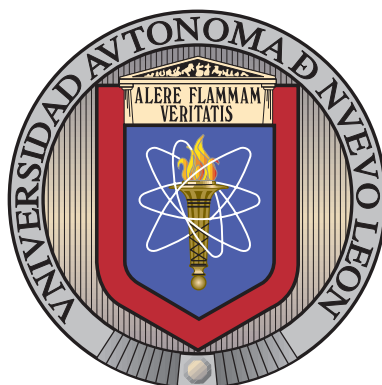


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



EQUILIBRIO CON VARIACIONES CONJETURADAS
CONSISTENTES EN UN MODELO DE OLIGOPOLIO
MIXTO CON INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO
PARA LA REDUCCIÓN DE COSTOS Y
PRIVATIZACIÓN

POR

ELIZABETH GUADALUPE RAMÍREZ ARANDA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2025

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



EQUILIBRIO CON VARIACIONES CONJETURADAS
CONSISTENTES EN UN MODELO DE OLIGOPOLIO
MIXTO CON INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO
PARA LA REDUCCIÓN DE COSTOS Y
PRIVATIZACIÓN

POR

ELIZABETH GUADALUPE RAMÍREZ ARANDA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2025

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Equilibrio con variaciones conjeturadas consistentes en un modelo de oligopolio mixto con investigación y desarrollo para la reducción de costos y privatización”, realizada por la alumna Elizabeth Guadalupe Ramírez Aranda, con número de matrícula 1851587, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dr. José Guadalupe Flores Muñiz
Asesor

Dra. Nataliya Kalashnykova
Revisora

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga
Revisor

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Coordinador del programa de Ciencias con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Junio 2025

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	VI
1. Introducción	1
2. Equilibrio con variaciones conjeturadas en un mercado de oligopolio	4
2.1. Especificación del modelo	4
2.2. Oligopolio mixto	7
2.2.1. Equilibrio de los volúmenes de producción de las firmas	7
2.2.2. Equilibrio de los niveles de investigación y desarrollo	10
2.2.3. Subsidio óptimo	11
2.3. Oligopolio privado	12
2.3.1. Equilibrio de los volúmenes de producción de las firmas	12
2.3.2. Equilibrio de los niveles de investigación y desarrollo	14
2.3.3. Subsidio óptimo	15
3. Efecto de la privatización de la firma pública	16
4. Conclusiones y Trabajo a Futuro	26
5. Apéndice	28
5.1. Demostración del Teorema 1	28
5.2. Demostración del Teorema 2	30

5.3. Demostración de la Proposición 1	32
5.4. Demostración del Teorema 3	32
5.5. Demostración de la Proposición 2	41
5.6. Demostración del Teorema 4	42
5.7. Demostración de la Proposición 3	45
5.8. Demostración del Teorema 5	46
5.9. Demostración del Teorema 6	47
5.10. Demostración de la Proposición 4	48
5.11. Demostración del Teorema 7	49
5.12. Demostración de la Proposición 5	51
5.13. Demostración del Teorema 8	51
5.14. Demostración de la Proposición 6	56
Referencias	57

AGRADECIMIENTOS

Esto no hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia, en especial de mi mamá, mi papá y mi hermano, gracias por estar conmigo a lo largo de mi vida, por apoyarme en cada decisión que he tomado y por siempre alentarme a seguir adelante, gracias a ellos estoy cumpliendo mis sueños y sin su ayuda, esto no hubiera sido posible, muchísimas gracias.

A mis mascotas: gasparina, cucha, negrito y rutila, quienes también son una parte importante de mi vida, gracias por estar conmigo y ser mis compañeros de vida.

Gracias Raúl, por estar conmigo por un poquito más de 7 años, por ser mi compañero de aventuras y por siempre alentarme a seguir adelante, por motivarme a superarme cada día y por siempre echarme porras para no rendirme, muchas gracias.

*A mis amigos de secundaria, preparatoria, universidad y posgrado, quienes me han acompañado a lo largo de mi vida, ustedes también han sido una parte importante de este logro, así que: *inserta tu nombre aquí*, muchas gracias por estar conmigo, por brindarme tu apoyo, ha sido increíble vernos crecer y lograr nuestras metas. Pero sobre todo, muchas gracias a mis partners in crime: Lucy y Jaramillo, por siempre darme ánimos para seguir adelante y hacer esto más divertido.*

Gracias al Dr. José Guadalupe Flores Muñoz, por aceptar ser mi asesor de tesis, por su dedicación, tiempo y por siempre estar dispuesto a recibirme cada vez que tenía alguna pregunta o duda. Ha sido un gran maestro, muchas gracias por compartir conmigo sus conocimientos, espero seguir haciéndolo.

Así mismo, también agradezco al CONAHCYT ahora SECIHTI por el apoyo económico que recibí a lo largo de mis estudios de maestría, muchas gracias.

A todos los que creyeron en mí, muchas gracias.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Un mercado es aquel en el que se ponen en venta distintos productos, los cuales los consumidores pueden adquirir mediante una transacción entre el vendedor o productor (que es quien ofrece el producto) y el mismo consumidor.

En este tipo de mercados se presentan monopolios, en los cuales sólo existe una única empresa que ofrece un producto, es decir, dicha empresa no tiene competencia. Pero también tenemos los casos en los cuales hay más empresas que ofrecen un mismo producto, provocando que haya competencia entre ellas, a esto se le llama oligopolio, en donde dichas empresas tienen la capacidad de poder influir en los precios y la producción del mercado. Por otro lado, también en el mercado se presentan los oligopolios mixtos, los cuales consisten en la competencia que existe entre las empresas privadas y una o más empresas públicas. Donde, las empresas privadas son propiedad de los individuos, las cuales tienen como objetivo maximizar sus ganancias, mientras que las empresas públicas son propiedad del gobierno o del estado, las cuales por lo general consisten en maximizar el bienestar social.

El interés que hay en los oligopolios mixtos es alto debido a la gran importancia en la economía de Europa, Canadá y Japón. Por lo general en este tipos de mercados de oligopolio mixto se suelen analizar dos estructuras de mercado: un oligopolio mixto y un oligopolio privado, para entender si es conveniente privatizar a dichas empresas públicas. Por ejemplo, anteriormente en México existía sólo una empresa llamada PEMEX la cual es una empresa pública del estado, esta empresa ofrecía el servicio de gasolina y por mucho tiempo, esta empresa fue un monopolio, sin embargo, años más tarde se unieron más empresas al mercado que ofrecían a los consumidores éste mismo servicio, haciendo que se creara competencia entre estas empresas.

Este tipo de modelos suelen abordarse utilizando la conjetura de Cournot (véase Gil-Moltó et al., 2018), la cual considera que cada uno de los productores optimiza su función objetivo, suponiendo que los otros productores mantienen sus estrategias sin cambios (ésta es la misma definición del equilibrio de Nash). Bajo este supuesto, las empresas eligen las

cantidades de producción con las cuales van a actuar contra sus rivales en el mercado, sin embargo, sabemos que en la vida real no es así, ya que si un oponente o rival hace algún cambio en sus estrategias, lo más lógico sería hacer algo al respecto, entonces, para tomar en cuenta que cuando un productor hace algún cambio en su estrategia y el resto de los productores quieren responder a ese cambio cambiando también sus propias estrategias, utilizamos el concepto de la **Conjetura Variacional**, el cual fue introducido por Bowley, 1924; Frisch, 1933. Esta idea fue desarrollada más adelante por Bulavsky and Kalashnikov (1994, 1995) utilizando un coeficiente que representa la influencia que tiene un productor con respecto al precio, la cual se representa mediante los coeficientes de influencia, en donde si dicho coeficiente de influencia es 1 corresponde a la Conjetura de Cournot si es que se conjetura con respecto a las cantidades de producción de los productores, sin embargo, si el coeficiente de influencia es 0 corresponde al caso de la Conjetura de Competencia Perfecta. Al aplicar éste concepto notamos que los productores reciben una ganancia neta mayor, mientras que para los consumidores el precio del mercado disminuye por lo cual se ven beneficiados los productores como los consumidores (véase Kalashnikov et al., 2011).

En este trabajo extendimos el modelo de Gil-Moltó et al. (2018) haciendo uso del concepto de la conjetura variacional y comparamos estos resultados con los se obtuvieron en el trabajo antes mencionado.

Además dentro de este modelo estudiamos el uso del subsidio a la investigación y desarrollo (R&D) el cual lo otorga una empresa pública para motivar a las empresas a realizar R&D para bajar los costos de producción, por lo cual pueden bajar el precio del mercado para los consumidores (véase Leahy and Neary, 1997). Así mismo analizamos el efecto de la privatización de la empresa pública comparando los resultados de un oligopolio mixto con un oligopolio privado para entender las consecuencias de la privatización de dicha empresa pública (véase Kato and Tomaru, 2007; Matsumura and Tomaru, 2013). En el trabajo de Gil-Moltó et al. (2011) a diferencia del nuestro, se consideran sólo dos empresas, es decir consideran un mercado de duopolio mixto, en el cual de igual forma se hace uso del subsidio a la R&D, donde además analizan los efectos que tiene la privatización de la empresa pública, comparando de igual forma un duopolio mixto con uno privado utilizando la conjetura de Cournot.

El resto de nuestro trabajo se conforma por el capítulo 2 en donde abordamos lo siguiente: en la sección 2.1 se establecen las especificaciones que se están tomando para éste modelo del oligopolio mixto. En la sección 2.2 estudiamos un oligopolio mixto en donde compiten de forma simultanea varias firmas privadas y solamente una firma pública, las cuales compiten por niveles, en el nivel 1: las firmas escogen sus volúmenes de producción, mientras que en el nivel 2: las firmas escogen sus niveles de R&D y en el nivel 3: la empresa pública decide el subsidio que les va a dar a las firmas. En la sección 2.3 consideramos que

la firma pública fue privatizada, por lo cual únicamente contamos con firmas privadas, en donde de igual forma que en el oligopolio mixto, dichas firmas compiten por los mismos tres niveles.

En el capítulo 3 analizamos los efectos que tiene la privatización de la firma pública analizando los resultados obtenidos con el oligopolio mixto y el oligopolio privado, realizando también la comparación cuando se hace uso de la Conjetura de Cournot.

En el capítulo 4 se presentan las conclusiones de nuestro trabajo, así como trabajos a futuro.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las demostraciones que se realizaron de los Teoremas, así como de las Proposiciones que formulamos en este trabajo.

CAPÍTULO 2

EQUILIBRIO CON VARIACIONES CONJETURADAS CONSISTENTES EN UN MERCADO DE OLIGOPOLIO

2.1 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO

Consideraremos $n + 1$ firmas en un mercado de oligopolio mixto con un bien homogéneo, donde $I = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ denota el conjunto de índices de todas las firmas que vamos a considerar.

El precio p depende de la producción q_i de las $n + 1$ firmas de tal manera que $p = p(q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$ y un principio económico que establece la relación que hay con respecto al precio es la ley de oferta y demanda:

$$Q = \sum_{i=0}^n q_i = G(p) + D \quad (1)$$

donde Q representa el total de producción en el mercado, que es la cantidad producida por cada firma i ; por otro lado, vamos a considerar dos tipos de demanda: la función de demanda pasiva, la cual representa que los consumidores pueden adquirir el producto si es que este se presenta a buen precio, denotada por $G = G(p)$, donde $G(p) \geq 0$ y $0 < p \leq T$ y la demanda activa D , la cual representa que independientemente del precio que tenga el producto que se encuentra en el mercado, siempre va a haber consumidores que lo adquieran, donde $D \geq 0$ la cual no depende del precio p .

La función de demanda pasiva está dada de la siguiente forma:

$$G(p) = -p + T \quad (2)$$

La función de beneficio neto de las firmas privadas $i \in I \setminus \{0\}$ que buscan maximizar sus ganancias es la siguiente:

$$\pi_i(q_i, x_i) = pq_i - f_i(q_i, x_i) + S(x_i) \quad (3)$$

La firma pública $i = 0$ busca maximizar el bienestar social de la población, que incluye tanto consumidores como a los productores, la cual denotaremos como W :

$$W = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(t) dt - p \sum_{i=0}^n q_i + \sum_{i=0}^n [\pi_i - S(x_i)] \quad (4)$$

La función total de costos de cada firma f_i está compuesta por costos de producción $\hat{f}_i$ y costos de R&D la cual está dada de la siguiente manera:

$$f_i(q_i, x_i) = \hat{f}_i(q_i, x_i) + R_i(x_i) \quad (5)$$

donde $x_i \geq 0$ es el nivel de R&D de cada firma $i \in I$.

El costo de producción de cada firma $i \in I$ es cuadrático, el cual es la siguiente:

$$\hat{f}_i(q_i, x_i) = \begin{cases} q_i^2 + (b - x_i)q_i & ; 0 \leq x_i \leq b \\ q_i^2 & ; x_i \geq b \end{cases} \quad (6)$$

Al igual que los costos de producción, el gasto de R&D está sujeto a rendimientos decrecientes:

$$R_i(x_i) = x_i^2 \quad \forall x_i \geq 0 \quad (7)$$

El subsidio gubernamental otorgado por la R&D es:

$$S(x_i) = sx_i \quad (8)$$

donde s denota (por unidad) el subsidio para el nivel de R&D de todas las firmas, es decir, todas las firmas tanto públicas como privadas reciben un subsidio uniforme. Por lo tanto el gasto del gobierno para financiar los subsidios del R&D es: $\sum_{i=0}^n S(x_i)$.

Consideraremos dos estructuras de mercado:

- n firmas privadas y una firma pública (oligopolio mixto).
 - $n + 1$ firmas privadas (oligopolio privado).
-

En donde el oligopolio privado considera que todas las firmas incluyendo a la pública quieren maximizar sus ganancias, mientras que en el oligopolio mixto la firma pública busca maximizar el bienestar social.

El conjunto de las firmas que compiten en el mercado es el siguiente:

- $I = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$; cuando $i = 0$ hablamos de la firma pública,

donde $n \geq 1$ para no considerar el caso en que se tenga un monopolio.

Entonces, como el precio depende de la producción de las firmas y de la demanda de los consumidores, es por eso que hacemos una conjetura con respecto al precio, esto es a lo que llamamos **conjetura variacional**, la cual definimos como:

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} = -\nu_i \quad (9)$$

es decir, los productores realizan una conjetura con respecto a la razón de cambio que tiene el precio con respecto a la producción. El signo negativo lo introducimos para no trabajar con valores negativos de ν_i al cual lo vamos a llamar **coeficiente de influencia** de la firma i que consideramos constante. Esto describe el comportamiento de la firma i , en el cual se muestra la dependencia de p sobre q_i . En otros modelos como Cournot ese coeficiente es 1 cuando se conjetura la producción total en vez del precio, mientras que en el modelo de competencia perfecta es 0.

Por lo que la condición de optimalidad de primer orden para la firma pública ($i = 0$) y las firmas privadas $i \in I \setminus \{0\}$ son las siguientes:

$$\frac{\partial W}{\partial q_0} = p - b + x_0 - 2q_0 \begin{cases} = 0 & \text{si } q_0 > 0 \\ \leq 0 & \text{si } q_0 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p - \nu_i q_i - (b - x_i) - 2q_i \begin{cases} = 0 & \text{si } q_i > 0 \\ \leq 0 & \text{si } q_i = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Anteriormente mencionamos que el precio p depende de cada producción q_i de cada firma, por lo cual se debe satisfacer (al menos de forma local) la concavidad de la función de beneficio para cada firma respectivamente. Entonces, para determinar la concavidad de las funciones objetivo de las firmas es suficiente con obtener el signo de la segunda derivada.

Por lo que calculando la segunda derivada para la firma pública ($i=0$) y para las firmas privadas $i \in I \setminus \{0\}$ tenemos:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_0^2} = -\nu_0 - 2 < 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = -2\nu_i - 2 < 0 \quad (13)$$

y como la segunda derivada para cada una de las firmas es negativa, entonces, las funciones son cóncavas y la condición necesaria se puede utilizar como suficiente.

