysis plots. *Physical Review Physics Education Research*, 12(2). <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.023102>

- Toplak, M. E., West, R. F., & Stanovich, K. E. (2011). The Cognitive Reflection Test as a predictor of performance on heuristics-and-biases tasks. *Memory and Cognition*, 39(7), 1275–1289. <https://doi.org/10.3758/s13421-011-0104-1>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (Vol. 86). Harvard university press.
- Wandersee, J. H., Mintzes, J. J., & Novak, J. D. (1994). Research on alternative conceptions in science. *Handbook of Research on Science Teaching and Learning*, 177, 210.
- Welsh, M., Burns, N., & Delfabbro, P. (2013). The cognitive reflection test: How much more than numerical ability? *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 35(35).
- Wood, A. K., Galloway, R. K., & Hardy, J. (2016). Can dual processing theory explain physics students' performance on the Force Concept Inventory? *Physical Review Physics Education Research*, 12(2).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.023101>
- Yearsley, J. M. (2017). Advanced tools and concepts for quantum cognition: A tutorial. *Journal of Mathematical Psychology*, 78, 24–39.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmp.2016.07.005>
- Yearsley, J. M., & Busemeyer, J. R. (2016). Quantum cognition and decision theories: A tutorial. *Journal of Mathematical Psychology*, 74, 99–116.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmp.2015.11.005>
- Yeo, S., & Zadnik, M. (2001). Introductory thermal concept evaluation: assessing students' understanding. *The Physics Teacher*, 39(8), 496–504.  
<https://doi.org/10.1119/1.1424603>
- Yi, S., Lu, M., & Busemeyer, J. (2022). Application of Quantum Cognition to Judgments for Medical Decisions. *Quantum Reports*, 4(2), 193–200.  
<https://doi.org/10.3390/quantum4020013>