Dado que tenemos un modelo de mercado con n productores y para asegurar que estas estén produciendo el producto en el mercado (de otra manera no serían realmente productores) introduciremos la siguiente suposición:

Suposición 1.

$$b < \frac{2T}{n+3} \quad (14)$$

2.2 OLIGOPOLIO MIXTO

En esta estructura de mercado del oligopolio mixto vamos a considerar que tenemos una firma pública $i = 0$ la cual busca maximizar el bienestar social de la población, que incluye tanto consumidores como firmas, el cual denotaremos por W , dicha firma se encuentra en competencia junto con n firmas privadas $i \in I \setminus \{0\}$, las cuales buscan maximizar sus ganancias netas π_i .

Éstas firmas compiten por niveles; en el nivel 3: las firmas escogen sus volúmenes de producción, en el nivel 2: las firmas escogen sus niveles de R&D, y en el nivel 1: las firmas reciben un subsidio gubernamental uniforme por su R&D.

2.2.1 EQUILIBRIO DE LOS VOLÚMENES DE PRODUCCIÓN DE LAS FIRMAS

En este tercer nivel, las firmas escogen la cantidad de producción, donde los niveles de producción de la firma pública lo denotaremos por q_0 y a la producción de las firmas privadas como q_i donde $i \in I \setminus \{0\}$. Además, las firmas compiten de forma simultánea, dado que el nivel de investigación y desarrollo (R&D) y el subsidio ya fueron escogidos.

Teorema 1. *Para cualquier demanda activa $D \geq 0$, $\nu_i \geq 0$ y con $x_i \geq 0$ y $s \geq 0$ fijas existe un único equilibrio para los volúmenes de producción dados por $(p^*; q_0^*, q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$*

donde:

$$q_0^* = \frac{p^* - b + x_0}{2} \quad (15)$$

$$q_i^* = \frac{p^* - b + x_i}{\nu_i + 2} \quad (16)$$

$$p^* = \frac{T + D + \frac{b-x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b-x_i}{\nu_i+2}}{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i+2} + 1} \quad (17)$$

las cuales son funciones lineales con respecto a x_i . El precio del equilibrio p^* como función de estos parámetros es diferenciable con respecto a la demanda activa D . Además, $p^* > b$ y

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i+2} + 1} \quad (18)$$

a este equilibrio le llamamos equilibrio exterior.

Nota: Las demostraciones de todos los Teoremas y Proposiciones se encuentran en el apéndice.

Ahora, vamos a definir el equilibrio consistente, por lo que tendremos que verificar la consistencia de los coeficientes de influencia (conjeturas), con el procedimiento introducido por Bulavsky, 1997.

Entonces, supongamos que tenemos un equilibrio exterior $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ que ocurre para algunos coeficientes de influencia ν_i y demanda activa D , si tomamos una firma $k \in I$, la cual cambia su comportamiento temporalmente absteniéndose de maximizar sus ganancias y ésta realiza pequeñas variaciones sobre su volumen de producción q_k , entonces, esto equivale a restringir a las firmas en equilibrio al subconjunto $i \neq k$ con una nueva demanda activa $D_k = D - q_k$ y si consideramos que éstas variaciones son infinitesimales, entonces, la firma k puede estimar la razón de cambio del precio del equilibrio con respecto a la nueva demanda activa D_k , es decir, su coeficiente de influencia.

Al aplicar (18), tenemos que extraer a la firma k del modelo, por lo que tenemos que quitar del denominador los términos relacionados al índice $i = k$, entonces, teniendo en cuenta esto, tenemos el siguiente criterio.

Criterio de consistencia. Dado un equilibrio exterior $(p; q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$, los coeficientes de influencia ν_i , con $i \in I$, se llaman consistentes si se cumple:

$$\nu_0 = \frac{-\partial p}{\partial D_0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i+2} + 1} \quad (19)$$

$$\nu_i = \frac{-\partial p}{\partial D_i} = \frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j+2} + \frac{3}{2}} \quad (20)$$

lo que nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 2. *Para cualquier $x_i \geq 0$ y $s \geq 0$ fijos, existen únicos coeficientes de influencia consistentes para las firmas, los cuales están dados por:*

$$\nu_0 = \frac{\nu_p + 2}{n + \nu_p + 2} \in (0, 1) \quad (21)$$

$$\nu_p = \frac{2\nu_p + 4}{2n + 3\nu_p + 4} \in (0, 1) \quad (22)$$

por lo que los volúmenes de producción y el precio del mercado en equilibrio son:

$$q_0^* = \frac{p^* - b + x_0}{2} > 0 \quad (23)$$

$$q_i^* = \frac{p^* - b + x_i}{\nu_p + 2} > 0 \quad (24)$$

$$p^* = \frac{T + D + \frac{b-x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b-x_i}{\nu_p+2}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{\nu_p+2} + 1} > b \quad (25)$$

a este equilibrio le llamamos equilibrio consistente.

Entonces, dados que ya probamos por el teorema anterior que existe un equilibrio consistente, y de acuerdo a los valores obtenidos de p^* , q_0^* y q_i^* vamos a calcular la función de beneficio óptima para cada firma respectivamente.

Proposición 1. *Las funciones de beneficio de la firma pública y las firmas privadas en el equilibrio consistente están dadas por:*

$$W^* = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - \sum_{i=0}^n [(b - x_i)q_i^* + q_i^{*2} + x_i^2] \quad (26)$$

$$\pi_i^*(q_i^*, x_i) = q_i^{*2}(1 + \nu_p) - x_i^2 + sx_i \quad (27)$$

2.2.2 EQUILIBRIO DE LOS NIVELES DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

En este segundo nivel vamos a analizar el equilibrio de los niveles de investigación y desarrollo (R&D) para las firmas que tenemos. El nivel de R&D de la firma pública lo vamos a denotar por x_0 y para las firmas privadas como x_i donde $i \in I \setminus \{0\}$, dado que las firmas conocen el subsidio gubernamental, tomando en cuenta que ya calculamos los niveles de producción óptimos en el nivel anterior.

De las ecuaciones del Teorema 2 observamos que el estado de equilibrio es independiente del valor del subsidio y permanece constante para toda x_i donde $i \in I$. Además, de la función de beneficio neto π_i^* observamos que si los productores escogen un nivel de R&D $x_i > b$ es únicamente para incrementar sus beneficios a través del subsidio que las firmas reciben, mientras que su producción en el mercado se mantiene sin cambios. Sin embargo, de la función de bienestar social W se ve negativamente afectado por incrementar los niveles de R&D cuando $x_i > b$, ya que el precio de equilibrio y los volúmenes de producción se mantienen constantes, lo cual indica que el gobierno no tiene incentivo por dar un subsidio más allá de sb . Similarmente, si el beneficio de las firmas por el subsidio no puede exceder sb , no tienen incentivo para invertir en la R&D más allá de $x_i = b$, por lo cual los niveles óptimos de R&D deben de estar dentro del intervalo $[0, b]$.

Teorema 3. *Para cualquier subsidio $s \geq 0$ fijo, existe un único equilibrio para los niveles de investigación y desarrollo ($R\&D$) los cuales están dados de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} x_0^* = (T + D - b) & \frac{-(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + \nu_p + 2 + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \\ & + s \frac{n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} > 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} x_p^* = (T + D - b) & \frac{3(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \\ & + s \frac{5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} > 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Entonces, dado que ya obtuvimos el equilibrio de los niveles de R&D, vamos a sustituir estos valores en (23), (24), (25), (26) y (27), obteniendo así la siguiente proposición.

Proposición 2. *Para el equilibrio de los niveles de R&D, las cantidades de producción q_i y el precio p , así como la función de beneficios de cada firma están dados por:*

$$p^{**} = \frac{T + D + \frac{b-x_0^*}{2} + \frac{n(b-x_p^*)}{\nu_p+2}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{\nu_p+2} + 1} > b \quad (30)$$

$$q_0^{**} = \frac{p^{**} - b + x_0^*}{2} > 0 \quad (31)$$

$$q_p^{**} = \frac{p^{**} - b + x_p^*}{\nu_p + 2} > 0 \quad (32)$$

$$W^{**} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{**}} p(t) dt - (b - x_0^*)q_0^{**} - q_0^{**2} - x_0^{*2} + n[-(b - x_p^*)q_p^{**} - q_p^{**2} - x_p^{*2}] \quad (33)$$

$$\pi_i^{**}(q_p^{**}, x_p^*) = q_p^{**2}(1 + \nu_p) - x_p^{*2} + s x_p^* \quad (34)$$

2.2.3 SUBSIDIO ÓPTIMO

Para este último nivel, vamos a obtener el subsidio gubernamental óptimo s^* de R&D, el cual habíamos mencionado anteriormente que era uniforme para todas las firmas, tomando en cuenta que ya calculamos los niveles de R&D y los volúmenes de producción óptimos de las firmas.

Teorema 4. *El valor óptimo de subsidio gubernamental que otorga la firma pública es el siguiente:*

$$s^* = \frac{6(T + D - b) \left[(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1) - 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right]}{2n \left(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right) + 15 - 5\nu_p \left(\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} - 2 \right)} > 0 \quad (35)$$

dado que ya obtuvimos el subsidio óptimo para las firmas, ahora lo que vamos a hacer es sustituir este valor en (28), (29) y una vez teniendo estos valores, sustituirlos en las fórmulas de la Proposición 2 del nivel anterior.

Proposición 3. *Para el subsidio gubernamental óptimo, las cantidades de producción, precio, así como las funciones de beneficio de cada firma, en el equilibrio están dados como:*

$$x_0^{**} = (T + D - b) \frac{-(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + \nu_p + 2 + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}$$

$$+ s^* \frac{n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} > 0 \quad (36)$$

$$x_p^{**} = (T + D - b) \frac{3(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} + s^* \frac{5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} > 0 \quad (37)$$

$$p^{***} = \frac{T + D + \frac{b - x_0^{**}}{2} + \frac{n(b - x_p^{**})}{\nu_p + 2}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{\nu_p + 2} + 1} > b \quad (38)$$

$$q_0^{***} = \frac{p^{***} - b + x_0^{**}}{2} > 0 \quad (39)$$

$$q_p^{***} = \frac{p^{***} - b + x_p^{**}}{\nu_p + 2} > 0 \quad (40)$$

$$W^{***} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{***}} p(t) dt - (b - x_0^{**})q_0^{***} - q_0^{***2} - x_0^{**2} + n[-(b - x_p^{**})q_p^{***} - q_p^{***2} - x_p^{**2}] \quad (41)$$

$$\pi_i^{***}(q_p^{***}, x_p^{**}) = q_p^{***2}(1 + \nu_p) - x_p^{**2} + s^* x_p^{**} \quad (42)$$

2.3 OLIGOPOLIO PRIVADO

Ahora, en esta estructura de mercado, vamos a analizar el caso en el que la firma pública se privatiza y se convierte en una firma privada. En el oligopolio privado consideramos que todas las firmas $i \in I$ son privadas las cuales buscan maximizar sus ganancias. Entonces, de igual forma que en el oligopolio mixto consiste de los mismos tres niveles.

2.3.1 EQUILIBRIO DE LOS VOLÚMENES DE PRODUCCIÓN DE LAS FIRMAS

En este tercer nivel, las firmas escogen la cantidad de producción q_i donde $i \in I$, dado que el nivel de investigación y desarrollo (R&D) y el subsidio ya fueron escogidos.

Teorema 5. *Para cualquier demanda activa $D \geq 0$, $\nu_i \geq 0$, con $x_i \geq 0$ y $s \geq 0$ fijas existe un único equilibrio para los volúmenes de producción dados por $(p^*; q_0^*, q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ donde*

$$q_i^* = \frac{p^* - b + x_i}{\nu_i + 2} \quad (43)$$

$$p^* = \frac{T + D + \sum_{i=0}^n \frac{b-x_i}{\nu_i+2}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i+2} + 1} \quad (44)$$

las cuales son funciones lineales con respecto a x_i . El precio del equilibrio p^* como función de estos parámetros es diferenciable con respecto a la demanda activa D . Además, $p^* > b$

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i+2} + 1} \quad (45)$$

a este equilibrio le llamamos equilibrio exterior.

Al igual que antes al aplicar (45) para definir la consistencia de la conjetura de una firma k tenemos que extraer a la firma k del modelo, por lo que hace falta quitar del denominador a aquellos términos que estén relacionados al índice $i = k$, donde $k \in I$ por lo que tenemos el siguiente criterio.

Criterio de consistencia. Dado un equilibrio exterior $(p; q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$, los coeficientes de influencia ν_k con $k \in I$, se llaman consistentes si se cumple:

$$\nu_i = \frac{-\partial p}{\partial D_i} = \frac{1}{\sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j+2} + 1} \quad (46)$$

Teorema 6. Para cualquier $x_i \geq 0$ y $s \geq 0$ fijos, existen únicos coeficientes de influencia consistentes para las firmas, los cuales están dados por:

$$\nu_p = \frac{\nu_p + 2}{\nu_p + 2 + n} \in (0, 1) \quad (47)$$

por lo que los volúmenes de producción y el precio del mercado en equilibrio son:

$$p^* = \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - \sum_{i=0}^n x_i}{n + 3 + \nu_p} > b \quad (48)$$

$$q_i^* = \frac{p^* - b + x_i}{\nu_p + 2} > 0 \quad (49)$$

a este equilibrio lo llamamos equilibrio consistente.

Entonces, dado que ya probamos por el teorema anterior que existe un equilibrio consistente, y de acuerdo a los valores obtenidos de p^* y q_i^* vamos a calcular la función de beneficio óptima para las firmas privadas y el bienestar social óptimo.

Proposición 4. *Las funciones de beneficio de la firma pública y las firmas privadas en el equilibrio consistente están dadas por:*

$$\pi_i^*(q_i^*, x_i) = q_i^{*2}(1 + \nu_p) - x_i^2 + sx_i \quad (50)$$

$$W^* = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - \sum_{i=0}^n [(b - x_i)q_i^* + q_i^{*2} + x_i^2] \quad (51)$$

2.3.2 EQUILIBRIO DE LOS NIVELES DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

En este segundo nivel vamos a analizar el equilibrio de los niveles de investigación y desarrollo (R&D) para las firmas privadas los cuales vamos a denotar como x_i donde $i \in I$, dado que las firmas conocen el subsidio gubernamental s , tomando en cuenta que en el nivel anterior ya calculamos los niveles de producción óptimos. Al igual que antes, los niveles óptimos de R&D satisfacen $x_i \in [0, b]$.

Teorema 7. *Para cualquier subsidio $s \geq 0$ fijo, existe un único equilibrio para los niveles de investigación y desarrollo (R&D) los cuales están dados de la siguiente manera:*

$$x_p^* = \frac{2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} (-b + T + D) + s(n + 3 + \nu_p)}{-2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right)} > 0 \quad (52)$$

Dado que ya obtuvimos los niveles óptimos de R&D para las firmas privadas, vamos a sustituir estos valores en (48), (49), (50) y (51), obteniendo así la siguiente proposición.

Proposición 5. *Para el equilibrio de los niveles de R&D, las cantidades de producción q_i , el precio p , así como las funciones de beneficio de cada firma respectivamente, en el equilibrio están dadas por:*

$$p^{**} = \frac{2(1 + \nu_p)(-b + T + D) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + s(n + 1) - 2(-b + T + D)(\nu_p + 2)}{2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right)} + b > b \quad (53)$$

$$q_p^{**} = \frac{-s - 2(-b + T + D)}{2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right)} > 0 \quad (54)$$

$$\pi_i^{**}(q_i^*, x_p^*) = q_i^{*2}(1 + \nu_p) - x_p^{*2} + sx_p^* \quad (55)$$

$$W^{**} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{**}} p(t) dt - p^{**} Q^{**} + (n+1) \left[q_p^{**2} (1 + \nu_p) - x_p^{*2} \right] \quad (56)$$

2.3.3 SUBSIDIO ÓPTIMO

Para este último nivel, vamos a obtener el subsidio gubernamental óptimo s^* de R&D de las firmas privadas, tomando en cuenta que ya calculamos los niveles de R&D y los volúmenes de producción óptimos de las firmas.

Teorema 8. *El nivel óptimo de subsidio gubernamental para las firmas privadas es:*

$$s^* = \frac{2(-b + T + D) \left(\frac{dq_p^*}{ds} (n + 3 + 2\nu_p) - 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \frac{dx_p^*}{ds} \right)}{-\frac{dq_p^*}{ds} (n + 3 + 2\nu_p) + 2(n + 3 + \nu_p) \frac{dx_p^*}{ds}} > 0 \quad (57)$$

dado que ya obtuvimos el subsidio óptimo para las firmas privadas, ahora lo que vamos a hacer es sustituirlo en (52) y una vez teniendo este valor, lo vamos a sustituir en las formulas de la Proposición 5 del nivel anterior.

Proposición 6. *Para el subsidio gubernamental óptimo, las cantidades de producción, el precio, así como las funciones de beneficio de cada firma, en el equilibrio son:*

$$x_p^{**} = \frac{-2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} (1 + \nu_p) (-b + T + D) - s^* (n + 3 + \nu_p)}{2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right)} > 0 \quad (58)$$

$$p^{***} = \frac{2(1 + \nu_p) (-b + T + D) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + s^* (n + 1) - 2(-b + T + D) (\nu_p + 2)}{2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right)} + b > b \quad (59)$$

$$q_p^{***} = \frac{-s^* - 2(-b + T + D)}{2 \left[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right]} > 0 \quad (60)$$

$$\pi_i^{***} (q_p^{***}, x_p^{***}) = q_p^{***2} (1 + \nu_p) - x_p^{**2} + s^* x_p^{**} \quad (61)$$

$$W^{***} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{***}} p(t) dt - p^{***} Q^{***} + (n+1) \left[q_p^{***2} (1 + \nu_p) - x_p^{**2} \right] \quad (62)$$

CAPÍTULO 3

EFECTO DE LA PRIVATIZACIÓN DE LA FIRMA PÚBLICA

Una vez que hemos analizado al oligopolio mixto y al oligopolio privado de acuerdo a sus tres niveles respectivamente, realizamos algunos experimentos numéricos para que sea más visible ver los efectos que tiene la privatización de la firma pública.

Entonces, dado que en éste trabajo utilizamos el concepto de la **conjetura variacional** haremos la comparación con la **conjetura de Cournot** que se utilizó en Gil-Moltó et al. (2018) tanto en el oligopolio mixto como en el privado.

Entonces, en primer lugar vamos a analizar los resultados obtenidos del bienestar social óptimo (W^{**}) contra el subsidio (s). En este caso nosotros comparamos la función del bienestar social contra el subsidio gubernamental que la firma pública les esta otorgando a las firmas que se encuentran compitiendo en el mercado, es decir, cuando aún no se ha decidido el subsidio gubernamental óptimo.

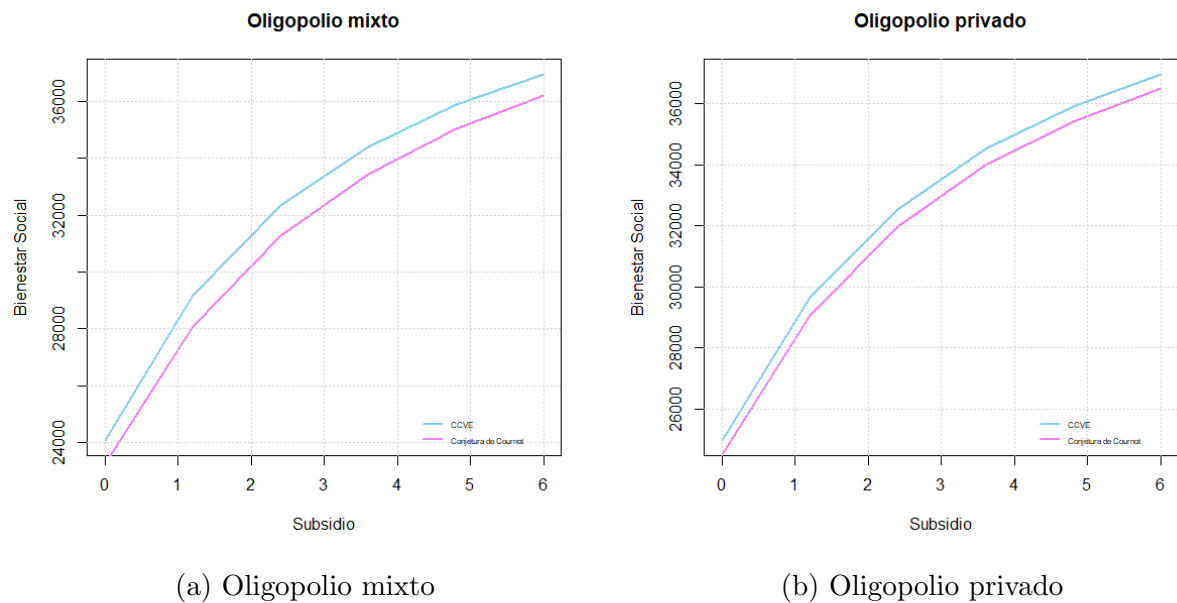


Figura 1: Comparación del bienestar social óptimo contra el subsidio gubernamental, utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional.

Entonces, como podemos observar las funciones del bienestar social para el oligopolio mixto como para el oligopolio privado son funciones crecientes, ya que conforme cuando a las firmas se les otorga más subsidio el bienestar social va aumentando. Además, al momento de utilizar el concepto de la conjetura variacional tanto en el oligopolio mixto como en el oligopolio privado nos proporciona un mayor bienestar social que cuando se hace uso de la conjetura de Cournot, por lo que al tener mayor bienestar social, se ven beneficiados tanto los productores como los consumidores.

Ahora, analizando el bienestar social óptimo (W^{***}) contra el número de firmas privadas (n) tenemos:

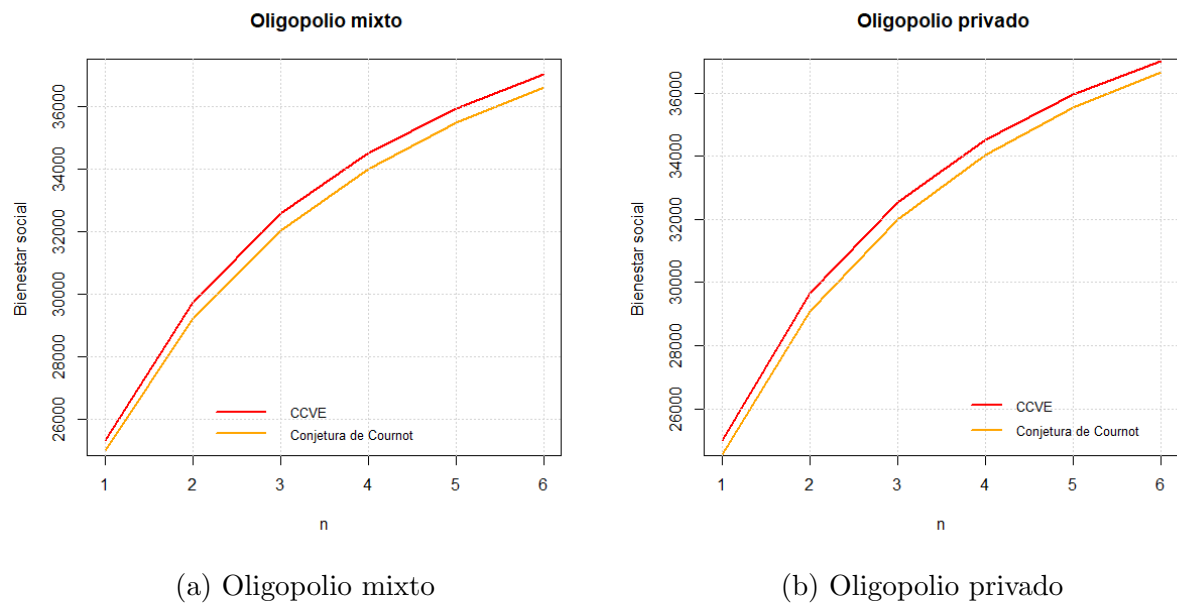


Figura 2: Comparación del bienestar óptimo contra el número de firmas privadas en el oligopolio mixto y el oligopolio privado.

Como podemos observar en ambas estructuras de mercado las funciones del bienestar social son funciones crecientes, es decir, el bienestar social aumenta con el número de firmas privadas que se encuentran compitiendo en el mercado, ya que una mayor competencia beneficia a los consumidores. Así mismo, podemos notar que al hacer uso de la conjetura variacional nos da un mayor bienestar social a diferencia de cuando se hace uso de la conjetura de Cournot.

Por lo que comparando el oligopolio mixto y el oligopolio privado utilizando ambas conjeturas tenemos:

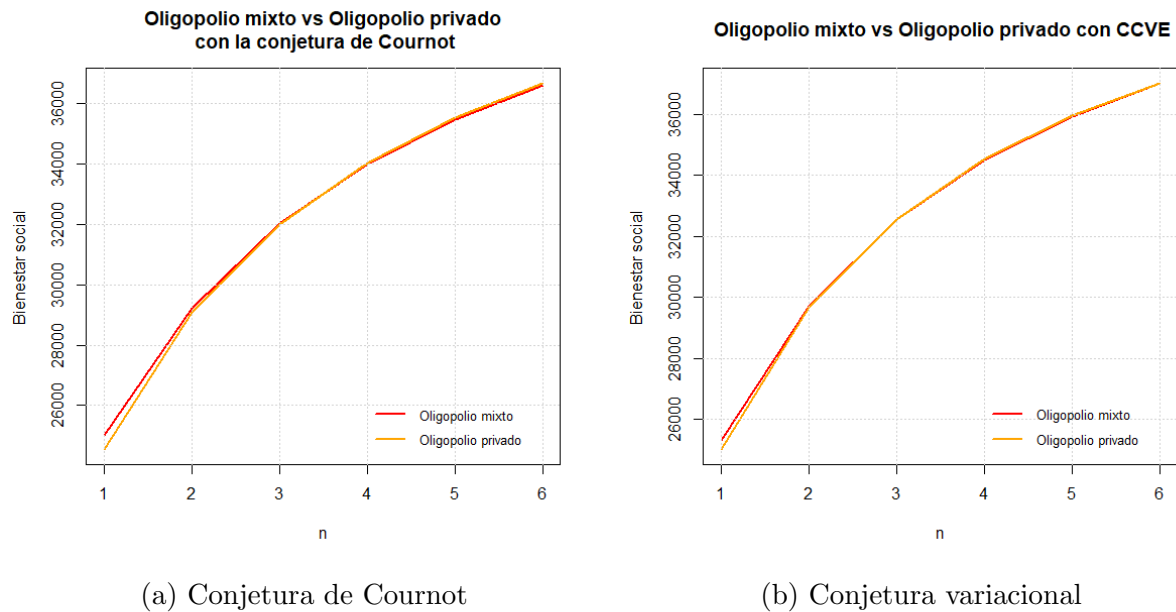


Figura 3: Comparación del bienestar social óptimo contra el número de firmas privadas en el mercado, utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional.

A partir de las figuras obtenidas no se alcanza a apreciar la diferencia que hay entre las curvas cuando el número de firmas privadas crece, es por eso que a continuación se muestran las siguientes gráficas que representan la diferencia del bienestar social en el oligopolio mixto con el bienestar social del oligopolio privado.

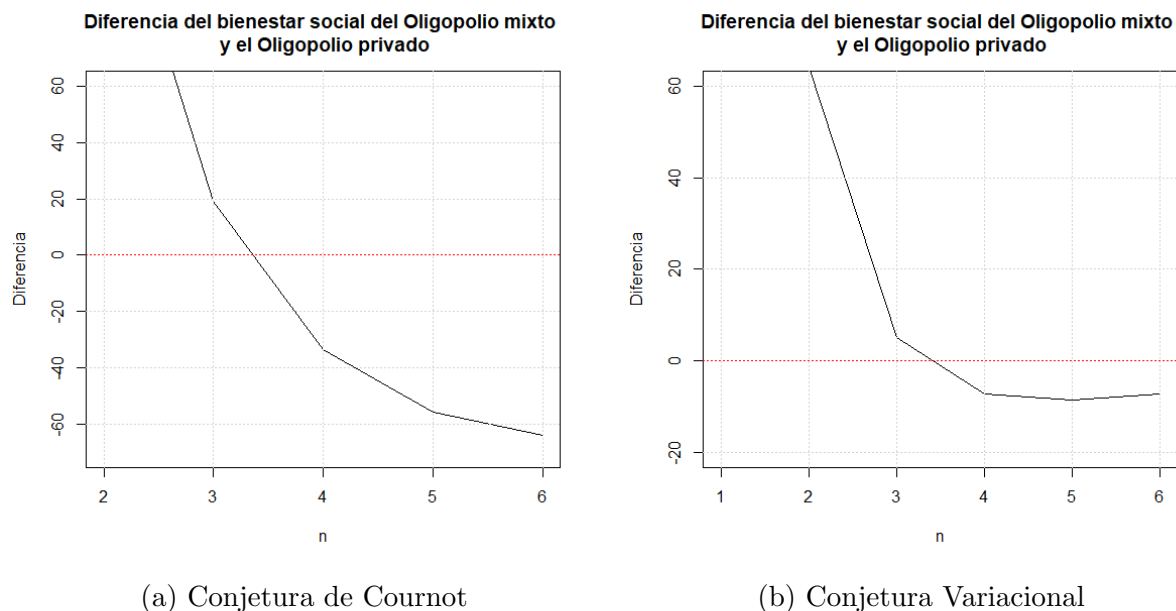


Figura 4: Diferencia en el bienestar social del oligopolio mixto menos el del oligopolio privado, utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional.

Entonces, como podemos observar en ambas figuras, a partir de que se encuentran más de 3 firmas privadas en el mercado ($n > 3$) hay un mayor bienestar social en el oligopolio privado en comparación con el oligopolio mixto, por lo cual esto nos dice que a partir de que se encuentran más de 3 firmas en el mercado conviene privatizar a la firma pública, ya que de esta manera se obtiene un mayor bienestar social, por lo cual se verían beneficiados tanto los productores como los consumidores, así mismo, la firma pública también se ve beneficiada ya que no tiene que preocuparse por los costos de producción al ya no participar en el mercado.

Ahora, comparando la ganancia óptima de las firmas (π_i^{***}) contra el número de firmas (n) que se encuentran en el mercado, tenemos:

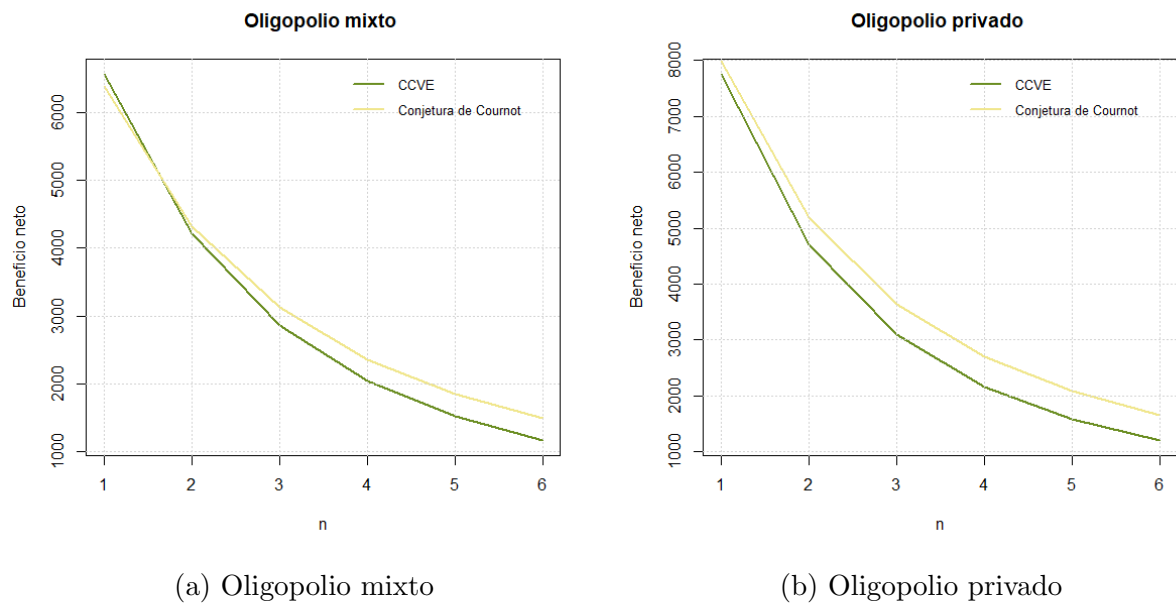


Figura 5: Comparación del beneficio neto contra el número de firmas privadas en el oligopolio mixto y el oligopolio privado.

Lo que podemos observar en estas figuras es que el beneficio neto decrece conforme aumentan el número de firmas privadas en el mercado, esto se debe a la propia competencia que existe entre las firmas.

Además, también podemos observar que tanto en el oligopolio mixto como en el oligopolio privado se obtiene un mayor beneficio neto cuando se usa la conjetura de Cournot, sin embargo, en la figura 5a cuando sólo tenemos a una firma privada en el mercado ($n = 1$) la conjetura variacional es más beneficiosa, ya que nos da una mayor ganancia neta a comparación de cuando se utiliza la conjetura de Cournot, es decir, la conjetura variacional es más beneficiosa cuando la utiliza cada productor de forma individual. La razón por la que vemos que después el beneficio neto baja es por que hay más firmas que

están aplicando la conjetura variacional, por lo que hay una mayor competencia entre las firmas en el mercado.

Por lo que comparando ambas estructuras de mercado utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional tenemos:

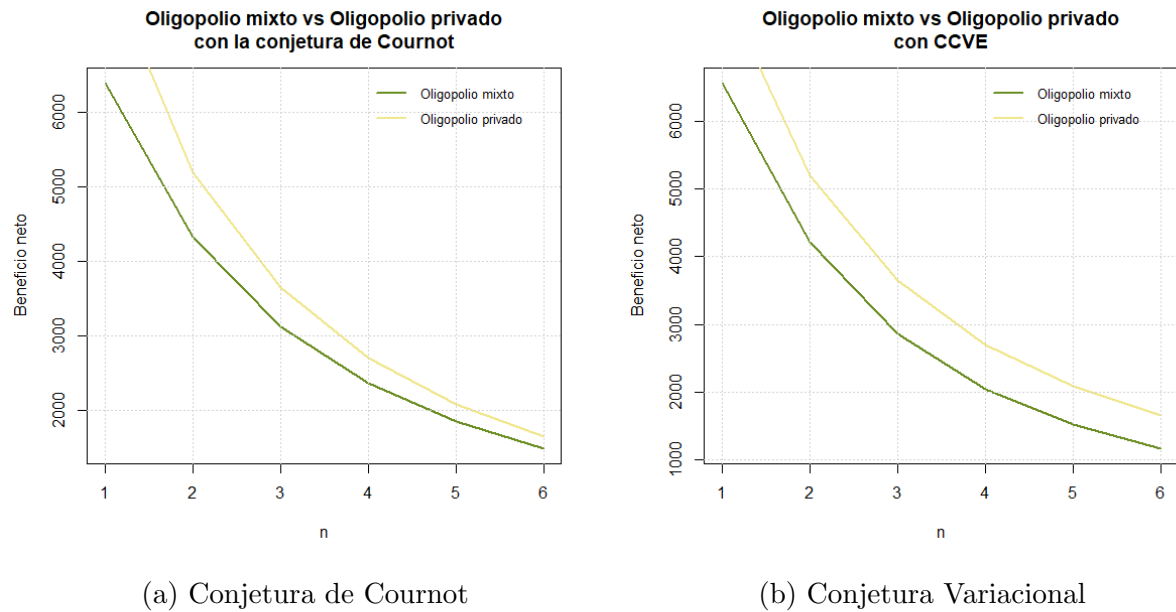


Figura 6: Comparación del beneficio neto contra el número de firmas privadas, utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional.

En la figura 6a podemos notar que al utilizar la conjetura de Cournot, en el oligopolio privado las firmas privadas son quienes reciben un mayor beneficio neto a comparación del oligopolio mixto, sin embargo, cuando se tienen más firmas privadas en el mercado, este beneficio neto decrece por la misma competencia que existe entre las firmas. De igual forma, en la figura 6b podemos notar que al utilizar la conjetura variacional, en el oligopolio privado las firmas privadas reciben un mayor beneficio neto por lo cual se ven beneficiadas las firmas privadas por la ausencia de la firma pública en el mercado, sin embargo, cuando hay más firmas privadas en el mercado el beneficio neto de las firmas tiende a disminuir por la competencia que existe contra las demás firmas.

Ahora lo que vamos a hacer es la comparación del precio (p^{**}) contra el número de firmas (n) que hay en el mercado.

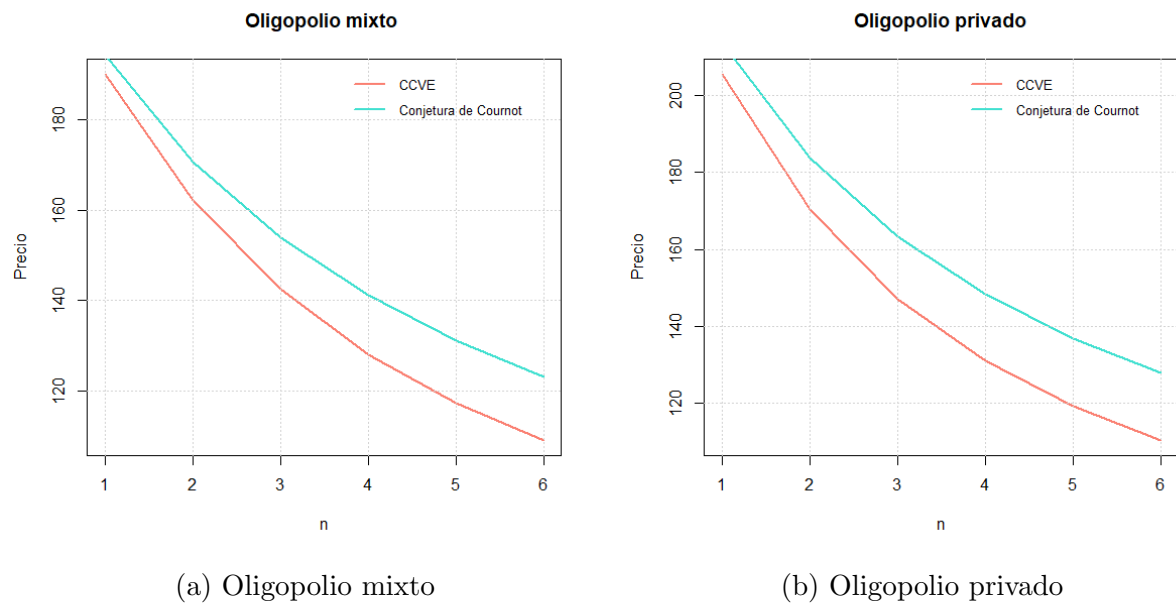


Figura 7: Comparación del precio contra el número de firmas privadas en el oligopolio mixto y el oligopolio privado.

Lo que podemos observar en ambas estructuras de mercado es que el precio del producto que se encuentra en el mercado decrece conforme aumenta el número de firmas privadas en el mercado. Además, al momento de utilizar el concepto de la conjetura variacional tanto en el oligopolio mixto y el oligopolio privado vemos que nos proporciona un menor precio a comparación de cuando se hace uso de la conjetura de Cournot, por lo cual se ven beneficiados los consumidores.

Por lo que comparando ambas estructuras de mercado utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional tenemos:

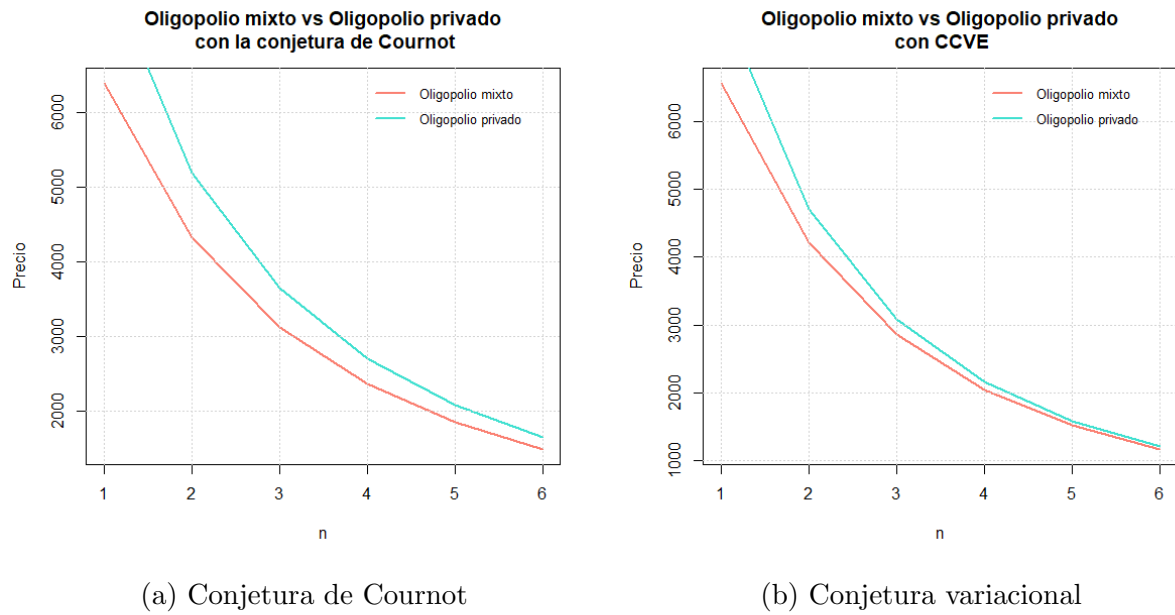


Figura 8: Comparación del precio óptimo contra el número de firmas, utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional.

Al comparar el uso de la conjetura de Cournot y la conjetura variacional, notamos que en ambas figuras el oligopolio privado es quien está por encima del oligopolio mixto, sin embargo, esto se debe a que la empresa pública intenta reducir el precio del producto que se encuentra en el mercado produciendo más producto para que aumente el bienestar social de los consumidores.

Finalmente, comparamos el subsidio gubernamental óptimo (s^*) contra el número de firmas privadas (n) que hay en el mercado.

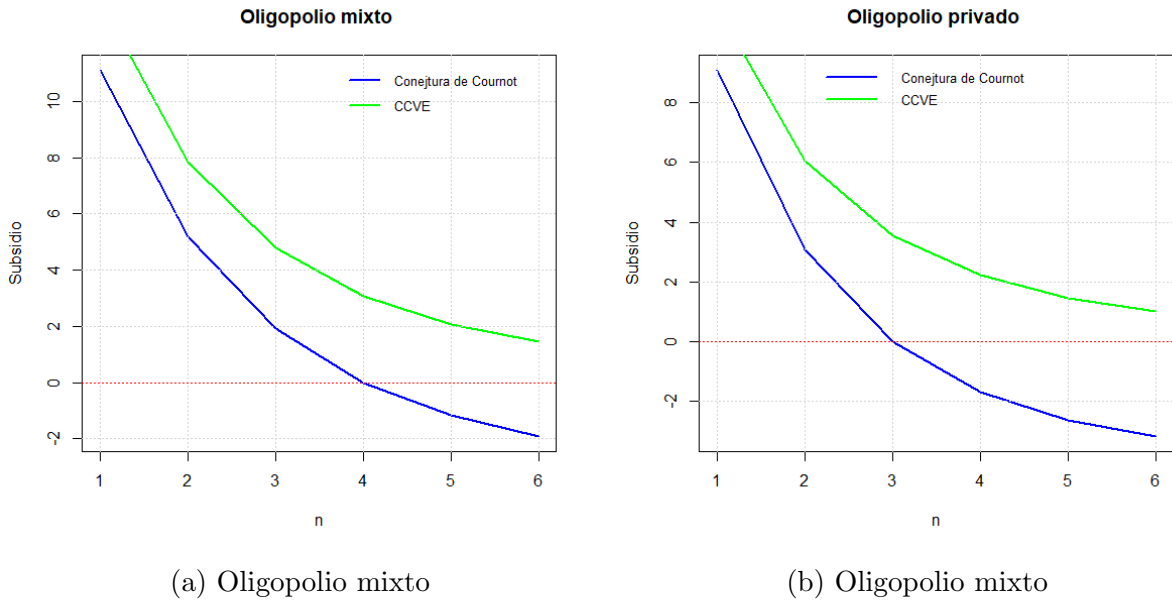


Figura 9: Comparación del subsidio gubernamental óptimo contra el número de firmas privadas en el oligopolio mixto y el oligopolio privado.

Entonces, en el oligopolio privado y en el oligopolio mixto podemos observar que cuando hay más firmas en el mercado el subsidio gubernamental que se les da a las firmas decrece, sin embargo al comparar ambas conjeturas podemos notar que al utilizar la conjetura variacional se les otorga un mayor subsidio gubernamental a las firmas por lo que la conjetura variacional es más beneficiosa para las firmas en este aspecto. Además, como podemos observar, al utilizar la conjetura de Cournot en ambas estructuras de mercado, conforme hay más firmas privadas $n > 4$ para el oligopolio mixto y $n > 3$ para el oligopolio privado, este subsidio es negativo que es lo mismo que se nota en Gil-Moltó et al., 2018, por lo cual se supone que a las firmas se les pone un impuesto por realizar la investigación y desarrollo (R&D) (véase Lee and Tomaru, 2017).

Por otro lado, cuando utilizamos la conjetura variacional el subsidio gubernamental que otorga la firma pública nunca es negativo, lo cual es más lógico para un problema real, ya que no sería pertinente que la firma pública ponga un impuesto por realizar R&D, ya que como hemos mencionado, la R&D disminuye los costos de producción que tienen las firmas privadas, así como el precio del producto para los consumidores. Además también podemos observar que entre más firmas se encuentren compitiendo en el mercado, el subsidio gubernamental otorgado a las firmas tiende a cero, por lo cual podemos intuir que ellas no necesitarán de este subsidio para realizar la investigación y desarrollo, si no, que la realizan por su cuenta ya que la propia competencia se encarga de que las mismas firmas realicen R&D para que sigan siendo competentes en el mercado.

Por lo que comparando ambas estructuras de mercado utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional tenemos:

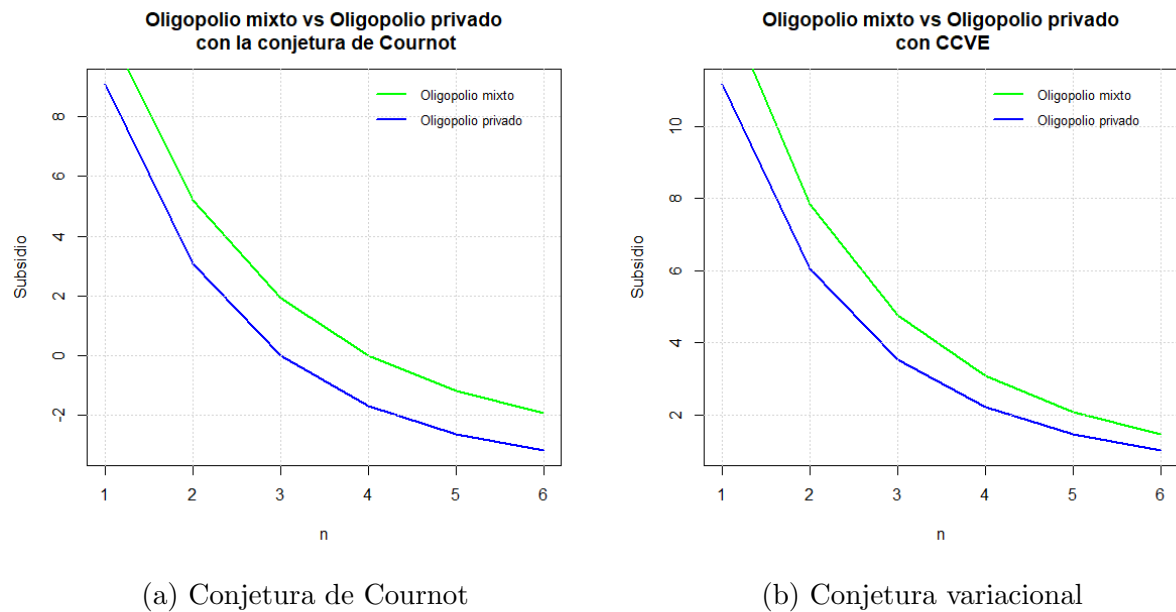


Figura 10: Comparación del subsidio gubernamental óptimo contra el número de firmas, utilizando la conjetura de Cournot y la conjetura variacional

Al comparar el uso de la conjetura de Cournot y la conjetura variacional, notamos que en ambas figuras el oligopolio mixto es quien requiere más subsidio gubernamental a comparación del oligopolio privado, lo cual se puede deber a la presencia de la firma pública, esto debido a que la firma pública otorga un mayor subsidio a las firmas privadas para compensarlas por la parte del mercado que les quita al competir como productora, como se observa en la Figura 6, por lo cual privatizar a la firma pública cuando hay muchos productores en el mercado, no sólo beneficia a los consumidores y productores (ya que el bienestar social es mayor) sino también a la propia firma pública ya que no tiene que preocuparse por los gastos de producción ni por otorgar tanto subsidio a las firmas privadas, reduciendo así los gastos del gobierno.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

En nuestro trabajo de tesis analizamos un modelo de mercado de oligopolio mixto, en el cual se encuentran varias firmas privadas y sólo una firma pública, donde dichas firmas compiten de forma simultánea mediante 3 niveles, en el nivel 3: las firmas escogen sus volúmenes de producción, en el nivel 2: las firmas escogen los niveles de investigación y desarrollo (R&D) y en el nivel 1: la firma pública decide el subsidio que le va a otorgar a las firmas por el nivel de R&D que realicen.

Además, analizamos los efectos de la privatización de la firma pública, comparando un oligopolio mixto con un oligopolio privado para entender las consecuencias de la privatización de dicha firma.

Aplicamos el concepto de la conjetura variacional en los niveles de producción de las firmas, en donde conjeturamos el precio con respecto a la producción que estas tienen. Así mismo, dado los resultados que obtuvimos en este trabajo al utilizar dicha conjetura, realizamos algunos experimentos numéricos en los cuales comparamos dichos resultados con Gil-Moltó et al. (2018) en donde se hizo uso de la conjetura de Cournot.

Entonces, al realizar estos experimentos numéricos nosotros notamos que tanto en el oligopolio mixto como en el oligopolio privado el bienestar social es mayor cuando hacemos uso del concepto de la conjetura variacional, además también notamos que el bienestar social es mayor en el oligopolio privado cuando tenemos más de 3 firmas privadas ($n > 3$), por ende es conveniente privatizar a la firma pública cuando hay suficientes firmas privadas en el mercado. Por lo cual los efectos de privatizar a la firma pública es que se obtiene un mayor bienestar social cuando tenemos más de 3 firmas privadas en el mercado, por lo cual se ven beneficiados los productores y los consumidores.

Así mismo, notamos que el precio del producto que se encuentra en el mercado es menor cuando se utiliza la conjetura variacional a comparación de cuando se utiliza la conjetura de Cournot lo cual es beneficioso para los consumidores.

Además, también nosotros notamos que al momento de comparar el subsidio contra el número de firmas que se encuentran en el mercado cuando se hace uso de ambas conjeturas, en el caso de Cournot el subsidio se vuelve negativo cuando tenemos muchas firmas en el mercado, por lo cual a las firmas se les pone un impuesto por realizar R&D en vez de recibir un subsidio por realizar dicha investigación y desarrollo, por lo cual dichas firmas podrían pensar en no realizarla, ya que se les pondría este impuesto, sin embargo, esto podría provocar que las firmas pierdan a consumidores ya que buscan adquirir un producto nuevo e innovador, por lo cual las firmas generarían pérdidas y podrían llegar a la bancarrota.

Por otro lado, cuando utilizamos la conjetura variacional el subsidio siempre es positivo, lo cual es más natural para un escenario real, y además este tiende a cero cuando tenemos muchas firmas en el mercado, por lo cual, las firmas no necesitan del subsidio para realizar la R&D si no, que la realizan por su cuenta, ya que la propia competencia que hay entre las firmas se encarga de que las firmas realicen la investigación y desarrollo para que dichas firmas sigan siendo competentes en el mercado.

Entonces, a partir de estos resultados obtenidos, nosotros notamos que al utilizar la conjetura variacional nos proporciona mejores resultados, se logra un mayor bienestar social para las dos estructuras de mercado que estamos considerando, así mismo, el precio del producto que se encuentra en el mercado se disminuye, por lo cual los consumidores se ven beneficiados, además de que también ya no se les pone impuesto a las firmas cuando son muchas en el mercado.

Como trabajo a futuro esperamos poder aplicar la conjetura variacional al nivel 2, donde las firmas escogen sus niveles de R&D, ya que de esta manera tendríamos en cuenta las estrategias que tengan las demás firmas que se encuentran compitiendo en el mercado. Así mismo, podríamos analizar el caso en el cual la firma pública no se privatice por completo, si no, una sola parte de ella. Además, también podríamos considerar tener otro tipo de funciones para no tener funciones lineales o cuadráticas.

CAPÍTULO 5

APÉNDICE

5.1 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1

Tenemos que la firma pública maximiza el bienestar social cuando escoge como estrategia a q_0 :

$$W = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(t) dt - p \sum_{i=0}^n q_i + \sum_{i=0}^n [pq_i - (b - x_i)q_i - q_i^2 - x_i^2] \quad (63)$$

por lo que como vimos en (12) es cóncava, por lo que al aplicar la condición de optimalidad de primer orden, tenemos:

$$\frac{\partial W}{\partial q_0} = p - b + x_0 - 2q_0 = 0 \quad (64)$$

entonces al despejar q_0 obtenemos:

$$q_0 = \frac{p - b + x_0}{2} \quad (65)$$

Por otro lado para las firmas privadas, tenemos como función de beneficio:

$$\pi_i(q_i, x_i) = pq_i - (b - x_i)q_i - q_i^2 - x_i^2 + sx_i \quad (66)$$

y como vimos en (13) es cóncava, por lo cual aplicando la condición de optimalidad de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p - q_i\nu_i - (b - x_i) - 2q_i = 0 \quad (67)$$

entonces al despejar q_i tenemos:

$$q_i = \frac{p - b + x_i}{\nu_i + 2} \quad (68)$$

Dados los valores que obtuvimos de cada firma q_0 y q_i vamos a utilizar la ley de oferta y demanda (1), por lo que vamos a tener que:

$$\sum_{i=0}^n q_i = T - p + D \quad (69)$$

por lo que sustituyendo (65) y (68) en (69) tenemos:

$$\frac{p - b + x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{p - b + x_i}{\nu_i + 2} = T - p + D \quad (70)$$

por lo que moviendo términos y factorizando el precio p :

$$p \left(\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2} \right) = T + D + \frac{b - x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b - x_i}{\nu_i + 2} \quad (71)$$

entonces despejando p :

$$p = \frac{T + D + \frac{b - x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b - x_i}{\nu_i + 2}}{\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (72)$$

A partir del precio obtenido, vamos a comprobar que este es positivo, por lo que reescribiendo la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} p &= \frac{T + D + \frac{b - x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b - x_i}{\nu_i + 2}}{\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2}} + b - b \\ &= \frac{T + D + \frac{b - x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b - x_i}{\nu_i + 2} - b \left(\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2} \right)}{\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2}} + b \\ &= \frac{T + D - b - \frac{x_0}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\nu_i + 2}}{\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2}} + b > \frac{T - \frac{3b}{2} - \frac{nb}{2}}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{n}{2}} + b \end{aligned} \quad (73)$$

y dada la suposición:

$$b < \frac{2T}{n + 3} \quad (74)$$

la cual es equivalente a:

$$2(T - b) > (n + 1)b \quad (75)$$

por lo que aplicando (75) a (73) tenemos:

$$\begin{aligned} p &> \frac{T - \frac{3b}{2} - \frac{nb}{2}}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{n}{2}} + b = \frac{2(T - b) - (n + 1)b}{2\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{n}{2}\right)} + b \\ &> \frac{(n + 1)b - (n + 1)b}{2\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{n}{2}\right)} + b = b \end{aligned} \quad (76)$$

es decir $p > b$.

Entonces, para terminar, vamos a tomar el precio p y derivarla con respecto a la demanda activa D :

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (77)$$

5.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Al principio consideramos que las empresas privadas eran idénticas por lo que buscamos justificar que los coeficientes de influencia son los mismos para todas las firmas privadas. Entonces, dada (20) vamos a reescribirla como:

$$\nu_i = \frac{1}{\frac{3}{2} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + 2} + \frac{1}{\nu_i + 2} - \frac{1}{\nu_i + 2}} = \frac{1}{\frac{3}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\nu_j + 2} - \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (78)$$

ahora, haciendo el siguiente cambio de variable: $V = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\nu_j + 2}$ entonces:

$$\nu_i = \frac{1}{\frac{3}{2} + V - \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (79)$$

por lo que simplificando lo anterior:

$$\nu_i = \frac{1}{\frac{3(\nu_i + 2) + 2(\nu_i + 2)V - 2}{2(\nu_i + 2)}} = \frac{2(\nu_i + 2)}{3(\nu_i + 2) + 2(\nu_i + 2)V - 2} \quad (80)$$

entonces:

$$\nu_i[3(\nu_i + 2) + 2(\nu_i + 2)V - 2] = 2\nu_i + 4 \quad (81)$$

entonces:

$$\nu_i^2(3 + 2V) + \nu_i(4V + 2) - 4 = 0 \quad (82)$$

notamos que tenemos una ecuación de segundo grado, por lo cual vamos a resolverla mediante la fórmula general.

$$a = 3 + 2V \quad b = 4V + 2 \quad c = -4 \quad (83)$$

entonces:

$$\nu_i = \frac{-(4V + 2) \pm \sqrt{(4V + 2)^2 - 4(3 + 2V)(-4)}}{2(3 + 2V)} = \frac{-2V - 1 \pm \sqrt{4V^2 + 12V + 13}}{3 + 2V} \quad (84)$$

a pesar de que aquí tenemos dos soluciones, sólo tomamos la positiva ya que de otra forma estaríamos sumando sólo términos negativos, pero $\nu_i > 0$.

$$\nu_i = \frac{-2V - 1 + \sqrt{4V^2 + 12V + 13}}{3 + 2V} \quad (85)$$

además, la V es independiente del índice i , por lo que ν_i también es independiente del índice i por ende hacemos $\nu_i \equiv \nu_p$. Ahora, veamos que:

$$\nu_p = \frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i} \frac{1}{\nu_p + 2} + \frac{3}{2}} \in (0, 1) \quad (86)$$

ya que el denominador es mayor a 1 y como $\nu_p \in (0, 1)$ entonces ν_p tiene una única solución por ser solución de un mapeo contractivo, por lo que simplificando las expresiones anteriores de ν_0 y ν_p :

$$\nu_p = \frac{1}{\frac{n-1}{\nu_p+2} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{2(n-1)+3(\nu_p+2)}{2(\nu_p+2)}} = \frac{2\nu_p + 4}{2n + 3\nu_p + 4} \quad (87)$$

$$\nu_0 = \frac{1}{\frac{n}{\nu_p+2} + 1} = \frac{1}{\frac{n+\nu_p+2}{\nu_p+2}} = \frac{\nu_p + 2}{n + \nu_p + 2} \quad (88)$$

Entonces, se demostró que existe un equilibrio consistente, en donde encontramos que el valor del coeficiente de influencia es el mismo para todas las firmas $\nu_p \equiv \nu_i$, por lo cual vamos a sustituir esto en (65), (68) y (72), teniendo:

$$q_0^* = \frac{p^* - b + x_0}{2} \quad (89)$$

$$q_i^* = \frac{p^* - b + x_i}{\nu_p + 2} \quad (90)$$

$$p^* = \frac{T + D + \frac{b-x_0}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b-x_i}{\nu_p+2}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{\nu_p+2} + 1} \quad (91)$$

5.3 DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1

Para obtener la función de beneficio óptima para cada una de las firmas, lo único que vamos a hacer es sustituir q_0^* , q_i^* y p que obtuvimos en el Teorema 1.

- Función de beneficio para la firma pública:

$$\begin{aligned} W^* &= \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - p^* \sum_{i=0}^n q_i^* + \sum_{i=0}^n [p^* q_i^* - (b - x_i) q_i^* - q_i^{2*} - x_i^2] \\ &= \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - p^* \sum_{i=0}^n q_i^* + p^* q_0^* - (b - x_0) q_0^* - q_0^{2*} - x_0^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [p^* q_i^* - (b - x_i) q_i^* - q_i^{2*} - x_i^2] \\ &= \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - (b - x_0) q_0^* - q_0^{2*} - x_0^2 - \sum_{i=1}^n [(b - x_i) q_i^* + q_i^{2*} + x_i^2] \quad (92) \end{aligned}$$

lo único que hicimos aquí fue simplificar y sacar el índice $i = 0$ del excedente neto de los productores.

- Función de beneficios para las firmas privadas:

$$\begin{aligned} \pi_i^*(q_i^*, x_i) &= p^* q_i^* - (b - x_i) q_i^* - q_i^{2*} - x_i^2 + s x_i \\ &= q_i^{2*} (1 + \nu_p) - x_i^2 + s x_i \end{aligned} \quad (93)$$

la cual obtuvimos aplicando la ecuación de optimalidad (67).

5.4 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3

Dada (26) vamos a calcular la condición de optimalidad de primer orden:

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_0} = - \sum_{i=0}^n q_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} + p^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + q_0^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} - b \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + q_0^* - 2 q_0^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - 2 x_0$$

$$+ p^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^n q_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} - b \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n x_i q_i^*}{\partial x_0} - 2q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} - \frac{\partial \sum_{i=1}^n x_i^2}{\partial x_0} \quad (94)$$

antes de poder calcular la segunda derivada para determinar la concavidad, vamos a simplificar el resultado obtenido, pero lo haremos en partes

- Vamos a considerar los términos $i = 0$ (firma pública):

$$p^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + q_0^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} - b \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + q_0^* - 2q_0^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - 2x_0 \quad (95)$$

por la condición de optimalidad de primer orden que obtuvimos en (64) y si sustituimos los valores óptimos que obtuvimos en el Teorema 1 y multiplicamos ésta identidad por $\frac{\partial q_0^*}{\partial x_0}$ tenemos:

$$p^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - b \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - 2q_0^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} = 0 \quad (96)$$

por lo que sustituyendo esto en (95):

$$q_0^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} + q_0^* - 2x_0 \quad (97)$$

- Vamos a considerar los términos $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (firmas privadas):

$$p^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^n q_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} - b \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n x_i q_i^*}{\partial x_0} - 2q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} \quad (98)$$

por la condición de optimalidad de primer orden que obtuvimos en (64) vamos a despejar para obtener la siguiente identidad $\nu_i q_i^* = p^* - (b - x_i) - 2q_i^*$ y multiplicando ésta identidad por $\frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0}$ tenemos:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} \nu_i q_i^* = p^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} - b \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n x_i q_i^*}{\partial x_0} - 2q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} \quad (99)$$

por lo que sustituyendo esto en (98):

$$\sum_{i=1}^n q_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} + \nu_i q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} \quad (100)$$

por lo que juntando (97) y (100):

$$\begin{aligned}\frac{\partial W^*}{\partial x_0} &= -\sum_{i=0}^n q_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} + q_0^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} + q_0^* - 2x_0 + \sum_{i=1}^n q_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_0} + \nu_p q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} \\ &= q_0^* - 2x_0 + \nu_p q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0}\end{aligned}\quad (101)$$

Entonces, como se dijo anteriormente, para mostrar que la condición de optimalidad es suficiente, vamos a probar la concavidad de estas funciones de beneficio, por lo que calculando la segunda derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_0^2} &= \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - 2 + \nu_p q_i^* \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0^2} + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} \\ &= \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - 2 + \sum_{i=1}^n \nu_p \left[q_i^* \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial x_0^2} + \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right] \\ &= \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} - 2 + \sum_{i=1}^n \nu_p \left[q_i^* \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial x_0^2} + \left(\frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (102)$$

donde:

$$\blacksquare \quad \frac{\partial q_0^*}{\partial x_0} = \frac{\nu_p + n + 2}{3(\nu_p + 2) + 2n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (103)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} = \frac{-1}{3(\nu_p + 2) + 2n} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad (104)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{-1}{n + 3 + \nu_p} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad (105)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} = \frac{-2 + 3(\nu_p + 2) + 2n}{(\nu_p + 2)(3(\nu_p + 2) + 2n)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (106)$$

factorizamos la expresión para poder calcular el signo de la segunda derivada, por lo que ahora vamos a sustituir el valor de las derivadas q_0 y q_i que obtuvimos antes, las cuales están entre 0 y $\frac{1}{2}$ en valor absoluto

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_0^2} = \frac{\nu_p + n + 2}{3(\nu_p + 2) + 2n} - 2 + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_p}{(3(\nu_p + 2) + 2n)^2}$$

$$= \frac{\nu_p + n + 2}{3(\nu_p + 2) + 2n} - 2 + \frac{n\nu_p}{(3(\nu_p + 2) + 2n)^2} \quad (107)$$

de $\frac{\nu_p + n + 2}{3(\nu_p + 2) + 2n}$ podemos notar que el denominador es más grande que el numerador, por lo que ésta es menor que 1, por otro lado, para $\frac{n\nu_p}{(3(\nu_p + 2) + 2n)^2}$ lo podemos acotar, teniendo así:

$$\frac{n\nu_p}{(3(\nu_p + 2) + 2n)^2} < \frac{n}{(2n)^2} = \frac{1}{4n} < 1$$

entonces tenemos que $\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_0^2} < 0$ entonces, como la segunda derivada para W es negativa, entonces, la función es cóncava y la condición necesaria se puede utilizar como suficiente.

Si a partir de (27) calculamos su condición de optimalidad de primer orden tenemos:

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} = 2(1 + \nu_p)q_i^* \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_i + s \quad (108)$$

por lo que ahora vamos a calcular la segunda derivada para calcular la concavidad de la función:

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} = 2[(1 + \nu_p)\left(\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}\right)^2 - 1] \quad (109)$$

entonces, como queremos que sea menor a cero, vamos a probar que $(1 + \nu_p)\left(\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}\right)^2 < 1$, entonces:

$$(1 + \nu_p)\left(\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}\right)^2 = (1 + \nu_p)\left(\frac{-2 + 3(\nu_p + 2) + 2n}{(\nu_p + 2)(3(\nu_p + 2) + 2n)}\right)^2 = \frac{1 + \nu_p}{(\nu_p + 2)^2}\left(\frac{n + 2 + \nu_p}{n + 3 + \nu_p}\right)^2 \quad (110)$$

de aquí nosotros podemos notar que el denominador es más grande que el numerador, por lo que tenemos que $(1 + \nu_p)\left(\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}\right)^2 < 1$, por lo tanto $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} < 0$ entonces, como la segunda derivada es negativa, la función π_i es cóncava y la condición necesaria se puede utilizar como suficiente.

Por lo que a partir de (108) vamos a despejar con respecto a x_i , teniendo:

$$2(1 + \nu_p)\left(\frac{x_i - b + p^*}{\nu_p + 2}\right)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_i + s = 0 \quad (111)$$

factorizando x_i obtenemos:

$$x_i\left[2\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}\left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p}\right) - 2\right] + 2\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}\left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p}\right)(-b + p^*) + s = 0 \quad (112)$$

entonces:

$$x_i = \frac{2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1+\nu_p}{2+\nu_p} \right) (-b + p^*) + s}{-2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1+\nu_p}{2+\nu_p} \right) + 2} \quad (113)$$

(Observación: $\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}$ es constante e independiente de i) y de aquí nosotros podemos notar que la x_i es independiente del índice i , por lo que x_i es la misma para todas las firmas privadas, por ende $x_i \equiv x_p$, teniendo así:

$$x_p = \frac{2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1+\nu_p}{2+\nu_p} \right) (-b + p^*) + s}{-2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1+\nu_p}{2+\nu_p} \right) + 2} \quad (114)$$

ahora, sustituyendo $x_i \equiv x_p$ en (24) y (25):

$$p^* = \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - \sum_{i=0}^n x_p}{n + 3 + \nu_p}; \quad q_i^* = \frac{x_p - b + p^*}{\nu_p + 2} \quad (115)$$

así mismo notemos que q_i^* no depende de ningún índice i , entonces, podemos hacer $q_i^* \equiv q_p^*$, teniendo:

$$q_p^* = \frac{x_p - b + p^*}{\nu_p + 2} \quad (116)$$

de las condiciones de optimalidad (26) y (27) tenemos:

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} = (1 + \nu_p)(2q_i^*) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_i + s = 0 \quad (117)$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_0} = q_0^* - 2x_0 + \nu_p q_i^* \frac{\partial \sum_{i=1}^n q_i^*}{\partial x_0} = 0 \quad (118)$$

sustituyendo $x_i \equiv x_p$ y $q_i \equiv q_p$ en las ecuaciones anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_0} = q_0^* - 2x_0 + n\nu_p q_p^* \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} = 0 \quad (119)$$

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} = (1 + \nu_p)(2q_p^*) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_p + s = 0 \quad (120)$$

Vamos a tomar la ecuación (120). Pero en primer lugar vamos a empezar simplificando q_p^* y q_0^* , sin embargo necesitamos simplificar (25), y como ya habíamos dicho que $x_i \equiv$

x_p y $q_i^* \equiv q_p^*$ tenemos que:

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{2(\nu_p + 2)(T + D) + (b - x_0)(\nu_p + 2) + 2 \sum_{i=1}^n (b - x_i)}{3(\nu_p + 2) + 2n} \\ &= \frac{2(\nu_p + 2)(T + D) + (b - x_0)(\nu_p + 2) + 2n(b - x_p)}{3(\nu_p + 2) + 2n} \end{aligned} \quad (121)$$

por lo que sustituyéndolo en (23) obtenemos:

$$\begin{aligned} q_0^* &= \frac{2(\nu_p + 2)(T + D) + (b - x_0)(\nu_p + 2) + 2n(b - x_p) + (-b + x_0)(3(\nu_p + 2) + 2n)}{2(3(\nu_p + 2) + 2n)} \\ &= \frac{(\nu_p + 2)(T + D) + n(b - x_p) + (-b + x_0)(\nu_p + 2) + n(-b + x_0)}{3(\nu_p + 2) + 2n} \\ &= \frac{(\nu_p + 2)(T + D) - nx_p + (-b + x_0)(\nu_p + 2) + nx_0}{3(\nu_p + 2) + 2n} \end{aligned} \quad (122)$$

y sustituyendo el precio p^* en (24):

$$\begin{aligned} q_p^* &= \frac{\frac{2(\nu_p + 2)(T + D) + b(\nu_p + 2) + 2nb}{3(\nu_p + 2) + 2n} - \frac{x_0(\nu_p + 2)}{3(\nu_p + 2) + 2n} - \frac{2nx_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} - b + x_p}{\nu_p + 2} \\ &= \frac{2(\nu_p + 2)(T + D) + b(\nu_p + 2) + 2nb - 3b(\nu_p + 2) - 2nb}{(\nu_p + 2)[3(\nu_p + 2) + 2n]} \\ &\quad - \frac{x_0}{3(\nu_p + 2)} + x_p \left[\frac{-2n + 3(\nu_p + 2) + 2n}{(\nu_p + 2)[3(\nu_p + 2) + 2n]} \right] \\ &= \frac{2(T + D) - 2b}{3(\nu_p + 2) + 2n} - \frac{x_0}{3(\nu_p + 2) + 2n} + \frac{3x_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} \end{aligned} \quad (123)$$

por lo que sustituyendo esto en (120):

$$\begin{aligned} (1 + \nu_p) \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \frac{4(T + D) - 4b}{3(\nu_p + 2) + 2n} + x_0 \left[\frac{-2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p}}{3(\nu_p + 2) + 2n} \right] \\ + x_p \left[\frac{6(1 + \nu_p) \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} - 6(\nu_p + 2) - 4n}{3(\nu_p + 2) + 2n} \right] + s = 0 \end{aligned} \quad (124)$$

factorizando x_0 y x_p y moviendo el resto de términos del otro lado de la igualdad:

$$\begin{aligned} x_0 [-2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p}] + x_p [6(1 + \nu_p) \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} - 2(3(\nu_p + 2) + 2n)] \\ = -(1 + \nu_p) \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} [4(T + D) - 4b] - s[3(\nu_p + 2) + 2n] \end{aligned} \quad (125)$$

Ahora, para la siguiente ecuación, vamos a tomar (23) y (24) para sustituirla en (119):

$$\frac{p^* - b + x_0}{2} + n\nu_p \left[\frac{2(T + D) - 2b - x_0 + 3x_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} \right] \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} - 2x_0 = 0 \quad (126)$$

por lo que sustituyendo (25) y multiplicando el denominador:

$$\begin{aligned} & \frac{(\nu_p + 2)(T + D) - b(\nu_p + 2)}{3(\nu_p + 2) + 2n} + n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \left(\frac{2(T + D) - 2b}{3(\nu_p + 2) + 2n} \right) + x_0 \frac{\nu_p + 2 + n}{3(\nu_p + 2) + 2n} \\ & - n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \frac{x_0}{3(\nu_p + 2) + 2n} - 2x_0 \frac{3(\nu_p + 2) + 2n}{3(\nu_p + 2) + 2n} - \frac{nx_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} \\ & + 3n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \frac{x_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} = 0 \end{aligned} \quad (127)$$

factorizando x_i, x_p y moviendo el resto de términos del otro lado del igual tenemos:

$$\begin{aligned} & x_0 \left[-5(\nu_p + 2) + n(-3 - \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) \right] + x_p \left[n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) \right] \\ & = (T + D - b) \left[-(\nu_p + 2) - 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right] \end{aligned} \quad (128)$$

por lo que multiplicando por -1 a las ecuaciones (125), (128) y anotando las ecuaciones en forma matricial $AX = B$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 5(\nu_p + 2) - n(-3 - \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) & -n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) \\ 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} & -6(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + 2(3(\nu_p + 2) + 2n) \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_p \end{pmatrix} \\ B &= (T + D - b) \begin{pmatrix} (\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \\ 4(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3(\nu_p + 2) + 2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que resolviendo este sistema de ecuaciones $X = A^{-1}B$ donde $A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det(A)}$, donde A^* es la matriz adjunta.

Calculando el determinante de la matriz A es:

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \\ &= [3(\nu_p + 2) + 2n] \left\{ -10 \left[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2) \right] + 2n \left(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right) \right\} \end{aligned} \quad (129)$$

el cual es positivo, dado que $\nu_p \in (0, 1)$ y las derivadas de q_i son menores que $\frac{1}{2}$ en valor absoluto, por lo cual nuestro sistema de ecuaciones debe de tener única solución. Por lo que los niveles óptimos de R&D son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_0^* \\ x_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T + D - b) \left[\frac{A_{22}}{\det(A)} \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right] - \frac{A_{12}}{\det(A)} \left[4(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right] \right] \\ + s \left[\frac{-A_{12}}{\det(A)} (3(\nu_p + 2) + 2n) \right] \\ (T + D - b) \left[\frac{-A_{21}}{\det(A)} \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right] + \frac{A_{11}}{\det(A)} \left[4(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right] \right] \\ + s \left[\frac{A_{11}}{\det(A)} (3(\nu_p + 2) + 2n) \right] \end{pmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{pmatrix} x_0^* \\ x_p^* \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} (T + D - b) \left[- (1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + (\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right] + \frac{s}{2} \left[n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) \right] \\ (T + D - b) \left[3(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right] + \frac{s}{2} \left[5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) \right] \end{pmatrix}$$

donde:

$$m = \frac{1}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \quad (130)$$

ahora vamos a ver el signo de x_0^* y x_p^* obtenidas.

En primer lugar (130) es positivo, ya que $(\nu_p + 2)$ es más grande que $(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}$ donde $\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} < \frac{1}{2}$ y con el -5 que está multiplicando ya se hace positivo. Por otro lado, $\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}$ es negativo pero $\frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} > \frac{-1}{2}$, por lo que quien gana es el 3, llevándose el signo positivo, por lo cual (130) es positivo.

Entonces, ahora vamos a analizar el signo de x_0^* .

De la Suposición 1 tenemos que:

$$-b + T + D > \left(\frac{n+1}{2} \right) b \quad (131)$$

A partir de la condición de optimalidad (119) tenemos que:

$$2x_0 = q_0^* + n\nu_p q_p^* \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \quad (132)$$

por lo que sustituyendo los valores de q_0^* y q_p^* que obtuvimos anteriormente tenemos:

$$2x_0 = \frac{\left[(\nu_p + n + 2) - n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right]x_0 + n\left(3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} - 1\right)x_p + \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right](-b + T + D)}{3(\nu_p + 2) + 2n} \quad (133)$$

Ahora, veamos que:

$$2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} = \frac{-2n\nu_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} > -1 \quad (134)$$

por lo que:

$$(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} > (\nu_p + 2) - 1 > 0 \quad (135)$$

además, como $\frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} < 0$ entonces:

$$(\nu_p + n + 2) - n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} > 0 \quad (136)$$

además:

$$3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} - 1 < 0 \quad (137)$$

Entonces, dado que $x_0, x_p \in [0, b]$ y aplicando (131):

$$\begin{aligned} 2x_0 &> \frac{n\left(3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} - 1\right)b + \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right](-b + T + D)}{3(\nu_p + 2) + 2n} \\ &> \frac{n\left(3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} - 1\right)b + \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right]\left(\frac{n+1}{2}\right)b}{3(\nu_p + 2) + 2n} \\ &= \frac{n\nu_p \left[\frac{1}{2} + (n+3) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right] + \frac{1}{2} \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right]b}{3(\nu_p + 2) + 2n} \end{aligned} \quad (138)$$

donde:

$$(n+3) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} = \frac{-(n+3)}{3(\nu_p + 2) + 2n} > \frac{-(n+3)}{2(n+3)} = \frac{-1}{2} \quad (139)$$

por lo que:

$$\frac{1}{2} + (n+3) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (140)$$

por lo tanto:

$$2x_0 > \frac{n\nu_p \left[\frac{1}{2} + (n+3) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right] + \frac{1}{2} \left[(\nu_p + 2) + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}\right]b}{3(\nu_p + 2) + 2n} b > 0 \quad (141)$$

es decir $x_0 > 0$.

Para los términos de x_p^* tenemos:

■

$$(T + D - b) \left[3(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right] \quad (142)$$

entonces, como vimos anteriormente $\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} > 0$, por lo cual este término es positivo.

■

$$\frac{s}{2} \left[5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right] \quad (143)$$

sabemos que $\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} > \frac{-1}{2}$, sin embargo, quien gana es el 3, llevándose el signo positivo y de igual forma $5(\nu_p + 2)$ es positivo, por lo cual ésta expresión es positiva, por lo tanto $x_p > 0$.

5.5 DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 2

Dado que en el teorema anterior encontramos el equilibrio de los niveles de investigación y desarrollo (R&D), vamos a sustituir estos valores en (23), (24) y (25), teniendo así:

$$p^{**} = \frac{T + D + \frac{b-x_0^*}{2} + \frac{n(b-x_p^*)}{\nu_p+2}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{\nu_p+2} + 1} \quad (144)$$

$$q_0^{**} = \frac{p^{**} - b + x_0^*}{2} \quad (145)$$

$$q_p^{**} = \frac{p^{**} - b + x_p^*}{\nu_p + 2} \quad (146)$$

y las funciones de beneficio óptimas para este nivel, están dadas por:

$$W^{**} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{**}} p(t) dt - (b - x_0^*)q_0^{**} - q_0^{2**} - x_0^{2*} + n[-(b - x_p^*)q_p^{**} - q_p^{2**} - x_p^{2*}] \quad (147)$$

$$\pi_i^{**}(q_p^{**}, x_p^*) = q_p^{2**}(1 + \nu_p) - x_p^{2*} + s x_p^* \quad (148)$$

5.6 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4

A partir de (33) tenemos que calcular la condición de optimalidad de primer orden con respecto a s , sin embargo puede ser encontrada usando:

$$\frac{dW^{**}(x_0^*(s), x_p^*(s))}{ds} = \frac{\partial W^*}{\partial x_0} \frac{\partial x_0^*}{\partial s} + \frac{\partial W^*}{\partial x_p} \frac{\partial x_p^*}{\partial s} \quad (149)$$

sin embargo, anteriormente habíamos obtenido que $\frac{\partial W^*}{\partial x_0} = 0$, teniendo así:

$$\frac{dW^{**}(x_0^*(s), x_p^*(s))}{ds} = \frac{\partial W^*}{\partial x_p} \frac{\partial x_p^*}{\partial s} \quad (150)$$

Entonces, si a partir de (33) simplificamos, ya que habíamos dicho que $q_i^* \equiv q_p^*$ y $x_i \equiv x_p$:

$$W^* = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - (b - x_0)q_0^* - q_0^{*2} - x_0^2 + n[-(b - x_p)q_p^* - q_p^{*2} - x_p^2] \quad (151)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial x_p} &= p^* \left(\frac{\partial q_0^*}{\partial x_p} + n \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \right) - 2q_0^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_p} - b \frac{\partial q_0^*}{\partial x_p} + x_0^* \frac{\partial q_0^*}{\partial x_p} - 2nq_p^* \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + nq_p^* - nb \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \\ &\quad + nx_p^* \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} - 2nx_p \\ &= [p^* - 2q_0^* - (b - x_0^*)] \frac{\partial q_0^*}{\partial x_p} + n\{[p^* - 2q_p^* - (b - x_p^*)] \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + q_p^* - 2x_p\} \end{aligned} \quad (152)$$

por lo que reescribiendo las ecuaciones (89) y (90) tenemos:

$$p^* - 2q_0^* - (b - x_0) = 0 \quad (153)$$

$$\nu_p q_p^* = p^* - b + x_i - 2q_p^* \quad (154)$$

sustituyéndolas en (152) obtenemos:

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_p} = n \left(\nu_p q_p^* \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + q_p^* - 2x_p \right) \quad (155)$$

donde:

■

$$\frac{\partial x_0^*}{\partial s} = \frac{n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{-10[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + 2n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} < 0 \quad (156)$$

■

$$\frac{\partial x_p^*}{\partial s} = \frac{5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{-10[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + 2n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} > 0 \quad (157)$$

■

$$\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} = \frac{3}{3(\nu_p + 2) + 2n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (158)$$

y los signos de $\frac{dx_0^*}{ds}$ y $\frac{dx_p^*}{ds}$ son consecuencia de las desigualdades que hemos mostrado antes en (104) , (130) y (137), además:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx_0^*}{ds} \right| &= \frac{n - 3n\nu_p}{-10[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + 2n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \\ &< \frac{n + \frac{3}{2}}{-10[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + 2n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \\ &< \frac{5\nu_p + 3n + 10 + n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}}{-10[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + 2n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} = \frac{dx_p^*}{ds} \end{aligned} \quad (159)$$

es decir:

$$\left| \frac{dx_0^*}{ds} \right| < \frac{dx_p^*}{ds} \quad (160)$$

Ahora, calculando la segunda derivada, tomando en cuenta que las derivadas $\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p}$ y $\frac{dx_p^*}{ds}$ son constantes:

$$\frac{d^2 W^{**}}{ds} = n \left[\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) q_p^{**} - 2x_p^* \right] \frac{dx_p^*}{ds} \quad (161)$$

$$\frac{d^2 W^{**}}{ds^2} = n \left[\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) \left(\frac{\partial q_p^*}{\partial x_0} \frac{dx_0^*}{ds} + \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \frac{dx_p^*}{ds} \right) - 2 \frac{dx_p^*}{ds} \right] \frac{dx_p^*}{ds} \quad (162)$$

donde recordemos que $\frac{\partial q_p^*}{\partial x_0}, \frac{dx_0^*}{ds} < 0$, $\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p}, \frac{dx_p^*}{ds} > 0$, y además como hemos mencionado $\frac{\partial q_p^*}{\partial x_0}$ y $\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p}$ son menores a $\frac{1}{2}$ en valor absoluto, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W^{**}}{ds^2} &= n \left[\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) \left(\left| \frac{\partial q_p^*}{\partial x_0} \right| \left| \frac{dx_0^*}{ds} \right| + \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \frac{dx_p^*}{ds} \right) - 2 \frac{dx_p^*}{ds} \right] \frac{dx_p^*}{ds} \\ &< n \left[\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) \left(\left| \frac{\partial q_p^*}{\partial x_0} \right| \frac{dx_p^*}{ds} + \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \frac{dx_p^*}{ds} \right) - 2 \frac{dx_p^*}{ds} \right] \frac{dx_p^*}{ds} \\ &= n \left[\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) \left(\left| \frac{\partial q_p^*}{\partial x_0} \right| + \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} \right) - 2 \right] \left(\frac{dx_p^*}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

$$< \frac{-1}{2} \left(\frac{dx_p^*}{ds} \right)^2 < 0 \quad (163)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2 W^{**}}{ds^2} < 0 \quad (164)$$

entonces como la segunda derivada es negativa, la función W^{**} es cóncava, por lo cual podemos utilizar nuestra condición necesaria como suficiente.

Por lo que a partir de (161) tenemos:

$$\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) q_p^{**} - 2x_p^* = 0 \quad (165)$$

por lo que sustituyendo $\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p}$, q_p^{**} y x_p^* en (165) tenemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3\nu_p}{3(\nu_p + 2) + 2n} + 1 \right) \left(\frac{2(T + D) - 2b + 3x_p^* - x_0^*}{3(\nu_p + 2) + 2n} \right) \\ & - 2 \left((T + D - b) \frac{3(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \right. \\ & \left. + s \frac{5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (166)$$

por lo que despejando con respecto a s :

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2(T + D - b) \left[(9(\nu_p + 2) + 6n) \left[-(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1) + 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right] \right]}{\left[(3(\nu_p + 2) + 2n) [-5(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_0} + 1) + 2n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}) + 10(\nu_p + 2)] \right]} \\ &= \frac{6(T + D - b) \left[\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) - 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right]}{2n \left(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0} \right) + 15 - 5\nu_p \left(\frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} - 2 \right)} \end{aligned} \quad (167)$$

ahora, del valor obtenido en (167) vamos a probar que s es positiva, entonces, sólo vamos a tomar:

$$\left(\nu_p \frac{\partial q_p^*}{\partial x_p} + 1 \right) - 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \quad (168)$$

ya que para los demás valores hemos mostrado que son positivos.

Entonces, calculando:

$$\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} = \frac{-2 + 3(\nu_p + 2) + 2n}{(\nu_p + 2)(3(\nu_p + 2) + 2n)} \quad (169)$$

por lo cual sustituyendo (158) y (169) en (168):

$$\begin{aligned} & \nu_p \left(\frac{3}{3(\nu_p + 2) + 2n} \right) + 1 - 2(1 + \nu_p) \left(\frac{-2 + 3(\nu_p + 2) + 2n}{(\nu_p + 2)(3(\nu_p + 2) + 2n)} \right) \\ &= \frac{2\nu_p(2 - n) + 4}{(\nu_p + 2)(3(\nu_p + 2) + 2n)} \end{aligned} \quad (170)$$

dado que el denominador es positivo, sólo vamos a tomar el numerador y sustituir el valor de (22) teniendo así:

$$2 \left(\frac{2\nu_p + 4}{2n + 3\nu_p - p + 4} \right) (2 - n) + 4 = \frac{4\nu_p(5 - n) + 32}{2n + 3\nu_p + 4} \quad (171)$$

de igual forma, como el denominador es positivo, sólo vamos a tomar el numerador y volver a sustituir el valor de nuevo de (22) teniendo:

$$4 \left(\frac{2\nu_p + 4}{2n + 3\nu_p + 4} \right) (5 - n) + 32 = \frac{8n(-\nu_p + 6) + 8(26 + 17\nu_p)}{2n + 3\nu_p + 4} \quad (172)$$

notando que $s > 0$.

5.7 DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3

Para obtener la función de beneficio óptima para cada firma, lo primero que vamos a hacer es sustituir el subsidio gubernamental óptimo en los niveles de R&D óptimos de las ecuaciones (28) y (29) teniendo así:

$$\begin{aligned} x_0^{**} = (T + D - b) & \frac{-(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + \nu_p + 2 + 2n\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \\ & + s^* \frac{n(-1 + 3\nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} > 0 \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} x_p^{**} = (T + D - b) & \frac{3(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}}{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})} \\ & + s^* \frac{5(\nu_p + 2) + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})}{2\{-5[(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (\nu_p + 2)] + n(3 + \nu_p \frac{\partial q_i^*}{\partial x_0})\}} > 0 \end{aligned} \quad (174)$$

por lo que el precio, las cantidades de producción, así como las funciones de beneficio de cada firma respectivamente están dadas por:

$$p^{***} = \frac{T + D + \frac{b-x_0^{**}}{2} + \frac{n(b-x_p^{**})}{\nu_p+2}}{\frac{1}{2} + \frac{n}{\nu_p+2} + 1} > b \quad (175)$$

$$q_0^{***} = \frac{p^{***} - b + x_0^{**}}{2} > 0 \quad (176)$$

$$q_p^{***} = \frac{p^{***} - b + x_p^{**}}{\nu_p + 2} > 0 \quad (177)$$

$$W^{***} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{***}} p(t) dt - (b - x_0^{**})q_0^{***} - q_0^{***2} - x_0^{**2} + n[-(b - x_p^{**})q_p^{***} - q_p^{***2} - x_p^{**2}] \quad (178)$$

$$\pi_i^{***}(q_p^{***}, x_p^{**}) = q_p^{***2}(1 + \nu_p) - x_p^{**2} + s^* x_p^{**} \quad (179)$$

5.8 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5

Tenemos que las firmas privadas maximizan su ganancia neta cuando escogen como estrategia a q_i donde $i \in I$, por lo cual, su función de beneficio esta dada por (66), en donde además vimos en (13) que es cóncava por lo cual aplicamos la condición de optimalidad de primer orden, por lo que obtuvimos (68). Ahora, sustituyendo (68) en la ley de oferta y demanda tenemos:

$$\sum_{i=0}^n \frac{p - b + x_i}{\nu_i + 2} = T - p + D \quad (180)$$

despejando el precio:

$$\sum_{i=0}^n \frac{p}{\nu_i + 2} + p = T + D - \sum_{i=0}^n \frac{x_i - b}{\nu_i + 2} \quad (181)$$

sacando de factor común al precio:

$$p \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + 2} + 1 \right) = T + D - \sum_{i=0}^n \frac{x_i - b}{\nu_i + 2} \quad (182)$$

entonces, al despejar el precio p obtenemos:

$$p = \frac{T + D - \sum_{i=0}^n \frac{x_i - b}{\nu_i + 2}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + 2} + 1} \quad (183)$$

ahora para terminar, vamos a tomar el precio p y derivarla con respecto a la demanda activa D :

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{1 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (184)$$

5.9 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6

Al principio consideramos que las empresas privadas eran idénticas, por lo cual, vamos a probar que los coeficientes de influencia son los mismos para todas las firmas privadas. Entonces, para justificar esto a (46) vamos a reescribirla:

$$\nu_i = \frac{1}{1 + \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{\nu_j + 2} + \frac{1}{\nu_i + 2} - \frac{1}{\nu_i + 2}} = \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^n \frac{1}{\nu_j + 2} - \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (185)$$

ahora vamos a hacer el siguiente cambio de variable $V = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\nu_j + 2}$, teniendo así:

$$\nu_i = \frac{1}{1 + V - \frac{1}{\nu_i + 2}} \quad (186)$$

despejando para ν_i :

$$\nu_i = \frac{\nu_i + 2}{\nu_i + 1 + V\nu_i + 2V} \quad (187)$$

entonces:

$$\nu_i(\nu_i + 1 + V\nu_i + 2V) = \nu_i + 2 \quad (188)$$

entonces:

$$\nu_i^2(1 + V) + 2V\nu_i - 2 = 0 \quad (189)$$

de aquí notamos que tenemos una ecuación de segundo grado, por lo cual vamos a resolverla mediante la fórmula general.

$$a = 1 + V \quad b = 2V \quad c = -2 \quad (190)$$

entonces:

$$\nu_i = \frac{-2V \pm \sqrt{(2V)^2 - 4(1+V)(-2)}}{2(1+V)} = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 + 2V + 2}}{1+V} \quad (191)$$

a pesar de que aquí tenemos dos soluciones, sólo tomamos la positiva, ya que $\nu_i > 0$, ya que de otra forma estaríamos sumando sólo términos negativos.

$$\nu_i = \frac{-V + \sqrt{V^2 + 2V + 2}}{1+V} \quad (192)$$

Además, observamos que la V es independiente del subíndice i , por lo tanto la solución del coeficiente de influencia ν_i es la misma para todos los jugadores, por ende vamos a hacer $\nu_i \equiv \nu_p$. Ahora, veamos que:

$$\nu_p = \frac{1}{1 + \sum_{j=0; j \neq i}^n \frac{1}{\nu_p + 2}} \in (0, 1) \quad (193)$$

ya que el denominador es mayor a 1, por lo que simplificando esta expresión tenemos la única solución:

$$\nu_p = \frac{\nu_p + 2}{\nu_p + 2 + n} \quad (194)$$

entonces, como ya probamos que los coeficientes de influencia son los mismos para todas las firmas $\nu_p \equiv \nu_i$, entonces, lo que vamos a hacer es sustituir esto en (43) y (44), teniendo:

$$p^* = \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - \sum_{i=0}^n x_i}{n + 3 + \nu_p} \quad (195)$$

$$q_i^* = \frac{x_i - b + p^*}{\nu_p + 2} \quad (196)$$

5.10 DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 4

Para obtener la función de beneficio óptima para las firmas privadas y la firma pública, lo único que vamos a hacer es sustituir q_i^* y p^* las cuales acabamos de obtener del Teorema 6.

$$\begin{aligned} \pi_i^*(q_i^*, x_i) &= p^* q_i^* (b - x_i) q_i^* - q_i^{2*} - x_i^2 + s x_i \\ &= q_i^{2*} (1 + \nu_p) - x_i^2 + s x_i \end{aligned} \quad (197)$$

$$\begin{aligned}
W^* &= \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - p^* Q^* + \sum_{i=0}^n [p^* q_i^* - (b - x_i) q_i^* - q_i^{2*} - x_i^2] \\
&= \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^*} p(t) dt - \sum_{i=0}^n [(b - x_i) q_i^* + q_i^2 + x_i^2]
\end{aligned} \tag{198}$$

5.11 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7

A partir de la ecuación (50) calculamos la condición de optimalidad de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} = 2(1 + \nu_p) q_i^* \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_i + s \tag{199}$$

y como nosotros ya demostramos que esta función π_i^* es cóncava (véase (109)), podemos utilizar la condición necesaria como suficiente.

Por lo que aplicando la condición de optimalidad de primer orden a π_i^* y sustituyendo (49) tenemos:

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} = 2(1 + \nu_p) \left(\frac{p^* - b + x_i}{\nu_p + 2} \right) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_i + s = 0 \tag{200}$$

factorizando a x_i :

$$x_i \left[2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p} \right) - 2 \right] + 2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p} \right) (-b + p^*) + s = 0 \tag{201}$$

despejando para x_i y multiplicando por -1 al numerador y denominador obtenemos:

$$x_i = \frac{2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p} \right) (-b + p^*) + s}{-2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p} \right) + 2} \tag{202}$$

a partir de esta expresión que obtuvimos notamos que la x_i es independiente del índice i , por lo que estas son la misma para todos los productores, por lo que podemos hacer $x_i \equiv x_p$, por lo que:

$$x_p = \frac{2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p} \right) (-b + p^*) + s}{-2 \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \left(\frac{1 + \nu_p}{2 + \nu_p} \right) + 2} \tag{203}$$

por lo que sustituyendo $x_i \equiv x_p$ en (48) y (49):

$$p^* = \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - \sum_{i=0}^n x_p}{n + 3 + \nu_p} = \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - (n + 1)x_p}{n + 3 + \nu_p} \quad (204)$$

$$q_i^* = \frac{p^* - b + x_p}{\nu_p + 2} \quad (205)$$

sustituyendo p^* en q_i^* y simplificando tenemos:

$$q_i^* = \frac{x_p - b + T + D}{n + 3 + \nu_p} \quad (206)$$

sustituyendo la x_p en la función de beneficio π_i^* :

$$\pi_i^*(q_i^*, x_p) = q_i^{*2}(1 + \nu_p) - x_p^2 + sx_p \quad (207)$$

calculando la condición de optimalidad de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} = 2(1 + \nu_p)q_i^* \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_p + s = 0 \quad (208)$$

sustituyendo (206):

$$\frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_p} = 2(1 + \nu_p) \left(\frac{x_p - b + T + D}{n + 3 + \nu_p} \right) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2x_p + s = 0 \quad (209)$$

factorizando a x_p y pasando los demás términos del otro lado del igual:

$$x_p \left[\frac{2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}}{n + 3 + \nu_p} - 2 \right] = \frac{-2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}}{n + 3 + \nu_p} (-b + T + D) - s \quad (210)$$

despejando x_p y simplificando:

$$\begin{aligned} x_p^* &= \frac{\frac{-2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} (-b + T + D) - s(n + 3 + \nu_p)}{n + 3 + \nu_p}}{\frac{2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - 2(n + 3 + \nu_p)}{n + 3 + \nu_p}} = \frac{-2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} (-b + T + D) - s(n + 3 + \nu_p)}{2((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p))} \\ &= \frac{2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} (-b + T + D) + s(n + 3 + \nu_p)}{-2((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + (n + 3 + \nu_p))} \end{aligned} \quad (211)$$

el denominador como el numerador son positivos ya que $\nu_p \in (0, 1)$ y $\left| \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right| < \frac{1}{2}$, por lo tanto $x_p^* > 0$.

5.12 DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 5

Dado que tenemos los niveles óptimos de investigación y desarrollo de R&D vamos a sustituirla en (48), (49), (50) y (51) teniendo así:

$$p^{**} = \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - (n + 1)x_p^*}{n + 3 + \nu_p} \quad (212)$$

por lo que sustituyendo el valor obtenido de x_p^* y simplificando ésta expresión:

$$p^{**} = \frac{2(1 + \nu_p)(-b + T + D)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + s(n + 1) - 2(-b + T + D)(\nu_p + 2)}{2\left((1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right)} + b \quad (213)$$

Para la producción de las firmas:

$$q_p^{**} = \frac{x_p^* - b + p^{**}}{\nu_p + 2} \quad (214)$$

sustituyendo el valor de la x_p^* y p^{**} obtenidas, tenemos:

$$q_p^{**} = \frac{-s - 2(-b + T + D)}{2\left((1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right)} \quad (215)$$

Por lo que las funciones de beneficio de las firmas privadas y la firma pública son:

$$\pi_i^{**}(q_i^*, x_p^*) = q_i^{2**}(1 + \nu_p) - x_p^{2*} + s x_p^* \quad (216)$$

$$W^{**} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{**}} p(t) dt - p^{**}Q^{**} + (n + 1)\left[q_p^{2**}(1 + \nu_p) - x_p^{2*}\right] \quad (217)$$

5.13 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8

A partir de (56) vamos a calcular la condición de optimalidad de primer orden con respecto a s , teniendo así:

$$\frac{dW^{**}}{ds} = -Q^{**}\frac{dp^{**}}{ds} + 2(n + 1)(1 + \nu_p)q_p^{**}\frac{dq_p^{**}}{ds} - 2(n + 1)x_p^*\frac{dx_p^*}{ds} \quad (218)$$

donde:

$$\blacksquare \quad \frac{dp^{**}}{ds} = \frac{n+1}{2\left((1+\nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n+3)\right)} \quad (219)$$

$$\blacksquare \quad \frac{dq_p^{**}}{ds} = \frac{-1}{2\left((1+\nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n+3)\right)} \quad (220)$$

$$\blacksquare \quad \frac{dx_p^*}{ds} = \frac{-(n+3+\nu_p)}{2\left((1+\nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n+3)\right)} \quad (221)$$

ahora, vamos a probar la concavidad:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W^{**}}{ds^2} = & -Q^{**} \frac{d^2 p^{**}}{ds^2} - \frac{dp^{**}}{ds} \frac{dQ^{**}}{ds} + 2(n+1)(1+\nu_p) \left(\frac{dq_p^{**}}{ds}\right)^2 + 2(n+1)(1+\nu_p) q_p^{**} \frac{d^2 q_p^{**}}{ds^2} \\ & - 2(n+1) \left(\frac{dx_p^*}{ds}\right)^2 - 2(n+1) x_p^* \frac{d^2 x_p^*}{ds^2} \end{aligned} \quad (222)$$

si recordamos, nosotros tenemos que:

$$Q^{**} = T - p^{**} \quad (223)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dQ^{**}}{ds} = -\frac{dp^{**}}{ds} \quad (224)$$

y además:

$$Q^{**} = (n+1)q_p^{**} \quad (225)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dQ^{**}}{ds} = (n+1) \frac{dq_p^{**}}{ds} \quad (226)$$

también podemos notar que tenemos en esta expresión segundas derivadas tanto para p^{**} , q_p^{**} y x_p^* , sin embargo, éstas expresiones son lineales, por lo que al calcular su segunda derivada obtenemos un cero. Entonces, tomando ésto en cuenta (222) quedaría como:

$$\frac{d^2 W^{**}}{ds^2} = \left((n+1) \frac{dq_p^{**}}{ds}\right)^2 + 2(n+1)(1+\nu_p) \left(\frac{dq_p^{**}}{ds}\right)^2 - 2(n+1) \left(\frac{dx_p^*}{ds}\right)^2 \quad (227)$$

entonces, sean:

$$A = (n+1) \left(\frac{dq_p^{**}}{ds}\right) \quad B = \sqrt{2(n+1)(1+\nu_p)} \left(\frac{dq_p^{**}}{ds}\right) \quad C = \sqrt{2(n+1)} \left(\frac{dx_p^*}{ds}\right)^2 \quad (228)$$

sabemos que si $A, B > 0$, entonces $A^2 + B^2 < (A + B)^2$ y si $|A + B| < |C|$ entonces $(A + B)^2 < C^2$.

Entonces, si mostramos que $|A| + |B| < |C|$ esto implicaría que $|A + B| < |C|$ y así tendríamos $A^2 + B^2 < (A + B)^2 < C^2$, es decir:

$$\frac{d^2 W^{**}}{ds^2} = A^2 + B^2 - C^2 < 0 \quad (229)$$

primero veamos que:

$$\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2} + \sqrt{1 + \nu_p} < \frac{2(n+1)}{2} + 1 + \nu_p = n + 2 + \nu_p < n + 3 + \nu_p \quad (230)$$

es decir:

$$\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2} + \sqrt{1 + \nu_p} < n + 3 + \nu_p \quad (231)$$

dividiendo la desigualdad anterior por $\left| 2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right) \right|$ obtenemos:

$$\frac{\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2} + \sqrt{1 + \nu_p}}{\left| 2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right) \right|} < \frac{n + 3 + \nu_p}{\left| 2 \left((1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p) \right) \right|} \quad (232)$$

es decir:

$$\left| \frac{dq_p^{**}}{ds} \right| \left(\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2} + \sqrt{1 + \nu_p} \right) < \left| \frac{dx_p^*}{ds} \right| \quad (233)$$

de la desigualdad anterior obtenemos:

$$\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2} \left| \frac{dq_p^{**}}{ds} \right| + \sqrt{1 + \nu_p} \left| \frac{dq_p^{**}}{ds} \right| < \left| \frac{dx_p^*}{ds} \right| \quad (234)$$

por lo que multiplicando por $\sqrt{2(n+1)}$ tenemos:

$$(n+1) \left| \frac{dq_p^{**}}{ds} \right| + \sqrt{2(n+1)(1 + \nu_p)} \left| \frac{dq_p^{**}}{ds} \right| < \sqrt{2(n+1)} \left| \frac{dx_p^*}{ds} \right| \quad (235)$$

lo que demuestra que $|A| + |B| < |C|$, por lo que se cumple que W^{**} es cóncava.

Por lo que calculando la condición de optimalidad de primer orden a (218) tenemos:

$$\frac{dW^{**}}{ds} = (n+1)^2 q_p^{**} \frac{dq_p^{**}}{ds} + 2(n+1)(1 + \nu_p) q_p^{**} \frac{dq_p^{**}}{ds} - 2(n+1) x_p^* \frac{dx_p^*}{ds} = 0 \quad (236)$$

dividiendo todo por $(n + 1)$:

$$(n + 1)q_p^{**}\frac{dq_p^{**}}{ds} + 2(1 + \nu_p)q_p^{**}\frac{dq_p^{**}}{ds} - 2x_p^*\frac{dx_p^*}{ds} = 0 \quad (237)$$

simplificando:

$$q_p^{**}\frac{dq_p^{**}}{ds}(n + 3 + 2\nu_p) - 2x_p^*\frac{dx_p^*}{ds} = 0 \quad (238)$$

por lo que sustituyendo (54) y (52) tenemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-s - 2(-b + T + D)}{2\left[(1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right]} \right) \frac{dq_p^*}{ds}(n + 3 + 2\nu_p) \\ & - 2 \left(\frac{-2(1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}(-b + T + D) - s(n + 3 + \nu_p)}{2\left[(1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right]} \right) \frac{dx_p^*}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (239)$$

simplificando:

$$\begin{aligned} & -s \frac{dq_p^*}{ds}(n + 3 + 2\nu_p) - 2(-b + T + D) \frac{dq_p^*}{ds}(n + 3 + 2\nu_p) \\ & + 4(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}(-b + T + D) \frac{dx_p^*}{ds} + 2s(n + 3 + \nu_p) \frac{dx_p^*}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (240)$$

por lo que despejando con respecto a s :

$$s^* = \frac{2(-b + T + D) \left(\frac{dq_p^*}{ds}(n + 3 + 2\nu_p) - 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \frac{dx_p^*}{ds} \right)}{-\frac{dq_p^*}{ds}(n + 3 + 2\nu_p) + 2(n + 3 + \nu_p) \frac{dx_p^*}{ds}} \quad (241)$$

Ahora, vamos a comprobar que el valor de s^* es positiva.

Entonces:

$$\frac{dq_p^*}{ds} = \frac{dq_p}{dx_p} \frac{dx_p}{ds} \quad (242)$$

por lo que sustituyendo esto en (57):

$$s^* = \frac{2(-b + T + D) \left(\frac{dq_p}{dx_p}(n + 3 + 2\nu_p) - 2(1 + \nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right)}{-\frac{dq_p}{dx_p}(n + 3 + 2\nu_p) + 2(n + 3 + \nu_p)} \quad (243)$$

entonces, nosotros habíamos obtenido que:

$$q_p^* = \frac{x_p - b}{\nu_p + 2} + \frac{(T + D)(\nu_p + 2) + (n + 1)b - (n + 1)b}{(\nu_p + 2)(n + 3 + \nu_p)} \quad (244)$$

por lo que calculando $\frac{dq_p}{dx_p}$ tenemos:

$$\frac{dq_p}{dx_p} = \frac{1}{n+3+\nu_p} > 0 \quad (245)$$

sustituyendo esto en el numerador de s^* :

$$\begin{aligned} & 2(-b+T+D) \left(\frac{n+3+2\nu_p}{n+3+\nu_p} - 2(1+\nu_p) \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{2(-b+T+D)}{n+3+2\nu_p} \left(n+3+2\nu_p - \frac{2(1+\nu_p)(n+2+\nu_p)}{\nu_p+2} \right) \\ &= \frac{2(-b+T+D)}{n+3+2\nu_p} \left(\frac{-\nu_p n + \nu_p + 2}{\nu_p+2} \right) \\ &= \left(\frac{2(-b+T+D)}{n+3+2\nu_p} \right) \left(1 - \frac{\nu_p n}{\nu_p+2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (246)$$

ya que nosotros habíamos obtenido que:

$$\nu_p = \frac{\nu_p+2}{n+\nu_p+2} \quad (247)$$

por lo que reescribiendo esta ecuación tenemos:

$$\nu_p = \frac{2}{n+1+\nu_p} < \frac{2}{n} \quad (248)$$

es decir:

$$\nu_p n < 2 \quad (249)$$

por lo que:

$$\frac{\nu_p n}{\nu_p+2} < 1 \quad (250)$$

lo que demuestra (246).

Para el denominador de s^* :

$$\frac{-(n+3+2\nu_p)}{n+3+\nu_p} + 2(n+3+\nu_p) = \frac{5n+6+4\nu_p+n^2+\nu_p^2+2n\nu_p}{n+3+\nu_p} > 0 \quad (251)$$

por lo cual $s^* > 0$.

5.14 DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 6

Dado que ya obtuvimos el subsidio óptimo para las firmas, vamos a sustituirlo en (52), (53) y (54) teniendo así:

$$x_p^{**} = \frac{-2\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i}(1 + \nu_p)(-b + T + D) - s^*(n + 3 + \nu_p)}{2\left((1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right)} \quad (252)$$

$$p^{***} = \frac{2(1 + \nu_p)(-b + T + D)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} + s^*(n + 1) - 2(-b + T + D)(\nu_p + 2)}{2\left((1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right)} \quad (253)$$

$$q_p^{***} = \frac{-s^* - 2(-b + T + D)}{2\left((1 + \nu_p)\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i} - (n + 3 + \nu_p)\right)} \quad (254)$$

y la función de beneficio tanto para las firmas privadas y pública es la siguiente:

$$\pi_i^{***}(q_p^{***}, x_p^{**}) = q_p^{2***}(1 + \nu_p) - x_p^{2**} + s^* x_p^{**} \quad (255)$$

$$W^{***} = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i^{***}} p(t) dt - p^{***} Q^{***} + (n + 1) \left[q_p^{2***}(1 + \nu_p) - x_p^{2**} \right] \quad (256)$$

BIBLIOGRAFÍA

- Bowley, A. L. (1924), ‘The mathematical groundwork of economics’, *Social Forces* **3**(1), 185.
- Bulavsky, V. A. (1997), ‘Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly’, *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **33**, 112–134. In Russian.
- Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1994), ‘One-parametric method to study equilibrium’, *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **30**, 129–138. In Russian.
- Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1995), ‘Equilibrium in generalized Cournot and Stackelberg models’, *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **31**, 164–176. In Russian.
- Frisch, R. (1933), ‘Monopole-polypole: La notion de force dans l’économie’, *Nationaløkonomisk Tidsskrift* **71**, 241–259. In french, translated to english in Frisch (1951).
- Frisch, R. (1951), ‘Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy’, *International Economics Papers* **1**, 23–36.
- Gil-Moltó, M. J., Poyago-Theotoky, J., Neto, J. R. and Zikos, V. (2018), ‘Mixed oligopoly, privatization and r&d subsidization’, *Privatization and R&D Subsidization (April 2018)* .
- Gil-Moltó, M. J., Poyago-Theotoky, J. and Zikos, V. (2011), ‘R&d subsidies, spillovers, and privatization in mixed markets’, *Southern Economic Journal* **78**(1), 233–255.
- Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I. and Castillo-Pérez, F. J. (2011), ‘Mixed oligopoly with consistent conjectures’, *European Journal of Operational Research* **210**(3), 729–735.
- Kato, K. and Tomaru, Y. (2007), ‘Mixed oligopoly, privatization, subsidization, and the order of firms’ moves: Several types of objectives’, *Economics Letters* **96**(2), 287–292.

- Leahy, D. and Neary, J. P. (1997), ‘Public policy towards r&d in oligopolistic industries’, *The American Economic Review* 642–662.
- Lee, S.-H. and Tomaru, Y. (2017), ‘Output and r&d subsidies in a mixed oligopoly’, *Operations Research Letters* **45**(3), 238–241.
- Matsumura, T. and Tomaru, Y. (2013), ‘Mixed duopoly, privatization, and subsidization with excess burden of taxation’, *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d’économique* **46**(2), 526–554.